

# Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und über eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung.

Von

C. HEUMAN.

Mit 6 Textfiguren.

Mitgeteilt am 7. Juni 1905 durch A. LINDSTEDT und I. BENDIXSON.

---

Zweck der folgenden Zeilen ist einen einfachen Zusammenhang aufzuweisen, welcher zwischen der Theorie quadratischer Momente und gewissen graphischen Problemen besteht, namentlich der Konturbestimmung von Flächen zweiter Ordnung. Ich gewinne dabei auch einen neuen Beweis für den POHLKE'schen Fundamentalsatz der allgemeinen Axonometrie, vor allem aber eine ausnehmend einfache Konstruktion der mit diesem Satze verbundenen Aufgabe, was meines Erachtens für die graphische Verwertung desselben sehr wichtig ist. Auch die gebrachte Verallgemeinerung der schönen Form, in welcher GAUSS den Hauptsatz der orthogonalen Axonometrie dargestellt hat, scheint einiges Interesses wert zu sein.

Die Verwertung der abgeleiteten Konstruktionen für die graphische Ermittlung von Trägheitsgrößen ebener Flächen liegt ganz nahe; in dieser Hinsicht habe ich mich jedoch damit begnügt den Anknüpfungspunkt in einer Schlussbemerkung anzudeuten.

§ 1. Gegeben sei ein ebenes Punktsystem  $\Sigma$  von  $n$  diskreten Punkten  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Wir erteilen jedem Punkte die Masse 1 und betrachten die Trägheitsmomente des Systems hinsichtlich verschiedener, in der Systemebene gelegener Achsen. Es sei  $x$  eine solche Achse und  $J_x$  das entsprechende Trägheitsmoment. Gemäss der Definition des Systems ist dann  $J_x$  einfach  $= \Sigma y_\lambda^2$ , wo  $y_\lambda$  den senkrechten Abstand des Punktes  $P_\lambda$  von der Achse  $x$  bezeichnet. Es ist somit  $J_x$  gleich dem Quadrate einer Länge  $p$ , und wir können dieses Trägheitsmoment durch eine Gerade repräsentieren, die auf der einen oder anderen Seite parallel zur Achse  $x$  in dem Abstand  $p$  gelegt wird. Dreht sich die Achse um einen Fixpunkt  $O$ , so umhüllen die repräsentierenden Geraden bekanntlich eine Ellipse mit  $O$  als Mittelpunkt<sup>1</sup>; wir bezeichnen diese als die Ellipse  $(O; \Sigma)$  oder  $(O; P_1 P_2 \dots P_n)$ .

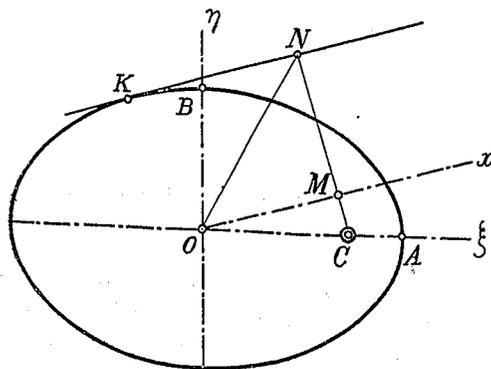


Fig. 1.

Es seien  $O_\xi, O_\eta$  (Fig. 1) die Hauptträgheitsachsen im Punkte  $O$ , und  $J_\xi = b^2, J_\eta = a^2$  die entsprechenden Hauptträgheitsmomente; die Ellipse  $(O; \Sigma)$  hat somit die Halbachsen  $OA = a$  (auf  $O_\xi$ ) und  $OB = b$  (auf  $O_\eta$ ).

Es sei  $a > b$ ; ein Brennpunkt  $C$  der Ellipse liegt dann auf  $O_\xi$ . Für eine beliebige Achse  $Ox$  durch  $O$  ist die repräsentierende Gerade  $KN$  eine zu  $Ox$  parallele Tangente der Ellipse  $(O; \Sigma)$ ; fällen wir von  $C$  das Lot  $CMN$  auf  $Ox$  und  $KN$ , so ist das Trägheitsmoment  $J_x = MN^2 = ON^2 - OM^2 = ON^2 - OC^2 + CM^2 = OB^2 + CM^2$ , weil  $ON$  bekanntlich  $= OA$  ist. Es ist somit

$J_x$  gleich der Summe von zwei Grössen, von welchen die eine  $OB^2 = b^2$  für alle Achsen durch  $O$  konstant ist, während die andere  $CM^2$  das Trägheitsmoment einer in  $C$  konzentrierten Einheitsmasse hinsichtlich derselben Achse  $Ox$  repräsentiert. Indem wir den Grundpunkt  $O$  als ein für allemal gegeben und fest annehmen, wollen wir die Grösse  $J_\xi = OB^2 = b^2$  die *Momentkonstante* und  $C$  den (quadratischen) *Resultantpunkt* des Systems  $\Sigma$  nennen; das gefundene Ergebnis lässt sich dann also zusammenfassen:

I. Die Trägheitsmomente des Systems  $\Sigma$  hinsichtlich Achsen durch den gegebenen Grundpunkt  $O$  lassen sich durch die Momentkonstante  $b^2$  und den Resultantpunkt  $C$  bequem repräsentieren. Unter Momentkonstante verstehen wir das kleinste Trägheitsmoment, das irgend einer der durch  $O$  gehenden Achsen zukommt oder das Quadrat der kleinen Halbachse  $b$  der Ellipse  $(O; \Sigma)$ ; der Resultantpunkt ist ein beliebig gewählter Brennpunkt  $C$  derselben Ellipse, in welchem eine Einheitsmasse konzentriert zu denken ist. Das Trägheitsmoment des Systems  $\Sigma$  hinsichtlich irgend einer Achse durch  $O$  ist gleich der Momentkonstante  $b^2$ , vermehrt durch das Trägheitsmoment des Resultantpunktes  $C$  hinsichtlich derselben Achse.

Wir wollen dieses Ergebnis noch auf eine andere Art ableiten und zugleich ergänzen. Es seien  $\xi_\lambda, \eta_\lambda$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P_\lambda$  des gegebenen Systems  $\Sigma$  bezüglich des Achsenkreuzes der Hauptträgheitsachsen  $O_\xi, O_\eta$ , sowie  $\xi_0 = \sqrt{a^2 - b^2}, \eta_0 = 0$  die Koordinaten von  $C$ . Es ist dann

$$\Sigma \xi_\lambda^2 = a^2, \quad \Sigma \eta_\lambda^2 = b^2, \quad \Sigma \xi_\lambda \eta_\lambda = 0,$$

also

$$\Sigma (\xi_\lambda + \eta_\lambda i)^2 = a^2 - b^2 = (\xi_0 + \eta_0 i)^2,$$

wo  $i = \sqrt{-1}$ . Führen wir die komplexe Koordinate  $\zeta = \xi + \eta i$  ein, so ist also

$$\Sigma \zeta_\lambda^2 = \zeta_0^2.$$

Geht das Achsenkreuz  $O \xi \eta$  durch Drehung um den Anfangspunkt in ein] neues Achsenkreuz  $Oxy$  über und ist  $\alpha$  der Drehungswinkel, so ist, wenn  $z = x + yi$ , allgemein  $\zeta = e^{i\alpha} \cdot z$ , also folgt aus der vorigen Gleichung auch

$$\Sigma z_\lambda^2 = z_0^2. \tag{1}$$

<sup>1</sup> Die Kurve ist in der Tat ähnlich der CULMANN'schen Trägheitsellipse, die ganz analog definiert wird, nur dass der Abstand  $p$  aus der Gleichung  $J_x = M \cdot p^2$  (statt  $J_x = p^2$ ) zu bestimmen ist, wo  $M$  die Gesamtmasse des Systems bezeichnet; siehe CULMANN, Graph. Statik, 1:0 Aufl. (1866) S. 176 oder Encycl. d. mathem. Wissensch. IV: 4 (JUNO, Geometrie der Massen) S. 323 u. f. — Da in unserm Systeme  $M = n$  ist, wird die Ellipse  $(O; \Sigma)$  eine Vergrösserung der Culmann'schen Ellipse im Verhältnis  $\sqrt{n} : 1$ .

Diese einfache Hauptformel ist somit für ein beliebiges, rechtwinkliges Achsenkreuz durch  $O$  gültig.

Die Gleichheit der reellen Teile in (1) gibt  $\Sigma (x_\lambda^2 - y_\lambda^2) = x_0^2 - y_0^2$ , oder

$$\Sigma x_\lambda^2 = k + x_0^2, \quad \Sigma y_\lambda^2 = k + y_0^2,$$

wo  $k$  eine noch zu bestimmende Grösse bezeichnet. Durch Addition kommt  $\Sigma (x_\lambda^2 + y_\lambda^2) = 2k + x_0^2 + y_0^2$ , woraus folgt, dass  $k$  von der speciellen Lage des Achsenkreuzes  $Oxy$  unabhängig ist; es ist aber für die Achse durch  $C$   $\Sigma \eta_\lambda^2 = b^2 = b^2 + \eta_0^2$ , mithin  $k = b^2$ . Es gilt also die Gleichung

$$\Sigma y_\lambda^2 = b^2 + y_0^2 \quad (2)$$

für jede beliebige Achse  $Ox$  durch  $O$ , womit Satz I wieder gefunden ist.

Setzen wir noch die imaginären Teile in (1) einander gleich, so kommt

$$\Sigma x_\lambda y_\lambda = x_0 y_0, \quad (3)$$

d. h.

II. Das Zentrifugalmoment des Systems  $\Sigma$  hinsichtlich irgend eines durch  $O$  gehenden Achsenkreuzes ist gleich dem Zentrifugalmomente des Resultantpunktes  $C$  hinsichtlich desselben Kreuzes.

§ 2. Betrachten wir jetzt ein gegebenes Punktsystem  $\Sigma = P_1, P_2, \dots, P_n$  als aus zwei Teilsystemen  $\Sigma_1 = P_1, \dots, P_m$  und  $\Sigma_2 = P_{m+1}, \dots, P_n$  zusammengesetzt, so fragt es sich, wie die Momentkonstante und der Resultantpunkt von  $\Sigma$  aus den entsprechenden Grössen von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zu ermitteln sind. Es seien für den Grundpunkt  $O$   $b^2, b_1^2$  und  $b_2^2$  die Momentkonstanten,  $C, C_1$  und  $C_2$  die Resultantpunkte der Systeme  $\Sigma, \Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  bezw. Für eine beliebige Achse durch  $O$  ist das Trägheitsmoment von  $\Sigma$  gleich der Summe der Trägheitsmomente von  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$ , also nach I:  $b^2 + \text{Tr.-Mom. von } C = b_1^2 + \text{Tr.-Mom. von } C_1 + b_2^2 + \text{Tr.-Mom. von } C_2 = b_1^2 + b_2^2 + \text{Tr.-Mom. von } \Sigma_0$ , wo  $\Sigma_0$  das aus  $C_1$  und  $C_2$  gebildete System bezeichnet. Hat nun dieses Punktsystem  $\Sigma_0 = C_1, C_2$  die Momentkonstante  $b_0^2$  und den Resultantpunkt  $C_0$ , so kommt durch nochmalige Anwendung von I:  $b^2 + \text{Tr.-Mom. von } C = b_1^2 + b_2^2 + b_0^2 + \text{Tr.-Mom. von } C_0$ , oder

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_0^2 \\ C &= C_0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

III. Für ein aus zwei Teilsystemen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  gebildetes System  $\Sigma$  setzt sich also die Momentkonstante aus drei anderen Momentkonstanten additiv zusammen, nämlich aus denjenigen der Teilsysteme  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  und aus derjenigen des Systemes  $\Sigma_0$ , welches aus den zwei Resultantpunkten der Teilsysteme gebildet ist. Der Resultantpunkt von  $\Sigma$  fällt mit dem von  $\Sigma_0$  zusammen.

Nach diesem Gesetze können Systeme mit grösserer Punktzahl auf einfachere Systeme zurückgeführt werden; es bleibt übrig die Verhältnisse bei den aller einfachsten näher zu untersuchen.

Enthält  $\Sigma$  nur einen einzigen Punkt  $P$ , so wird die Momentkonstante Null, indem das Trägheitsmoment hinsichtlich der Achse  $OP$  verschwindet;  $P$  selbst, oder sein Spiegelbild  $Q$  in  $O$ , kann als Resultantpunkt angenommen werden. Das Gebilde  $(O; P)$  wird eine uneigentliche Kurve zweiter Klasse, indem es in zwei Punkte  $P, Q$  zerfällt, oder es degeneriert, wenn man so will, in die Strecke  $PQ$ , die als eine abgeplattete Ellipse angesehen werden kann.

Enthält  $\Sigma$  dagegen zwei Punkte  $P_1, P_2$  und liegen diese mit dem Grundpunkt  $O$  nicht in derselben Geraden, so gibt es keine Achse durch  $O$ , für welche das Trägheitsmoment verschwindet, und  $(O; P_1, P_2)$  ist somit eine eigentliche Ellipse. Wenn irgend eine Tangente dieser Kurve den Punkt  $P_1$  enthielte, so würde gemäss der Bedeutung der Ellipse das Trägheitsmoment des Systems hinsichtlich der parallelen Achse durch  $O$  ebenso gross sein, als wenn  $P_1$  allein existierte; dieses kann aber nur für eine Achse durch  $P_2$  eintreffen. Die Ellipse  $(O; P_1, P_2)$  hat somit eine und nur eine Tangente, die durch  $P_1$  geht, und diese ist zur Geraden  $OP_2$  parallel. Wir kommen also zu dem Satze:

IV. Die Ellipse  $(O; P_1, P_2)$  geht durch die Punkte  $P_1, P_2$  und gestattet die Strecken  $OP_1, OP_2$  als konjugierte Halbdurchmesser.

Hiermit ist die Kurve graphisch gegeben; wir wollen jedoch eine Konstruktion der Achsen direkt aus der Bedeutung der Ellipse ableiten. Es seien  $O\xi, O\eta$  (Fig. 2) die Achsenrichtungen der Ellipse  $(O; P_1, P_2)$  oder die Hauptträgheits-

achsen in  $O$ ; die entsprechenden Hauptträgheitsmomente seien  $J_\xi = b^2$ ,  $J_\eta = a^2$ . Wir drehen die Strecke  $OP_2$   $90^\circ$  um  $O$  in die Lage  $OR$  und ziehen die in Fig. 2 gezeigten Geraden. Da das Zentrifugalmoment hinsichtlich  $O\xi\eta$  verschwindet, ist Rechteck  $M_1N_1 =$  Rechteck  $M_2N_2$ , also auch = Rechteck  $MN$ , woraus folgt, dass die Dreiecke  $M_1MH$  und  $HN_1$  flächengleich sind oder dass die Dreiecke  $M_1MH$  und  $P_1RH$  ähnlich sind. Dies gibt  $M_1M$  parallel zu  $RP_1$  und somit  $B'R = M_1M = P_1A'$ ; es fallen also die Mitten  $\frac{1}{2}$  von  $RP_1$  und  $A'B'$  zusammen. Weiter ist  $a^2 = J_\eta = P_1M_1^2 + P_2M_2^2 = P_1M_1^2 + M_1B'^2 = P_1B'^2 = RA'^2$  und  $b^2 = J_\xi = P_1N_1^2$

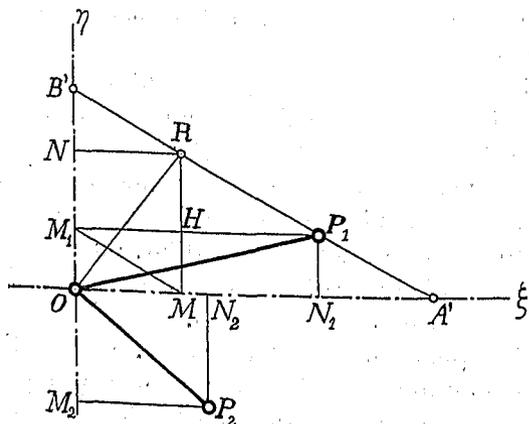


Fig. 2.

$+ P_2N_2^2 = P_1N_1^2 + N_1A'^2 = P_1A'^2 = RB'^2$ . Die Konstruktion lässt sich jetzt leicht umkehren und wir finden (Fig. 3):

V. Um die Achsen der Ellipse  $(O; P_1P_2)$  zu konstruieren, drehe man die Strecke  $OP_2$   $90^\circ$  in  $OR$  um; mit der Mitte von  $P_1R$  als Zentrum schlage man einen Kreis durch  $O$ , welcher die Gerade  $P_1R$  in  $A'$  und  $B'$  schneidet, und zwar möge  $A'$  den  $P_1$  am nächsten gelegenen Schnittpunkt bezeichnen. Dann gibt  $OA'$  die Richtung und  $RA'$  die Länge der grossen Halbachse, sowie  $OB'$  die Richtung und  $RB'$  die Länge der kleinen Halbachse an.

Dieses überaus einfache Verfahren, um die Achsen einer Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern zu bestimmen, stammt von RYTZ her<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Nach der Mitteilung von CHR. WIENER (Lehrb. d. darst. Geometrie, Lpz. 1884, Bd 1 S. 293) wurde diese Konstruktion zuerst von MOSS-

Wir wollen noch auf die Relation hinweisen, die aus der allgemeinen Formel (1) fließt

$$z_1^2 + z_2^2 = z_c^2, \quad (5)$$

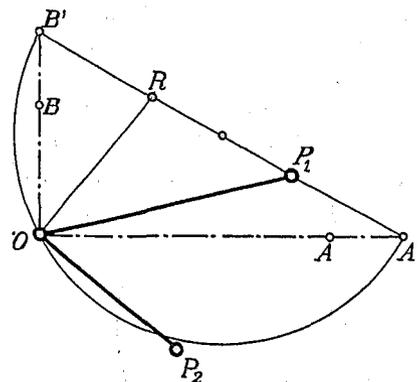


Fig. 3.

welche also die komplexen Endpunktkoordinaten zweier konjugierten Halbdurchmesser mit der komplexen Koordinate eines Brennpunktes derselben Ellipse verbindet; dabei ist das Achsenkreuz rechtwinklig mit dem Mittelpunkt als Anfangspunkt, aber sonst beliebig. Diese Relation fasst natürlich einige einfachen Eigenschaften konjugierter Durchmesser in kondensierter Form zusammen<sup>1</sup>.

Wir haben den speziellen Fall ausgeschlossen, in welchem  $O, P_1, P_2$  in einer Geraden liegen; offenbar wird dann das Gebilde  $(O; P_1P_2)$  wieder eine uneigentliche Ellipse mit  $a^2 = OP_1^2 + OP_2^2$ ,  $b^2 = 0$ , was auch durch die Rytz'sche Konstruktion hervorkommt. Der Resultantpunkt  $C$  liegt in derselben Geraden im Abstände  $OC = a$ . — Wollen wir auch jetzt  $OP_1, OP_2$  konjugierte Halbdurchmesser im Gebilde  $(O; P_1P_2)$  nennen, so definiert das eben gesagte, was damit zu verstehen ist.

§ 3. Gehen wir jetzt einen Schritt weiter, in dem wir ein System von drei Punkten,  $\Sigma = P_1, P_2, P_3$ , betrachten, so gibt das allgemeine Zusammensetzungsgesetz III das einzuschlagende Verfahren an. Setzen wir  $\Sigma_1 = P_1, P_2$  und  $\Sigma_2 = P_3$  und beachten wir, dass das letzte System die Momentkonstante Null hat, bekommen wir sogleich den Satz:

BRUGGER in seinen »Aufgaben aus dem Gebiete der géométrie descriptive«, Zürich 1845, publiziert mit der Bemerkung, dass er dieselbe von Prof. Rytz in Aarau erfahren habe.

<sup>1</sup> Von einem anderen Gesichtspunkte aus enthält die Formel (5), dass bei der durch die Gleichung  $\zeta = \sqrt{c^2 - z^2}$  bestimmten Abbildung der komplexen Ebene in sich jede Ellipse in dem konfokalen Systeme, dessen Brennpunkte  $z = \pm c$  sind, invariant bleibt, indem die Endpunkte konjugierter Durchmesser sich zwei-zweideutig entsprechen.

VI. Um die Ellipse  $(O; P_1, P_2, P_3)$  zu konstruieren, bestimme man zuerst den einen Brennpunkt  $C_1$  und das kleinste Halbachsenquadrat  $b_1^2$  der Ellipse  $(O; P_1, P_2)$ , sodann die Brennpunkte und das kleinste Halbachsenquadrat  $b_0^2$  der Ellipse  $(O; P_3, C_1)$ ; die Ellipse  $(O; P_1, P_2, P_3)$  ist mit der letztgenannten konfokal und ihr kleinstes Halbachsenquadrat ist  $b^2 = b_1^2 + b_0^2$ .

Fig. 4 zeigt die Konstruktion. Durch das RYTZ'sche Verfahren finden wir zuerst für die Ellipse  $(O; P_1, P_2)$   $b_1 = RB' = OB_1$ ,  $a_1 = RA' = B_1 C_1$ , wodurch der Brennpunkt  $C_1$  gefunden ist; sodann für  $(O; P_3, C_1)$   $b_0 = R_0 B'' = OB_0$ ,  $a_0 =$

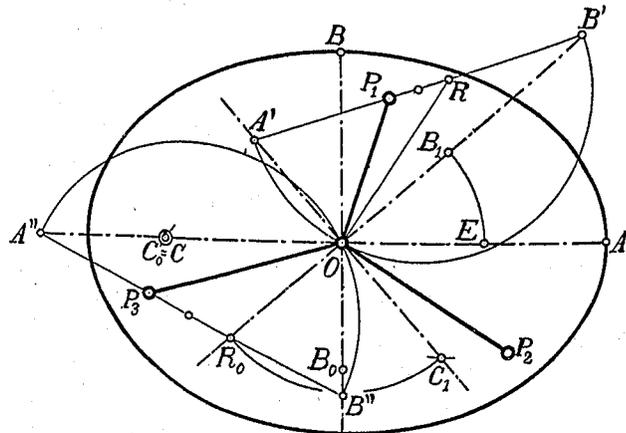


Fig. 4.

$R_0 A'' = B_0 C_0$ , wodurch auch ein Brennpunkt  $C_0$  in dieser Ellipse bestimmt ist. Die gesuchte Ellipse  $(O; P_1, P_2, P_3)$  ist mit der letzten koaxial und konfokal ( $C_0 = C$ ); machen wir  $OE = OB_1 = b_1$ , wird ihre kleinere Halbachse  $OB = b = B_0 E$  und die grössere  $OA = a = BC$ .

Zufolge der Bedeutung der Kurven müssen  $(O; P_1, P_2)$  und  $(O; P_1, P_2, P_3)$  zwei mit  $OP_3$  parallele, gemeinsame Tangenten besitzen, da ja der Punkt  $P_3$  keinen Beitrag zum Trägheitsmomente hinsichtlich der Achse  $OP_3$  gibt. Im übrigen müssen die Tangenten der letzten Kurve von  $O$  weiter entfernt sein als die gleichgerichteten Tangenten der ersten. Wir kommen so zu dem Satze:

VII. Die Ellipse  $(O; P_1, P_2, P_3)$  ist den drei Ellipsen  $(O; P_1, P_2)$ ,  $(O; P_2, P_3)$  und  $(O; P_3, P_1)$  umschrieben und zwar so,

dass sie z. B. die Ellipse  $(O; P_1, P_2)$  in den Endpunkten eines gemeinsamen Durchmessers berührt, der für beide Kurven gleichzeitig zur Richtung  $OP_3$  konjugiert ist, u. s. f. (Fig. 5).

Die drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$  sind demnach im allgemeinen von der Ellipse  $(O; P_1, P_2, P_3)$  umschlossen; nur wenn  $O, P_1, P_2$  in einer Geraden liegen, rückt  $P_3$  bis zum Umriss hinaus, u. s. w. Liegen alle vier Punkte  $O, P_1, P_2, P_3$  in derselben Geraden, degeneriert die Kurve in eine gerade Strecke.

Die allgemeine Formel (1) gibt bei drei Punkten

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_0^2 \tag{6}$$

in derselben Bedeutung wie früher.

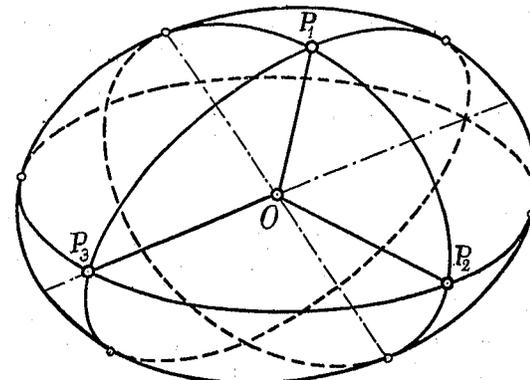


Fig. 5.

Für eine noch grössere Punktenanzahl gelten analoge Methoden und Sätze, die wir nach dem früheren nicht näher zu entwickeln brauchen.

Offenbar liegt hier eine Verallgemeinerung der Eigenschaften konjugierter Durchmesser vor; wie diese bei Parallelprojektion invariant bleiben, so gilt auch der allgemeine Satz:

VIII. Werden Punkte  $O, P_1, P_2, \dots, P_n$  einer Ebene in beliebiger, fester Richtung auf eine andere Ebene in die Punkte  $O', P_1', P_2', \dots, P_n'$  projiziert, so projiziert sich gleichzeitig die Kurve  $(O; P_1, P_2, \dots, P_n)$  in die Kurve  $(O'; P_1', P_2', \dots, P_n')$ .

Dies folgt schon aus dem Satze VII und damit analogen für höhere Punktenanzahl, kann aber auch leicht direkt aus der Definition der Kurven abgeleitet werden. Wir wählen in der Ebene der ersten Punkte eine beliebige Achse  $x$  durch  $O$  und fällen von den Punkten  $P_i$  die Lote  $\gamma_i$  auf  $x$ ; als

dann ziehen wir eine »repräsentierende Gerade«  $t$  parallel zu  $x$  in dem aus  $p^2 = \sum y_\lambda^2$  berechneten Abstände  $p$ . Die Geraden  $x$  und  $t$  mögen sich auf die zweite Ebene in  $x'$  (durch  $O'$ ) und  $t'$  (parallel zu  $x'$ ) bzw. projizieren. Die Lote  $y_\lambda$  und die Abstandstrecke  $p$  werden bei der Projektion alle in demselben Verhältnisse verändert; die entstehenden Projektionsstrecken sind zwar im allgemeinen nicht gegen  $x'$  und  $t'$  senkrecht, aber sind jedoch den entsprechenden senkrechten Abständen proportional. Also müssen die Lote  $y_\lambda'$  von  $P_\lambda'$  auf  $x'$  und der senkrechte Abstand  $p'$  zwischen  $x'$  und  $t'$  seinerseits die Gleichung  $p'^2 = \sum y_\lambda'^2$  erfüllen, d. h.  $t'$  oder die Projektion von  $t$  ist in der zweiten Ebene eine »repräsentierende Gerade« für das Trägheitsmoment des Systems  $P_1', \dots, P_n'$  hinsichtlich der Achse  $x'$ . Dann aber muss die Ellipse ( $O'; P_1' \dots P_n'$ ) als Umhüllungskurve von  $t'$  auch die Projektion der Umhüllungskurve von  $t$  sein, w. z. b. w.

§ 4. Ein Blick auf Fig. 5 führt den Gedanken auf ein gewisses Raumbilde, indem jene Figur als die perspektivische Abbildung einer Ellipsoide mit drei konjugierten Halbdurchmessern und mit den von diesen bestimmten ebenen Schnitten angenommen werden kann. Die Methoden, mit welchen wir das frühere entwickelt haben, führen auch geradezu hierzu, wenn wir die Betrachtungen auf räumliche Systeme ausdehnen.

Wir nehmen also ein räumliches Punktsystem von  $n$  diskreten Punkten  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$  an, die wir uns wie früher als Träger von Einheitsmassen denken wollen. Durch einen Grundpunkt  $\bar{O}$  legen wir eine Ebene  $\Xi$  und führen von den Punkten  $\bar{P}_\lambda$  die Lote  $\bar{y}_\lambda$  auf  $\Xi$ . Die Summe  $\sum \bar{y}_\lambda^2$  ist das Trägheitsmoment des gegebenen Systemes hinsichtlich der Ebene  $\Xi$  und kann durch eine repräsentierende Ebene  $\Gamma$  veranschaulicht werden, die auf der einen oder anderen Seite parallel zu  $\Xi$  gelegt wird in einem Abstände  $\bar{p}$ , der aus der Gleichung  $\bar{p}^2 = \sum \bar{y}_\lambda^2$  zu bestimmen ist. Dreht sich  $\Xi$  um den Grundpunkt  $\bar{O}$ , so umhüllt  $\Gamma$  bekanntlich eine Ellipsoide<sup>1</sup>, die wir als die Fläche  $\{\bar{O}; \bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n\}$  bezeichnen wollen.

<sup>1</sup> Die Fläche ist identisch mit der von BINET für ein beliebiges Massensystem eingeführten Ellipsoide (Journ. de l'éc. polyt. Cah. 16, 1813) und ähnlich der CULMANN'schen Trägheitsellipsoide (im Verhältnis  $\sqrt{n}:1$ ). Siehe Encykl. d. mathem. Wissensch. IV: 4 S. 328.

Es gilt nun der Satz:

IX. Werden die im Raume gegebenen Punkte  $\bar{O}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$  in beliebiger, fester Richtung auf eine Ebene  $B$  in die Punkte  $O, P_1, P_2, \dots, P_n$  projiziert, so ist die Ellipse ( $O; P_1 P_2 \dots P_n$ ) die Bildkontur der Ellipsoide  $\{\bar{O}; \bar{P}_1 \bar{P}_2 \dots \bar{P}_n\}$  in ihrer durch die nämliche Projektion vermittelten Abbildung auf  $B$ .

Die Kontur ist ja die Umhüllungskurve solcher Spurgeraden in  $B$ , die von den zur festen Projektionsrichtung parallelen Berührungsebenen der Ellipsoide ausgeschnitten werden. Es sei  $\Gamma$  eine solche Berührungsebene und  $\Xi$  die Parallelebene durch  $\bar{O}$ , sowie  $t, x$  bzw. die Spurgeraden dieser Ebenen in  $B$ . Da  $\Xi$  die Projektionsrichtung enthält, wird  $x$  die Projectionen sämtlicher Fusspunkte von den oben erwähnten Loten  $\bar{y}_\lambda$  enthalten; ebenso fallen die Projektionen der Endpunkte der Abstandstrecke  $\bar{p}$  in  $x$  und  $t$  bzw. Fällt man jetzt in der Bildebene  $B$  die Lote  $y_\lambda$  von  $P_\lambda$  auf  $x$  sowie ein Lot  $p$  zwischen  $t$  und  $x$ , so sieht man gleich, dass sowohl  $y_\lambda, p$  wie auch  $\bar{y}_\lambda, \bar{p}$  zu den Projektionsstrecken der letzteren, also auch zu einander proportional sind, so dass aus der Gleichung  $\bar{p}^2 = \sum \bar{y}_\lambda^2$  auch die Gleichung  $p^2 = \sum y_\lambda^2$  folgt. Das heisst aber, dass  $t$  eine »repräsentierende Gerade« für das Trägheitsmoment des Systems  $P_1, P_2, \dots, P_n$  hinsichtlich der Achse  $x$  ist, also die Ellipse ( $O; P_1 P_2 \dots P_n$ ) berührt, womit der Satz bewiesen ist.

Betrachtet man ein räumliches System von drei Punkten  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ , so findet man, und zwar durch einen analogen Schluss wie bei Satz IV, dass die Ellipsoide  $\{\bar{O}; \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3\}$  eine und nur eine Berührungsebene hat, die durch den Punkt  $\bar{P}_3$  geht, und dass diese zur Ebene  $\bar{O} \bar{P}_1 \bar{P}_2$  parallel ist, u. s. f. Also:

X. Die Ellipsoide  $\{\bar{O}; \bar{P}_1 \bar{P}_2 \bar{P}_3\}$  geht durch die drei Punkte  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  und gestattet die Strecken  $\bar{O} \bar{P}_1, \bar{O} \bar{P}_2, \bar{O} \bar{P}_3$  als konjugierte Halbdurchmesser.

Stellen wir die Sätze IX und X zusammen, so finden wir sofort:

XI. Sind drei in einer Ebene gegebene Strecken  $OP_1, OP_2, OP_3$  die Parallelprojektionen von drei konjugierten Halbdurch-

messern einer Ellipsoide, so bildet die Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$  die Kontur derselben Ellipsoide.

Wie das Problem der Achsenbestimmung einer Ellipse aus zwei Konjugatdurchmessern durch die RYTZ'sche Konstruktion gelöst wird, so lässt sich also das analoge Problem der Achsenbestimmung der Bildkontur einer Ellipsoide aus gegebenen Projektionen dreier Konjugatdurchmesser durch das in Satz VI und Fig. 4 angegebene einfache Verfahren lösen, welches als eine zweimal wiederholte RYTZ'sche Konstruktion zu bezeichnen ist. Dieses Ergebnis ist als graphisch wichtig besonders hervorzuheben.

Satz XI lässt sich gewissermassen umkehren, indem wir sagen können:

XII. Sind vier Punkte  $O, P_1, P_2, P_3$  in einer Ebene gegeben und lässt sich weiterhin eine Ellipsoide bestimmen, deren Kontur bei Abbildung auf die Ebene durch Parallelprojektion in irgend einer festen Richtung mit der Kurve  $(O; P_1 P_2 P_3)$  zusammenfällt, so bilden die Strecken  $OP_1, OP_2, OP_3$ , die Projektionen von drei konjugierten Halbdurchmessern derselben Ellipsoide.

Bei dem Beweise dieses Satzes wollen wir wie früher die Punkte des Raumgebildes mit gestrichelten Buchstaben angeben, während wir ihre Projektionspunkte in der Bildebene (d. h. der Ebene der gegebenen Punkte  $O, P_1, P_2, P_3$ ) mit den entsprechenden ungestrichelten Buchstaben bezeichnen. Wir wollen ferner der Kürze wegen das Zeichen  $\sphericalangle$  zwischen zwei Strecken verwenden um zu bezeichnen, dass dieselben zwei konjugierte Halbdurchmesser in der Ellipsoide bilden, d. h. dass die eine in der zu der anderen konjugierten Durchmesserenebene enthalten ist.

In der Bildebene zeichnen wir (Fig 6) die Ellipse  $(O; P_1 P_2)$ , die die Umrisskurve  $(O; P_1 P_2 P_3)$  in den Punkten  $L$  und  $M$  berühren möge. Diese sind nach Satz VII die Endpunkte eines gemeinsamen Durchmessers, der für beide Ellipsen gleichzeitig zur Richtung  $OP_3$  konjugiert ist. Wir nennen  $g$  die (unbegrenzte) Gerade  $OP_3$ , sowie  $l$  und  $m$  die gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen in den Punkten  $L, M$  bzw. Durch die drei parallelen Geraden  $g, l, m$  legen wir drei parallele Ebenen  $\Gamma, \Lambda, M$  derart, dass die feste Richtung der Projektionsstrahlen in ihnen enthalten ist. Die Ebenen  $\Lambda, M$

berühren die Ellipsoide in den Endpunkten  $\bar{L}, \bar{M}$  eines Durchmessers, der sich auf die Bildebene in den Durchmesser  $LM$  der Umrissellipse projiziert. Die Ebene  $\Gamma$  geht durch den Mittelpunkt  $\bar{O}$  der Ellipsoide und bildet die zu  $\bar{L}\bar{M}$  konjugierte Durchmesserenebene dieser Fläche. Es sei  $K$  in der Bildebene ein Schnittpunkt der Geraden  $g$  mit der Ellipse  $(O; P_1 P_2)$ ; der durch  $K$  gehende Projektionsstrahl möge die Ellipsoide in den Punkten  $\bar{K}_\alpha$  und  $\bar{K}_\beta$  schneiden; die Schnittkurven der Durchmesserenebenen  $\bar{L}\bar{M}\bar{K}_\alpha$  und  $\bar{L}\bar{M}\bar{K}_\beta$  mit der Fläche bezeichnen wir mit  $(E_\alpha)$  und  $(E_\beta)$  bezw. Offenbar ist  $\bar{O}\bar{K}_\alpha \sphericalangle \bar{O}\bar{L}$ ,

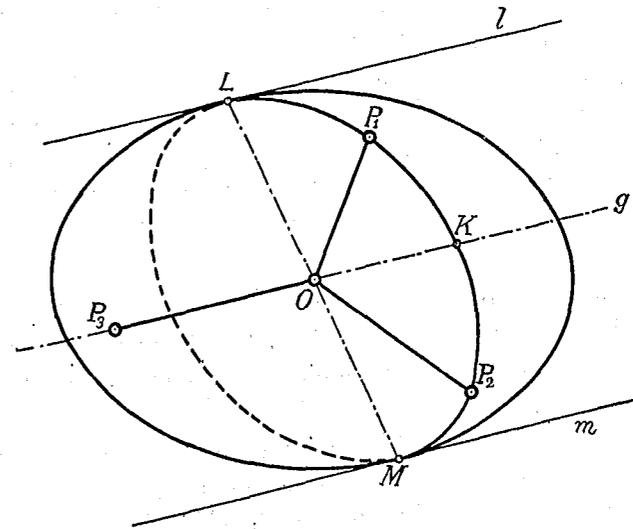


Fig. 6.

weil in  $\Gamma$  enthalten; also bilden diese Strecken konjugierte Halbdurchmesser der Ellipse  $(E_\alpha)$ . Da nun ihre Projektionsstrahlen  $OK, OL$  konjugierte Halbdurchmesser der Ellipse  $(O; P_1 P_2)$  sind, so folgt dass die auf der Fläche gelegene Ellipse  $(E_\alpha)$  sich in die Ellipse  $(O; P_1 P_2)$  der Bildebene projiziert. Auf der Kurve  $(E_\alpha)$  sind demnach zwei Punkte — es seien  $\bar{P}_1$  und  $\bar{P}_2$  — zu finden, die sich in die Punkte  $P_1, P_2$  der Bildebene bzw. projizieren; da nun die Projektionen der Strecken  $\bar{O}\bar{P}_1, \bar{O}\bar{P}_2$  konjugierte Halbdurchmesser in der Projektionskurve  $(O; P_1 P_2)$  sind, so sind sie auch

selbst konjugierte Halbdurchmesser in der Ellipse ( $E_u$ ) und somit  $\bar{O}\bar{P}_1 \asymp \bar{O}\bar{P}_2$ .

Ebenso finden wir, dass die Kurve ( $E_p$ ) sich in dieselbe Ellipse ( $O; P_1 P_2$ ) projiziert, und dass es in der Ebene jener Kurve zwei Strecken  $\bar{O}\bar{P}_I, \bar{O}\bar{P}_{II}$  gibt, deren Projektionen  $OP_1, OP_2$  bzw. sind, und für welche gilt  $\bar{O}\bar{P}_I \asymp \bar{O}\bar{P}_{II}$ .

Die Punkte  $\bar{P}_1, \bar{P}_I$  sind die Schnittpunkte der Ellipsoide mit dem Projektionsstrahl durch  $P_1$ , ebenso sind  $\bar{P}_2, \bar{P}_{II}$  die Schnittpunkte derselben Fläche mit dem Projektionsstrahl durch  $P_2$ . Wir haben dann gefunden, dass die Strecken  $\bar{O}\bar{P}_1, \bar{O}\bar{P}_I$  und  $\bar{O}\bar{P}_2, \bar{O}\bar{P}_{II}$  sich so zu zweien kombinieren, dass  $\bar{O}\bar{P}_1 \asymp \bar{O}\bar{P}_2$  und  $\bar{O}\bar{P}_I \asymp \bar{O}\bar{P}_{II}$ .

Nennen wir jetzt  $\bar{P}_3$  und  $\bar{P}_{III}$  die Schnittpunkte der Ellipsoide mit dem Projektionsstrahl durch  $P_3$ , so muss aus denselben Gründen auch das Streckenpaar  $\bar{O}\bar{P}_3, \bar{O}\bar{P}_{III}$  sich auf ähnlicher Art mit jedem der vorigen kombinieren. Für das eine Paar kommt es nur auf die Bezeichnung an; wir wollen dann diese so gewählt annehmen, dass  $\bar{O}\bar{P}_3 \asymp \bar{O}\bar{P}_1$  und  $\bar{O}\bar{P}_{III} \asymp \bar{O}\bar{P}_I$ . Es ist aber auch  $\bar{O}\bar{P}_3 \asymp \bar{O}\bar{L}$ , weil in  $\Gamma$  enthalten; also ist  $\bar{O}\bar{P}_3$  zu der ganzen Ebene  $\bar{O}\bar{P}_1\bar{L}$  oder  $\bar{O}\bar{P}_1\bar{P}_2$  konjugiert, mithin kommt  $\bar{O}\bar{P}_3 \asymp \bar{O}\bar{P}_2$ . Ebenso folgt  $\bar{O}\bar{P}_{III} \asymp \bar{O}\bar{P}_{II}$ .

Es gibt also zwei Tripeln konjugierter Halbdurchmesser unsrer Ellipsoide:  $\bar{O}\bar{P}_1, \bar{O}\bar{P}_2, \bar{O}\bar{P}_3$  und  $\bar{O}\bar{P}_I, \bar{O}\bar{P}_{II}, \bar{O}\bar{P}_{III}$ , die sich in die gegebenen Strecken  $OP_1, OP_2, OP_3$  in der Bildebene bzw. projizieren, womit der Satz bewiesen ist.

Wir haben hier den allgemeinen Fall angenommen, in welchem die Ellipse ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) die drei Punkte  $P_\lambda$  umschließt. Liegt ein oder zwei dieser Punkte auf dem Umriss, so werden die Verhältnisse sehr vereinfacht; es gibt noch zwei Tripeln Halbdurchmesser der gesuchten Art, die aber eine, bzw. zwei Strecken gemeinschaftlich haben. Liegen endlich alle drei Punkte auf dem Umriss, so entartet die Ellipse ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) in eine gerade Strecke, und es gibt keine solche Ellipsoide, wie es der Satz voraussetzt.

§ 5. Es seien wieder vier Punkte  $O, P_1, P_2, P_3$  in einer Ebene gegeben, von denen wir nur annehmen wollen, dass

sie nicht alle in einer Geraden liegen, sodass die Ellipse ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) nicht degeneriert. Setzen wir in einem Brennpunkte dieser Ellipse senkrecht zu ihrer Ebene eine Strecke gleich der kleinen Halbachse ab und legen durch den Endpunkt dieser Strecke und den Mittelpunkt  $O$  eine Gerade, so ist diese die Achse eines Kreiscylinders, der die Ellipse enthält. Es gibt im allgemeinen zwei solche Cylinder; nur wenn ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) ein Kreis ist, fallen diese zusammen. Schreiben wir dann irgendwo in einem dieser Cylinder eine Kugel ein, so gehört derselben umgekehrt, bei Parallelprojektion auf die gegebene Ebene in der Richtung der Cylinderachse, die Kurve ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) als Bildkontur. Satz XII gibt dann:

XIII. *Drei von einem Punkte ausgehende Strecken  $OP_1, OP_2, OP_3$  in einer Ebene bilden — unter der Voraussetzung, dass nicht alle vier Punkte  $O, P_1, P_2, P_3$  in derselben Geraden liegen — stets die Parallelprojektionen von drei senkrechten Radien einer Kugel; dabei ist die Ellipse ( $O; P_1 P_2 P_3$ ) die Bildkontur dieser Kugel in ihrer durch dieselbe Projektion vermittelten Abbildung auf die Ebene.*

Der erste Teil dieses Satzes ist der POHLKE'sche Fundamentalsatz der *allgemeinen Axonometrie*<sup>1</sup>. Nennen wir das Raumgebilde, welches aus drei von einem Punkte ausgehenden, senkrechten und gleich grossen Strecken gebildet ist, ein *Grundtrieder*, seine Parallelprojektion in beliebiger Richtung auf eine Ebene ein *Bildtrieder*, so kann also — mit der erwähnten Einschränkung — jede aus drei komplanen Strecken mit gemeinschaftlichem Anfangspunkte bestehende Figur als Bildtrieder angenommen werden, d. h. es existiert stets ein Grundtrieder, welches sich in jene Figur parallelprojiziert. Dieses Grundtrieder ist übrigens der Lage nach keineswegs eindeutig bestimmt; vielmehr lassen sich aus einem solchen unzählig viele anderen ableiten und zwar durch eine oder mehrere von folgenden Operationen:

1) Parallelverschiebung in Richtung der Projektionsstrahlen;

<sup>1</sup> POHLKE, Darstellende Geometrie, Abt. 1. Berl. 1860. Mehrere Beweise dieses Satzes sind nachher publiziert, u. a. von H. A. SCHWARZ (Crelles Journal Bd 63. 1864). Eine Zusammenstellung der bezüglichen Literatur findet sich bei F. SCHILLING, Über den Pohlkeschen Satz. (Zeitschr. f. Mathem. o. Physik Bd 48. 1903).

2) Spiegelung in einer zur Richtung der Projektionsstrahlen senkrechten Ebene;

3) Spiegelung in der Bildebene, wobei auch die Projektionsstrahlen gespiegelt werden.

Die letzte Operation entspricht dem Umstand, dass *zwei* Kreiscylinder durch die Kurve  $(O; P_1 P_2 P_3)$  gelegt werden können, welche durch Spiegelung in der Bildebene in einander übergehen; die erste Operation dem Umstand, dass in jedem solchen Cylinder unendlich viele Kugeln eingeschrieben werden können; endlich die zweite, dass es — nach dem Beweise des Satzes XII — in jeder solchen Kugel *zwei* Tripeln von Radien gibt, welche die gesuchte Eigenschaft besitzen.

Bei dieser Vielfältigkeit in den möglichen Lagen des zu einem festen Bildtrieder  $OP_1 P_2 P_3$  gehörigen Grundtrieders bleiben aber unverändert:

α) die Länge der drei gleich grossen Strecken, welche das Grundtrieder bilden. Diese Länge ist gleich der kleinsten Halbachse  $b$  der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$ .

β) die Richtung der senkrechten Projektion der Projektionsstrahlen auf die Bildebene. Diese Richtung ist zur grossen Achse der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$  parallel.

γ) der Winkel der Projektionsstrahlen mit der Bildebene. Der Cosinus dieses Winkels ist gleich der Exzentricität der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$ .

Wir sehen wie einfach die konstituierenden Eigenschaften der Abbildung mit der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$  zusammenhängen, und der letzte Teil von XIII — zusammengestellt mit der früher gezeigten einfachen Konstruktionsbestimmung jener Kurve — ist daher für die graphische Verwertung des POHLKE'schen Satzes besonders wichtig. Kann man nach diesem die Form des Bildtrieders beinahe willkürlich annehmen, so geben doch verschiedene Annahmen auch verschieden gute Bilder; in dieser Hinsicht kann die Exzentricität der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$  sogar als ein *Mass der Verzerrung* dienen, da ja eine kreisähnliche Ellipse als Bild einer Kugel bessere Illusion gibt als eine langgestreckte.

Die besten Bilder erhält man, wenn man das Bildtrieder  $OP_1 P_2 P_3$  so wählt, dass die Kurve  $(O; P_1 P_2 P_3)$  ein Kreis wird; die Projektionsstrahlen sind dann senkrecht zur Bildebene und man hat den Specialfall der *orthogonalen Axonometrie*.

Wie viele Relationen müssen aber die Bestimmungsstücke des Bildtrieders erfüllen, damit dieser Fall eintreten soll? Offenbar *zwei*, denn das Zusammenfallen der Richtungen der Bildebenennormalen und der Projektionsstrahlen entspricht zwei Bedingungen. Diese zwei Relationen können in verschiedenen Formen ausgedrückt werden. So gibt die Gleichung (6), wo jetzt  $z_0 = 0$ , da die Brennpunkte eines Kreises mit dem Mittelpunkt zusammenfallen:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0; \quad (7)$$

in dieser Form hat GAUSS den Hauptsatz der orthogonalen Axonometrie dargestellt<sup>1</sup>. — Ist  $C_1$  ein Brennpunkt der Ellipse  $(O; P_1 P_2)$ , so ist nach (5)  $z_1^2 + z_2^2 = z_{C_1}^2$ , also nach (7)  $z_{C_1}^2 + z_3^2 = 0$ , d. h.  $OC_1$  und  $OP_3$  sind senkrechte Radien eines Kreises. Dasselbe folgt auch aus der allgemeinen Konstruktion in Fig. 4, wenn die Kurve  $(O; P_1 P_2 P_3)$  ein Kreis werden soll. Die specielle Gestalt des Bildtrieders ist also dadurch gekennzeichnet, dass eine der Strecken, z. B.  $OP_3$ , längs der kleineren Halbachse in der von den anderen beiden Strecken bestimmten Ellipse  $(O; P_1 P_2)$  gerichtet ist und der Länge nach der halben Fokaldistanz in derselben Ellipse gleich ist. Diese Form des Hauptsatzes stammt von POHLKE her<sup>2</sup>. — Werden endlich die gewöhnlichen graphischen Methoden für Rechnungen mit komplexen Grössen auf Gleichung (7) angewandt, so ergibt sich die von WEISBACH gegebene Form, dass die Quadrate der Strecken  $OP_\lambda$  den Sinus der doppelten Winkel  $P_\mu OP_\nu$  proportional sind<sup>3</sup>.

Wir wollen dies nicht weiter verfolgen, da die Einzelheiten der axonometrischen Abbildung ausser dem Rahmen dieses Aufsatzes fallen.

*Schlussbemerkung.* Die oben gegebene, einfache Konstruktionsbestimmung der Ellipse  $(O; P_1 P_2 P_3)$  lässt sich auch für die graphische Ermittlung von Trägheitsgrössen ebener Flächen mit Vorteil verwerten. Jede solche Fläche kann nämlich hinsichtlich ihrer Trägheitsgrössen durch drei mit gleich gros-

<sup>1</sup> GAUSS, Gesammelte Werke, Bd 2, pag. 309, Bd 8, pag. 345.

<sup>2</sup> POHLKE, Darstellende Geometrie, Abt. 2. Berl. 1876.

<sup>3</sup> WEISBACH, Anleitung zum axonometrischen Zeichnen, Freiburg 1857, S. 11.

sen Massen belegte Punkte ersetzt werden, wie REYE dargestellt hat<sup>1</sup>. Da diese Punkte oft sehr einfache Lagen haben, wie z. B. für ein Dreieck in den Mitten der Seiten, so ist damit die unmittelbare Verwendbarkeit der obigen Methoden für den erwähnten Zweck gegeben.

<sup>1</sup> REYE, Einfache Darstellung der Trägheitsmomente ebener Figuren (Zeitschr. des Vereines deutscher Ingenieure Bd 19. 1875).



Tryckt den 23 september 1905.

Uppsala 1905. Almqvist & Wiksells Boktryckeri-A.-B.