Die höhere Rechenkunst und ebene und sphärische Trigonometrie für die Oberlandmesser des Großherzogthums Berg.

Herausgegeben

[ohann] von

D. J. F. Benzenberg.

Mit 8 Kupfertafeln und 9 Holzschnitten.

Düsseldorf,
bei J. H. C. Schreiner. 1813.

Einleitung.

Das gegenwärtige Werk soll nach einem einfachen Plane das Ganze der Meßkunst umfassen. Es soll vom Leichtesten anfangen, dann zum Schwereren fortschreiten, und endlich mit dem Schwierigsten endigen. Die Messung eines Feldes, die Messung einer Wiese oder eines Gartens mache den Anfang. Dann komme die Aufnahme einer ganzen Flur, die Vermessung einer Feldmark, und die Theilung großer Gemeinheiten. Dann folge die Aufnahme mehrerer Bezirke und einer ganzen Provinz. Den Beschluß mache das Höchste was die Meßkunst darbietet: die Aufnahme eines ganzen Reichs und die Messung der Größe und der Figur der Erde.

Bei dieser Ordnung befolgen wir zugleich die Zeitfolge der Erfindungen. Egypten war seit den frühesten Zeiten das Vaterland der Meßkunst. Der Flor seines

Acker=

Ackerbaus und die Ueberschwemmungen des Nils — der hohe Werth des Bodens, der ersteres und die leichte Verrückung der Grenzen die letzteres verursachte, machten frühe die Meßkunst an den Ufern dieses Flusses einheimisch, als Beschützerinn des Rechts und Beschirmerinn der Grenzen. Allein die ganze Feldmeßkunst beschränkte sich damals nur noch auf das Ausmessen einzelner Aecker. Die Instrumente, welche gebraucht wurden, waren die einfachsten. Blos der Ruthen oder der Messchnüre bedurfte man, um die Länge der Seiten zu messen, und des Winkelwerkzeuges um den rechten Winkel auf dem Felde zu finden.

Späterhin fing man an die Felder im Zusammenhange aufzunehmen, und Risse von Städten und Dörfern zu machen. Bald ging man weiter und setzte Karten von ganzen Ländern zusammen, indem man die Entfernungen nach Schritten nnd Wegmaßen bestimmte. Dieses war der Anfang der Geographie der Alten.

Hiermit nicht zufrieden, suchte man bald auch die Größe der Erde zu bestimmen. Eratosthenes war der erste der sie aus der Entfernung, von Alexandrien nach Siena herleitete. Diese war 5000 Stadien, und da der Unterschied der Polhöhen ungefähr $7\frac{1}{5}$ Grad war, so schloß er, daß der ganze Umfang der Erde 250000 Stadien wäre. Die Polhöhe zu Alexandrien hatte er beobachtet. Die von Siena schloß er zu $23\frac{1}{2}$ Grad,

weil

weil zu den Zeiten der Sommer-Sonnenwenden, die Sonne bis auf den Grund der tiefsten Brunnen der Stadt scheine.

So klein und dürftig war der Anfang unserer Geographie. — Die zwei Jahrtausende, die seit der Zeit verflossen sind, haben zu den alten Erfindungen immer neue hinzugefügt. Die Instrumente sind vervollkommnet, die Messungsmethoden sind verbessert, und die Rechnungen haben einen Grad von Feinheit erhalten, den man früher für unmöglich hielt. Vorzüglich haben die beiden letzten Jahrzehnte zur Vervollkommnung der Meßkunst beigetragen. Die Erfindung der Theilmaschine und der Wiederholungskreise hat gemacht, daß jetzt kleine Instrumente eine viel größere Genauigkeit geben als sonst große; hiedurch sind die Arbeiten zu gleicher Zeit genauer, schneller und wohlfeiler geworden. Hiezu kommt noch, daß durch die Einführung der metrischen Maße, der Decimalmaßstäbe und der Gleichförmigkeit der Zeichen, der Willkühr in den Maßstäben und Karten weniger Spielraum gelassen ist, wodurch die Lehre kürzer und das Lernen leichter geworden.

Ich werde das Ganze der Meßkunst in vier Büchern vortragen. Jedes Buch hat drei Unterabtheilungen, wovon die erste die theoretischen Kenntnisse, die zweite die Kenntniß der Instrumente, und die dritte die Anwendung derselben auf dem Felde enthält.

Das erste Buch ist für die Feldmesser (Arpenteurs) bestimmt, und enthält blos die Anfangsgründe der Rechenkunst und der Geometrie, nebst der Beschreibung der einfachsten Meßinstrumente, der Ruthen und des Winkelkreuzes, und ihre Anwendung beim Aufmessen eines Feldes oder eines Hofes.

Das zweite Buch ist für die Landmesser (Géometres). Dieses enthält ebenfalls die Rechenkunst und Geometrie, aber ausführlicher; dann folgt die Beschreibung des Meßtisches und die Aufnahme einer ganzen Gemeinheit.

Das dritte Buch ist für die Oberlandmesser (Géometres en chef). Den Anfang macht die Buchstabenrechenkunst und die ebene und sphärische Trigonometrie. Dann folgt die Beschreibung der Instrumente, welche der Oberlandmesser gebraucht. Des Spiegelsextanten, des Spiegelkreises, des Barometers u. s. w., und den Beschluß macht die Aufnahme einer ganzen Provinz, für die Verfertigung einer allgemeinen Karte oder eines Cadasters, nebst dem Nivellement der Bergrücken und Ströme.

Das vierte Buch ist für den Geographen, der die Karten von einem großen Reiche nach verschiedenen Projektionen entwirft, der eine lange Reihe von Dreiecken mit dem Wiederholungskreise mißt, und indem er

die

die Endpunkte mit astronomischen Beobachtungen verbindet, aus ihnen die Größe der Figur der Erde herleitet.

Auf diese Weise wird mit dem Größten, was die Meßkunst darbietet, der Kreis des Ganzen geschlossen.

Ich werde in diesen vier Büchern alles anführen, was sich auf die Meßkunst bezieht, so daß es eine vollständige praktische Geometrie wird, in welcher der Geometer über jeden Fall Auskunft findet, der ihm bei den kleinsten sowohl als bei den größten Arbeiten vorkommen kann. Ich werde aber weder alle Instrumente noch alle Methoden anführen, die sonst wohl gebraucht wurden, und auch noch jetzt hier und da gebraucht werden. Die Menge der Methoden und der Instrumente macht nur Verwirrung, und führt zu einer Weitläuftigkeit, die der Uebersicht schadet. Ich werde nur von denjenigen reden, die ich für die beßten und brauchbarsten halte, und die sich bei unserer Landesvermessung, sowohl in Hinsicht ihrer Genauigkeit als ihrer Bequemlichkeit erprobt haben. Durch eine scharfe Begrenzung seines Planes, ist es vielleicht möglich, das Ganze der Feldmeßkunst zu erschöpfen, und vollständig zu seyn ohne Verwirrung.

Ich werde von den Fehlern der Instrumente reden, aber nur von solchen, die der Künstler nicht vermeiden kann. Den Einfluß der andern werde ich nicht untersuchen,

suchen, weil ein Feldmesser Nie mit andern Instrumenten arbeitet, als mit guten. Die Rechnung, welche er über die Fehler der Instrumente führen müßte, würde ihm mehr Zeit kosten, als dem Künstler, sie zu verbessern, und da ihm diese Rechnung von Niemand vergütet wird, so würde er sich vielleicht erlauben, sie zu unterlassen, und so mit schlechten Instrumenten auch schlechte Arbeit liefern.

Es ist in der Feldmeßkunst viel gestriten worden, welches die beste Methode beim Aufnehmen sey, die der Parallelen oder die der Dreiecke. Der Streit, der mit wenig Uebersicht geführt wurde, entschied weder für die eine noch für die andere. Jede Methode hat ihre Vorzüge in verschiedenen Fällen, und ich werde beide gebrauchen.

Zu den lehrreichsten Schriften über die Feldmeßkunst gehören die von Bugge, Mayer und Bohnenberger, und unter den Franzosen die Basse du systême métrique, par de Lambre, das Mémorial topographique, welches im Dépot de la guerre erschienen ist, und Traitè de topographie d'arpentage et de nivellement, par Mr. Puissant.

In Bugge's Geometrie sieht man auf jeder Seite, daß ihr Verfasser lange einer großen Messung vorgestanden. Das Wesentliche ist ausführlich dargestellt, das

weniger

weniger Wesentliche ist übergangen. Nur ein praktischer Geometer kann eine praktische Geometrie schreiben.

Mayers praktische Geometrie ist schätzbar wegen ihrer Vollständigkeit. Man wird selten in ihr etwas vergeblich suchen. Man hat drei Auflagen von ihr. Vielleicht kann man zweierlei an ihr tadeln. Als praktische Geometrie ist sie für die gewöhnliche Landmesser zu gelehrt, und gerade für diese muß man schreiben. Auch gebraucht der Landmesser auf dem Felde nicht die Hälfte von demjenigen was sie enthält. Dann ist die Geometrie nicht mit dem Zeitalter fortgeschritten — sie ist da stehen geblieben, wo die praktische Geometrie im Jahr 1777 stand, und wo eine Genauigkeit, die bis auf $\frac{1}{400}$ ging, schon alles mögliche war, was man glaubte erreichen zu können. Es war damals noch keine Gradmessung bekannt, deren Genauigkeit bis auf $\frac{1}{3000}$ ging. Jetzt wird von den Oberlandmessern bei einer bloßen Landesvermessung schon eine solche Genauigkeit gefordert. Die Lehren vom Höhenmessen mit dem Barometer und die vom Schallmessen sind in ihr noch in derselben Unvollkommenheit wie sie vor 30 Jahren waren.

Die Schrift von Bohnenberger über geographische Ortsbestimmungen, kam 1795 heraus. Sie war die erste in der man alles beisammen fand, was sich hierauf bezieht. Sie war die erste die eine genaue Abbildung und Beschreibung des Sextanten gab, und hat viel zur Verbreitung dieses vortrefflichen Instruments beigetragen. Bei einer neuen Auflage wird der Herr Verfasser wahrscheinlich statt der hölzernen Quadranten, die ganze Kreise abbilden und beschreiben, und zugleich auf den großen Einfluß aufmerksam machen, den die Theilungsfehler der Sextanten auf die Genauigkeit der Messungen haben.

Das Mémorial topographique ist dem praktischen Geometer sehr nützlich, besonders das fünfte Heft, welches die Vorschriften über Maßstäbe und Kartenschrift enthält. Es ist zu bedauern, daß der verdienstvolle Herausgeber so frühe fiel, und daß mit ihm die Fortsetzung desselben unterbrochen wurde *).

Die Basse du systême metrique enthält eine ausführliche Beschreibung der Instrumente und Methoden, welche bei der letzten großen Gradmessung in Frankreich sind gebraucht worden, so wie diese Messung die wichtigste von allen war, die in neuern Zeiten sind unternommen worden, so ist die Beschreibung von de Lambre das Interessanteste, was in der praktischen Geometrie seit 20 Jahren erschienen ist.

Das Werk von Puissant ist zwar nur eine Compilation, die ohne einen bestimmten Plan gemacht ist, allein

*) Eine Kanonenkugel tödtete ihn in der Belagerung von Gaeta.

allein es ist immer zum Nachschlagen nützlich, wenn man nemlich nicht alle die Schriften besitzt, aus denen es zusammengetragen worden. Sein praktischer Werth ist indeß geringe, weil es von keinem Praktiker geschrieben worden — und daher manches enthält, was man auf dem Felde nicht gebraucht, und so umgekehrt.

Es könnte überflüßig scheinen, bei so vielen praktischen Geometrien noch eine neue zu schreiben. Ich will deßwegen hier die Umstände anführen, welche mich veranlaßten folgende Schrift abzufassen. Als die Regierung eine allgemeine Landesvermessung angeordnet hatte, so war ihre erste Sorge die Landmesser zu bilden, welche bei diesem Geschäft sollten gebraucht werden. Wir hatten damals ungefehr sechzig Landmesser, unter denen keine sechs waren, die ein Dreieck berechnen konnten. Im Winter von 1806 ließ sie etliche zwanzig von diesen Landmessern zwei Monate hindurch auf der Plankammer im Zeichnen und in der Rechenkunst und Geometrie unterrichten. Mit dem Fortschritte, welchen sie im Planzeichnen und in den Anfangsgründen der Mathematik machten, war man zufrieden. Sie wurden in zwei Klassen getheilt, in gemeine Feldmesser und in Landmesser; jede Klasse erhielt täglich zwei Stunden Unterricht in der Mathematik, und sechs Stunden im Zeichnen. Die Erfahrung zeigte, daß diese Einrichtung sehr vortheilhaft war; — es wurde im Jahr 1807 eine neue Landmesserordnung entworfen, und in dieser alle Geometer des

Groß-

Großherzogthums in drei Klassen getheilt, — in Feldmesser, in Landmesser und in Oberlandmesser, und jeder Klasse wurde ihre besondern Arbeiten und ihre besondere Arbeit und ihre besondern Instrumente gegeben. Man ging hiebei von dem Grundsatze aus: Nicht von allen alles zu fodern. Beim Unterrichte fehlte es uns an einem zweckmäßigen Lehrbuche, welches stufenweise vom Leichtern zum Schwerern ging, — welches allen nicht alles lehrte, und dessen Theile zugleich so ineinander griffen, daß endlich alle ein zusammenhängendes und vollständiges Ganze bildeten. Beim Unterrichte der Landmesser mußten wir ihnen die Hauptsätze diktiren, — hiedurch entstand eine praktische Geometrie, welche ganz auf ihr Bedürfniß berechnet war. — Die Landmesser theilten sich ihre Manuscripte einander mit — sie wurden abgeschrieben — und durch das öftere Abschreiben zuletzt so voll Fehler, daß es oft schwer wurde den Sinn zu errathen. Ich ließ dieses Manuscript deßwegen im Jahr 1809 unter folgendem Titel drucken: Anfangsgründe der Rechenkunst und Geometrie für die Feldmesser des Großherzogthums Berg. Hiedurch war dem Bedürfnisse der untersten Klasse unserer Geometer abgeholfen, und dieses war bei weitem die zahlreichste.

Im Jahr 1810 ließ ich ein ähnliches Handbuch für die Landmesser drucken, welches den Titel hat: Die Rechenchenkunst und Geometrie für die Geometer des Großherzogthum Berg.

Dieser Theil, der für die Trigonometer bestimmt ist, sollte früher erscheinen; — mancherlei Hindernisse haben seine Herausgabe verspätet.

Indem ich den Plan angegeben, den ich bei dieser praktischen Geometrie befolgt habe, so sey es mir auch erlaubt, seinen zweiten Titel zu rechtfertigen, nachdem es zu gleicher Zeit ein Lehrbuch für Schulen ist.

Die Pflanzschulen für junge Feldmesser sind die Landschulen. In diesen gibt es immer ein oder anderer Schüler, der sich als ein guter Rechner auszeichnet, und hilft man diesem weiter, so erhält man an ihm einen brauchbaren Feldmesser. Der Unterricht im Rechnen ist in unsern meisten Landschulen auf ein blos mechanisches Nachrechnen der Aufgaben in den Schlieperschen und Schürmannschen Rechenbüchern eingeschränkt, — und hat der Schüler einmal diese Fertigkeit erlangt, so findet er in ihnen nichts was ihn weiter führen könnte. Der Schullehrer, der ebenfalls nach diesen Büchern rechnen gelernt hat, kann ihn auch nicht weiter bringen, und so bleibt der Kreis der mathematischen Kenntnisse immer beschränkt, und weder Lehrer noch Schüler kennen die Gründe ihrer Rechnungen. Ich bestimmte deßwegen den ersten Theil, welcher die Anfangsgründe der Arithmetik

und

und Geometrie enthält, als Handbuch für unsere Schullehrer auf dem Lande, und nach den Erfahrungen, die ich gemacht habe, glaube ich schließen zu dürfen, daß es ihnen nützlich gewesen ist.

Den zweiten Theil bestimmte ich für die Stadtschulen, in denen die Schüler länger bleiben, und in denen sie im Rechnen weiter gehen als auf dem Lande. Der Sohn des Kaufmanns muß die Rechnungen für wachsende Zahlen kennen, — und also auch die Logarithmen — der Sohn des Spediteurs, des Weinhändlers muß lernen den Inhalt der reellen und nicht vollen Fässer anzugeben, welche bei seinem Vater aufs Lager kommen, und über deren Lekkage oder Verakcisung Rechnung geführt wird. So leicht diese Rechnungen sind, so kennen sie doch die wenigsten Schullehrer in Städten, und ich glaube einem wahren Bedürfnisse abgeholfen zu haben, daß ich ihnen einen leichtern Weg gezeigt, wie sie beide anstellen können.

Endlich habe ich diesen dritten Theil zum Unterrichte in höheren Schulanstalten bestimmt, so wie auch zum Selbstunterrichte für die, welche keine Gelegenheit haben, den Vortrag eines Lehrers benutzen zu können. Da ich im Vortrage von der gewöhnlichen Sprache der Mathematiker abgewichen bin, so will ich hier die Gründe auseinander setzen, welche mich hiezu bestimmten.

In

In fast allen unsern Schulen wird Mathematik gelehrt, und die meisten von den Männern, welche dem Staate und der Kirche in öffentlichen Aemtern dienen, haben mehr oder weniger Unterricht in dieser Wissenschaft genossen. Sieht man sich unbefangen unter ihnen um, so findet man es auffallend, daß alle diese so wenig Mathematik verstehen, obschon die Mathematik die leichteste von allen Wissenschaften ist, und daß sie von dem wenigen was sie wissen, sogar keinen Gebrauch im täglichen Leben machen können, obschon nicht zu läugnen ist, daß unter ihnen vortreffliche Köpfe sind, die jedes andere Wissen sehr zur rechten Zeit wissen anzuwenden.

Geht man in die Schulen, so findet man bald den Grund von dieser auffallenden Erscheinung. Viele Lehrer, die Unterricht in der Mathematik geben, verstehen selber so recht viel nicht davon, — diese sagen nun alles was sie wissen, und dieses ist unter allen schlechten Methoden des Vortrags eine der schlimmsten. Nur dies, was er weise verschweigt, zeigt nur den Meister des Stiels, sagt Goethe. Denn sagen sie dieses noch obendrein dem Schüler in einer ihm fremden Sprache, — und mit fremden Zeichen. — Dieses bringt den Schüler auf die Meinung, daß die Sache schwer sey — und es ist unmöglich, eine Sache, die an sich leicht ist, zu begreifen, sobald man sie für schwerer hält, weil man dasjenige, was man bereits begriffen hat, nicht fürs Rechte hält, und in der Meinung bleibt, das Rechte käme noch.

So ist die leichte Lehre vom Höhenmessen mit dem Barometer deßwegen so allgemein nicht verstanden worden, weil man sie für schwer hielt, indeß Lehren, die wirklich schwer waren, ungleich allgemeiner verstanden wurden. — Beim Unterrichte hängt alles vom ersten Eindrucke ab, ob eine Kenntniß freudig und lebendig werde, oder aber matt und trübe. Ist der erste Eindruck verfehlt, ist einmal eine verworrene Vorstellung da, dann bringt es einer sehr schwer oder nie in diesem Kapitel zu einer klaren Vorstellung. — Ein ungeschickter Lehrer bringt es nicht allein dahin, daß sein Schüler nichts lernt, — das freilich schlimm ist, — allein er zerstört auch die Fähigkeit des Lernens in ihm — und das ist das Schlimmere. Man sieht dieses an den Knaben der vornehmern Stände, an denen gewöhnlich von Jugend auf allerhand Hofmeister experimentirt haben, und deren Fähigkeit zu lernen, dadurch fast ganz zerstört worden ist.

Gewöhnlich fängt der Unterricht in der Mathematik zu frühe an. Sollen die Knaben schnelle Fortschritte machen, so müssen sie erst zur rechten Zeit anfangen, und im vierzehnten Jahre nichts mehr von der Mathematik verstehen, als das Einmal Eins, und daß ein Dreieck eine Figur mit drei Seiten sey. Der Werth unserer Kenntnisse hängt nicht allein von ihrer Menge ab, sondern von ihrer Lebendigkeit, von ihrer Klarheit, von der Sicherheit, mit der wir sie gebrauchen; und diese Klarheit entsteht nur dann im Gemüthe, wenn man

sich

sich einer Kenntniß ganz und auf einmal hingibt, und nur eine Sache umfaßt, und diese mit ganzer Seele. — Ein Knabe von Talent, der mit vierzehn Jahren und ohne alle Vorkenntnisse in die Mathematik eingeführt wird, lernt alles das, was in diesen drei Theilen steht, in Zeit von sechs Monaten. Er vergißt es auch vielleicht wieder in den nächsten sechs oder zwölf Monaten, allein der Eindruck, den es auf seine Seele gemacht, ist einmal klar und lebendig gewesen, und das Zutrauen zu seinen Kräften, das durch das schnelle Lernen entsteht, begleitet ihn sein ganzes Leben. — Ein anderer Knabe wird vielleicht von seinen Lehrern sechs Jahre in der Mathematik geübt, — und hat dann von allem dem nichts. Auch in Iverdün hat man die Bemerkung gemacht, daß die Knaben, welche mit vierzehn Jahren ganz roh hinkommen, schnellere Fortschritte in der Mathematik machen als die, welche mit dem zehnten Jahre anfangen, und daß sie diese dann bald hinter sich zurück lassen.

Daß mit dem Studio der Mathematik zur rechten Zeit angefangen werde, ist die erste Bedingung, — daß es auf die rechte Weise geschehe, ist die zweite.

Bei der Geometrie gibt es nur zwei Wege, und nur zwei Zwecke. Der erste ist die Geometrie ihrer Brauchbarkeit wegen zu studiren. Diesen Weg hat das Menschengeschlecht bei seinem Studio eingeschlagen, und es hat manchen Satz früher angewendet, ehe es ihn beweisen konnte. Der zweite ist: die Geometrie ihrer Form wegen zu studiren, und sich an ihr als ein in allen seinen Theilen vollendetes Gebäude zu ergötzen. Hiebei sieht man nur auf die Eleganz der Darstellung. Dieses war das Ziel, welches Euklid, einer der größten Geometer des Alterthums, verfolgte. — Diese Zierlichkeit ist aber nur für die Meister; — sie geht erst aus der Sicherheit und aus der Uebersicht hervor. Die besten Köpfe unter den Schülern begreifen gewöhnlich nicht, warum er gerade in seinem ersten Buche mit dem ersten Satze den Anfang mache. Euklids Geometrie gehört vielleicht eben so sehr in die Logik als in die Mathematik.

Indeß ist diese Sprache und dieser Vortrag nicht für die Schüler. Zu diesen muß man in der Sprache reden, die sie kennen, nemlich in der des täglichen Lebens, damit die neue Wahrheit sich innig an die vorhandenen anschließe, und nicht fremd und einzeln im Gemüthe stehen bleibe. Daß der Mensch und sein Wissen aus einem Stück bestehe, darauf beruhet der Werth von beiden, und dies ist der Fluch unserer Büchererziehung, daß sie mit dem Leben kein Ganzes macht.

Zur Abkürzung des Vortrags haben die Mathematiker eine eigene Kunstsprache, und eine eigene Bezeichnung erfunden. Diese lernt erst der Schüler, wenn er die Sache schon kennt, damit er nicht zu gleicher Zeit einen neuen Begriff und ein neues Wort in sich aufnehmen

men müsse. — Auch haben die Mathematiker erst die Mathematik, und dann die Kunstsprache erfunden. Diese mathematische Kunstsprache ist bei der Auffindung neuer Wahrheiten oft von großem Nutzen gewesen. Man rechnete mit Begriffen und Zeichen fort, und fand oft ein Resultat, auf das man durch die bloße Betrachtung des Gegenstandes vielleicht sobald noch nicht würde gekommen seyn.

Es ist zwar immer der schicklichste Weg, alle Eigenschaften einer Sache aus ihrer natürlichen Ansicht zu entwickeln, allein es ist oft leichter mit Begriffen fortzurechnen, und sich erst um den schicklichsten Weg umzusehen, wenn die Wahrheit gefunden ist. Doch entferne man sich mit dieser mathematischen Zeichensprache nicht zu weit von dem, was man natürliche Geometrie nennt. Die, welche die bedeutendsten Entdeckungen gemacht haben, waren immer solche, die beides miteinander verbanden, und bei denen, wie Lichtenberg von Mayer erzählt: der Mensch und der Gelehrte aus einem Stück gemacht waren. Bernoulli war vielleicht ein größerer Rechner, und erfand eine Barometerformel, deren Fehler jemand einsehen konnte, welcher nur die vier Species kannte.

Ich habe mich in diesem Werke der mathematischen Zeichensprache gar nicht bedient, sondern alles mit schlichten Worten aus der Natur und der Beschaffenheit des Gegenstandes hergeleitet. Daß man auf diese Weise selbst solche Lehren gründlich vortragen könne, welche man lange Zeit für sehr schwierig gehalten hat, das beweist gerade die Lehre vom Höhenmessen mit dem Barometer, welche völlig erschöpft ist, und ohne eine einzige Formel.

Indem ich diese Einleitung schließe, sey mir der Wunsch erlaubt, daß ein Mathematiker, welcher eine große Bibliothek zu seinem Gebrauche hat, ein vollständiges Wörterbuch über die praktische Geometrie ungefähr nach dem Plane herausgeben möge, wie das Gehlersche über die Physik. Dieses enthält dann bei jedem Artikel zugleich seine Geschichte und alles was darüber geschrieben worden. Es wäre blos zum Nachschlagen, und Vollständigkeit würde in ihm nicht zur unbequemen Weitläuftigkeit, wie dieses immer der Fall ist, wenn man in einem Werke, wie das gegenwärtige, in dem Sinne vollständig seyn will, daß man alles aufnimmt, was sich über den Gegenstand findet.

Inhalt.

Anfangsgründe der höheren Rechenkunst.

§. 49.

§. 79.

Die ebene Trigonometrie.

§. 27.

Anwendung der Trigonometrie.

Von den Instrumenten des Trigonometers.

§. 7.

Arbeiten des Trigonometers.

§. 31.

Schallmessungen.

Verzeichniß der Kupfertafeln.

Taf.

Taf. VIII. enthält eine Abbildung des Spiegelsextanten und des Spiegelkreises.

Die nähere Erklärung jeder Kupfertafel wird man leicht mit Hülfe des Registers auffinden.

Preise der Instrumente.

Ein Spiegelsextant . .	20	Louisd'or
Ein Spiegelkreis . .	32	—
Zwei Barometer . . .	8	—
Vier Thermometer . .	2	—
Eine Tertienuhr : . .	6	—
Eine Pariser Toise . .	7	—
Ein Stangenzirkel . .	1	—

Da der Trigonometer den Spiegelkreis entbehren kann, sobald er nur den Spiegelsextanten hat, so kommen ihm seine Instrumente auf 44 Louisd'or zu stehen, und die, welche er früher als Feldmesser und Geometer hatte, kosten ihm 14 Louisd'or.

Anfangsgründe
der
höhern Rechenkunst.
(Algebra.)

§. 1.

Im ersten und zweiten Theile haben wir die Rechenkunst mit den neun Zahlzeichen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) gelehrt und gesehen, daß die Leichtigkeit, mit der wir große Rechnungen ausführen konnten, zum größten Theile von der Bequemlichkeit der Zeichen abhing, die wir hiebei gebrauchten. — Indem jedes Zeichen einen doppelten Werth hat, wovon der eine von seiner Figur und der andere von der Stelle abhängt, wo er steht, so können wir mit so wenigen Zeichen die größten Zahlen mit Bequemlichkeit ausdrücken. — Daß wir unsere Zahlen nach dem Decimalsystem schreiben, scheint ein unbedeutender Umstand zu seyn, und doch verdankt unsere Rechenkunst ihm fast ganz allein die große Ueberlegenheit, welche sie über die Rechenkunst der Griechen und Römer hat.

§. 2.

§. 2.

Die Schwierigkeit bei großen und verwickelten Rechnungen besteht blos in der Länge des Weges, den man zu gehen und zu übersehen hat. Jede einzelne Arbeit ist an sich leicht — nur müssen dieser Arbeiten viele und von vielerlei Art unternommen werden, ehe man am Ziele ist. — Der Rechner muß alle übersehen, um sich den Weg vorzeichnen zu können, den er gehen will, und um dieses zu können, muß er eine deutliche Ansicht von der Natur der Aufgabe haben. — Diese deutliche Ansicht wird durch nichts so sehr erleichtert, als durch einfache Zeichen, die theils durch ihre Form, theils durch ihre Stellung und Verbindung eine Menge Eigenschaften der gegebenen Größen auf eine so kurze Weise ausdrücken, daß man sie leicht übersehen kann. So pflegt man z. B. die bekannten Größen mit dem Anfangsbuchstaben des Alphabets (a b c d e...) zu bezeichnen, und die unbekannten mit den Endbuchstaben (x y z). So wie also ein Rechner die Größen einer Aufgabe in Buchstaben hingeschrieben hat, so kann gleich ein Anderer an den Buchstaben sehen, welche Größen bekannt und welche unbekannt sind, und ohne daß es mit Worten gesagt wird.

§. 3.

In jeder Aufgabe kommen bekannte und unbekannte Größen vor, und zwar in einer solchen Verbindung, daß die bekannten die unbekannten bestimmen. Die Kunst des Rechnens besteht darin, mit jenen allerhand Veränderungen vorzunehmen, bis man diese gefunden hat.

Genau genommen sind in jeder Aufgabe alle Größen

von

von Anfang an bekannt, nur sind die, welche wir unbekannt nennen, in einer so verwickelten Form da, daß wir sie nicht gleich erkennen. Das Ausrechnen besteht eigentlich nur darin: sie in eine so einfache Form zu bringen, daß jeder ihren Werth ohne Schwierigkeit einsieht. — Es schlägt 8 Uhr. Ein Fremder fragt den Kellner: Wie früh wird zu Nacht gespeist? Dieser antwortet: Wenn der Minutenzeiger wieder über dem Stundenzeiger steht. Ist der Fremde ein guter Kopfrechner, so ist das eben so deutlich für ihn, als wenn der Kellner gesagt hätte: um 8 Uhr 43 Minuten 38 Sekunden. — Jenes ist nur verwickelter — dieses ist einfacher, aber beides ist gleich bestimmt und gleich klar.

§. 4.

Eine Aufgabe, die in Worten ausgedrückt, eine ganze Seite einnimmt, nimmt, wenn man sie in der Sprache der mathematischen Zeichen schreibt, nur ein paar Zeilen ein, und übersieht sich dann ungleich leichter. Das erste was daher der Rechner zu thun hat, ist, sie aus den Worten in diese bequeme Zeichensprache zu übersetzen. Ist dieses geschehen, so sieht er zu, welche Veränderung er mit diesen Zeichen vornehmen muß, um die Aufgabe auf einen einfachern Ausdruck zu bringen. Kommt z. B. folgender Ausdruck vor: $1 + \frac{3\frac{4}{5}}{4}$, so erhält er, indem er den Bruch einrichtet und mit dem Nenner dividirt, 1,95, ein Ausdruck, der mit dem vorigen gleichbedeutend ist, der sich aber ungleich leichter übersieht, weil er einfacher ist.

Diese Veränderungen, wodurch man eine Größe auf eine andere Form bringt, ohne ihren Werth zu ändern, gibt es mancherlei. Die Kunst, sie anzuwenden, lehrt die Algebra, welche auch hievon ihren Namen hat. Dieser ist arabisch, und ein Kunstausdruck aus der Chirurgie. Er bedeutet: verrenkte Glieder wieder einzurichten. Bei dem langen Aufenthalte der Araber in Spanien sind viele Worte aus ihrer Sprache in die Spanische übergegangen, und noch heißt in dieser Algebrista ein Mann, der die Kunst ausübt, verrenkte Glieder wieder einzurichten. Vor einigen Jahren gab der Scharfrichter in Madrid ein Buch über las Algebras heraus, in dem man vergeblich nach Buchstabenrechnungen würde gesucht haben. — Auch im Deutschen scheint man diese Ausdrücke aus der Chirurgie übernommen zu haben, — und man sagt ebensowohl: einen Bruch einrichten, als: ein verrenktes Glied einrichten.

§. 5.

Mit der Algebra beschäftigten sich unter den europäischen Völkern zuerst die Italiener, besonders gegen das Ende des 15ten Jahrhunderts, wo überall in Italien Künste und Wissenschaften blüheten, und wo fast jede Stadt ein kleines Athen war. Diese nannten sie: Regola de la Cosa, von la Cosa die Sache, worunter sie die unbekannte Größe verstanden, welche gesucht wurde. Unsere alten deutschen Rechenmeister gaben ihr denselben Namen, und nannten sich selber Cossisten. Gegen das Ende des 18ten Jahrhunders, wo man anfing fremde Worte in der Sprache zu vermeiden, nannte man sie: die Buchstaben-Rechenkunst. Allein da die Buchstaben nicht die einzigen Zeichen sind, die man gebraucht, und

es

es überhaupt einerlei ist, welche Zeichen man gebraucht, so scheint diese Bezeichnung nicht ganz passend zu seyn. — Neuton schrieb eine Arithmetica universalis; — und eins der berühmtesten neuern algebraischen Lehrbücher hat ebenfalls den Namen: Allgemeine Rechenkunst *). Ihre Allgemeinheit besteht darin, daß man mit ihr alle Aufgaben lösen kann, die in Zahlen gegeben werden, wenn sie nicht die Kräfte des menschlichen Verstandes und den Umfang unsrer jetzigen mathematischen Kenntnisse übersteigen. Zu ihr gehören alle Rechnungsarten, auch die vier Species und die Regel von Dreien. Doch pflegt man diese nicht mit in der allgemeinen Rechenkunst vorzutragen, weil man sie als bekannt voraussetzt, da sie in besondern Lehrbüchern vorgetragen werden, und jeder, der zur Algebra kommt, die Rechnungen des täglichen Lebens schon kennt. — Man würde sich irren, wenn man glauben wollte, daß ihre Allgemeinheit darin bestünde, daß sie Eine Regel gebe, welche alle Aufgaben löste. — Sie löst alle Aufgaben, obschon jede nach besondern Regeln, welche durch die Natur der Aufgabe bestimmt werden.

Der Grund ihrer Allgemeinheit liegt darin, daß sie alle Arten von Größen betrachtet, sowohl negative als positive, sowohl irrationale als rationale. — Ja selbst die unmöglichen Größen schließt sie nicht bei ihren Untersuchungen aus, und obschon diese nicht wirklich dargestellt können werden, so gebraucht sie sie doch bei den Rechnungen, weil das Produkt von zweien unmöglichen Größen, in vielen Fällen wieder eine mögliche Größe wird.

Die Beschränktheit der Rechenkunst des täglichen Lebens rührt vorzüglich daher, daß man in ihr keine negativen

*) Elémens d'arithmétique universelle.

tiven Größen betrachtet. — Man könnte dieses, — allein irgendwo muß man doch eine Grenze annehmen, und denn ist unstreitig die schicklichste Stelle, daß man sie da nimmt, wo man ohne den Begriff der entgegengesetzten Größen nicht weiter kommen kann. Hier fängt dann das Gebiet der Algebra an. Nennt man die Rechenkunst des bürgerlichen Lebens die Gemeine, so kann man diese auf eine nicht unschickliche Weise die Höhere nennen. — Namen thun wenig zur Sache. Ich habe diesen gewählt, weil mir der Ausdruck bequemer schien.

Ich habe die Rechenkunst des täglichen Lebens im ersten und zweiten Theile dieser praktischen Geometrie gelehrt. Dieser Theil ist der dritte, und eine Fortsetzung von jenen. Er enthält nur die Anfangsgründe der höhern Rechenkunst. Sie ganz aufzunehmen, würde die Grenzen des Buchs überschritten haben, so wie auch die Grenzen des Plans. — Unser Wissen muß stufenweise fortschreiten — und am Ende jedes Stadiums müssen wir eine deutliche Uebersicht des durchlaufenen Weges haben. — Sind die Stadien zu groß gewählt, so ist dieses schwierig. Hat man aber einmal eine deutliche Uebersicht einer Wissenschaft erlangt, so kann man in größern Werken jede einzelne Lehre bis zu ihrer entferntesten Grenze durchlaufen, ohne daß man zu befürchten hat über dem Einzeluen die Uebersicht über den Zusammenhang des Ganzen zu verlieren.

§. 6.

Die vier Rechnungsarten mit entgegengesetzten Größen.

Bei der Lehre von den vier Rechnungsarten mit Zahlen und Buchstaben nahmen wir an, daß die Größen völlig gleichartig wären, weil man mit ungleichartigen Größen nicht rechnen kann, da zwischen ihnen kein Verhältniß statt finden könne. — Kennt man den Preis von einem Pfund Kaffe, dann kann man hievon noch keinen Schluß auf den Preis von 10 Pfund Baumwolle machen.

Allein die Größen können gleichartig in einer Beziehung seyn, und in einer andern doch wieder entgegengesetzt. Ein Schiff, welches von Amerika nach Europa geht, segelt heute mit Westwind 40 Meilen auf Europa zu, und morgen mit Ostwind 30 Meilen nach Amerika hin. Dieses ist dann zwar 70 Meilen gesegelt, aber doch nur 10 Meilen von der Stelle gekommen, wo es aussegelte. Die 40 und die 30 Meilen sind in einer Beziehung zwar gleichartige Größen, in einer andern aber entgegengesetzte. Fragt man: wie viel Meilen das Schiff gesegelt ist? so ist die Antwort: 70. Fragt man aber: wie weit das Schiff vorwärts gekommen, so ist die Antwort: 10 Meilen. Eben so sind Vermögen und Schulden entgegengesetzte Größen. Ferner: hinauf und hinuntersteigen u. s. w.

Man bezeichnet sie mit den Zeichen + und —, weil diese Zeichen entgegengesetzte Rechnungsarten anzeigen, nemlich: zusammenziehen und voneinander abziehen.

Wird

Wird eine Größe ohne Zeichen geschrieben, wie z. B. ab, so wird sie als bejaht (positiv) genommen, und bedeutet eben so viel als + ab. Soll sie verneint seyn, (negativ) so wird das Zeichen — daran gesetzt. — ab.

Man kann mit Größen rechnen, ohne an den Begriff des Bejahten und Verneinten zu denken. — Der Schiffer, der einen Tag 40, den andern Tag 30, den dritten 25 Meilen von Amerika auf Europa zu fährt, weiß, daß er in allem 95 Meilen vorwärts gekommen, und bedarf, so lange er nicht zurücksegelt, den Begriff des entgegengesetzten nicht. — Treibt ihn aber einen Tag der Wind 30 Meilen nach entgegengesetzter Richtung, so wird er von selber auf den Begriff des Entgegengesetzten gebracht, und, wenn er diese 30 Meilen von jenen unterscheiden will, so muß er sie mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn er jenen das Zeichen + gab.

Sind in folgender Reihe Zahlen

.....6, 4, 5, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.....

die rechts von 0 bejaht oder +, so müssen die links von 0 verneint oder — seyn, weil sie ihnen in Hinsicht der Lage entgegengesetzt sind. Denn von 0 an gehen beide Reihen Zahlen ohne Ende fort, aber nach entgegengesetzten Richtungen.

Wenn man sich also eine Größe verneint denkt, so kann dieses nur in Beziehung auf eine andere Größe geschehen, die man sich als bejaht denkt, und der sie entgegengesetzt ist.

Eben so kann man keine Größe als bejaht denken, wenn man sich nicht eine andere, die ihr entgegengesetzt ist, als verneint denkt.

§. 7.

Das Zusammenzählen entgegengesetzter Größen. (Addiren.)

Wenn mehrere entgegengesetzte Größen zusammen gezählt werden sollen, so addire man alle die das Zeichen + haben, und ziehe hievon die mit dem Zeichen — ab. Das, was bleibt, bezeichne man mit +, wenn die Summe aller positiven Zahlen größer war, als die Summe der negativen. Ist aber die Summe von diesen größer, so bezeichne man den Rest mit —.

Beispiel. Wie viel beträgt + 7 + 6 — 5 — 3? Antwort + 5.

Wie viel ist + 5 + 3 — 7 — 6? Antw. — 5.

Wenn jemand sein Vermögen will kennen lernen, und er findet, daß er 300 Thaler schuldig ist, und 400 Thaler zu fodern hat, so weiß er, daß er nur 100 Thaler reich ist, weil Schulden negatives Vermögen sind. Sein Vermögen ist also + 100 Thaler.

Ein anderer, der 400 Thaler schuldig ist, und 300 zu fodern hat, hat ein Vermögen von — 100 Thaler.

Wenn man in einer bergigten Gegend 600 Fuß steigt, dann wieder 200 Fuß bergunter geht — dann abermals 500 Fuß steigt, und noch wieder 300 Fuß bergunter geht — wie hoch ist man über dem Punkte, von dem man ausging?

Antwort: + 600 — 200 + 500 — 300 = 600 Fuß.

§. 8.

Das Abziehen entgegengesetzter Größen. (Subtrahiren.)

1) Wenn zwei Größen von einander sollen abgezogen werden, die beide +, oder die beide — sind, und zwar die Kleinere von der Größern, so hat die Sache weiter keine Schwierigkeit.

Zieht man von + 700 + 300 ab, so bleibt + 400.

Zieht man von — 800 — 200 ab, so bleibt — 600.

2) Soll aber die Größere von der Kleineren abgezogen, so kann man sich die Sache so vorstellen:

Man kann jede Zahl als die Summe von ihr und Null ansehen. So ist z. B. 300 die Summe von 300 + 0. Ebenfalls ist 300 die Summe von 300 + 700 — 700. Denn + 700 — 700 sind zusammen = 0. Soll nun von + 300 die Zahl + 700 abgezogen werden, so schreibt man 300 auf folgende Weise: + 300 + 700 — 700. Nimmt man hievon + 700 weg, so bleibt + 300 und — 700 übrig, welche zusammen — 400 sind.

3) Auf diese Weise ist das Abziehen entgegengesetzter Größen immer sehr leicht. Gesetzt, man soll von + 500 die Zahl — 700 abziehen, so schreibt man + 500 = + 500 + 700 — 700. Nimmt man nun von diesen — 700 weg, so bleibt + 500 + 700 übrig, welches + 1200 ist.

Man braucht bei der Rechnung nicht jedesmal alle diese Zahlen zu schreiben. Die kleinen Abkürzungen, die hiebei statt finden, findet jeder leicht von selber, und behält sie dann besser, als wann sie mit Worten gesagt werden.

Auf=

Aufgabe. Die Spitze des Montblanc ist 14800 Fuß über der See. Das Hospitium auf dem Bernhard 7500. Wie viel höher ist jener?

$$14800 + 7500 - 7500$$

Hievon abgezogen $+ 7500$

bleibt $14800 - 7500 = 7300$ Fuß.

Hätte man gesagt: Wie viel höher ist die Spitze des Montblanc als die englischen Kohlengruben, die 300 Fuß unter der See sind? So hätte man gehabt

$$14800 + 300 - 300$$

Hievon abgezogen $- 300$, bleibt $14800 + 300 = 15100$ Fuß, um welche jene Bergspitze höher ist.

§. 9.

Das Vervielfachen entgegengesetzter Größen. (Multipliciren.)

1) Beim Vervielfachen kommen immer zwei Zahlen vor. Nemlich die, welche vervielfacht wird, (der Multiplikandus) und die, welche vervielfacht, (der Multiplikator). Jene kann eine benannte Zahl seyn, und das Zeichen + oder — haben, also bejaht oder verneint seyn. Hingegen ist der Multiplikator der Natur der Sache nach immer eine unbenannte Zahl, und das Produkt hat daher immer das Zeichen der Zahl, welche vervielfacht wird.

Beispiel. $+ 700$ mal 3 ist $+ 2100$
$- 800$ mal 5 ist $- 4000$

2) Soll aber das Produkt das entgegengesetzte Zeichen haben, so deutet man dieses dadurch an, daß man das Zeichen — vor den Multiplikator setzt. So ist

$+ 700$

$+ 700$ mal $- 3 = 2100$, allein das Produkt soll das entgegengesetzte Zeichen des Multiplikandus haben, und nicht wie vorher $+ 2100$, sondern $- 2100$ seyn.

Hätte man andeuten wollen, daß das Produkt dasselbe Zeichen, wie die Zahl die vervielfacht wird, hätte haben sollen, so hätte man an die 3 das Zeichen $+$ setzen können.

3) Wenn daher eine Zahl das Zeichen $+$ oder $-$ bei sich hat, und sie soll eine andere Zahl vervielfachen, so bekommen diese Zeichen eine andere Bedeutung. Sie zeigen nun an, ob das Produkt von derselben Art seyn soll, wie die Zahl, welche vervielfacht wird, oder aber von entgegengesetzter. Auf die Zahl selber beziehen sie sich nicht mehr, denn diese ist, sobald sie Multiplikator wird, weder bejaht noch verneint, noch eine benannte Zahl, wie schon oben bemerkt worden.

Es ist daher $+ 4$ mal $+ 3 = + 12$
$- 4$ mal $+ 3 = - 12$
$+ 4$ mal $- 3 = - 12$
$- 4$ mal $- 3 = + 12$

Oder in Buchstaben:
$+ a$ mal $+ b = + ab$
$- a$ mal $+ b = - ab$
$+ a$ mal $- b = - ab$
$- a$ mal $- b = + ab$

4) Wenn also der Multiplikator das verneinte Zeichen hat, so verändert dieses das Zeichen der Zahl, die multiplicirt wird, ins entgegengesetzte.

$+ 4$ mal $- 3$ ist so viel wie $- 4$ mal $3 = - 12$
$- a$ mal $- b$ ist so viel als $+ a$ mal $b = ab$

5) Da also $+ a$ mal $+ b = + ab$ ist,
und $- a$ mal $- b$ auch $= + ab$ ist,

so

so folgt hieraus die Rechnungsregel: daß wenn zwei Zahlen mit gleichen Zeichen multiplicirt werden, das Produkt jedesmal + oder bejaht sey.

6) Da ferner: $-$ a mal $+$ b $= -$ ab,
und $+$ a mal $-$ b ebenfalls $= -$ ab
ist, so folgt hieraus die zweite Rechnungsregel: daß wenn zwei Zahlen die entgegengesetzte Zeichen haben, mit einander multiplicirt werden, das Produkt jedesmal das Zeichen $-$ habe oder verneint sey.

Anmerkung 1. Die Anfänger finden oft Schwierigkeit darin, daß -4 mal -3 zum Produkt $+12$ gibt. Allein diese fallen weg, sobald man weiß, daß der Multiplikator jedesmal eine unbenannte Zahl ist, hier z. B. 3. Das Produkt ist also, wenn weiter nichts bemerkt wird, -12. Wird aber noch bemerkt, daß das Produkt das Dreifache von -4, aber zugleich das Entgegengesetzte seyn soll, so wird um dieses anzuzeigen vor die 3 das Verneinungszeichen gesetzt, und das Produkt ist dann $+12$. A hat 600 Thaler Schulden oder negatives Vermögen, B hat 5 mal so viel Vermögen, aber entgegengesetztes; so muß er natürlich 3000 Thaler positives Vermögen haben. -600 mal -5 ist $+3000$.

Anmerkung 2. Die beiden Zahlen, welche mit einander multiplicirt werden, nennt man auch die Faktoren, und das, was man erhält: das Produkt.

§. 10.

Das Theilen mit entgegengesetzten Größen. (Dividiren.)

1) Beim Theilen kommen jedesmal zwei Zahlen vor. Die, welche getheilt wird, (der Dividendus) und die, welche

welche theilt (der Divisor). Jene kann eine benannte Zahl seyn, oder eine bejahte oder verneinte. Diese ist immer eine unbenannte. Das, was man bei der Theilung erhält, heißt der Quotient.

Ist die zu theilende Zahl bejaht, so ist es auch der Quotient. Ist sie verneint, so ist es auch dieser.

$+$ 300 dividirt mit 2 gibt $+$ 150
$-$ 600 dividirt mit 4 gibt $-$ 150.

2) Soll bei der Division zugleich angegeben werden, ob der Quotient das Zeichen der zu theilenden Zahl, oder das entgegengesetzte haben soll, so wird im ersten Fall das Bejahende $+$ und im zweiten das Verneinende $-$ vor den Divisor geschrieben.

So ist $+ 12$ dividirt mit $+ 3 = + 4$
$- 12$ dividirt mit $+ 3 = - 4$
$+ 12$ dividirt mit $- 3 = - 4$
$- 12$ dividirt mit $- 3 = + 4$

Oder in Buchstaben:

$+ a$ dividirt mit $+ b = + \frac{a}{b}$

$- a$ dividirt mit $+ b = - \frac{a}{b}$

$+ a$ dividirt mit $- b = - \frac{a}{b}$

$- a$ bividirt mit $- b = + \frac{a}{b}$

3) Da also $+ a$ dividirt mit $+ b = + \frac{a}{b}$ ist,

und $- a$ dividirt mit $- b$ auch $= + \frac{a}{b}$

ist, so haben wir die Rechnungsregel: Wenn Divisor und Dividendus gleiche Zeichen haben, so hat der Quotient das Zeichen $+$, oder ist bejahet.

4) Da

4) Da ferner: $+ a$ dividirt mit $- b = - \frac{a}{b}$ und $- a$ dividirt mit $+ b$ ebenfalls $= - \frac{a}{b}$ ist, so haben wir die zweite Rechnungsregel: daß wenn zwei Zahlen mit einander dividirt werden, die ungleiche Zeichen haben, der Quotient jedesmal das Zeichen — hat, oder verneinet ist.

Anmerk. Auch bei der Division mit entgegengesetzten Größen finden Anfänger oft dieselben Schwierigkeiten wie bei der Multiplikation.

Daß $+ 12$ mit $+ 3$ dividirt $+ 4$ gibt, leuchtet ihnen zwar ein, allein daß $- 12$ mit $- 3$ ebenfalls $+ 4$ gibt, das ist ihnen schwieriger. Allein wenn man bedenkt, daß das verneinende Zeichen vor der 3 sagt; daß der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Dividendus haben soll, so sieht man ein, daß dieser nichts anders als $+ 4$ seyn kann. Wäre die zu theilende Zahl $+ 12$ gewesen, so hätte der Quotient $- 4$ seyn müssen, wenn der Divisor 3 war, und zugleich das verneinende Zeichen — bei sich hatte.

Von den vier Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

§. 11.

Das Zusammenzählen zusammengesetzter Größen. (Addiren.)

Wenn zwei oder mehrere zusammengesetzte Größen addirt werden sollen, so schreibt man das Zeichen + zwischen sie.

Bei-

Beispiel. Man soll zu $a + b - c$ noch $f - g + h$ addiren, so hat man $a + b - c + f - g + h$.

Oder in Zahlen: zu $4 + 7 - 3$ soll noch $9 - 4 + 12$ addirt werden, so hat man $4 + 7 - 3 + 9 - 4 + 12 = + 25$.

Man addirt nemlich alle mit dem Zeichen + zusammen, und zieht von diesen die mit dem Zeichen — ab. Ist die Summe von jenen größer, so hat der Rest das Zeichen +. Sind aber diese größer, so hat er das Zeichen —, wie oben gelehrt worden.

2) Wenn mehrere Größen mit entgegengesetzten Zeichen da sind, als $+ a$ und $- a$, so heben sich diese in der Summe auf, und man kann sie weglassen.

Beispiel. Zu $+ a + b$ soll $- a - b + c$ addirt werden, so ist die Summe $= c$.

Ebenfalls kann man die Summe kürzer schreiben, wenn man Größen von folgender Form hat. $+ 3a - 4b + 5a - 7b$ ist $= + 8a - 11b$.

3) Hat man zwei Formeln von folgender Form zu addiren: $a + b$ und $a - b$, so hat man in der Summe $2a$, da $+$ und $-b$ sich gegen einander aufheben.

Hieraus folgt, daß wenn zu der Summe zweier Zahlen $(a + b)$ ihre Differenz $(a - b)$ addirt wird, man die Größere doppelt erhält.

4) Beim Addiren schreibt man so viel möglich alle ähnliche Zahlen untereinander, damit man desto leichter die Abkürzungen übersehen könne, welche möglich sind.

1. Beispiel.
$$\begin{array}{rrr} -4a & +2b & +3c \\ +1a & -3b & -1c \\ \hline -3a & -1b & +2c \end{array}$$

Statt

Statt 1 a und 1 c kann man auch blos a und c schreiben, da die 1 nicht multiplicirt.

2. Beispiel.
$$\begin{array}{rrrr} + a^3 & - 2 a^2 b & + 2 a b^2 & \\ & - a^2 b & + 2 a b^2 & - b^3 \\ \hline a^3 & - 3 a^2 b & + 4 a b^2 & - b^3 \end{array}$$

Man sieht leicht ein, daß man die Abkürzungen nur bei Zahlen von derselben Form anbringen kann, wie hier $- 2 a^2 b$. Sind sie in der Form verschieden, so kann man es nicht. So z. B. läßt sich $2 a^2 + 3 a$ eben so wenig kürzer schreiben als $2 c^5 - c^3$. Wollte man statt des letzten Ausdrucks $2 c^2$ schreiben, so wäre das irrig. Gesetzt, c sey $= 3$, so ist $2 c^5 - c^2 = 486 - 9 = 477$. Hingegen $2 c^2$ ist nur 18.

§. 12.

Das Abziehen zusammengesetzter Größen. (Subtrahiren.)

1) Wenn man das Abziehen zweier Ausdrücke nur andeuten, aber nicht wirklich ausführen will, so schließt man beide in Klammern ein, schreibt zwischen beide das — Zeichen und gibt acht, daß derjenige, welcher abgezogen werden soll, hinten steht.

Beispiel. Von $a + b - c$ soll $+ d - e$ abgezogen werden, so hat man $(a + b - c) - (+ d - e)$.

2) Wenn man daher von $(a + b - c) + d$ wegnimmt, so hat man $a + b - c - d$. Da man aber nur $d - e$ wegnehmen sollte, so hat man zuviel weggenommen, und man muß wieder e hinzu addiren. Man hat dann $a + b - c - d + e$.

Hieraus fließt die Regel: daß man das Abziehen wirklich verrichtet, wenn man die Formel, welche abgezogen wird, zu der andern schreibt, und blos die Zeichen umkehrt, indem man $+$ in $-$ und $-$ in $+$ verwandelt.

Beispiel. $(6+7-3)-(+9-3)$ ist gleich
$$6+7-3-9+3=4.$$

3) Soll man von $a+b$ die Zahl $+a-b$ abziehen, so hat man: $a+b-a+b=2b$.

Hieraus folgt die Regel: daß wenn man die Differenz zweier Zahlen $a-b$ von ihrer Summe $a+b$ abzieht, so bekommt man die kleinere doppelt, nemlich $2b$.

4) Da durch das Umkehren der Zeichen, welches in 2) gelehrt worden, die Subtraktion in eine Addition verwandelt wird, so hat man dieselbe Regeln zum Abkürzen, die im vorigen Paragraph angegeben sind. Hat man ein gegebenes Subtraktionsbeispiel in Buchstaben aufgelöst, so kann man sich auf dieselbe Weise von der Richtigkeit desselben überzeugen, wie bei den Zahlen gelehrt worden. Man addirt die abgezogene Formel zum Rest, und dann muß die wieder erscheinen, von welcher man abgezogen hat.

§. 13.

Das Vervielfachen zusammengesetzter Größen. (Multipliciren.)

1) Wenn die Multiplikation zweier zusammengesetzter Größen blos angedeutet werden soll, so wird jede in Klammern eingeschlossen, und zwischen sie ein Punkt gemacht oder ein liegendes $\times$, oder auch gar nichts.

Beispiel. $a + b$ soll mit $c - d$ multiplicirt werden, so kann man dieses schreiben $(a + b) \,.\, (c - d)$
oder auch $(a + b) \times (c - d)$
oder auch $(a + b) \quad (c - d)$

Welcher von diesen drei Arten die Multiplikation anzuzeigen man sich bedienen will, ist willkührlich. Indeß ist am besten sich des Zeichens $\times$ nicht zu bedienen, weil dieses leicht mit dem Zeichen x, welches man für die unbekannte Größe gebraucht, kann verwechselt werden.

Statt der Klammern bedienen sich auch einige eines Querstrichs, der über die Größen weggezogen wird, die einen Faktor ausmachen. $\overline{a + b} \,.\, \overline{c - d}$.

2) Soll eine Multiplikation nicht blos angedeutet, sondern wirklich ausgeführt werden, so muß man jedes Glied besonders mit dem Multiplikator multipliciren.

Beispiel. $a + b - c$ soll mit 2 multiplicirt werden, so ist $2 (a + b - c) = 2a + 2b - 2c$.

Sollte dieses nun noch mit m multiplicirt werden, so hätte man $2am + 2bm - 2cm$.

3) Hiebei ist vorausgesetzt, daß m eine positive Größe sey. Ist sie eine negative, so muß man die oben gegebene Regel beobachten: daß zwei gleiche Zeichen multiplicirt $+$ geben, und zwei ungleiche $-$.

Wäre daher m verneinend gewesen, und hätte also das Zeichen $-$ gehabt, so hätte man erhalten: $-2am - 2bm + 2cm$.

4) Soll eine Größe mit einer andern multiplicirt werden, die aus einer positiven und negativen besteht, z. B. A mit $+m - n$, so hat man $Am - An$.

Und ist sie selber zusammengesetzt, als $a + b$, so hat man, wenn sie mit $m - n$ soll multiplicirt werden:

$$am + bm - bn.$$

5) Hat man zwei Größen, als $a + b$ und $a - b$, die mit einander multiplicirt werden sollen, so findet man:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab - ab - bb. \end{array}$$

Da sich $+ ab$ und $- ab$ gegen einander aufheben, so hat man $a^2 - b^2$, und hieraus fließt folgende Regel: Wenn die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt werden, so ist das Produkt die Differenz ihrer Quadrate.

Beispiel in Zahlen. $12 = 8 + 4$
dieses mit $8 - 4$ multiplicirt,

gibt $64 + 32 - 32 - 16 = 64 - 16.$

Die Differenz von $64 - 16$ ist 48,
und $8 + 4$ mal $8 - 4 = 12$ mal 4 ist auch 48.

6) Wir wollen zur Uebung noch ein paar Aufgaben auflösen.

$$\begin{array}{l} 3a - 4 \\ a + 2 \\ \hline 3a^2 - 4a \\ \quad + 6a - 8 \\ \hline 3a^2 + 2a - 8 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3a^2 - 5a + 9 \\ 4a + 3 \\ \hline 12a^3 - 20a^2 + 36a \\ 9a^2 - 15a + 27 \\ \hline 12a^3 - 11a^2 + 21a + 27. \end{array}$$

In diesen Beispielen wurden nur zwei Faktoren mit einander multiplicirt, oft müssen aber drei, vier, fünf .... mit einander multiplicirt werden. Dieses macht die Rechnung nur weitläuftiger, ohne sie schwieri-

ger

ger zu machen. Nachdem zwei mit einander multiplicirt sind, multiplicirt man das Produkt mit dem dritten, vierten u. s. w. wobei es gleich gilt, welche Ordnung man beobachtet. Auch kann man zwei und drei mit einander multipliciren, wie im vorigen Beispiele, und nachher dann die Produkte.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & 12a^3 & -\ 11a^2 & +\ 21a & +\ 27 & \\
 & 3a^2 & +\ 2a & -\ 8 & & \\
\hline
 & 36a^5 & -\ 33a^4 & +\ 63a^3 & +\ 81a^2 & \\
 & & 24a^4 & -\ 22a^3 & +\ 42a^2 & +\ 54a \\
 & & & -\ 96a^3 & +\ 88a^2 & -\ 168a \quad -\ 216 \\
\hline
 & 36a^5 & -\ 9a^4 & -\ 55a^3 & +\ 211a^2 & -\ 114a - 216.
\end{array}
$$

§. 14.

Das Theilen zusammengesetzter Größen. (Dividiren.)

1) Dieses geschieht auf dieselbe Weise, wie das Theilen der Zahlen. Denn alle unsere Zahlen sind ebenfalls zusammengesetzte Größen. So ist z. B. 9275 aus Tausendern, Hundertern, Zehnern und Einern zusammengesetzt. Bei dieser Zusammensetzung liegt aber das Decimalsystem zum Grunde, und dieses macht das Theilen leicht, weil die Reste, die man behält, immer Decimal sind, und man leicht sieht, welchen Quotienten man nehmen muß. Hingegen bei der Division solcher zusammengesetzter Größen, die in Buchstaben gegeben sind, ist das Theilen schwieriger, weil diese Größen unter sich keinen Zusammenhang haben, und nach keinem System zusammengesetzt sind. Man sieht hiebei nicht so leicht, wie bei

den

den Zahlen, welchen Quotienten man am vortheilhaftesten nimmt.

2) Soll die Division nur angezeigt werden, so bedient man sich entweder das Zeichen eines Bruches, oder man schließt beide Größen in Klammern ein, und setzt zwischen sie zwei Punkte als das Zeichen der Division.

Wenn $a + b$ durch $c + d$ soll dividirt werden, so kann man dieses auf folgende Weise andeuten: $\frac{a + b}{c + d}$ oder auch $(a + b) : (c + d)$.

3) Wird eine zusammengesetzte Größe durch eine einfache getheilt, so wird jedes Glied besonders getheilt.

$9a + 6b - 12c$ soll durch 3 getheilt werden, so hat man $3a + 2b - 4c$.

Ferner: $(a^3 - 3ab) : a = a^2 - 3b$.

Ferner: $(a^2 - 2ab + 3ab^2) : a = a - 2b + 3b^2$.

Ferner: $(6a^2b - 4a^2c + 8abc) : 2a = 3ab - 2ac + 4bc$.

Ferner: $(9a^5bc - 15ab^2c + 15abc^2) : 3abc = 3a^4 - 5b + 5c$.

4) Läßt sich ein Glied des Dividendus nicht theilen, so wird der Quotient in der Form eines Bruchs geschrieben.

Soll $a + b$ durch a getheilt werden, so hat man als Quotient $1 + \frac{b}{a}$.

Ferner: $(a^2 - ab + b^2) : a^2 = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$

Soll $2a + b$ durch 2 getheilt werden, so erhält man $a + \frac{b}{2}$, oder $a + \frac{1}{2}b$.

Eben so $(3b + c) : 3 = b + \frac{c}{3} = b + \frac{1}{3}c$.

5) In

5) In allen diesen Beispielen war der Divisor eine einfache Größe, und es war leicht zu sehen, welchen Quotienten man erhalten würde. Ist aber der Divisor selber eine zusammengesetzte Größe, dann ist die Division schwieriger, man findet den Quotienten nur durch Probiren — und man hält dann oft die Division für möglich, wenn sie es nicht ist, und für unmöglich, wenn sie es ist.

Soll $a\,c + b\,c$ mit $a + b$ dividirt werden, so sieht man, daß der Quotient $+ c$ seyn muß, denn wenn man diesen mit $a + b$ multiplicirt, so erhält man die zu theilende Zahl $a\,c + b\,c$.

Soll $(a^2 + a\,b)$ durch $(a + b)$ dividirt werden, so hat man den Quotienten a, welcher multip. $a\,a + a\,b$ gibt.

6) Auf diese Weise findet man immer einen Theil des Quotienten, wenn auch nicht den ganzen. Den Theil, welchen man gefunden, multiplicirt man mit dem Divisor, zieht das Produkt vom Dividendus ab, und sucht für den Rest, welcher bleibt, einen neuen Quotienten, und so fährt man fort den Quotienten theilweise zu suchen, bis man den ganzen hat.

Es soll $a^2 + 3\,a\,b + 2\,b^2$ durch $a + b$ getheilt werden, so ist klar, daß der Quotient a enthalten müsse, weil er sonst mit $a + b$ multiplicirt nicht a^2 geben könne.

Also: $a + b)\ a^2 + 3\,a\,b + 2\,b^2\ (a + 2\,b$

$$\begin{array}{l}
a^2 + a\,b \\
\hline
\quad\quad 2\,a\,b + 2\,b^2 \\
\quad\quad 2\,a\,b + 2\,b^2 \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0.
\end{array}$$

Daß

Daß der zweite Theil 2 b seyn mußte, sieht man leicht, da bei der ersten Subtraktion 2 a b zum Rest blieb.

7). Um sich die Division zu erleichtern, schreibt man den Dividendus in eine solche Ordnung, daß die ersten Glieder die höchsten Potenzen vom ersten Theil des Divisors enthalten.

Hätte man z. B. den Dividendus $+ 3ab^2 - b^3 + a^3 - 3a^2b$, der mit $a - b$ dividirt werden sollte, so schreibe man ihn vor den Divisor in folgender Ordnung.

$$\begin{array}{l}
a - b)\; a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \;(a^2 - 2ab + b^2 \\
\qquad\;\; \underline{a^3 - \;\; a^2b} \\
\qquad\qquad \;\; -2a^2b + 3ab^2 \\
\qquad\qquad \;\; \underline{-2a^2b + 2ab^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \;\; ab^2 - b^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ \;\; ab^2 - b^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

8) Bei der Division ist nichts schwierig wie die Uebersicht, welche nothwendig ist, um den richtigen Quotienten zu finden.

Man erleichtert sich dieses auf folgende Weise, indem man über jeden Theil des Dividendus und des Quotienten einen besondern Buchstaben schreibt.

Divisor = d Der ganze Dividendus. Der Quotient

$$\begin{array}{l}
4a^2b^3 \,|\, \overset{A}{20a^5b^3} - \overset{B}{12a^6b^3} + \overset{C}{24a^3b^4} \;(\overset{a}{5a^3} - \overset{b}{3a^4} + \overset{c}{6ab} \\
a.d = \underline{|20a^5b^3} \\
\qquad\qquad\; -11a^6b^3 \\
b.d = \underline{-12a^6b^3} \\
\qquad\qquad\qquad + 24a^3b^4 \\
\quad c.d = \underline{+ 24a^3b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Anmer-

Anmerkung. Die Fertigkeit des Dividirens mit zusammengesetzten Größen hängt größtentheils von der Uebung ab. Es kann jemand sehr gut wissen, wie man zusammengesetzte Größen mit einander dividirt, und bei einem großen Divisions-Exempel doch Schwierigkeit im Aufsuchen des Quotienten finden, wenn ihm diese Uebung fehlt.

§. 15.

Bei den vorigen Beispielen ließ sich der Dividendus durch den Divisor vollkommen theilen, und es blieb kein Rest. Ist dieses nicht der Fall, so muß man den Rest in Bruchform hinter den Quotienten schreiben.

Z. B. $6)\,37\,(6\tfrac{1}{6}$ oder $6)\,37\,(6{,}1\tfrac{4}{6}$ oder $6)\,37\,(6{,}16\tfrac{4}{6}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \hline 10 \\ 6 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \hline 10 \\ 6 \\ \hline 40 \\ 36 \\ \hline 4 \end{array}$$

Man sieht, daß der Quotient immer eine andere Form erhält, je nachdem man die Division lange fortsetzt, indeß der Werth des Quotienten immer derselbe bleibt, denn $6\frac{1}{6}$ ist $= 6{,}1\frac{4}{6} = 6{,}16\frac{4}{6}$.

Dasselbe gilt bei der Division mit zusammengesetzten Größen, die in Buchstaben ausgedrückt sind.

Es soll z. B. 1 durch $1 - a$ getheilt werden, so hat man:

$1 - a)$

$$1 - a)\,1\,(1 + \frac{a}{1-a} \quad \text{oder} \quad 1 - a)\,1\,(1 + a + \frac{a^2}{1-a}$$

$$\begin{array}{l} +1-a \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} +1-a \\ \hline +a \\ +a-a^2 \\ \hline +a^2 \end{array}$$

Oder $1 - a)\,1\,(1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \frac{a^5}{1-a}$

$$\begin{array}{r} 1-a \\ \hline +a \\ +a-a^2 \\ \hline +a^2 \\ +a^2-a^3 \\ \hline +a^3 \\ +a^3-a^4 \\ \hline +a^4 \\ a^4-a^5 \\ \hline +a^5 \end{array}$$

Alle diese Quotienten sind einander gleich, und sie unterscheiden sich nur in der Form von einander. Man sieht, daß der Quotient eine Reihe bildet, welche nach dem Gesetze $1 + a + a^2 + a^3 \ldots$ fortschreitet, und die man ohne weitere Rechnung so lange fortsetzen kann wie man will. So kann man bei Decimalbrüchen auch den Quotienten ohne Rechnung hinschreiben, sobald man das Gesetz gefunden nach dem die Ziffern wiederkehren.

Z. B. 7) 11 (1,57427574275 . . . .

Dieser

Dieser Decimalbruch ist, wenn man ihn unendlich fortsetzt, gleich dem Bruch $\frac{7}{11}$. Und eben so ist die Reihe $1 + a + a^2 + a^3 \ldots$ unendlich weit fortgesetzt, dem Bruche $\frac{1}{1-a}$ gleich.

9) Setzt man statt a im vorigen Divisor 1, so hat man zum Quotienten $\frac{1}{+1-1}$ und dieses dividirt, gibt:

$$
\begin{array}{l}
+1-1)\,1\,(+1+1+1+1\ldots\\
\quad\quad\quad\;\; \underline{+1-1}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\; +1\\
\quad\quad\quad\quad\quad\; \underline{+1-1}\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad +1
\end{array}
$$

Wenn man also die Reihe $1 + 1 + 1 + 1 \ldots$ ohne Ende fortsetzt, so erhält man man den Quotienten des Bruchs $\frac{1}{+1-1}$, welcher, wie man leicht sieht, eine unendlich große Zahl ist, nemlich eine solche, die größer ist als jede gegebene Zahl.

$1 - 1$ ist aber $= 0$. Man kann daher den Bruch auch so schreiben $\frac{1}{0}$, welches dann eine unendlich große Zahl bedeutet, die durch das Zeichen der Unendlichkeit ∞ bezeichnet wird.

Eben so bedeutet $1 . 0$ oder 1 multiplicirt mit 0, eine unendlich kleine Zahl, oder eine solche, die kleiner ist als jede gegebene Zahl.

Die Lehre von den Gleichungen.

§. 16.

Jeder Satz, der eine Gleichheit zwischen zwei Größen andeutet, heißt eine Gleichung.

Beispiele hievon sind im zweiten Theile S. 36 angeführt, wo auch die Veränderungen erklärt wurden, welche man mit den Gleichungen vornimmt, um sie auf einfachere Ausdrücke zu bringen. Ich setze dieses hier als bekannt voraus.

Wir haben schon oben bemerkt, daß in jeder Aufgabe von Anfang an alle Größen bekannt sind, nur sind die, welche wir unbekannt nennen, in einer verwickelten Form da. Die Kunst des Algebraisten besteht darin, diese durch eine geschickte Verwandelung der Gleichungen auf einen einfachen und allgemein verständlichen Ausdruck zu bringen. Man nennt dieses das Auflösen einer Aufgabe.

Die Größen, welche man Bekannte nennt, sind von Anfang an in einer ganz einfachen Form da, und um sie von den Unbekannten zu unterscheiden, bezeichnet man sie mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets — indeß die Unbekannten mit den Endbuchstaben bezeichnet werden.

Ist dieses geschehen, so betrachtet man die Bedingungen der Aufgabe, um hiernach die Größen so zu ordnen, daß zwischen ihnen eine Gleichheit Statt finde. Hiedurch entstehen die Gleichungen, welche dann so lange verwandelt werden, bis die unbekannten Größen gefunden sind.

Nehmen wir wieder als Beispiel die Aufgabe Theil 2. S. 38, wo für 80 Ohm Wein 1 Ohm Zoll bezahlt wurde,

und

und für 300 Ohm ebenfalls 1 Ohm Zoll und 15 Thaler, indeß bei den 80 Ohm 40 Thaler waren zurückgezahlt worden. Man wollte hiernach den Preis des Weins bestimmen.

Aus der Natur der Aufgabe folgte diese Gleichung:

$$1 \text{ Ohm} + 15 \text{ Thlr.} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Ohm} - 150 \text{ Thlr.}$$

Diese verwandelt $-15 \qquad\qquad -15$

gab $1 \text{ Ohm} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Ohm} - 165 \text{ Thlr.}$

Diese verwandelt $-1 \text{ Ohm} \quad -1 \text{ Ohm}$

gab $0 \text{ Ohm} = 2\tfrac{3}{4} \text{ Ohm} - 165 \text{ Thlr.}$

Da $2\tfrac{3}{4}$ Ohm — 165 Thlr. = 0 war,

so mußten $2\tfrac{3}{4}$ Ohm = 155 Thlr. kosten.

Dieses mit $2\tfrac{3}{4}$ Ohm divid. gab 1 Ohm = 60 Thlr.

Daß eine Ohm 60 Thlr. kostete, sagte schon die erste Gleichung, aber in einem sehr verwickelten Ausdruck. Statt zu sagen: 1 Ohm ist so viel wie 60 Thlr. sagte sie: 1 Ohm + 15 Thlr. ist so viel wie $3\frac{3}{4}$ Ohm — 150 Thlr. Durch die verschiedene Veränderungen, die mit ihr vorgenommen wurden, wurde der Ausdruck immer einfacher, bis er zuletzt die einfache Form erhielt, in der ihn jeder versteht. — Indeß wäre für einen geübten Rechner der Ausdruck gleich verständlich gewesen, wenn man ihm gesagt hätte: von diesem Weine sind 1 Ohm + 15 Thlr. eben so viel werth, als $3\frac{3}{4}$ Ohm — 150 Thlr.

§. 17.

Bei einigen Aufgaben ist nur eine unbekannte Größe, bei andern sind zwei, drei oder mehrere. So viele unbekannte Größen da sind, so viele Gleichungen werden erfodert

fodert, welche aus den Bedingungen der Aufgabe müssen hergeleitet werden.

Diejenigen Gleichungen, in denen von der unbekannten Zahl nur die erste Potenz vorkommt, werden Gleichungen vom ersten Grade genannt, und sind am leichtesten aufzulösen.

Kommt das Quadrat von der unbekannten Zahl als höchste Potenz darin vor, so heißen sie quadratische Gleichungen, oder Gleichungen vom zweiten Grade.

Kömmt der Cubus von der unbekannten Zahl als höchste Potenz darin vor, so heißen sie cubische Gleichungen, oder Gleichungen vom dritten Grade u. s. w.

Kömmt das Biquadrat von der unbekannten Zahl als höchste Potenz darin vor, so heißen sie biquadratische.

§. 18.

Von der Auflösung der Gleichungen.

Wenn x die unbekannte Zahl ist, und man hat eine Gleichung wie $x = 17$, so ist diese schon auf der einfachsten Form, und man kann sie daher nicht auf eine noch einfachere bringen.

Hat man $x - 6 = 17$, so addirt man an beiden Seiten 6

$$\begin{array}{r} +6\ +6 \\ \hline x\ = 23, \end{array}$$

und die Gleichung ist wieder in der einfachsten Form da.

Oder in Buchstaben: $x - a = b$, so ist $x = a + b$, wenn man an beiden Seiten a hinzu addirt.

Wäre $x + a = b$, so wäre $x = b - a$, wenn man an beiden Seiten a wegnimmt.

Hieraus folgt die Regel: daß man jede Gleichung verän-

verändern kann, wenn man eine Größe von der einen Seite wegnimmt, und sie an die entgegengesetzte mit entgegengesetztem Zeichen hinschreibt. Hiedurch wird die Gleichheit zwischen beiden Gliedern der Gleichung nicht gestört.

Beispiel. Wenn $x - 11a = 20 - 6a$ ist,
so ist auch $x = 20 - 6a + 11a$.
Ferner, wenn $x - a + b = c$ ist,
so ist auch $x = a - b + c$.
Ferner, wenn $x - 2a + 3b = 0$ ist,
so ist auch $x = 2a - 3b$.

Ebenfalls bleibt eine Gleichung ungeändert, wenn man an beiden Seiten alle Vorzeichen umkehrt.

Z. B. $+ 3b - 24 = + 12$
$- 3b + 24 = - 12$
oder $a + b - c = d$
so ist auch $- a - b + c = - d$.

Alle diese Veränderungen beruhen auf dem Satze: daß eine Gleichung unverändert bleibt, wenn man an beiden Seiten gleichviel hinzu thue, oder gleichviel wegnimmt. Eben so bleibt auch eine Wage im Gleichgewicht, wenn man an beiden Seiten gleichviel hinzu thut, oder gleichviel wegnimmt.

§. 19.

Hat die Gleichung folgende Form: $ax = b$, so dividirt man an beiden Seiten mit a, und man erhält $x = \frac{b}{a}$

Ist sie aber $ax - b + c = d$, so verändert man sie zuerst in $ax = b - c + d$, und dividirt mit a, wo man erhält $x = \frac{b - c + d}{a}$

Es

Es sey $4x + 11 = 23$, so ist $4x = 12$ und $x = 3$.

Hat die Gleichung folgende Gestalt: $\frac{x}{a} = b$, so multiplicirt man an beiden Seiten mit a, und man erhält $x = ab$.

Ist sie aber $\frac{x}{a} - b + c = d$, so verändert man sie zuerst in $\frac{x}{a} = b - c + d$, und dann

in $x = \frac{(b - c + d)\,a}{\cancel{a}}$

Es sey $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3$, so ist
$\frac{1}{3}x = 1 - 2a + 3$, und
$x = 3\,(1 - 2a + 3)$

Es sey $\frac{x}{a - 1} - 1 = a$, so ist $\frac{x}{a - 1} = a + 1$ an beiden Seiten mit $a - 1$ multip. gibt $x = aa - 1$.

Hat die Gleichung folgende Form, $\frac{ax}{b} = c$, so verwandelt man sie zuerst in $ax = bc$, und dann in $x = \frac{bc}{a}$, indem man zuerst mit b multiplicirt, und dann mit a dividirt.

Alle diese Veränderungen beruhen auf dem Satze, daß eine Gleichung unverändert bleibt, wenn man an beiden Seiten mit derselben Größe multiplicirt oder dividirt.

§. 20.

1) Wenn zwei oder mehrere Glieder den Buchstaben x enthalten, so stehen diese entweder auf einer Seite, und dann hat die Auflösung keine Schwierigkeit. Z. B. $x + \frac{1}{2}x = 12$, so ist $1\frac{1}{2}x = 12$ und $x = 8$.

Stehen sie aber auf beiden Seiten, so muß man sie von der Seite, wo am wenigsten sind, wegbringen.

Es sey $3x + 4 = 12 + x$, so ist auch
$2x + 4 = 12$, und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es sey $15 - x = 20 - 2x$, so ist auch
$15 = 20 - x$, also $x = 5$.

2) Wenn in der Gleichung ein Bruch ist, in dem die Zahl x im Nenner vorkommt, so muß man mit x multipliciren, und so den Bruch heben, wodurch x an die andere Seite kommt.

Es sey $\frac{240}{x} = 15$, so ist $240 = 15 . x$,

an beiden Seiten mit 15 div. gibt $\frac{240}{15} = x$ und $x = 16$.

Es sey $\frac{5x + 3}{x - 1} = 7$, so ist an beiden Seiten mit

$$
\begin{array}{rl}
x - 1 \text{ multip. } 5x + 3 = & 7x - 7 \\
-5x \quad & -5x \\
\hline
+3 = & 2x - 7 \\
+7 \quad & +7 \\
\hline
10 = & 2x \text{ und } x = 5.
\end{array}
$$

3) Wenn ein Wurzelzeichen vorkommt, so kann man dieses dadurch wegschaffen, daß man an beiden Seiten quadrirt oder cubirt.

Es sey $\sqrt{(100 - x)} = 8$, so ist $100 - x = 64$,
und $100 = 64 + x$ und $x = 36$.

4) Auch kann die unbekannte Zahl x als der Exponent einer Potenz vorkommen. Z. B. $7^x = 2401$. Dieses heißt: auf welche Potenz muß man die Zahl 7 erheben, um die Zahl 2401 zu erhalten? — Antw. auf die vierte, denn $7^4 = 2401$.

Man findet die Auflösung dieser Aufgabe, wenn man den Logarithmen von 2401, der 3,3804 ist, mit dem Logarithmen von 7, der 0,8451 ist, dividirt.

$$\frac{3{,}3804}{0{,}8451} = 4.$$

§. 21.

Anwendung dieser Regeln auf die Auflösung einiger algebraischen Aufgaben des ersten Grades.

1) Aufgabe. Man sucht zwei Zahlen, deren Summe 67, und deren Differenz 29 sey.

Die Größere sey x,
so ist die Kleinere $x - 29$

$$\begin{array}{r} \text{und } x + x - 29 = 67 \\ + 29 + 29 \\ \hline x + x \quad = \quad 96 \end{array}$$

x ist also 48

und die Kleinere $x - 29 = 48 - 29 = 19$.

2) Man theile 11 in zwei Theile, so daß der Größere um 4 größer sey als der Kleinere.

Der Größere sey x

so ist der Kleinere $11 - x$ und da der Größere um 4 größer ist als der Kleinere, so ist $x = 11 - x + 4$

$$\begin{array}{r} +x \qquad +x \\ \hline 2x = 11 + 4 = 15 \end{array}$$

und $x = 7\frac{1}{2}$.

Man kann dieses allgemein so ausdrücken:

Man theile a in zwei Theile, so daß der Größere um b größer als der Kleinere ist. Es sey x der Größere, so ist der Kleinere $a - x$ und $x = a - x + b$, und an beiden Seiten x addirt, so wird $2x = a + b$.

3) Ein

3) Ein Vater hinterläßt ein Vermögen von 1000 Thaler. Nach seinem Testamente soll der älteste Sohn 200 Thaler mehr haben als der zweite, und der zweite 100 Thaler mehr als der dritte, — wie viel bekommt jeder?

Der jüngste bekommt x Thlr.
Der zweite bekommt x + 100 Thlr.
Der älteste bekommt x + 100 + 200 Thlr.

$$3x + 400 \text{ Thlr. ist} = 1000$$
$$3x = 600 \quad \text{und} \quad x = 200$$

Also der jüngste bekommt 200 Thlr.
der zweite 300
der älteste 500, und alle zusammen 1000.

4) Es hinterläßt jemand 20000 Thaler Vermögen, welche so unter seine Wittwe, seine zwei Söhne und zwei Töchter getheilt werden sollen, daß die Mutter doppelt so viel wie ein Sohn, und jeder Sohn doppelt so viel wie eine Tochter haben soll. — Wie viel bekommt jeder?

Das Erbtheil einer Tochter sey x, so ist das eines Sohnes 2 x und der Mutter 4 x. Also $2x + 4x + 4x = 10x = 20000$ Thlr. folglich $x = 2000$ Thlr.

5) Drei Erben theilen sich in ein Vermögen auf folgende Weise: Der erste bekommt 1000 Thaler weniger als die Hälfte des Ganzen. Der zweite 800 Thlr. weniger als das Drittel, und der dritte 600 Thlr. weniger als das Viertel des Ganzen. Wie groß war die Erbschaft, und wie viel bekommt jeder?

Die ganze Erbschaft sey $= x$

so bekommt der erste $\frac{1}{2}x - 1000$

zweite $\frac{1}{3}x - 800$

dritte $\frac{1}{4}x - 600$

$$\text{also alle drei } \tfrac{13}{12}x - 2400 = x + \tfrac{1}{12}x - 2400 = x$$

$$- x \qquad\qquad - x$$

$$\tfrac{1}{12}x - 2400 = 0$$

$$\text{folgl. } \tfrac{1}{12}x = 2400$$

$$\text{und } x = 28800 \text{ Thlr.}$$

6). Man suche eine Zahl, daß wenn man zu ihr ihre Hälfte addirt, so viel über 60 herauskomme als sie selber unter 65 ist.

Die Zahl sey x, so ist $x + \frac{1}{2}x - 60 = 65 - x$

folglich $2\frac{1}{2}x - 60 = 65$ u. $2\frac{1}{2}x = 125$

und $x = 50$

7) Die Zahl 25 soll in zwei Theile getheilt werden, wovon der eine 49 mal größer ist als der andere.

Der Kleinere sey x, so ist der Größere

$$25 - x = 49x$$

$$+ x \qquad + x$$

$$25 = 50x \text{ und } x = \tfrac{1}{2}.$$

8) Man hat zwei Becher, der erste wiegt 12 Loth. Legt man den Deckel darauf, so wiegt er doppelt so viel wie der andere. Legt man aber den Deckel auf den zweiten, so wiegt er dreimal so viel wie der erste, also 36 Loth. — Wie schwer ist der Deckel und der zweite Becher?

Das Gewicht des Deckels sey x, also mit dem ersten Becher $x + 12$ Loth.

Das

Das Gewicht des zweiten Bechers ist die Hälfte, folglich $\frac{1}{2}x + 6$ Loth,

und mit dem Deckel x ist es $x + \frac{1}{2}x + 6 = 36$ Loth

$1\frac{1}{2}x$ ist demnach $= 30$ Loth,

und der Deckel x wiegt 20 Loth,

derselbe wiegt mit dem ersten Becher $20 + 12 = 32$ Loth.

Der zweite Becher wiegt also 16 Loth.

§. 22.

Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen.

1) Wenn mehrere unbekannte Größen in einer Aufgabe vorkommen, so werden diese mit den Buchstaben x, y, z bezeichnet. Man kommt hiebei auf eben so viele Gleichungen, als unbekannte Größen da sind, wenn die Aufgabe bestimmt ist. Wir wollen hier nur solche Gleichungen betrachten, worin nur die erste Potenz von den unbekannten Zahlen vorkommt, und wo auch keine mit der andern multiplicirt wird, sondern blos mit bekannten Größen, als:

$$ax + by + cz = d.$$

2) Wir wollen annehmen, daß folgende beiden Gleichungen gegeben wären:

Ite. $ax + by = c.$

IIte. $fx + gy = h.$

Die Buchstaben a b c f g h bedeuten bekannte Zahlen, aus denen man die beiden unbekannten x und y finden soll.

Da x in beiden Gleichungen vorkommt, so bestimme man aus jeder seinen Werth besonders. Die erste gibt:

$x = \frac{c - by}{a}$ die zweite $x = \frac{h - gy}{f}$

Also

Also ist $\frac{c - by}{a} = \frac{h - gy}{f}$

mit a und f multiplicirt $cf - bfy = ah - agy$
man addire agy, so hat man $cf - bfy + agy = ah$
man subtrah. cf, so hat man $- bfy + agy = ah - cf$
oder $(ag - bf)\,y = ah - cf$

dividire mit $ag - bf$, so ist $y = \frac{ah - cf}{ag - bf}$

Auf diese Weise hat man den Werth von y gefunden, da man an der einen Seite blos bekannte Größen hat, die man nur gehörig von einander abzuziehen und mit einander zu dividiren hat, um y darzustellen. y ist also auch eine bekannte Größe, und schreibt man diese nun in eine der beiden Gleichungen mit einem bekannten Zeichen, z. B. d, so findet man den Werth der zweiten unbekannten Größe x. Nemlich $ax + bd = c$ und $x = \frac{c - bd}{a}$

3) Man hätte diese Gleichungen auch noch auf eine andere Weise lösen können. Man multiplicire die obere mit f, und die untere mit a, so hat man:

$$afx + bfy = cf$$
und $$afx + agy = ah$$

beide abgezogen gibt $bfy - agy = cf - ah$
oder $(bf - ag)\,y = cf - ah$
mit $bf - ag$ getheilt, gibt $y = \frac{cf - ah}{bf - ag}$

4) Die beiden ersten Aufgaben im vorigen Paragraph kann man auch als Aufgaben mit zweien unbekannten Größen lösen.

Man verlangt zwei Zahlen, deren Summe 67, und deren Differenz 29 ist.

Die größere sey x, die kleinere y,

$$\text{so ist } x + y = 67$$
$$x - y = 29$$

beides addirt $2x = 96$ und $x = 48$ u. $y = 19$.

Oder allgemein in Buchstaben. Man verlangt zwei Zahlen, deren Summe $= a$ und deren Differenz $= b$ sey.

Es sey die größere $= x$; die kleinere $= y$

$$\text{so ist } x + y = a$$
$$\text{beide addirt } x - y = b$$

$$\text{also } 2x = a + b$$
$$\text{und } x = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b.$$

Hieraus folgt die Regel: daß die größere Zahl gleich ist der halben Summe + der halben Differenz, und die kleinere gleich der halben Summe weniger der halben Differenz, oder $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Dieses erhält man, wenn man die beiden vorigen Gleichungen von einander abzieht. Beispiel:

5) Ein Pferd und ein Maulesel tragen einige Centner, und beide beschweren sich über ihre Last. Der Esel sagt: Wenn du mir einen Centner von deiner Last gäbst, dann hätte ich doppelt so viel wie du. Das Pferd sagt: Wenn du mir einen Centner gäbst, so hätte ich dreimal so viel wie du. Wie viel Centner hatten beide?

Das Pferd hatte x Centner, der Esel y Centner.

Gibt das Pferd dem Esel 1 Centner, so hat der Esel $y + 1$, und das Pferd $x - 1$ Centner. Da nun der Esel zweimal so viel hat als das Pferd, so ist $y + 1 = 2x - 2$.

Gibt der Esel dem Pferde einen Centner, so hat er noch

noch $y - 1$, und das Pferd $x + 1$. Da nun dieses dreimal so viel ist wie jenes, so ist $x + 1 = 3y - 3$.

Man hat also die beiden Gleichungen: $y + 1 = 2x - 2$
und $x + 1 = 3y - 3$

Die erste gibt $\frac{y+3}{2} = x$ die zweite gibt $3y - 4 = x$

also $\frac{y+3}{2} = 3y - 4$ oder $y + 3 = 6y - 8$

und y subtrahirt gibt $3 = 5y - 8$

und 8 addirt gibt $11 = 5y$ und $y = \frac{11}{5}$

Der Esel trug also $2\frac{1}{5}$ Centner, und das Pferd $2\frac{3}{5}$ Centner, denn dieses hatte dreimal so viel wie der Esel, wenn dieser ihm 1 Centner mitgab, also noch $1\frac{1}{5}$ behielt. Das Pferd hatte dann $3\frac{3}{5}$ Centner, und 1 Centner mehr wie jetzt.

6) In den bisherigen Beispielen waren nur zwei unbekannte Zahlen, x und y. Wir wollen annehmen, man hätte ihrer drei gehabt, x, y und z, und folgende Gleichungen, aus denen man ihre Werthe hätte bestimmen müssen.

I $x + y - z = 8$
II $x + z - y = 9$
III $y + z - x = 10$.

Man sucht zuerst aus jeder den Werth von x.

Die I gibt $x = 8 + z - y$
II $x = 9 + y - z$
III $x = y + z - 10$.

In der IIIten Gleichung hatte man $-x$. Um $+x$ zu erhalten, kehrte man alle Zeichen an beiden Seiten um, denn durch das Umkehren der Zeichen wird bekanntlich die Gleichheit nicht gestört, wenn dieses nur auf beiden Seiten geschieht. Also statt $y + z - x = + 10$,

erhielt

erhielt man durchs Umkehren $- y - z + x = - 10$,
und hieraus $+ x = + y + z - 10$.

Verbindet man die erste und zweite Gleichung, so hat man $8 + z - y = 9 + y - z$
an beiden Seiten $+ z - y$ addirt gibt $8 + 2z - 2y = 9$
und $2z - 2y = 1$.

Verbindet man die erste und dritte Gleichung, so hat man $+ 8 + z - y = y + z - 10$,
u. addirt $- 8 - z + y = + y - z - 8$

$$0 = 2y - 18 \text{ u. also } 2y = 18 \text{ u. } y = 9$$

Man kennt nun den Werth von $y = 9$. Schreibt man diesen in die vorige Gleichung, so hat man $2z - 18 = 1$, also $2z$ ist $= 19$, daher $z = 9\frac{1}{2}$. Da nun x nach der dritten Gleichung $y + z - 10 = 9 + 9\frac{1}{2} - 10 = 8\frac{1}{2}$ ist, so ist der Werth von x auch bekannt.

Also $x = 8\frac{1}{2}$; $y = 9$ und $z = 9\frac{1}{2}$.

7) Auf diese Weise ist der Werth dreier unbekannten Größen durch drei Gleichungen gefunden worden, die ihrer einfachen Form wegen eine leichte Auflösung zuließen. Es kommen aber Fälle vor, wo die Auflösung solcher Aufgaben mit dreien unbekannten Größen viele Schwierigkeiten hat, und einen geübten Rechner fodert.

Kommen mehr als drei unbekannte Größen vor, so hat die Auflösung noch mehr Schwierigkeiten, doch pflegen sich gewöhnlich hiebei aus der Natur der Aufgabe solche Umstände zu ergeben, daß man außer den bekannten Größen noch eine neue Hülfsgröße einführen kann, wodurch die Auflösung der Aufgabe erleichtert wird.

Da wir hier nur die Anfangsgründe der Buchstabenrechnung vortragen, so berühren wir dieses nur im Vorbeigehen.

Aufgabe. A, B und C haben ein Haus für 1000 Thaler gekauft. A sagt zum B, gib mir die Hälfte deines Geldes, so will ich das Haus allein bezahlen. B sagt zu C, gib mir $\frac{1}{3}$ deines Geldes, dann bezahle ich es allein. C fodert endlich vom A $\frac{1}{4}$ seines Geldes, so will er es allein bezahlen. Wie viel hatte jeder?

Wenn die drei Geldsummen die sie hatten, x, y und z heißen, so hat man:

$$\text{I } x + \tfrac{1}{2}y = 1000 \quad \text{II } y + \tfrac{1}{3}z = 1000$$
$$\text{III } z + \tfrac{1}{4}x = 1000.$$

Es ist aber aus I $x = 1000 - \frac{1}{2}y$ aus II $y = 1000 - \frac{1}{3}z$ und aus III $x = 4000 - 4z$.

Also $1000 - \frac{1}{2}y = 4000 - 4z$

oder $-\frac{1}{2}y = 3000 - 4z$

und $y = -6000 + 8z = 1000 - \frac{1}{3}z$ (aus II)

also $-7000 + 8z = -\frac{1}{3}z$ oder $-7000 + 8\frac{1}{3}z = 0$

also $7000 = 8\frac{1}{3}z$ und $z = 840$ Thlr.

Da nach II $y = 1000 - \frac{1}{3}z$ also $= 1000 - 280$ Thlr. ist, so ist $y = 720$,

und nach III ist $x = 4000 - 4z = 4000 - 3360$ also $x = 640$ Thaler.

A hatte also 640 Thlr. B 720, und C 840 Thlr.

§. 23.

Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen.

1) Wenn in einer Gleichung das Quadrat als die höchste Potenz von der unbekannten Zahl vorkommt, so heißt sie eine quadratische.

2) In einer quadratischen Gleichung können nur dreierlei Glieder vorkommen. 1) Solche, in welchen die unbekannte Zahl gar nicht enthalten ist, in denen nemlich blos bekannte sind. 2) Solche, in denen nur die erste Potenz von der unbekannten Zahl ist, und 3) solche, in denen das Quadrat der unbekannten Zahl ist.

Wenn also x eine unbekannte Zahl ist, und a, b, c bekannte, so haben die Glieder der ersten Art eben

diese Form $a\,b\,c$

die von der zweiten $a\,x$

die von der dritten $b\,x\,x$.

3) Wenn man mehrere Glieder von einerlei Art hat, so kann man diese bekanntlich in eins zusammen ziehen. Z. B. $axx + bxx + cxx$ ist in eins zusammengezogen $(a + b + c)\,xx$.

Eben so leicht kann man solche Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringen, wenn sie sich auf beiden Seiten desselben befinden.

Es sey $2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11$

subtr. man $2xx$ so bleibt $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$

und $8x$ addirt gibt $+5x + 4 = 3xx + 11$

und 11 subtrahirt bleibt $+5x - 7 = 3xx$

Diese Gleichung läßt sich nun auf 0 bringen, wenn man $-5x + 7$ addirt, man hat dann $0 = 3xx - 5x + 7$.

4) Man kann jede quadratische Gleichung auf diese Form bringen, nemlich auf $axx \pm bx \pm c = 0$, sie mag auch von Anfang an eine hievon noch so verschiedene Form haben. (Die Zeichen $\pm$ übereinander bedeuten, daß diese Glieder bald bejaht und bald verneint seyn können.)

5) Bei

5) Bei jeder Gleichung, wie z. B. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$ muß man zuerst suchen die Brüche weg zu schaffen, weil diese die unbequemste Form bei der Verwandelung der Gleichungen sind. Man kann dieses leicht, wenn man beide Brüche mit ihren Nennern multiplicirt. Also zuerst mit $cx+d$, gibt $ax+b = \frac{cexx+cfx+dex+fd}{gx+h}$ und dann mit $gx+h$, dieses gibt

$$agxx+bgx+ahx+bh=cexx+cfx+dex+fd.$$

Dieses ist nun eine quadratische Gleichung, welche man auf o bringen kann, wenn man zum ersten Theile derselben den zweiten Theil mit verkehrten Zeichen hinzuschreibt.

$$\begin{array}{rrr} o = agxx & + bgx & + bh \\ - cexx & + ahx & - fd \\ & - cfx & \\ & - edx & \end{array}$$

Hier sind die Glieder so geordnet, daß alle gleichartigen untereinander zu stehen kommen. Nemlich zuerst die, in welchen das Quadrat der unbekannten Größe, dann die, in welchen ihr Produkt mit einer bekannten, und endlich die, in welchen sie gar nicht vorkommt.

Man kann dieselbe Gleichung auch auf folgende Weise schreiben:

$$o=(ag-ce)xx+(bg+ah-cf-ed)x+bh-fd.$$

6) Solche quadratische Gleichungen wie diese, werden **vollständige** genannt. In ihnen sind Glieder von allen drei Arten. Nemlich von axx, von bx und von c.

Fehlt

Fehlt das erste Glied axx, so ist es keine quadratische Gleichung. Fehlt das letzte Glied c, so ist es zwar eine, allein sie läßt sich dann so leicht in die $ax \pm b = 0$ auflösen, (indem man $axx \pm bx = 0$ setzt, wo dann $axx = \pm bx$ wird, und man an beiden Seiten mit x dividirt), daß sie auch keiner weitern Untersuchung bedarf. Fehlt endlich das Glied bx, so hat man blos axx und c, und eine solche unvollständige quadratische Gleichung hat man eine reine genannt, weil an ihr von der unbekannten Größe blos die zweite Potenz vorkommt. — Ihre Auflösung hat keine Schwierigkeit.

Wenn man nemlich eine reine quadratische Gleichung hat, wie z. B. $axx - c = 0$, oder $axx = c$, so hat man nur auf beiden Seiten mit a zu dividiren, und man erhält $xx = \frac{c}{a}$ und aus $\frac{c}{a}$ die Wurzel gezogen, gibt x, wodurch die Gleichung aufgelöst ist.

7) Ist $\frac{c}{a}$ eine Quadratzahl, so erhält man die Wurzel genau. Z. B. $\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$.

Ist $\frac{c}{a}$ keine Quadratzahl, so findet man die Wurzel durch Näherung. Z. B. $\sqrt{\frac{48}{5}}$.

Ist endlich $\frac{c}{a}$ negativ, dann ist die Wurzel x unmöglich, weil sie nicht $+x$ seyn kann noch $-x$, da das Quadrat von beiden $+xx$ ist.

Man nennt eine solche Wurzel immaginär, und erkennt hierin, daß die Frage eine Unmöglichkeit enthält, weil die Auflösung auf eine unmögliche Wurzel führt.

8) Wenn

8) Wenn aber auch $\frac{c}{a} = xx$ positiv ist, so findet man für die Wurzel x doch immer zwei Werthe, nemlich einen $+ x$ und einen $- x$, da beide $+ xx$ zum Quadrat haben. Man muß dann aus der Natur der Aufgabe beurtheilen, welcher von beiden der rechte ist.

Hat man eine quadratische Gleichung wie $xx - 5x = 0$, so läßt diese ebenfalls zwei Auflösungen zu, und man kann für den Werth von x eben so gut 0 als 5 setzen.

Es ist überhaupt eine Eigenschaft der quadratischen Gleichungen, daß sie zwei Auflösungen gestatten, dahingegen die Gleichungen vom ersten Grade nie mehr als eine geben. Die Ursache hievon werden wir weiter unten kennen lernen.

§. 24.

Aufgaben über die reine quadratische Gleichungen.

1) Man verlangt eine Zahl, welche, wenn man $\frac{1}{3}$ derselben mit $\frac{1}{4}$ von ihr multiplicirt, 48 gibt.

Die Zahl sey x, so ist $\frac{1}{3}x \cdot \frac{1}{4}x = 48$
also $\frac{1}{12}x \cdot x = 48$ und $xx = 48 \cdot 12 = 576$.
Hieraus die Wurzel, gibt $x = 24$.

2) Man verlangt eine Zahl, die, wenn man 7 zu ihr addirt, und 7 von ihr abzieht, und dann die Summe und die Differenz, die man hiedurch erhält, mit einander multiplicirt, 32 gibt.

Die Zahl sey x, so ist die Summe $x + 7$ u. die Diff. $x - 7$.
Beides multiplicirt, gibt $xx - 49 = 32$.
An beiden Seiten $+ 49$ addirt, gibt $xx = 81$ und $x = 9$.

3) Eine

3) Eine Anzahl Kaufleute fangen einen Handel an, und jeder legt 10 mal so viel Thaler ein als ihrer sind. Mit jedem 100 Thlr. gewinnen sie zweimal so viel als ihrer Personen sind. Multiplicirt man $\frac{1}{100}$ des Gewinnstes mit $2\frac{2}{9}$, so kommt die Anzahl der Kaufleute heraus. Wie viel waren ihrer?

Die Anzahl der Kaufleute sey x, so legte jeder 10 x Thlr. ein. Also alle zusammen $10xx$. Mit 100 Thlr. gewinnen sie zweimal so viel als ihrer sind, also $2x$. Folglich gewinnen sie mit dem ganzen Capital, welches $10xx$ ist, $\frac{2x \cdot 10xx}{100} = \frac{1}{5}xxx$.

Hievon $\frac{1}{100}$ ist $\frac{1}{500}x^3$, welches mit $2\frac{2}{9}$ oder $\frac{20}{9}$ multiplicirt, $\frac{20}{4500}x^3$ oder $\frac{1}{225}x^3$ gibt, welches der Anzahl der Kaufleute, die wir x annehmen, gleich ist, also $\frac{1}{225}x^3 = x$. Auf beiden Seiten mit x dividirt, gibt $\frac{1}{225}x^2 = 1$, und mit 225 multip. gibt $x^2 = 225$, und x also $= 15$. Es waren demnach 15 Kaufleute, jeder legte 150 Thlr. ein, und alle zusammen 2250 Thaler.

§. 25.

Von den vollständigen quadratischen Gleichungen.

1) In einer vollständigen quadratischen Gleichung kommen, wie wir oben gesehen haben, dreierlei Glieder vor. Nemlich 1) solche, in denen die unbekannte Zahl nicht ist. 2) Solche, in denen sie in der ersten Potenz, und 3) solche, in denen sie in der zweiten Potenz ist. Eine solche Gleichung hat daher, wenn man alle Glieder auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt, folgende Form: $axx \pm bx \pm c = 0$.

Von Einigen wird eine solche Gleichung eine vermischte Gleichung genannt, weil in ihr mehrere Arten Glieder mit einander vermischt sind. — Andere nennen sie eine unreine quadratische Gleichung.

2) Hat man eine vollständige quadratische Gleichung, wie $axx + bx - c = 0$, so verwandelt man sie in $xx + \frac{b}{a} x = \frac{c}{a}$, indem man mit a alle Glieder dividirt, nachdem man c auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht hat.

Betrachtet man die Größe $xx + \frac{b}{a} +$ als das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel, welches bekanntlich aus dem Quadrat des ersten Theils, aus dem doppelten Produkt des ersten in den zweiten, und aus dem Quadrat des zweiten Theils besteht, so sieht man, daß blos das letztere fehlt, und daß man, wenn man dieses hinzu fügt, eine vollkommene quadratische Zahl erhält, aus der man die Wurzel ziehen kann.

Da das doppelte Produkt vom zweiten Theil in den ersten $= \frac{b}{a} x$ ist, so ist das einfache Produkt $\frac{1}{2} \frac{b}{a} x$ oder $\frac{b}{2a} x$. Der zweite Theil der Wurzel muß also $= \frac{b}{2a}$ seyn, und sein Quadrat $\frac{b^2}{4a^2}$

Addirt man dieses an beiden Seiten der Gleichung, so hat man

$$xx + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Zieht man aus beiden Theilen der Gleichung die Wurzel, so hat man:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)}$$

und also $x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right)}$

Der Werth von x ist nun gefunden, da auf der einen Seite der Gleichung blos bekannte Größen sind, denen x gleich ist.

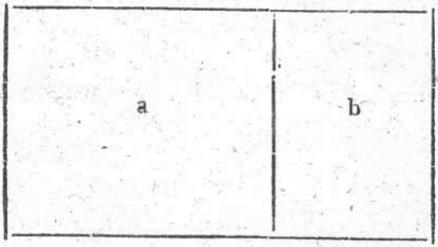
3) Daß $x + \frac{b}{2a}$ wirklich die Wurzel jener Gleichung sey, davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man diese Größe mit sich selber multiplicirt.

$$\begin{array}{r} x + \frac{b}{2a} \\ x + \frac{b}{2a} \\ \hline x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \\ xx + x\frac{b}{2a} \qquad\qquad \\ \hline xx + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \end{array}$$

Dieser Ausdruck ist dem vorigen $xx + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$ gleich, denn das mittelste Glied $2x\frac{b}{2a}$ ist gleich $2\frac{b}{2a}x$ $= \frac{b}{a}x$, denn wenn man den Nenner eines Bruchs mit 2 dividirt, ist eben so viel als wenn man den ganzen Bruch mit 2 multiplicirt.

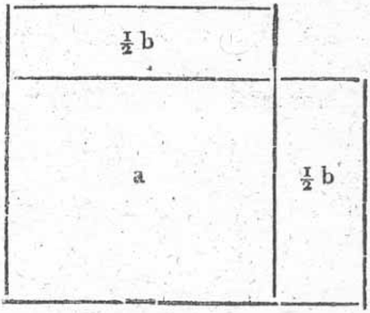
Ich habe in diesem Beispiel alle Größen bejaht genommen, damit der Gang der Rechnung einfacher bleibe, und sich leichter übersehen lasse. — Sie hätten auch zum Theil verneint seyn können. Die Rechnung würde dann dieselbe gewesen seyn, nur würde man dann mehr auf die Zeichen haben achten müssen, wodurch die Aufmerksamkeit wäre getheilt worden.

4) Man kann sich dieses Verfahren, das Quadrat zu ergänzen, mit einer geometrischen Zeichnung deutlich machen.



Hat man nemlich ein Quadrat wie a, und zugleich ein Rechteck wie b, dessen eine Seite der Seite des Quadrats gleich ist, so kann man immer hieraus auf folgende Weise ein großes Quadrat machen.

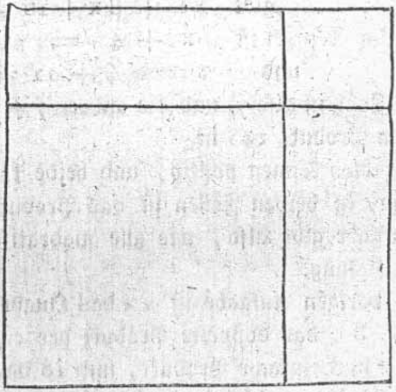
Man theilt das Rechteck b in zwei gleiche Rechtecke, wovon jedes dieselbe Höhe und die halbe Grundfläche hat, und legt das eine an die anliegende Seite des Quadrats. Hiedurch erhält man folgende Figur.



Man

Man sieht, daß man, um das große Quadrat vollständig zu machen, man noch das kleine hinzufügen muß, dessen Seiten die halbe Grundlinie des ersten Rechtecks sind. (In 2) war das Rechteck $\frac{b}{2a}x$, die halbe Grundlinie $\frac{b}{2a}$, und das Quadrat derselben $\frac{b^2}{4a^2}$).

Man erhält dann dieselbe Figur wie S. 220 Theil II. wo das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel geometrisch construirt ist, und gezeigt, daß es bestehe:



1) Aus dem Quadrat des ersten Theils.
2) Aus dem doppelten Produkt des ersten Theils in den zweiten.
3) Aus dem Quadrat des zweiten Theils.

§. 26.

Wir wollen die Auflösung der quadratischen Gleichungen an einigen Beispielen erläutern.

1. Aufgabe. Man sucht zwei Zahlen, deren Produkt 105 ist, und wovon die eine um 8 größer ist als die andere.

Die Kleinere sey x, so ist die Größere $x + 8$ und $x\,(x + 8) = 105$.

Also $xx + 8x = 105$

an beiden Seiten addirt $+ 16 \quad + 16$

gibt $xx + 8x + 16 = \cancel{112}$ 121

Hieraus die Wurzel ist $x + 4 = 11$

und $x = -4 + 11 = 7$

Die eine Zahl ist also 7, und die andere $7 + 8 = 15$, deren Produkt 105 ist.

Beide Zahlen können positiv, und beide können auch negativ seyn, in beiden Fällen ist das Produkt $+ 105$, und die Aufgabe gibt also, wie alle quadratischen, eine doppelte Auflösung.

In der vorigen Aufgabe ist xx das Quadrat des ersten Theils, $8x$ das doppelte Produkt des ersten in den zweiten, $4x$ das einfache Produkt, und 16 das Quadrat des zweiten Theils, welches man hinzufügt, um das große Quadrat vollständig zu haben.

2. Aufgabe. Man sucht eine Zahl, wenn man von ihrem Quadrat 9 abzieht, so bleibt eben so viel über 100 als sie selber unter 23 ist.

Die Zahl sey x, so ist $xx - 109 = 23 - x$

$+ 109 \quad + 109$

$xx = 132 - x$

also $xx + x = 132$

Man

Man hat jetzt das Quadrat des ersten Theils xx, und das doppelte Produkt des ersten in den zweiten $1x$. Das einfache Produkt ist also $\frac{1}{2}x$, und das fehlende Quadrat $\frac{1}{4}$. Addirt man dieses hinzu, so hat man folgende zweitheilige Wurzel: $xx + x + \frac{1}{4} = 132 + \frac{1}{4} = \frac{529}{4}$

Hieraus die Wurzel, gibt $x + \frac{1}{2} = \frac{23}{2} = \pm 11\frac{1}{2}$

$$\text{und } x = -\frac{1}{2} \pm 11\frac{1}{2}.$$

x kann also $= +11$ seyn, und ebenfalls -12. Beide Zahlen thun der Aufgabe Genüge.

Denn $11^2 - 9$ ist $= 112$, also 12 über 100, und eben so viel ist auch 11 unter 23.

Eben so ist $-12^2 - 9 = 135$, also 35 über 100, und -12 ist ebenfalls um 35 unter $+23$.

Die Aufgabe läßt also wieder eine doppelte Auflösung zu.

3. Aufgabe. Man sucht eine Zahl, wenn man ihre Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt, und zum Produkt die Hälfte der zu findenden Zahl addirt, daß 30 komme.

Die Zahl sey x, so ist $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x = 30$.

Also $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$

Alle Glieder mit 6 multip. gibt $xx + 3x = 180$

Hiezu addirt das Quadrat von $\frac{3}{2}$, welches $+\frac{9}{4}$ ist

gibt $xx + 3x + \frac{9}{4} = 180 + \frac{9}{4} = \frac{729}{4}$

Hieraus die Wurzel $x + \frac{3}{2} = \pm \frac{27}{2} = \pm 13\frac{1}{2}$

und $x = -1\frac{1}{2} \pm 13\frac{1}{2}$

also kann $x + 12$ und -15 seyn. Beide Zahlen thun der Aufgabe Genüge.

4. Aufgabe. Im Monat November wird jemand gefragt: der wie vielste des Monats es sey? Er antwortet:

tet: der heutige Tag ist die Wurzel aus denen, die noch kommen.

Der heutige Tag sey x, so sind die, welche noch kommen xx.

$$\text{Daher } xx + x = 30$$
$$\text{und } xx + x + \tfrac{1}{4} = 30 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{121}{4}$$

$$\text{Hieraus die W. gibt } x + \tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{11}{2} = \pm 5\tfrac{1}{2}$$
$$\text{und } x = -\tfrac{1}{2} \pm 5\tfrac{1}{2}$$

x ist also + 5 oder — 6 der letzte Werth — 6 würde der 25 Oktober gewesen seyn. Dieser Werth wird aber durch die Aufgabe ausgeschlossen, weil bemerkt wird, daß die Frage im November geschah. Hätte aber jemand den 25 Oktober gefragt: Wie vielsten November haben wir heute? so wäre die Antwort ganz richtig gewesen, denn der — 6 November muß der 25 Oktober seyn. Denn von hier bis zum ersten sind 6 Tage, und von hier bis zum letzten sind 36.

Man sieht an diesem Beispiele, wie jede quadratische Gleichung immer zwei verschiedene Werthe gibt, welche beide der Aufgabe Genüge thun, und welchen von beiden man wählen soll, das muß man aus andern Umständen bestimmen.

5. Aufgabe. Es kauft jemand eine Anzahl Tücher. Für das erste bezahlt er 1 Thaler, für das zweite 2, für das dritte 3, u. s. w. Für alle zusammen 66 Thlr.

Wie viel Tücher hatte er?

Man hat hier eine arithmetische Reihe zu summiren, deren Summe = 66, deren erstes Glied 1, und deren letztes = x.

Man addire das erste und letzte Glied, also 1 + x.

Dieses

Dieses mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, gibt die doppelte Summe.

$$\text{also} \quad xx + x = 132$$

$$\text{Hiezu addirt} \quad + \tfrac{1}{4} \qquad + \tfrac{1}{4}$$

$$\text{gibt} \quad xx + x + \tfrac{1}{4} = 132 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{529}{4}$$

$$\text{also} \quad x + \tfrac{1}{2} = \pm \tfrac{23}{2} = \pm 11\tfrac{1}{2}$$

$$\text{und} \quad x = -\tfrac{1}{2} \pm 11\tfrac{1}{2}$$

Also das elfte Glied im positiven Theile der Reihe, und das zwölfte im negativen, (von + 1 an gerechnet) werden der Aufgabe Genüge thun. Da die Aufgabe aber keine verneinte Werthe erlaubt, so ist die Anzahl der gekauften Tücher durch die Zahl 11 bestimmt.

6. Aufgabe. Zwei Bäuerinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Markt, die eine aber mehr wie die andere, verkaufen aber zu ungleichen Preisen, lösen bei allem dem aber gleich viel Geld.

Beim Zuhausegehen sagt die eine zu der andern: Hätte ich deine Eyer gehabt, so würde ich 15 Stüber gelöst haben. Die andere sagt: Hätte ich deine gehabt, so hätte ich $6\frac{2}{3}$ Stüber gelöst. Nun ist die Frage: 1) Wie viel Eyer hatte jede? und 2) wie theuer verkaufte jede?

Die erste hatte x Eyer, und die andere $100 - x$ Eyer. Da nun die erste $100 - x$ Eyer für 15 Stüber würde verkauft haben, so hätte sie x Eyer für $\frac{x \cdot 15}{100 - x}$ Stüber verkauft, nach dem Regula de Tri-Satze: $100 - x$ thun 15 Stüber, was thun x Eyer?

Die andere, welche aus x Eyern $6\frac{2}{3}$ Stüber lösen wollte, würde aus $100 - x$ Eyern nach demselben Regula de Trisatze gelöst haben: $\frac{100 \cdot 6\frac{2}{3} - x\, 6\frac{2}{3}}{x} = \frac{2000 - 20x}{3x}$

Da

Da beide Bäuerinnen gleichviel gelöst haben, so haben wir $\frac{15\,x}{100 - x} = \frac{2000 - 20\,x}{3\,x}$.

Dieses mit $3\,x$ multip. gibt $\frac{45\,xx}{100 - x} = 2000 - 20\,x$

Dieses mit $100 - x$ mult. gibt $45\,xx = 200000 - 2000\,x$
$- 2000\,x + 20\,xx$

an beid. Seiten $20\,xx$ subt. gibt $25\,xx = 200000 - 4000\,x$

durch 25 dividirt, gibt $xx = 8000 - 160\,x$

also $xx + 160\,x = 8000$

und $xx + 160\,x + 6400 = 8000 + 6400$

Hieraus die Wurzel $x + 80 = 120$ und $x = 40$

Die eine Bäuerin hatte also 40 Eyer gehabt, und die andere 60. Jede hatte 10 Stüber gelöst. Denn die eine, die 40 Eyer hatte, sagte, daß sie für die 60 der andern 15 Stüber würde bekommen haben. Für ihre 40 hatte sie also 10 Stüber bekommen.

Wenn negative Eyer möglich wären, so thät auch folgende Auflösung der Frage Genüge: Die eine hatte $- 80 - 120 = - 200$ Eyer gehabt, und die andere $+ 500$, da $- 200 + 300 = 100$ ist, dann in der letzten Gleichung kann 120 eben sowohl + als − seyn. Die erste hatte von ihren negativen Eyern 20 für 1 Stüber gegeben, und die letztere von ihren positiven 30 für 1 Stüber, wo dann beide gleichviel lösten, nemlich 10 Stbr.

Durch die Natur der Aufgabe wird diese Auflösung unmöglich, aber man sieht dann doch wie jede quadratische Gleichung zweierlei Auflösungen zuläßt.

§. 27.

1) Diese Eigenschaft der quadratischen Gleichungen, daß sie jedesmal eine doppelte Auflösung zulassen, verdient eine nähere Untersuchung.

Bei ganz einfachen Gleichungen, wie z. B. $\sqrt{64} = x$, ist die Ursache gleich klar. Denn da kann x eben sowohl $+8$ als -8 seyn, da in beiden Fällen das Quadrat $+64$ gibt.

2) Bei den zusammengesetzten Gleichungen, als $xx - 12x + 35 = 0$, rührt die Ursache daher, daß man solche Gleichungen immer als ein Produkt aus zwei Gleichungen des ersten Grades ansehen kann, welches Produkt in allen Fällen 0 wird, sobald eine derselben $= 0$ ist.

Beispiel. Es sey $x - 7 = 0$
also $x - 5 = 2$

Beide Gleichungen multiplicirt geben

$$xx - 12x + 35 = 0.$$

Man kann diese Gleichung natürlich wieder in die beiden $x - 7 = 0$ und $x - 5 = 2$ zerlegen, aus denen sie entstanden ist.

Oder man habe $x - 5 = 0$
also $x - 7 = -2$

Beide Gleichungen multip. geben ebenfalls

$$xx - 12x + 35 = 0.$$

Setzt man also die Zahl $x = 5$, so wird das Produkt 0, so wie es die Gleichung verlangte. Setzt man die Zahl $x = 7$, so wird das Produkt ebenfalls 0, und beide Zahlen thun also der Gleichung Genüge.

Wir

Wir wollen ein Beispiel in Zahlen nehmen.

$$\begin{array}{rl} \text{Es sey} & 12 - 12 = 0 \\ \text{also} & 12 - 3 = 9 \\ \hline \text{Beides multip. gibt} & 144 - 180 + 36 = 0 \\ \text{oder} & xx - 15x + 36 = 0. \end{array}$$

Setzt man $x = 12$, so erhält man 0, so wie es die Gleichung verlangt. Setzt man $x = 3$, so erhält man:

$$\begin{array}{l} 3 - 3 = 0 \\ 3 - 12 = -9 \\ \hline 9 - 45 + 36 = 0 \end{array}$$

oder $xx - 15x + 36 = 0$

Wenn man also $x = 3$ setzt, so thut man ebenfalls der Aufgabe Genüge, welche verlangt, daß die Gleichung $= 0$ seyn soll.

3) Man sieht hieraus, daß das letzte Glied ein Produkt aus den beiden Zahlen ist, die den Gleichungen Genüge thun. Das Vorletzte ist ein Produkt aus der Summe von beiden mit einer derselben.

Man kann hiernach in jeder quadratischen Gleichung leicht beurtheilen, wie groß die beiden Zahlen ungefehr seyn werden, die der Gleichung Genüge thun. Gesetzt, das dritte Glied der Gleichung ist 36, so geben 18 und 2 ein solches Produkt, allein diese beide Zahlen können die Gesuchten nicht seyn, weil ihre Summe 20 ist, also größer wie die Zahl 15 des zweiten Gliedes. Ebenfalls können 360 und 0,1 nicht die beiden Wurzeln der Gleichung seyn, weil sie zwar zum Produkt 36 geben, allein zur Summe 360, 1 also viel mehr als das zweite Glied für die Summe angibt.

4) Es muß nun noch gezeigt werden, daß überhaupt jede quadratische Gleichung aus der Multiplikation zweier Gleichungen des ersten Grades entsteht. Für den Fall, daß die Gleichung vollständig ist wie die vorige $xx - 12x + 35 = 0$, ist es in 2) gezeigt worden. Wir wollen es jetzt noch für den Fall zeigen, daß das zweite Glied fehlt, wo die Gleichung also folgende Form hat: $xx - 36 = 0$.

Diese ist aus folgenden beiden Gleichungen entstanden.

$$\begin{array}{r} x - 6 = 0 \\ x + 6 = 12 \\ \hline + x6 - 36 \\ xx - x6 \quad\quad \\ \hline xx - 36 = 0. \end{array}$$

Daß hier das zweite Glied fehlte, rührte daher, daß die Gleichung eine positive Wurzel, und eine negative hat, die beide gleich groß sind, wodurch das mittlere Glied verschwindet.

5) Endlich ist noch der Fall zu untersuchen übrig, wenn das letzte Glied in der Gleichung fehlt, und diese folgende Form hat, $xx - 15x = 0$. In diesem Falle hat die Gleichung nun eine Wurzel, nemlich $+15$, ist aber auch kein Produkt aus zweien andern, und überhaupt keine quadratische. Denn man braucht nur an beiden Seiten mit x zu dividiren, und man hat $x - 15 = 0$, welches eine Gleichung des ersten Grades ist.

6) Wann die Aufgabe eine unmögliche Bedingung enthält, so werden die beiden Werthe von x immaginär. Man kommt dann bei der Auflösung auf die Wurzel einer negativen Zahl, woran man erkennt, daß die Aufgabe

unmöglich ist. Da es unmöglich ist, aus einer negativen Zahl die Wurzel zu ziehen.

Wenn z. B. die Zahl 12 so in zwei Theile sollte getheilt werden, daß ihr Produkt 40 wäre, so würde etwas unmögliches verlangt, denn das größtmöglichste Produkt kann nur seyn $6 . 6 = 36$.

Indeß kann man die Aufgabe so durchrechnen, als wenn sie möglich wäre, wo sich dann die Unmöglichkeit am Ende findet.

Es sey ein Theil der gesuchten Zahl $= x$, so ist der andere $12 - x$, und ihr Produkt $12x - xx = 40$, folglich wenn man alle Vorzeichen umkehrt:

$$xx - 12x = -40.$$

$$\text{also } xx - 12x + 36 = -40 + 36 = -4$$

Hieraus die Wurzel $x - 6 = \sqrt{-4}$

$$\text{und } x = +6 \pm \sqrt{-4}.$$

Die Wurzel aus -4 ist aber eine immaginäre oder unmögliche Zahl, weil man keine Zahl angeben kann, die mit sich selber multiplicirt -4 gibt. Denn $+2$ gibt $+4$, und -2 gibt mit sich selbst multiplicirt ebenfalls $+4$.

7) Wenn man daher die allgemeine Gleichung hat, $xx - ax + b = 0$, so kann man leicht beurtheilen, ob die Gleichung auf mögliche oder unmögliche Wurzeln führt. Denn wenn man sie verwandelt, so hat man

$$xx - ax = -b$$

$$\text{und } xx - ax + \frac{a^2}{2^2} = -b + \frac{a^2}{2^2}$$

$$\text{Woraus die Wurzel} = x - \frac{a}{2} = \sqrt{-b + \frac{a^2}{2^2}}$$

Wenn $+\frac{a^2}{2^2}$ größer als $-b$ ist, so bleibt die Größe, aus der man die Wurzel ziehen soll, positiv. Ist aber $-b$ größer, so wird sie negativ, und die Wurzel ist unmöglich.

8) Indeß kann man bei den unmöglichen Zahlen doch wenigstens die Multiplikation anzeigen.

Z. B. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-3}$.

In dem Falle, daß beide gleich sind und sie zugleich entgegengesetzte Vorzeichen haben, so kann man die Multiplikation wirklich verrichten, und das Produkt wird möglich, weil das Wurzelzeichen verschwindet.

Wir wollen das Beispiel in 6) nehmen.

$$\begin{array}{rcl}
x = & 6 + \sqrt{-4} & \\
y = & 6 - \sqrt{-4} & \\
\hline
& -6\sqrt{-4} & +4 \\
& 36 + 6\sqrt{-4} & \\
\hline
xy = & 36 & +4
\end{array}$$

Also ist $xy = 36 - 4 = 0$ eine quadratische Gleichung, (wenn man den Recktangel xy als ein Quadrat betrachtet) die, wenn $x + x = 12$ seyn soll, zwei unmögliche Wurzeln hat, deren Produkt eine mögliche Größe ist, weil ihre Vorzeichen entgegengesetzt sind. Hätten aber beide als Vorzeichen $+$, oder beide $-$ gehabt, so hätte man im Produkt erhalten $32 \pm 12\sqrt{-4}$, und die unmögliche Größe wäre in die Gleichung selber gekommen.

Wir können also hieraus den Schluß machen, daß, wenn eine quadratische Gleichung unmögliche Wurzeln hat, dieser jedesmal zwei seyn müssen, die zugleich entgegengesetzte Vorzeichen haben.

9) Man sieht aus dem vorigen, daß es sehr leicht ist, quadratische Gleichungen zu machen. Man erhält jedesmal eine, sobald man nur zwei Gleichungen des ersten Grades, wie z. B. $x - 7 = 0$ und $x - 5 = 2$ mit einander multiplicirt. Multiplicirt man drei Gleichungen des ersten Grades mit einander, so erhält man cubische Gleichungen. Multiplicirt man viere, so erhält man Biquatische u. s. w.

Von den Cubischen Gleichungen.

§. 28.

Von der Auflösung der reinen Cubischen Gleichungen.

Wenn in einer Gleichung nur der Cubus der unbekannten Zahl x vorkommt, aber übrigens weder ihr Quadrat noch sie selber, dann heißt sie: eine reine cubische Gleichung.

Eine solche cubische Gleichung ist $x^3 = 343$ oder allgemein $x^3 = a$.

2) Aus einer solchen Gleichung findet man den Werth für $x = 7$; wenn man die Cubikwurzel auszieht.

Indeß da bei einer quadratischen Gleichung x schon zwei Werthe halte, so ist es nicht unwahrscheinlich, daß es bei einer cubischen ebenfalls mehrere Werthe haben wird. Wir wollen dieses näher untersuchen. Es sey die Gleichung gegeben $x^3 = 8$, aus der alle Zahlen sollen gefun-

gefunden werden, die zweimal mit sich selber multiplicirt $= 8$ sind, oder welche die Gleichung $x^3 - 8 = 0$ geben.

Da nun eine dieser Zahlen $x = 2$ ist, so ist $x - 2$ einer der Faktoren aus denen die Gleichung $x^3 - 8 = 0$ entstanden ist, und man hat nur um den andern zu finden, diese mit $x - 2$ zu diviren.

$$\begin{array}{l}
x - 2)\ x^3 - 8 \quad (xx + 2x + 4 \\
\quad\quad\ \ \underline{x^3 - 2xx} \\
\quad\quad\quad\quad + 2xx - 8 \\
\quad\quad\quad\quad \underline{+ 2xx - 4x} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 4x - 8 \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{+ 4x - 8} \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0
\end{array}$$

Man kann also die Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch die beiden Faktoren darstellen, $x - 2$ und $xx + 2x + 4$ welche mit einander multiplicirt diese Gleichung geben.

Da nun die Frage ist: was man für eine Zahl für x annehmen müsse, daß $x^3 = 8$, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde? so ist klar, daß dieser Genüge geschieht, wenn das gefundene Produkt 0 wird; und dieses wird $= 0$; nicht nur wenn der erste Faktor $x - 2 = 0$ wird, sondern wenn auch der andere $xx + 2x + 4 = 0$ ist.

Der Faktor $xx + 2x + 4 = 0$.

ist aber $xx + 2x = -4$

und $xx + 2x + 1 = -4 + 1 = -3$

hieraus die Wurzel gibt $x + 1 = \sqrt{-3}$

und $x = -1 \pm \sqrt{-3}$

3) Wir finden also außer $x = 2$ noch zwei andere Werthe für x; nemlich $x = -1 + \sqrt{-3}$ und $x = -1 - \sqrt{-3}$, deren Cubi ebenfalls $= 8$ sind.

Und

Und obschon die beiden letzten Werthe von x immaginär oder unmöglich sind, so kann man sie bei der Rechnung doch als wirkliche Zahlen gebrauchen, und sie mit sich selber multipliciren.

$$\begin{array}{rr}
 & -1+\sqrt{-3} \\
 & -1+\sqrt{-3} \\ \hline
 & +1-\sqrt{-3} \\
 & -\sqrt{-3}-3 \\ \hline
\text{Quadrat} & -2-2\sqrt{-3} \\
 & -1+\sqrt{-3} \\ \hline
 & +2+2\sqrt{-3} \\
 & -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline
\text{Cubus} & 8.
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
-1-\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\ \hline
1+\sqrt{-3} \\
+\sqrt{-3}-3 \\ \hline
-2+2\sqrt{-3} \\
-1-\sqrt{-3} \\ \hline
2-2\sqrt{-3} \\
+2\sqrt{-3}+6 \\ \hline
8.
\end{array}$$

Man sieht hieraus, daß eine jede Cubikwurzel dreierlei Werthe haben kann, wovon zwar zwei unmögliche Zahlen sind, aber doch bei den Rechnungen können gebraucht werden. Bei den gewöhnlichen Rechnungen wird aber nur eine von diesen Wurzeln gebraucht, deren Werth nemlich eine mögliche Zahl ist. $+2$.

4) 1. Aufgabe. Man sucht eine Zahl, wenn man ihr Quadrat mit ihrem $\frac{1}{3}$ multiplicirt man 1125 erhalte.

Die Zahl sey x, so ist $xx \cdot \frac{1}{3}x = 1125$ also $\frac{1}{3}x^3 = 1125$ und $x^3 = 3375$. Hieraus die Cubikwurzel gibt $x = 15$.

2. Aufgabe. Man sucht eine Zahl, deren vierte Potenz durch ihre Hälfte dividirt, und hiezu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 mache.

Die Zahl sey x; so ist ihre vierte Potenz x^4 und dieses

dieses durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}$ x dividirt, gibt $2x^3$. Hiezu $14\frac{1}{4}$ addirt, gibt 100.

Also $2x^3 = 100 - 14\frac{1}{4} = 85\frac{3}{4} = \frac{343}{4}$.

Mit 2 dividirt gibt $x^3 = \frac{343}{8}$ und hieraus die Cubikwurzel gibt für $x = \frac{7}{2}$.

3. Aufgabe. Eine Gesellschaft Kaufleute legen ein Kapital zusammen, in dem jeder 100mal so viel gibt als ihrer sind. Mit jedem 100 Thlr. gewinnen sie zweimal so viel als ihrer sind, und der ganze Gewinnst beträgt 2662 Thlr.

Die Anzahl der Kaufleute war x, und jeder legte ein 100 x Thlr. Da nun mit 100 Thlr. 2 x Thlr. gewonnen wurden, so war der Gewinnst $\frac{2x \cdot 100xx}{100} = 2x^3$ welches nach der Aufgabe 2662 war. Daher $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11 =$ der Anzahl der Kaufleute.

§. 29.

Von der Auflösung der vollständigen Cubischen Gleichungen.

1) Eine vollständige cubische Gleichung heißt eine solche, in der außer dem Cubo der unbekannten Zahl, noch diese Zahl selber und ihr Quadrat vorkommt. Wenn in ihr alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so ist die allgemeine Form solcher Gleichungen folgende:

$$a x^3 \pm b x^2 \pm c x \pm d = 0.$$

Eine solche cubische Gleichung hat immer drei Wurzeln, oder drei Werthe für die Zahl x, welche der Aufgabe Genüge thun.

Denn so wie man bei einer quadratischen Gleichung immer zwei Faktoren angeben kann, welche mit einander multiplicirt, die Gleichung geben, so kann man bei einer cubischen drey solcher Faktoren angeben. Es sey z. B. die Gleichung $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$, so erhält man diese, wenn man die 3 Faktoren $(x - 1)$ $(x - 2)$ und $(x - 3)$ mit einander multiplicirt. Wird einer von den drei Faktoren $= 0$, so wird auch die Gleichung $= 0$, und einer von diesen wird 0, sobald man $x = 1$ oder $= 2$, oder $= 3$ setzt. Diese Gleichung hat daher die 3 Wurzeln 1, 2 und 3.

2) Wenn man die Multiplikation wirklich anstellt, so sieht man, daß das letzte Glied 6 das Produkt aus allen dreien Wurzeln ist, nemlich $1 . 2 . 3 = 6$. Eine cubische Gleichung hat daher keine andere rationale Wurzeln als solche, womit sich das letzte Glied theilen läßt.

Hat man daher eine Wurzel errathen, so findet man das Produkt der beiden andern, wenn man die Gleichung mit dieser dividirt.

$$
\begin{array}{rl}
x - 1)\ x^3 - 6xx + 11x - 6\ (xx - 5x + 6 \\
x^3 - xx \\
\hline
-5xx + 11x - 6 \\
-5xx + 5x \\
\hline
6x - 6.
\end{array}
$$

Hiedurch ist die Auflösung auf die quadratische Gleichung $xx - 5x + 6$ gebracht, aus der man auf die gewöhnliche Weise die Wurzel zieht:

$$x = 2\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \text{ also } x = 3 \text{ oder } = 2.$$

Das Auflösen der cubischen Gleichungen hat daher

keine

keine Schwierigkeit, sobald man nur eine Wurzel errathen hat.

Dieses Errathen wird sehr dadurch erleichtert, daß man nur unter einer kleinen Anzahl von Zahlen zu suchen hat, denn die, welche keine Theiler der letzten Zahl sind, können nicht in Betracht kommen. In der vorigen Gleichung kommen z. B. nur die Zahlen 1, 2, 3 und 6 in Betracht, weil diese die einzigen Theiler von 6 sind.

Stellt man mit diesen die Probe an, so hat man:

$x = 1$ gesetzt gibt $1^3 - 6 + 11 - 6 = 0$, also ist 1 eine Wurzel.

$x = 2$ . . . $8 - 24 + 22 - 6 = 0$, also ist 2 auch eine Wurzel.

$x = 3$ . . . $27 - 54 + 33 - 6 = 0$, also ist 3 auch eine Wurzel.

$x = 6$ . . . $212 - 212 + 66 - 6 = 60$, also ist 6 keine Wurzel.

3) Man erleichtert sich dieses Suchen, wenn man zuerst bestimmt, ob alle Wurzeln positiv oder negativ, oder ob sie vermischt sind.

Sind alle positiv, wie im vorigen Beispiele, so müssen die Zeichen + und — in der Gleichung regelmäßig abwechseln. Z. B. $+ x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Sind alle Wurzeln negativ, so werden alle Zeichen + in der Gleichung. Es sey wie in der vorigen $x + 1 = 0$ $x + 2 = 0$, und $x + 3 = 0$, so erhält man, wenn man diese drei Faktoren multiplicirt,

$$+ x^3 + 2x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Sind weder alle Zeichen +, oder wechseln + und — nicht regelmäßig, so ist dieses eine Anzeige, daß die Wurzeln zum Theil positiv und zum Theil negativ sind.

Gesetzt, man habe die Gleichung $x^3 + xx - 34x + 56 = 0$, in welcher zwei Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens sind. Hieraus sieht man, daß diese Gleichung zwei positive und eine negative Wurzel hat, welche Theiler des letzten Gliedes 56 seyn müssen, und also unter den Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28$ befindlich. Setzt man eine der Wurzeln $x = 2$, so erhält man: $8 + 4 - 68 + 56 = 0$. Hieraus folgt, daß $x - 2$ einer der Faktoren ist. Dividirt man mit diesem in die Gleichung, so erhält man für das Produkt der beiden andern $xx + 3x - 28 = 0$, aus welcher quadratischen Gleichung man den Werth von $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$ findet, also -7 und $+4$ sind die beiden andern Wurzeln.

§. 30.

1. Aufgabe. Man sucht zwei Zahlen, deren Differenz $= 12$ ist. Wenn man ihr Produkt mit ihrer Summe multiplicirt, so erhält man 14560.

Auflösung. Die kleinere sey $= x$, so ist die größere $x + 12$. Ihr Produkt ist $xx + x\,12$. Dieses mit ihrer Summe $2x + 12$ multiplicirt, gibt:

$$2x^3 + 36x^2 + 144x = 14560$$

oder $$x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$$

und $$x^3 + 18x^2 + 72x - 7280 = 0.$$

Weil das letzte Glied 7280 zu groß ist, um mit allen seinen Theilen das Wurzelsuchen zu versuchen, so verwandle man die Gleichung in folgende, in welcher man $x = 2y$ setzt, und statt jenem Zeichen dieses hinschreibt.

$8y^3 + 72y^2 + 144y - 7280 = 0.$

Diese

Diese kann man durch 8 dividiren, also:

$$y^3 + 9y^2 + 18y - 910 = 0.$$

Man muß nun mit den Theilern der Zahl 910, welche 1, 2, 5, 7, 10, 13 .... sind, so lange versuchen, bis man eine Wurzel findet. Die ersten Theiler 1, 2, 5 sind, wie man leicht sieht, zu klein. Man fängt also mit 7 an, $y = 7$ gesetzt, gibt folgende Gleichung:

$$7^3 + 9 \cdot 7^2 + 18 \cdot 7 - 910 = 0.$$

Aus dieser sieht man, daß die eine Wurzel $y = 7$ und x also $= 14$ ist. Will man nun noch die übrigen beiden Wurzeln wissen, so dividirt man die Gleichung mit $y - 7$, und man erhält $yy + 16y + 130$.

Dieses ist eine quadratische Gleichung, aus der man die beiden übrigen Werthe von $y = -8 \pm \sqrt{-66}$ findet. Hieraus folgt: daß die beiden übrigen Wurzeln immaginär oder unmöglich sind.

2. Aufgabe. Einige Kaufleute haben zusammen ein Kapital von 8240 Thaler. Dazu legt ein jeder noch 40 mal so viel Thaler als Kaufleute sind. Mit dieser Summe gewinnen sie eben so viel Procent, als ihrer sind.

Hierauf theilen sie den Gewinn, und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehnmal so viel Thaler genommen als Kaufleute sind, so bleiben noch 224 Thaler. Wie viel Kaufleute waren?

Die Anzahl der Kaufleute sey $= x$, so legt ein jeder noch $40x$ Thlr. zu dem Kapital von 8240 Thlr. Alle zusammen legen also zu $40xx$ Thlr., wodurch die ganze Summe $8240 + 40xx$ wird.

Mit

Mit dieser gewinnen sie von 100 Thlr. x Thlr., daher wird der ganze Gewinnst seyn:

$$\frac{40\,x^3}{100} + \frac{8240\,x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824\,x}{10} = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412\,x}{5}$$

Hievon nimmt nun ein jeder 10 x Thlr., also zusammen 10 x x Thlr. und als dieses abgezogen, bleiben noch 224 Thlr. übrig. Der Gewinnst war also $10\,xx + 224$ Thlr., woraus man diese Gleichung erhält:

$$\frac{2}{5}x^3 + \frac{412\,x}{5} = 10\,xx + 224.$$

Um die Brüche wegzuschaffen, multiplicirt man diese Gleichung mit 5, und man erhält:

$$2\,x^3 + 412\,x = 50\,xx + 1120,$$

und um die 2 beim Cubus wegzubringen, dividirt man mit 2, wodurch man erhält: $x^3 + 206\,x = 25\,xx + 560$,

und $x^3 + 206\,x - 25\,xx - 560 = 0$

oder die Gleichung so geordnet, daß die großen Werthe von x vorne stehen $= x^3 - 25\,x^2 + 206\,x - 560 = 0$.

Da die Zeichen + und − regelmäßig in der Gleichung abwechseln, so sieht man, daß alle drei Wurzeln positiv seyn werden, und daß sie unter den Theilern der Zahl 560, welche 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16 .... müssen zu finden seyn.

Die Wurzeln 1, 2, 4 sind offenbar zu klein, wir wollen es deßwegen mit 5 versuchen.

x sey $= 5$ also $5^3 - 25 . 5^2 + 206 . 5 - 560 = -30$, also zu klein.

x sey $= 7$ also $7^3 - 25 . 7^2 + 206 . 7 - 560 = 0$, also ist 7 eine Wurzel.

Um nun die beiden übrigen zu finden, so theilt man mit $x - 7$ die Gleichung.

$x - 7)$

$$
\begin{array}{l}
x - 7)\; x^3 - 25x^2 + 206x - 560\; (xx - 18x + 80 \\
\quad\;\; \underline{x^3 \mp 7x^2} \\
\qquad\quad -18x^2 + 206x \\
\qquad\quad \underline{-18x^2 + 126x} \\
\qquad\qquad\qquad 80x - 560 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{80x - 560} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Man hat nun die quadratische Gleichung:

$$xx - 18x + 80 = 0$$

welche verwandelt, gibt $xx - 18x = -80$

$$xx - 18x + 81 = -80 + 81 = 1$$

Hieraus die Wurzel $x - 9 = \pm 1$

und $x = +9 \pm 1 = 10$ und $= 8$

Die drei Wurzeln der Gleichung sind also 7, 8 und 10, und die Anzahl der Kaufleute kann daher 7, 8 oder 10 gewesen seyn. Alle drei Antworten thun der Frage Genüge, wie man aus folgendem Täfelchen sieht, welches die Probe für die Aufgabe enthält.

Die Anzahl der Kaufleute sey x	= 7	= 8	= 10
Ein jeder legte ein 40 x	280 Thl.	320 Thl.	400 Thl.
Alle zusammen legen ein $40\,x^2$	1960	2560	4000
Das alte Kapital war	8240	8240	8240
Das ganze Kapital ist $40\,x^2 + 8240$ . .	10200	10800	12240
Mit demselben wird so viel Procent gewonnen als Kaufleute sind, also	714	864	1224
Davon nimmt jeder weg 10 x	70	80	100
Also alle zusammen .	490	640	1000
Bleibt also noch übrig	224	224	224

Anm. In einer Gleichung wie folgende $xx - 18x + 80 = 0$ wird das letzte Glied 80 von einigen Algebraisten, die Absolutzahl genannt, weil sein Werth allein so viel beträgt als der aller andern Glieder zusammengenommen. Denn $xx - 18x = -80$. Andere Algebraisten nennen es das ledige Glied, weil es die unbekannte Zahl x nicht bei sich hat. Bei der Auflösung der Gleichungen ist dieses Glied von Wichtigkeit, da es jedesmal das Produkt von allen Wurzeln ist.

§. 31.

Die Auflösung der cubischen Gleichungen des vorigen §. hatte keine Schwierigkeiten, weil die Wurzeln derselben ganze Zahlen waren, deren eine man ziemlich leicht errathen konnte, da jede Wurzel ein Theiler der letzten Zahl ist. Indes ist dieses selten der Fall, und die cubischen Gleichungen führen gewöhnlich auf Wurzeln, welche entweder Brüche oder gar Irrationalzahlen sind. Die letzteren kann man nur durch Näherung finden. Die ersteren gibt noch die Regel des Cardani, deren Erklärung indeß etwas weitläuftig ist, und die wir um so lieber in diesen Anfangsgründen der allgemeinen Rechenkunst überschlagen, da wir nachher eine allgemeine Methode werden kennen lernen, die Wurzeln mit Hülfe der arithmetischen Reihen, aus allen Zahlengleichungen zu finden, sie mögen beschaffen seyn wie sie wollen.

§. 32.

Von den biquadratischen Gleichungen.

Wenn in einer Gleichung die vierte Potenz der unbekannten Zahl x vorkommt, so heißt sie eine Biquadratische. — Diese heißt eine **reine**, wenn blos die vierte Potenz von ihr da ist; z. B. $x^4 + ab = c$. Hingegen heißt sie eine vollständige, wenn außer der vierten, auch noch die dritte, zweite und erste Potenz von ihr drin vorkommt. Sie hat dann folgende Form:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0.$$

Diese Gleichungen müssen bei der Auflösung entweder in zwei quadratische zerlegt oder auf cubische gebracht werden, wozu der Italiener **Bombelli** eine besondere Regel gefunden. Diese sowohl, wie die von **Cardani**, hat **Euler** in seiner Algebra in besonderen Kapiteln abgehandelt.

Wegen der Weitläuftigkeit, die von diesen Untersuchungen nicht zu trennen ist, übergehen wir sie hier, besonders da uns die arithmetischen Reihen höherer Ordnung ein eben so leichtes als einfaches Mittel geben werden, alle Gleichungen aufzulösen, und also auch die biquadratischen.

§. 33.

Euler schließt seine Untersuchungen über die biquadratischen Gleichungen mit folgenden Worten:

„So weit ist man bisher in Auflösung der algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen vom fünften und höheren Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf niedrigere Grade zu bringen, sind fruchtlos gewesen, also daß man nicht im Stande wäre, allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höheren Gleichungen könnten aufgefunden werden. Alles was darin geleistet worden, geht nur auf ganz besondere

Fälle,

Fälle, worunter der der gewöhnlichste ist, daß wenn die Gleichung eine rationale Wurzel hat, man diese durch Probiren findet, wie bei der Cubikwurzel ist gezeigt worden, da jede Wurzel jedesmal ein Theiler des letzten Gliedes seyn muß."

Dann untersucht Euler noch in einem besondern Kapitel die Auflösung der Gleichungen durch Näherung, welches der einzige Weg ist, sie zu finden, sobald sie nicht rational sind. Hiebei wird aber vorausgesetzt, daß man den Werth ihrer Faktoren in ganzen Zahlen schon kennt.

Dieser Näherungsweg besteht kürzlich in folgendem:

Eine zweitheilige Wurzel besteht bekanntlich aus $a + b$, also ihr Quadrat ist $aa + 2ab + bb$. Dieses bb ist sehr klein, sobald b klein ist, und man kann es dann ohne merklichen Fehler weglassen. Z. B. a sey $= 4$ und $b = \frac{1}{2}$, so hat man $(4 + \frac{1}{2})^2 = 16 + 4 + \frac{1}{4} = 20\frac{1}{4}$.

Man habe die Wurzel aus 20 zu suchen, so weiß man, daß sie zwischen 4 und 5 liegt und größer als 4 ist. Das was sie größer als 4 ist, nenne man p; so hat man $(4 + p)^2 = 16 + 8p + pp$. Da pp sehr klein ist, so lasse man es weg, so ist das Quadrat $= 16 + 8p = 20$ und $8p = 4$, also $p = \frac{1}{2}$ und die Wurzel $4 + p = 4\frac{1}{2}$.

$4\frac{1}{2}$ ist aber noch nicht die genaue Wurzel, obschon genauer als 4. Man nenne dasjenige was zu viel ist, wirder p; so hat man $(4\frac{1}{2} + p)^2 = 20\frac{1}{4} + 9p + pp$. Da pp jetzt noch kleiner ist wie das vorigemal, so lasse man es wieder weg. Also $20\frac{1}{4} + 9p = 20$ wo $9p = -\frac{1}{4}$ wird, und $p = -\frac{1}{36}$. Folglich ist die Wurzel $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} - 4\frac{17}{36}$. Und auf diese Weise

kann

kann man sich der Wurzel so lange nähern, als man es für gut findet.

Die irrationalen Wurzeln einer cubischen oder biquadratischen Gleichung findet man auf eine ähnliche Weise, nur ist dieses viel mühevoller, da der Cubus oder das Biquadrat einer zweitheiligen Wurzel sehr zusammengesetzt ist, und man nur immer das letzte Glied vernachlässigen darf, welches p^2 oder p^3 oder p^4 ist.

Wir glauben, daß dieses hinlänglich ist um einen Begriff von dem gewöhnlichen Verfahren zu geben, die irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden.

§. 34.

Die Auflösung der quadratischen Gleichungen, durch die Ergänzung des Quadrats, war frühe von den Algebraisten gefunden worden. Sie versuchten nun für die cubischen Gleichungen eine ähnliche Auflösungsart zu finden, und hiebei den Cubus eben so zu ergänzen, wie bei jenen das Quadrat. Indes fanden sie bald, daß dieses unmöglich sey. Man versuchte nun allerhand Methoden, die cubischen Gleichungen für die verschiedene Fälle aufzulösen, die bei ihnen vorkommen. Der italienische Minoritten-Mönch Lucas de Burgo, schrieb im 15ten Jahrhundert ein Werk über die Algebra, in dem er die quadratischen Gleichungen so auflöste, wie es noch jetzt geschieht — durch Ergänzung des Quadrats. Aber die Auflösung der cubischen Gleichungen hielt er für so unmöglich wie die Quadratur des Zirkels. Indeß fand doch ums Jahr 1505, Scipio Ferreo, Professor der Mathematik zu Bologna, daß man die cubischen Gleichungen, die folgende Form haben: $x^3 + mx = a$, auf-

lösen

lösen könne. Sein Schüler Florido, dem er diese Entdeckung mittheilte, gebrauchte diese Regel, andere Algebraisten mit solchen cubischen Aufgaben zu necken. Unter andern machte er mit dem damals sehr berühmten Professor der Mathematik zu Venedig, Tartalea, die Wette: Welcher von beiden dem andern 30 Aufgaben vorlegen könne, die dieser nicht im Stande sey aufzulösen. Tartalea hatte aber damals schon für mehrere Fälle die Auflösung der cubischen Gleichungen gefunden, und suchte auch nun den Fall den Florida kannte. Florida sah bald, daß er sich in einen ungleichen Streit eingelassen hatte. Der Schüler war nicht im Stande, die Aufgaben des Meisters zu lösen, indeß Tartalea alle Aufgaben des Florida bald aufgelöst hatte.

Tartalea theilte dem gelehrten Mailänder Cardanus, auf sein inständiges Bitten und unter dem Versprechen es geheim zu halten, seine Methode, die cubischen Gleichungen zu lösen, mit. Indeß dieser machte sie 1445 doch in einem Werke bekannt, welches er über die Algebra herausgab, worüber er mit Tartalea in Streit gerieth. Dieser Streit dauerte bis zum Tode Tartalea's, der 1557 erfolgte. Cardan entschuldigte sich damit: daß er die Beweise zu diesen Sätzen aufgesucht, und die Entdeckung Tartalea's erweitert habe. Nach ihm ist die Regel: die Regel des Cardans genannt worden, obschon Tartalea eigentlich der Erfinder ist.

Ludovico Ferrari aus Bologna, ein Schüler des Cardans, fand eine Methode, die biquadratische Gleichungen aufzulösen. Bombelli hat sie in seiner 1579 erschienenen Algebra angeführt, und nach ihm hat sie den Namen der Regel des Bombelli erhalten. Euler hat ihr in seiner Algebra ein besonderes Kapitel gewidmet, und dann in einem zweiten noch eine neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen vorgetragen, die er selber gefunden hat.

Da man die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen ziemlich schnell entdeckt hatte, so hoffte man mit der Zeit auch ähnliche Auflösungen für die Gleichungen der höhern Grade zu finden. Allein die zwei Jahrhunderte, die seit dieser Zeit verflossen sind, haben diese Hoffnung nicht bestätigt.

Die arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

§. 35.

Wenn in einer Reihe Zahlen die Unterschiede zwischen zwei und zwei Gliedern einander gleich sind, so bilden sie eine arithmetische Reihe erster Ordnung. Z. B. 4, 6, 8, 10, 12 . . . . Alle Unterschiede sind = 2.

2) Wenn in einer Reihe Zahlen, die Unterschiede eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, so ist die Reihe selber eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung; wie z. B. folgende: 4; 10; 18; 28; 40;

Unterschied: 6 8 10 12.

3) Wenn in einer Reihe Zahlen die Unterschiede eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, so ist die Reihe selber eine arithmetische Reihe dritter Ordnung; wie z. B. folgende: 4; 14, 32; 60; 100:

Unterschied: 10 18 28 40.

4) Und

4) Und so ist allgemein jede arithmetische Reihe um eine Ordnung höher als die Ordnung ihrer Differenzreihe ist, und man begreift leicht, was es heißt: eine arithmetische Reihe 4ter, 5ter, 6ter . . . . Ordnung.

§. 36.

Zu welcher Ordnung eine Reihe gehört, erfährt man leicht durch die Subtraction. Man zieht jedes Glied vom folgenden ab, und sieht, ob die Unterschiede gleich sind. In diesem Falle ist es eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Sind sie es nicht, so zieht man in der Reihe der Unterschiede jedes Glied vom folgenden ab, und wenn nun die zweiten Unterschiede einander gleich sind, so war es eine Reihe zweiter Ordnung.

Sind diese aber auch noch ungleich, so zieht man diese wieder von einander ab, und wenn nun die dritten Unterschiede gleich sind, so war es eine dritter Ordnung.

Auf diese Weise kann man immer fortfahren und bestimmen, zu welcher Ordnung eine gegebene arithmetische Reihe Zahlen gehört. Findet sich, daß erst die sechsten Differenzen gleich werden, und daß diese alle = 8 sind, so sagt man: es ist eine arithmetische Reihe sechster Ordnung mit der Differenz 8.

§. 37.

Wenn die Differenz, das erste Glied und die Höhe der Reihe gegeben ist, so ist es leicht diese durch addiren zu construiren.

Gesetzt, man verlangt eine arithmetische Reihe vierter

Ordnung mit der Differenz 9, die mit 12 anfangen soll, so hat man:

Diff.	I.	II.	III.	IV.
9	12	12	12	12
9	21	33	45	57
9	30	63	108	165
9	39	102	210	375
9	48	150	360	735
9	57	207	567	1302

Soll die Differenz negativ seyn, so hat man folgende Reihe.

Anmerk. Da die arithmetischen Reihen aus arithmetischen Verhältnissen zusammengesetzt sind, so habe ich in folgendem Beispiele vor die Differenzreihe, die Verhältnißzähler geschrieben, damit man desto leichter bestimmen könne, wie weit von einem Verhältnisse bis zum andern ist. Gewöhnlich zählt man die Glieder, und nennt die Zahlen, welche diese zählen, Stellenzahlen. Wir werden in der Folge sehen, daß es bequemer ist, nicht die Glieder, sondern die Verhältnisse zu zählen. Jede Reihe hat immer ein Verhältniß weniger als sie Glieder hat. Kennt man also die Anzahl der Glieder, so kennt man auch die Anzahl der Verhältnisse, und eben so umgekehrt.

Verhält. Zähler	Diff.	I.	II.	III.	IV.
0	− 0	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
1	− 9	+ 3	+ 15	+ 27	+ 39
2	− 9	− 6	+ 9	+ 36	+ 75
3	− 9	− 15	− 6	+ 30	+ 105
4	− 9	− 24	− 30	− 0	+ 105
5	− 9	− 33	− 63	− 63	+ 42

Man

Man sieht aus diesem Beispiele, daß die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, ein sehr irreguläres Ansehen haben, wenn sie eine positive Anfangszahl und eine negative Differenz haben. Eben so irregulär werden sie, wenn sie mit einer negativen Zahl anfangen, und eine positive Differenz haben.

§. 38.

Drei Stücke bestimmen also eine arithmetische Reihe. 1) Die Zahl mit der sie anfängt; 2) die Differenz die sie hat, und 3) ihre Höhe oder ihre Ordnung. Man kann dieses so bezeichnen: $\overset{IV}{12 + 9}$. Wo 12 die Zahl, mit der sie anfängt, IV die Ordnung der Reihe, und + 9 die Differenz ist. Die Reihe ist steigend, und alle Zahlen positiv. Wäre sie fallend, das heißt: ging sie nach der entgegengesetzten Richtung fort, so könnte man das so bezeichnen: $\overset{IV}{12 - 9}$, wobei zugleich die Differenz als verneinend angenommen worden.

Wird zugleich noch bestimmt, aus wie vielen Verhältnissen die Reihe bestehen soll, oder aber wird bestimmt, wie groß die Zahl ist, die am Ende eines gegebenen Verhältnisses stehen soll, so wird dieses das vierte und fünfte Stück, welches bekannt ist. Man kann dieses so ausdrücken: $\overset{IV}{12 - 9}$. Verh. Zähler $5 = 42$. Das heißt: Bei einer arithmetischen Reihe IV Ordnung, deren Anfangszahl 12 ist, und deren Differenz — 9 ist, ist das fünfte Verhältniß oder das sechste Glied = 42.

Es

Differenz besteht, als Verhältnisse zwischen ihm und dem ersten sind.

Da in der Grundtafel (39), welche wir bei diesen Untersuchungen zum Grunde legen, das erste Glied sowohl wie die Differenz $= 1$ ist, so wollen wir, um beide von einander unterscheiden zu können, über jede 1 die das erste Glied bedeutet, einen Punkt machen, und hingegen jede die die Differenz bedeutet, unbezeichnet lassen. So ist z. B. das sechste Glied $= \dot{1} + 5 . 1$.

2) Eine arithmetische Reihe erster Ordnung besteht:

1. aus dem ersten Gliede. Dieses ist in der Grundtafel $= \dot{1}$;
2. aus dem zweiten Gliede. (Dieses besteht aus der 1ten und 1mal die Diff.) $= \dot{1} + 1$;
3. aus dem dritten Gliede. (Dieses besteht aus der 1ten und 2mal die Diff.) $= \dot{1} + 2$;
4. aus dem vierten Gliede. (Dieses besteht aus dem 1ten und 3mal die Diff.) $= \dot{1} + 3$; u. s. w.

5) Die Summe bis zum vierten Gliede besteht also aus 4mal dem ersten Gliede und 6mal der Differenz, und ist also 10 da beide $= 1$ sind.

Kennt man daher die Anzahl der Glieder, ferner das erste Glied und die Differenz, so findet man nicht allein jedes Glied, sondern auch die Summe von allen.

Nehmen wir die Reihe I in (37) deren Differenz $- 9$ und deren erstes Glied $+ 12$ ist, so wird das sechste Glied, welches das 5te Verhältniß schließt, gleich sein 5mal $- 9 +$ 1mal $12 = 33$.

Und die Summe der Reihe bis zum fünften Verhältnisse wird seyn:

1mal

1 mal das erste Glied	= 12	0 mal die Differenz	= — 0
1	= 12	1	= — 9
1	= 12	2	= — 18
1	= 12	3	= — 27
1	= 12	4	= — 36
1	= 12	5	= — 45
	+ 72		— 135
	— 135		
Also die Summe bis zum 6ten Gliede	= — 63		

Dieses ist zugleich das sechste Glied in der Reihe II.

6) Umgekehrt kann man die Anzahl der Glieder erfahren, wenn man die Summe kennt, die Differenz und das erste Glied. Wir wollen wieder dasselbe Beispiel nehmen.

Gegeben sey die Summe = — 63.

Das erste Glied = — 12 und die Differenz = — 9.

Man schreibt dann wieder wie vorher (in 3) die ersten Glieder und die Differenzen nebeneinander, und addirt sie bis die Summe — 63 macht. Man hat dann, um die Anzahl der Glieder zu erfahren, diese nur zu zählen.

§. 41.

Die arithmetischen Reihen zweiter Ordnung.

1) In einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, besteht

das erste Glied aus dem ersten der Reihe I also aus 1

das zweite Glied aus dem 1ten und 2ten der Reihe I

also aus 1 + (1 + 1)

das

das dritte Glied aus dem 1., 2. und 3. der Reihe I
also aus $1 + (1 + 1) + (1 + 2)$
das vierte Glied aus dem 1., 2., 3. und 4. der Reihe I
also aus $1 + (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3)$ u. s. w.

Die Summe bis zum vierten besteht also aus

1	und 0
2	1
3	3
4 mal das erste Glied	6 mal die Differenz
10	10

Man sieht leicht das Gesetz, wornach dieses geht. Die Summe der ersten Glieder ist die Summe einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, die so viele Glieder hat, als Glieder gegeben sind, und die Summe der Differenzen ist die Summe einer arithmetischen Reihe zweiter Ordnung, die so viele Glieder hat als Verhältnisse sind, nemlich eins weniger als die vorige.

2) Will man das fünfte Glied wissen, so sucht man nach dem vorigen §. die Summe der Reihe 1ter Ord. bis zum fünften Gliede, und man findet — 63.

Will man die Summe der Reihe II. Ord. bis zum fünften Gliede wissen, so sieht man im Grundtäfelchen, daß man das erste Glied 15mal nehmen muß:

$$15 . 12 = 180$$

und daß man die Differenz 20mal nehmen muß: $20 . 9 = 180$

$$0$$

Die Summe dieser arithmetischen Reihe II. Ord. ist also bis zum 5ten Gliede oder bis ans Ende des 4ten $= 0$ und dieses wird dann auch das fünfte Glied in der Reihe III. Ord. seyn.

3)

3) Wenn die Summe die Anzahl der Glieder und die Differenz gegeben ist, das erste Glied zu finden.

Die Anzahl der Glieder sey 5, die Summe 0, und die Differenz — 9. Bis zum 5ten Gliede kommt die Differenz 20mal vor. Ihre Summe ist = — 180.

Das erste Glied kommt 15mal vor, muß also + 12 seyn. Da 12 . 15 = 180 ist, und + 180 — 180 = 0.

Auf eine ähnliche Weise konnte man die Differenz finden, wenn die Summe der Glieder, die Anzahl der Glieder oder die Verhältnisse, und das erste Glied bekannt war.

4) Wenn die Summe die Differenz und das erste Glied gegeben ist, die Anzahl der Glieder zu finden.

Die Summe sey 0, die Differenz — 9, das erste Glied + 12.

1mal das erste Glied	= 12	1mal die Differenz	= — 9
2	= 24	3	= — 27
3	= 36	6	= — 54
4	= 48	10	= — 90
5	= 60		180
	+ 180		
	— 180		
	0		

Die Reihe bestand also aus 5 Gliedern und 4 Verhältnissen. Wenn die Anzahl der Glieder gesucht wird, so ist die Rechnung weitläuftiger als wenn diese sich unter den gegebenen Stücken befindet. Man muß die Differenz und das erste Glied so lange nach der Anleitung des Grundtäfelchens zusammen addiren, bis beide die verlangte Summe geben.

§. 42.

§. 42.

Die arithmetischen Reihen dritter Ordnung.

1) In einer Reihe dritter Ordnung besteht
das erste Glied aus dem 1ten der Reihe II

also aus $\dot{1}$

das zweite Glied aus dem 1 u. 2ten der Reihe II

also aus $\dot{1} + \dot{1} + \dot{1} + 1$

das dritte Glied aus dem 1, 2 u. 3ten der Reihe II

also aus $\dot{1} + \dot{1} + \dot{1} + 1 + \dot{1} + \dot{1} + \dot{1} + 1 + 2$

das vierte Glied aus dem 1, 2, 3 u. 4ten der Reihe II

also aus $\dot{1} + \dot{1} + \dot{1} + 1 + \dot{1} + \dot{1} + \dot{1} + 1 + 2 + \dot{1}$
$+ \dot{1} + \dot{1} + 2 + 1 + 3$ u. s. w.

Das erste Glied ist also 1mal das erste Glied von II.
Das zweite Glied ist 3mal . . . . . . II, und
1mal die Differenz.
Das dritte Glied ist 6mal . . . . . . II, und
4mal die Differenz.
Das vierte Glied ist 10mal . . . . . . II, und
10mal die Differenz.
Das fünfte Glied ist 15mal . . . . . . II, und
20mal die Differenz
u. s. w.

Man sieht, daß die ersten Glieder eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung machen, und die Differenzen eine dritter Ordnung, die ein Glied weniger hat wie jene.

2) Will man wissen, welches das fünfte Glied in einer Reihe dritter Ordnung sey, deren Differenz $= -9$, und deren erstes Glied $= + 12$ ist, so ist dieses die

Summe

Summe von fünf Gliedern der zweiten Ordnung, die schon im vorigen Paragraph = 0 gefunden war.

Will man wissen, welches die Summe von fünf Gliedern in einer solchen Reihe III Ordnung ist, so hat man nach dem Grundtäfelchen

$$
\begin{array}{lr}
\text{35mal das erste Glied } 12 = & +\ 420 \\
\text{und 35mal die Differenz } -9 = & -\ 315 \\
\hline
 & +\ 105
\end{array}
$$

Die Summe bis zum 5ten Gliede ist also + 105. Dieses ist zugleich das fünfte Glied in der Reihe vierter Ordnung.

3) Wenn die Summe, die Anzahl der Glieder und das erste Glied gegeben ist, die Differenz zu finden. Die Anzahl der Glieder sey 5, das erste sey + 12, die Summe sey + 105.

Nach dem Grundtäfelchen hat man bis zum 5ten Gliede 35mal das erste Glied, also 35 . 12 = . 420. Hievon 105 abgezogen, bleibt für die Differenzen — 315 übrig. Nach dem Grundtäfelchen hat man bis zum vierten Verhältnisse 35mal die Differenz, diese muß also — 9 gewesen seyn, weil 35mal — 9 = — 315 ist, und — 315 + 420 die verlangte Summe + 105 gibt.

Wäre die Differenz gegeben gewesen, und das erste Glied gesucht, so wäre das Verfahren dasselbe.

4) Wenn die Summe gegeben ist, die Differenz und das erste Glied, die Anzahl der Glieder zu finden.

Die Summe sey + 105, die Differenz — 9, das erste Glied + 12. So hat man nach dem Grundtäfelchen:

1mal das erste Glied	= 12
3mal das erste Glied	= 36
1mal die Differenz	= — 9
	+ 39
6mal das erste Glied	+ 72
4mal die Differenz	— 36
	+ 75
10mal das erste Glied	+ 120
10mal die Differenz	— 90
	+ 105
15mal das erste Glied	+ 180
20mal die Differenz	— 180
	105

Da die Aufgabe eine doppelte Auflösung gibt, so muß das 5te Glied = 0 seyn, weil sowohl die Summe von 4 Gliedern als die Summe von 5 Gliedern = 0 ist.

§. 43.

Die arithmetische Reihen vierter Ordnung.

1) Nachdem wir das Gesetz für die arithmetischen Reihen der I, II und III Ordnung in den vorigen Paragraphen entwickelt haben, so können wir leicht schließen, daß die Glieder der Reihe IV Ordnung auf folgende Weise werden zusammengesetzt seyn.

1tes Glied	1mal das 1ste Glied von	III	
2tes	. . 4	III u.	1mal die Diff.
3tes	. . 10	III u.	5 . . .
4tes	. . 20	III u.	15 . . .
5tes	. . 35	III u.	35 . . .
6tes	. . 56	III u.	70 . . .
u. s. w.			

2) Die Differenz, das erste Glied und die Anzahl der Glieder ist gegeben, man sucht die Summe.

Die Differenz sey $= -9$, das erste Glied $= 12$, die Anzahl der Glieder sey 6.

Nach dem Grundtäfelchen ist in 6 Gliedern das erste Glied 126mal enthalten, und die Differenz ebenfalls 126mal.

Da jenes 12 ist, so ist das Produkt $+ 1512$
Da diese 9 ist, so ist das Produkt $- 1134$
$\overline{\quad 378}$

Die Summe bis zum sechsten Gliede wird also 378 seyn. Das sechste Glied eine Reihe Vter Ordnung ist also auch 378, da es die Summe aller Glieder der Reihe IV Ordnung ist.

3) Die Differenz ist gegeben, das erste Glied und die Summe, man soll die Anzahl der Glieder finden.

Die Differenz sey -9, das erste Glied $+12$, die Summe $= 231$.

Nach dem Grundtäfelchen hat man

1mal das erste Glied	$= 12$
4mal das erste Glied	$= 48$
10mal das erste Glied	$= 120$
1mal die Differenz	$= -9$
5mal die Differenz	$= -45$
	$+ 126$
20mal das erste Glied	240
15mal die Differenz	$- 135$
	231

Also

Also bis zum vierten Gliede beträgt die Summe = 231.

Dieses ist zugleich das 4te Glied der Reihe Vter Ordnung. Wäre also die Aufgabe gewesen: Die Differenz, das erste Glied und die Größe eines Gliedes einer Reihe Vter Ordnung ist gegeben, zu bestimmen wie vielstes Glied es ist, so hätte man sie auf dieselbe Weise gelöst, und gefunden, daß in einer Reihe Vter Ordnung, daß das vierte Glied seyn müßte, welches = 231 ist.

Indeß können oft zwei Glieder der Aufgabe Genüge thun, wenn die Differenz und das erste Glied entgegengesetzte Zeichen haben. Es geben dann Stellen, wo die Summe von beiden = 0 ist, und wo also zwei Glieder, die auf einander folgen, gleich seyn können, wie wir dieses aus einem Beispiel im vorigen Paragraph sahen.

§. 44.

Die arithmetischen Reihen, fünfter, sechster, siebenter .... Ordnung.

1) Die Gesetze, welche wir in den vorigen §§. für die arithmetischen Reihen bis zur vierten Ordnung entwickelt haben, geben uns eine allgemeine Uebersicht der Entstehung der Reihen von jeder Ordnung, und wir können mit Hülfe des Grundtäfelchens für jede Reihe bis zur zehnten Ordnung, jedes Glied finden, sobald uns die Ordnung der Reihe, das erste Glied und die Differenz bekannt ist, und wir zugleich wissen, das wie vielste Glied das gesuchte ist.

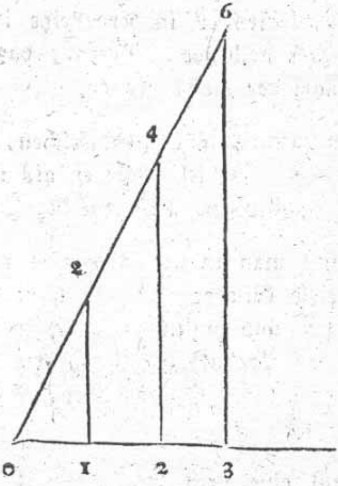
Eben so können wir finden, wenn uns das Glied bekannt ist, wie vielstes es in der Reihe ist, wenn wir nemlich ausserdem noch die Differenz, das erste Glied und die Ordnung der Reihe kennen.

Man nimmt nemlich im Grundtäfelchen, in der Reihe derselben Ordnung, so viele Glieder als man Verhältnisse hat, und multiplicirt diese mit der Differenz.

Dann nimmt man in der Reihe der nächstniedrigen Ordnung so viele Glieder als die gegebene Anzahl der Glieder beträgt, und multiplicirt mit diesen das erste Glied. — Dieses Produkt zum Produkt der Differenzen addirt, gibt die gesuchte Summe oder das gesuchte Glied der nächsthöhern Ordnung.

2) Um uns eine noch deutlichere Ansicht von der Natur der arithmetischen Reihen zu verschaffen, so wollen wir sie linearisch verzeichnen, indem wir die Verhältnißzähler zu Abcissen, und die Größe der Glieder zu Ordinaten nehmen.

Eine arithmetische Reihe erster Ordnung, wie 0, 2, 4, 6 .... bildet eine gerade Linie, wie wir dieses schon Theil II. S. 105 gesehen haben.



Zieht man eine Ordinate von der andern ab, so bleiben gleiche Stücke übrig. Das heißt: die Differenzen einer arithmetischen Reihe erster Ordnung, sind einander gleich.

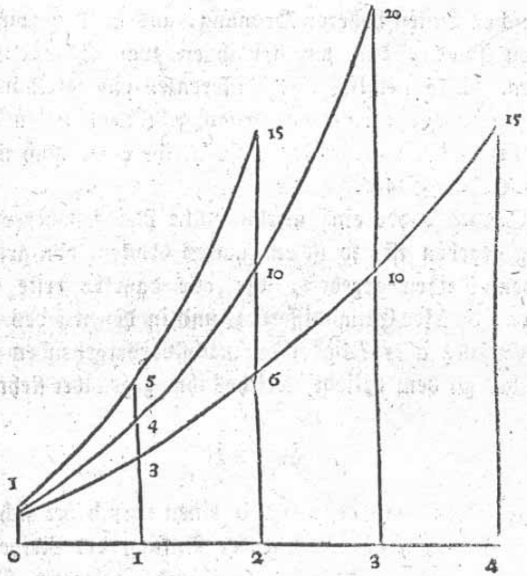
3) Eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung, wie 1, 3, 6, 10, 15 bildet, wenn man sie zeichnet, eine krumme Linie, die um so krummer ist, je näher sie bei ihrem Anfangspunkte ist — und die sich einer geraden Linie immer mehr nähert, je weiter sie sich von diesem entfernt.

Eine arithmetische Reihe dritter Ordnung, wie 1, 4, 10, 20 .... bildet eine Linie die noch mehr gekrümmt ist wie eine Linie zweiter Ordnung, die sich aber auch immer mehr einer geraden Linie nähert, je weiter sie sich von ihrem Anfangspunkte entfernt. Ueberhaupt bilden die arithmetischen Reihen, wenn man sie bezeichnet, eine

um

um so krummere Linie, je höher die Ordnung ist, zu der sie gehören.

Ich will in folgender Figur den Anfang von einer Linie der zweiten, einer der dritten und einer der vierten Ordnung zeichnen. Man muß hiebei den Maßstab für die Ordinaten viel kleiner nehmen, wie den für die Abcissen, weil sonst die Figur zu groß würde.



4) Wenn man in einer Reihe der zweiten Ordnung, die Ordinaten von einander abzieht, und mit den Resten wieder eine neue Linie zeichnet, so erhält man eine arithmetische Linie erster Ordnung. Zieht man in dieser die

Ordina=

Ordinaten wieder voneinander ab, so bleiben die Reste gleich.

Wenn man in einer Reihe dritter Ordnung, die Ordinaten von einander abzieht, und mit den Resten eine neue Linie zeichnet, so wird diese eine Linie zweiter Ordnung — und so mit allen Linien höherer Ordnung, so daß man auch linearisch zeigen kann, daß die Unterschiede jedesmal eine Linie der nächstniedrigen Ordnung sind.

5) Man sieht, daß alle diese Eigenschaften der arithmetischen Linien höherer Ordnung, aus dem Begriff derselben folgen, den wir bei ihnen zum Grunde gelegt haben. Daß nemlich ihre Differenzen eine arithmetische Reihe der nächstniedrigen Ordnung bilden, deren Differenzen wieder eine arithmetische Reihe einer noch niedrigern Ordnung bilden.

Sobald daher eine arithmetische Reihe höherer Ordnung gegeben ist, so ist ein ganzes System von arithmetischen Reihen gegeben, die alle dasselbe erste Glied haben, dieselbe Grunddifferenz, und in denen jedes Glied die Summe aller Glieder der nächstvorhergehenden Reihe ist, bis zu dem Gliede, welches ihm gegenüber steht.

§. 45.

1) Wenn das erste Glied einen Bruch bei sich hat, und z. B. 3,·4 ist, so hat der Anfang der Reihe zwischen den beiden ganzen Zahlen 3 und 4 gelegen. Da wo die Reihe anfängt, liegt der Nullpunkt der Verhältnißzähler. Dieser liegt immer auf einem Gliede, aber nicht immer auf einer ganzen Zahl. Beispiel:

Verh. Zähler	Diff.	I.	II.	III.
0	0	3,4	3,4	3,4
1	5	8,4	11,8	15,2
2	5	13,4	25,2	40,4
3	5	18,4	43,6	84,0
4	5	23,4	68,0	151,0

Man sieht, daß die Rechnung dieselbe bleibt, wie mit ganzen Zahlen. Sie ist eben so, als wenn das erste Glied 34 und die Differenz 50 gewesen wäre.

Hat das erste Glied außer den Zehntheilen noch Hunderttheile bei sich, z. B. 3,47, so liegt der Umfang der Reihe zwischen den beiden Zahlen 3,4 und 3,5, und zwischen beiden liegt also auch der Nullpunkt der Reihe, welche die Verhältnisse zählt.

Hat das erste Glied noch Tausendtheile bei sich, z. B. 3,476 so liegt der Anfangspunkt zwischen 3,47 und 3,48.

In allen diesen Fällen ist die Rechnung dieselbe, als wenn man ganze Zahlen hätte, nur wird sie in dem Grade weitläuftiger, in dem man mehr Ziffern hat.

2) Ebenfalls kann das erste Glied irrational seyn, und etwa die Form haben 3,1415 ..... oder einen ohne Ende fortgehenden Decimalbruch. In diesem Falle nimmt man so viele Ziffern vom Bruch, als man glaubt bei der Rechnung brauchen zu müssen, und läßt die übrigen fahren.

Dasselbe ist der Fall, wenn die Differenz eine irrationale Zahl ist. Man nimmt dann von ihr auch so viele Decimale, als man glaubt, daß die Rechnung erfodert.

Und

Und obschon in diesem Falle die Rechnung nicht scharf wird, so kann man doch immer mit Hülfe des Grundtäfelchen beurtheilen, wie genau sie wird und wie groß der Fehler ist, den man begeht. Gesetzt, man habe eine arithmetische Reihe VI. Ord. von 10 Verhältnissen. Im ersten Gliede habe man in der vierten Decimalstelle eine 5 vernachläßigt, so macht diese 5 mal 8008 = 4,0040. Also schon 4 ganze Einheiten disseits des Comma.

§. 46.

Wenn man eine hinlängliche Anzahl Glieder einer Reihe Zahlen hat, von der man vermuthet, daß sie eine arithmetische Reihe höherer Ordnung sey, so zieht man zwei und zwei von einander ab, um die ersten Unterschiede zu finden. Sind diese nicht gleich, so zieht man diese von einander ab, und setzt das so lange fort, bis endlich die Unterschiede gleich werden. Man kennt dann die Ordnung, von welcher die Reihe ist.

Allein oft ist es der Fall, daß wenn man die siebenten, achten, neunten Unterschiede durch wiederholtes Abziehen gefunden hat, man zwar auf Unterschiede kommt, die in den ersten Stellen gleiche Ziffern haben, aber in den letzten immer noch von einander abweichen, wie z. B. folgende: 329 782
329 221
welches VII. Unterschiede sind.

In diesem Falle ist es wahrscheinlich, daß die Reihe Zahlen, welche man hat, zwar eine arithmetische sey, aber von einer irrationalen Ordnung, das heißt: von einer solchen, bei der man sich den beständigen Differenzen zwar näheren, aber diese nie erreichen kann.

Man

Man sucht dann die Differenzen so weit als man es der Genauigkeit der Rechnung thun muß. Kommt man mit den 7ten Differenzen aus, so nimmt man an: die Reihe sey eine arithmetische Reihe siebenter Ordnung, deren Differenzen wie die im vorigen Beispiele wären, und man läßt die drei letzten ungleichen Ziffern weg.

Je höher die Ordnung der Reihe ist, und je länger man sie fortsetzt, desto größer ist der Fehler der hiedurch entsteht. Man kann indeß mit Hülfe des Grundtäfelchen leicht finden, wie viel er beträgt, und sich hiernach bei der Rechnung richten, damit er nie über die Grenze der Genauigkeit geht, welche man sich bei der Rechnung zu erreichen vorgenommen hat.

§. 47.

Die Reihen der figurirten Zahlen.

Die ältern Mathematiker beschäftigten sich viel mit den figurirten oder vieleckigen Zahlen. Sie sind weiter nichts wie die arithmetischen Reihen der drei ersten Ordnungen, die das Grundtäfelchen enthält, und die ihren Namen daher erhielten, weil, wenn man sie mit Punkten darstellt, sie gewisse Figuren bilden.

Die Reihe I. Ord. z. B. 1 .
2 . .
3 . . .
4 . . . .

Die Reihe II. Ord. gibt 1 3 6 10

Weil die Zahlen dieser Reihe immer Dreiecke bilden, so heißen sie triangular, oder Triagonalzahlen, zu Deutsch dreieckige Zahlen.

Die Reihe dritter Ordnung 1, 4, 10, 20 .... läßt sich mit Punkten nicht mehr darstellen; aber wohl mit Kugeln, und oft werden diese in Zeughäusern so aufgeschichtet. Zuerst 1 Kugel. Dann 3 und eine in die Mitte macht 4. Dann sechs, auf diese drei und eine in die Mitte, macht 10 u. s. w. Weil hierdurch Pyramiden entstehen, so hat man diese Zahlen auch Pyramidalzahlen genannt.

Weiter ist an diesen Zahlen nichts merkwürdiges, da sie die allgemeine Gesetze der arithmetischen Reihen höherer Ordnung befolgen. Indeß muß man ihre Namen kennen, damit man weiß, wovon die Rede ist, wenn von Triagonal- und Pyramidalzahlen gesprochen wird.

§. 48.

1) Die Quadrate der Reihe der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4 .... bilden eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung.

	1,		2,		3,		4,		5,		6
Quadrate	1,		4,		9,		16,		25,		36
I. Diff.		3		5		7		9		11	
II. Diff.			2		2		2		2		

Man kann also die Quadratzahlen leicht ohne Multiplikation finden, wenn man zu den gefundenen die arithmetische Reihe erster Ord., 3, 5, 7, 9, 11 .. addirt. So muß z. B. das Quadrat von 7 seyn: $= 36 + 13 = 49$.

2) Die Cuben der Reihe der natürlichen Zahlen bilden eine arithmetische Reihe dritter Orduung.

Cu-

	1	2	3	4	5	6
Cuben	1	8	27	64	125	216
I. Unterschiede	7	19	37	61	91	
II.		12	18	24	30	
III.			6	6	6	

Man kann also die Cuben ohne Multiplikation finden, wenn man zu den gefundenen die arithmetische Reihe zweiter Ordnung 7, 19, 37, 61, 91, 127 ... addirt. So muß der Cubus von 7 seyn $= 216 + 127 = 343$.

Auf diese leichte Weise sind auch unsere Quadrat- und Cubiktafeln berechnet worden. Nur alle 10 oder 20 Zahlen hat man einen Cubus mit Multiplikation gefunden, um sicher zu seyn, daß man sich im Addiren nicht geirrt habe.

5) Die vierte Potenzen der Reihen der natürlichen Zahlen, bilden eine arithmetische Reihe 4ter Ordnung.

	1	2	3	4	5	6
Biquadrate	1	16	81	256	625	1296
I. Unterschiede	15	65	175	369	671	
II.		50	110	194	302	
III.			60	84	108	
IV.				24	24	

Eben so bilden die fünften Potenzen eine arithmetische Reihe 5. Ordnung, die sechsten bilden eine sechste Ordnung u. s. w.

Man sieht zugleich an dem letzten Beispiele, daß je höher die Ordnung der Reihe ist, man desto mehr Glieder entwickeln muß, um die zweiten, dritten, vierten... Unterschiede finden zu können, da man bei jedem Abziehen, ein Glied weniger enthält. So muß man bei den

Biquadraten schon sechs Glieder entwickeln, um in den vierten Unterschieden noch zwei gleiche Glieder zu finden.

Anmerkung. Man pflegt beim Abziehen der Glieder, das folgende vom vorigen abzuziehen, nemlich das Glied rechter Hand von dem linker Hand; — also die größere Zahl von der kleinern, wodurch die ersten Differenzen negativ, die zweiten positiv, die dritten wieder negativ, und die vierten wieder positiv werden.

Die beständige Differenz einer Reihe

I. Ord. ist demnach	$= - 1$
II. Ord.	$= + 2$
III. Ord.	$= - 6$
IV. Ord.	$= + 24$
V. Ord.	$= - 120$
VI. Ord.	$= + 720$

u. s. w.

Es könnte bequemer scheinen, wenn man die Glieder links von den Gliedern rechts abzieht, weil dann die beständigen Differenzen immer positiv bleiben. Allein wir werden nachher sehen, daß es bei der Auflösung der Gleichungen auf dasselbe hinausläuft, ob man die Glieder rechts von denen links abzieht, oder umgekehrt.

Von der Auflösung der Gleichungen mit Hülfe arithmetischer Reihen höherer Ordnungen.

§. 49.

Jede Gleichung führt, wenn man sie auf die Reihe der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3, 4 . . . . anwendet, auf eine arithmetische Reihe von derselben Ordnung, von der die Gleichung ist. Z. B. eine Cubische auf eine Reihe dritter Ordnung, eine biquadratische auf eine Reihe vierter Ordnung, u. s. w.

2) Für die reinen Gleichungen, als $x^3 = 64$, ist es schon im vorigen gezeigt. Wenn man diese auf die Zahlen 1, 2, 3 . . . . anwendet und die unbekannte Größe x der Reihe nach diesen gleich setzt, so erhält man

1 8 27 64 125

welches eine arithmetische Reihe dritter Ordnung ist, die die Differenz 6 hat.

Diese bleibt eine Reihe dritter Ordnung, wenn man alle Glieder mit derselben Zahl multiplicirt, z. B. mit 5. Man hat dann

	5		40		135		320		625
I. Untersch.		35		95		185		305	
II. Untersch.			60		90		120		
III. Untersch.				30		30			

Alle Glieder sind hierdurch ums Fünffache größer geworden, und die Differenz, die vorher 6 war, ist nun 30. Die Ordnung der Reihe ist aber dieselbe geblieben.

3) Ge=

3) Gesetzt, die Gleichung wäre gewesen $x^3 - 64 = 0$, so hätte man gehabt:

	1	8	27	64	125
	− 64	− 64	− 64	− 64	− 64
	− 63	− 56	− 37	− 0	+ 61
I. Untersch.	− 7	− 19	− 37	− 61	
II.	+ 12	+ 18	+ 24		
III.	− 6	− 6			

Man wäre also wieder auf eine arithmetische Reihe dritter Ordnung gekommen.

Dasselbe wäre der Fall gewesen, wenn man statt 64 jede andere Zahl genommen, z. B. 83. Man hätte dann gehabt:

	1	8	27	64	125
	− 83	− 83	− 83	− 83	− 83
	− 82	− 75	− 56	− 19	+ 42
I. Untersch.	− 7	− 19	− 37	− 61	

Gerade so wie im vorigen; die dritten Unterschiede werden daher auch $= -6$.

Man sieht hieraus, daß jede Gleichung jedesmal auf eine arithmetische Reihe von derselben Ordnung führt, von der sie selber ist. Denn alle Veränderungen der Reihe bestehen doch nur darin, daß man alle Glieder mit derselben Zahl multipliciret oder dividirt, oder daß man dieselbe Zahl zu allen addirt oder von allen abzieht. In jenem Falle wird die Differenz vervielfacht. In diesem bleibt sie dieselbe. In beiden Fällen bleibt die Ordnung der Differenz die nemliche.

§. 50.

Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

Diese sind zwar schon (Theil II. Seite 97) da gewesen, doch will ich sie der Vollständigkeit wegen, eben mit anführen.

Man

Man nimmt nemlich für die unbekannte Zahl x, welche man sucht, der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4... an, und macht mit diesen alle Veränderungen, welche die Aufgabe fodert. Man erhält dann eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Beispiel. Ein Sohn fragt seinen Vater: wie alt er sey? Der Vater antwortet: Jetzt bin ich viermal so alt wie du, aber über 16 Jahre bin ich nur noch doppelt so alt. Wie alt war der Sohn, und wie alt war der Vater?

Das Alter des Sohnes sey	0,	1,	2,	3...
folglich des Vaters . .	0,	4,	8,	12...
Ueber 16 Jahre ist der Sohn	16	17	18	19...
und der Vater . . .	16	20	24	28...
Folglich Unterschied zwischen beider Alter	0	3	6	9
Weil der Vater doppelt so alt seyn sollte, so mußte dieser Unterschied seyn 32 — 16; 34 — 17... also	16	17	18	19
Fehlerreihe	16	14	12	10

Diese bildet eine arithmetische Reihe erster Ordnung, welche, wenn man sie construirt, eine gerade Linie gibt. (S. Taf. I. Fig. 1.) Da die Ordinaten rechtwinklich auf den Abcissen stehen, so entstehen hiedurch lauter rechtwinkliche Dreiecke, die einander ähnlich sind. Nach §. 27. der Geometrie (S. 205 Theil II.) hat man in diesen ähnlichen Dreiecken folgende Verhältnisse:

$$ab - cd : db = ab : bx.$$

Ferner $mn + pq : pn = mn : nx.$

Man

Man kann also auf zweierlei Weise die Entfernung bis zum Durchschnittspunkt x bestimmen, wenn man die drei ersten Glieder dieser Verhältnisse kennt, es sind nur Regula de Tri-Sätze.

Wenn man in der vorigen Aufgabe angibt, bei welchem Gliede die Fehlerreihe o hat, so ist sie gelöst. Die Zahlen o, 1, 2, 3 sind die Abcissen in der Figur, und die Zahlen 16, 14, 12, 10 sind die Ordinaten. Da, wo die Ordinate o liegt, ist der Fehler = o, und hier liegt also die gesuchte Zahl x.

$$16 - 14 : 1 = 16 \text{ zum Gesuchten},$$
$$\text{oder} \quad 2 : 1 = 16 : 8.$$

Also beim neunten Gliede der Reihe o, 1, 2, 3 .... Das neunte Glied derselben ist die Zahl 8, und diese ist also die, bei welcher der Fehler o ist, und die der Aufgabe Genüge thut.

Der Sohn war 8 Jahre alt. Der Vater, der viermal so alt war, war 32 Jahre alt. Ueber 16 Jahre ist jener 24 Jahre alt, und dieser 48.

Man brauchte hiebei nicht gerade die Ordinaten 16 und 14 zu nehmen, man konnte eben so gut zwei andere wählen, die näher oder entfernter von x lagen. Da alle Dreiecke der Figur einander ähnlich sind, so erhielt man immer die Entfernung des Punktes x von der Ordinate, die das dritte Glied in der geometrischen Gleichung macht.

§. 51.

Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade.

1) Die Gleichungen des zweiten Grades haben entweder die Form $x^2 \pm b = o$, oder wenn sie vollständig

sind

sind $x^2 \pm ax \pm b = 0$. Wir wollen letztere als Beispiel nehmen, und folgende Zahlenwerthe hineinsetzen. $x^2 - 12x + 15 = 0$.

Man sieht leicht, daß die beiden Faktoren, aus denen sie durch Multiplikation entstanden ist, (s. §. 27.) nicht groß seyn können, weil ihr Produkt nur 15, und ihre Summe nur 12 beträgt.

Wir wollen die Gleichung auf die Reihe Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 anwenden.

Wenn	$x = 0$ oder	$= 1$ oder	$= 2$ oder	$= 3$ oder	$= 4$ ist,
so erhält man	$+x^2 = 0$	$+1$	$+4$	$+9$	$+16$
	$-12x = 0$	-12	-24	-36	-48
	$+15 = 15$	$+15$	$+15$	$+15$	$+15$
Arithm. Reihe 2ter Ordn.	$+15$	$+4$	-5	-12	-17
I Untersch.	$+11$	$+9$	$+7$	$+5$	
II Untersch.		$+2$	$+2$	$+2$	

Wir hätten nicht nöthig gehabt mehr als drei Glieder zu entwickeln, um die zweiten Unterschiede zu finden. Indeß ist es gut, wenn man einige mehr entwickelt als man braucht, weil diese denn eine Probe von der Richtigkeit der Rechnung sind. Ist ein Fehler eingeschlichen, so werden die zweiten Unterschiede ungleich.

Wir sehen, daß eine Wurzel der Gleichung zwischen 1 und 2 liegt, denn hier geht die Reihe aus dem Positiven ins Negative über.

Um die zweite zu finden, müssen wir die Reihe $+15 + 4 - 5 - 12 - 17$ durch Abziehen der Reihe 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ... fortsetzen.

Wir-

Wir erhalten dann

$$-17-20-21-20-17-12-5+4$$

I Untersch.	+3		+1	−1	−3	−5	−7	−9
Verhältnißzähl.	4	5	6	7	8	9	10	11

Zwischen 10 und 11 liegt also wieder eine Wurzel, weil hier die Reihe wieder aus dem Negativen ins Positive übergeht.

2) Um eine desto deutlichere Ansicht dieser Reihe zu erhalten, so wollen wir sie linearisch verzeichnen. Wir nehmen die Verhältnißzähler zu Abcissen, und die Glieder der Fehlerreihe zu Ordinaten. Da, wo der Fehler $=0$ ist, liegt die gesuchte Zahl. Hier ist die Ordinate, die die Größe des Fehlers angibt, ebenfalls $=0$, und die krumme Linie, welche durch die Endpunkte aller Ordinaten gelegt wird, muß hier die Abcissenlinie durchschneiden.

Wir sehen, daß dieses einmal zwischen 1 und 2 geschieht, aber näher bei 1, das anderemal geschieht es zwischen 10 und 11, aber näher bei 11. Hier liegen also die beiden Wurzeln, deren Zehntheile wir jetzt suchen wollen, da wir sie in ganzen Zahlen schon kennen.

Wir wollen die zwischen 1 und 2 suchen, weil wir hiebei die wenigsten Zahlen zu schreiben haben. Kennen wir diese, so dividiren wir mit ihr die Zahl 15, die ein Produkt von beiden ist, und der Quotient gibt die andere Wurzel. Ebenfalls können wir sie finden, wenn wir sie von der Zahl 12 des zweiten Gliedes abziehen, da diese nach §. 27. 3) die Summe beider Wurzeln ist.

Aus der Zeichnung sieht man, daß sie sehr nahe 1, 4 seyn wird. Indeß ist es unentschieden, ob sie zwischen 1, 3 und 1, 4, oder zwischen 1, 4 und 1, 5 liegen wird.

Wir wollen daher für 1, 3 für 1, 4 und für 1, 5 die Ordinaten entwickeln.

Wenn	$x = 1, 3$ oder	$1, 4$ oder	$1, 5$ ist,
so erhält man	$x^2 = 1, 69$	$+ 1, 96$	$+ 2, 25$
	$- 12x = 15, 60$	$- 16, 80$	$- 18, 00$
	$+ 15 = 15, 00$	$+ 15, 00$	$+ 15, 00$
Arithm. Reihe II Ord.	$+ 1, 09$	$+ 0, 16$	$- 0, 75$
I Unterschiede		$+ 93$	$+ 91$
II Unterschiede		2	

Die Wurzel liegt also zwischen 1, 4 und 1, 5, aber viel näher bei 1, 4.

3) Um von dem kleinen Stücke der arithmetischen Reihe eine desto deutlichere Vorstellung zu erhalten, so wollen wir es wieder linearisch verzeichnen, nur in einem größern Maasstabe. Da die Ordinaten ungefehr 20mal kleiner sind als in der vorigen Figur, so können wir sie 20mal so groß zeichnen, ohne daß die Figur unbequem wird. (S. Fig. 3. Taf. I.)

Man sieht aus der Figur, daß selbst bei der sorgfältigsten Zeichnung die Krümmung der Linie auf dem kleinen Stücke von $\frac{2}{10}$ Verhältniß, so wenig beträgt, daß man wenigstens in diesem Maasstabe sie noch nicht von einer geraden Linie unterscheiden kann. Auch ist bekannt, daß je kleiner das Stück ist, welches man aus einer krummen Linie nimmt, desto kleiner ist seine Abweichung von einer geraden Linie.

Zugleich sieht man, daß man eben solche ähnliche Dreiecke bekommt, wie in Fig. 1, die von m n x und p q x sind. Oder wie die von a b x und m n x.

Aus beiden Paaren können wir die Lage von x bestimmen, nemlich wie weit x noch von dem Gliede 1,4 entfernt liegt.

Die beiden ersten geben:

$$mn + pq : qm = pq : qx \text{ oder in Zahlen:}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}75 \\ +\ 16 \\ \hline \end{array}$$

$$0{,}91 : 0{,}1 = 0{,}16 : qx \text{ also } qx = 0{,}0176$$

Die Wurzel wird also sehr nahe seyn 1,4176.

Wir wollen sie zugleich aus den beiden andern Dreiecken bestimmen:

Wir haben dann:

$$ab - pq : bq = pq : qx, \text{ oder in Zahlen:}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}06 \\ -0{,}16 \\ \hline \end{array}$$

$$0{,}93 : 0{,}1 = 0{,}16 : qx \text{ und } qx = 0{,}0172.$$

Hiernach wäre die Wurzel = 1,4172.

Die beiden andern Dreiecke gaben = 1,4176.

Beide Angaben würden gleich gewesen seyn, wenn die Linie wirklich gerade gewesen. Wir werden nachher sehen, daß die eine ein wenig zu klein ist, und die andere ein wenig zu groß. Doch ist die Angabe jedesmal die genaueste, die man aus den beiden Dreiecken erhält, zwischen denen x liegt. Wir werden also wahrscheinlich um kein Zehntausendtheil fehlen, wenn wir annehmen, daß die Wurzel sey: 1,4175.

4) Die Wurzel wird irrational seyn, also in einem Bruche bestehen, der ohne Ende fortlauft. Wollte man

sie noch genauer haben, etwa bis auf 10 Decimalstellen, so wiederholt man das vorige Verfahren, und entwickelt die beiden Ordinaten für 1,4174 und 1,4176, wo die Wurzel zwischen liegt. Man erhält hiedurch wieder zwei ähnliche Dreiecke, und man kann den Werth von x aufs neue durch einen Regula de Tri-Satz bestimmen, wodurch man ungefehr bis zur zehnten Decimalstelle erfährt, um wie viel die Wurzel größer ist, als 1,4174.... Weil die beiden Ordinaten dann nur um $\frac{2}{1000}$ eines Verhältnisses von einander entfernt liegen, so ist das Stückchen der krummen Linie, das zwischen ihnen ist, so klein, daß es sich fast gar nicht mehr von einer geraden unterscheiden läßt. Daher bekommt man dann auf einmal so viele Ziffern genau.

5) Wäre man auch mit dieser Genauigkeit noch nicht zufrieden, so entwickelt man auf der Stelle, wo die Linie die Abrissenlinie durchschneidet, aufs neue zwei Ordinate, zwischen denen die Wurzel eingeschlossen wäre, man erhielt dann wieder zwei ähnliche Dreiecke, und könnte x aufs neue bestimmen. Man würde dann die Wurzel auf 20 bis 25 Decimalstellen genau finden, weil der Unterschied zwischen dem kleinen Stückchen der krummen Linie, und einer geraden, verschwindend klein würde.

Man sieht hieraus, daß man auf diese Weise eine Wurzel so genau finden kann als man will. Nur werden die letzten Rechnungen beschwerlich wegen der Menge Ziffern, mit denen man zu rechnen hat.

§. 52.

1) Ob eine Wurzel rational oder irrational ist, sieht man auf folgende Weise.

Wenn in der Gleichung nur ganze Zahlen vorkommen, so müssen die Faktoren ebenfalls ganze Zahlen seyn, und können keine Brüche seyn, wenn nemlich alle Glieder der Gleichung nicht noch vorher mit einer ganzen Zahl multiplicirt sind, wodurch die Brüche verschwunden wären.

Gesetzt, man habe die Faktoren $x - 3 = 0$
und $x - 2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

so geben diese multipl. $xx - 5\frac{1}{3}\,x + 7 = 0$

Man sieht bald an dieser Gleichung, daß einer der Faktoren einen Bruch haben wird. Multiplicirt man alle Glieder mit 3, so erhält man die neue Gleichung $3\,xx - 16\,x + 21 = 0$, welche dieselbe Faktoren hat. Aber man erkennt gleich, daß diese Gleichung mit der Zahl 3 multiplicirt worden, weil sie bei dem ersten Gliede xx steht. Dividirt man mit ihr die Gleichung, so erhält man wieder die erste Gleichung, die einen Bruch bei sich hatte, an dem man sieht, daß beide Wurzeln keine ganze Zahlen seyn können.

2) Hat aber das erste Glied keine ganze Zahl bei sich, wie z. B. in unserer Gleichung $x^2 - 12\,x + 15 = 0$, so sieht man, daß sie mit keiner multiplicirt, wodurch etwa die Brüche könnten verschwunden seyn; und ihre Faktoren müssen ganze Zahlen seyn, weil sich sonst Brüche in der Gleichung finden würden. Findet man, daß die

Wurzeln

Wurzeln keine ganze Zahlen sind, und man weiß auch, daß sie keine Brüche seyn können, so macht man den Schluß, daß sie irrationale Zahlen seyn werden, denen man sich zwar nähern, die man aber nie darstellen kann.

Wir werden hier auf dieselbe Weise auf die Irrationalzahlen geführt, wie (Theil II. S. 20) bei den Quadratwurzeln, wo wir auch finden: daß die Wurzel von einer ganzen Zahl, wenn sie nicht in ganzen Zahlen enthalten sey, auch durch keinen endlichen Bruch darzustellen wäre.

3) Wenn die Wurzel einen Bruch bei sich hat, der zwar an sich rational ist, z. B. $\frac{1}{6}$, der aber durch keinen rationalen Decimalbruch kann dargestellt werden, wie das bei dem angeführten der Fall ist, so sieht man dieses an den wiederkehrenden Ziffern.

Der Bruch $\frac{1}{6}$ z. B. gilt immer, 16666 .... Der Bruch $\frac{3}{7}$ gibt 0,428571 428571 .... Sobald man so viele Decimalstellen entwickelt hat, daß eine Periode da ist, und die wiederkehrenden Ziffern anfangen, so kann man auf eine Weise, die weiter unten soll gezeigt werden, jedesmal den Bruch angeben, welcher den irrationalen Decimalbruch rational ausdrückt.

§. 53.

1) In §. 51 fanden wir die eine Wurzel zu 1,4175
da die Summe = 12,0000 ist

so muß die andere seyn = 10,5825

Wir wollen sehen, ob beide der Gleichung Genüge thun, und wie genau sie sind.

Die eine Gleichung des ersten Grades oder der eine Faktor war also $= x - 1,4175 = 0$

die andere ist $= x - 10,5825 = + 12$

Beide Multipl. geben die quadrat. Gleichungen $= xx - 12x + 15,0007 = 0$

Diese Gleichung weicht von der, welche wir hatten, $xx - 12x + 15 = 0$, nur im letzten Gliede um 0,0007 ab.

2) Hätte man die zweite Wurzel durch die Division des letzten Gliedes gesucht, $15 : 1,4175$, so hätte man sie statt 10,5825 10,5821 gefunden, und man hätte dann die Gleichung erhalten:

$$xx - 11,9996\,x + 15 - 0.$$

Das letzte Glied wäre dann genau, aber die Summe beider Wurzeln im mittelsten Gliede, wäre dann statt 12 nur 11,9996; also um 0,0004 zu klein.

Obschon die gefundene Wurzel 1,4175 bis auf 0,0001 genau ist, so finden wir im Produkte eine größere Abweichung, die bis auf 0,0007 geht. Woher dieses? — Der kleine Fehler der ersten Wurzel wird in der zweiten nahe 8mal größer, weil diese nahe 8mal größer als die erste ist, aus welcher sie durch die Multiplikation gefunden, als 15 mit 1,4175 dividirt wurde. Um die Wurzeln genauer zu haben, hätte man noch einmal zwei Ordinaten entwickeln müssen, wodurch man sie, wie schon angeführt worden, bis auf die 100 Milliontheile würde genau erhalten haben.

§. 54.

Quadratische Gleichungen mit unmöglichen Wurzeln.

1) Wir haben schon in §. 27. 6. gesehen, daß wenn die Aufgabe unmögliche Foderungen enthält, man auf unmögliche Größen kommt, wenn man sie auflöst, nemlich auf Quadratwurzeln negativer Zahlen; wie z. B. $\sqrt{-4}$. Wir sahen zugleich, daß wenn dieser Wurzeln zwei sind von gleicher Größe, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen, dann das Wurzelzeichen bei der Multiplication verschwindet, und man ein mögliches Produkt erhält. So gibt z. B.

$$\begin{array}{rl} & x - \sqrt{-4} = 0 \\ \text{und} & x + \sqrt{-4} = 2\sqrt{-4} \\ \hline \text{die Gleichung} & x^2 + 4 \qquad = 0 \end{array}$$

Löst man diese mit einer arithmetischen Reihe auf, so sieht man, daß die krumme Linie, die man hierdurch erhält, sich der Abscissenlinie zwar nähert, sie aber nicht erreicht. Sie wendet sich von ihr zurück, ehe sie sie schneidet, und an der Unmöglichkeit des Durchschneidens erkennt man die Unmöglichkeit der Aufgabe.

2) Wir wollen dieses an einem Beispiel sehen, indem wir auf die eben angeführte Gleichung $x^2 + 4 = 0$, die Reihezahlen $- 4, - 3 - 2 \ldots\ldots$ anwenden.

x sey gleich	-4 oder =	-3 oder =	-2 oder =	-1 oder =	0 oder =	1 oder =	2 oder =	3 oder =	4
so ist $x^2 =$	$+16$	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$	$+16$
$+4 =$	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	$+20$	$+13$	$+8$	$+5$	$+4$	$+5$	$+8$	$+13$	$+20$

Zeichnet man diese Reihe wie in Fig. 4. Taf. 1. geschehen ist, so sieht man gleich, daß diese Gleichung keine mögliche Wurzeln hat.

Da die unmöglichen Wurzeln nur immer paarweise in einer Gleichung seyn können, so müssen in einer quadratischen Gleichung entweder beide Wurzeln möglich, oder beide unmöglich seyn.

3) Man kann durch eine einfache Zeichnung zeigen, wie eine Gleichung aus dem unmöglichen zum möglichen, und wieder von diesem zu jenem übergehen kann.

Die Gleichung $x^2 + 4 = 0$ ist ebenfalls $x^2 = -4$ und die Unmöglichkeit liegt darin, daß x eine Zahl seyn soll, die mit sich selber multiplicirt, ein negatives Produkt gibt, nemlich -4.

Zieht man die Abscissenlinien so viel höher, so daß sie die krumme Linie bei der Ordinate 0 berührte, so wie die punktirte Linie, so hätte die Gleichung zwei mögliche Wurzeln die beide 0 wären, und sie hieß dann: $x^2 = 0$.

Zieht man sie noch höher, so daß sie sie bei den Ordinaten in -3 und $+3$ schnitt, so hätte die Gleichung zwei mögliche Wurzeln $+3$ und -3, und sie entstände durch Multiplikation aus den Faktoren $x - 3 = 0$

$$\begin{array}{r} x + 3 = 6 \\ \hline x^2 - 9 = 0 \end{array}$$

4) Die Gleichung von §. 50., die in Fig. 2 abgebildet ist, hat zwei mögliche Wurzeln. Man kann beide unmöglich machen, wenn man die Abscissenlinien so viel tiefer zeichnet, daß die krumme Linie sie nicht mehr berühren kann.

Wenn man sich vorstellt, daß die Abscissenlinie sich ihrer ersten Lage parallel hinunterbewegt, so werden in dem Punkte, wo sie die krumme Linie berührt, zwei Wurzeln liegen, die gleich groß sind. In diesem Punkt liegt der Uebergang von den möglichen zu den unmöglichen Wurzeln. Ehe also eine Gleichung zwei unmögliche Wurzeln bekommt, so hat sie vorher zwei mögliche Wurzeln gehabt, die beide gleich waren.

§. 55.

Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade.

1) Jede cubische Gleichung entsteht durch die Multiplication dreier Gleichungen des ersten Grades, so wie die quadratische aus der Multiplikation von zweien. — Sie hat daher jedesmal drei Wurzeln, welche den Aufgaben Genüge thun. Diese können alle drei möglich seyn, es können aber auch zwei unmöglich seyn, und nur die dritte möglich. Wenn wir z. B. im vorigen §. die quadratische Gleichungen $-x^2 + 4 = 9$
noch mit der $x + 3$ Mult. hätten,

so hätten wir diese cubische $-x^3 - 3x^2 + 4x + 12 = 0$ erhalten.

Bei der Anwendung auf die Reihe $-4 - 3 - 2 \ldots$ findet man, daß da, wo die eine mögliche Wurzel -3 liegt, die krumme Linie die Abscissenlinie durchschneidet. Aber außer diesem Durchschnittspunkte finden dann weiter keine statt, und man sieht hieraus, daß die Gleichung zwei unmögliche Wurzeln hat. Hätte sie 3 mögliche Wurzeln gehabt, so würde sie die Abscissenlinie dreimal durchschneiden. Die beständige Differenz-Reihe bei einer cubischen Gleichung ist $- 6 = 1.\ 2.\ 3.$

2) Die Auflösung der cubischen Gleichungen geht auf dieselbe Weise, wie die der quadratischen. Man sieht dieses am besten an einem Beispiele. Ich wähle hiezu folgende Gleichung: $x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0$. Sie kommt bei der Auflösung einer astronomischen Aufgabe über den Abstand des Uranus von der Sonne vor. (S. Berliner Astron. Jahrbuch 1782 S. 197.)

Die

Die Gleichung ist unvollständig, da in ihr x^2 fehlt. Daß die drei Faktoren nicht sehr groß seyn werden, sieht man leicht, wenn man das letzte Glied und das vorletzte miteinander vergleicht. Wir werden wahrscheinlich alle Wurzeln finden, wenn wir die Reihe von $-5-4$ ..... bis $+5$ anwenden. Wir brauchen von den eilf Gliedern der Reihe indeß nur drei zu entwickeln, und wir können die übrigen dann durch Addition und Subtraktion finden, da wir schon wissen, daß die beständige Differenz $= -6$ seyn wird, weil die Reihe eine steigende cubische ist, und das erste Glied mit keiner Zahl multipliciret worden.

x sey	$= -1$ oder	0 oder	$+1$
so ist x^3	$= -1$	0	$+1$
$-13,3592\,x$	$= +13,3592$	0	$-13,3592$
$-24,6377$	$= -24,6377$	$-24,6377$	$-24,6377$
Ar. Reihe III. Ord.	$-12,2785$	$-24,6377$	$-36,9969$
I. Unterschiede	$+\;12,3592$		$+\;12,3592$
II. Untersch.		0	
III. Untersch.	-6		-6

Da hier die beiden Glieder der ersten Unterschiede schon 0 sind, so sehen wir, daß hier derselbe Fall eintritt, den wir §. 36. in der Reihe IV. Ord. hatten. Dieses findet dann jedesmal statt, wenn ein Glied, in der vorigen Reihe $= 0$ geworden.

3) Wir wollen nun durch Abziehen, die Reihe $+1+2+3$ weiter fortsetzen.

	I.	II.	III.	Glieder
− 6	0	+ 12,3592	− 36,9969	+ 1
− 6	+ 6	+ 6,3592	− 43,3561	+ 2
− 6	+ 12	− 6,3592	− 36,9967	+ 3
− 6	+ 18	− 24,3592	− 12,6375	+ 4
− 6	+ 24	− 48,3592	+ 35,7217	+ 5

Wir sehen, daß zwischen 4 und 5 eine Wurzel liegen wird, weil hier die Reihe aus dem Negativen ins Positive übergeht. Zugleich sehen wir, daß jenseits 5 keine Wurzel mehr liegen kann, weil die Reihe immer im Positiven bleiben muß, da ihre Zahlen immer am wachsen bleiben.

Wir müssen nun, um die andern Wurzeln zu finden, die Reihe durch Addiren nach der entgegengesetzten Richtung fortsetzen.

	I.	II.	III.	Glieder
− 6	0	+ 12,3592	− 12,2785	− 1
− 6	− 6	+ 6,3592	− 5,9193	− 2
− 6	− 12	− 6,3592	− 12,2785	− 3
− 6	− 18	− 24,3592	− 36,6377	− 4

Wir sehen, daß die Reihe diesseits des vierten Gliedes, immer im Negativen bleiben wird; es kann kein Durchschnittspunkt mehr statt finden, weil die Zahlen derselben immer am Abnehmen bleiben. Die Gleichung hat also entweder zwei unmögliche Wurzeln, oder es liegen zwei Wurzeln sehr nahe beisammen, etwa bei − 2, so daß sie beide in einem Verhältnisse sind.

4) Um uns eine desto deutlichere Ansicht dieser Reihe zu verschaffen, so wollen wir sie linearisch verzeichnen. (S. Taf. I. Fig. 5.) Von den Ordinaten sind bei der Zeichnung nur die ganzen Zahlen genommen.

Man sieht aus der Figur, daß die Reihe sich dem Gliede — 2 stetig nähert, und dann ohne die Abscissenlinie zu durchschneiden, sich eben so stetig von ihr entfernt. Die Reihe hat also 2 unmögliche Wurzeln, und die einzig mögliche liegt zwischen 4 und 5, und zwar wie man aus der Figur sieht, zwischen 4, 3 und 4, 4.

Wir wollen für beide Zahlen die Ordinaten entwickeln.

	Wenn $x = 4,3$	oder $4,4$ ist
so erhält man $x^3 =$	$+ 79,507$	$+ 85,184$
$- 13,3592\,x =$	$- 57,44456$	$- 58,78048$
$- 24,6377 =$	$- 24,6377$	$- 24,6377$
	$- 2,57526$	$- 1,76582$

In Fig. 6. Taf. I., ist das Stück der krummen Linie, welches zwischen 4,3 und 4,4 liegt, gezeichnet. Im Punkte x durchschneidet die krumme Linie die Abscissenlinie, und hier liegt die gesuchte Wurzel.

Ziehen wir die gerade Linie n p, so schneidet diese die Abcissenlinie in d. Die Entfernung des Punktes d von q (dem Gliede 4,3), können wir mit Hülfe der beiden ähnlichen Dreiecke d n m und d q p bestimmen. Denn wenn wir m r ziehen, so entsteht ein neues Dreieck m q r, welches den beiden andern ähnlich ist, und in dem wir die Seiten q r und q m kennen.

Wir haben demnach: $qr : qm = qp : qd$

oder in Zahlen:

$$qp = 2,57526$$
$$pr = nm = 1,76582$$
$$qr = 4,34108 : 0,1 = 2,57526 : qd \text{ und } qd = 0,05932$$

hiezu das Glied $4,3$

$4,35932$

5) Die

5) Die Wurzel x wird also nahe $= 4{,}35932$ seyn, aber etwas größer. Wir können annehmen, daß die Ungewißheit nur in den Zehntausendtheilen ist. Denn obschon eine Reihe dritter Ordnung, auf der Strecke von $\frac{1}{10}$ Verhältniß, schon bedeutender von einer geraden Linie abweicht, als ein eben so großes Stück von einer Linie zweiter Ordnung, so kann man doch annehmen, daß man durch den eben angeführten Regula de Tri-Satz, immer vier Stellen der Wurzel richtig findet. (Die ganzen Zahlen mitgerechnet.)

Es ist daher wahrscheinlich, daß die Wurzel zwischen 4,459 und 4,360 liegt. Wir wollen für beide Zahlen die Ordinaten entwickeln.

x sey =	4,359	oder = 4,360
so ist $x^3 =$	$+82{,}824840279$	$+82{,}881856000$
$-13{,}3592\,x =$	$-58{,}2327528$	$-58{,}246112$
$-24{,}6377 =$	$-24{,}6377$	$-24{,}6377$
	$-0{,}045612521$	$-0{,}001956000$

Man sieht, daß die Wurzel doch nicht, wie wir glaubten, zwischen 4,359 und 4,360 gelegen, sondern noch ein wenig größer gewesen.

Zeichnen wir wieder die beiden Ordinaten, so erhalten wir die Figur 7, Taf. I. Das kleine Stückchen der krummen Linie, dessen Abscisse nur 0,001 Verhältniß groß ist, unterscheidet sich so wenig von einer geraden Linie, daß man es kaum in einer Zeichnung würde ausdrücken können, die so groß wäre, daß die Figur einen ganzen Bogen einnehme.

Ich habe dieses Stückchen um vieles krummer gezeichnet, als es ist, damit man an der Figur sehen könne,

daß

daß der Punkt x, wo die krumme Linie die Abscissenlinie durchschneidet, näher bei dem Gliede m (welches 4,360 ist) liegt, als der Punkt d, in dem die gerade Linie b n d, die man durch die Endpunkte der Ordinate zieht, die Abcissenlinie durchschneidet.

Man hat nun in den beiden ähnlichen Dreiecken folgende Verhältnisse:

$$ar : am = mn : md$$

$$ab = 0,045612$$
$$-mn = 0,001956$$

$$ar = 0,043656 : 0,001 = 0,001956 : md$$
$$\text{und } md = 0,00004478$$
$$\text{hiezu das Glied } 4,360$$

Gibt die Wurzel 4,36004478

Die Wurzel wird ein wenig zu groß seyn, doch aber bis auf die letzte oder vorletzte Stelle genau. Herr Klügel findet sie in seinem Wörterbuche. Theil 2, S. 393, zu 3,36004.

§. 56.

Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade.

1) Die Gleichungen des vierten Grades entstehen durch die Multiplication von vier Gleichungen des ersten Grades. Sie haben daher jedesmal vier Wurzeln, welche alle vier möglich oder alle vier unmöglich seyn können, auch können zwei möglich und zwei unmöglich seyn. Wenn man sie daher auf eine arithmetische Reihe anwendet, so erhält man eine krumme Linie, die die

Abscissenlinie entweder viermal oder zweimal, oder aber gar nicht durchschneidet, je nachdem entweder vier oder zwei oder gar keine Wurzeln möglich sind. Berührt sie die Abscissenlinie, so ist das ein Zeichen, daß zwei gleiche Wurzeln möglich sind.

Die beständige Differenz der Reihe ist $+ 24, = (1 . 2 . 3 . 4)$ wenn man die Glieder rechts von denen links abzieht, und das erste Glied mit keiner Zahl multiplicirt worden. Ist es dieses, so ist die Differenz das Vielfache dieser Zahl. So wird die Gleichung $7x^4 - 100 = 0$ auf die Differenz $7 . 24 = 168$ führen.

2) Die Auflösung der biquadratischen Gleichungen geht auf dieselbe Weise, wie die Auflösung der quadratischen und cubischen. Wir wollen dieses an einem Beispiel zeigen. Ich wähle hiezu folgende Gleichung, welche Herr Kramp in seiner arithmetique universelle S. 394 gegeben hat.

$$0 = 29 - 17x + x^2 - 4x^3 - 7x^4$$

Aus der Vergleichung der beiden ersten Glieder sieht man, daß die Wurzeln nicht groß seyn werden, und wahrscheinlich zwischen $- 3$ und $+ 3$ eingeschlossen sind.

x sey =	-3 oder =	-2 oder =	-1 oder =	0 oder =	$+1$ oder =	$+2$ oder =	$+3$.
so ist $+29$ =	$+29$	$+29$	$+29$	$+29$	$+29$	$+29$	$+29$
$-17x$ =	$+51$	$+34$	$+17$	0	-17	-34	-51
$+x^2$ =	$+9$	$+4$	$+1$	0	$+1$	$+4$	$+9$
$-4x^3$ =	$+108$	$+32$	$+4$	0	-4	-32	-108
$-7x^4$ =	-567	-112	-7	0	-7	-112	-567
	-370	-13	-44	$+29$	$+2$	-145	-688

Man sieht, daß eine Wurzel zwischen -1 und -2 liegt, weil hier die Reihe aus dem Positiven ins Negative geht. Eine zweite liegt zwischen 1 und 2. Jenseits $+2$

Man sieht, daß eine Wurzel zwischen -1 und -2 liegt, weil hier die Reihe aus dem Positiven ins Negative geht. Eine zweite liegt zwischen 1 und 2. Jenseits

$+2$

+ 2 und diesseits — 2, kann keine Wurzel mehr liegen, weil die Reihe an beiden Seiten im negativen beständig fortgeht, ohne sich der Abscissenlinie wieder zu nähern.

Ob zwischen + 2 und — 2 irgend noch ein paar versteckt sind, das wird uns die Zeichnung lehren, doch wollen wir uns vorher überzeugen, daß kein Rechnungsfehler eingeschlichen. Wenn wir ein Glied vom andern abziehen, müssen wir bei richtiger Rechnung immer die Differenz 168 finden.

IV.	III.	II.	I.	Diff.
— 370				
— 13	— 357			
+ 44	— 57	— 300		
+ 29	+ 15	— 72	— 228	
+ 2	+ 27	— 12	— 60	168
— 145	+ 147	— 120	+ 108	168
— 688	+ 543	— 396	+ 276	168

In Fig. 8. Taf. I. ist die Linie gezeichnet. Man sieht, daß nicht mehr als zwei Durchschnittspunkte möglich sind, und daß die Gleichung daher nur zwei mögliche Wurzeln hat. (Die Ordinaten von — 3 und + 3 konnten wegen Mangel an Raum nicht gezeichnet werden.) Da die Linie nur nach ganzen Verhältnissen gezeichnet ist, so hat sie ein unförmliches Ansehen.

Würde man die Ordinaten für zehntel Verhältnisse berechnen, und dann durch die Endpunkte von diesen die Linie ziehen, so würde sie bestimmter, und man könnte genauer die Gegend bezeichnen, in der die beiden unmöglichen Wurzeln liegen.

3) Wir wollen zuerst die Wurzel suchen welche bei 1 liegt. Man sieht aus der Zeichnung, daß sie zwischen 1

und

und 1,1 liegen muß. Entwickeln wir die Ordinate von 1,1 so ist diese — 4,0627. Die von 1 war + 2. Die Wurzel liegt also näher beim Gliede 1.

Zeichnen wir beide Ordinaten, so erhalten wir eine Figur wie die Figur 6. Tafel I.

Wir haben wieder dieselben ähnliche Dreiecke und dieselbe Verhältnisse. Die Entfernung der Wurzel x vom Gliede 1 finden wir durch folgenden Regula de Tri-Satz.

$$6{,}0627 : 0{,}1 = 2 : x \text{ und } x = 0{,}033$$

Und die Wurzel ist 1,033 aber etwas zu klein, weil der Punkt d näher bei 1 liegt als der Punkt x.

Da eine Reihe vierter Ordnung schon ungleich mehr gekrümmt ist als eine dritter, so haben wir hier keine vier Stellen mehr genau. Wir können annehmen, daß die Wurzel um ein paar Tausendtheile zu klein seyn wird, und es nicht unwahrscheinlich ist, wenn wir sie zwischen den beiden Zahlen 1,035 und 1,036 suchen, wir sie zwischen diesen eingeschlossen finden. Wir wollen deswegen die beiden Ordinaten für diese Zahlen entwickeln, und sollte sich finden, daß die Wurzel auch nicht zwischen ihnen eingeschlossen wäre, so erhalten wir doch auf jeden Fall ein paar Ordinaten, die sehr nahe bei der Wurzel liegen, und die uns ein paar ähnliche Dreiecke geben, auf die wir nachher jenen Regula de Tri-Satz wieder anwenden können.

Erste Potenz von	1,035	von 1,036
Zweite . . .	1,071225	1,073296
Dritte . . .	1,108717875	1,111934656
Vierte . . .	1,14752300625	1,151964303616

+ 29

$+29=+29{,}0000$	$+29{,}0000$
$-17x=-17{,}595$	$-17{,}612$
$+x^2=+\ 1{,}071225$	$+\ 1{,}073296$
$-4x^3=-\ 4{,}434871400$	$-\ 4{,}447738624$
$-7x^4=-\ 8{,}032661004375$	$-\ 8{,}003750125312$
$+\ 0{,}008692595625$	$-\ 0{,}050192749312$

Man sieht, daß die Wurzel wirklich zwischen 1,035 und 1,036 liegt, aber ungleich näher bei der erstern Zahl.

Zeichnen wir diese Ordinaten, so erhalten wir wieder eine Figur wie Fig. 6. Taf. I., und finden aus den beiden ähnlichen Dreiecken die entstehen, das Stück $gd = 0{,}0001476$. (Hierbei sind nur sechs Decimalen von den 12 mit in Rechnung genommen worden, die wir bei der Entwicklung der Ordinaten fanden.) Die Wurzel ist demnach 1,0351476 und wahrscheinlich bis auf die 7te Stelle genau. Bis auf die sechste ist sie es sicher. Herr Kramp findet sie S. 395 zu 1,03509, also zu klein. Die Ursache ist: weil bei der dortigen Rechnung die Regel de la fausse position, nur einmal und zwar bei den 100theilen angewendet wurde. Da hingegen unsere Rechnung die Wurzel zum zweitenmal suchte, als schon die Tausendtheile gefunden waren.

4) Abkürzung der Rechnung. Man sieht leicht, daß es überflüßig ist, bei den höheren Potenzen alle Decimalstellen mit nachzuführen. Nimmt man nur viere mit, und läßt beim Multipliciren alles fahren, was kleiner als ein Zehntausendtheil ist, so erhält man folgende Zahlen:

			Ordinate	Ordinate
Erste Potenz	1,0350	1,0360	+ 29,0000	+ 29,0000
Zweite	1,0712	1,0733	− 17,5950	− 17,6120
Dritte	1,1087	1,1119	− 1,0712	+ 1,0733
Vierte	1,1475	1,1519	− 4,4348	− 4,4476
			− 8,0327	− 8,0633
			+ 0,0087	− 0,0496

Hieraus ist die Wurzel = 1,0351492
Sollte seyn = 1,0351476
Mit 5 Stellen hätte man sie gefunden = 1,031478

Die Unterschiede sind klein, und rühren daher, daß man beim Wegwerfen der letzten Ziffern, die letzte die man behält um eine Einheit vermehrt, wenn die weggeworfenen mehr als 5 betragen. Hiedurch wird dann die Wurzel in der sechsten oder siebenten Stelle ein wenig zu groß. Auch kann sie etwas zu klein werden, wenn man die letzten Ziffer nicht um 1 vermehrt, weil die weggeworfenen Ziffern weniger als 5 sind.

5) Es war ein glücklicher Zufall, daß die Wurzel gerade zwischen den beiden Zahlen 1,035 und 1036 lag, welche wir annehmen. Gesetzt, wir hätten uns um eine Einheit geirrt, und geglaubt, sie würde zwischen 1,036 und 1,037 liegen, wie viel Einfluß hätte dieses auf die Genauigkeit der Wurzel gehabt?

Wir wollen, um dieses zu untersuchen, die Ordinaten für 1,037 entwickeln, und zwar bis auf 5 Decimalstellen, welche Genauigkeit bei diesen Rechnungen hinlänglich ist.

		Ordinaten.
Erste Potenz	1,037	+ 29,00000
Zweite	1,07537	— 17,62900
Dritte	1,11536	+ 1,07537
Vierte	1,15663	— 4,46144
		— 8,09641
		— 0,11148

Wir erhalten, wenn wir die beiden Ordinaten für 1,036 und 1037 zeichnen, eine Figur wie Taf. I. Fig. 3. In dem Dreieck a b x ist die Seite
a b = 0,11148 bekannt. In dem Dreieck p q x ist die Seite
p q = 0,05019 ebenfalls bekannt, und b q ist = 0,001
0,06129 : 0,001 = 0,05019 : q x und q x = 0,0008188
dieses wird von dem Gliede 1,0360000 abgez.
so bleibt die Wurzel 1,0351812
Sollte seyn . . . 1,0351476
Also der Fehler = 0,0000336

Hätte man hingegen 1,035 und 1,037 genommen, also einen Unterschied von 0,002, um völlig sicher zu seyn, daß die Wurzel zwischen den beiden angenommenen Ordinaten liege, so wäre der Fehler kleiner geworden.

Man hatte dann gehabt:
. 0,11148 die Ordinate von 1,037
\+ 00869 die Ordinate von 1,035
0,12017 : 0,002 = 0,00869 : x und x = 0,0001446
Hiezu — 1,035
1,0351446
Sollte seyn 1,0351476
Fehler = 0,0000030

Hiebei

Hiebei ist also der Fehler 10mal kleiner als bei der vorigen Methode, und es ist daher besser, daß man die Ordinaten um 0,002 von einander entfernt nimmt, um sicher zu seyn, daß die Wurzel zwischen ihnen liege.

6) Berechnen wir die zweite mögliche Wurzel, die die Gleichung zwischen — 1 und — 2 liegen hat, so finden wir sie zu . . . . . : 1,908759

Hr. Kramp gibt sie zu 1,90794 an.

0,001829

Herr Kramp hat nur einmal die Regel de la fausse position angewandt, als die Zehntel gefunden waren. Daher der Unterschied in den Tausendtheilen.

7) Nehmen wir, um kleinere Zahlen zu haben, von beiden Wurzeln nur die Zehntausendtheile, so haben wir folgende beide Gleichungen des ersten Grades:

$$x - 1{,}0351 = 0$$

und $$x + 1{,}9087 = 3{,}0438$$

$$+ x\,1{,}9087 - 1{,}9757$$
$$x^2 - x\,1{,}0351$$

Beide multip. geben $x^2 + x\,0{,}8736 - 1{,}9757 = 0$

Dividirt man die ganze Gleichung

$0 = 29 - 17x + x^2 - 4x^3 - 7x^4$, mit dem Produkt $x^2 + x.\,0{,}8736 - 1{,}9757$, so findet man $-7x^2 + 2{,}1152\,x - 14{,}6777$. Dieses mit 7 dividirt, gibt das Produkt der beiden unmöglichen Wurzeln. Da beide Wurzeln in den Zahlen einander gleich sind, so kann man aus diesem Produkte die Wurzel ziehen, und dann vor diese die negative Zeichen schreiben, wodurch sie unmöglich werden. Auf diese Weise lernt man die beiden unmöglichen Wurzeln kennen, durch deren Multiplikation ein mögliches Produkt entstand.

§. 57.

Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.

1) Die Gleichungen des fünften Grades entstehen durch die Multiplikation von fünf Gleichungen des ersten Grades. Sie haben daher jedesmal fünf Wurzeln. Unter diesen können eine oder drei, oder fünf möglich seyn, und zwei oder vier unmögliche.

Wenn man daher eine arithmetische Reihe auf sie anwendet, so entsteht eine krumme Linie, welche die Abscissenlinie einmal, dreimal oder fünfmal durchschneidet, je nachdem eine, drei oder fünf Wurzeln möglich sind. Sind zwei Wurzeln gleich, so berührt sie sie auf der Stelle, ohne sie zu durchschneiden.

Die beständige Differenz einer Reihe fünfter Ordnung ist $-120 = 1.2.3.4.5$, wenn nemlich ihre Glieder nicht mit einer Zahl sind multiplicirt worden, welche als Faktor bei x^5 steht. Wäre dieses z. B. die Zahl 500, so wäre die beständige Differenz $= 120 . 500 = 60000$.

2) Die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade geschieht auf dieselbe Weise, wie die vom vierten. Wir wollen als Beispiel folgende Gleichung annehmen, welche Hr. Kramp S. 391 seiner Arith. univers. anführt.

$$0 = 372 + 2135\,x + 402\,x^2 - 4885\,x^3 + 500\,x^5$$

x sey =	— 4 oder	— 3 oder	— 2 oder	1 oder	— 0
so erhält man	+ 372	372	372	372	372
	— 8540	6405	4270	2135	0
	+ 6432	3618	1608	402	0
	+ 312640	131895	39080	4885	0
	— 512000	121500	16000	500	0
	— 201096	+ 7980	+ 20790	+ 3024	+ 372

x sey =	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4
so erhält man	+ 372	372	372	372
	+ 2135	4270	6405	8540
	+ 402	1608	3618	6432
	— 4885	39080	131895	312640
	+ 500	16000	121500	512000
	— 1476	— 16830	0	+ 214704

3) Wir hätten nur nöthig gehabt fünf Glieder zu entwickeln, um die vierten Differenzen zu finden, weil wir schon wußten, daß die beständige Differenz + 500mal — 120 = — 60000 seyn muß, und wir konnten dann durch bloßes Addiren und Subtrahiren die Reihe nach beiden Seiten so lange fortsetzen, bis wir alle Stellen paßirt waren, wo sie aus dem Negativen ins Positive, oder aus dem Positiven ins Negative geht. Indeß, da wir die Zahlen für die Glieder — 4 — 3 — 2 — 1 schon hatten, so war es eben so leicht die Werthe für + 1 + 2 + 3 + 4 zu finden. Man hatte nur die Vorzeichen zu ändern und aufs neue zu addiren. Dieses hatte zugleich den Vortheil, daß wir eine Probe erhielten, ob keine Rechnungsfehler eingeschlichen wären; zogen wir nemlich die Glieder der Reihe nach von einander ab, so mußte die beständige Differenz = 60000 werden.

Reihe V Ordnung	1 Untersch. Reihe IV Ordnung	2 Untersch. Reihe III Ordnung	3 Untersch. Reihe II Ordnung	4 Untersch. Reihe I Ordnung	Beständige Differenz
− 201096					
+ 7980	− 209076				
+ 20790	− 12810	− 196266			
+ 3024	+ 17766	− 30576	− 165690		
+ 372	+ 2652	+ 15114	− 45690	− 120000	
− 1476	+ 1848	+ 804	+ 14310	− 60000	− 60000
− 16830	+ 15354	− 13506	+ 14310	0	− 60000
0	− 16830	+ 32184	+ 45690	+ 60000	− 60000
+ 214704	− 214704	+ 197874	− 165690	+ 120000	− 60000

Um uns eine klare Vorstellung von der Reihe zu machen, so wollen wir sie wieder linearisch zeichnen, und die Ordinaten in ganzen Tausenden angeben. (S. Fig. 9. Taf. I.) Man sieht aus der Zeichnung, daß jenseits $+4$ und diesseits -4 keine Durchschnittspunkte, und folglich keine Wurzeln mehr liegen können. Eine Wurzel ist $=3$. Eine zweite ist nahe -1, eine dritte ist nahe -3. Ob die beiden übrigen Wurzeln unmöglich sind, oder ob noch zwischen $+1$ und -1 noch irgend zwei versteckt sind, das können wir aus der Zeichnung nicht sehen, da wir die Ordinaten für ganze Verhältnisse entwickelt haben. Wir können dieses indeß leicht erfahren, sobald wir die Ordinaten für $-0{,}5$ und $+0{,}5$ entwickeln. Wir bekommen dann noch zwei feste Punkte, welche die Lage der krummen Linie mit völliger Gewißheit bestimmen.

	x sey $= -0{,}5$ oder	$= +0{,}5$
so erhält man	$+ 372{,}00$	$+ 37200$
	$- 1067{,}50$	$+ 1067{,}50$
	$+ 100{,}50$	$+ 100{,}50$
	$+ 610{,}625$	$- 610{,}625$
	$- 15{,}625$	$+ 15{,}625$
	0	$+ 945$

Beide

Beide Wurzeln sind möglich, und beide liegen zwischen o und — 1. Die eine Wurzel ist 0,5.

Zeichnen wir die fünf Ordinaten für — 1 — 0,50 + 0,5 und + 1, und ziehen durch sie die krumme Linie, so sehen wir, daß die zweite Wurzel sehr nahe — 0,2 seyn wird. Entwickeln wir die Ordinate für — 0,2, so finden wir, daß sie = o ist, also ist eine Wurzel 0,2.

Auch sehen wir in der Figur, daß eine Wurzel bei + 0,8 und die andere bei — 3,1 liegt. Entwickeln wir in dieser Gegend ein paar Ordinaten, so findet sich, daß eine Wurzel genau + 0,8, und die andere genau 3,1 ist.

Die Gleichung hat also folgende fünf rationale Wurzeln. — 3,1 — 0,5 — 0,2 + 0,8 und + 3.

Und ist also ein Produkt aus folgenden fünf Gleichungen des ersten Grades.

$$\begin{aligned} x + 3{,}1 &= 0 \\ x + 0{,}5 &= -2{,}6 \\ x + 0{,}2 &= -2{,}9 \\ x - 0{,}8 &= -3{,}9 \\ x - 3 \quad &= -6{,}1 \end{aligned}$$

Alle die Gleichungen sind mit einander multiplicirt worden, und haben zum Produkt die Gleichung des fünften Grades gegeben.

$$0 = 0{,}744 + 4{,}27\,x + 0{,}804\,x^2 - 9{,}77\,x^3 + x^5.$$

In dieser hatten mehrere Glieder Decimalbrüche bei sich, um diese wegzuschaffen sind alle Glieder mit 500 multiplicirt worden. Hiedurch wurde das erste Glied $500\,x^5$, und das letzte Glied, welches 0,744 war, wurde 372. Die Differenz, die sonst 120 gewesen, wurde nun 60000.

4) Da wir alle Zahlen für die Glieder von — 5 bis

+ 5

+ 5 haben, so ist es leicht, die Ordinaten für die Zehntel von — 0,5 bis + 0,5 zu entwickeln. Es sind nur einige Additionen. Sie sind in folgendem Täfelchen in der Colonne V zusammengestellt. Sie bilden eine Reihe fünfter Ordnung, deren Differenz $10^5 = 100000$mal kleiner ist, als die in dem vorigen Täfelchen, welches ganze Verhältnisse enthält, so wie dieses nur Zehntelverhältnisse.

Glieder	Ordinaten V	IV	III	II	I	Differenzen.
— 0,5	0,00					
— 0,4	— 110,16	+ 110,16				
— 0,3	— 101,64	— 8,52	+ 118,68			
— 0,2	0,00	— 101,64	+ 93,12	+ 25,56		
— 0,1	+ 167,40	— 167,40	+ 65,76	+ 27,36	— 1,80	
0,0	+ 372,00	— 204,60	+ 37,20	+ 28,56	— 1,20	— 0,6
+ 0,1	+ 584,64	— 212,64	+ 8,04	+ 29,16	— 0,60	— 0,6
+ 0,2	+ 776,16	— 191,52	— 21,12	+ 29,16	0,00	— 0,6
+ 0,3	+ 918,00	— 141,84	— 49,68	+ 28,56	+ 0,60	— 0,6
+ 0,4	+ 982,80	— 64,80	— 77,04	+ 27,36	+ 1,20	— 0,6
+ 0,5	+ 945,00	+ 37,80	— 102,60	+ 25,56	+ 1,80	— 0,6

Wenn man in ein ganzes Verhältniß 10 Zehntelverhältnisse einschaltete, so werden bei einer Reihe

1 Ord. die Differenzen $10^1 = 10$mal kleiner
bei einer 2 Ord. . . . . $10^2 = 100$mal . . .
. . 3 Ord. . . . . $10^3 = 1000$mal . .
. . 4 Ord. . . . . $10^4 = 10000$mal . .
. . 5 Ord. . . . . $10^5 = 100000$mal . .
u. s. w.

Da die vorige Reihe fünfter Ordnung war, so mußte bei den Zehntelverhältnissen die Differenz statt 60000, 0,6 werden.

§. 58.

Auflösung der Gleichungen vom sechsten Grade.

1) Die Gleichungen des sechsten Grades entstehen durch die Multiplikation von sechs Gleichungen des ersten Grades. Sie haben daher jedesmal sechs Wurzeln. Unter diesen können 2, 4 oder 6 mögliche seyn, oder auch 2, 4 oder 6 unmögliche.

Wendet man auf sie eine arithmetische Reihe erster Ordnung an, so entsteht eine krumme Linie, welche die Abscissenlinie entweder 2mal oder 4mal oder 6mal durchschneidet, je nachdem 2, 4 oder 6 Wurzeln möglich sind. Sind unter den möglichen Wurzeln zwei gleiche, so berührt sie sie auf der Stelle, wo sie liegen. Die beständige Differenz einer Reihe sechster Ordnung ist $+ 720 = 1.2.3.4.5.6$. Wenn nemlich ihre Glieder mit keiner Zahl außer den sechs Wurzeln sind multiplicirt worden.

2) Die Auflösung der Gleichungen vom sechsten Grade geschieht auf dieselbe Weise, wie die vom fünften, vierten u. s. w. Wir wollen dieses an einem Beispiele zeigen. Es sey die Gleichung gegeben:

$$x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 18x^3 + 29x^2 - 12x + 18 = 0.$$

Weil die Zeichen + und − dreimal regelmäßig abwechseln, so sehen wir, daß wenigstens drei Wurzeln positiv seyn werden.

Wir wollen sie in der Reihe $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ suchen, und diese rückwärts bis $- 1 - 2 - 3$ fortsetzen, damit wir einige Ordinaten mehr haben, um die Linie mit einer desto größern Sicherheit zeichnen zu können.

Indem

Indem wir die Ordinaten entwickeln, finden wir eine merkwürdige Erscheinung. Alle haben das Zeichen + und werden beim Gliede 3 = o, ohne aber negativ zu werden. — Um aber die Ursachen hievon desto leichter aufzufinden, so wollen wir die Reihe linearisch zeichnen, doch uns vorher durch Subtraktion überzeugen, daß wir richtig gerechnet haben, und daß die Merkwürdigkeit nicht in einem Rechnungsfehler bestehe.

Glied.	Ordin. VI.	V.	IV.	III.	II.	I.	Diff.
— 3	+ 3960						
— 2	+ 750	+ 3210					
— 1	+ 96	+ 654	+ 2556				
0	+ 18	+ 78	+ 576	+ 1980			
+ 1	+ 24	— 6	+ 84	+ 492	+ 1488		
+ 2	+ 30	— 6	0	+ 84	+ 408	+ 1080	
+ 3	0	+ 30	— 36	+ 36	+ 48	+ 360	+ 720
+ 4	+ 306	— 306	+ 336	— 372	+ 406	— 360	+ 720
+ 5	+ 2808	— 2502	+ 2196	— 1860	+ 1488	— 1080	+ 720

Man sieht aus der Zeichnung Taf. I. Fig. 10, daß bei dem Gliede 3 entweder zwei Wurzeln äußerst nahe beisammen liegen, oder aber daß die Gleichung zwei Wurzeln hat, die beide = 3 sind. — Ob bei 3 noch eine Wurzel liegt die etwas größer oder kleiner ist, z. B. 2,9 oder 3,1 das kann man leicht ersehen, wenn man die Ordinaten für diese beiden Zahlen entwickelt. Zeichnet man diese, so bekommt man eine so deutliche Vorstellung von der Natur der krummen Linie, daß man hierüber gleich entscheiden kann, weil der Zug einer arithmetischen Reihe immer stetig ist. Wir finden auf diese Weise, daß die Gleichung bei 3 zwei gleiche Wurzeln hat, die beide + 3 sind. Die übrigen vier Wurzeln sind, wie man aus der Zeichnung sieht, unmöglich.

§. 59.

Auflösung der Gleichungen vom siebenten Grade.

1) Die Gleichungen vom siebenten Grade entstehen durch die Multiplikation von 7 Gleichungen des ersten Grades. Sie haben daher jedesmal 7 Wurzeln, die entweder alle 7 möglich seyn können, unter denen aber auch 2, 4 oder 6 unmöglichen seyn können.

Wendet man auf sie eine arithmetische Reihe erster Ordnung an, so entsteht eine arithmetische Reihe siebenter Ordnung, welche, wenn man sie linearisch verzeichnet, die Abscissenlinie entweder 1, 3, 5 oder 7mal durchschneidet, je nachdem 1, 3, 5 oder 7 Wurzeln möglich sind. Sind zwei Gleiche, so entsteht in dem Punkte nur Berührung.

Die beständige Differenz einer Reihe 7ter Ordnung ist $5040 = 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.$ Wenn nemlich ihre Glieder mit keiner Zahl außer den 7 Wurzeln sind multiplicirt worden.

2) Die Auflösung der Gleichungen des 7ten Grades, geschieht auf dieselbe Weise, wie die der niedern Grade. Wir wollen dieses aus einem Beispiele zeigen.

Es sey folgende Gleichung gegeben:

$$-x^7+12x^6-58x^5+144x^4-193x^3+132x^2-36x=0$$

Indem wir die Ordinaten für die Riehe:

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3$$

entwickeln, so finden wir, daß alle Ordinaten $=0$ sind, und daß, wenn wir eine Linie durch sie ziehen, diese in der Abscissenlinie liegt. Dieses ist ein Zeichen, daß die angeführten Zahlen die Wurzeln sind. Man sieht leicht

ein,

ein, daß die Gleichung vorsätzlich aus der Multiplikation von sieben so einfachen Gleichungen des ersten Grades ist gebildet worden, damit man ein Beispiel hätte, bei dessen Auflösung keine großen Zahlen vorkämen.

Da das letzte Glied fehlt und man alle andere mit x dividiren kann, so ist sie im Grunde nur eine Gleichung des 6ten Grades.

Indeß, wenn auch alle Wurzeln irrationale Brüche gewesen wären, und es wäre verlangt worden, jede bis auf 6 Stellen zu finden, so wäre die Auflösung dieselbe geblieben, nur wäre sie der Natur der Sache nach weitläuftiger geworden, weil große Zahlen in die Rechnung gekommen.

§. 66.

Von der Auflösung der Gleichungen von noch höhern Gliedern.

1) Die Gleichungen des 8ten Grades haben zur beständigen Differenz + 40320. Sie haben 8 Wurzeln, die alle möglich seyn können, unter denen sich aber auch 2, 4, 6 oder 8 unmögliche befinden können.

2) Die Gleichungen des 9ten Grades haben zur beständigen Differenz — 362880. Sie haben 9 Wurzeln, die alle möglich seyn können, unter denen sich aber auch 2, 4, 6 oder 8 unmögliche befinden können.

3) Die Gleichungen des 10ten Grades haben zur beständigen Differenz + 3628800. Sie haben 10 Wurzeln, die alle möglich seyn können, unter denen sich aber auch 2, 4, 6, 8 oder 10 unmögliche befinden können.

Und so läßt sich immer für jeden Grad die Anzahl

der

der Wurzeln und die beständige Differenz angeben, und die Auflösung der Gleichungen geschieht dann auf die Weise, wie in den vorigen Paragraphen ist gelehrt worden.

§. 61.

Anwendung der Rechnung auf wirkliche Beobachtungen.

1) Wendet man die arithmetischen Reihen auf Beobachtungen an, z. B. auf die von einem Kometen, um seine Bahn zu bestimmen, so treten mehrere Umstände ein, welche einen andern Gang der Rechnung vortheilhafter machen. Man weiß nemlich schon aus der Natur der Aufgabe, daß nur eine oder höchstens zwei Wurzeln möglich sind, und daß es deswegen überflüßig ist, in der Gegend der Wurzeln so viele Ordinaten zu entwickeln als nothwendig sind, um eine deutliche Uebersicht über alle Krümmungen der krummen Linie zu erhalten. — Auch weiß man, daß selbst die genauesten Beobachtungen nie mathematisch genau sind, und daß, wann das Problem vom fünften Grade ist, schon der Beobachtungsfehler wegen, die fünften Differenzen nicht beständig werden können. Hiezu kommt noch, daß man bei den Aufgaben aus der angewandten Mathematik, gewöhnlich Voraussetzungen macht, die nicht ganz wahr sind, die man aber annimmt um die Rechnung möglichst einfach und leicht zu halten. So nimmt man z. B. bei den Kometen an, daß das Stück der Bahn, welches man beobachtet hat, ein Stück von einer Parabel sey, obschon es wirklich ein Stück von einer Ellipse ist. Der Unterschied ist indeß

nicht

nicht sehr bedeutend, und die Rechnung für die Parabel ist leichter. Aber wenn man die Bahn auch als eine Ellipse berechnen wollte, und die Beobachtungen wären völlig scharf, so würde man doch auf keine reine arithmetische Reihe von der Ordnung kommen, von welcher die Aufgabe ist, weil wegen der Störungen der andern Himmelskörper, diese in keinen reinen Kegelschnitten gehen.

Aus diesen Gründen entwickelt man daher nie so viele Ordinaten als nothwendig sind, um die beständigen Unterschiede zu finden, welches bei dem Cometen-Problem auch schon deswegen beschwerlich seyn würde, da dieses auf eine arithmetische Reihe von einer ungemein hohen Ordnung führt.

Sobald man aber nicht so viele Ordinaten entwickeln will als nothwendig sind, um beständige Differenzen zu finden, so ist es auch nicht nöthig, daß man die Abscissen so wählt, daß sie unter sich wieder eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden, und man kann die Ordinaten dann nach Gefallen da aufrichten, wo es einem am besten scheint, damit man die Krümmung der krummen Linie in der Nähe des Durchschnittspunkts mit den wenigsten Zahlen erfahre. So hätte man z. B. bei der Aufgabe in §. 55. die Wurzel der Gleichung bis auf 6 Stellen auf folgende kürzere Weise erhalten können. Als durch die Ordinaten 4,3 und 4,4 gefunden war, daß die Wurzel etwas größer als 4,359 seyn würde, so hatte man nur die Ordinate für 4,36 zu entwickeln, welche — 0,001956 gab. Diese und die Ordinate von 4,4 geben durch den Regula de Tri-Satz, die Wurzel zu 4,3600442, also bis auf 6 Stellen genau. Hätte man zun noch ein Dutzend Stellen genau haben wollen, so hätte man die neue Ordinate nicht bei 4,359 entwickelt, wie wir dort thaten, sondern gleich bei 4,36005, und hätten diese dann wieder mit der von 4,36 verbunden, wodurch man wahrscheinlich die Wurzel bis auf 18 oder 20 Stellen würde gefunden haben.

Ich will, um dieses mit einem wirklichen Beispiele zu erläutern, die arithmetischen Reihen auf die Berechnung eines Cometen anwenden, und hiezu den von 1757 wählen, und die Beobachtungen und Zahlen so annehmen, wie La Lande sie in seiner Astronomie, Th. 3., S. 246, angibt.

Bekanntlich gehören die Rechnungen über die Cometenbahnen zu den weitläuftigsten und schwierigsten in der ganzen Astronomie, und haben daher die größten Mathematiker und Astronomen beschäfftigt. Diese haben mehrere äußerst sinnreiche Methoden gefunden, die Bahn eines Cometen aus drei Beobachtungen zu berechnen. — Unter diesen scheint die mit arithmetischen Reihen höherer Ordnung, die einfachste und leichteste zu seyn. Sie ist weitläuftig, allein dieses liegt in der Natur der Aufgabe, weil man immer Dreiecke hat, in denen nur eine Seite und nur ein Winkel bekannt ist; übrigens hat diese Methode den Vorzug, daß man gleich die entferntesten Beobachtungen wählen kann, und daß die Bahn gleich vollkommen scharf ist, wenn die Beobachtungen vollkommen scharf sind; welches bei den anderen Methoden nicht der Fall ist, weil man bei ihnen immer noch eine Voraussetzung annehmen muß, die nicht vollkommen wahr ist (z. B. daß man das Stück der Kometenbahn zwischen zwei Beobachtungen als gerade ansehen dürfe); deswegen

müssen

müssen die Beobachtungen immer nahe beisammen angenommen werden, und die Rechnung gibt daher nur eine beiläufige Bahn, die nachher durch neue Beobachtungen und neue Rechnungen aufs neue muß berichtigt werden.

Bei jeder Beobachtung eines Cometen, bestimmt man den Ort, wo er am Himmel steht. Da man zugleich den Ort der Sonne am Himmel kennt, so kennt man den Winkel der zwischen dem Cometen und der Sonne ist, von der Erde aus gesehen. Zugleich kennt man die Entfernung der Erde von der Sonne. Man kennt also in dem Dreieck, welches die Erde, die Sonne und der Comet machen, eine Seite und einen Winkel. Man muß nun suchen, noch eine Seite in ihm kennen zu lernen: ist diese gefunden, dann ist das ganze Dreieck bestimmt, und die Berechnung der Cometenbahn hat weiter keine Schwierigkeit, sobald man drei Beobachtungen hat.

Man weiß, daß der Comet in einer Ellipse läuft, deren Brennpunkt im Mittelpunkt der Sonne liegt. Der leichteren Rechnung wegen, nimmt man an, daß das kleine Stück der Bahn, welches man beobachtet hat, eine Parabel sey. Ein Komet muß schon sehr lange und sehr genau beobachtet seyn, ehe man eine Abweichung von dieser Rechnungsannahme finden kann. Ferner weiß man, daß die Linie, welche aus dem Mittelpunkt des Cometen in den Mittelpunkt der Sonne gezogen wird, und die der radius vector heißt, beim Umlaufe des Cometen um die Sonne, in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt. Mit Hülfe dieser Säze kann man nun die Entfernung des Cometen von der Sonne, zur Zeit der ersten Beobachtung, auf folgende Weise finden:

Aus der scheinbaren Cometenbahn am Himmel, kann man schon beurtheilen, ob der Comet der Sonne näher war als die Erde oder nicht. Man nimmt nun hiernach in den ersten Beobachtungen an, daß sein Abstand 10000 gewesen, oder größer oder kleiner. Dann nimmt man einen zweiten Abstand von z. B. 6000 für die zweite Beobachtung an, und sieht, welche Parabel herauskomme. Man findet, daß in dieser Parabel die Zwischenzeit, zwischen der ersten und zweiten Beobachtung 19,09 Tage war. Nach den Beobachtungen war aber diese Zwischenzeit 14,60 Tage. Unterschied 4,40 Tage. Erste Ordinate.

Man nimmt nun den zweiten Abstand zu 6400 an; dieses gibt eine Zwischenzeit von 15,25 Tagen. Nach den Beobachtungen war diese 14,60 Tage. Unterschied 0,65 Tage. Zweite Ordinate. (Fig. 11, Taf. 2.)

Man nimmt nun den zweiten Abstand, etwa 6525. Dieses gibt eine Zwischenzeit von — 0,18 Tage. Dritte Ordinate..

Die drei Ordinaten trägt man auf die drei Absciſſen 6000, 6400 und 6525, und zieht durch ihre Endpunkte eine krumme Linie, wie in Fig. 11.

Da wo diese die Absciſſe schneidet, liegt die Wurzel oder das x der Gleichung. Der bekannte Regel de Tri-Satz gibt, daß die Sehne sie bei 6497,7 schneidet, x wird also nahe 6496 seyn. Entwickelt man bei 6496 wieder eine Ordinate, so wird diese + 0,0026 Tage. Diese mit den beiden vorigen wieder nach einem größern Maßstabe aufgetragen, zeigt, daß der Punkt x sehr nahe bei 6496,3 liegen wird, da die Sehne die Absciſſe bei 6496,42 schneidet.

Man

Man hat also durch die Entwickelung von vier Ordinaten, eine Parabel gefunden, welche zweien Beobachtungen und der Zwischenzeit genüge thut. Dieses ist aber noch lange nicht die Parabel, welche man sucht, und die drei Beobachtungen nebst der Zwischenzeit darstellen muß.

Mit der gefundenen Parabel vergleicht man die dritte Beobachtung und findet, daß sie den von der Erde aus gesehenen Ort des Cometen, in Hinsicht seiner Länge, um 10°, und 4 Min. zu groß gibt. Erste Ordinate für die wahre Parabel.

Man nimmt nun den Abstand in der ersten Beobachtung statt 10000 zu 9700 an, und findet wieder mit 4 Ordinaten, daß der zweite Abstand dann 6587 seyn muß, wenn er der Zwischenzeit von 14,60 Tagen soll genüge thun. Man vergleicht wieder die dritte Beobachtung und findet den Fehler, der vorhin 10° war, nur noch 2°, 19′. Zweite Ordinate für die wahre Parabel.

Wählt man nun den Abstand 9610 für die erste Beobachtung, statt 9700, so findet man wieder mit 4 Ordinaten den Abstand der zweiten Beobachtung, welche der Zwischenzeit genüge thut. Man vergleicht wieder die dritte Beobachtung und findet den Fehler — 1°, 20′. Dritte Ordinate für die wahre Parabel.

Diese drei Ordinaten werden nach dem Maßstabe aufgetragen; man zieht durch sie eine krumme Linie. Diese schneidet die Abscisse bei 9643. Dieses ist der wahre Abstand des Cometen. Will man ihn noch genauer haben, so errichtet man hier noch eine Ordinate, und die Rechnung wird dann schon genauer seyn als die Beobachtungen.

Auf

Auf diese Weise ist in dem Dreieck zwischen Sonne, Erde und Mond, die zweite Seite gefunden, oder die Entfernung des Cometen zur Zeit der ersten Beobachtung, wobei die Entfernung der Erde von der Sonne, der Maßstab ist, und = 10000 gesetzt wird. — Man sucht nun wieder mit 4 Ordinaten, die Entfernung, welche der zweiten Beobachtung und der Zwischenzeit genüge thut, und findet dann eine Parabel, die auch zugleich die dritte Beobachtung darstellt, und also die wahre ist *).

§. 62.

Allgemeine Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen mit arithmetischen Reihen.

1) Diese Art, die Gleichungen aufzulösen, empfiehlt sich eben so sehr durch ihre Leichtigkeit, als durch ihre Allge=

*) Um auf diese Weise mit etwa 24 Ordinaten die wahre Parabel zu finden, so ist es gut, daß man durch Zeichnung und Construktion sich eine beiläufige Kenntniß der wahren Parabel verschafft. Dieses ist schon an sich sehr leicht, und der Rechner thut wohl, bei diesen weitläufigen Rechnungen alles zu benutzen, was sie abkürzen kann und ihm die Uebersicht erleichtert. Dieses Verfahren hat überdem den Vortheil, daß er, sobald er durch Construktion die beiläufige Lage der Cometenbahn kennt, er die Beobachtungen gleich vom Einflusse der Parellaxe und der Abirrung befreien kann, und so schon gleich in der ersten Rechnung vollkommen scharfe Elemente erhalten kann.

Allgemeinheit, da sie die Gleichungen von allen Graden auf dieselbe Weise auflöst, und den Rechner ohne alles Probiren und Tappen gerade zum Ziele führt. Sie ist eben so direkt wie ein Divisions-Exempel, in dem man den Quotienten auch theilweise sucht, wenn er rational ist — und näherungsweise, wenn er irrational ist.

Da alle Zahlen entweder in der Reihe

1, 2, 3, 4 . . .

oder in der Reihe 0,1 0,2 0,3 . . .

oder in der Reihe 0,01 0,02 0,03 . . .

. . . .

. . . .

vorkommen, und jede vorige Reihe in jeder folgenden wieder enthalten ist, so sieht man, daß man nothwendig jede Wurzel finden muß, so lange man eine dieser Reihen lange genug fortsetzt. Und dieses Fortsetzen geschieht durch bloßes Addiren und Subtrahiren, sobald man so viele Ordinaten entwickelt hat, daß man auf die beständigen Differenzen gekommen ist.

Will man die Wurzeln bis auf 4 Stellen haben, so nimmt man die Reihe 0,0001 0,0002 0,0003, und man ist sicher, daß sie sich in dieser finden. Allein hiebei müßte man Tausende von Zahlen vergeblich schreiben; da alle, welche nicht die Ordinate 0 geben, nicht weiter gebraucht werden. Um dieses unnöthige Zahlenschreiben zu vermeiden, so durchschreitet man die Linie in großen Stadien, um zu sehen, in welcher Gegend die Wurzeln liegen, da die beiden Zweige der Linie, welche nach beiden Seiten ohne Ende fortgehen, weiter kein Interesse für den Rechner haben.

Bei diesem Durchschreiten ist es völlig einerlei, für welche Zahlen man die ersten Ordinaten entwickelt, um die beständigen Unterschiede zu finden. Man gebraucht indeß immer die Zahlen aus der Reihe

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

weil sie die kleinsten, und folglich die bequemsten sind. Auch erhält man rechts und links von 0 immer gleiche Produkte, und man hat bei der Addition nur auf die Vorzeichen zu achten. Bei diesem ersten Durchschreiten nimmt man immer nur Zahlen mit einer Ziffer, welche man Zehntel, Ganze, Zehner oder Hunderter bedeuten läßt, je nachdem man der Gleichung ansieht, ob die Wurzeln sehr klein oder sehr groß seyn werden. Und gesetzt, man habe sich hierin geirrt, und die Linie statt mit Einern, mit Zehnern durchschnitten, so ist hiebei wenig verloren, denn da alle Zahlen dieselben bleiben, so hat man nur die Stelle des Komma zu ändern und aufs neue zu addiren.

Hat man auf diese Weise für die Gegend, wo die Wurzeln liegen, die Ordinaten gefunden, so zeichnet man sie nach dem Maßstabe und zieht die krumme Linie der Gleichung. Wo diese die Abscissenlinie durchschneidet, liegen die Wurzeln, und hier errichtet man eine neue Ordinate. Diese und die nächste zeichnet man in einen größern Maßstab, zieht durch sie die krumme Linie, und bestimmt mit einem Regula de Tri-Satz, wo die Sehne derselben die Abscissenlinie durchschneidet, und so fährt man fort, auf der Stelle, wo nach der Zeichnung die krumme Linie die Abscissenlinie durchschneidet, immer neue Ordinaten zu errichten, und diese in einem immer größern Maßstabe zu zeichnen, bis man die Wurzel auf so vielen Stellen gefunden, als man verlangt. Dieses alles ist indeß bloß Rechnungsabkürzung — blos Zahlenökonomie, wodurch die Methode, die an sich direkt ist, nicht indirekt wird.

Das Zeichnen der Linie ist für die Abkürzung der Rechnung sehr wesentlich, und hat zugleich das Angenehme, daß man gleich übersieht, wie viel Wurzeln möglich sind, wie viele unmöglich sind, und wo diese liegen. Eine arithmetische Reihe höherer Ordnung, hat in der Gegend, wo ihre Wurzeln liegen, ein so irreguläres Ansehen, daß man sich ohne Zeichnung unmöglich eine klare Vorstellung von ihr machen kann; besonders wenn einige Wurzeln nahe beisammen liegen oder gleich sind, wenn andere wieder entfernt von einander liegen oder unmöglich sind.

Dann ist es ferner für den Rechner wichtig, daß er bei dieser Art die Gleichungen aufzulösen, immer eine Probe für die Richtigkeit seiner Rechnung hat, durch die er sich überzeugen kann, daß die scheinbaren Irregularitäten der Reihe, ihren Grund in keinen Rechnungsfehlern haben. Eine bloße Subtraktion zeigt ihm, daß die entwickelten Ordinaten richtig sind, wenn sie nemlich die Differenz geben, welche die Höhe der Reihe fordert.

2) Weiß man indeß aus der Natur der Aufgabe, daß die Gleichung nur eine oder zwei mögliche Wurzeln haben kann, so wählt man ein anderes Verfahren um die Rechnung noch mehr abzukürzen. Man entwickelt nämlich in der Gegend, wo diese liegen, auf gutes Glück, eine Ordinate; dann eine zweite und endlich eine dritte; durch diese zieht man eine krumme Linie, und wo diese die Abscissenlinie durchschneidet, entwickelt man eine vierte,

und findet so mit 4 oder 5 Ordinaten die Wurzel auf so viel Stellen, wie man sie gebraucht. Es ist dieses das Verfahren, welches wir in §. 61. gezeigt haben. Man wendet es da besonders an, wo entweder die Gleichung sehr hoch ist, oder gar von einer irrationalen Ordnung, so daß es unmöglich ist, beständige Unterschiede zu finden.

Wenn man eine solche arithmetische Reihe von einer irrationalen Ordnung hat, so kann man sie auf einer nicht allzugroßen Stelle als eine Reihe 3ter, 4ter, 5ter Ordnung ansehen, und die Abscissen als eine erster Ordnung. Durch Addiren der 3ten, 4ten, 5ten Unterschiede, kann man sie dann noch eine Strecke rechts und links fortsetzen, ohne daß die Zahlen bedeutend unrichtig werden. So hätten wir bei der Cometen-Rechnung die Abscissen so wählen können, daß sie unter sich eine arithmetische Reihe erster Ordnung gebildet. Vier Ordinaten hätten dann die dritten Differenzen gegeben, und durch Addiren und Subtrahiren hätten wir dann an jeder Seite noch 6 oder 10 Ordinaten entwickeln können, die noch beiläufig genau gewesen. So haben Ideler und Hobert die trigonometrischen Linien als eine arithmetische Reihe siebenter Ordnung angesehen; obschon sie von einer irrationalen Ordnung sind, und erleichterten sich durch diesen Kunstgriff ihre Rechnungen in einem hohen Grade, wie wir dieses im folgenden Abschnitte sehen werden.

Man sieht, daß die sogenannte Regula Falsi weiter nichts ist, wie eine unvollkommene Auflösungsart mit arithmetischen Reihen, die um so unvollkommner ist, je mehr mögliche Wurzeln eine Gleichung hat. Zudem ist der Name nicht ganz schicklich von den alten Cossisten gewählt worden, welche freilich die arithmetischen Reihen

höherer

höherer Ordnung damals nur noch sehr unvollkommen kannten.

So viel ich weiß, ist Lagny (berühmt durch seine großen Kreisrechnungen) der erste gewesen, welcher eine Abhandlung über die arithmetischen Reihen schrieb, und ihre Anwendung bei der Auflösung der Gleichungen zeigte.

Nachher hat sich La Grange lange mit ihnen beschäfftigt, und mehrere Abhandlungen darüber geschrieben. — Kramp widmet ihnen ein eigenes Kapitel in seiner Arithmetique universelle; und Klügel handelt hierüber sehr ausführlich in seinem Wörterbuch, unter dem Artikel Gleichung. (Th. 2. S. 450 und 484.)

In dem Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra, handelt er in der vierten Unterabtheilung: Von der arithmetisch geometrischen Construktion der Gleichungen. (Th. 1. S. 142.) Hier wird gezeigt, daß wenn man einige Werthe einer gegebenen Gleichung für die unbekannte Größe x berechne, und man trüge diese als Ordinaten auf eine gerade Linie, so könne man durch die Endpunkte derselben eine krumme Linie ziehen, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Absciße darstellen. Die Abstände ihrer Durchschnittspunkte von dem Anfange der Abscißenlinie, geben die Wurzeln der Gleichung desto genauer, je vollkommner die Zeichnung ist. In Fig. 27. und 28. sind zwei solcher arithmetischen Linien abgebildet. Die Zeichnungen sind aber nicht nach einer bestimmten Gleichung entworfen, weil Hr. Klügel fürchtete, daß die Ordinaten für den Raum der Zeichnung zu groß werden würden. Er bemerkt, daß die geometrische Abbildung

der

der Gleichungen, sehr geschickt sey, die Theorie derselben zu erläutern, und zeigt wie viele Biegungen möglich sind, wie durch Veränderung des Absolut-Gliedes, zwei ungleiche Wurzeln sich immer näher kommen, bis sie bei der Berührung gleich werden, und endlich unmöglich, u. s. w.

Auch lehrt Herr Klügel, wie man mit bloßen geraden Linien die Werthe einer Gleichung construiren könne, und zeigt dieses in Fig. 29, erklärt aber zugleich, daß diese Methode sehr mühevoll wäre. Dann führt er noch historisch an, daß nach dieser Methode Instrumente mit verschiebbaren Linealen, ungefehr so wie Storchschnäbel, wären angegeben worden, womit man den Durchschnittspunkt mechanisch zeichnen konnte, und schließt mit der Bemerkung, daß diese Instrumente mehr sinnreich als brauchbar wären. Auch war das Angeführte nur für Gleichungen des zweiten Grades eingerichtet.

Die Methode, Rechnung und Zeichnung auf die Weise mit einander zu verbinden, wie wir oben gelehrt haben, wird nicht erwähnt. Es scheint daher, daß sie wenig bekannt seyn muß, da sie der Aufmerksamkeit eines so gelehrten Mathematikers entgangen ist.

§. 63.

Es scheint nicht, daß sich die Auflösung der höheren Gleichungen noch mehr wird abkürzen lassen, und wirklich läßt diese Methode in Hinsicht der Bequemlichkeit und der Schnelligkeit, wohl wenig mehr zu wünschen übrig.

Wir fanden oben bei der Untersuchung über die Natur der arithmetischen Reihen (§. 40.), daß wenn die Differenz, die Höhe der Reihe, die Größe eines Gliedes, und die des Anfangsgliedes gegeben sey, man die Entfernung des gegebenen Gliedes vom Anfangsgliede bestimmen könne.

Bei der Auflösung der Gleichungen haben wir von diesem Lehrsatze keinen Gebrauch machen können, weil wir das Anfangsglied der Reihe nicht kannten; nemlich das Glied, dem gegenüber alle Reihen, die zu einem Systeme gehören, gleiche Glieder haben, und dessen Verhältnißzähler $= 0$ ist. Wäre dieses Glied bekannt, so könnte man direkt bestimmen, wie weit ein gegebenes Glied von einem andern Gliede der Reihe liege, dessen Werth $= 0$ ist, wo also eine Wurzel liegt. Indeß würde dieses doch nur in theoretischer Hinsicht interessant seyn, da die Rechnung hiedurch weder kürzer noch bequemer würde.

§. 64.

Summirung unendlicher Decimalbrüche, die wiederkehrende Ziffern haben.

1) Wenn man Zähler und Nenner eines Bruchs mit derselben Zahl dividirt, so bleibt der Werth des Bruchs ungeändert, und es ändert sich nur seine Form.

Wenn die Zahl seinem Nenner gleich ist, so erhält man einen Decimalbruch. Wird $\frac{3}{4}$ mit der Zahl 4 in Zähler und Nenner dividirt, so erhält man $\frac{0,75}{1,00}$.

Wenn die Zahl im Zähler nicht aufgeht, so erhält man einen Decimalbruch mit wiederkehrenden Ziffern.

Z. B. $\frac{1}{9}$ gibt 0,11111 ....

$\frac{1}{99}$ gibt 0,010101 ....

$\frac{3}{7}$ gibt 0,428571 428571 ....

Man wird hiemit nie zu Ende kommen, sondern dieselben Ziffern werden immer wiederkehren.

Allein,

Allein, obschon wir den Decimalbruch nie völlig darstellen können, so wissen wir doch, daß der Werth des ersten Bruchs genau $\frac{1}{9}$ ist, der des zweiten genau $\frac{1}{99}$, der des dritten genau $\frac{3}{7}$.

2) So wie man jeden Bruch in einen Zehntheiligen verwandeln kann, der im Nenner eine 1, und dann lauter Nullen hat, so kann man auch jeden Bruch in einen Neuntheiligen verwandeln, das heißt: in einen solchen, der im Nenner lauter Neunen hat, wie z. B. $\frac{428571}{999999}$.

Das Verfahren hiezu ist ganz einfach:

Der Bruch $\frac{1}{9}$ ist $= 0{,}111111\ldots$

$\frac{1}{99}$ ist $= 0{,}01010101\ldots$

$\frac{1}{999}$ ist $= 0{,}001001001\ldots$

$\frac{1}{9999}$ ist $= 0{,}000100010001\ldots$

$\frac{1}{99999}$ ist $= 0{,}0000100001\ldots$

$\frac{1}{999999}$ ist $= 0{,}000001000001\ldots$

Der Bruch $\frac{4}{9}$ ist das Vierfache der Reihe $0{,}1111\ldots$
also: $0{,}4444.$

Der Bruch $\frac{3}{99}$ ist das Dreifache der Reihe $0{,}010101\ldots$
also: $0{,}030303\ldots$

Der Bruch $\frac{54}{99}$ ist das 54fache der Reihe $0{,}0101\ldots$
also: $0{,}545454\ldots$

Wenn man also eine Reihe hat wie $0{,}5454\ldots$ die aus einem unendlichen Decimalbruche mit wiederkehrenden Ziffern besteht, so weiß man, daß sie 54mal größer seyn wird, als die Reihe $0{,}010101$, deren Werth $\frac{1}{99}$ ist. Der Werth von diesem Decimalbruche wird daher auch 54mal größer seyn als $\frac{1}{99}$, also $\frac{54}{99}$.

3) Man sieht an diesem Beispiele, daß es keine Schwierigkeit hat, einen neuntheiligen Bruch anzugeben,

der einem unendlichen Decimalbruche mit wiederkehrenden Ziffern gleich ist.

Man nimmt nemlich eine Periode der wiederkehrenden Ziffern, und schreibt unter diese so viel Neune, als sie Stellen hat.

Hat man z. B. den Decimalbruch 0,428571 428571 ... so ist dieser 428571mal größer als der Bruch 0,000001000001 .... den wir in 2) dem Bruche $\frac{1}{999999}$ gleich fanden. Er ist daher $\frac{428571}{999999}$. Beide Zahlen sind durch 428571 theilbar, und geben hiemit dividirt den Bruch $\frac{3}{7}$.

Wenn wir demnach bei der Auflösung der Gleichungen auf unendliche Decimalbrüche mit wiederkehrenden Ziffern kommen, so ist es leicht, diese in endlichen neuntheiligen Brüchen darzustellen. Indem man dann Zähler und Nenner mit dem gemeinschaftlichen Theile dividirt, so erhält man den kleinstmöglichen Bruch, welcher einem solchen Decimalbruche gleich ist; so fanden wir im vorigen Beispiele, daß der Bruch $\frac{3}{7}$ dem unendlichen Decimalbruche 0,428571 428571 .... gleich sey.

4) Oft wird der Decimalbruch nicht gleich in den ersten Ziffern wiederkehrend, sondern die Perioden der wiederkehrenden Ziffern fangen erst später an, wie z. B. in folgendem 5,735454 ....

Ein solcher Bruch besteht jedesmal aus zweien, aus einem endlichen Decimalbruche 5,73, und aus einem unendlichen 0,005454 ...., der Werth von diesem ist $\frac{54}{9999}$ oder $\frac{6}{1111}$. Addirt man diesen Bruch zu jenem, so findet man: $5{,}73 + \frac{6}{1111} = 5\,\frac{21703}{111100}$.

Man sieht, daß auch in diesem Falle das Addiren unendlicher Decimalbrüche keine Schwierigkeit hat.

§. 65.

§. 65.

Das Summiren unendlich abnehmender geometrischer Reihen.

1) Nach dem vorigen Paragraph bildete der Bruch $\frac{1}{9}$ den Decimalbruch 0,1111 . . . .

Dieser ist die geometrische Reihe $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \ldots$ in der der Exponent $\frac{1}{10}$ ist, und das letzte Glied unendlich klein, oder 0.

Der Bruch $\frac{1}{99}$ bildete den Decimalbruch: 0,010101... Dieser ist die geometrische Reihe $\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \ldots$ mit dem Exponenten $\frac{1}{100}$, und dem letzten Gliede 0.

2) Im zweiten Theil hatten wir (S. 63.) den Satz: daß man jede geometrische Reihe summirt, wenn man das letzte Glied mit dem Exponenten multiplicirt, vom Produkt das erste abzieht, und den Rest dann mit dem Exponenten dividirt, den man um 1 vermindert hat.

Die geometrische Reihe $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$ ist eine Fallende. Kehrt man sie um, so ist sie eine Steigende, ihr Exponent ist dann 10, ihre Summe bleibt natürlich dieselbe.

Das erste Glied ist dann 0, das letzte $\frac{1}{10}$. Dieses mit dem Exponenten 10 multiplicirt, gibt 1. Hievon das erste Glied 0 abgezogen, bleibt 1. Dieses mit dem Exponenten dividirt, den man vorher um 1 vermindert hat, gibt für die Summe der Reihe $\frac{1}{9}$.

Auf dieselbe Weise findet man für die Summe der Reihe $\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$ den Bruch $\frac{1}{99}$.

3) Man sieht, daß wir auch die Decimalbrüche mit wiederkehrenden Ziffern, als unendlich abnehmende geometrische Reihen hätten betrachten können, deren Summe wir auf dieselbe Weise gefunden hätten, wie solches (§. 62. Theil II.) ist gezeigt worden.

Fängt die abnehmende geometrische Reihe mit einer ganzen Zahl an, so ist das Verfahren dasselbe. Z. B. die Reihe $48 + 30 + 7\frac{1}{2} \ldots$ hat zum Exponenten $\frac{8}{5}$. Das letzte Glied 48 mit $\frac{8}{5}$ multiplicirt, gibt $76\frac{4}{5}$. Hievon das erste Glied 0 abgezogen, läßt $76\frac{4}{5}$. Dieses dividirt mit $\frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$, gibt für die Summe der Reihe 128.

4) Wir hatten oben, daß die Reihe $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} \ldots$ dem Bruche $\frac{1}{9}$ gleich sey.

Eben so ist die Reihe $\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} \ldots$ dem Bruche $\frac{1}{7}$ gleich.

Der Exponent ist $\frac{1}{8}$, kehrt man die Reihe um, so wird er 8. Mit ihm das höchste Glied multiplicirt, gibt 1, und dieses mit $8 - 1 = 7$ dividirt, gibt $\frac{1}{7}$.

Man kann dasselbe auch durch eine wirkliche Division zeigen. Die Einheit mit 7 dividirt, gibt $\frac{1}{7}$. Theilt man sie vorher in 8 Achtel, und dividirt dann, so erhält man folgendes:

7) 8 Achtel (gibt $\frac{1}{8}$

7

und 1 Achtel bleibt Rest, welches noch mit 7 zu theilen ist.

Dieses ist 8 Vier und sechszigtheil.

Divid. mit 7 gibt $\frac{1}{64}$

und 1 Vier und sechszigtheil bleibt Rest.

Dieses ist 8 fünfhundert Zwölftheil.

Divid. mit 7 gibt $\frac{1}{512}$ u. s. w.

Man

Man sieht, daß man die Division ohne Ende fortsetzen kann, und dann die Reihe erhält $\frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \frac{1}{512} \ldots$ welche dem Bruche $\frac{1}{7}$ gleich ist.

5) Die Summe der Reihe $1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} \ldots$ ist $= 1\frac{2}{3}$. Daß der Bruch $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} \ldots = \frac{2}{3}$ sey, läßt sich ebenfalls durch eine Division zeigen.

Man theile 2 Einheiten durch 3, so erhält man $\frac{2}{3}$. Man theile vorher diese 2 Einheiten in 10 Fünftel, und dividire dann mit 3, wobei man aber nie den Quotienten so hoch nimmt als man kann, damit man immer hinlänglich große Reste behält, um die Division fortsetzen zu können.

3) 10 Fünftel ($\frac{2}{5}$
6
4 Fünftel Rest, diese sind 20 fünf und zwanzigstel.
3) 20 25tel ($\frac{4}{25}$
12
8 Rest, diese sind 40 hundert fünf u. zwanzigstel.
3) 40 125tel ($\frac{8}{125}$
24
16 125tel Rest u. s. w.

Man sieht, daß man auf diese Weise durch die Division den Bruch $\frac{2}{3}$ in die Reihe $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} \ldots$ verwandeln kann.

Daß man die Division ohne Ende fortsetzen könne, bezweifelt wohl niemand. Eher könnte es zweifelhaft scheinen, ob wirklich der Rest zuletzt verschwindend klein würde. Man kann sich hievon leicht überzeugen, wenn man die beiden letzten Reste mit einander vergleicht. Der Vorletzte ist $\frac{40}{125}$, und der Letzte nur noch $\frac{16}{125}$, und so werden die Reste immer abnehmen, bis sie zuletzt verschwinden.

Daß es übrigens bei der Division erlaubt ist, den Quotienten nicht so hoch zu nehmen, als man kann, sieht man leicht an einem Beispiele. 24 mit 8 dividirt, gibt 3. Man kann aber die Division auch auf folgende Weise anstellen:

```
8) 24 (   2,6
   16       38
   --        20
   80     -----
   48     3,000
   --
   32
   24
   --
    80
    64
   ---
   160
```

Man erhält immer denselben Werth für den Quotienten, nur in einer andern Form, und unter denen unendlichen Formen, die für die Zahlen möglich sind, wählt der Rechner immer diejenigen aus, welche ihm zu seinem Zwecke am bequemsten sind.

§. 66.

Rechnungsvortheile beim Multipliciren und Dividiren.

Da wir im folgenden Abschnitte große Multiplications- und Divisions-Exempel haben werden, so ist es hier der schicklichste Ort, einige Rechnungsvortheile anzuführen, deren man sich dabei bedienen kann.

1) Die

1) **Die verkürzte Multiplikation.** Wenn man zwei Zahlen miteinander zu multipliciren hat, wovon die eine mehr Decimalstellen als die andere hat, so kann man die Multiplication, unbeschadet der Genauigkeit, auf folgende Weise abkürzen:

$$\begin{array}{r} 7{,}65340958 \\ \times\ 2{,}56307 \\ \hline 1530681916 \\ 382670479 \\ 45920457 \\ 2296022 \\ 53573 \\ \hline 19{,}61622447 \end{array}$$

Das Produkt hat man dann wieder bis auf 8 Stellen genau — will man es aber bis auf mehr Stellen genau haben, so muß man auf die gewöhnliche Weise multipliciren. Ueberhaupt ist der Vortheil der abgekürzten Multiplication nicht groß, weil man immer auf die Decimalstellen Acht geben muß — und man hat auf die gewöhnliche Weise ein Exempel eben so geschwinde multipliciret und mit weniger Mühe, weil die Aufmerksamkeit nicht auf zwei Gegenstände zu gleicher Zeit braucht gerichtet zu seyn.

2) **Die abgekürzte Division.** Diese besteht darin, daß man, sobald man an den Dividendus Nullen anhangen muß, um die Division fortsetzen zu können, statt diesem am Divisor jedesmal eine Stelle wegstreicht.

Beispiel: 3,716048) 7,632035 (2,053804 . . . .

```
7432096
-------
 199939
 185802
 ------
  14137
  11148
  -----
   2989
   2972
   ----
     17
     14
     --
      3
```

§. 67.

Rechnungsvortheile beim Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln.

1) Das erste, worauf man kam, um sich dieses zu erleichtern, war die Verfertigung von Quadrat- und Cubiktafeln, welche man, wie in §. 48. ist gezeigt worden, durch bloßes Addiren berechnen konnte. Die beßten sind die, welche bei Didot in Paris herausgekommen sind. Sie enthalten alle Quadrat- und Cubikwurzeln von 1 bis 10000.

Wenn die Wurzel einer Zahl größer als 10000 ist, so findet man sie zwar nicht mehr in den Tafeln, allein es ist denn doch leicht, mit Hülfe der Tafeln, die Wurzeln auch von solchen Zahlen zu finden, die nicht mehr in den Tafeln enthalten sind.

Gesetzt,

Gesetzt, man verlangt die Quadratwurzel aus 2 auf 4 Stellen, also die Wurzel aus 2,000000 so geben die Taf. als nächste Wurz. 1,414 d. Q. 1,999396 abgezogen
zum Rest 0,000604 läßt.

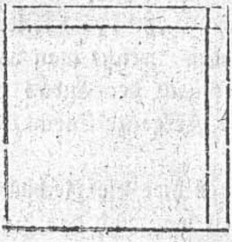
Will man die Wurzel bis auf 6 Stellen haben, so sieht man das Gefundene als den ersten Theil der Wurzel an, und sucht das übrige auf die gewöhnliche Weise.

2828) 60400 (1,414 21
• 56564
383600
28284) 282841
100759

Wollte man die Wurzel bis auf 11 Stellen finden, so brauchte man nur mit dem letzten Divisor 28284 fortzufahren, den Rest 100759 zu dividiren. Der Unterschied zwischen einer solchen Division und dem Ausziehen der Wurzel, ist so klein, daß er nur 2 Einheiten in den zehntausend Milliontheilchen beträgt.

Man findet auf diese Weise die Wurzel zu 1,41421 35623, und multipliciret man diese Zahl mit sich selber, so erhält man 1,999 999 999 79. Welches nur 2 in der zehnten Stelle abweicht.

Die Ursache hievon sieht man leicht ein, sobald man sich an die Figur des binomischen Lehrsatzes erinnert.



Wenn man das Quadrat vom ersten Theil der Wurzel vom ganzen Quadrat abzieht, so bleibt das kleine Quadrat vom zweiten Theil, und die beiden Rechtecke übrig, welche das doppelte Produkt vom ersten Theil in den zweiten sind. Ist das Quadrat vom ersten Theil nahe so groß, wie das ganze Quadrat, so fehlt man natürlich nur sehr wenig, wenn man nur die beiden Rechtecke sucht, und das kleine Quadrat vernachläßigt, weil es so äußerst wenig beträgt.

2) Der Gebrauch der Tafeln beim Ausziehen der Cubikwurzeln, ist gerade derselbe.

Gesetzt, man verlangt die Cubikwurzel von 3 bis auf 4 Stellen; so findet man diese in den Tafeln zu 1,442.

Will man die Wurzel bis auf 8 Stellen haben, so verfährt man auf folgende Weise:

$$1{,}442^3 \;)\; 3{,}000\,000\,000 \;(\; 1{,}442$$
$$\underline{2{,}99\,844\,2888}$$
$$1442^2 . 3 = 6238092$$
$$\underline{+\;1442}$$
$$6239534 \;)\quad 1557\,112 \;)\; 2495$$

Die Wurzel findet sich dann durch eine einfache Division sehr nahe zu 1,4422495, weil nach dem binomischen Lehrsatze, der Cubus des zweiten Theils und die beiden Parellilipipeden, welche man vernachläßigt, sehr unbedeutend sind, sobald der Cubus des ersten Theils nahe so groß ist wie der ganze Cubus, aus dem man die Wurzel zieht.

Die Tafeln kürzen hier die Rechnung auf eine doppelte Weise ab, weil man auch das Quadrat für 1,442, welches

welches man bei der Rechnung gebraucht, gleich neben dem Cubus findet, da Wurzel, Quadrat und Cubus in den Tafeln nebeneinander stehen.

Die eben gefundene Cubikwurzel ist bis auf 8 Stellen, um keine Einheit unrichtig. Bis auf 10 Stellen ist sie nemlich: 1,4422 49570.

§. 68.

Die Potenzen.

1) Die Potenzen einer Zahl bilden eine geometrische Reihe, in der ein Glied dem Exponenten gleich ist. Dieses Glied heißt: die Grundzahl (Basis).

So ist z. B. in der Reihe 5 : 25 : 125 : 625 ..... der Exponent 5 und die Basis 5.

Die Potenz einer Zahl zeigt daher an, wie oft die Grundzahl mit sich selber multiplicirt wurde. Man bemerkt sie mit einer kleinen Ziffer oben an die rechte Seite der Zahl, und nennt diese kleine Ziffer: den Exponenten. Z. B. 5^3 heißt: 5 . 5 . 5 oder 125. 5^4 heißt 5 . 5 . 5 . 5.

2) Wenn man also die Grundzahl immer mit sich selber multiplicirt, so findet man immer höhere Potenzen.

5 mal 5 = 25 oder 2te Potenz von 5.
5 mal 5 mal 5 = 125 oder 3te Potenz von 5.
5 mal 5 mal 5 mal 5 = 625 oder 4te Potenz von 5.

Und umgekehrt dividirt man diese Potenzen mit der Grundzahl, so erhält man immer niedrigere Potenzen.

625 divid. mit 5 gibt 125 oder die 3. Potenz von 5.
125 divid. mit 5 gibt 25 oder die 2. Potenz von 5.
25 divid. mit 5 gibt 5 oder die 1. Potenz von 5.
5 divid. mit 5 gibt 1 oder die 0. Potenz von 5.
1 divid. mit 5 gibt $\frac{1}{5}$ oder die — 1. Potenz von 5.
$\frac{1}{5}$ divid. mit 5 gibt $\frac{1}{25}$ oder die — 2. Potenz von 5.
$\frac{1}{25}$ divid. mit 5 gibt $\frac{1}{125}$ oder die — 3. Potenz von 5.
$\frac{1}{125}$ divid. mit 5 gibt $\frac{1}{625}$ oder die — 4. Potenz von 5.

3) Man sieht hieraus, daß jede Zahl auf der Potenz 1 sich selber gleich ist.

Ferner, daß jede Zahl auf der Potenz 0 der Einheit gleich ist, und daß alle Zahlen auf der Potenz 0 einander gleich sind.

$$7^0 = 1$$
$$8^0 = 1$$
$$100^0 = 1$$

4) Zugleich sieht man: daß wenn man die Potenzen derselben Grundzahl mit einander multipliciren soll, man ihre Exponenten nur zueinander zu addiren hat:

z. B. $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$
und $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$

Beide multiplicirt, geben
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7 = 78125$$

Und umgekehrt: Soll man die Potenzen derselben Grundzahl miteinander dividiren, so hat man ihre Exponenten nur von einander abzuziehen.

z. B. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^7 = 78125$
soll durch $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ dividirt werden,
so hat man $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ zum Quotienten.

Auf diese Weise wird die Multiplication zweier Potenzen derselben Grundzahl in eine Addition, und die

Division

Division in eine Subtraction ihrer Exponenten verwandelt.

Dasselbe ist der Fall, wenn mehrere Potenzen derselben Grundzahl miteinander sollen multiplicirt oder dividirt werden. Z. B. 5^4 mal 5^3 mal $5^6 = 5^{13}$. Ebenfalls 5^{13} dividirt mit 5^3 und $5^4 = 5^6$. Man sieht leicht, wie sehr hiedurch die Rechnung mit Potenzen erleichtert wird.

5) Aus 2 folgt: daß die Potenzen mit verneinten Exponenten, Brüche sind.

$$\text{Z. B. } 5^{-2} = \tfrac{1}{25} = 5^2$$

$$\text{Ferner: } 5^{-4} = \tfrac{1}{625} = 5^4$$

Man kann also jeden Bruch, der die Einheit zum Zähler hat, als eine ganze Zahl mit verneinten Exponenten schreiben. Z. B. $\frac{1}{125}$ ist 5^{-3} oder 5^2.

6) Multiplicirt man den Exponenten einer Potenz mit 2, so erhält man das Quadrat der Potenz. Z. B. $5^{4 \cdot 2} = 5^8$.

Multiplicirt man den Exponenten mit 3, so erhält man den Cubus der Potenz. Z. B. $5^{2 \cdot 3} = 5^6$.

Multiplicirt man ihn mit 4, so erhält man das Biquadrat der Potenzen.

Umgekehrt: Dividirt man den Exponenten einer Potenz mit 2, so erhält man die Quadratwurzel derselben. Z. B. $5^{8:2} = 5^4 = 625$.

Dividirt man mit 3, so erhält man die Cubikwurzel der Potenz. Z. B. $5^{6:3} = 5^2 = 25$.

Dividirt man mit 4, so erhält man die vierte Wurzel der Potenz. Z. B. $5^{8:4} = 5^2$.

Die Division mit 5 gibt die fünfte Wurzel, u. s. w.

7) Man sieht hieraus, daß der Divisor des Exponenten anzeigt, wie vielste Wurzel aus der Zahl soll gezogen werden.

So heißt z. B. $5^{7:2}$, daß 5 auf die 7te Potenz soll erhoben, und dann aus dieser Zahl die Quadratwurzel gezogen werden.

So heißt: $8^{5:3}$ = daß 8 auf die fünfte Potenz soll erhoben werden, und dann die Cubikwurzel daraus gezogen.

So heißt: $12^{3:10}$, daß 12 auf die dritte Potenz soll erhoben werden, und dann aus dieser Zahl die zehnte Wurzel gezogen.

Man hätte dieses auch in Bruchform schreiben können. Z. B. $5^{3\frac{1}{2}}$; ferner $8^{1\frac{2}{3}}$ und $12^{0/3}$. Allein die Sache wäre dann nicht so klar gewesen, und es ist besser, die erste Art der Bezeichnung beizubehalten, und wenn die letztere vorkommt, sie in die erstere zu verwandeln. Wenn wir daher 5 auf die Potenz $3\frac{1}{2}$ erheben sollen, so schreiben wir dieses lieber: $5^{7:2}$. Man sieht dann gleich, daß dieses bedeutet, daß 5 auf die siebente Potenz soll erhoben werden, und dann aus dieser Zahl die Quadratwurzel gezogen. Es ist also dasselbe, als wenn man schreibt: die Quadratwurzel 78125.

8) Wir haben auf diese Weise einen deutlichen Begriff davon erhalten, was es heißt: eine Zahl auf einen Exponenten zu erheben, der keine ganze Zahl ist. Nemlich 5 auf den Exponenten $\frac{3}{10}$ erheben, heißt: aus 5.5.5 die zehnte Wurzel ziehen.

Wenn man den Begriff einer Potenz so bestimmt: Die Potenz einer Zahl zeigt an, wie oft man die

die Zahl mit sich selber multipliciren soll, und wie vielste Wurzel dann aus dem Produkt soll gezogen werden; so ist er ganz allgemein, und paßt auf alle ganze und gebrochene Zahlen. Z. B. $5^{3:1}$ heißt 5 dreimal mit sich selber multipliciren, und dann nie erste Wurzel aus der Zahl ziehen. Aus 125 die erste Wurzel gezogen, gibt 125.

Eben so $5^{4:2}$ ist so viel als $5 . 5 . 5 . 5 = 625$, und hieraus die Quadratwurzel gezogen ist $= 25$.

Ferner $5^{7:2}$ heißt aus 78125 die Quadratwurzel gezogen, welche 278,38 .... ist.

Das Erheben einer Zahl auf eine Potenz, ist demnach jedesmal mit einer Multiplication und mit dem Ausziehen der Wurzel von irgend einem Grade verknüpft, und jeder Exponent ist ein Bruch, in welchem der Zähler sagt, wie oft man die Zahl mit sich selber multipliciren soll, und der Nenner, wie vielste Wurzel dann ans dem Produkte soll gezogen werden. So heißt $5^{\frac{9}{10}}$ oder $5^{0,9}$ so viel als 5 soll 9 mal mit sich selber multiplicirt, und dann die zehnte Wurzel daraus gezogen werden.

9) Beim ersten Unterrichte in der Rechenkunst, wird blos von Quadrat- und Cubikzahlen gehandelt, also blos an der 2ten und 3ten Potenz. Man reicht dabei vollkommen mit dem Begriffe aus: daß wenn man eine Zahl 2 oder dreimal mit sich selber multiplicire, man von ihr die zweite oder dritte Potenz erhalte. Dieser Begriff ist indeß zu enge, wenn man in die höhere Rechenkunst kommt; er paßt nicht auf die Potenzen mit gebrochenen Exponenten, und

man kann nicht sagen: 5 auf der Potenz $3\frac{1}{2}$ heiße: 5 solle $3\frac{1}{2}$ mal mit sich selber multiplicirt werden.

Bestimmt man aber den Begriff so: daß der Exponent einer Zahl ein Verhältniß sey, dessen erstes Glied anzeige, wie oft man sie mit sich selber multipliciren soll, und dessen zweites bestimme, wie vielste Wurzel dann aus dem Produkte soll gezogen werden; so ist der Begriff völlig allgemein, und paßt auf alle Potenzen, ihre Exponenten mögen ganze oder gebrochene Zahlen seyn.

10) Wenn man daher verlangt: 7 soll auf den Exponenten 5 : 13' erhoben werden, so schreibt man dieses $7^{5:13}$ oder $7^{\frac{5}{13}}$. Man muß dann aus 7 . 7 . 7 . 7 . 7 oder aus 16807 die 13te Wurzel ziehen.

Wir können dieses nicht anders als mit Hülfe einer arithmetischen Reihe von der 13ten Ordnung, indem wir der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3, 4.... versuchen, ob ihre 13te Potenz = 16807 ist, und hiebei die Methode befolgen, die wir bei den arithmetischen Reihen gelehrt haben. Wir werden finden, daß die 13te Wurzel aus 16807 zwischen 2 und 3 liegt, und sehr nahe 2,1136 ist.

Hätten wir die Zahl $7^{0,532}$, so müssen wir 7 auf die 532te Potenz erheben, und dann aus dem Produkte die tausendste Wurzel ziehen. Wir könnten dieses zwar auf dieselbe Weise, allein mit einer unendlichen Rechnung, zu der man Tage und Wochen gebrauchen würde.

Glücklicherweise können wir diese Rechnungen ungemein abkürzen, sobald wir eine Tafel über die Potenzen der Zahl 10 haben.

Anmerkung. Beim Gebrauche verwechselt man häufig den Ausdruck: Potenz und Exponent. Man sagt eben so wohl: eine Zahl auf eine gewisse Potenz erheben; als man auch sagt: eine Zahl auf einen gewissen Exponenten erheben. 7^4 heißt eben sowohl: 7 auf die vierte Potenz erheben, als auch: 7 auf den Exponenten 4 erheben. — Der Ausdruck Exponent wird hier in einer anderen Bedeutung genommen, als bei den geometrischen Reihen. In der Reihe 7 : 49 : 343 : 2401 . . . . ist der Exponent 7. Die Grundzahl ist ebenfalls 7. Sagt man: daß die Zahl 7 auf den Exponenten 7 soll erhoben werden, so heißt dieses, daß sie sieben mal mit sich selber soll multipliciret werden: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 823543$. Man muß also immer untersuchen, ob von den Exponenten einer geometrischen Reihe, oder aber von dem Exponenten einer Grundzahl die Rede ist.

§. 69.

Die Potenzen von Zehn.

1) Unter allen Zahlen ist die Zahl Zehn für uns die wichtigste, weil sie die Grundzahl unsers Zahlensystems ist. Es wird uns die folgenden Rechnungen sehr erleichtern, wenn wir uns eine Tafel über ihre Potenzen berechnen, in der wir nur nachzusehen haben, auf welche Potenz wir die Zahl 10 erheben müssen, um jede gegebene Zahl zu finden.

$10^{\frac{1}{13}}$ heißt nach dem vorigen: die 13te Wurzel aus 10 ziehen.

$10^{\frac{1}{100}}$ oder $10^{0{,}01}$ heißt die hundertste Wurzel aus 10 ziehen.

Wir

Wir wollen bei diesen Rechnungen die Zahl 10 blos auf Decimalpotenzen erheben, das heißt auf solche, deren Nenner Zehntheile, Hunderttheile, Tausendtheile... der Einheit sind. Wir schließen also alle aus, welche die Form haben $10^{\frac{1}{13}}$ oder $10^{\frac{2}{11}}$ oder $10^{1\frac{3}{12}}$....

2) Zuerst wollen wir 10 auf die Potenz $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{1000}$.... erheben. Das heißt, wir ziehen die 10te, 100te, 1000te Wurzel aus 10, oder mit andern Worten: Wir suchen eine Zahl, die 10; 100; oder 1000mal mit sich selber multiplicirt, genau 10 gibt.

Die 10. Wurzel von 10 können wir mit Hülfe der arithmetischen Reihe finden, indem wir der Reihe nach die Zahlen 1,1; 1,2; 1,3 versuchen und finden, daß sie zwischen 1,2 und 1,3 liegt. Mit Hülfe des Regula de Trisatzes finden wir, daß sie 1,258... seyn wird. Bestimmen wir die beiden Ordinaten für 1,258 und 1,259, so finden wir, daß sie zwischen beiden liegt, aber am nächsten bei letzter Zahl. Mit Hülfe des Regula de Trisatzes finden wir, daß sie 1,25 89254 ist. Entwickeln wir noch einmal zwei Ordinaten, so finden wir, daß sie 1,258925 411794 ist.

Wir werden aber weniger Zahlen zu schreiben haben, wenn wir statt der 10ten Wurzel die fünfte suchen, und dann aus dieser die Quadratwurzel ziehen, wobei wir uns schon der berechneten Quadrattafeln bedienen können. Die fünfte Wurzel von 10 ist 1,584893 192465, und hieraus die Quadratwurzel ist 1,258925 411794.

3) Um $10^{0,01}$ oder um die hundertste Wurzel von 10 zu finden, müssen wir aus der zehnten wieder die zehnte Wurzel ziehen. Wir finden diese, indem wir zuerst aus

1,258925

1,258925 411794 die fünfte Wurzel ziehen, welche 1,047128548091 ist, und dann aus dieser die Quadratwurzel, die 1,023292992281 ist. Dieses ist nun 10 auf die Potenz 0,01 erhöht.

4) Zieht man aus dieser Zahl wieder die zehnte Wurzel, so findet man die tausendste Wurzel oder $10^{0,001}$. Aus dieser wieder die zehnte, gibt $10,^{0,0001}$.

Folgendes Täfelchen enthält alle Wurzeln von zehn bis zu zehn Millionsten.

$$
\begin{aligned}
10^{1,0} &= 10,000000\ 000000\\
10^{0,1} &= 1,258925\ 411794\\
10^{0,01} &= 1,023292\ 992281\\
10^{0,001} &= 1,002305\ 238078\\
10^{0,0001} &= 1,000230\ 285021\\
10^{0,00001} &= 1,000023\ 026116\\
10^{0,000001} &= 1,000002\ 302589.\\
10^{0,0000001} &= 1,000000\ 230259.
\end{aligned}
$$

Man sieht, daß es überflüßig ist, das Ausziehen der Wurzeln weiter fortzusetzen, sobald man nur bis zur zwölften Decimalstelle gehen will. Jede Wurzel besteht, wie man aus dem Täfelchen sieht, aus der Einheit und einem Decimalbruche. Dieser Decimalbruch hat die merkwürdige Eigenschaft, daß er sich einer beständigen Zahl um so mehr nähert, je kleiner die Potenz ist, auf welche man die Zahl 10 erhebt, so ist er für die Potenz 1 Milliontheil 0,00000 2302589, und für die Potenz 1 zehn Milliontheil 0,000000 230256, also genau zehnmal kleiner, wenn man nur bis zur zwölften Stelle geht.

Hätten wir bei dem Ausziehen dieser Wurzeln statt 12 Decimalstellen 24 genommen, und hätten statt der 10 Millionsten die 10 Billionste Wurzel aus 10 gezogen,

so

so hätten wir für diesen Decimalbruch folgende Ziffern gefunden: 2302585 092994.

5) Mit Hülfe des vorigen Täfelchen ist es nun leicht, die Zahl 10 auf den Exponenten 0,2; 0,3; 0,4 zu erheben.

$10^{0/1}$ ist = 1,258925 411794. Multipliciren wir diese Zahl mit sich selber, so erhalten wir $10^{0/2}$ = 1,584893 192465. Multiplicirt man diese Zahl wieder mit der vorigen, so erhält man $10^{0/3}$.

Eben so findet man für die Hunderttheile aus $10^{0/01}$ die Potenzen für $10^{0/02}$ für $10^{0/03}$ u. s. w. Durch die fortgesetzte Multiplicationen.

Man könnte sie ebenfalls durch die Division finden. Denn wenn man von $10^{1/0}$ die Zahl $10^{0/1}$ abzieht, so bleibt $10^{0/9}$ übrig, und 10^{1} durch $10^{0/1}$ dividirt, ist $\frac{10}{1,258925411794}$ = 7,943282347244. Nur würde dieses mühevoller seyn, da die Division weitläuftiger ist wie die Multiplication.

Aus dem vorigen Täfelchen ist das folgende blos durch eine Reihe von Multiplikationen gebildet.

Tafel der Potenzen von Zehn.

$10^{1/0}$	=	10,000000 000000
$10^{0/9}$	=	7,943282 347244
$10^{0/8}$	=	6,309573 444804
$10^{0/7}$	=	5,011872 336275
$10^{0/6}$	=	3,981071 705537
$10^{0/5}$	=	3,162277 660174
$10^{0/4}$	=	2,511886 431514
$10^{0/3}$	=	1,995262 314973
$10^{0/2}$	=	1,584893 192465
$10^{0/1}$	=	1,258025 411794

$10^{0,09} = 1,230268\ 770812$
$10^{0,08} = 1,202264\ 434617$
$10^{0,07} = 1,174897\ 554939$
$10^{0,06} = 1,148153\ 621496$
$10^{0,05} = 1,122018\ 454301$
$10^{0,04} = 1,096478\ 196142$
$10^{0,03} = 1,071519\ 305236$
$10^{0,02} = 1,047128\ 548091$
$10^{0,01} = 1,023292\ 992281$

$10^{0,009} = 1,020939\ 483708$
$10^{0,008} = 1,018591\ 388054$
$10^{0,007} = 1,016248\ 692870$
$10^{0,006} = 1,013911\ 385736$
$10^{0,005} = 1,011579\ 454259$
$10^{0,004} = 1,009252\ 886076$
$10^{0,003} = 1,006931\ 668851$
$10^{0,002} = 1,004615\ 790277$
$10^{0,001} = 1,002305\ 238078$

$10^{0,0009} = 1,002074\ 475336$
$10^{0,0008} = 1,001843\ 765724$
$10^{0,0007} = 1,001613\ 109228$
$10^{0,0006} = 1,001382\ 505837$
$10^{0,0005} = 1,001151\ 955538$
$10^{0,0004} = 1,000921\ 458319$
$10^{0,0003} = 1,000691\ 014168$
$10^{0,0002} = 1,000460\ 623073$
$10^{0,0001} = 1,000230\ 285021$

$10^{0,00009} = 1,000207\ 254133$
$10^{0,00008} = 1,000184\ 223775$
$10^{0,00007} = 1,000161\ 193947$
$10^{0,00006} = 1,000138\ 164649$
$10^{0,00005} = 1,000115\ 135882$
$10^{0,00004} = 1,000092\ 107645$
$10^{0,00003} = 1,000069\ 079939$
$10^{0,00002} = 1,000046\ 052762$
$10^{0,00001} = 1,000023\ 026116$

$10^{0,000009} = 1,000020\ 723480$
$10^{0,000008} = 1,000018\ 420850$
$10^{0,000007} = 1,000016\ 118225$
$10^{0,000006} = 1,000013\ 815605$
$10^{0,000005} = 1,000011\ 512991$
$10^{0,000004} = 1,000009\ 210386$
$10^{0,000003} = 1,000006\ 907782$
$10^{0,000002} = 1,000004\ 605183$
$10^{0,000001} = 1,000002\ 302589$

$10^{0,0000009} = 1,000002\ 072348$
$10^{0,0000008} = 1,000001\ 842085$
$10^{0,0000007} = 1,000001\ 611822$
$10^{0,0000006} = 1,000001\ 381560$
$10^{0,0000005} = 1,000001\ 151299$
$10^{0,0000004} = 1,000000\ 921038$
$10^{0,0000003} = 1,000000\ 690778$
$10^{0,0000002} = 1,000000\ 460518$
$10^{0,0000001} = 1,000000\ 230259$

Es würde überflüßig seyn, diese Tabelle weiter auszudehnen, da man für jede Potenz, die zehnmal kleiner ist, nur den Decimalbruch durch 10 zu dividiren braucht, so ist $10^{0,000000009} = 1,000000\ 207235$. Man hat also nur die Anzahl der Nullen hinterm Comma um eine zu vermehren.

§. 70.

1) Wir hatten im vorigen, daß wenn wir 10 auf die Potenz $10^{0,2}$ erheben wollten, wir $10^{0,1}$ mit $10^{0,1}$ multipliciren müßen. Da $10^{0,1} = 1,2589\ldots$ ist, so mußten wir $1,2589\ldots$ mit $1,2589\ldots$ multipliciren.

Hätten wir 10 auf die Potenz $10^{1,3}$ erheben wollen, so hätten wir 10^1 mit $10^{0,3}$ multipliciren müßen. Die erstere Zahl ist $= 10$, die zweite ist nach der Tafel $1,995262$, wenn wir die sechs letzten Decimalen weglassen. Beide mit einander multiplicirt, geben für $10^{1,3}$ die Zahl $19,95262$.

Hätten wir 10 auf die Potenz $1,37$ erheben sollen, so hätten wir die letzte Zahl $19,95262$ noch mit der Potenz $0,07$ multipliciren müßen, welche die Tafel zu $1,174897$ angibt. Wir hätten dann $10^{1,37} = 23,443\ldots$ gefunden.

2) Man sieht hieraus, daß es keine Schwierigkeit hat, mit Hülfe der vorigen Tafel die Zahl 10 auf jede beliebige Potenz zu erheben, sobald diese nur ein Decimalbruch ist. Soll man sie auf die Potenz $3,72156$ erheben, so hat man nach der Tafel .

$$\begin{array}{lr} 10^{3} & = 1000,000000000 \\ 10^{0,7} & = 5,011872336 \\ 10^{0,02} & = 1,047128548 \\ 10^{0,001} & = 1,002305238 \\ 10^{0,0005} & = 1,001151956 \\ 10^{0,00006} & = 1,000138165 \\ \hline \end{array}$$

Dieses mit einander multipliciret, gibt $10^{3,72156} = 5266,959759$

3) Wenn der Exponent sehr klein ist, auf den man die Zahl 10 erhebt, das heißt: daß er ohne völlig 0 zu seyn, doch nur um ein weniges größer als 0 ist, so nähert sich das Verhältniß zwischen ihm und dem Decimalbruche der auf die Einheit folgt, immer mehr dem beständigen von 1 zu 2,302585 . . . . .

Beispiel: $10^{0,0000003} = 1,000000\ 690778$
also wie 1 zu 2,30259
ferner: $10^{0,0000002} = 1,000000\ 460518$.
also wie 1 zu 2,30259
ferner: $10^{0,0000001} = 1,000000\ 230259$
also wie 1 zu 2,30259

Man kann sich dieses Verhältnisses mit Vortheil bedienen, wenn man einen Exponenten mit mehr als vier Decimalstellen hat. Z. B. 3,721561213i. Sobald man das Produkt der vier ersten gefunden, so multiplicirt die letzten 612131 mit 2,30259 und mit diesem Produkte, multiplicirt man dann das bereits gefundene.

So haben wir im vorigen Beispiele schon 5 Stellen am Exponenten, und $10^{3,72156}$ ist gleich 5266,959759. Für die übrigen 5 Stellen 12131 finden wir 0,000001213i mal 2,30259 = 0,0000279317. Multipliciren wir hiemit das Produkt 5266,959759, so finden wir die Zahl, welche gleich ist $10^{3,7215612131}$.

4) Die

4) Die ganze Zahl des Exponenten ändert, wie wir im vorigen gesehen haben, nicht die Ziffern des Produkts, sondern blos die Stelle des Comma.

$10^{0,72156}$ wird immer die Ziffern haben 5,266 959759, die Kennziffer mag 0 oder 1 oder 2 oder 3 oder 4.... seyn. Im ersten Fall wird die Zahl mit 1, im zweiten mit 100, im dritten mit 1000, im vierten mit 10000 multiplicirt: und das Comma um eine, zwei, drei oder vier Stellen mehr nach der rechten Hand gestellt. Weil man an ihr die Stelle des Comma erkennt, so wird sie die Kennziffer genannt. Der Decimalbruch, der auf die Kennziffer folgt, heißt: die Mantisse oder die Zugabe.

5) Wir hatten im vorigen Paragraph, daß eine Zahl auf einen negativen Exponenten erhoben, gleich sey einem Bruche, der im Zähler die Einheit, und im Nenner die Potenz jener Zahl habe. So war $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

10^{-3} würde also $\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$

und $10^{-3,72156}$ würde $\frac{1}{10^{3,72156}} = \frac{1}{5266,959}$.

Man kann diesen Bruch vermeiden, und statt seiner gleich einen Decimalbruch finden, wenn man dem Exponenten eine solche Form gibt, daß blos die Kennziffer verneint wird, die Mantisse aber bejaht bleibt. Denn:

Addirt man dieselbe Zahl zur Mantisse, die man von der Kennziffer abzieht, so bleibt der Exponent ungeändert. Wenn man zu dem Exponenten 3,72; 5 in der Mantisse addirt, so hat man 8,72, zieht man zugleich 5 in der Kennziffer ab, so hat man wieder 3,72.

Addirt man zu dem Exponenten $-3,72156$ in der Mantisse $+1,00000$, so wird diese $+0,27844$, zieht

man

man zugleich + 1 von der Kennziffer ab, so wird diese — 4. Der Exponent — 3,72156 ist also dem Exponenten — 4, — 0,27844 vollkommen gleich, und $10^{4,+0,27844}$ muß demnach 0,00019013 seyn. Dann die Kennziffer bestimmt die Stelle des Comma, und die Mantisse die Ziffern der Zahl, jene kann daher negativ seyn und diese positiv.

Die Zahl 0,00019013 bleibt in den Ziffern dieselbe, so lange die Mantisse dieselbe bleibt, aber die Stelle des Comma ändert sich mit der Kennziffer. Würde diese + 4, so würde die Zahl 00001,9013.

Solche Exponenten, an denen die Kennziffer bejaht, und der Decimalbruch verneint ist, werden von den Mathematikern halbbejahte genannt, und das Zeichen — bezieht sich blos auf die Kennziffer, z. B. — 4,27844. Hiebei ist nur die Kennziffer verneint, und die Mantisse nicht. Sollen beide verneint seyn, so werden sie in Klammern eingeschlossen, und das — Zeichen davor gesetzt. Z. B. — (3,72156) dieser Exponent ist ganz verneint, und dem vorigen halbverneinten gleich.

6) Es scheint indeß bequemer zu seyn und zugleich weniger zweideutig, wenn man eine ganze Zahl, z. B. 10 zum negativen Exponenten addirt, und sie dann mit dem — Zeichen dahinter schreibt. Statt — (3,72156) kann man denn schreiben 6,27844 — 10, und es ist beides die Kennziffer, und der Decimalbruch bejaht.

7) Folgendes Täfelchen zeigt bei wie vielster Stelle das Comma steht, je nachdem die Kennziffern des Exponenten bejaht oder verneint sind.

$10^0 = 1{,}0$	10^0 1,0
$10^1 = 10{,}0$	$10^{-1} = 0{,}1$
$10^2 = 100{,}0$	$10^{-2} = 0{,}01$
$10^3 = 1000{,}0$	$10^{-3} = 0{,}001$
$10^4 = 10000{,}0$	$10^{-4} = 0{,}0001$.

Hat der Exponent die Kennziffer 0,

so fällt die Potenz zwischen . . . 1 und 10
mit der Kennziffer 1 fällt sie zwischen 10 und 100
2 . . . . . . 100 und 1000
3 . . . . . . 1000 und 10000

Die Potenz wird daher immer links vom Comma eine Stelle mehr haben, als die Kennziffer des Exponenten Einheiten enthält.

Ist der Exponent negativ, und hat die Kennziffer 0,
so fällt die Potenz zwischen 1 und 0,1
mit der Kennziffer — 1 zwischen 0,1 und 0,01
. . . . . . — 2 zwischen 0,01 und 0,001
. . . . . . — 3 zwischen 0,001 und 0,0001

In diesem Falle werden also so viele Nullen nach dem Comma seyn, als die Kennziffer Einheiten hat.

Wäre aber blos die Kennziffer des Exponenten negativ, die Mantisse aber positiv, so wird eine Null weniger nach dem Comma seyn, als die negative Kennziffer Einheiten hat.

Die Logarithmen.

§. 71.

Im zweiten Theile haben wir die Lehre von den Logarithmen auf die Verbindung der arithmetischen Reihen gegründet, und gezeigt, daß jene die Verhältnisse in dieser zählt, wodurch denn auch der Name: Verhältnißzähler oder Logarithmen entstanden ist. (S. Th. 2. S. 66.)

2) Die arithmetische Reihe schreitet mit der Differenz 1 fort, die geometrische mit dem Exponenten, welcher der Grundzahl gleich ist, und da die Anfangspunkte in beiden Reihen gegeneinander über liegen, so werden beim Fortschreiten die Endpunkte auch immer gegen einander überbleiben.

3) So wie jene mit der Addition fortschreitet, so schreitet diese mit der Multiplication fort, und da in jener jede Zahl die Summe der Differenz; und in dieser jede Zahl das Produkt des Exponenten ist, so kommt man in beiden Reihen gleich weit vorwärts, man mag zwei Zahlen in der arithmetischen Reihe zu einander addiren oder in der geometrischen Reihe miteinander multipliciren. Die Summe von jenen und das Produkt von diesen, wird wieder gegeneinander über liegen.

4) Wenn man daher zwei solcher nebeneinander herlaufenden Reihen berechnet hat, und man sucht das Produkt zweier Zahlen in der geometrischen Reihe, so weiß man, daß dieses der Summe der beiden Zahlen, die neben dieser in der arithmetischen Reihe stehen, gegenüber stehen wird. Wenn man diese also addirt, so findet

det man die Zahl, der das gesuchte Produkt gegenüber steht.

5) Ebenfalls kommt man in beiden Reihen gleich weit rückwärts, man mag in der arithmetischen zwei Zahlen von einander abziehen, oder in der geometrischen zwei miteinander dividiren, die diesen gegenüber stehen. Die Differenz von jenen und der Quotient von diesen, liegen wieder gegeneinander über. Wenn man also den Quotienten zweier Zahlen sucht, so hat man nur die beiden nebenstehenden in der arithmetischen Reihe von einander abzuziehen, und die Differenz wird dem gesuchten Quotienten in der geometrischen Reihe gegenüberstehen.

6) Verlangt man das Quadrat einer Zahl, so ist dieses dasselbe, als wenn man zwei gleiche Zahlen miteinander multipliciret. Man hat also die gegenüberstehende Zahl in der arithmetischen Reihe mit 2 zu multipliciren, man bekommt dann die Summe, der jenes Quadrat gegenüber stehen wird.

Umgekehrt findet man wieder die Stelle der Wurzel, wenn man die Zahl in der arithmetischen Reihe durch 2 dividirt.

7) Verlangt man den Cybus einer Zahl, so ist dieses dasselbe, als wenn 3 gleiche Zahlen miteinander multiplicirt werden; und die dreifache Zahl in der arithmetischen Reihe, wird diesem dreifachen Produkte in der geometrischen wieder gegenüber stehen.

Umgekehrt findet man die Stelle der Cubikwurzel, wenn man die gegenüber stehende Zahl in der arithmetischen Reihe mit 3 dividirt. Dem Quotienten steht die Cubikwurzel gegenüber.

8) Auf dieselbe Weise findet man die vierte, fünfte,

sechste Potenz einer Zahl, durch eine Multiplikation des Logarithmen mit 4, 5 oder 6. Und eben so findet man durch eine Division mit 4, 5 oder 6 die vierte, fünfte oder sechste Wurzel einer Zahl.

9) Alle Glieder bleiben in beiden Reihen einander gegenüber, auch wenn neue eingeschaltet werden, wenn sie nur immer paarweise eingeschaltet werden. Das heißt: jedesmal ein arithmetisches und das zugehörige geometrische Glied.

Man kann also zwischen die Glieder, welche ganze Zahlen sind, so viele einschalten, welche Brüche sind, als man für gut findet.

Ebenfalls bleiben alle Glieder in beiden Reihen einander gegenüber, wenn man auch aus beiden Reihen noch so viele wegwirft; nur muß dieses Wegwerfen auch Paarweise geschehen.

10) Durch fortgesetztes Einschalten kann man daher Glieder in der geometrischen Reihe finden, welche zwar Brüche sind, aber doch so wenig von einer ganzen Zahl verschieden, daß man sie ohne merklichen Fehler, damit verwechseln kann. Z. B. 2,99999999 kann man ohne merklichen Fehler für 3 nehmen.

Ebenfalls kann man alle Glieder aus der geometrischen Reihe wegwerfen, welche keine ganzen Zahlen sind und auch keine Brüche, die den ganzen Zahlen so nahe sind, daß man sie mit ihnen verwechseln kann; nur muß man die zugehörigen Glieder in der arithmetischen Reihe zugleich mit wegwerfen.

In der geometrischen Reihe bleibt dann nichts übrig als ganze Zahlen und solche Brüche, die man mit ganzen Zahlen verwechseln kann, und man erhält hiedurch in der geometrischen Reihe alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4, 5 . . . . . und in der arithmetischen die zugehörenden Glieder in ganzen Zahlen und in Decimalbrüchen ausgedrückt.

Das Wegwerfen der Glieder, die nicht gebraucht werden, geschieht der Raumersparung wegen. Hiedurch verlieren die übrigbleibenden die Eigenschaften nicht, die sie hatten, als noch die Reihe vollständig und ohne Lücken war, denn alle Glieder die zu einander gehörten, sind in beiden Reihen einander gegenüber geblieben, und die Lücken die durchs Wegwerfen entstanden sind, und in beiden Reihen gleich groß. Das übrigbleibende sind Stücke aus einer geometrischen und aus einer arithmetischen Reihe, die aber zu einander passen, obschon jene keine geometrische, und diese keine arithmetische Reihe mehr bilden.

Wenn man aus den S. 65 Theil 2 angeführten Reihen, willkührlich Glieder wegwirft, so behalten die übrigbleibenden alle Eigenschaften die sie vorher hatten; allein es sind nun Stücke, die unter sich weder eine arithmetische noch geometrische Reihe mehr bilden.

11) Die Lehre von den Logarithmen gehört zu den wichtigsten in der ganzen Rechenkunst, weil sie das Multipliciren in ein Addiren, das Dividiren in ein Subtrahiren, das Ausziehen der 2ten, 3ten, 4ten . . . . Wurzeln in ein Dividiren mit 2, 3, 4 . . . . verwandelt.

Sie gehört, wie man aus dem angeführten sieht, ganz zur Elementar-Arithmetik, und ist an sich sehr leicht. Daß die meisten, welche sich mit ihr beschäftigen, Anfangs Schwierigkeiten in ihr finden, rührt gewöhnlich von dem griechischen Namen her, und daß sie in den

meisten

meisten Lehrbüchern mit Buchstabenrechnung und mit vieler, zum Theil unnöthigen Gelehrsamkeit vorgetragen wird.

Alle angeführten Eigenschaften, die aus der Verbindung einer arithmetischen Reihe folgen, beruhen auf dem beständigen gegeneinander Ueberbleiben der Glieder, sobald die Anfangspunkte beider einander gegenüber liegen. Und dieses gegen einander Ueberbleiben, beruht auf den sehr einfachen Gründen, die in 3 angeführt sind.

12) Allein, obschon man die Logarithmen auf die Weise berechnen kann, wie im zweiten Theile gezeigt worden, so würde doch dieses Einschalten in ganze Verhältnisse, sehr beschwerlich seyn, weil man so sehr viele Zahlen berechnen muß, die nachher von keinem Gebrauch sind.

Wir wollen deswegen jetzt eine andere Methode lehren, wie man zu jedem Logarithme, die zugehörige Zahl mit Hülfe von 3 oder 4 Multiplikationen, und wie man zu jeder Zahl den zugehörenden Logarithme mit 3 oder 4 Divisionen finden könne.

§. 72.

1) Wir hatten im vorigen, daß man jede geometrische Reihe, in der ein Glied dem Exponenten gleich sey, auch als eine Potenzreihe dieses Gliedes ansehen könne. In diesem Falle werde das Glied die Grundzahl (Basis) der Reihe. So sey 1, 3, 9, 27, 81, eine geometrische Reihe mit dem Exponenten 3. Ebenfalls sey sie eine Potenz-Reihe der Grundzahl 3, und man könne sie auch so schreiben: 3^0; 3^1; 3^2; 3^3; 3^4 ....

2) Nehmen wir die Reihe 1; 10; 100; 1000; 10000; so ist diese eine geometrische mit dem Exponenten 10. Sie ist aber auch die Potenz-Reihe der Grundzahl 10,

und man kann sie auch so schreiben: 10^0; 10^1; 10^2; 10^3; 10^4 ....

3) Wir können mit Hülfe der im vorigen Abschnitte mitgetheilten Potenz-Tafel, die Zahl 10 auf jede Potenz erheben, der Exponent mag aus ganzen Zahlen oder Brüchen bestehen, wenn diese nur Decimalbrüche sind. So fanden wir z. B. in §. 70. durch eine viermalige Multiplikation, daß 10 auf die Potenz oder auf den Exponenten 3,72156 erhoben = 5266,959759 sey. Wir wissen nun, daß diese Zahl die 3,72156te Potenz von 10 sey.

4) Ebenfalls können wir mit Hülfe dieser Tafel eine jede Zahl angeben, wie vielste Potenz von 10 sie sey. Hätten wir z. B. die Zahl 5266,959759, und wir wollten wissen wie vielste Potenz sie von 10 sey, so befolgten wir das entgegengesetzte Verfahren, und dividirten statt zu multipliciren. Die nächste Potenz von 10 ist 1000 $= 10^3$. Hiemit die Zahl dividirt, gibt 5,266959759 zum Quotienten.

Nach der Potenzentafel ist die nächste Potenz von $10 = 5,011872336 = 10^{0,7}$. Dividirt man hiemit in 5,266959759, so ist der Quotient 1,050896630.

In der Potenzentafel ist die nächste Potenz von $10 = 1,047128548 = 10^{0,02}$, dividirt man hiemit in 1,050896630, so ist der Quotient 1,000359852.

In der Potenzentafel ist die nächste Potenz von $10 = 1,002305238 = 10^{0,001}$. Man kennt nun schon vier Ziffern des Exponenten, nemlich 3,721, und wenn man auf diese Weise fortfährt zu dividiren, so findet man auch die übrigen. Jede Division gibt eine Ziffer mehr, und da in den Divisor immer mehr Nullen kommen, so

wird

wird die Division immer leichter. Bei der fünften Division wird der Quotient gleich 0, und man findet, daß $10^{3,721056}$ der gegebenen Zahl 5266,959759 gleich ist.

5) Wir wollen auf diese Weise den Exponenten suchen, auf welchen man die Zahl 10 erheben muß, daß man genau 3 erhalte.

Da der Exponent irrational seyn wird, so werden wir ihn nur näherungsweise darstellen können. Wir wollen in dieser Näherung bis auf 8 Decimalstellen gehen.

Nach der Potenztabelle ist:

$10^{0,4}$	$=2,511886$)	3,00000000	(1,19432151
$10^{0,07}$	$=1,17489755$)	1,19432151	(1,01653247
$10^{0,007}$	$=1,01624869$)	1,01653247	(1,00027924
$10^{0,0001}$	$=1,000230285$)	1,00027924	(1,00004894
$10^{0,00002}$	$=1,00004605$)	1,00004894	(1,00000289
$10^{0,000001}$	$=1,00000230$)	1,00000289	(1,00000059
$10^{0,0000002}$	$=1,00000046$)	1,00000059	(1,00000013
$10^{0,00000005}$	$=1,00000012$)	1,00000013	(1,00000001

Wenn man also 10 auf den Exponenten 0,47712125 erhöht, so erhält man die Zahl 3. Um den Exponenten bis auf acht Stellen zu finden, hat man sieben Divisionen. Von diesen sind die letzten sehr leicht wegen der vielen Nullen die im Divisor sind. Doch kann man sie, sobald man drei oder vier Decimalstellen hat, noch bedeutend abkürzen, wenn man den Decimalbruch des Dividendus direkt mit der Zahl 230258 dividirt. Man findet durch diese Division die übrigen Ziffern des Exponenten bis zur achten Stelle genau.

Im vorigen Beispiele fanden wir bei der dritten Division den Decimalbruch 27924. Dividiren wir diesen mit 23026, so finden wir im Quotienten 12125. Diese zu den bereits gefundenen Ziffern 477 hinzugefügt, geben dem Exponenten 0,47712125, so wie wir ihn auch vorher fanden.

Ich habe oben bemerkt, daß man dieses Verfahren anwenden könne, sobald man 3 oder 4 Ziffern gefunden habe. Wir konnten es hier schon mit dreien anwenden, weil die vierte Stelle sehr klein war, nemlich 1. Wäre sie 8 oder 9 gewesen, so hätten wir dieses erst anwenden dürfen, wenn wir durch vier Divisionen bereits vier Ziffern gefunden hätten.

Auf dieselbe Weise fanden wir §. 69. die letzten Ziffern der Potenz durch die Multiplikation mit der Zahl 230258, nachdem wir die vier ersten bereits gefunden hatten.

6) Es ist also leicht auf diese Weise eine Tafel mit zwei Colonnen zu berechnen, wo in der ersten alle Zahlen der Reihe 1, 2, 3, 4 ... bis etwa zu 100000 stehen, und wo in der zweiten jeder Zahl gegen über der Exponent steht, auf welcher man die Zahl 10 erheben muß, um die nebenstehende Zahl zu erhalten.

Eine solche Tafel würde folgende Form erhalten.

Zahlen	Exponenten von 10	Zahlen	Exponenten von 10	Zahlen	Exponenten von 10
1	0,0000000	11	1,0413927	21	1,3222193
2	0,3010300	12	1,0791812	22	1,3424227
3	0,4771213	13	1,1139434	23	1,3617278
4	0,602600	14	1,1461280	24	1,3802112
5	0,6989700	15	1,1760913	25	1,3979400
6	0,7781513	16	1,2041200	26	1,4149733
7	0,8450980	17	1,2304489	27	1,4313638
8	0,9030900	18	1,2552725	28	1,4471580
9	0,9542425	19	1,2787536	29	1.4623980
10	1,0000000	20	1,3010300	30	1,4771213

7) Wir

7) Wir hatten §. 68. daß wenn man Potenzen derselben Grundzahl miteinander multipliciren soll, man nur die Exponenten zueinander zu addiren hat;

so war $5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 5^3 = 125$
und $5 \,.\, 5 = 5^2 = 25$

$5^3 \,.\, 5^2$ ist $5^5 = 3125$

Eben so ist 2 = 10 auf den Expon. 0,3010300
3 = 10 0,4771213
5 = 10 0,6989700

also 30 = 10 auf den Expon. 1,4771213

Will man daher die Zahlen 2, 3 und 5 miteinander multipliciren, so hat man nur die nebenstehenden Exponenten, der Zahl 10 zueinander zu addiren, und man findet den Exponenten von 10, welcher dem Produkte jener Zahlen gegenüber steht. — Sucht man diesen Exponenten in den Tafeln, so findet man das Produkt neben ihm stehen. — Auf diese Art ist durch eine solche Exponententafel das Multipliciren in ein Addiren verwandelt.

8) Wir hatten ferner §. 68. daß wenn man die Potenzen derselben Grundzahl miteinander dividiren soll, man die Exponenten nur voneinander abzuziehen hat. So gab 5^7 durch 5^3 dividirt, zum Quotienten $5^4 = 625$.

Eben so ist 30 = 10 auf den Expon. 1,4771213
und 6 = 10 0,7781513

Beide divid. gibt 5 = 10 auf den Expon. 0,6989700

Auf diese Weise wird also durch die Exponententafel das Dividiren der Potenzen von 10 in ein Abziehen der Exponenten verwandelt.

9) Das

9) Das Quadriren einer Potenz von 10, ist also das Verdoppeln ihres Exponenten. Das Ausziehen der Quadratwurzel eine Theilung des Exponenten mit 2.

Das Cubiren einer Potenz von 10, ist ein Verdreifachen des Exponenten, und das Ausziehen der Cubikwurzel, eine Division mit 3.

Das Erheben einer Zahl, welche eine Potenz von 10 ist auf das Biquadrat, ist ein Vervierfachen des Exponenten, und das Ausziehen der vierten Wurzel, eine Division mit 4.

10) Wir sehen, daß die Exponenten der Zahl 10 die Verhältnißzähler oder Logarithmen der geometrischen Reihe 1; 10; 100; 1000 . . . . sind, und daß man durch die Lehre von den Potenzen, eben sowohl auf die Logarithmen geführt wird, als durch die von der Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Reihe.

Wir haben also zwei Wege die Logarithmen darzustellen:

1) Den der Reihen. Dieser ist der einfachere, und wir haben ihn, der Anfänger wegen, im zweiten Theile gewählt.

2) Den der Potenzen. Dieser ist für die wirkliche Berechnung der Logarithmen der bequemere, weil man dabei ungleich weniger Zahlen vergeblich zu schreiben hat.

Anmerkung. Die Bequemlichkeit der Rechnung beruht auf dem oben angeführten Potenzentäfelchen, welches für diese Rechnungen dasselbe ist, was das Einmal Eins für die Multiplikation und Division ist. Ich habe es aus der Arithmetik von Kramp entlehnt. In Callets Logarithmentafeln findet sich in der Einleitung S. 12 und 13 eine ähnliche Potenzentafel von 10, welche aber

nicht

nicht durch die 10ten Wurzeln erhalten ist, sondern durch sechszigmaliges Ausziehen der Quadratwurzel. S. 15 zeigt Callet, wie man mit Hülfe dieser Tafel durch 5 oder 6 Divisionen den Logarithmen jeder Zahl finden könne. Das Verfahren ist im Ganzen dasselbe, wie das eben angeführte, nur nicht so einfach und bequem, weil die Tafel keine Decimalpotenzen von 10 hat. Indeß scheinen sich die alten Rechner doch dieser Tafel mit Vortheil bei den Logarithmen-Rechnungen bedient zu haben, und Callet führt an, daß Vlaq schon diese Tafel habe; auch erinnere ich mich, daß Vlaq irgendwo in einer Vorrede sagt: Das Berechnen von einigen tausend Logarithmen wäre zwar etwas weitläuftig, allein so gar mühevoll wäre es dann doch nicht. — Wahrscheinlich hat Vlaq diese Tafel gebraucht, um für die ersten paar Hundert Primzahlen die Logarithmen zu suchen. Hatte er diese, so fand er die Logarithmen aller Zahlen, welche Produkte von diesen sind durch Addiren. — Hatte er auf diese Weise seine Logarithmen-Tafeln berechnet, so konnte er die Lücken, welche bei den noch übrigen Primzahlen statt finden, leicht durch Einschalten ausfüllen, wie wir dieses unten sehen werden. — In den Philosophical Transact. vom Jahr 1719 oder 20, soll sich ein Aufsatz über diese Art die Logarithmen zu berechnen, finden, und zugleich eine Potenztafel, von der ich aber nicht weiß, ob sie decimal ist. Im Jahr 1784 hatte Kramp diese Methode gefunden, und schickte einen Aufsatz hierüber an Kästner, behielt aber die Potenztafel zurück. Kästner antwortete nicht. In den Jahren 1786 bis 1789 gab Burja in den Berliner Memoiren mehrere Abhandlungen heraus, in denen er diese Methode mit Decimalpotenzen von 10 lehrte, und zugleich eine Tafel, in welcher er bis zur 16ten Decimalstelle geht. (S. Klügels Wörterbuch Theil II. S. 566.) Im Jahr 1801 gab Kramp seine Elements d'arithmétique heraus, und lehrte in diesen die angeführte Methode, und theilte auch die Potenzentafel auf 12 Decimalstellen mit. In der deutschen Ausgabe von 1808 findet sich diese Tabelle wieder bis auf 12 Decimalstellen. Kramp bemerkt Seite 345, daß bei den meisten Rechnungen zwar schon sechs Decimalstellen hinreichen, allein da es nicht viel mehr Mühe mache, bis auf 12 zu gehen, so habe er der Wissenschaft gerne dieses kleine Opfer gebracht, um der Tabelle den höchsten Grad von Vollkommenheit zu geben. Briggs hat eine solche Potenzentafel nicht gekannt, und er hat seine Logarithmen auf eine sehr mühvolle Weise berechnet. Speidell erzählt, daß 8 Personen an den von Briggs herausgegebenen Logarithmen ein ganzes Jahr gerechnet hatten. Ob diese blos das erste Tausend berechnet hatten, welches Briggs 1618 zur Probe herausgab oder aber die 30000, die Briggs 1624 bekannt machte, das wird nicht bemerkt. Diese gingen bis auf 14 Decimalstellen, und da Vlaq nur bis auf 10 ging, so konnte er alle übrigen schon durch blosses Einschalten finden.

§. 73.

Logarithmen-Tafeln.

1) Wir wollen hier der neuesten Logarithmen-Tafeln erwähnen; ohne der älteren zu gedenken — theils weil diese nicht mehr zu haben sind, und theils weil sie weder so bequem noch so fehlerfrei gedruckt sind, wie die neuesten.

Die

Die kleinen Logarithmen-Tafeln von La Lande haben nur 5 Stellen, und sind für kleine Rechnungen sehr bequem. Die Tafeln von Vega (in Oktav) haben 7 Stellen, und ihr deutlicher Druck macht, daß die Augen nicht ermüden. Die Tafeln von Schulz, in zwei Theilen, haben den Vorzug, daß sie die natürlichen Logarithmen bis 2200, und dann noch für alle Primzahlen bis 10,000 haben.

Die Tafeln von Callet sind sehr vollständig und fehlerfrei. Doch ermüdet der enge Druck die Augen. Der große Thesaurus Logarithmorum von Vlaq, den Vega 1794 wieder herausgegeben, ist in Folio, und enthält die Logarithmen bis auf 10 Stellen.

Jetzt gibt Didot in Paris Stereotyptafeln in Quarto heraus, die bis zu 200000 gehen und 8 Stellen haben. Sie kosten 72 Frank.

2) Alle diese Tafeln enthalten nur die Logarithmen für ganze Zahlen. Die Brüche haben dieselbe, nur werden sie negativ. Je kleiner der Bruch ist, desto größer ist sein verneinter Logarithme. Da wo die geometrische Reihe 1 hat, hat die arithmetische der Logarithmen 0, und geht aus dem Negativen ins Positive über.

3) Die geometrische Reihe geht nirgend aus dem Bejahten ins Verneinte. Sie nähert sich zwar beständig dem Nullpunkte, aber ohne ihn zu erreichen und ohne drüber hinübergehen zu können. Da in ihr also keine negative Zahlen vorkommen, so können auch für negative Zahlen keine Logarithmen statt finden.

Auch kann man nicht sagen, daß die Zahlen der geometrischen Reihe positiv sind. Bei dem Begriffe des Positiven, liegt eben sowohl der Begriff des entgegen-

gesetzten

gesetzten zum Grunde, als bei dem des Negativen, und da hier keine Entgegensetzung statt findet, so kann man die geometrische Reihe weder für positiv noch für negativ halten. Sie ist eine Reihe unbenannter Zahlen.

Der Streit, der zwischen zweien berühmten Mathematikern über die Frage ist geführt worden: Ob negative Zahlen Logarithmen hätten? — scheint ein bloßer Wortstreit gewesen zu seyn. Denn negative Zahlen haben eben so wenig Logarithmen als positive Zahlen, da der Natur der Sache nach, die Zahlenreihe, welche Logarithmen hat, jedesmal eine unbenannte ist.

§. 74.

Die natürlichen Logarithmen.

1) Wir haben bei den vorigen Rechnungen die Zahl 10 zur Grundzahl des Logarithmensystems genommen, weil sie uns beim Rechnen die meiste Bequemlichkeit gibt. Da ihre 1te, 2te, 3te, 4te . . . . Potenzen = 10, 100, 1000, 10000 . . . . sind, so geben sie immer Decimal-Multiplikationen und Divisionen, welche man durch das Versetzen des Comma verrichtet. Von jeder Zahl, die dieselbe Ziffer hat, hat auch der Logarithmen dieselbe Ziffern, und wenn die Zahl durch die Versetzung des Comma ums zehnfache größer oder kleiner wird, so wird im Logarithme nur die Kennziffer um eine Einheit größer oder kleiner, indeß der anhangende Decimalbruch derselbe bleibt.

Der Logarithme von 6,187 ist 0,7914801
der von 61,87 ist 1,7914801
der von 618,7 ist 2,7914801
der von 6187 ist 3,7914801

Da der Decimalbruch derselbe bleibt, so braucht man für diese vier Zahlen nur einen Logarithmen abdrucken zu lassen, denn die Kennziffer schreibt der Rechner ohnehin immer nach der Anzahl der Stellen bei, die die Zahl diesseits des Comma hat, und diese ist deswegen in den Tafeln nicht mit abgedruckt. Man sieht leicht, welche große Raumersparung blos durch den Umstand in den Tafeln möglich wird, daß zur Grundzahl die Zahl 10 ist gewählt worden, deren ganze Potenzen immer die Einheit mit einer Anzahl Nullen sind.

2) Aber blos die Bequemlichkeit der Tafeln und der Rechnung entscheidet für die Zahl 10. Man könnte sonst jede andere Zahl zur Grundzahl wählen, und für diese logarithmische Tabellen berechnen. Man kann eben so gut die Zahlen 3; 7; 12 und jede andere zur Grundzahl annehmen, und die Logarithmen, die man für sie berechnete, würde eben so gut dazu dienen, das Multipliciren in ein Addiren und das Dividiren in ein Subtrahiren zu verwandeln.

Gesetzt, man hätte 3 zur Grundzahl des Systems gewählt, so erhielt man folgende Logarithmen:

$3^0 = 1$ deren Logar. $= 0$
$3^1 = 3$ . . $= 1$
$3^2 = 9$ . . $= 2$
$3^3 = 27$ . . $= 3$
$3^4 = 81$ . . $= 4$
$3^5 = 243$ . . $= 5$

Für dieses System müsse man denn auf dieselbe Weise alle Zwischenglieder suchen, wie wir für das System der Zahl 10 gethan haben. Man hätte denn 3

auf

auf den Exponenten $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ .... zu erheben, wobei man folgendes Potenztäfelchen erhielt:

$$3^1 = 3{,}0000000$$
$$3^{0,1} = 1{,}1160231$$
$$3^{0,01} = 1{,}0110417$$
$$3^{0,001} = 1{,}0010994$$
$$3^{0,0001} = 1{,}0001099$$
$$3^{0,00001} = 1{,}0000109$$
$$3^{0,000001} = 1{,}00000109$$

Dieses Potenzen-Täfelchen zu berechnen, hat keine Schwierigkeit. Denn so umständlich es ist, die tausendste oder 10000te Wurzel aus einer Zahl zu ziehen, wenn man keine Logarithmentafeln hat, so leicht ist es, sobald diese berechnet sind. Man hat nur den Logarithmen der Zahl mit 10, oder 100 oder 1000 zu dividiren, um den zu finden, welcher der 10ten, 100ten oder 1000ten Wurzel in den Tafeln gegenübersteht.

3) Man sieht aus dem Vorigen, daß wenn man die 3 auf einen sehr kleinen Exponenten erhebt, z. B. auf 1 Milliontheil, man ebenfalls auf einen Decimalbruch komme, der sich einem beständigen Verhältniß zum Exponenten immer mehr nähert. Bei der Zahl 10 war das Verhältniß zwischen dem Exponenten und diesem Decimalbruch, wie 1 zu 2, 302 ..... Bei 3 ist es wie 1 zu 1,09 ....

Bei welcher Zahl mögte es wohl genau wie 1 zu 1 seyn?

4) Diese Frage ist nicht schwierig zu beantworten. Die Zahl muß etwas kleiner seyn als 3, und sie muß, wenn man sie auf die Potenz von z. B. 1 zehn Milliontheil erhebt, zur 10 Millionsten Wurzel die Zahl

 1,0000001

1,0000001 geben. Multiplicirt man diese 10 Millionmal mit sich selber, so findet man die Grundzahl. Dieses würde auf die gewöhnliche Weise sehr langweilig seyn, allein da wir bereits die Logarithmen der Zahl 10 haben, so ist es leicht.

Der Logarithme von

1,0000001 ist = 0,0000000434294481 9.

Diesen mit 10 Millionen multiplicirt, gibt

0,4342944819.

Dieser Logarithme steht also der 10 Millionsten Potenz von 1,0000001 in den Tafeln gegenüber. Diese Zahl ist 2,7182818284.

Wenn man also diese Zahl zur Grundzahl eines Logarithmen-Systems macht, so erhält man dasjenige, in welchem das Verhältniß zwischen dem Exponenten und dem Decimalbruch wie 1 zu 1 ist. Dieses Verhältniß ist unstreitig das einfachste und natürlichste, und man hat deswegen das Logarithmen-System bei dem die Zahl 2,71828 . . . . . die Grundzahl ist, die natürlichen Logarithmen genannt. Auch werden sie wohl die Hyperbolischen genannt, wegen einer Eigenschaft der Hyperbel, die auf diese Logarithmen führt.

Da diese Logarithmen häufig in der angewandten Mathematik gebraucht werden, so hat man besondere Tafeln für sie berechnet. Wir werden nachher eine kleine Tafel derselben anführen, welche wir beim Höhenmessen mit dem Barometer gebrauchen. Um die Berechnung derselben hat sich niemand verdienter gemacht, als Wolfram, ein holländischer Officier, der in der zweiten Hälfte des 18ten Jahrhunderts lebte.

Nach

Nach diesem werden sie auch oft die Wolframschen genannt, so wie man die Logarithmen der Zahl 10 von ihrem ersten Berechner, die Briggischen nennet. Im Gegensatze mit den natürlichen Logarithmen, werden die Briggischen auch wohl die künstlichen genannt.

5) Und die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bis auf 10 Stellen genau zu haben, so mußten wir den Logarithmen von 1,0000001 bis auf 17 Stellen suchen. Da unsere größten Log. Tafeln nur bis auf 10 Stellen gehen, so mußte er direkt berechnet, oder mit andern Worten: wir mußten die 10 Millionste Wurzel ausziehen, um 10 auf den Exponenten 0,0000001 zu erheben.

Dieses war leicht, da wir das beständige Verhältniß zwischen dem Decimalbruche und dem Exponenten kannten, welches wie 2,3028 1 : zu ist. Indem wir 1 mit 2,3028 . . . . dividirten, und dann mit 10 Mill. multiplicirten, fanden wir den Logar. der 10 Millionsten Potenz von 1,00000001 = 0,434294481 9.

6) Die Zahl 0,4342944819 . . . . heißt der Modul der natürlichen Logarithmen. Es ist der Exponent, auf den man die Grundzahl 10 der Briggischen Logarithmen erheben muß, um die Grundzahl der natürlichen Logarithmen zu finden. Der Modul ist das Verhältniß zwischen den beiden beständigen Decimalbrüchen 2,3028 . . . . und 1 . . . . Er ist $\frac{1}{2{,}3028}$ . . . = 0,43429 . . . .

7) Die Zahl 2,3028 ist der Modul der Briggischen Logarithmen. Es ist der Exponent, auf welchen man die Grundzahl 2,71828 . . . . der Wolframschen Logarithmen erheben muß, um die Grundzahl der Briggischen zu finden. Er ist das Verhältniß zwischen den beiden beständigen Decimalbrüchen 1 : 2,3028. Er ist $\frac{2{,}3028}{1}$ = 2,3028 . . .

Der

Der Modul drückt also das Verhältniß aus, in dem der Constante Decimalbruch des einen Logarithmensystems zum constanten Decimalbruche des anderen steht.

Wenn also vom Modul die Rede ist, so muß man wissen, welche Logarithmensysteme gemeint sind, und wenn man sagt 0,43429 ist der Modul der natürlichen Logarithmen, so muß man hinzusetzen, in Hinsicht auf die Briggischen. Wählt man eine andere Grundzahl, als 10, z. B. 3, so haben auch die natürlichen Logarithmen einen andern Modul. Dieser würde dann $\frac{1}{1{,}0986} \ldots = 0{,}9125 \ldots$

8) Erhebt man die Grundzahl des einen Systems auf einen Exponenten, welcher dem Modul des andern gleich ist, so findet man die Grundzahl des andern.

So ist der Briggische Logar. $10^{0{,}43429} = 2{,}71828 \ldots$

So ist der Wollframsche $2{,}71828^{2{,}3028} = 10$

Der Modul der Zahl 3, in Hinsicht der natürlichen, wäre $\frac{1{,}0986}{1} \ldots = 1{,}0986$, und $2{,}71828^{1{,}0986}$ ist $= 3$.

9) Der Briggische Logarithme von 10 ist = 1, der Wollframsche von 10 ist = 2,3028.

Wenn man daher die Briggischen mit 2,3028 multiplicirt, so erhält man Wollframsche.

Der Wollframsche Logarithme von 2,71828 ist = 1.

Der Briggische von 2,71828 ist = 0,43429.

Wenn man daher die Wollframschen mit 0,43429 multiplicirt, so erhält man Briggische.

Die Logarithmen verhalten sich also umgekehrt zu einander wie die Modul ihrer Systeme.

§. 75.

Berechnung der natürlichen Logarithmen.

Wir wollen bei diesen Rechnungen die Grundzahl der natürlichen Logarithmen 2,718281 828459 .... bis auf 12 Stellen zum Grunde legen. Doch werden wir immer nur die beiden ersten Ziffern dieser Zahl 2,7 der Raumersparung wegen anführen.

Erheben wir die Grundzahl auf die Potenz $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ .... oder mit andern Worten: ziehen wir die zehnte, hunderte, tausendste Wurzel aus ihr, so erhalten wir folgendes Grundtäfelchen:

$2,7^{1}$	=	2,718281 828459
$2,7^{0,1}$	=	1,105170 918076
$27,^{0,01}$	=	1,010050 167082
$2,7^{0,001}$	=	1,001000 500166
$2,7^{0,0001}$	=	1,000100 005000
$2,7^{0,00001}$	=	1,000010 000050
$2,7^{0,000001}$	=	1,000001 000005

Aus diesem Grundtäfelchen erhalten wir durch Addiren der Exponenten, und durch Multiplikation der Potenzen folgende

Potenzen-Tafel für die Zahl 2,7182 ....

$2,7^{10}$	=	22026,465794 806716
$2,7^{9}$	=	8103,083927 575384
$2,7^{8}$	=	2980,957987 041728
$2,7^{7}$	=	1096,633158 428459
$2,7^{6}$	=	403,428793 492735
$2,7^{5}$	=	148,413159 102576
$2,7^{4}$	=	54,598150 033144
$2,7^{3}$	=	20,085536 923188
$2,7^{2}$	=	7,389056 098930
$2,7^{1}$	=	2,718281 828459

$2,7^{0,9} = 2,459603\ 111157$
$2,7^{0,8} = 2,225815\ 774660$
$2,7^{0,7} = 2,033752\ 707470$
$2,7^{0,6} = 1,822118\ 800390$
$2,7^{0,5} = 1,648721\ 270700$
$2,7^{0,4} = 1,491824\ 697641$
$2,7^{0,3} = 1,349858\ 807576$
$2,7^{0,2} = 1,221402\ 758160$
$2,7^{0,1} = 1,105170\ 918076$

$2,7^{0,09} = 1,094174\ 283705$
$2,7^{0,08} = 1,083287\ 294414$
$2,7^{0,07} = 1,072508\ 181254$
$2,7^{0,06} = 1,061836\ 546545$
$2,7^{0,05} = 1,051271\ 096376$
$2,7^{0,04} = 1,040810\ 774192$
$2,7^{0,03} = 1,030454\ 533954$
$2,7^{0,02} = 1,020201\ 340026$
$2,7^{0,01} = 1,010050\ 167084$

$2,7^{0,009} = 1,009040\ 621774$
$2,7^{0,008} = 1,008032\ 085726$
$2,7^{0,007} = 1,007024\ 557266$
$2,7^{0,006} = 1,006018\ 036054$
$2,7^{0,005} = 1,005012\ 520859$
$2,7^{0,004} = 1,004008\ 010677$
$2,7^{0,003} = 1,003004\ 504503$
$2,7^{0,002} = 1,002002\ 001334$
$2,7^{0,001} = 1,001000\ 500166$

$2,7^{0,0009} = 1,000900\ 405122$
$2,7^{0,0008} = 1,000800\ 320086$
$2,7^{0,0007} = 1,000700\ 245057$
$2,7^{0,0005} = 1,000600\ 180036$
$2,7^{0,0005} = 1,000500\ 125021$
$2,7^{0,0004} = 1,000400\ 080011$
$2,7^{-0,0003} = 1,000300\ 045005$
$2,7^{0,0002} = 1,000200\ 020001$
$2,7^{0,0001} = 1,000100\ 005000$

$2,7^{0,00009} = 1,000090\ 004050$
$2,7^{0,00008} = 1,000080\ 003200$
$2,7^{0,00007} = 1,000070\ 002450$
$2,7^{0,00005} = 1,000060\ 001800$
$2,7^{0,00005} = 1,000050\ 001250$
$2,7^{0,00004} = 1,000040\ 000800$
$2,7^{9,00003} = 1,000030\ 000450$
$2,7^{0,00002} = 1,000020\ 000200$
$2,7^{0,00001} = 1,000010\ 000050$

$2,9^{0,000009} = 1,000009\ 0000405$
$2,7^{0,000008} = 1,000008\ 0000320$
$2,7^{0,000007} = 1,000007\ 0000245$
$2,7^{0,000006} = 1,000006\ 0000180$
$2,7^{0,000005} = 1,000005\ 0000125$
$2,7^{0,000004} = 1,000004\ 0000080$
$2,7^{0,000003} = 1,000003\ 0000045$
$2,7^{0,000002} = 1,000002\ 0000020$
$2,7^{0,009901} = 1,000001\ 0000005$

Die

Die erste Potenzentafel für natürliche Logarithmen hat Kramp im Jahr 1808 in seiner Arithmetique universelle bekannt gemacht. Aus dieser ist die vorstehende Tabelle abgedruckt worden.

Wir wollen die Anwendung derselben an einem Beispiele zeigen.

Aufgabe. Man verlangt bis auf 10 Stellen den natürlichen Logarithmen der Zahl 3,141592652590, welche Zahl bekanntlich das Verhältniß zwischen dem Durchmesser und dem Umfange des Kreises ausdrückt. Man findet diesen Logarithmen durch 6 Divisionen.

$2{,}7^{1} = 2{,}71828\ldots$) 3,141592653590 (1,5572 ...

$2{,}7^{0,1} = 1{,}10517\ldots$) 1,155727349791 (1,04574 ...

$2{,}7^{0,04} = 1{,}04081\ldots$) 1,045745351138 (1,00400 ...

$2{,}7^{0,004} = 1{,}00400\ldots$) 1,004008010677 (1,00073 ...

$2{,}7^{0,0007} = 1{,}00700\ldots$) 1,000730152281 (1,000029 ...

$2{,}7^{0,00002} = 1{,}000002\ldots$) 1,000029886296 (.....

Wir haben nun durch fünf Divisionen 6 Ziffern des Logarithmen gefunden; nemlich 1,14472. Noch fünf Divisionen würden uns die fünf übrigen Ziffern geben. Allein wir können diese auch direkt durch folgenden Regula de Tri-Satz finden:

Wie sich verhält der Delimalbruch 0,0000200002 zu seinem Exponenten 0,00002, so verhält sich der Decimalbruch 0,000029886296 zu seinem Exponenten. Man findet diesen Exponenten = 0,0000298859. Fügt man die fünf letzten Ziffern zu den bereits gefundenen fünfen, so hat man den natürlichen Logarithmen jener Zahl bis

auf

auf 10 Stellen. Nemlich 1,144729885 9. Dieser ist in der letzten Stelle nur ungefehr um eine halbe Einheit zu groß.

Hier war die Zahl gegeben, und der Logarithme wurde gesucht. Ist der Logarithme gegeben, und die Zahl wird gesucht, so geschieht dieses auf dieselbe Weise, nur daß dann multiplicirt wird, wo jetzt dividirt wurde.

§. 76.

Zeichnung der logarithmischen Linien.

1) Um uns eine desto deutlichere Vorstellung von der Natur der Logarithmen zu machen, so wollen wir sie liniarisch verzeichnen, indem wir die arithmetische Reihe zu Abscissen und die geometrische Reihe zu Ordinaten nehmen, so wie wir dieses schon im 2ten Theile S. 90 thaten.

Fig. 1 Taf. 2. stellt wieder ein Stück derselben logarithmischen Linie vor, die wir im zweiten Theile abbildeten. Um die Figur deutlicher zu machen, sind die Abscissen in einem größern Maßstabe gezeichnet, wie die Ordinaten.

Zieht man durch die Endpunkte der Ordinaten Parallelen mit der Abscissenlinie, z. B. m n und o r, so ist die Linie m n der Unterschied zweier auf einander folgenden Logarithmen, und die Linie n o der Unterschied zwischen ihren zugehörigen Zahlen, welche die geometrische Reihe bilden. Zieht man durch die Endpunkte der Ordinaten, nemlich durch m und o eine gerade Linie o p, so schneidet diese die logarithmische Linie in den Punkten m und o, und ist also eine Sekante von ihr. Das Dreieck o m n ist dem Dreieck o p q ähnlich. Es verhält sich also o n : m n = o q : p q oder in Zahlen 8 : 1 = 16 : 2.

Die Linie p q nennt man die Subsekante der logarithmischen Linie.

2) Alle Subsekanten, die zu derselben logarithmischen Linie gehören, sind einander gleich.

Man ziehe durch o die Parallele o r und die Sekante t k, so erhält man wieder zwei ähnliche Dreiecke t o r und t k l. Es verhält sich also t r : o r = t l : k l oder in Zahlen 16 : 1 = 32 : 2, folglich ist die Subsekante k l = p q, da o q die Hälfte von t l ist.

3) Man sieht an der Figur, daß sobald zwei Ordinaten als k m und q o, und zugleich ihre Entfernung k q gegeben sind, daß dann die ganze logarithmische Linie bestimmt ist. Zieht man durch m o die Sekante o p, so findet man die Subsekante p q. Da q l = q k ist, so trägt man von l die Subsekante nach k, zieht durch k o die neue Sekante, welche die Ordinate im Punkte t schneidet, wo die logarithmische Linie sie ebenfalls durchschneidet, und so kann man so viele Punkte in der logarithmischen Linie bestimmen, als man für gut findet.

4) In dieser Figur ist die Grundzahl 2. Nimmt man eine andere Grundzahl, z. B. 3 oder 10, so bekommt man eine andere logarithmische Linie und eine andere Subsekante. Wenn die Grundzahl gegeben ist, dann ist die Subsekante nicht mehr willkührlich, und wenn diese gegeben ist, dann ist jene nicht mehr willkührlich.

5) Man kann die beiden Ordinaten m k und o q so nahe zusammen ziehen als man will. Man erhält immer dieselben ähnlichen Dreiecke und dieselben Subsekanten. Zieht man durch eine große Menge solcher Punkte Se-

kanten,

kanten, (wie in Fig. 2. Taf. 2.) so kann man die logarithmische Linie auf dieselbe Weise durch Sekanten darstellen, wie den Kreis durch ein eingeschriebenes Vieleck. In dieser Figur ist die logarithmische Linie punktirt angegeben.

Liegen die Punkte sehr nahe beisammen, so unterscheiden sich die Sekanten in Hinsicht ihrer Lage nur wenig von den Tangenten, die an dieselben Punkte gezogen werden, und diese werden die Abscissenlinie dann sehr nahe auf demselben Punkte schneiden. Die Subtangenten sind dann nur wenig von den Subsekanten unterschieden.

Liegen die Ordinaten unendlich nahe zusammen, so gehen die Sekanten in die Tangenten über, und die Subtangenten sind von den Subsekanten nur unendlich wenig verschieden.

Durch die Subtangente wird daher eine logarithmische Linie eben sowohl bestimmt, als durch die Subsekante, und sobald die Subtangente gegeben ist, dann ist die Grundzahl nicht mehr willkührlich.

Man kann mit den Tangenten um die logarithmische Linie eben so ein Vieleck beschreiben wie um den Kreis, welches von dem eingeschriebenen mit den Sekanten unendlich wenig abweicht, sobald man beide unendlich klein nimmt.

6) Wenn man ein ganzes Verhältniß in der Abscissenlinie, z. B. von 0 bis 1, in eine große Anzahl gleicher Theile theilt, z. B. in 100000, und in jedem Theilungspunkte eine Ordinate aufrichtet; so sind die kleinen Stücke, die diese in der logarithmischen Linie abschneiden, von einer geraden Linie fast nicht zu unterscheiden.

Theilt man jedes wieder in 10 Theile, so verhalten

diese

diese sich nahe wie eine arithmetische Linie erster Ordnung, und sie nähern sich dieser um so mehr, je kleiner man die Theile nimmt.

In einer arithmetischen Reihe erster Ordnung verhalten sich die Zahlen wie die Logarithmen, und die Ordinaten also wie die Abscissen. (S. Theil II. S. 105. und ebenfalls Fig. 1. Taf. I. in diesem Theile). Wird die Abscisse 10mal größer, so wird auch die Ordinate 10mal größer.

7) Schlagen wir die briggischen Logarithmentafeln auf, so finden wir für 1,001 den Log. = 0,0004340774
für 1,0001 . . = 0,0000434249
für 1,00001 . . = 0,0000043429
für 1,000001 . . = 0,00000043429.

Der Logarithme von 1 ist 0. Die Decimalen im Logarithmen beziehen sich also auf die Decimalen, die in der Zahl auf die 1 folgen.

Fig. 3. Taf. 2. stellt ein Stück von der logarithmischen Linie des briggischen Systems dar, welches durch 999999 Ordinaten in 1 Million Verhältnisse sey getheilt worden. Man ziehe durch a die Parallele a b, so theilt diese alle Ordinaten in zwei Theile, wovon der untere zur Kennziffer 0 des Logarithmen gehört, und der obere zum Decimalbruch des Logarithmen.

Nehmen wir das Dreieck, welches die erste Ordinate, die auf die von 0 folgt, (und die nur 0,000001 Verhältniß von ihr entfernt ist) abschneidet, und zeichnen dieses in Fig. 4. nach einem sehr großen Maßstabe, so erhalten wir ein Dreieck, welches nahe geradlinigt ist, in dem die Linie a c = 0,000001 ist, die Linie b c = 0,00000230258, und a b ein äußerst kleines Stückchen der logarithmischen

Linie,

Linie, welches so wenig gekrümmt ist, daß man es in keiner Zeichnung mehr ausdrücken kann. Theilen wir a c wieder durch 9 Ordinaten in 10 Theile, so erhalten wir lauter ähnliche Dreiecke, in denen sich die Abscissen gerade verhalten wie die Ordinaten, wenn also die Ordinate zehnmal kleiner wird, so wird auch die Abscisse zehnmal kleiner.

8) Nimmt man 10 zur Grundzahl, und erhebt diese auf den Exponenten 0,000001, so erhält man die Zahl 1,0000023o258. Der Decimalbruch ist die Ordinate b c, und der Exponent ist die Abscisse a c Fig. 4.

Erhebt man 10 auf den Exponenten 0,0000001, so erhält man 1,000000 23o258. Der Decimalbruch ist wieder die Ordinate m n, und der Exponent ist die Abscisse a n. Da der Exponent ums Zehnfache kleiner geworden ist, so ist auch der Decimalbruch ums Zehnfache kleiner geworden, und er muß deswegen dieselbe Ziffern haben, nemlich 23o258.

Man begreift nun leicht, woher die merkwürdige Erscheinung kommt, daß man immer im Decimalbruche beständige Zahlen erhält, sobald man irgend eine Grundzahl auf einen Exponenten erhebt, der nur ein wenig größer als Null ist.

Je kleiner der Exponent, je kleiner ist die Abscisse a n, je kleiner ist das Stückchen der logarithmischen Linie, welche die Ordinate m n abschneidet. Je kleiner dieses ist, desto weniger weicht es von einer geraden Linie ab, je mehr nähert sich das Dreieck einem geradlinigten, in dem alle Ordinaten den Abscissen proportional sind.

Man findet daher immer mehr constante Ziffern, — allein völlig constant werden sie nie — denn auch das

kleinste

kleinste Stück der logarithmischen Linie ist doch nie völlig gerade, und das Dreieck amn nie ein geradlinigtes.

So viel Nullen der Exponent hat, so viel Nullen bekommt man im Decimalbruche, und so viel Ziffern sind constant. Erhebt man die Grundzahl 10 auf den Exponenten von 10 Quadrillionen, wo also nach dem Comma 24 Nullen kommen, und dann die Einheit, so hat man im Decimalbruche auch 24 Nullen, und die nächsten 24 Ziffern, die dann folgen sind constant. Es sind folgende: 230258 50929 94045 68401 799. Mit der fünf und zwanzigsten fangen dann die veränderlichen Ziffern wieder an. In Callets Tafeln findet man die beständigen Ziffern bis auf 48 angegeben, also viel weiter als man sie selbst bei den größten Rechnungen gebraucht.

Das Beständigwerden der Ziffern beruhet also auf dem bekannten Satze: Daß von einer jeden krummen Linie, das Gesetz ihrer Krümmung mag seyn welches es will, ein sehr kleines Stückchen immer nur sehr wenig von einer geraden abweicht.

9) In dem kleinen Dreiecke amn Fig. 4. verhält sich die Abscisse an zur Ordinate mn wie 1 : 2,30258, wenn am ein Stück aus der logarithmischen Linie des briggischen Systems ist.

Ist aber am ein Stück von der Linie der natürlichen Logarithmen, so verhält sich an : mn wie 1 : 1.

Verlängert man die Linie am bis sie die Abscisse in w, und die Ordinate mn, bis sie die Abscisse in v schneidet, so entsteht ein neues Dreieck wmv, welches dem vorigen ähnlich ist, und in dem sich wv zu vm verhält wie 1 : 1,

wenn

wenn a m ein Stück von der Linie der natürlichen Logarithmen war.

Man kann w m als die Sekante, und w v als die Subsekante der logarithmischen Linie ansehen. Ebenfalls kann man w m als die Tangenten, und w v als die Subtangenten des Punkts m betrachten. Wenn also die Ordinate m v = 1 ist, dann ist die Subtangente ebenfalls = 1.

Da das Dreieck m v w rechtwinklig ist, so ist m v der Sinus und w v der Cosinus des Winkels bei w, und man sieht, daß man die Verhältnisse, die zwischen den Winkeln und Seiten dieses Dreiecks statt finden, auf mannigfaltige Art ausdrücken kann; und sobald einer der Winkel gegeben ist, z. B. der bei a oder bei w, so ist die Richtung der logarithmischen Linie gegeben, und das Verhältniß zwischen a n und m n.

10) Das oben gefundene Verhältniß zwischen dem Decimalbruch der Abscisse und dem Decimalbruch der Ordinate von 1 : 2,30258, findet auf jedem Punkte der Brigischen Logarithmenlinie Statt.

Man ziehe durch m n eine Parallele (Fig. 1.) und schalte wieder eine Million Verhältnisse ein. Diese Parallele theilt alle Ordinaten wieder in 2 Theile, wovon der untere zur Kennziffer des Logarithmen 3 gehört, und der obere zum Decimalbruche.

Man hat	für 1001	den Log.	3,0004340774
	für 1000,1	. .	3,0000434249
	für 1000,01	. .	3,0000043429

Wir finden hier wieder dieselben beständigen Ziffern wie oben in 6.

Die Parallele m n (Fig. 1.) kann man zwischen zwei Ordinaten eines ganzen Verhältnisses ziehen, z. B.

zwischen 3 und 4. Nur fällt dann die Beständigkeit der Ziffern weniger in die Augen, weil dann außer der Kennziffer noch Decimalen abgeschnitten werden.

Der Logar. von 5001 ist 3,6990569
Der . . von 5000,1 ist 3,6989787
Der . . von 5000,01 ist 3,6989709.

Zieht man hievon den Logarithmen von 5000 ab, der 3,6989700, dann behält man folgende Decimalbrüche zu Resten, die mit 5 multiplicirt, wieder dieselben Ziffern geben.

1 Rest 0,0000869 mit 5 multiplicirt 4345
2 . . 0,0000087 435
3 . . 0,00000087 435

Weil hier im Logarithmen nur 7 Stellen genommen sind, so ist die Beständigkeit der Ziffern weniger bemerkbar.

§. 77.

Gebrauch der Logarithmen.

1) Die häufigste Anwendung der Logarithmen ist in der Trigonometrie. Weil da immer Regula de Trisätze mit großen Zahlen vorkommen, so erleichtern sie diese Rechnungen in einem hohen Grade, da sie das Multipliciren in ein Addiren, und das Dividiren in ein Subtrahiren verwandeln.

Nepper hat die Logarithmen auch eigentlich der trigonometrischen Linien wegen erfunden. Seine Logarithmen sind die natürlichen, und sie gehören zu den Sinus und Cosinus der Winkel. Seine Art, sie zu berechnen, war sehr mühevoll, und überhaupt war seine Vorstellung von den Logarithmen so abweichend von der unsrigen, daß es schwer für uns ist, uns in seinen Ideengang zu versetzen.

Mit den natürlichen Logarithmen kann man die Multiplikation eben sowohl in eine Addition verwandeln als mit den Briggischen.

Beispiel. Der nat. Log. von 3 ist 1,09861
von 7 ist 1,94591

der nat. Log. 21 = 3,04452

Dasselbe gilt von der Division und von dem Ausziehen der Wurzeln. Allein sie sind hiezu nicht so bequem, weil die Tafeln weitläuftiger werden, da sich bei ihnen nicht die Abkürzungen anbringen lassen, wie bei den Logarithmen der Grundzahl 10.

Da Neppers Tafeln blos für Sinus und Cosinus eingerichtet waren, und diese Linien mit gleichen Bogen nicht gleichförmig wachsen, so war es unbequem sie bei andern Zahlen zu gebrauchen, weil das Einschalten in die ungleichen Lücken mühsam ist.

Briggs berechnete deswegen außer den Logarithmentafeln für die trigonometrischen Linien, noch andere für die Zahlenreihe 1, 2, 3, 4 .... bis 100000. Da diese Zahlen gleichförmig wachsen, so ist das Einschalten zwischen zwei Logarithmen mit Hülfe der Differenzen sehr leicht. Dieses Einschalten kommt sehr häufig vor, weil man die Tafeln, damit sie nicht zu weitläuftig werden, nur bis 100000 gehen läßt.

2) Wie die Logarithmen beim Ausziehen der Wurzeln, beim Erheben auf Potenzen u. s. w. gebraucht werden, haben wir oben schon gesehen.

3) Im täglichen Leben werden die Logarithmen häufig

 bei

bei der Berechnung der zusammengesetzten oder wachsenden Zinsen gebraucht. Ferner bei der Berechnung der Leibrenten, der Wittwenkassen und des Disconto bei Wechseln, die auf längere Zeit laufen. Wir haben dieses im zweiten Theile in dem Abschnitte gezeigt, der die Ueberschrift hat: Anwendung der Rechenkunst aufs tägliche Leben. (S. 140.)

Wie die natürlichen Logarithmen in der angewandten Mathematik gebraucht werden, werden wir im Laufe dieses Werks bei den Höhenmessungen mit dem Barometer sehen.

3) Ich will hier noch ein paar Beispiele anführen, um zu zeigen, wie sie bei geometrischen Reihen gebraucht werden.

1. Aufgabe. Das erste Glied einer Reihe sind gegeben, (und der Exponent) — man soll alle Glieder bis zum 12ten finden.

Das erste sey 4, der Exponent 3, so ist das zweite 12
das dritte 36
das vierte 108
u. s. w.

Die Multiplikation hat in diesem Beispiele keine Schwierigkeit, weil die Zahlen klein sind. Hätten aber das erste Glied und der Exponent noch fünf oder sechs Decimalziffern bei sich, so wären die Multiplikationen sehr weitläuftig geworden, und man hätte die Reihe dann ungleich leichter durch Addition der Logarithmen gefunden.

2. Aufgabe. Das erste und letzte Glied der Reihe ist gegeben, und auch die Anzahl der Glieder — man sucht den Exponenten.

Das

Das erste Glied sey 4, das letzte 324, die Anzahl der Glieder sey 5.

Man dividire das erste und letzte Glied mit 4, so erhält man 1 und 81.

Da 5 Glieder in der Reihe sind, so hat man vier Verhältnisse. Man muß also aus 81 die vierte Wurzel ziehen.

Log. von 81 ist 1,90849

Divid. mit 4 gibt 0,47712 dieses ist Log. von 3.

Der Exponent ist also 3.

Zur 3ten Aufgabe wollen wir eine aus der Musik wählen.

Bekanntlich gibt eine Saite auf dem Monochord, wenn man sie in der Mitte durchtheilt, die Oktave von dem Tone den sie gegeben, ehe sie durchgetheilt war. Wenn sie bei einer Länge von 2 Fuß den Ton C gab, so gibt sie bei einer Länge von 1 Fuß das C der Oktave oder $\underline{C}$. Wie muß man das Monochord nun eintheilen, um durch das Verschieben des Steges der Reihe nach alle 12 Töne der Oktave c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, h und b hervorzubringen?

Man muß in das ganze Verhältniß zwischen C und $\underline{C}$ noch 12 Verhältnisse einschalten. Das erste und letzte Glied der Reihe ist gegeben, das erste ist 1, das letzte oder dreizehnte ist 2. Um 12 Verhältnisse einzuschalten müssen wir die 12te Wurzel aus 2 ziehen.

Log. von 2 ist = 0,30105000

Diesen mit 12 div. gibt 0,0250858.

Addirt man diesen zwölfmal zum Logarithme von 1, so erhält man folgendes Logarithmen-Täfelchen. In der zweiten und dritten Colonne sind die Saitenlängen und die Töne beigeschrieben, zu denen sie gehören.

Logarithmen	Saitenlänge	Töne
0,0000000	1,0000	c
0,0250858	1,0594	h
0,0501716	1,1225	b
0,0752575	1,1892	a
0,1003434	1,2599	gis
0,1254292	1,3348	g
0,1505150	1,4142	fis
0,1756008	1,4983	f
0,2006866	1,5874	e
0,2257724	1,6818	dis
0,2508583	1,7818	d
0,2759441	1,8878	cis
0,3010300	2,0000	c

Man kann diese Tafel auch ohne Logarithmen berechnen. Zieht man aus 12 die 12te Wurzel, so findet man diese = 1,0594. Man kann diese leicht mit Hülfe der Quadrat- und Cubiktafeln finden, wenn man nemlich zweimal nach einander die zweite Wurzel auszieht, und dann noch einmal die dritte. Multiplicirt man diese Wurzel dann 12mal mit sich selber, so erhält man eine Potenzenreihe, welche die geometrische Reihe der Saitenlänge ist. Mit Logarithmen war indeß die Rechnung kürzer.

Ich habe mit Fleiß dieses Beispiel gewählt, weil wir nachher in der Lehre von der Geschwindigkeit des Schalls diese Tafel noch gebrauchen werden.

§. 78.

Uebersicht der Lehre von den Logarithmen.

Fassen wir alles, was wir bis jetzt gehabt haben, in wenig Worte zusammen, so haben wir das Ganze dieser Lehre in folgenden Sätzen:

1) Man kann jede Zahl als Grundzahl zu einem logarithmischen System nehmen, und multipliciren und dividiren wird immer auf dieselbe Weise in Addiren und Subtrahiren verwandelt. Nimmt man die Zahl 10 zur Grundzahl, so erhält man die kürzesten Tafeln und zugleich die, welche für die Rechnung die bequemsten sind.

2) Erhebt man eine Grundzahl auf den Exponenten 0, so erhält man die Einheit. Erhebt man sie aber auf einen Exponenten, der ein wenig größer als 0 ist, so erhält man zur Potenz die Einheit und einen Decimalbruch, der immer um so kleiner ist, und in dem immer um so mehr Ziffern beständig werden, je kleiner der Exponent war.

3) Zeichnet man die logarithmische Linie mit Ordinaten und Abscissen, wie in Fig. 1, 2, 3 und 4, so sind die Abscissen die arithmetische Reihe der Exponenten, und die Ordinaten die geometrische Reihe der Potenzen.

In Fig. 4. ist a n der kleine Exponent z. B. von 0,0000001, und m n der Decimalbruch 0,000000230258 für die logarithmische Linie, deren Grundzahl 10 ist.

Ist es aber die Linie der natürlichen Logarithmen, dann ist der Decimalbruch m n = 0,0000001.

4) Ist die Grundzahl gegeben, dann ist der Decimalbruch nicht mehr willkührlich; — ist dieser gegeben, dann ist jene nicht mehr willkührlich.

Oder

Oder nach der Zeichnung: ist in Fig. 4. in dem rechtwinkligen Dreieck a m n das Verhältniß von a n : m n gegeben, so sind die Winkel bei a und m ebenfalls gegeben, und die logarithmische Linie ist bestimmt.

5) Jede Grundzahl führt auf einen andern Decimalbruch; allein in allen werden die Ziffern beständig, weil von jeder krummen Linie, das Gesetz ihrer Krümmung mag seyn welches es will, ein kleines Stückchen immer sehr nahe gerade ist. Das Verhältniß zwischen dem als sehr klein angenommenen Exponenten und dem Decimalbruch muß sich daher immer mehr einem beständigen nähern.

6) In zweien Logarithmensystemen verhalten sich die Logarithmen zu einander umgekehrt wie diese Decimalbrüche.

Der Decimalbruch der natürlichen Log. ist	1,00000
Der der Briggischen ist	2,30258
Der natürliche Logarithme von 10 ist	2,30258
Der Briggische Logar. von 10 ist	1,00000

Dieses Verhältniß zwischen den Decimalbrüchen beider Systeme nennt man den Modul dieser Systeme.

Und zwar nennt man den Modul des Briggischen Systems das Verhältniß 2,30258 : 1.

Und den Modul der natürlichen, das Verhältniß 1 : 2,30258 = 0,434294 : 1.

Weil nur diese beide Systeme berechnet sind, so versteht man immer unter Modul das Verhältniß, welches die Decimalbrüche dieser beiden zu einander haben, ohne daß man sie ausdrücklich nennt.

Wäre aber noch für eine andere Grundzahl ein logarithmisches System berechnet, z. B. für 3, dann müßte man, um Zweideutigkeiten zu vermeiden, jedesmal beim

Ausdruck Modul bemerken, welche Logarithmensysteme gemeint wären.

Sagt man aber jetzt: der Modul der natürlichen Logarithmen ist 0,434294 : 1, so versteht es sich von selber, daß dieses in Bezug auf die Briggischen gesagt ist.

7) Erhebt man die Grundzahl des einen Systems auf einen Exponenten, der dem Modul des andern gleich ist, so erhält man die Grundzahl des andern.

$$10^{1\,:\,2{,}30258} = 2{,}718.$$

So fanden wir in §. 73. 4) die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, als der Decimalbruch 1 gegeben war, und wir das Verhältniß zwischen dem Decimalbruch der natürlichen Logarithmen und dem der Briggischen kannten, welches wie 1 : 2,30258 ist.

8) Bei den Logarithmen hat man daher nur auf zwei Dinge zu merken: 1) auf die Grundzahl, und 2) auf den beständigen Decimalbruch, oder das Verhältniß zwischen diesem und seinem Exponenten.

Werden aber zwei verschiedene Logarithmensysteme mit einander verglichen, so hat man auch noch das Verhältniß zu merken, welches zwischen den beiden Decimalbrüchen der beiden Systeme statt findet. Dieses Verhältniß heißt: der Modul, oder das Maaß, weil mit ihm die Logarithmen beider Systeme gleichsam gegen einander abgemessen werden. So sagt der Modul der natürlichen Logarithmen 1 : 2,30258, daß das Verhältniß zwischen ihnen und den Briggischen sey wie 1 : 2,30258.

9) Man sieht hieraus, daß die Lehre von den Logarithmen äußerst einfach und leicht ist, da sie sich nur auf so wenige Begriffe gründet, und das Gesuchte immer so vom Gegebenen abhängt, daß es sich leicht finden läßt.

Auch

Auch die Berechnung ist leicht. Ein Potenztäfelchen hat man für die Zahl 10 ziemlich geschwinde berechnet, und die Berechnung der Logarithmen ist dann nicht weitläuftig.

Hat man die Logarithmen für die Grundzahl 10, ist es sehr leicht, für jede andere gegebene Grundzahl ein Potenzentäfelchen zu rechnen, da das Ausziehen der 10ten, 100ten, 1000ten Wurzel nur ein Dividiren mit 10; 100 oder 1000 ist, sobald man für eine Grundzahl die Logarithmen fertig hat.

Oder wenn statt der Grundzahl der beständige Decimalbruch gegeben ist, so hat man das Verhältniß zwischen diesem und dem der Zahl 10, also den Modul, und man findet dann die Grundzahl, indem man 10 auf einen Exponenten erhebt, der diesem Modul gleich ist.

10) Wie sehr elementar die Lehre von den Logarithmen ist, sieht man schon daraus, daß man noch keine Methode gefunden hat, die Logarithmen mit Hülfe der höhern Rechnungen zu finden, die schneller, bequemer und einfacher wäre wie die ganz gemeine mit dem Potenzentäfelchen, welche auf den ersten Begriffen des Addirens und Multiplicirens beruht, und weiter keine Kenntnisse voraussetzt wie die der vier Species.

So wird man auch nie durch die höhern Rechnungen eine Methode des Dividirens finden, die bequemer und kürzer wäre wie die ganz gemeine. Leichte Aufgaben führen immer auf leichte Rechnungen, und verfällt man mit ihnen auf schwerere Rechnungen, so kann man dieses immer für ein Zeichen halten, daß man nicht auf dem rechten Wege ist. Daß es unmöglich sey durch die höhern Rechnungen einen einzelnen Logarithmus geschwinder zu berech=

berechnen, als auf die gewöhnliche Weise mit dem Potenzentäfelchen, davon kann man sich leicht durch einen Versuch überzeugen.

Will man aber eine ganze Menge Logarithmen berechnen, einen Canon Logarithmorum, so wie Briggs, Blaq, Vega, so beruhet alles auf dem Einschalten, und diese Methode ist dann wieder so bequem wie jede andere.

Man berechnet nemlich blos die Logarithmen für die ersten 100 oder 200 Primzahlen, und für alle Produkte von diesen findet man sie durch bloßes Addiren. Da, wo dann weiter in den Täfeln Primzahlen vorkommen, entstehen Lücken, und diese müssen durch Einschalten ausgefüllt werden.

Aber auch das Einschalten ist leicht, uud setzt keine andere Begriffe als die der gewöhnlichen Rechenkunst voraus. Liegen die beiden Logarithmen, zwischen die man einschalten will, nahe beisammen, so kann man das kleine Stück der krummen Linie als gerade ansehen, und das Einschalten ist ein bloßer Regula de Trisatz, weil man das kleine Stückchen als gerade, und folglich als eine arithmetische Linie erster Ordnung ansehen kann.

Liegen die Logarithmen, zwischen die eingeschaltet werden soll, weiter von einander, so kann man das kleine Stückchen der logarithmischen Linie, welches die Ordinaten abschneiden, zwar nicht mehr als gerade ansehen, also nicht mehr als eine arithmetische Linie erster Ordnung. Allein man kann es als eine arithmetische Linie der zweiten, dritten, vierten, fünften oder einer noch höhern Ordnung ansehen, und indem man durch Abziehen der vorigen Logarithmen die zweiten, dritten oder

vierten

vierten Differenzen sucht, so kann man die Reihe durch Addiren, dann nach Belieben über die Lücke fortsetzen. — Was dieses Verfahren sehr erleichtert, ist, daß nie zwei Primzahlen unmittelbar auf einander folgen, da die nächste Zahl immer gerade, und also durch 2 theilbar ist. Man hat daher immer eine Probe für die Schärfe seiner Rechnung. Die fleißigen Berliner Rechner, Ideler und Hobert, haben von dieser Art des Einschaltens einen sehr ins Große gehenden Gebrauch bei der Berechnung ihrer Decimaltafeln gemacht, wie wir dieses in der Trigonometrie sehen werden.

11) Die ersten Erfinder und Berechner der Logarithmen sind in ihren Schriften über sie sehr dunkel. Es ist für uns schwer zu verstehen, wie Neper, Briggs und Halley sich die Sache vorgestellt haben. So lange eine Lehre noch neu ist, hat sie gewöhnlich eine gewisse Dunkelheit, und die leichtern und einfachern Darstellungen werden erst später gefunden.

Die spätern Mathematiker scheinen oft geglaubt zu haben, daß sich die Lehre von den Logarithmen nur durch Buchstaben-Rechenkunst vortragen lasse, und scheinen den Umstand übersehen zu haben, daß man nur dann gut über eine Sache schreibt, wenn man der Sache angemessen schreibt — das heißt: daß man eine Sache, die noch zur Rechenkunst des täglichen Lebens gehört, auch in der Sprache des täglichen Lebens vorträgt.

Da die Lehre von den Logarithmen auf eine so gelehrte Weise mit Buchstaben-Rechenkunst vorgetragen wurde, so war sie aus den Rechenbüchern des täglichen Lebens verbannt. Der erste, welcher sie wieder in sie einführte, war ein berühmter Annalyst, — der aber das Talent

besaß,

besaß, eine Sache mit und ohne Buchstaben-Rechnung vorzutragen, je nachdem er diesen oder jenen Vortrag der Sache für angemessener hielt.

12) Man findet sehr häufig, daß die Lehre von den Logarithmen den Anfängern Schwierigkeiten macht, und daß sie, wenn sie sie durchstudirt haben, sie sich keine Rechenschaft davon geben können: was nun eigentlich die Logarithmen sind?

Diese Dunkelheit des Begriffs hat ihren Grund weder im Schüler noch in der Schwierigkeit der Sache. — Sie rührt theils vom griechischen Kunstworte, theils vom Vortrage mit Buchstaben-Rechnung — und theils von der unendlichen Menge Zahlen her, die den Anfänger, so wie er die Tafeln öffnet, verwirren und verblenden.

Vermeidet man den griechischen Namen, — erklärt man die Sache nicht durch Buchstaben-Rechnung, sondern blos durch Worte und Zahlen, und zeigt man dem Anfänger keine Tafeln als höchstens die kleinen von La Lande, so wird er nicht verwirrt werden, sondern eine deutliche Vorstellung von einer Sache erhalten, die an sich sehr einfach und leicht ist.

Man könnte den griechischen Namen Logarithmen sehr schicklich durch Verhältnißzähler übersetzen. Indeß da jenes griechische Wort von allen Mathematikern von Europa angenommen ist, so thut man besser, es unübersetzt beizubehalten.

Eine Lehre, die an sich leicht ist, wird, wenn sie auf eine gelehrte Weise vorgetragen wird, immer unverständlicher, als eine wirklich schwere Lehre, wenn diese so vorgetragen wird. Bei jener glaubt der Leser, daß dasjenige was er versteht, noch das Rechte nicht sey, weil es ihm so einfach und leicht vorkommt, und er es gerade des gelehrten Vortrags wegen für schwer hält. Er kommt dann oft in den Fall, in dem jener Bauer war, der immer am Eingange ins Schauspielhause suchte, als er schon wirklich darin war, und der endlich an der andern Seite wieder auf die Straße gerieth.

Bei den Logarithmen kann dieses um so leichter der Fall seyn, da alle Begriffe, die bei ihnen zum Grunde liegen, so sehr leicht und einfach sind. Selbst die constanten Ziffern des Decimalbruchs, welche die Anfänger gewöhnlich am meisten in Erstaunen setzen, sind leicht zu erklären, sobald man sich erinnert, daß jedes sehr kleine Stück einer krummen Linie sehr nahe gerade ist, und daß dann auch sehr nahe alles das von ihm gilt, was von den geraden Linien gelehrt worden, wodurch die arithmetischen Reihen erster Ordnung dargestellt wurden.

§. 79.
Der binomische Lehrsatz.

Wir haben im zweiten Theile gezeigt, daß das Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzeln auf dem binomischen Lehrsatze beruhe, nach welchem man jede Wurzel als aus zwei Theilen bestehend ansehen könne.

Wir fanden, daß wenn die Zahl $a + b$ auf das Quadrat erhoben wurde, dieses gleich sey $a^2 + 2ab + b^2$.

Wurde sie auf den Cubus erhoben, so war dieser $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ohne das dort Angeführte zu wiederholen, so wollen wir die Zahl $a + b$ durch fortgesetztes Multipliciren mit sich selber auf die 4te, 5te, 6te Potenz erheben, und sehen, welche Form jede Potenz hat.

Zur

Zur leichtern Uebersicht stellen wir sie in folgendes Täfelchen zusammen.

$a + b$ auf der

1 Pot. $= a + b$

2 . . $= a^2 + 2ab + b^2$

3 . . $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

4 . . $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5 . . $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

6 . . $= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

Es würde überflüßig seyn, das Täfelchen weiter fortzusetzen, da man leicht das Gesetz erkennt, nach dem es fortschreitet. Nemlich:

1) Jede horizontale Reihe hat ein Glied mehr als die Potenz zu der sie gehört. Die von der sechsten Potenz hat sieben Glieder.

2) Die Exponenten von a bilden eine fallende arithmetische Reihe, 6, 5, 4 . . . Die von b bilden eine steigende. 1, 2, 3 . . . .

3) Die Zahlen, welche in jedem Gliede vor a b stehen, (die Coefficienten) bilden von oben nach unten arithmetische der ersten, zweiten, dritten, vierten Ordnung, deren Glieder von vorne bis in die Mitte wachsen, und dann wieder gegen das Ende auf dieselbe Weise abnehmen, so daß alle Glieder, welche gleichweit vom vordern oder vom hintern Ende entfernt sind, auch gleich groß sind.

1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Wir

Wir können daher die Coefficienten leicht aus dem Täfelchen über die arithmetischen Reihen höherer Ordnung herleiten, welches wir oben §. 38. mitgetheilt haben.

4) Auch kann man diese Coefficienten leicht aus den Exponenten a und b berechnen. Will man z. B. in der sechsten Reihe den Coefficienten des 5ten Gliedes, so hat man $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{360}{24} = 15$.

Man dividirt nemlich das Produkt der vier vorhergehenden Exponenten von a mit dem Produkte der vier folgenden von b.

5) Wenn man daher $a + b$ auf die dritte Potenz erheben will, so kann man dieses auch auf folgende Weise schreiben:

$$a^3 + \frac{3}{1} a^2 b + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} a b^2 + b^3.$$

Wo dann die Brüche die Coefficienten sind.

6) Wenn man statt $a + b$ die Zahl $a - b$ auf die höhern Potenzen erhebt, so erhält man folgendes Täfelchen.

$a - b$ auf der

1ten Potenz $= a - b$

2 . . . $= a^2 - 2ab + b^2$

3 . . . $= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

4 . . . $= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

5 . . . $= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Man sieht, daß in diesem Falle das erste Glied immer + ist, und daß bei den folgenden die Vorzeichen immer regelmäßig mit + und − abwechseln.

§. 80.

Die Versetzung der Buchstaben.

Wenn man die Entstehung der Coefficienten näher betrachtet, so findet man, daß sie anzeigen, wie oft sich die Buchstaben in dem Gliede versetzen lassen, zu dem sie gehören.

1) In der ersten Potenz haben die beiden Glieder a und b zum Coefficienten die Einheit, welche, da sie nicht multiplicirt auch nicht beigeschrieben wird. Es ist bei a und b nur eine Ordnung möglich.

2) In der zweiten Potenz hat das erste Glied a^2 oder aa wieder den Coefficienten 1; weil hiebei nur die eine Ordnung möglich ist.

Das zweite Glied ab hat den Coefficienten 2, weil hier zwei Ordnungen möglich sind, nemlich ab und ba.

Das dritte Glied bb hat wieder den Coefficienten 1.

3) Bei der dritten Potenz hat das erste Glied aaa, der Coefficient 1.

Das zweite aab den Coefficienten 3, und hier sind drei Versetzungen möglich, aab, aba, baa.

Das dritte abb hat ebenfalls den Coefficienten 3, und das vierte bbb hat wieder 1 zum Coefficienten.

Auf diese Weise kann man alle Glieder der Tafel durchgehen, und man findet, daß der Coefficient jedesmal die Versetzungen angibt, welche unter den Buchstaben möglich sind, aus denen die Glieder bestehen.

4) Man sieht leicht ein, daß jedes Glied im Cubus aus drei Buchstaben bestehen wird: denn es ist ein Produkt aus den drei Faktoren $a+b$, $a+b$ und $a+b$, und jeder Buchstabe des ersten muß mit jedem Buchstaben

des zweiten und mit jedem Buchstaben des dritten multiplicirt werden.

Daß aber jedes Glied so oft vorkommen wird, als Buchstabenversetzungen in ihm möglich sind, übersieht man am leichtesten, wenn man die Multiplikation macht, und die Glieder, die nachher unter einen Coefficienten zusammengezogen werden, näher zusammenstellt.

$$\begin{array}{cccc} & & a+b & \\ & & a+b & \\ \hline aa+ & ba+ab & +bb & \\ & & a+b & \\ \hline aaa+ & aab+baa+aba & +abb+bba+bab & +bbb \end{array}$$

5) Je höher die Potenz wird, desto mehr Buchstaben kommen in jedes Glied. Je mehr ungleiche unter diesen sind, desto mehr Versetzungen sind möglich. Je mehr gleiche, desto weniger Versetzungen. Sind alle gleich, so ist nur eine möglich.

6) Wir wollen zuerst untersuchen, wie viele Versetzungen jedesmal möglich sind, wenn alle ungleich sind.

Bei zwei Buchstaben a und b sind nur zwei Versetzungen möglich, nemlich ab und ba.

Bei drei Buchstaben a b und c sind sechs Versetzungen möglich. Wenn nemlich a zuerst steht, so hat man zwei Versetzungen abc und acb. Steht b zuerst, so hat man wieder zwei Versetzungen bac und bca. Steht endlich c zuerst, so hat man wieder zwei Versetzungen cab und cba. Daher ist in allem die Zahl der Versetzungen $3.2.1 = 6$.

Hat man vier Buchstaben a b c und d, so kann jeder

der die erste Stelle einnehmen, und in jedem Falle geben die drei übrigen sechs Versetzungen, nemlich:

a b c d
a b d c
a c b d
a c d b
a d b c
a d c b u. s. w.

Die Anzahl der Versetzungen ist also $4 . 3 . 2 . 1 = 24$.

Hat man fünf Buchstaben, so kann jeder die erste Stelle haben, und die vier übrigen lassen sich 24mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen

$$5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120.$$

Man sieht, nach welchem Gesetz dieses fortgeht, und es ist leicht ein Täfelchen zu entwerfen, in dem man gleich die Anzahl der Versetzungen findet, sobald die Anzahl der Buchstaben bekannt sind.

Anzahl der Buchstaben.	Anzahl der Versetzungen.
1	$1 = 1$
2	$2 . 1 = 2$
3	$3 . 2 . 1 = 6$
4	$4 . 3 . 2 . 1 = 24$
5	$5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$
6	$6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$
7 . . .	$7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 5040$
8 . .	$8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320$
9 . .	$9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 362880$
10 . .	$10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 3628800$

7) Diese Tafel gilt aber nur, wenn alle Buchstaben ungleich sind. Denn wenn zwei oder mehrere gleich sind,

 so

so wird die Anzahl der Versetzungen geringer, und wenn alle gleich sind, so hat man nur eine einzige.

Sind zwei Buchstaben gleich, so wird die Anzahl der Versetzungen um die Hälfte vermindert, nemlich um 2.1.

Sind drei Buchstaben gleich, so wird sie um 3.2.1 = 6 vermindert.

Sind vier Buchstaben gleich, so wird sie um 24 vermindert, und so kann man dasselbe Täfelchen wieder beim Dividiren gebrauchen.

Aufgabe. Man hat 6 Buchstaben, unter denen sind 4 einander gleich, wie oft lassen sie sich versetzen?

$\frac{720}{24} = 30$mal.

Wären außer den vier gleichen die beiden übrigen auch noch gleich gewesen, z. B. a a a a b b, so hätte man 30 noch mit 2 dividiren müssen, um die Anzahl der Versetzungen zu finden.

8) Wir können jetzt mit Hülfe dieses Täfelchen den Coefficienten für jedes Glied von jeder Potenz von $a+b$ bestimmen.

Man verlangt ihn für das vierte Glied der dritten Potenz, welches $a^3 b^3$ ist, oder a a a b b b. Dieses besteht aus 6 Buchstaben, die 720 Versetzungen geben, wenn alle ungleich sind. Da aber drei und drei gleich sind, so muß man 720 zweimal mit 6 dividiren, wo man dann 20 mögliche Versetzungen erhält. Der Coefficient dieses Gliedes ist also 20.

Aufgabe 1. Welches ist das 5te Glied von $(a+b)^{16}$? Antw. $1820\ a^{12} b^4$.

Aufgabe 2. Welches ist das vierte von $(a-b)^{100}$? Antw. $-161700\ a^{97} b^3$.

Aufgabe 3. Welches sind die beiden mittlern Glieder der Reihe von $(a-b)^{17}$?

§. 81.

§. 81.

Das Ausziehen der höheren Wurzeln.

Wir können nun aus jeder Zahl jede höhere Wurzel auf dieselbe Weise ausziehen, wie wir dieses im zweiten Theile an der Cubikwurzel zeigten.

Wir gebrauchen hiebei folgendes Wurzeltäfelchen, welches bis zur 10ten Potenz geht.

Wurzeln	2te	3te	4te	5te	6te	7te Potenz
1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128
3	9	27	81	243	729	2187
4	16	64	256	1024	4096	16384
5	25	125	625	3125	15625	78125
6	36	216	1296	7776	46656	279936
7	49	343	2401	16807	117649	823543
8	64	512	4096	32768	262144	2097152
9	81	729	6561	59049	531441	4782969

Wurzeln	8te	9te	10te Potenz
1	1	1	1
2	256	512	1024
3	6561	19683	59049
4	65536	262144	1048576
5	390625	1953125	9765625
6	1679616	10077696	60466176
7	5764801	40353607	282475249
8	16777216	134217728	1073741824
9	43046721	387420489	3486784401

Um die Wurzel aus einer Zahl zu ziehen, so theilt man sie zuerst in Klassen, und gibt jeder Klasse so viel

Ziffern,

Ziffern, als die Ordnung der Wurzel ist. Sucht man die fünfte Wurzel, so erhält jede Klasse fünf Ziffern, wobei man Acht gibt, daß da, wo sich die Ganzen und Decimalen scheiden, auch der Scheidungspunkt für zwei Klassen liege.

Ist die Zahl in Klassen eingetheilt, so sieht man im Wurzeltäfelchen nach, welche Wurzel zu den Ziffern der ersten Klasse gehört, wobei man auf dieselbe Weise verfährt, wie wir dieses beim Ausziehen der Cubikwurzel im zweiten Theile gesehen haben. Dasjenige, was man von der Wurzel gefunden, betrachtet man als den ersten Theil a, und das, was man noch sucht, als den zweiten Theil b. Diesen zweiten Theil findet man theilweise, und so wie man einen Theil von ihm hat, so nimmt man diesen zu den bereits gefundenen, und sucht dann das übrige. So fanden wir (S. 29. Theil 2.) die Cubikwurzel zuerst zu $200 + 30$, jenes war a und dieses b. darauf fanden wir sie zu $230 + 5$, wo jenes wieder a und dieses wieder b war.

Auf diese Weise läßt sich mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes jede Wurzel theilweise finden, und eine Gleichung wie folgende $x^5 = 27$ läßt sich direkt auflösen, indem man aus 27 die fünfte Wurzel zieht.

Allein das Ausziehen der höheren Wurzeln mit Hülfe des binomischen Lehrsatzes ist sehr weitläuftig, wie man dieses an dem Beispiele sehen kann, welches Seite 40. der oben angeführten Cubiktafeln gegeben ist. Die Methode, die höheren Wurzeln mit Hülfe der arithmetischen Reihen auszuziehen, welche wir oben gelehrt haben, verdient deswegen den Vorzug, besonders da man mit ihr nicht allein solche Gleichungen wie $x^5 - 27 = 0$, sondern

dern auch solche, wie $x^7 + 6x^5 + 4x^3 - 1220 = 0$ auflösen kann, welches über die Kräfte jeder andern Methode geht, die man bis jetzt erfunden hat.

Daß durch die Logarithmen das Ausziehen der Wurzeln in eine bloße Division verwandelt ist, haben wir oben schon bemerkt, und hiedurch sind diese sonst so beschwerlichen Rechnungen so leicht wie jede gewöhnliche Division geworden.

§. 82.

Der Polynomische Lehrsatz.

1) Die Multiplikation einer vieltheiligen Wurzel mit sich selber, führt auf den polymonischen Lehrsatz; ganz auf dieselbe Weise wie die einer zweitheiligen Wurzel auf den binomischen.

Es sey die dreitheilige Wurzel $a + b + c$ gegeben, so erhält man zum Quadrat derselben

$$aa + ab + ba + ac + ca + bb + bc + cb + cc.$$

Weil jedes Glied mit sich selber und mit jedem andern muß multiplicirt werden. Dieses gibt 9 Glieder.

Multiplicirt man diese noch einmal mit $a + b + c$, so erhält man den Cubus, der aus 27 Glieder besteht.

Beim Biquadrat würden 81 Glieder zum Vorschein kommen, und bei der 5ten Potenz 243.

Allein mehrere Glieder sind gleich bedeutend, sie können daher in eins zusammengezogen werden, und der vorgesetzte Exponent zeigt dann an, wie viele in eins zusammengezogen sind.

So bleiben dann beim Quadrat von 9 Glieder 6
beim Cubus von 27 . . 10
beim Biquadrat von 81 . . 15
bei der fünften Potenz von 243 . . 21

Man sieht, daß die Zahlen 6, 10, 15, 21 eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, und daß es leicht ist, die Anzahl der Glieder zu bestimmen, die jede Potenz einer der theiligen Wurzeln hat.

2) Bestände die Wurzel aus 4 Theilen, z. B. aus $a+b+c+d$, so würde sie in der zweiten Potenz 16, in der dritten 64, in der vierten 256 Glieder haben.

Da aber unter diesen wieder sehr viele Gleich sind, die sich in eins zusammenziehen lassen, so bleiben

für die erste Potenz 4
für die zweite . . 10
für die dritte . . 20
für die vierte . . 35

Man sieht, daß diese Zahlen eine arithmetische Reihe dritter Ordnung bilden, und daß es leicht ist die Anzahl der Glieder anzugeben, die eine jede viertheilige Wurzel auf jeder Potenz hat.

3) Eine fünftheilige Wurzel wird in der zweiten, dritten, vierten Potenz 25, 125 und 625 Glieder haben. Werden die gleichen zusammengezogen, so bleiben 5, 10, 35 übrig, welche eine arithmetische Reihe vierter Ordnung bilden. Man sieht leicht das Gesetz, nach dem dieses fortschreitet.

4) Allein das Gesetz, nach dem die Potenzen in den Horizontalreihen wachsen und abnehmen, ist bei den vieltheiligen Wurzeln ungleich verwickelter, und es ist um sehr viel schwerer, ein Glied irgend einer Potenz von

einer

einer vieltheiligen Wurzel anzugeben, als wir dieses im vorigen Paragraph für die zweitheiligen fanden.

Wir stehen hier an der Grenze eines neuen Abschnitts der Rechenkunst, welcher in den neuern Zeiten unter dem Namen der Combinations-Lehre berühmt geworden, und welche alles umfaßt, wobei es auf die Anordnung einer gegebenen Anzahl von Dingen nach gewissen Gesetzen ankommt. Die Mathematiker hatten sich mit diesem Theile der Rechenkunst schon seit ein paar Jahrhunderten beschäftigt, ohne ihn zu einer großen Vollkommenheit zu bringen; bis endlich Prof. Hindenburg diese Lehre aufs neue bearbeitet, oder sie vielmehr aufs neue geschaffen hat, und ihr den Namen: Combinatorische Analysis gegeben.

Wir begnügen uns diese Lehre nur im Vorbeigange zu berühren, da sie über die Grenze der Anfangsgründe der höheren Rechenkunst hinausgeht, und wir im praktischen Theile dieses Werks keine Gelegenheit haben, Gebrauch davon zu machen.

Die Wichtigkeit des binomischen Lehrsatzes, und die große Menge merkwürdiger Eigenschaften, die der polynomische darbietet, haben beide von jeher zu einem Lieblingsgegenstand der Untersuchungen der größten Mathematiker gemacht, und die Entdeckung von Neuton, daß für alle Arten von Exponenten die Form gelte, welche man früher für ganze Exponenten gefunden hatte, wurde für so wichtig gehalten, daß man sie auf den Marmor seines Grabmals in der Westmünsterabtei eingegraben hat.

Die ebene Trigonometrie.

§. 1.

Wenn drei gerade Linien sich dreimal schneiden, so liegen sie in einer Ebene, und es entsteht ein Dreieck. (Th. II. S. 168.) Dieses besteht aus drei Seiten und drei Winkeln, die so von einander abhängen, daß man, sobald drei von diesen sechs Stücken gegeben sind, man die drei übrigen aus ihnen herleiten kann. Nur müssen die drei gegebenen Stücke unter sich nicht von einander abhängen. Da der dritte Winkel von der Größe der beiden übrigen abhängt, so bestimmen die drei Winkel nicht die Größe eines Dreiecks. Hingegen die drei Seiten bestimmen sie, weil diese von einander unabhängig sind.

Wie man aus den drei gegebenen Stücken die drei gesuchten durch Zeichnung findet, haben wir in der Geometrie gesehen. (Theil II. S. 184.) Jetzt soll gelehrt werden, wie man aus den drei bekannten Stücken die drei unbekannten durch Rechnung findet.

§. 2.

Winkelmessung.

Das natürlichste Maas der Winkel ist der Kreisbogen, welcher sich zwischen den Schenkeln eines Winkels beschreiben läßt, und der immer genau in demselben Verhälthältnisse größer wird, in dem der Winkel wächst. — Allein er ist eine krumme Linie, und läßt sich nicht unmittelbar mit den Seiten des Dreiecks vergleichen.

Die Sehne, welche die Oeffnung des Winkels mißt, ist ein fast eben so einfaches Maas. Sie ist eine gerade Linie, und läßt sich mit den Seiten des Dreiecks leicht vergleichen; — da in jedem Dreiecke sich die Seiten verhalten wie die halben Sehnen der gegenüber stehenden Winkel, wann man diese verdoppelt.

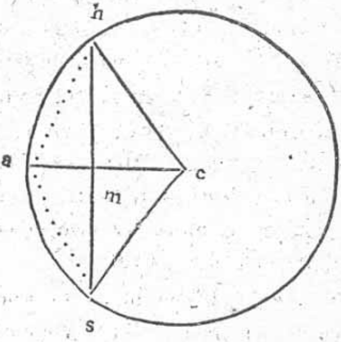
Allein die Sehnen wachsen ungleichförmig, wenn die Winkel gleichförmig zunehmen. Die Sehne des Winkels von 50 Grad ist nicht 5mal so groß als die Sehne des Winkels von 10 Grad. Diese ist 174, und jene ist nicht 870, sondern nur 766, wenn der Radius 1000 ist.

Man berechnete deswegen schon sehr frühe Sehnentafeln, in denen man fand, wie groß die Sehne von jedem Winkel ist. Die älteste findet sich in der Astronomie des Ptolomäus, eines Alexandrischen Astronomen, der im zweiten Jahrhundert nach Christi Geburt lebte.

Ungefehr 800 Jahre nach Ch. Geb. bemerkten die Arabischen Astronomen, daß es bequemer seyn würde, wenn man statt der ganzen Sehne des Winkels, die halbe Sehne des doppelten gebrauchte, also den Sinus des Winkels, weil in jedem Dreiecke sich die Seiten zu einander verhalten wie der Sinus der gegenüber stehenden Winkel. (S. Theil II. Seite 251.) *)

In

*) Der Name Sehne ist vom Bogen entlehnt worden, und Sinus heißt der Schooß oder der Raum zwischen den beiden Schenkeln. Aehnlichkeit der Figur mit Theilen des menschlichen Körpers, führte die ältern Mathematiker auf diese Benennungen.



In der Figur ist h a die Sehne des Winkels h c a, und h m ist die halbe Sehne des doppelten Winkels h c s oder der Sinus des Winkels h c a.

h c ist der Radius des Kreises, der auch der Sinus totus genannt wird, weil der Sinus von 90° dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Der Sinus, welcher von h senkrecht auf den Halbmesser c a fällt, theilt diesen in zwei Theile, von denen c m der Cosinus, und a m der Quersinus (sinus versus) heißt.

Außer den Sinus können auch noch Tangenten und Sekanten als Maaß der Winkel gebraucht werden, von denen im folgenden Paragraph soll gehandelt werden.

§. 3.

Entstehung der trigonometrischen Linien.

1) Außer dem Kreisbogen und der Sehne können noch acht verschiedene gerade Linien als Maaß der Winkel gebraucht werden. Nemlich:

Sinus und Cosinus.
Sinus versus und Cosinus versus.
Tangente und Cotangente.
Secante und Cosecante.

Jede von diesen verschiedenen Linien kann zum Maaß eines Winkels dienen, sobald man 1) ihre Länge,
2) ihre Lage,
und 3) ihr Zu- und Abnehmen kennt.

Sind diese drei Stücke gegeben, so ist auch der Winkel bestimmt, dem sie zugehört, und sie kann nur einem Winkel zugehören. Sind aber nur die beiden ersten Stücke gegeben, nemlich ihre Länge und ihre Lage, so gehört sie jedesmal zweien Winkeln an. Dasselbe ist der Fall, wenn das erste und dritte gegeben ist.

Ist aber endlich nur ihre Länge gegeben, so gehört sie jedesmal zu vier verschiedenen Winkeln.

2) Die Entstehung der verschiedenen trigonometrischen Linien aber sieht man leicht in einer Figur wie Fig I. Taf. III. In dieser sieht man zugleich wie ihre Länge, ihre Lage, und ihr Zu- und Abnehmen sich ändert, indeß der Winkel gleichförmig durch alle vier Quadranten am Wachsen bleibt.

Man beschreibe, wie in dieser Figur, einen Kreis mit einem willkührlichen Halbmesser, und theile ihn durch zwei sich im Mittelpunkt senkrecht durchschneidende Linien in vier Quadranten. An den Punkt a ziehe man eine Tangente, und an den Punkt b eine Cotangente, beide von unbestimmter Länge.

In Hinsicht der Lage nenne man was links liegt positiv, und was rechts liegt negativ. Eben so nenne man

was

was oben ist positiv, und was unten ist negativ. Um beides leichter von einander unterscheiden zu können, so punktire man dasjenige, was man negativ genannt hat.

Man lasse endlich eine Linie von unbestimmter Länge sich um den Punkt c im Kreise herum drehen, so wird diese alle mögliche Neigungen gegen die Linie a d und b a annehmen, und den Kreis, die Tangente und Cotangente immer auf andern Punkten schneiden.

Läßt man da, wo sie den Kreis schneidet, z. B. in h eine senkrechte Linie hm auf a c fallen, so heißt diese der Sinus des Winkels a c h.

Der Winkel h c b ist die Ergänzung des Winkels ach zu einem rechten. Läßt man aus h eine Senkrechte auf die Linie b c fallen, so heißt h n der Cosinus des Winkels ach.

Das Stück a m ist der Sinus versus, und das Stück b n der Cosinus versus des Winkels a c h.

Das Stück k a, welches die Linie in k von der Tangente abschneidet, heißt die Tangente, und das Stück o b die Cotangente des Winkels ach.

Das Stück k c heißt die Secante, und das Stück o c die Cosecante des Winkels a c h.

Das Stück, welches den Kreisbogen von der Linie c o abschneidet, heißt der Radius des Winkels. Dieser wird als die Einheit bei allen diesen Linien angenommen, da er die einzige ist, deren Größe sich nicht ändert. Man theilt ihn gewöhnlich in 10 Millionentheile, und berechnet wie viele von diesen Theilen auf jede der 8 trigonometrischen Linien gehen, wenn der Winkel um 1 Minute

oder

oder um 1 Sekunde größer wird. Man findet dieses für alle Linien in den trigonometrischen Tafeln..

3) Alle trigonometrischen Linien sind in Hinsicht ihrer Lage im ersten Quadranten positiv.

Vier von diesen Linien sind mit dem Winkel am wachsen. Nemlich Sinus, Sinus versus, Tangente und Secante.

Die vier andern, die sich auf die Ergänzung des Winkels zu 90 Grad beziehen, sind am abnehmen, da diese Ergänzung abnimmt. Nemlich: Cosinus, Cosinus versus, Cotangente und Cosecante.

So wie der Winkel ein rechter wird, verschwindet der Ergänzungswinkel, und diese vier Linien werden Null. Der Sinus und Sinus versus werden dem Halbmesser gleich, und Tangente und Secante werden unendlich.

Im zweiten Quadranten kommen der Cosinus p n und die Cotangente v b wieder zum Vorschein. Sie sind aber nun der Lage nach verneint. Ebenfalls ist die Tangente r a, die zum Winkel a c p gehört, negativ. Die Cosecante c v ist positiv, weil sie auf dem Schenkel c p des Winkels a c p liegt. Hingegen die Secante r c desselben Winkels ist negativ, weil sie auf der Verlängerung des Schenkels c p liegt.

Das Zu- und Abnehmen der trigonometrischen Linien in den verschiedenen Quadranten, übersieht man am leichtesten in einem Täfelchen, in dem man auch zugleich bemerkt, ob sie bejaht oder verneint sind.

Quadrant	Winkel	Sinus	Sinus versus	Tangente	Secante
1ter	a c h	h m Nim̃t zu +	a m Nim̃t zu +	k a Nim̃t zu +	k c Nim̃t zu +
2ter	a c p	p q Nim̃t ab +	q d Nim̃t ab —	r a Nim̃t ab —	r c Nim̃t ab —
3ter	a c t	t q Nim̃t zu —	q d Nim̃t zu —	k a Nim̃t zu +	k c Nim̃t zu —
4ter	a c s	s m Nim̃t ab —	a m Nim̃t ab +	r a Nim̃t ab —	r c Nim̃t ab +

Quadrant	Winkel	Cosinus	Cosinus versus	Cotangente	Cosecante
1ter	h c h	h n Nim̃t ab +	b n Nim̃t ab +	o b Nim̃t ab +	o c Nim̃t ab +
2ter	a c p	p n Nim̃t zu —	b n Nim̃t zu +	v b Nim̃t zu —	v c Nim̃t zu +
3ter	a c t	t w Nim̃t ab —	g w Nim̃t ab —	o b Nim̃t ab +	o c Nim̃t ab —
4ter	a c s	s v Nim̃t zu +	g w Nim̃t zu —	v b Nim̃t zu —	v c Nim̃t zu —

Man sieht, daß jede der acht trigonometrischen Linien zweimal zunimmt und zweimal abnimmt, indem der Winkel den ganzen Kreis durchläuft.

Ebenfalls wird jede zweimal bejaht und zweimal verneint.

Um die Figur möglichst einfach zu halten, so sind die vier Winkel a c h, a c p, a c t und a c s so gewählt, daß sie alle dieselbe Ergänzung haben, und ihre trigonometrischen Linien also dieselbe Länge.

So sind z. B. die vier Sinusse dieser vier Winkel in Hinsicht der Länge einander gleich, und wenn also blos die Länge gegeben ist, so weiß man noch nicht, welcher Winkel gemeint ist, ob der von 40° oder von 120°, oder 220° oder 320°.

Wird aber zugleich bestimmt, daß der Sinus mit dem Winkel am wachsen ist, so weiß man, daß er entweder im 1ten oder 4ten Quadranten seyn muß, also entweder 40° oder 220°. Ist endlich noch bekannt, daß er + ist, so weiß man, daß der Sinus nur zum Winkel von 40° gehören kann, und es findet weiter keine Zweideutigkeit mehr statt.

Unsere trigonometrische Tafeln enthalten nur die Länge der trigonometrischen Linien, ohne dabei zu bemerken, ob sie am Zunehmen sind und ob sie bejaht sind.

Bei den ebenen Dreiecken macht dieses keine Zweideutigkeit, da die Summe aller Winkel immer zwei Rechte seyn muß, und man ohnehin immer weiß, ob das Dreieck, welches man berechnet, spitzwinklig oder stumpfwinklig ist.

Hingegen bei den sphärischen Dreiecken, in denen die Winkel nahe zusammen sechs Rechte seyn können, entsteht oft eine Zweideutigkeit hiedurch, welche man nur dadurch heben kann, daß man mehrere Bestimmungsstücke in Betracht zieht.

4) Bei allen trigonometrischen Linien wird, wie schon oben bemerkt, der Halbmesser zur Einheit angenommen.

In Fig. I. ist hm der Sinus des W. ach. Auch nennt man das Verhältniß hm : hc den Sinus des W. ach. Ebenfalls nennt man den Quotienten $\frac{hc}{hm}$ den Sinus dieses Winkels.

ka ist die Tangente dieses Winkels. Auch wird der Quotient $\frac{ac}{ka}$ so genannt. Dieses gilt von allen übrigen Linien, und man muß sich die verschiedenen Benennungen für dieselbe Sache bemerken, weil bald diese, bald jene gebraucht wird, je nachdem es Bequemlichkeit und Kürze erfodert.

Da alle diese Linien vom Kreise abhangen, und da in allen diesen Verhältnissen der Halbmesser des Kreises vorkommt, so sieht man leicht, daß diese Verhältnisse immer dieselben bleiben, der Kreis mag groß oder klein seyn. — Wenn der Sinus eines gewissen Winkels sich zur Tangente desselben Winkels verhält, wie 2 zu 3, so wird dieses Verhältniß immer dasselbe bleiben, der Radius des Kreises mag einen Fuß oder 10 Fuß betragen.

Anmerkung. Diese Verhältnisse oder diese Quotienten, welche wir Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. nennen, werden auch wohl trigonometrische Funktionen genannt. Unsere trigonometrische Tafeln enthalten diese Verhältnisse zwischen der gegebenen Linie und dem Halbmesser, und da diese Verhältnisse auch noch bei andern Rechnungen vorkommen, so kann man sich bei dieser auch der trigonometrischen Tafeln bedienen, obschon ihr Hauptgebrauch immer in der Berechnung der Dreiecke besteht.

§. 4.

Die Berechnung der trigonometrischen Linien.

Wenn man Fig. I. betrachtet, so sieht man, daß alle trigonometrische Linien, die zu einem Winkel gehören, rechtwinklichte Dreiecke bilden, die alle einander ähnlich sind, und in denen eine Seite dem Radius gleich ist, den wir = 1 setzen. Hieraus folgt, daß die Berechnung der trigonometrischen Linien leicht ist, sobald man von den 8 Linien nur eine kennt.

1) Gesetzt es sey für den W. ach der Sinus hm bekannt, so findet man den Cosinus $hn = mc$ nach dem pytagoräischen Lehrsatze $1^2 - hm^2 = \text{Cos.}\, hn^2$, und hieraus die Wurzel, gibt den Cosinus hn. Der Radius ist = 1.

2) Will man den Sinus versus, so zieht man von 1 den Cosinus $hn = mc$ ab.

3) Will man die Tangente ka, so hat man die beiden ähnlichen Dreiecke hmc und kac, die folgende geometrische Gleichung gibt: $mc : hm = ac : ka$. Da die drei ersten Glieder bekannt sind, so gibt dieses die Tangente $ka = \frac{hm\,.\,ac}{mc} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ Da $ac = 1$ ist, und also nicht multiplicirt.

Man findet also die Tangente, wenn man den Sinus mit dem Cosinus dividirt.

4) Wird die Sekante gesucht, so hat man in den beiden rechtwinklichten Dreiecken folgende Gleichung:

$mc : hc = ac : kc$ oder $\frac{hc\,.\,ac}{mc} = kc$ oder $\frac{1\,.\,1}{\text{cos.}} = \frac{1}{\text{cos.}}$

Man findet also die Sekante, wenn man den Radius mit dem Cosinus dividirt.

5) Wird der Cosinus versus bn gesucht, so hat man nur den Sinus von 1 abzuziehen.

6) Will man die Cotangente ob, so geben die beiden ähnlichen Dreiecken hnc und obc folgende Gleichung: $nc : hn = bc : ob$.

Da die drei ersten Glieder bekannt sind, so ist die Cotangente $ob = \frac{hn \cdot bc}{nc} = \frac{\cos.}{\sin.}$ Denn bc ist = 1 und multiplicirt also nicht.

Man findet also die Cotangente, wenn man den Cosinus mit dem Sinus dividirt.

7) Soll die Cosecante oc gesucht werden, so hat man in denselben Dreiecken folgende geometrische Gleichung: $nc : hc = bc : oc$. Da die drei ersten Glieder bekannt sind: so ist die Cosecante

$$oc = \frac{hc \cdot be}{nc} = \frac{1 \cdot 1}{\sin.} = \frac{1}{\sin.}$$

Wenn demnach der Sinus eines Winkels bekannt ist, so findet man das Quadrat des Cosinus, wenn man vom Radius das Quadrat des Sinus abzieht. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze:

Der Sinus versus ist $1 - \cos.$

Die Tangente ist $\frac{\sin.}{\cos.}$

Die Sekante ist $\frac{1}{\cos.}$

Der Cosinus versus ist $1 - \sin.$

Die Cotangente ist $\frac{\cos.}{\sin.}$

Die Cosecante ist $\frac{1}{\sin.}$

Man muß sich diese verschiedene Ausdrücke bemerken, weil bald der eine und bald der andere gebraucht wird. So schreibt man oft, je nachdem es die Kürze oder die Deutlichkeit fodert, statt Tangente vom Winkel a, $\frac{\sin.\ a}{\cos.\ a}$

Da diese Linien sich in Hinsicht ihrer Länge alle im zweiten, dritten und vierten Quadranten wiederholen, so bleiben die Ausdrücke dieselben.

§. 5.

Berechnung der Sinus.

1) Bei der Berechnung der trigonometrischen Tafeln, mußte man also zuerst die Größe der Sinus für alle Winkel berechnen. Aus diesen konnte man die andern trigonometrischen Linien auf die Weise herleiten, wie im vorigen §. ist gezeigt worden.

Die Sinus sind die halben Sehnen von Winkeln die doppelt so groß sind. Da man aus der Geometrie die Länge der Sehnen für viele Winkel kannte, so erleichterte dieses die Rechnung.

Wir haben Seite 280 der Geometrie, folgende Tafel über die Länge der Sehne berechnet.

	Winkel	Länge der Sehne	Länge des Sinus	Für den Winkel von
Im 6eck	60°	1,0000000	0,5000000	30°
Im 12eck	30	0,5176380	0,2588190	15
Im 24eck	15	0,2610524	0,1305262	7,5
Im 48eck	7,5	0,1308062	0,0654031	3,75
Im 96eck	3,75	0,0654382	0,0327191	1,875
Im 192eck	1,875	0,0327234	0,0163617	0,9375
Im 384eck	0,9375	0,0163622	0,0081811	0,46875
Im 768eck	0,46875	0,0081812	0,0040906	0,234375
Im 1536eck	0,23437	0,0040906	0,0020453	0,1171875
Im 3072eck	0,11718	0,0020453	0,0010227	0,0585937

Alle diese Sehnen ließen sich mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes berechnen. (Siehe Fig. 92. S. 277 Theil 2.)

Der Sinus vom kleinsten der 10 Winkel der vorigen Tafel, ist 0,0010227, der Winkel ist 3 Min. 31 Sek. Durch Halbiren findet man den Sinus eines Winkels, der nur halb so groß ist, denn bei kleinen Winkeln verhalten sich die Sinus gerade wie diese Winkel, wie man dieses in der vorigen Tafel sieht, wo jeder der drei letzten Sinus, bis auf 7 Decimalstellen die Hälfte des vorigen ist.

Man kann daher den Sinus für 1 Minute nach folgendem Regula de Tri-Satze berechnen:

$$3,' \; 31'' : 1' = 0{,}001027 : x$$

und $x = 0{,}0002909 =$ sin. für 1 Min.

2) Die vorige Rechnung fing mit dem Sechseck an. Man hätte aber auch eben so gut die Rechnung mit dem Viereck, Achteck u. s. w. führen können. (S. Fig. 91. Theil 2. Seite 276.)

Die Seite des Vierecks im Kreise ist die Sehne des Winkels von 90 Grad. Die halbe Seite ist der Sinus vom Winkel von 45°. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze findet man die Hypotenuse, wenn man aus 2 die Wurzel zieht 1,4142134. Die Hälfte 0,7071067 ist der Sinus von 45°.

Auf dieselbe Weise konnte man den Sinus für $22\frac{1}{2}°$ für $11\frac{1}{4}$ u. s. w. finden, und man fand am Ende wieder den Sinus für 1 Minute = 0,0002909. Um nun den Sinus für alle Winkel von Minute zu Minute, durch den Quadranten zu finden, so bediente man sich folgendes Lehrsatzes.

§. 6.

Lehrsatz.

Der Sinus des Winkels $a + b$ ist $= \sin. a . \cos. b + \cos. a . \sin. b$.

Vorbereitung zum Beweise.

Es sey in Fig. 2. Taf. III.

der Winkel $acb = a$

und der Winkel $bcd = b$

Ferner sey be der Sinus des W. a und ec sein Cos. Ebenfalls sey dg der Sinus des W. b und gc sein Cos.

Endlich sey df der Sinus des W. $a + b$, der den gemeinschaftlichen Schenkel bc in l schneidet.

Dann ziehe man noch gh auf ac senkrecht und gk auf df, so ist $dk + kf = \sin. a + b$. Es muß nun

bewiesen

bewiesen werden: 1) daß $kf = \sin. a . \cos. b$ ist. 2) Daß $dk = \cos. a . \sin. b$ ist. Beide zusammen sind $= df =$ dem Sinus von der Summe beider Winkel.

Beweis.

Die Dreiecke bec und ghc sind einander ähnlich; folglich: $bc : be = gc : gh$

oder $1 : \sin. a = \cos. b : gh$

Also $\sin. a . \cos. b = gh = kf$, welches das erste war.

Ferner sind die Dreiecke dgl und lfc einander ähnlich, weil beide rechtwinklig sind, und sie bei l Scheitelwinkel haben.

Ebenfalls ist diesen das Dreieck dgk ähnlich, weil es rechtwinklig ist, und den Winkel bei d gemeinschaftlich hat.

Aus denselben Gründen ist ihnen das Dreieck bec ähnlich.

In den beiden ähnlichen Dreiecken bec und dgk ist also $cb : ce = dg : dk$

oder $1 : \cos. a = \sin. b : dk$

Also $\cos. a . \sin. b = dk$, welches das zweite war.

Es ist also $\sin. a . \cos. b + \cos. a . \sin. b = kf + kd = \sin. a + b$, welches sollte erwiesen werden.

Der Cosinus des W. $a + b$ findet sich eben so leicht. Er ist $= fc = hc - hf = \cos. a . \cos. b - \sin. a . \sin. b$.

Die Dreiecke bec und ghc sind einander ähnlich, folglich: $bc : ec = gc : hc$

oder $1 : \cos. a = \cos. b : hc$

Also $hc = \cos. a . \cos. b$.

Ferner

Ferner ist $hf = gk$ und die Dreiecke bce und dgk sind einander ähnlich. Folglich

$$bc : be = dg : gk$$

oder $1 : \sin. a = \sin. b : gk$

also $\sin. a . \sin. b = gk = hf$

Es ist demnach $hc - hf = \cos. a . \cos. b - \sin. a . \sin. b = \cos.$ des W. $a + b$.

§. 7.

1) Durch die Lehrsätze des vorigen §. war nun der Weg zur Berechnung der Sinus aller Winkel von Minute zu Minute gebahnt, da der Sinus und der Cosinus für 1 Minute bekannt war.

Wollte man z. B. die Sinus für alle Minuten von 15 bis 30 Grad berechnen, so hätte man

für 15° $\sin. = 0{,}2588190$ u. sin. für 1 Min. $= 0{,}0002909$

$\cos. = 0{,}9659258$ . . . für 1 Min. $= 0{,}9999999$

Nennt man den ersten W. a und den zweiten b, so hätte man für sin. $15^\circ, 1$

$$\sin. a . \cos. b + \cos. a . \sin. b.$$

Oder in Zahlen

$$0{,}2588190 . 0{,}9999990 + 0{,}9659258 . 0002909$$

Dieses gibt den Sinus von $15^\circ, 1' = 0{,}259100$.

2) Auf dieselbe Weise berechnete man den Cosinus des Winkels $15^\circ, 1$ nach der Formel

$$\cos. a . \cos. b - \sin. a . \sin. b.$$

War dieser gefunden, so berechnete man Sinus und Cosinus für $15^\circ, 2'$ für $15^\circ, 3'$ für $15^\circ, 4'$ u. s. w. bis man zu 30 Grad kam. Da für 30 Grad schon Sinus und Cosinus bekannt war, so gab dieses eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Hätte man auf diese Weise die Sinus und Cosinus für alle Winkel von 0 bis 45° gefunden, so brauchte man die von 45° bis 90° nicht weiter zu berechnen, da die Sinus von 45 bis 90° den Cosin. von 45 bis 0° gleich sind.

3) Sobald die Sinus für alle Winkel von 0 bis 90° bekannt waren, so waren es auch die Cosinusse.

Dividirte man die ersteren mit den letzteren, so hatte man die Tangenten. Da tang. $a = \frac{\sin. a}{\cos. a}$ ist.

Wenn die Tangenten von 0 bis 90° gefunden, so hatte man auch die Cotangenten.

4) Dividirte man den Radius mit dem Cosinus, so fand man die Sekante, da Sekante $a = \frac{1}{\cos. a}$ ist.

Waren die Sekanten von 0 bis 90° gefunden, so waren es auch die Cosekanten.

5) Um den Sinus versus zu finden, so hatte man nur den Cosinus vom Radius abzuziehen, da Sinus versus $a = 1 - \cos. a$ ist.

Waren die Sinus versus von 0 bis 90° gefunden, so hatte man auch die Cosinus versus.

6) Auch waren durch die Sinus zugleich die Sehnen bekannt, da jede Sehne das Doppelte vom Sinus des halben Winkels ist.

Wenn z. B. sin. $8° = 0{,}1391731$ ist,
so ist die Sehne von $16° = 0{,}2783462$.

§. 8.

Auf diese Weise haben die ältern Mathematiker alle trigonometrischen Linien berechnet. Die Rechnung war

leicht,

leicht, nur wurde sie wegen der großen Multiplikations- und Divisions-Exempel beschwerlich. Erst später fand man andere Methoden, wodurch diese Rechnungen ungemein erleichtert wurden, und ungefehr auf dieselbe Weise wie die Berechnung der Logarithmen durch das Potenzentäfelchen. Wir werden hievon bei einer andern Gelegenheit reden. Es war hier genug, den einfachsten Weg zur Berechnung der trigonometrischen Linien gezeigt zu haben.

Wir bemerkten schon oben, daß die alten Mathematiker sich bei der Berechnung der Dreiecke blos der Sehnen bedienten, und daß die älteste Sehnentafel sich beim Ptolomäus findet. Sie geht von halben zu halben Graden, und ist bis auf etwa 5 Decimalstellen genau. Ihre Berechnung muß bei der damaligen Unbekanntschaft mit dem Decimalsystem im Schreiben der Zahlen, unsäglich mühsam gewesen seyn.

Die arabischen Astronomen führten statt der Sehnen den Gebrauch der Sinus ein, oder der halben Sehnen des doppelten Winkels. Die übrigen trigonometrischen Linien waren ihnen noch unbekannt.

Der deutsche Astronom Johann Müller, genannt Regiomontan, führte im 15ten Jahrhundert zuerst den Gebrauch der Tangenten ein. Er berechnete sie in seiner Trigonometrie auf 6 Decimalstellen.

Rhetikus vollendete Regiomontans Arbeit, und gab im Jahr 1596 seine Trigonometrie heraus, in der er Sinus, Tangente und Sekante für alle Winkel von 10 zu 10 Sekunden bis auf zehn Decimalstellen berechnet hatte. Dieses Werk ist bekannt unter dem Namen: Opus Palatinum.

Die

Die Berechnung der Dreiecke führt immer auf Regula de Tri-Sätze, und diese auf große Multiplikations- und Divisions-Exempel, die sie zwar nicht schwer, aber doch sehr weitläuftig machen. Nepper erfand deswegen die Logarithmen, welche diese beiden Rechnungsarten in Addiren und Abziehen verwandeln. Er schrieb darauf in seinen Tafeln neben jede trigonometrische Linie ihren Logarithmen. Jene nannte man nun die natürlichen Linien, und diese die künstlichen. Da man die erstern wenig gebrauchte, so ließ man sie endlich aus den Tafeln weg, um Raum zu ersparen. Man findet daher gewöhnlich in den trigonometrischen Tafeln blos die Logarithmen der trigonometrischen Linien. Doch hat man auch noch welche, in denen sich die natürlichen Linien in einem besondern Anhange finden, wie z. B. in den Schulzeschen.

Nepper gebrauchte in seinen Tafeln natürliche Logarithmen. Als aber Briggs gefunden, daß die Logarithmen der Zahl 10 viel kürzere und bequemere Tafeln geben würden, so berechnete dieser für die trigonometrischen Linien solche Logarithmen, die zur Grundzahl 10 gehören. Er starb indeß ehe sie vollendet waren. Nach seinem Tode gab sie sein Freund Gellibrand heraus. Sie erschienen im Jahr 1633 in Gouda in Holland.

In demselben Jahre gab der gelehrte holländische Buchhändler Adrian Blacq seine große trigonometrische Tafeln heraus, in denen man die Logarithmen der Sinus und Tangenten für jede 10 Sek. berechnet findet.

Damit die Logarithmen keine negative Zeichen erhielten, so wurde zu allen die Zahl 10 addirt. Denn da der Radius $= 1$ ist, und der Logarithme von $1 = 0$, so erhielten

hielten alle Linien, die kleiner als 1 waren, verneinte Logarithmen, und alle die größer waren, bejahte.

Z. B. Tang. 44° = 0,9656888 Log. ders. = − 0,151628

Tang. 46° = 1,0355303 Log. ders. = + 0,0151628

Um nun nicht genöthigt zu seyn, immer auf die Zeichen + und − bei den Rechnungen Acht zu geben, so hat man zu allen Logarithmen + 10 addirt, und die Tangente

von 44° hat nach den Tafeln 9,9848372

und die von 46° . . . . . 10,0151628.

Um sich hieran beim Rechnen zu erinnern, schreibt man den Logarithmen der Tafeln auf folgende Weise:

Log. sin. 1″ = 4,6855749 − 10

Log. sin. 24° = 9,6093133 − 10

Log. Tang. 89° = 11,7580785 − 10.

Zieht man 10 vom Logarithme ab, so findet man den wahren Logarithmen der Zahl. Z. B. Der Sinus von 1″ ist 0,0000048, und in den Tafeln ist der Logarithme sin. 1″ = 4,6855749 − 10 = − 5,3144251.

Die Kennziffer 5 dieses negativen Logarithmen bedeutet, daß in den 5 ersten Stellen des Sinus blos Nullen sind, und daß die erste bedeutende Ziffer blos in der sechsten Stelle oder in den Milliontheilchen ist. Da der Logarithme − 5,2144251 verneint ist, so kann man ihn nicht in den Tafeln finden, weil diese blos bejahte Logarithmen enthalten. Man muß daher + 6,000000 zu ihm addiren, und man erhält 0,6855749 − 6. Sucht man diese Zahl in den Tafeln, so findet man 48, und da die Kennziffer des Logarithmen − 5 war, so kommen 5 Nullen an die Zahl, die dann 0,0000048 ist.

In einigen Tafeln, wie z. B. in den Calletschen, hat man zu den Tangenten, die über 45° sind, diese 10 nicht

hinzu

hinzu addirt, weil, da sie größer als 1 sind, der Logarithme ohnehin schon + ist. In den Calletschen Tafeln ist z. B. die Tangente von 89° auf folgende Weise ausgedrückt: Log. Tang. 89° = 1,7580785. In den Begaschen und Idlerschen Tafeln hat man der größern Gleichförmigkeit wegen bei allen Logarithmen 10 hinzu addirt, auch bei den Tangenten, die über 45° sind.

In neuern Zeiten hat man angefangen den ganzen Kreis statt in 360°, in 400° zu theilen, und dann jeden Grad in 100 Minuten, und jede Minute in 100 Sekunden. Für diese Decimaltheilung des Quadranten haben die Herren Ideler und Hobert die ersten vollständigen und genauen Tafeln berechnet, welche im Jahr 1799 in Berlin erschienen. Diese bedienten sich bei der Berechnung der trigonometrischen Linien folgendes Verfahrens.

Sie berechneten zuerst 50 Sinus bis auf dreißig Decimalstellen genau. Diese lagen um zwei Decimalgrade auseinander, und machten das Gerippe ihrer Tafeln aus. Nun berechneten sie bei jedem dieser Sinus noch 8 andere, die nur 1 Minute von einander entfernt waren, und bis auf 28 Stellen genau. Dann betrachteten sie diese 9 Sinus als eine arithmetische Reihe sechster Ordnung, suchten durch sechsmaliges Abziehen die sechsten Differenzen, welche in den ersten Ziffern beständig waren, und dann setzten sie mit Addiren und Subtrahiren die Reihe nach beiden Seiten fort bis zur nächsten Station, wo sie dann 200 Sinus gefunden hatten, die alle 1 Minute von einander entfernt lagen. Diese waren dann noch bis auf 14 Decimalstellen genau. Sie würden noch bis auf 28 genau gewesen seyn, wenn die sechsten Differenzen wirklich beständig gewesen. Indeß da sie nur 10

Stellen

Stellen wollten drucken lassen, so war eine Genauigkeit von 14 Stellen schon mehr als hinreichend. Auf eine ähnliche Weise haben sie die übrigen trigonometrischen Linien und ihre Logarithmen berechnet, wie sie dieses in der lehrreichen Einleitung zu ihren Tafeln ausführlich erklärt haben. Diese enthalten auf jeder Seite links die natürlichen Linien, und auf der Seite rechts die zugehörigen Logarithmen.

§. 9.

Einrichtung und Gebrauch der trigonometrischen Tafeln.

1) Die Tafeln, welche am meisten gebraucht werden, sind die von Vega, Schulze, Callet und LaLande. Die von Schulze enthalten auch die natürlichen Linien. Die übrigen enthalten blos die Logarithmen derselben.

Gewöhnlich enthalten die Tafeln blos die Sinus und Tangenten. Wenn man rückwärts sucht, so hat man die Cosinus und Cotangenten.

Der Sinus und Cosinus Versus werden in den Rechnungen wenig gebraucht, daher enthalten ihn die Tafeln selten. Will man indeß den Sinus Versus von einem Winkel haben, so findet man ihn, wenn man den Cosinus desselben Winkels von 1 abzieht.

Die Sekanten und Cosekanten kommen in den Schulzischen Tafeln vor; in den andern fehlen sie, weil sie selten gebraucht werden. Man kann sie indeß auch leicht mit den andern Tafeln finden, da die Sekante des Winkels $a = \frac{1}{\cos. a}$. Man hat also nur den Logarithmen des Cosinus vom Logarithmen des Sinus totus oder des Rad. abzuziehen, der jedesmal 10 ist.

Beispiel. Log. Cos. $11°, 12' = 9,9916492$
Log. sin. tot. $= 10,0000000$

Log. Sek. $11°, 12' = 0,0083508$

Eben so findet man die Cosekante des Winkels, wenn man den Logarithmen des Sinus von 10 abzieht.

2) Die Tafeln sind gewöhnlich so gedruckt, daß in der ersten Colonne der Winkel, und in den folgenden der Sinus, Cosinus, die Tangente und Cotangente steht. Dieses geht bis 45 Grad. Von hier laufen die Tafeln wieder rückwärts bis 90°, und dieselbe Linie, die vorher der Sinus war, wird nun der Cosinus, und was Tangente war, wird nun Cotangente.

Von 0 bis 45° stehen die Grade über den Tafeln, und die Minuten laufen an der rechten Seite hinunter.

Von 45 bis 90° stehen die Grade an der untern Seite jeder Tafel, und die Minuten laufen an der rechten Seite von unten nach oben.

In den kleinen Handtafeln findet man die Winkel von Minute zu Minute angegeben. Will man den Logarithmen einer trigonometrischen Linie messen, deren Winkel Sekunden bei sich hat, so multiplicirt man diese mit der Differenz, die gegenüber in der Differenzcolonne steht, und addirt dieses hinzu.

Beispiel. Log. sin. $39°, 6' = 9,7998062$
die Diff. ist für $1'' = 25,9$ also für $23''$ 595

Also Log. sin. für $39° 6', 23'' = 9,7998657$

Dieses Einschalten der Sekunden beruht darauf, daß man annehmen kann, daß für kleine Bogen die Unterschiede der trigonometrischen Linien, und die ihrer Logarithmen sich verhalten wie die Unterschiede der Bogen.

Da

Da aber in den 5 ersten und letzten Graden des Quadranten die trigonometrischen Linien schneller wachsen, so darf man dieses Einschalten nicht auf ganze Minuten ausdehnen, sondern nur auf 10 Sekunden, und deswegen sind hier in den Tafeln alle Winkel von 10 zu 10 Sekunden berechnet.

Hat man eine trigonometrische Linie, zu der man den Winkel in den Tafeln sucht, so ist das Verfahren dasselbe. Z. B. Man sucht den Winkel, dessen

Log. sin. = 9,7998657 ist,

so findet man zunächst hiefür 39°, 6′

dessen Log. sin. = 9,7998062 ist.

Unterschied 595

Da die Tafeln für 1 Sekunde Unterschied 25,9 geben, so hat man folgenden Regula de Tri-Satz:

$$25{,}9 : 595 = 1'' : 23''.$$

Also ist der Winkel 39°, 6′, 23″.

§. 10.

Berechnung der geradlinigten Dreiecke.

Die ganze ebene Trigonometrie beruhet auf dreien Lehrsätzen, die sich aus der Verbindung des Kreises mit dem Dreieck herleiten lassen.

1ter Lehrsatz.

In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel.

$ab : ad = \sin. d : \sin. b.$ Fig. 3. Taf. III.

Vorbereitung zum Beweise.

Man beschreibe durch die drei Punkte des Dreiecks abd einen Kreis.

Aus dem Mittelpunkt dieses Kreises ziehe man in die drei Ecken gerade Linien. Die Winkel, die diese am Mittelpunkte c machen, sind doppelt so groß als die Winkel am Umkreis, und die Seiten des Dreiecks sind die Sehnen dieser Winkel.

Man lasse endlich aus dem Mittelpunkte c drei senkrechte Linien auf die drei Sehnen a b, b d und d a fallen, welche diese so wie die Winkel am Mittelpunkte halbiren.

Beweis.

Die halbe Sehne d s ist der Sinus des Winkels d c s, welcher dem Winkel am Umfange d b a gleich ist.

Eben so ist d m der Sinus des Winkels d c m, welcher dem Winkel am Umfange d a b gleich ist.

Ebenfalls ist a n der Sinus des Winkels a c n, welcher dem Winkel am Umfange a d b gleich ist.

Folglich sind in dem Dreiecke a b d die halbe Seiten die Sinus der gegenüber stehenden Winkel, und da sich die ganzen verhalten wie die halben, so verhalten sich die Seiten wie die Sinus der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel, welches sollte erwiesen werden.

Anmerk. Wenn also unter den drei gegebenen Stücken eines Dreiecks Seiten und Winkel sind, so läßt es sich leicht durch einen Regula de Tri-Satz auflösen, sobald ein gegebener Winkel einer gegebenen Seite gegenüber steht.

§. 11.

2ter Lehrsatz.

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente der halben

halben Summe der beiden gegenüber stehenden Winkel zur Tangente vom halben Unterschiede dieser Winkel.

In dem Dreieck BCD Fig. 4. Taf. III. heiße der Winkel $h + e = m$. Dann ist $CD + CB : CD - CB = \text{tang.} \frac{1}{2} m + a : \text{tang.} \frac{1}{2} m - a$.

Vorbereitung zum Beweise.

Man beschreibe mit der kleinsten Seite CB einen Kreis, und ziehe CE. Der Kreis schneidet von CD das Stück CA ab. Die drei Linien CA; CB und CE sind einander gleich als Radien desselben Kreises.

Man ziehe ferner die Sehne BA, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, in dem die Winkel h und g einander gleich sind.

Man ziehe ferner durch den Punkt D eine Linie mit AB parallel, und ziehe zugleich durch die Punkte E und B eine gerade Linie, bis sie diese in F schneidet.

Die beiden Dreiecke EFD und EBA, die hiedurch entstehen, sind einander ähnlich, auch sind sie beide bei B und F rechtwinklig, weil EBA ein Winkel im Halbkreise ist.

Man beschreibe aus dem Punkte D mit der Linie DF einen Kreisbogen, so ist BF die Tangente des Winkels b, und EF die Tangente des Winkels $a + b$, den wir n nennen wollen.

Beweis.

Die beiden Dreiecke EBA und EFD sind einander ähnlich, folgl. ist $ED : AD = EF : BF = \text{tang.} n : \text{tang.} b$.

Da nun ED die Summe, und AD die Differenz der beiden Seiten ist, so verhält sich die Summe der beiden

Seiten $CD + CB$ zu ihrer Differenz $CD - CB$ wie die Tangente von n zur Tangente von b.

Jetzt muß nun noch bewiesen werden, daß der Winkel $\frac{1}{2}(m+a) = n$ und $\frac{1}{2}(m-a) = b$ ist.

Der Winkel k ist $= h + g = m + a$ und h ist $= g$ und $g = a + b = n$. Folglich ist $h + g = 2g = 2n = m + a$. Also $n = \frac{1}{2}(m+a)$, welches das erste war.

Ferner ist $b = n - a$. Da nun $n = \frac{1}{2}(m+a) = \frac{m+a}{2}$ ist, so ist $b = \frac{m+a}{2} - a = \frac{m+a-2a}{2} = \frac{m-a}{2} = \frac{1}{2}m - a$, welches das zweite war.

Es verhält sich also $ED : AD = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(m+a) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(m-a)$, also die Summe der beiden Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe zur Tangente der halben Differenz der diesen Seiten gegenüber stehenden Winkeln, welches sollte erwiesen werden.

Anmerk. Man sieht hieraus, daß wenn in einem Dreieck zwei Seiten, und der eingeschlossene Winkel bekannt sind, man auch einen der anliegenden Winkel finden kann. Man sucht nemlich zuerst aus den drei bekannten Gliedern der Gleichung $CD + CB : CD - CB = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(m+a) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(m-a)$ das vierte; denn da zwei Seiten gegeben sind, so kennt man auch ihre Summe und ihre Differenz, und da ein Winkel gegeben ist, nemlich i, so kennt man auch die Summe der beiden übrigen $m + a$. Aber man kennt noch nicht ihre Differenz, welche man erst durch die vorige Gleichung suchen muß.

Hat man die Differenz $m - a$ gefunden, so kann man auch a finden. Denn da die Summe entsteht, indem man den kleinsten Winkel zum größten addirt, und die Differenz, indem man den kleinsten Winkel vom größten abzieht,

zieht, so muß Summe und Unterschied ums Doppelte vom kleinsten Winkel verschieden seyn. Z. B. m sey = 23° und a = 9, so ist m + a = 32, und m − a = 14; 32 − 14 = 18 = dem Doppelten des kleinsten Winkels, der 9° ist. Ist auf diese Weise der kleinste Winkel a gefunden, so kennt man auch den größten m und die dritte Seite im Dreieck findet sich nun leicht nach dem vorigen Lehrsatze.

§. 12.

3ter Lehrsatz.

In jedem Dreieck ABC Fig. 5. verhält sich die größte Seite AB zur Summe der beiden übrigen AE, wie der Unterschied der beiden übrigen AF zur Linie AG; wo AG der Unterschied zwischen der größten Seite und dem doppelten Cosinus des Winkels B ist.

$$AB : AC + CB = AC - CB : AB - 2 \cos. B.$$

Vorbereitung zum Beweise.

Man beschreibe mit der kleinsten BC einen Kreis, und verlängere AC bis E. Dann ziehe man die beiden Sehnen EB und FG und lasse die Senkrechte CD fallen.

Beweis.

Das Viereck FGEB ist ein Viereck im Kreise, folglich sind die Winkel bei G und E zusammen zwei Rechte. (S. Th. 2. S. 245) Da nun FGB + FGA auch = 2 R. sind, so ist der W. FGA = FEB, und das Dreieck AFG ist dem Dreieck ABE ähnlich.

Da

Da die Winkel bei G und E gleich sind, und beide den W. bei A gemeinschaftlich haben.

Man hat also $AB : AE = AF : AG$

oder $AB : AC + CB = AC - CB : AB - 2 \cos. B$ welches sollte erwiesen werden.

Anmerkung. Man sieht hieraus, daß wenn in einem Dreieck alle drei Seiten bekannt sind, man jedesmal die Linie AG finden kann. Zieht man diese von der längsten Seite ab, so bleibt der doppelte Cosinus des W. CBA übrig. Nimmt man von diesem die Hälfte, so geben die Tafeln den Winkel B zu dem er gehört. Ist der W. B bekannt, so findet man leicht die beiden übrigen, vermittelst des ersten Lehrsatzes.

§. 13.

Bei der Auflösung der Dreiecke sind von den sechs Stücken, aus denen ein Dreieck besteht, jedesmal drei gegeben, die von einander unabhängig sind, und aus denen die drei übrigen durch Rechnung hergeleitet werden. Hiebei sind 5 Fälle möglich:

Nemlich: gegeben ist in dem Dreiecke abc Fig. 6. Taf. III. in dem die großen Buchstaben die Seiten und die kleinen die gegenüber stehende Winkel bedeuten sollen, entweder I eine Seite und die zwei anliegende Winkel. Z. B. B, a und c.

oder II eine Seite ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel. Z. B. B, c und b.

oder III zwei Seiten und ein anliegender Winkel. Z. B. A, B und a.

oder IV zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel. A, B und c.

oder V alle drei Seiten A, B und C.

Mehr

Mehr als diese 5 Fälle sind nicht möglich. Der 6te Fall wäre, wenn die drei Winkel a, b und c gegeben sind. Allein dieser Fall gehört nicht hieher, weil die drei Winkel ein ebenes Dreieck nicht völlig bestimmen, da sie nicht unabhängig von einander sind. Denn wenn zwei Winkel gegeben sind, so ist der dritte schon nicht mehr willkührlich. Sind die drei Winkel gegeben, so kennt man zwar die Verhältnisse der drei Seiten zu einander, allein man kann ihre Größe nicht berechnen.

Von diesen fünf Fällen werden die drei ersten nach dem ersten Lehrsatze aufgelöst, der folgende nach dem zweiten und der letzte nach dem dritten, wie wir dieses an folgenden Beispielen sehen werden.

1. Aufgabe.

Gegeben ist eine Seite B und die beiden anliegenden Winkel a und c. Man sucht die Seite C. Fig. 6. Taf. III.

Da $b = 180 - (a + c)$ ist, so sucht man zuerst den dritten W. b.

Man hat nach dem ersten Lehrsatze folgende Gleichung: $\sin. b : \sin. c = B : C$.

In dieser sind die drei ersten Glieder bekannt, und man findet das vierte, indem man die beiden mittleren Glieder miteinander multiplicirt, und das Produkt durchs vordere dividirt.

Da diese Rechnung mit Logarithmen geführt wird, so findet man den Logar. von C, wenn man die Logar. von sin. c und von B zueinander addirt, und hievon den Log. sin. b abzieht.

Gege=

Gegeben ist:

1) die Seite B = 7431 Meter. Logarith. = 3,8710473
2) der W. c = 58°, 23′, 36″ Log. sin. = 9,9302693

13,8013166

3) der W. b = 63°, 48′, 40″ Log. sin. — 9,9529589

Also der gesuchte Log. der Seite C = 3,8483577

Hiefür findet man in den Tafeln die Zahl 7052,7. Dieses ist die Länge der gesuchten Seite C in Metern.

Diese Rechnungen sind sehr leicht, und haben selbst für den Anfänger keine Schwierigkeiten, wenn er sich die Mühe nimmt, das Dreieck zu zeichnen, und die Formel drunter zu schreiben, nach der er rechnet. Schreibt er nun zugleich die gegebenen Seiten und Winkel auf die eben angeführte Weise, so wird er die Rechnung vollenden, ohne sich zu irren.

Wäre die Seite A gesucht worden, so hätte man folgende Gleichung gehabt:

$$\sin. b : \sin. a = B : A.$$

Gegeben ist 1) B = 7432 Meter. Logarith. = 3,8710473
2) a = 57°, 47′, 44″ Log. sin. = 9,9274482

13,7984955

3) b = 63°, 48′, 40″ Log. sin. — 9,9529589

Also der gesuchte Log. der Seite A = 3,8455366

Hiefür findet man in den Tafeln 7007,1 als die Länge der gesuchten Seite A in Metern.

2. Aufgabe.

Eine Seite, ein anliegender und ein gegenüber stehender Winkel sind gegeben, gesucht die beiden andern Seiten.

Gegeben

Gegeben ist die Seite B und die Winkel a und b, gesucht die Seite A. Man hat also die Gleichung: sin. b : sin. a = B : A.

Dieses ist dieselbe Gleichung, die wir eben aufgelöst haben.

Wird die Seite C gesucht, so sucht man zuerst den W. c durch Abziehen von 180°. Man hat dann die Gleichung: sin. b : sin. c = B : C; welche ebenfalls vorher schon aufgelöst wurde.

3. Aufgabe.

Gegeben sind zwei Seiten und ein anliegender Winkel, gesucht die beiden andern Winkel und die dritte Seite.

Gegeben ist die Seite B und C und der Winkel b, gesucht der W. c. Man hat dann die Gleichung:

$$B : C = \sin. b : \sin. c.$$

Gegeben ist 1) C = 7025,7 Meter.	Logar. =	3,8483577
2) der W. b = 63°, 48′, 40″	Log. sin. =	9,9529589
		13,8013166
3) die S. B = 7431 Meter.	Logarith. —	3,8710473
Die gesuchte Log. von sin. c ist also	=	9,9302693

In den Tafeln findet man hiefür den Winkel c = 58°, 23′, 36″.

Wird der Winkel a gesucht, so muß man, da dieser keiner bekannten Seite gegenüber liegt, zuerst den W. c suchen, und dann den W. a durch Abziehen von 180° finden.

Wird die Seite A gesucht, so muß man, da diese nichts bekanntem gegenüber liegt, zuerst den Winkel c suchen,

suchen, und dann durch Abziehen von 180 Grad den W. a. Hat man diesen, so hat man folgende Gleichung: sin. b : sin. a = B : A, welche schon in der ersten Aufgabe da war.

Anmerkung. Wenn der gegebene W. spitzig ist, und die Seite, die diesem Winkel gegenüber liegt, ist auch zugleich kleiner als die anliegende, dann kann man zwei verschiedene Dreiecke aus den gegebenen Stücken construiren, wovon das eine spitzwinklicht und das andere stumpfwinklicht ist, wie dieses in der Geometrie Th. 2. S. 195 an Fig. 37. gezeigt worden. Man muß also in diesem Falle wissen, ob das gegebene Dreieck spitz oder stumpfwinklicht ist.

Ist aber der gegebene W. nicht spitzig, oder ist die diesem Winkel gegenüberstehende Seite nicht kleiner als die anliegende, so findet auch keine Zweideutigkeit statt.

4. Aufgabe.

Gegeben sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, gesucht die beiden andern und die dritte Seite.

Da in dieser Aufgabe keine gegebene Seite dem gegebenen Winkel gegenüber liegt, so kann man den ersten Lehrsatz zur Auflösung dieser Aufgabe nicht eher anwenden, bis man mit Hülfe des zweiten Lehrsatzes, die beiden anliegenden Winkel gefunden hat.

Gegeben ist die Seite A und die Seite B nebst dem eingeschlossenen Winkel c, gesucht ist der Winkel a und der W. b.

Man hat nun nach dem zweiten Lehrsatze folgende Gleichung:

$$B + A : B - A = \text{tang. } \tfrac{1}{2} (b + a) : \text{tang. } \tfrac{1}{2} (b - a.)$$

In

In dieser Gleichung sind die drei ersten Glieder bekannt, und man kann also das vierte tang. $\frac{1}{2}(b - a)$ auf folgende Weise finden.

Der gegebene W. sey $58^\circ, 23', 56''$ = 36″

$180^\circ, 0', 0''$

also $a + b = 121^\circ, 36', 24''$

$\frac{1}{2}(a + b) = 60^\circ, 48', 12''$ Log. tang. 10,2527399

$B = 7431$ Met.

$A = 7007,1$

$B - A = 423,9$ Log. = + 2,6272634

12,8800033

$B = 7431$ Met.

$A = 7007,1$

$B + A = 14438,1$ Log. = − 4,1595100

Dieses gibt Log. tang. $\frac{1}{2}\, b - a = 8,7204933$

In den Tafeln findet man für diese Tangente den Winkel $3^\circ, 0', 27''$.

Diesen verdoppelt gibt $b - a = 6^\circ, 0', 54''$

Dieses abgezogen von $b + a = 121, 36, 24$

bleibt 2) $115, 35, 30$

Also der W. $a = 57, 47, 45$

Dieses abgezogen von $b + a = 121, 36, 24$

gibt für den W. $b = 63, 48, 39$

Sind auf diese Weise nun alle Winkel des Dreiecks gefunden, so findet man die dritte Seite C durch folgende Gleichung: $\sin. b : \sin. c = B : C$, welche in der ersten Aufgabe schon aufgelöst ist.

Anmerkung. Oben fanden wir in diesem Dreiecke den W. b = 63°, 48′, 40″. Also 1 Sek. größer. Dieser kleine Unterschied rührt daher, daß mit Tafeln gerechnet worden, die nur 7 Stellen haben. Da man beim Winkelmessen nie bis auf eine einzelne Sekunde sicher ist, so kommt er weiter nicht in Betracht. Bei ganz großen Messungen, wo überall die größte Schärfe gesucht wird, berechnet man die großen Dreiecke wohl mit den Vegaschen Tafeln, die 10 Stellen haben.

5. Aufgabe.

Es sind alle drei Seiten in einem Dreieck gegeben, man sucht den Winkel, der an der kleinsten Seite liegt.

Gegeben ist: A = 7007,1 Meter
B = 7431,0 Meter
C = 7052,7 Meter gesucht der Winkel c.

Diese Aufgabe wird nach dem dritten Lehrsatz aufgelöst, nach welchem man folgende Gleichung hat.

$$B : A + C = A - C : B - 2 \cos. c.$$

$$\begin{array}{rl} A + C = 14059,8 \text{ Log.} = & 4,1479792 \\ A - C = \quad 45,6 \text{ Log.} = & 1,6589648 \\ \hline & 5,8069440 \\ B = 7431 \text{ Log.} = & 3,8710473 \\ \hline \text{also Log. von } B - 2 \cos. c = & 1,9358967 \end{array}$$

Hiefür findet man in den Tafeln 86,28 Meter. Dieses ist das Stück A G in der Figur des dritten Lehrsatzes. Zieht man dieses von der Seite B ab, so bleibt der doppelte Cosinus des Winkels c übrig.

B =

$$B = 7431$$
$$AG = \underline{86{,}28}$$
$$2\ \cos.\ c = 2|\underline{7344{,}72}$$
$$\cos.\ c = 3672{,}36 = DB\ \text{Fig. 5.}$$

In dem rechtwinkligen Dreiecke B C D sind nun zwei Seiten und der rechte Winkel bekannt. Man hat also nach dem 4ten Lehrsatz: C B : D B = sin. des Winkels D : sin. des Winkels C.

D B = 3672,36 Met. Log. = 3,5649453
Der W. bei D = 90° Log. sin. 90° = 10,0000000

13,5649453
C B = 7007,1 Met. Log. 3,8455366

gibt Log. sin. des W. B C D = 9,7194087

Hiefür findet man in den Tafeln den Winkel
B C D = 31°, 36′, 26″
diesen abgezogen von 90°, 00, 00

gibt den Winkel bei B = 58, 23, 34,
welches der gesuchte Winkel c der Figur von diesem Paragraph ist. (Fig. 6. Taf. III.)

Sobald in einem Dreiecke alle drei Seiten und ein Winkel bekannt sind, so findet man die beiden übrigen Winkel leicht nach dem ersten Lehrsatze.

Um den W. bei b zu finden, hat man die Gleichung:
C : B = sin. c : sin. b.

Ist b gefunden, so findet man den dritten Winkel a durch Abziehen von 180 Grad.

Anmerkung. Wir fanden den Winkel c oben 58°, 23′, 36″, also 2 Sekunden größer. Diese 2 Sekunden rühren daher, daß bei der Rechnung die Decimaltheile des Meters

Meters nicht weiter mitgenommen wurden. Man sieht hieraus, daß wenn man die Winkel sehr genau finden will, man die Seiten sehr scharf berechnen muß.

§. 14.

1) Der vorige Paragraph enthält alle Aufgaben, die in der ebenen Trigonometrie vorkommen können. Ihrer sind nur wenige. Da von den sechs Stücken, die bei einem Dreiecke vorkommen, immer drei gegeben sind, so können ihrer nicht mehr als $1 . 2 . 3 = 6$ seyn, weil nicht mehr Versetzungen des bekannten und unbekannten möglich sind; und hiebei ist der sechste Fall, wo die drei Winkel gegeben und die drei Seiten gesucht werden, noch unbestimmt.

Bei der Anwendung der Meßkunst auf dem Felde kommen die beiden ersten Aufgaben am häufigsten vor, weil man da wo möglich in jedem Dreiecke alle drei Winkel mißt, um zu sehen wie genau ihre Summe mit 180 Grad stimmt, und wie genau man gemessen hat.

2) Seltener ist es, daß man in einem Dreiecke nur einen Winkel mißt, der von einer bekannten Seite eingeschlossen wird, doch ist dieses zu Zeiten der Fall, wenn man die beiden andern Winkel entweder gar nicht messen kann, wegen Mangel an Aussicht oder wegen sonstigen Hindernissen auf den Stationspunkten. Man muß dann nach dem zweiten Lehrsatze die andern Winkel und die dritte Seite durch Rechnung suchen.

Man kann aber auch die dritte Seite finden, ohne daß man diesen Lehrsatz gebraucht.

Wenn z. B. der Winkel bei a (Fig. 7. Taf. III.) und die beiden Seiten ab und ac gegeben sind, so lasse man

aus

aus c die Senkrechte c d fallen. In dem rechtwinkligen Dreiecke kennt man den Winkel bei a der gemessen ist, und die Seite a c. Man kann also c d und a d nach dem ersten Lehrsatze berechnen.

In dem andern rechtwinkligen Dreiecke c d b kennt man c d und d b, welches a b — a d ist. Man kann also die dritte Seite c b nach dem Pytagoräischen Lehrsatze finden.

Da gewöhnlich nur die Seite c b verlangt wird, und nicht auch die Winkel bei a c b und a b c, so ist diese Rechnung eben so kurz wie die andere, besonders wenn man die Quadrattafeln dabei gebraucht.

3) Die Aufgabe aus den drei Seiten eines Dreiecks die drei Winkel zu bestimmen, kommt in der Anwendung selten vor, weil es in den meisten Fällen leichter und sicherer ist, die Winkel eines Dreiecks zu messen, als die Seiten desselben.

Gewöhnlich pflegt man in einer Kette von Dreiecken im ersten und letzten Dreieck nur eine Seite zu messen, und in den übrigen blos die Winkel, wo man dann die Länge der Seiten aller Dreiecke durch Rechnung findet, bis man auf die letzte kommt, welche als Probe dient, wie genau man gemessen und gerechnet hat.

Anmerk. Aus der Verbindung der einfachen trigonometrischen Lehrsätze, welche wir im vorigen erklärt haben, lassen sich eine fast unzählige Menge trigonometrischer Formeln herleiten, welche bei weitläuftigen und verwickelten Rechnungen oft von großem Nutzen sind. Da wir aber nicht in den Fall kommen hier noch eine Anwendung von ihnen zu machen, weil alle unsere Rechnungen äußerst einfach sind, so übergehen wir sie hier, und begnügen uns, ihrer nur im Vorbeigehen zu gedenken.

Die

Die sphärische Trigonometrie.

§. 15.

Eigenschaften der Kugel.

1) Wenn eine gerade Linie sich in einer Ebene so herum dreht, daß ein Punkt in ihr unbewegt bleibt, so entsteht ein Kreis, und jener Punkt ist sein Mittelpunkt. (Th. II. S. 163.)

Alle Linien, die durch seinen Mittelpunkt gezogen werden, heißen: Durchmesser des Kreises.

Dreht der Kreis sich um einen dieser Durchmesser, so entsteht eine Kugel, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Kreises ist.

2) Alle Punkte auf der Oberfläche der Kugel sind gleich weit vom Mittelpunkte der Kugel. Alle Halbmesser der Kugel sind daher einander gleich, so wie auch alle Durchmesser.

3) Wird die Kugel von einer Ebene geschnitten, so entsteht ein Kreis. Geht der Schnitt durch der Kugel Mittelpunkt, so entsteht ein größter Kreis, wie ab Fig. 1. Taf. IV. Geht er nicht durch der Kugel Mittelpunkt, so entstehen kleinere Kreise, wie cd.

4) Alle größte Kreise derselben Kugel sind einander gleich.

5) Alle kleinere Kreise sind einander gleich, deren schneidende Ebenen gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel entfernt sind, wie z. B. cd und ef.

Sind die schneidenden Ebenen einander parallel, so ent-

entstehen: **Parallelkreise.** Diese sind um so kleiner, je entfernter die Ebenen vom Mittelpunkte der Kugel sind.

6) Eine Linie, die senkrecht auf der Ebene eines Kreises steht, und durch den Mittelpunkt desselben geht, geht auch jedesmal durch den Mittelpunkt der Kugel, wie z. B. die Linie op Fig. 1.

7) Diese Linie heißt: **die Achse des Kreises.** Die beiden Punkte o und p, wo sie die Oberfläche durchschneidet, heißen: **die Pole des Kreises.** So steht z. B. bei der Erdkugel die Erdachse senkrecht auf dem Kreise des Aequators, und auf allen, die dem Aequator parallel sind.

8) Der Pol ist gleich weit von allen Punkten des Umfangs seines Kreises entfernt.

9) Man kann jedesmal durch vier Punkte a, b, c, d, die Oberfläche einer Kugel legen, wenn die vier Punkte nicht in einer Ebene liegen, und je drei von ihnen in keiner geraden Linie.

Man verfährt hiebei auf folgende Weise:

Man nimmt die drei Punkte a, b und c, die jedesmal in einer Ebene liegen, und der Voraussetzung nach in keiner geraden Linie, und legt durch sie einen Kreis, wie dieses Seite 248 des 2ten Theils ist gelehrt worden.

Die senkrechte Linie, die man auf dem Mittelpunkt des Kreises errichtet, ist seine Achse, und geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Dann nimmt man die drei Punkte b, c und d, die wieder in einer Ebene liegen, und legt durch diese auch einen Kreis. Die Senkrechte, die man durch seinen Mittelpunkt zieht, ist seine Achse, die ebenfalls durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Da, wo diese die vorige Achse schneidet, liegt der Mittelpunkt der Kugel, in deren Oberfläche die vier Punkte a, b, c und d liegen.

10) Zwei größte Kreise derselben Kugel schneiden sich jedesmal, und halbiren einander; denn ihre Ebenen gehen durch den Mittelpunkt der Kugel, und die Durchschnittslinie beider Ebenen ist der gemeinschaftliche Durchmesser beider Kreise.

Umgekehrt sind auch jedesmal zwei Kreise, die einander halbiren, jedesmal größte Kreise der Kugel.

11) Geht der eine durch des andern Pole, so stehen sie senkrecht aufeinander.

Stehen die Kreise senkrecht aufeinander, so stehen ihre Achsen auch senkrecht aufeinander. Sind die Achsen gegeneinander geneigt, so sind es auch die Kreise, und unter demselben Winkel.

12) Je kleiner ein Kreis ist, desto größer ist die Krümmung seines Bogens. Der kürzeste Bogen zwischen zweien Punkten c und d auf der Oberfläche der Kugel, ist daher der Bogen eines größten Kreises. Die Bogen kleinerer Kreise zwischen denselben Punkten sind daher jedesmal länger, weil sie krümmer sind.

13) Durch zwei Punkte auf der Oberfläche der Kugel ist die Lage eines größten Kreises bestimmt, weil seine Ebene zugleich durch den Mittelpunkt der Kugel gehen muß, und die Lage einer Ebene jedesmal durch drei Punkte bestimmt ist. (Theil II. S. 298.)

Anmerkung. Die Beweise für diese Sätze lassen sich so leicht auffinden, daß es überflüßig wäre, sie besonders anzu-

anzuführen. Nimmt man eine kleine Kugel von etwa drei Zoll Durchmesser zur Hand, und zieht auf dieser die verschiedenen Kreise, so wird alles viel deutlicher als durch Worte und Zeichnungen auf dem Papier.

§. 16.

Erklärungen.

1) Ein sphärischer Winkel ist derjenige, den zwei Bogen größter Kreise an ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte einschließen. So sind z. B. Fig. 2. Taf. IV. adb und amb größte Kreise einer Kugel. dam oder eag ist ein sphärischer Winkel, und a ist der Scheitel desselben.

2) Das Maas des Winkels bei a ist der Kreisbogen dm. Dieser kann ein größter oder auch ein kleinerer Kreis der Kugel seyn. Seine Achse ab geht durch den Scheitel des Winkels.

3) Die Ebenen der beiden Kreise machen denselben Winkel an der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie ab miteinander.

Zieht man auf diese Senkrechten, wie ef und gf, oder wie dc und mc, so schließen diese bei f und c wieder dieselben Winkel ein.

Zieht man an die beiden Kreise am Scheitelpunkte a Tangenten, so schließen diese ebenfalls denselben Winkel ein.

4) Alle sphärische Winkel, die um einen Punkt der Kugel liegen, betragen vier Rechte, wie z. B. a, b, c, d. Fig. 3.

Alle sphärische Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte, wie z. B. a + b. Alle sphärische Scheitelwinkel sind einander gleich, wie z. B. a und d.

5) Das Stück der Kugel, welches zwei größte Kreise einschließt, die einander durchschneiden, heißt: Ein Ausschnitt der Kugel, oder ein Kugelsegment, wie z. B. adbma in Fig. 2.

6) Wird die Kugel durch eine Ebene geschnitten, die durch ihren Mittelpunkt geht, so entstehen zwei Halbkugeln. Wird die Kugel noch durch eine zweite Ebene geschnitten, die auf der ersten senkrecht steht, und auch durch den Mittelpunkt geht, so entstehen vier Kugelausschnitte, die einander gleich sind.

Wird sie noch durch eine dritte Ebene geschnitten, die ebenfalls durch den Mittelpunkt geht, und auf den beiden vorigen senkrecht steht, so wird sie in acht gleiche Theile getheilt. Diese bilden acht dreiseitige Pyramiden, deren Spitzen alle im Mittelpunkte der Kugel zusammen stoßen, und deren Fuß ein Quadrant von der Kugelfläche ist.

Die drei Seitenflächen, die den körperlichen Winkel im Mittelpunkt der Kugel einschließen, stehen senkrecht aufeinander, und die Kreisbögen am Fuße der Pyramide bilden sphärische Dreiecke mit drei rechten Winkeln. S. Fig. 3.

7) Ueberhaupt wird die Kugel durch drei sich durchschneidenden Ebenen jedesmal in acht Pyramiden geschnitten, und ihre Oberfläche in acht sphärische Dreiecke, deren Winkel 24 Rechte betragen, da dieses sechs Durchschnittspunkte geben, und um jeden vier rechte Winkel liegen.

Zwei und zwei von diesen acht Dreiecken sind immer einander gleich in Winkeln und Seiten. Sie liegen auf der Kugel einander gegenüber, und die größte Seite, die in dem einen rechts liegt, liegt im andern links. Man

kann

kann sie deßwegen mit ihren Höhlungen nicht aufeinander legen, so wie man dieses mit den Dreiecken kann, die einander in Winkeln und Seiten gleich sind, und an derselben Seite der Kugel liegen. Um sie von diesen zu unterscheiden, nennt man sie symetrische Dreiecke.

8) Wenn zwei größte Kreise sich schneiden, so ist jeder Bogen 180°. Werden sie noch von einem dritten geschnitten, so muß jeder Bogen nothwendig kleiner als 180° seyn. Jede der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks ist daher kleiner als 180°, kann aber sehr nahe 180° seyn, und das Dreieck selber ist kleiner als die Halbkugel, obschon es nahe so groß als die Halbkugel seyn kann.

9) Wenn zwei größte Kreise sich schneiden, so ist jeder Winkel kleiner als 180°, weil, wenn er 180° wäre, die Kreise in einander fielen, und sich nicht mehr schnitten.

Da jeder der Winkel in einem sphärischen Dreieck durch das Schneiden zweier größten Kreise entsteht, so muß jeder kleiner als 180° seyn, und die Summe von allen dreien kleiner als 540°, obschon sie nahe 540° seyn kann, oder = 6 Rechte.

10) Liegen auf der Kugel zwei Dreiecke gegeneinander über, deren jedes sehr nahe die ganze Halbkugel einnimmt, und deren Winkel zusammen etwas weniger als 12 Rechte betragen, so bleibt für die übrigen sechs Dreiecke der Kugel von den 24 R. nur etwas mehr als 12 R. übrig, und jedes dieser Dreiecke wird nur etwas mehr als 2 rechte Winkel haben.

Bei den sphärischen Dreiecken ist daher die Summe aller drei Winkel immer etwas größer als 2 R. und etwas kleiner als 6 Rechte.

11) In

11) In keinem der acht sphärischen Dreiecke, in welche die Oberfläche der Kugel durch drei Ebenen zerschnitten wird, kommen Seiten vor, die überstumpf sind, oder mehr als 180° betragen. Eben so wenig kommen Winkel vor, die überstumpf sind, oder mehr als 180° betragen.

Man kann zwar von diesen acht Dreiecken zwei zusammen nehmen, die dann ein neues Dreieck bilden, welches einen Winkel und eine Seite hat, die beide überstumpf sind, oder größer als 180°, allein solche Dreiecke werden in der sphärischen Trigonometrie nicht angewendet.

12) Der größte Kreis ist das natürlichste Maaß für die Entfernung zweier Punkte auf der Oberfläche der Kugel, weil alle größte Kreise derselben Kugel einander gleich sind, und weil der kürzeste Weg zwischen zweien Punkten auf der Oberfläche der Kugel jedesmal ein größter Kreis ist.

Die kleinern Kreise der Kugel hingegen sind untereinander ungleich, und die Trigonometrie macht deßwegen keinen Gebrauch von ihnen.

Wenn daher in der Trigonometrie von Kreisen die Rede ist, so versteht man hierunter jedesmal g r ö ß t e Kreise, auch wenn dieses nicht ausdrücklich bemerkt wird.

13) Die Seiten der sphärischen Dreiecke sind Kreisbogen, und ihre Länge wird in Graden angegeben. Man kann ihre Größe auch durch den Winkel bestimmen, den zwei Radien miteinander machen, welche von ihren Endpunkten nach dem Mittelpunkt der Kugel gezogen werden. Man gebraucht daher von ihnen dieselbe Ausdrücke wie von den Winkeln. So sagt man z. B. die Seite oder der Bogen ab ist 41 Grad, seine Sehne ist 9903, und sein Sinus ist 6560, wenn der Radius des Kreises in 10000 Theile getheilt ist.

§. 17.

§. 17.

1) Es gibt nur dreierlei Arten Kugeldreiecke.

1. Rechtwinklige. Diese können einen, zwei oder drei rechte Winkel haben.
2. Stumpfwinklige. Diese können einen, zwei oder drei stumpfe Winkel haben.
3. Spitzwinklige. In denen alle drei Winkel spitz sind.

2) Da die Seiten der Kugeldreiecke Kreisbögen sind, so wird, wie eben bemerkt worden, ihre Länge in Graden, Minuten und Sekunden angegeben. So sagt man z. B. die Seite AB in einem Dreieck ist 67°, 15′, 30″ lang, die Seite BC ist 43°, 20′, 10″, und die Seite CA ist 120°, 15′, 40″ lang.

Um die Seiten der Dreiecke auf der Kugel abmessen zu können, bedient man sich eines Halbkreises von Messing, der in Grade eingetheilt ist, und dessen Radius dem Radius der Kugel gleich ist. Diesen legt man wie einen Maaßstab an die Kreisbögen, und mißt so viele Grade ab, als für die Länge der Seiten verlangt wird.

3) Um die Größe der Winkel auf der Kugel zu messen, bedient man sich eines messingenen Transporteurs, welcher nach dem Radius der Kugel hohl getrieben ist, und eben so an seinem Rande in 180° eingetheilt, wie der Transporteur, dessen man sich zum Ausmessen der Winkel auf dem Papier bedient. Diesen legt man da auf die Kreisbögen, wo sie sich durchschneiden, so daß der Mittelpunkt des Transporteurs gerade auf dem Durchschnittspunkte liegt, und eine Seite an einem Schenkel des Winkels; man sieht dann wie viel Grade der andere

Kreis=

Kreisbogen, welcher den zweiten Schenkel des Winkels macht, am Rande des Transporteurs abschneidet. Mit diesem Instrumente werden auch die sphärischen Winkel auf die Kugel getragen.

4) Jedes Kugeldreieck besteht aus sechs Stücken, aus drei Seiten, und aus drei Winkeln. Drei von diesen Stücken sind jedesmal gegeben, die drei andern werden aus diesen hergeleitet. So wie in der ebenen Trigonometrie müssen die drei gegebenen Stücke von einander unabhängig seyn. Sind sie es nicht, dann können auch die drei übrigen nicht durch sie bestimmt werden.

In der ebenen Trigonometrie ist ein Dreieck nicht bestimmt, wenn die drei Winkel gegeben sind, weil der dritte Winkel von der Größe der beiden übrigen abhängt, da alle zusammen 180° betragen. Hingegen in der sphärischen Trigonometrie bestimmen die Winkel die drei Seiten, weil die Größe des dritten Winkels nicht von der Größe der beiden übrigen Winkel abhängt.

5) Aber es tritt ein anderer Fall ein, wo ein Kugeldreieck mit drei Stücken noch nicht bestimmt ist, und selbst mit vieren noch nicht. Das heißt: wenn von den sechs Stücken viere gegeben sind, so kann man die beiden übrigen noch nicht bestimmen.

Dieses ist jedesmal der Fall, wenn das Kugeldreieck zwei rechte Winkel hat. Es hat dann zugleich zwei Seiten, die Quadranten sind. Sind nun die zwei Seiten und die zwei rechte Winkel gegeben, die ihnen gegenüber stehen, so ist der dritte Winkel und die dritte Seite noch völlig unbestimmt, und man kann auf die Kugel so viele Dreiecke zeichnen als man will, die alle zwei rechte

Win=

Winkel haben, und zugleich zwei Seiten von 90°, und die doch jedes von andern verschieden ist.

Die Ursache ist, weil die gegebenen vier Stücke nicht von einander unabhängig sind. Ist in einem Dreiecke ein rechter Winkel gegeben, und die anliegende Seite ist ein Quadrant, dann muß die gegenüber stehende Seite ebenfalls ein Quadrant seyn, und ihr anliegender Winkel ein rechter.

Das Dreieck ist also völlig unbestimmt, wenn nicht zugleich der Winkel gegeben ist, den beide Quadranten einschließen, oder die diesem Winkel gegenüber stehende Seite. Ist dieses aber der Fall, dann ist das Dreieck durch drei Stücke auch völlig bestimmt.

6) Wenn bei einem ebenen Dreieck zwei Seiten und ein anliegender Winkel gegeben ist, so kann man aus diesen drei Stücken zwei Dreiecke bestimmen, die beide der Aufgabe Genüge thun, und wovon das eine spitzwinklig, und das andere stumpfwinklig ist, wenn nemlich die dem gegebenen Winkel gegenüber stehende Seite kleiner ist wie die anliegende. (Theil II. S. 195.)

In der sphärischen Trigonometrie findet dieselbe Zweideutigkeit statt, wenn zwei Seiten und ein anliegender Winkel gegeben ist. Es gibt hiebei vier Fälle, die wir im folgenden Paragraph aufzählen werden, in denen man mit diesen drei gegebenen Stücken jedesmal ein spitzwinkliges und ein stumpfwinkliges Dreieck beschreiben kann, welche beide der Aufgabe Genüge thun. Hingegen gibt es vier Fälle, wo eins von diesen Dreiecken ein überstumpfes wird.

7) Dieselbe Zweideutigkeit findet statt, wenn in einem sphärischen Dreiecke eine Seite, ein anliegender Winkel

und ein gegenüber stehender gegeben ist. Es gibt dann ebenfalls vier Fälle, in denen man mit diesen drei Stücken zwei Dreiecke bestimmen kann, welche beide der Aufgabe Genüge thun, und worin das eine spitzwinklig und das andere stumpfwinklig ist. Auch gibt es wieder vier Fälle, wo eins von diesen Dreiecken überstumpf wird. Wir werden sie ebenfalls im folgenden Paragraph aufzählen.

8) Die Größe der Seiten finden wir bei den Kugeldreiecken immer in Graden. Wir können ihre Länge in Ruthen oder Fuß erst berechnen, wenn wir den Halbmesser der Kugel kennen, zu der sie gehören. Gesetzt, man findet auf einer Kugel die Länge einer Dreieckseite zu 75°, der Halbmesser der Kugel sey $\frac{1}{2}$ Fuß. Man verlangt die Länge dieser Dreieckseite in Decimaltheilen des Fußes. Da man den ganzen Umfang der Kugel kennt, oder die Länge des Bogens von 360°, so hat man folgenden Regula de Tri-Satz:

360° sind 3,1415 Fuß, wie viel sind 75°?
Antw. 0,654 Fuß.

Durch das umgekehrte Verfahren verwandelt man die Länge jeder Seite in Grade, sobald man den Radius der Kugel kennt: z. B. 3,1415 Fuß sind 360°, wie viel ist 0,654 Fuß? Antw. 75°.

9) Wir wollen alle Fälle, die bei Kugeldreiecken vorkommen können, zuerst durch Zeichnung auflösen. Dieses wird uns eine Uebersicht über die sphärische Trigonometrie geben, die uns sehr nützlich seyn wird.

Ich setze voraus, daß man eine Himmel- oder Erdkugel bei der Hand hat, auf der man die Dreiecke construiren kann. Da auf ihr die Meridiane, der Aequator

und

und die Ekliptik gezeichnet sind, welches alles größte Kreise sind, so kann man leicht alle Arten von Dreiecken auf ihnen zeichnen.

Auch setze ich voraus, daß man einen Gradbogen habe, um die Länge der Seiten, und einen Transporteur, um die Größe der Winkel zu messen.

§. 18.

In der sphärischen Trigonometrie sind so wie in der ebenen nur sechs Aufgaben möglich, weil von den sechs Stücken, aus denen ein sphärisches Dreieck besteht, jedesmal drei gegeben sind, und drei gesucht werden. Sind diese gefunden, so ist das Dreieck aufgelöst.

In dem Dreieck a b c (Fig. 4. Taf. IV.) sollen die großen Buchstaben die Seiten, und die kleinen die diesen Seiten gegenüber stehenden Winkel bedeuten.

Gegeben ist nun, entweder:

I. eine Seite und die beide anliegende Winkel, als B a und c.

oder II. eine Seite ein anliegender und ein gegenüber stehender Winkel B, c und b,

oder III. zwei Seiten und ein anliegender Winkel A B u. a,

oder IV. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel A B und c,

oder V. alle drei Seiten A, B und C,

oder endlich VI. alle drei Winkel a, b und c.

Wir wollen diese sechs Fälle der Reihe nach durch Zeichnung auf der Kugel auflösen.

I. Fall.

I. Fall.

Gegeben ist eine Seite B = 53°,
und der anliegende Winkel a = 38°,
und der anliegende Winkel c = 100°.
Gesucht werden die beiden übrigen Seiten und der dritte Winkel.

Auflösung.

Man messe auf der Kugel an einem größten Kreise 53° ab, dieses ist die Seite B. An die Endpunkte von dieser lege man mit Hülfe des Transporteurs einen größten Kreis unter einen Winkel von 38° = a. An der andern Seite lege man ebenfalls einen größten Kreis unter einen Winkel von 100 Grad. Da, wo sich beide schneiden, liegt der Punkt b, und das Dreieck ist auf der Kugel entworfen. Mißt man nun mit dem Transporteur den Winkel b, so findet man seine Größe = 60°. Mißt man mit dem Gradbogen die Größe der Seite A, so findet man diese = 35°, und die von C = 66°.

II. Fall.

1) Gegeben ist die Seite B = 53°,
ein anliegender Winkel c = 100°,
und der gegenüber stehende b = 60°.
Gesucht werden die beiden übrigen Seiten und der dritte Winkel.

Hier sind zwei Winkel gegeben, ein anliegender und ein gegenüber stehender. Wäre das Dreieck ein *ebenes*, so würde man auch den Winkel a kennen, und man könnte es so auflösen, wie in der vorigen Aufgabe. Allein da es ein sphärisches ist, so weiß man blos, daß die Summe aller drei Winkel größer als zwei Rechte,

und

und kleiner als vier Rechte ist, und die Größe des dritten Winkels ist unbekannt.

Auflösung.

2) Man messe auf einem größten Kreise der Kugel mit dem Gradbogen die Länge der Seite B 53°. An diese trage man mit dem Transporteur einen Bogen von unbestimmter Länge unter einem Winkel von 100° = c. An diesen trage man den Winkel b zu 60°, so daß sein Schenkel durch den Endpunkt der Seite B geht. Das Dreieck ist dann geschlossen, und man findet durch Ausmessen mit dem Transporteur die Größe des Winkels a = 38°, und mit dem Gradbogen die Seite A zu 35°, und die Seite C zu 66°.

3) Allein mit den gegebenen Stücken kann man noch ein zweites Dreieck beschreiben, das ganz anders ist, und doch der Aufgabe Genüge thut; in welchem nemlich die Seite B = 53°, der anliegende Winkel c = 100°, und der gegenüber stehende b = 60° ist.

Dieser Fall, wo eine Seite ein anliegender Winkel, und der dieser Seite gegenüber stehende Winkel gegeben ist, ist zweideutig, und man kann aus den gegebenen Stücken jedesmal zwei verschiedene Dreiecke construiren, so wie man dieses auch in der ebenen Trigonometrie kann, wenn ein Winkel eine anliegende Seite und die gegenüber stehende gegeben sind, und die gegenüber stehende kleinere ist wie die anliegende. (S. Theil II. 195.)

4) Es ist schwierig, die Ursache hievon an einer Zeichnung auf dem Papier einzusehen, weil man die Bogen nicht so zeichnen kann, daß man die Größe ihrer Winkel erkennt.

Man

Man lasse sich deßwegen eine Kugel von etwa drei Zoll Durchmesser drehen, und schneide diese in zwei halbe Kugeln. Dann zeichne man auf die eine die Kreise in Fig. 5. und auf die andere die in Fig. 6, welche beim folgenden Falle gebraucht wird.

Der ganze Kreis a b c d e f g.... t a Fig. 5. stellt die Grundfläche der Halbkugel vor. Wir wollen diesen Kreis, um ihn von den andern desto leichter zu unterscheiden: den Grund nennen.

Auf diesen ziehe man den Kreis a p h senkrecht. Dieser theilt die Halbkugel in zwei gleiche Segmente.

Auf diesen Kreis ziehe man den punktirten Kreis m p senkrecht, dann ist h m = 90° = m a. Alle Bogen, die von diesen beiden aufeinander senkrecht stehenden Bogen gleich weit abstehen, machen mit dem Grunde gleiche Winkel; so ist der Winkel bei k = dem Winkel bei o.

Der Punkt p wird der Pol der Kugel, in dem sich alle Kreise durchkreuzen. Er liegt nicht mitten auf der Kugel, sondern etwa in einer Höhe von 50°, damit man Dreiecke mit langen und mit kurzen Seiten erhalte. Dann ziehe man dem größten Kreis k p c etwa 50° vom senkrechten h p a. Ferner den Kreis e p o ebenfalls 50° vom senkrechten, aber an der andern Seite.

Endlich ziehe man den Kreis g p s etwa 40° vom Senkrechten, und schreibe an alle Kreise dieselbe Buchstaben wie in der Figur.

5) Die Ursache, warum nun jedesmal zwei Dreiecke möglich sind, sieht man an einer solchen Halbkugel leicht ein.

Wir wollen annehmen: die punktirte Linie p m drehe sich um den Punkt p, so nimmt sie verschiedene Neigungen gegen den Grund an, und der Winkel m wird immer größer, so wie er sich dem Punkt a oder dem Punkte i nähert. Kommt er in diesen Punkten an, so steht er senkrecht auf dem Grunde.

Ist die Linie im Punkte k, und macht mit dem Grunde einen Winkel von z. B. 60°, so wird, wenn sie im Punkte o ist, wieder einen Winkel von 60° machen, weil sie in beiden Punkten gleich weit von m entfernt ist.

Wenn demnach die Seite p g gegeben ist, und der anliegende Winkel bei g, und der gegenüber stehende bei k, der 60° seyn soll, so kann man hiemit das Dreieck g p k construiren.

Allein da o ebenfalls = 60° ist, so kann man mit diesen drei Stücken noch ein zweites Dreieck construiren g p o, und es ist ungewiß, welches verlangt wurde.

6) In diesem Beispiele war der gegenüber stehende Winkel k kleiner als der anliegende g. Gesetzt, er sei größer gewesen, z. B. h, so hätte man das Dreieck g p h gehabt. Allein da t ebenfalls = h ist, so hätte man auch das Dreieck g p t aus den drei gegebenen Stücken construiren können.

Allein dieses Dreieck hat bei p einen überstumpfen Winkel, oder einen Winkel, der größer als zwei Rechte ist, und da bei den acht Dreiecken der Kugel keine überstumpfe vorkommen, so pflegt man diese auszuschließen. Schließt man diese aus, so ist in dem eben ange-

führten

führten Falle nur das Dreieck g p h möglich, und es findet keine Zweideutigkeit mehr statt.

Es können überhaupt acht verschiedene Fälle hiebei vorkommen, je nachdem die gegebene Seite spitz oder stumpf, der anliegende Winkel spitz oder stumpf, und der gegenüber stehende Winkel größer oder kleiner als der anliegende ist. In vier von diesen Fällen kann man zwei Dreiecke beschreiben, wovon keins überstumpf ist. In den vier andern ist jedesmal von den beiden Dreiecken ein überstumpfes, es bleibt also nur ein mögliches übrig, und es findet keine Zweideutigkeit dabei statt, welches von beiden gemeint ist.

Man übersieht diese Fälle leicht in folgender Tabelle, wobei ich voraussetze, daß man die angeführte Halbkugel bei der Hand habe, weil es ohne diese schwer seyn würde, sich eine klare Vorstellung von der Lage der Kreise und von der Größe der Winkel zu machen.

Man sieht leicht, daß alle Winkel, die 180° von einander liegen, einander gleich sind. $a = i$; $c = k$ u. s. w. weil alle Kreise mit dem Grunde Kugelsegmente bilden, in denen die zwei einander gegenüber stehenden Winkel gleich sind.

Auch sieht man an Fig. 7., daß alle Winkel, deren Schenkel gleichweit von m entfernt sind, einander gleich sind. p ist der Pol des Bogens s t. k o ist ein Stück vom Bogen des Grundes. km soll $= mo$ seyn, so sind die rechten Dreiecke kmt und smo einander gleich, also ist $r = o$, und da $k = r$ ist, so ist auch $k = o$.

	Wenn			so hat man			
	Die gegebene Seite	Der anliegende Winkel	Der gegenüber stehende Winkel	entweder das Dreieck	Der dritte Winkel bei p ist p entweder	Die diesem gegenüber stehende Seite ist	Die dritte Seite ist
1	pg spitzig	g spitzig	k od. o beide einander gleich u. jeder kleiner als g.	gpk od. gpo spitz oder stumpf	gpk oder gpo	gk oder go	pk oder po spitz oder stumpf
2	pg spitzig	g spitzig	h od. t beide einander gleich u. jeder größer als g	gph od. gpt spitz oder überstumpf	gph oder gpt	gh oder gt	ph oder pt spitz oder stumpf
3	ps stumpf	s stumpf	b od. d beide einander gleich u. jeder größer als s	spb od. sbd beide stumpf	spb oder sbd	sb oder sd	pb oder pd stumpf oder spitz
4	ps stumpf	q stumpf	t od. h beide einander gleich u. jeder kleiner als s	spt od. sph stumpf oder überstumpf	spt oder qph	st oder sh	pt oder ph stumpf oder spitz
5	pr stumpf	r spitzig	q = l u. jeder größer als der Nebenw. s od. als 180 — r	rpq od. rpl beide stumpf	rpq oder rpl	rq oder rl	pq oder pl stumpf oder spitz
6	pr stumpf	r spitzig	i = a u. jeder kleiner als der Nebenw. s od. als 180 — r	rpi od. rpa stumpf oder überstumpf	rpi oder rpa	ri oder ra	pi oder pa spitz oder stumpf
7	pf spitzig	f stumpf	c = c u. jeder kleiner als der Nebenw. g od. als 180 — f	fpe od. fpc beide stumpf	fpe oder fpc	fe oder fc	pe oder pc spitz oder stumpf
8	pf spitzig	f stumpf	a = i u. jeder größer als der Nebenw. g od. als 180 — f	fpa od. fpi stumpf oder überstumpf	fpa oder fpi	fa oder fi	pa oder pi stumpf oder spitz

8) Man

8) Man sieht aus der Tabelle, daß die dritte Seite im 2ten, 4ten, 6ten und 8ten Fall bestimmt ist, weil das zweite Dreieck als ein überstumpfes (nach §. 17. Nro. 5.) ausgeschlossen ist. Wie die dritte Seite in jedem Falle ist, ist unterstrichen. Im zweiten Falle ist sie spitz, im 4ten stumpf, im 6ten wieder spitz und im 8ten stumpf.

9) Zu welchem Falle gehörte nun unser Beispiel? — Zum siebenten.

Denn die gegebene Seite B = p f war = 53°, also spitzig.

Der anliegende Winkel c oder auf der Halbkugel der Wink. f war = 100°, also stumpf.

Der gegenüberstehende W. b (e oder c auf der Halbkugel) war 60°, also kleiner als der Nebenwinkel g des anliegenden, oder als 180° — f.

Das Dreieck konnte also seyn f p e, und so haben wir es gezeichnet. Es konnte aber auch f p c seyn. Beide sind stumpf und beide thun der Aufgabe Genüge.

	sind die drei gegebene Stücke			und die drei gesuchten.		
Im 3ecke f p e	fp = 53°	f = 100°	e = 60°	p = 38°	e f = 35°	ep = 66°
Im 3ecke f p c	fp = 53°	f = 100°	c = 60°	p = 109°	c f = 119°	cp = 114°

III. Fall.

1) Gegeben ist der Winkel a = 38°
eine anliegende Seite B = 53°
u. die dem W. gegenüberst. Seite A = 35°

Gesucht werden die beiden übrigen Winkel und die dritte Seite.

Auf=

Auflösung.

1) Man messe auf der Kugel an einem größten Kreise die Seite B = 53° ab. An diese trage man mit Hülfe des Transporteurs einen größten Kreis unter einem Winkel von 38°. Dann fasse man auf dem Gradbogen mit dem Zirkel die Länge der Seite A = 35°, und beschreibe hiemit aus dem andern Endpunkte c einen Kreis. Da wo dieser den Schenkel C schneidet, liegt der dritte Winkelpunkt b, und das Dreieck ist aufgelöst.

2) Allein dieser Kreis wird den Schenkel zweimal schneiden, und der Fall ist daher auf dieselbe Weise zweideutig, wie der ähnliche in der ebenen Geometrie, den wir Theil II. S. 195 hatten. — Man kann nemlich aus den drei gegebenen Stücken jedesmal zwei verschiedene Dreiecke beschreiben, und man weiß nicht, welches von beiden das verlangte ist. Ist aber unter diesen ein überstumpfes, dann weiß man, daß dieses das Gesuchte nicht seyn kann.

Um die verschiedene Fälle, in denen eins von den beiden Dreiecken ein überstumpfes ist, desto leichter auffinden zu können, zeichne man wieder auf eine Halbkugel dieselbe Kreise wie auf die vorige. (S. Fig. 6. Taf. IV.) a b c d e . . . . a sey wieder der Grund, auf dem der Kreis a p h senkrecht steht. Auf diesem steht der punktirte Kreis t p v senkrecht. Ebenfalls ziehe man die Kreise k p b und f p o wieder in eine Entfernung von etwa 50° von h p a, so wie auf der vorigen Halbkugel. Nur der Kreis e p r wird, statt daß er auf der vorigen (wo er g p s hieß) etwa 40° von h p a entfernt war, jetzt ungefähr 80° von ihr abgezogen, so daß er ungefähr in die Mitte zwischen den punktirten Bogen und den Bogen f p o fällt. Nachdem man die Kreise gezogen, so schreibe man alle Buchstaben so bei, wie in der Figur.

3) In unserem Beispiele ist der gegebene Winkel a = 38°, also spitz, so wie der Winkel e auf der Halbkugel. Die anliegende Seite B ist = 53°, also auch spitz, so wie e p auf der Halbkugel.

Die dem Winkel a gegenüberliegende Seite A ist 35°, also auch spitz, so wie f p auf der Halbkugel. Allein k p ist gleich f p, und beide sind kleiner als die andere Seite e p. Man kann also mit den drei gegebenen Stücken zwei Dreiecke beschreiben, nemlich e p f und e p k, und man weiß nicht, welches von beiden gemeint ist, da kein überstumpfes unter ihnen ist.

	sind die drei gegebene Stücke			und die drei gesuchten		
In dem Dr. Ecke e p k	e = 38°	e p = 53°	f p = 35°	p = 100°	e k = 66°	k 60°
In dem Dr. Ecke e p f	e = 38°	e p = 53°	f p = 35°	p = 28°	e f = 27°	f = 120°

Um die verschiedenen Fälle die hiebei vorkommen können, desto leichter übersehen zu können, wollen wir sie wieder in eine Tabelle zusammenstellen.

Diese Tabelle hat wieder acht Fälle, worunter viere sind, die überstumpfe Dreiecke bilden. Man sieht, daß unser Beispiel der erste Fall in der Tabelle ist.

	Wenn: Der gegebene Winkel	Die anliegende Seite	Die ihm gegenüber stehende Seite	so hat man: entweder das Dreieck	Der Winkel bei p ist entweder	Die ihm gegenüber stehende Seite	und der dritte Winkel
1	e spitzig	pe spitzig	pf = pk beide kleiner als pe	epf od. epk beide stumpf	epf oder epk	ef oder ek	f oder k.
2	e spitzig	pe spitzig	pt = pv beide größer als pe	ept od. epv das letztere ist überstumpf	ept oder epv (überst.)	et oder ev (überst.)	t oder v
3	n stumpf	pn stumpf	po = pb beide größer als pn	npo od. npb beide sind stumpf	npo oder npb	no oder nb	o oder b
4	n stumpf	pn stumpf	pv = pt beide kleiner als pn	npv od. npt das letztere ist überstumpf	npv oder npt (überst.)	nv oder nt (überst.)	v oder t
5	m spitzig	pm stumpf	pg = pl kleiner als pd oder als 180° — pm	mpl oder mpg beide stumpf	mpl oder mpg	ml oder mg	l oder g
6	m spitzig	pm stumpf	pw = pu größer als pd oder als 180° — pm	mpw oder mpu das letztere ist überstumpf	mpw oder mpu (überst.)	mw oder mu (überst.)	w oder u
7	d stumpf	pd spitzig	pc = pq größer als pm oder als 180° — pd	dpc oder dpq beide stumpf	dpc oder dpq	dc oder dq	c oder q
8	d stumpf	pd spitzig	pw = pu kleiner als pm oder als 180° — pd	dpu oder dpw stumpf oder überstumpf	dpu oder dpw (überst.)	du oder dw (überst.)	u oder w

IV. Fall.

Gegeben ist die Seite A = 35°
ferner die Seite B = 53°
und der eingeschlossene Wink. c = 100°

Gesucht werden die beiden übrigen Winkel und die dritte Seite C.

Dieser Fall ist sehr leicht aufzulösen. Man zeichnet die Seite A auf die Kugel: trägt an diese den Winkel c, und mißt auf dem Winkel desselben die Seite B ab. Durch die beiden Endpunkte von A und B, zieht man einen größern Kreis und das Dreieck ist geschlossen.

Mißt man dann die Größe der dritten Seite und die der beiden andern Winkeln, so findet man:

C = 66°
a = 38°
b = 60°

V. Fall.

Gegeben sind alle drei Seiten A, B und C. Die Seite A sey 35°
B sey 53°
und C sey 66°

Auch dieser Fall ist sehr leicht aufzulösen. Man trägt die Seite A auf die Kugel. Aus den beiden Endpunkten beschreibt man Bogen mit den beiden Seiten B und C. Wo diese sich durchschneiden, liegt der dritte Dreieckspunkt. Legt man durch diesen und die beiden Endpunkte von A zwei große Kreise, so ist das Dreieck geschlossen, und man kann die Größe der drei Winkel messen.

a ist dann 38°
b 60°
c 100°

VI.

VI. Fall.

Gegeben sind in dem Dreiecke a b c (Fig. 8.) alle drei Winkel a b und c.

Man soll auf der Kugel ein Dreieck beschreiben, das die gebenen Winkel hat.

a sey 38°
b sey 60°
c sey 100°

Auflösung.

1) Man construire ein Dreieck d e f (Fig. 9. Taf. IV.) in dem die eine Seite 38°, die andere 60° und die dritte d e 180 — 100 = 80° sey. In diesem Dreiecke hat also die erste und zweite Seite so viele Grade, als in dem gegebenen Dreieck die Winkel a und b haben, und die dritte Seite hat so viele Grade, als der Nebenwinkel von c hat.

Man verlängere d f bis 90° = d h
ebenfalls d e bis 90° = d g
und f e bis 90° = f r

Ferner mache man f k = 90°
e i = 90°
und e s = 90°

2) Man lege durch g h einen größten Kreis, so ist d der Pol dieses Kreises, und die Pole der größten Kreise, d e und d f liegen in diesem Kreise g h, weil sie senkrecht auf ihm stehen.

Man lege durch r und k ebenfalls einen größten Kreis, so ist der Pol dieses Kreises, und die Pole der Kreise d f und f e liegen in diesem Kreise r k.

Man

Man mache h o = 90°, dann ist auch k o = 90°, da die beiden Kreise h o und k o auf dem Kreise d f senkrecht stehen.

Der Bogen h k ist das Maaß des Winkels bei o. Also hat der Winkel m o n so viele Grade, wie der Bogen h k oder die Seite d f die 60° hat. (I.)

3) Man lege ferner durch s und i einen größten Kreis, so ist e der Pol dieses Kreises, und die Pole der größten Kreise d e und f e liegen in diesem Kreise.

Man mache i n = 90°, dann ist n g auch 90°, weil beide Bogen auf dem Kreise d e senkrecht stehen. Der Winkel g n i hat also zum Maaß den Bogen g i, welcher der Seite d e gleich ist, die 80° hat. In dem Dreieck m n o muß also der Winkel m n o = 100° seyn, da sein Nebenwinkel o n i = 80° ist. (II.)

4) Man lege endlich durch k und r einen größten Kreis, so steht dieser auf f e senkrecht, da f der Pol des Bogens r k ist. Der Pol des Bogens f e wird in diesem Kreise liegen und zwar in m, wenn man m r = 90° macht. m s wird dann auch 90° seyn, weil beide Bogen m s und m r auf dem Kreise f e senkrecht stehen.

Der Bogen r s ist das Maaß des Winkels bei m. Also hat der Winkel o m n so viele Grade als der Bogen r s, welcher der Seite f e gleich ist, die 38° hat. (III.)

5) In dem Dreieck m n o ist also:

der Winkel m o n = 60° nach I.
der Winkel m n o = 100° nach II.
und der Winkel o m n = 38° nach III.

Wir haben also ein Dreieck m n o auf der Kugel gezeichnet, in dem ein Winkel 38°, einer 60° und einer

100°

100° hatte, so wie es die Aufgabe verlangte, und das dem gegebenen Dreieck a b c gleich ist.

6) Wir haben im vorigen gezeigt: daß in dem Dreiecke m n o, zwei Winkel so groß sind als zwei Seiten in dem Dreieck d e f, und daß der Nebenwinkel o n s so groß sey, als die dritte Seite d e.

Es ist jetzt noch übrig zu zeigen: daß in dem Dreiecke m n o auch zwei Seiten so groß sind als zwei Winkel in dem Dreieck d e f, und daß die dritte Seite m o so groß sey, als der Nebenwinkel e f h.

Die Seite m n ist = s i = dem Maaß des W. bei e.
Die Seite n o ist = g h = dem Maaß des W. bei d.
Die Seite m o ist = r k = dem Maaß d. Nebenw. bei f.

Wenn wir also ein Dreieck m n o beschreiben, in dem zwei Winkel so groß sind als zwei Seiten des Dreiecks d e f, und der Nebenwinkel o n s so groß als die dritte Seite d e, so sind in diesem Dreiecke m n o auch zwei Seiten so groß als zwei Winkel in dem Dreiecke d e f, und die dritte Seite m o ist so groß als der Nebenwinkel bei f.

Anmerkung. Das Dreieck m n o nennt man das Polardreieck des Dreiecks d e f, weil seine Spitzen die Pole von den Bogen d e, d f und f e sind.

Umgekehrt ist auch das Dreieck d e f das Polardreieck des Dreiecks m n o, weil seine Spitzen e, f d, die Pole von den Bogen m n, m o und n o sind, Die Figur bleibt ganz dieselbe, auch wenn man sie umkehrt, und mit dem Dreieck m n o anfängt.

Ueberhaupt nennt man jedes Dreieck ein Polardreieck von M, welches durch drei Bogen entsteht, welche durch die Pole der drei Kreise gezogen werden, die das Dreieck M bilden. Da auf der Kugel durch das Durchschneiden dreier Kreise, jedesmal acht Dreiecke entstehen, so gehört jedes Polardreieck jedesmal zu acht verschiedenen Dreiecken.

Nennt man die drei Pole, die an der einen Seite der Halbkugel liegen A B C, und die an der andern a b c, so erhält man drei verschiedene Polardreiecke, je nachdem man A B und C oder A B und c oder A b und C miteinander verbindet. Man muß daher, wenn man von einem Polardreiecke spricht, bestimmt angeben, welches man meint, denn es ist willkührlich, ob man die Kugel durch den Bogen vom Pole A oder durch den vom Pole B durch den vom Pole C in zwei Theile theilen läßt, und sobald man einen andern Bogen nimmt, kommen auch wieder andere Pole aus der einen Halbkugel in die andere. *)

Berechnung der sphärischen Dreiecke.

§. 19.

Wir haben im vorigen §. gesehen, wie man die sphärische Dreiecke auf die Kugel verzeichnen kann, sobald von den sechs Stücken, aus denen sie bestehen, dreie gegeben sind. Ist ein Dreieck gezeichnet, so kann man die Größe von jeder Seite und von jedem Winkel messen, und das Dreieck ist aufgelöst.

Jetzt wollen wir zeigen, wie man in jedem sphärischen Drei-

*) In den vorigen Beispielen sind der Bequemlichkeit wegen für die Größe der Seiten und Winkel runde Zahlen gewählt, auch ist auf die Theile von Graden keine Rücksicht genommen.

Dreiecke die Größe von jeder Seite und von jedem Winkel ohne Zeichnung durch bloße Rechnung finden kann, sobald von den sechs Stücken, aus denen ein Dreieck besteht, drei bekannt sind.

Vorher wollen wir aber noch ein paar Sätze beweisen, welche wir in §. 17. der Kürze wegen, blos im Vorbeigehen angeführt haben.

1) In jedem sphärischen Dreieck ist jede Seite nothwendig kleiner wie 180°.

Denn wenn zwei größte Kreise (wie z. B. a d b und a m b in Fig. 2. Taf. IV.) sich schneiden, so ist jeder Bogen = 180°, und es entsteht ein Kreisausschnitt. Wird dieser noch durch einen dritten größten Kreis geschnitten, wie z. B. n k, so entsteht das sphärische Dreieck a n k, dessen Seiten nothwendig kleiner als 180° seyn müssen.

2) Eine Seite in einem sphärischen Dreieck ist jedesmal kürzer, als die beiden übrigen zusammengenommen.

Denn auf der Oberfläche der Kugel, ist der kürzeste Weg zwischen zweien Punkten, z. B. a und n (Fig. 2.) jedesmal ein größter Kreis. Der Bogen a n muß daher kürzer seyn als a k + n k.

3) Die Summe der drei Seiten eines sphärischen Dreiecks, ist jedesmal kleiner als 360°.

Denn n k ist z. B. kleiner als b n + b k.
Aber b n + b k ist = 360 — a n — a k.
Also ist n k kleiner als 360 — a n — a k.
Addirt man an beiden Seiten + a n + a k
so ist n k + a n + a k kleiner als 360°.

4) Die Summe der drei Winkel in einem sphärischen Dreiecke ist immer kleiner als 6 Rechte.

Denn

Denn jeder der drei Winkel muß immer kleiner als 2 Rechte seyn.

5) Die Summe der drei Winkel in einem sphärischen Dreieck ist jedesmal größer als 2 Rechte.

Um diesen Satz zu beweisen, bedürfen wir der Figur 4. Taf. 5. Wenn man in dem sphärischen Dreieck a b c die Spitzen als Pole nimmt, aus denen man mit dem Bogen von 90° Kreise beschreibt, (z. B. aus dem Punkte a den Bogen d e, aus c den Bogen d f, und aus b den Bogen f e) so bilden diese Bogen ein Dreieck auf der Kugel wie d e f.

Der Punkt e ist vermöge der Construktion 90° von a und ebenfalls 90° von b. e ist daher der Pol des Bogens a b. Aus denselben Gründen ist d der Pol von a c und f der Pol von b c.

Vom Pole e verlängre man a b bis in g, und vom Pole d verlängere man a c bis in h. Vermöge der Construktion ist $ge = 90°$ und $dh = 90°$.

Also ist $ge + dh = 180° = ge + dg + gh = de + gh$. Aber g h ist das Maaß des Winkels a, also ist d e seine Ergänzung zu 180°.

Auf dieselbe Weise findet man, daß e f die Ergänzung von b und d f die Ergänzung von c ist.

Verlängert man jetzt aus dem Pole e den Bogen g a bis in l, so ist g l das Maaß des Winkels bei e. Aber vermöge der Construktion ist $ga = 90° = bl$, und also $ga + bl$ oder $gl + ba = 180°$. Also ist der Winkel e die Ergänzung des Bogens a b zu 180°.

Auf dieselbe Weise findet man, daß d die Ergänzung von a c und f die Ergänzung von b c ist.

Die

Die Winkel des Dreiecks d e f sind daher die Ergänzung der Seiten des Dreiecks a b c zu 180°, und die Seiten des Dreiecks d e f sind die Ergänzung der Winkel des Dreiecks a b c zu 180°.

Das eine Dreieck d e f ist daher das Ergänzungsdreieck oder das Polardreieck des Dreiecks a b c. Ebenfalls ist das Dreieck a b c das Polardreieck des Dreiecks d e f

Wir können jetzt leicht beweisen, daß die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks jedesmal größer als 180° ist.

Denn da die drei Seiten d e, f e und d f die Ergänzung der drei Winkel zu 180° sind, so betragen sie mit diesen Winkeln zusammengenommen 540°. Da aber nach 3) die Summe der drei Seiten in einem sphärischen Dreiecke kleiner als 360° ist, so folgt hieraus, daß die Summe der drei Winkel größer als 180° seyn muß, weil sie sonst zusammengenommen keine 540° betragen könnten.

Ferner folgt hieraus, daß wenn das sphärische Dreieck gleichseitig ist, jeder der drei Winkel größer als 60° seyn muß, und also größer als der ebene Winkel, den die Sehnen der drei Kreisbogen einschließen.

Die Summe der drei Winkel in einem sphärischen Dreieck, liegt daher jedesmal zwischen 180 und 540°.

6) Zwei sphärische Dreiecke sind einander gleich, wenn die drei Seiten gleich sind, und man kann sie, wenn sie an derselben Seite der Kugel liegen, so aufeinander legen, daß sie einander decken.

7) Zwei sphärische Dreiecke, M und N, sind einander gleich, wenn die drei Winkel einander gleich sind.

Denn

Denn in diesem Falle haben ihre beide Polardreiecke O und P gleiche Seiten und auch gleiche Winkel, weil sie (nach 6) einander gleich sind. Die Ergänzungen dieser Winkel zu 180°, müssen daher auch einander gleich seyn, und dieses sind die Seiten der beiden gegebenen Dreiecke M und N; die also auch einander gleich seyn müssen.

8) Zwei sphärische Dreiecke sind einander gleich, wenn in ihnen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich sind. Sie sind ebenfalls gleich, wenn in ihnen zwei Winkel und die eingeschlossene Seite gleich sind.

Diese beiden Sätze werden auf dieselbe Weise wie in der ebenen Geometrie bewiesen.

9) Zwei sphärische Dreiecke, in denen eine Seite ein anliegender und ein gegenüberstehender Winkel einander gleich sind, sind oft einander gleich und oft nicht.

Dasselbe ist der Fall, wenn ein Winkel eine anliegende und eine gegenüberstehende Seite in ihnen gleich sind. Die Tafel II. und III. §. 18. zeigt, in welchen Fällen sie einander gleich sind, und in welchen nicht.

10) Man kann durch drei Punkte, die auf der Oberfläche einer Kugel liegen, immer einen Kreis ziehen.

Die drei Punkte seyen a, b und c Fig. 1. Taf. V. Man verbinde sie mit den beiden größten Kreisen a b und b c. Auf ihrer Mitte errichte man die Senkrechten e p und d p, die sich in p schneiden.

Man ziehe ferner die Bogen pa, pb und pc: so entstehen vier rechtwinklige Dreiecke, von denen zwei und zwei einander gleich sind. pa ist daher = pb = pc, und p ist der Pol des Kreises, welcher durch die drei Punkte a, b und c geht.

In dem Falle, daß die drei Punkte in einer Ebene liegen, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht, wird der Kreis ein größter. In jedem andern Falle wird er ein kleinerer Kreis der Kugel.

11) Die Winkel an der Grundlinie eines gleichseitigen sphärischen Dreiecks sind einander gleich.

Wenn in dem Dreieck a b c Fig. 2. a b = a c ist, so ist auch der Winkel bei b gleich dem Winkel bei c.

Man nehme a d = a e, und ziehe die Kreisbogen e c und b d, so sind die Dreiecke a b d und a c e einander gleich. Da in ihnen zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bei a einander gleich sind, also ist e c = b d. Die Dreiecke e b c und d b c sind also auch einander gleich, da in ihnen alle drei Seiten gleich sind, und der Winkel bei b ist dem bei c gleich.

12) Mit Hülfe des Polardreiecks kann man leicht zeigen, daß auch der Satz umgekehrt gilt. Wenn in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, dann sind auch die gegenüber stehenden Seiten einander gleich.

13) Hieraus folgt, daß bei allen sphärischen Dreiecken gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber stehen, und daß jedes gleichwinklige Dreieck zugleich ein gleichseitiges seyn muß.

14) In jedem sphärischen Dreieck ist die größte Seite dem größten Winkel, und die kleinste Seite dem kleinsten Winkel gegenüber.

Wenn in dem Dreieck a b c Fig. 3. Taf. V. der Winkel b a c größer als b ist, so ist auch die Seite b c größer als a c.

Man ziehe den Kreisbogen a d so, daß a = b sey, dann ist auch b d = a d nach 13). Also ist b d + d c oder a d + d c = b c, a c ist aber kleiner als a d + d c, weil auf der Oberfläche der Kugel der kürzeste Weg zwischen zweien Punkten ein größter Kreis ist, und die größte Seite steht also auch dem größten Winkel gegenüber.

15) In jedem sphärischen Dreieck ist der äußere Winkel kleiner als die beiden gegenüber stehenden.

Wenn in dem Dreieck a b d Fig 3. a d c der äußere Winkel ist, so ist dieser kleiner als der Winkel a + b.

Denn a d b + a d c = 180°, aber a + b + d ist größer als 180, also ist a + b + d auch größer als a d b + a d c, und a + b größer als a d c.

16) Das Kugelsegment Fig. 2. Taf. IV. wird in demselben Verhältnisse größer oder kleiner, wie der Bogen d m größer oder kleiner wird. Dieser Bogen ist zugleich das Maaß des Winkels bei a, und wird in demselben Verhältniß größer oder kleiner. Das Kugelsegment verhält sich daher jedesmal zur ganzen Kugel, wie der Winkel bei a zum ganzen Kreise.

§. 20.

Bei der Berechnung der sphärischen Dreiecke werden die trigonometrischen Linien so gebraucht wie in der ebenen Trigonometrie.

Die Sinus und Tangenten eines Winkels stehen jedesmal senkrecht auf der Ebene, die durch einen seiner Schenkel und durch den Mittelpunkt der Kugel gelegt wird. Sie sind immer 90° von seinem Scheitel entfernt. So ist z. B. f g der Sinus des Winkels a Fig. 5. Taf V. und g h ist die

Tangente

Tangente des W. a Fig. 6. Sie wird abgeschnitten durch den verlängerten Halbmesser c f g, welcher die Sekante ist.

Die Sinus und Tangenten der Bogen liegen jedesmal in der Ebene, welche durch diesen Bogen und durch den Mittelpunkt des Kreises gelegt wird. Die Sinus fallen von dem einen Endpunkte des Bogens senkrecht auf den Halbmesser, der aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem andern Endpunkte des Bogens gezogen wird. So ist e l Fig. 5. der Sinus des Bogens e b, und e d ist der Sinus des Bogens e a. Ebenfalls ist f g der Sinus des Bogens f h.

Die Tangenten werden senkrecht auf den Halbmesser errichtet, der aus dem Mittelpunkte der Kugel nach dem einen Endpunkte des Bogens gezogen wird. So sind t b und g h Fig. 6. Tangenten des Bogens e b und f h. Sie werden in t und g durch den verlängerten Halbmesser abgeschnitten, der nach dem andern Endpunkte des Bogens gezogen ist. c t ist dann die Sekante von e b, und c g ist die Sekante von f h.

Die Berechnung der sphärischen Dreiecke beruht auf geometrischen Gleichungen, das heißt: auf Regula de Tri-Sätzen. Diese werden, so wie in der ebenen Trigonometrie, aus vier Lehrsätzen hergeleitet, welche wir jetzt aufstellen werden.

§. 21.

Erster Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreieck verhält sich der Sinus der Hypotenuse zum Sinus einer Seite, wie der Halbmesser zum Sinus des Winkels, welcher dieser Seite gegenüber liegt.

Beweis.

Es sey Fig. 5. Taf. V. c der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche drei Bögen, a b, a e und e b ein Dreieck bilden, das bei b rechtwinklig ist.

Man verlängere die beiden erstern Bögen bis in f und h, wo sie $= 90°$ sind. So hat man a e f und a b h $= 90°$, weil diese Winkel durch die Bogen a f und a h gemessen werden, und f c und h c stehen auf a c senkrecht. Ferner ist f c $=$ h c $=$ e c $=$ b c $=$ a c, weil alle Radien der Kugel sind, und der Bogen f h ist das Maaß des Winkels f a h, den wir a nennen wollen.

Man lasse die Senkrechten f g auf c h, e l auf c b, und e d auf a c fallen, und ziehe die Linie d l, auf welcher e l senkrecht ist, weil d l in derselben Ebene liegt, worauf die Ebene b c e senkrecht steht.

Die Dreiecke e l d und f g c sind einander ähnlich, und ihre Ebenen einander parallel. Denn e d und f c sind einander parallel, und e l und f g auch, da sie senkrecht auf derselben Ebene a b h c stehen. Daher ist d l auch c g parallel.

Es verhält sich also d e : e l $=$ c f : f g. Aber d e ist der Sinus vom Bogen a e, e l ist der Sinus vom Bogen e b, c f ist der Radius oder Sin. totus, der immer $= 1$ ist, und f g ist der Sinus vom Bogen f h oder vom Winkel a.

Man hat also:

$$\text{Sin. } ae : \text{Sin. } eb = 1 : \text{Sin. } a.$$

Verlängert man die Bogen e b und e a vom Punkte e bis $90°$, so hätte man auf dieselbe Weise:

$$\text{Sin. } ae : \text{Sin. } ba = 1 : \text{Sin. } e.$$

Es verhält sich also in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Sinus der Seite, die dem rechten Winkel

gegen=

gegenüber steht, (die Hypothenuse) zum Sinus einer Seite, wie der Sin. tot. (oder der Radius) zum Sinus des Winkels, welcher dieser Seite gegenüber steht; welches sollte erwiesen werden.

§. 22.

Zweiter Lehrsatz.

In jedem rechtwinklichen sphärischen Dreieck verhält sich der Halbmesser zum Sinus eines Bogens, wie die Tangente des an diesen Bogen anliegenden Winkels zur Tangente des diesem Winkel gegenüber stehenden Bogens.

Beweis.

Es sey Fig. 6. Taf. V. c der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche das Dreieck a e b ist beschrieben worden, welches in b rechtwinklig ist.

Man verlängere die beiden Seiten a b und a e bis in f und h, wo sie $= 90°$ sind. Dann errichte man in b und h die beiden Perpendikel b t und h g, welche die Tangenten der Bogen e b und f h sind. Man ziehe ferner in der Ebene a c f die Radien, welche verlängert die Tangenten in t und g schneiden, so sind c t und c g die Sekanten der Bögen. Endlich ziehe man b d auf a c senkrecht, also parallel mit h c.

So ist die Ebene t d b der Ebene g c h parallel, weil beide senkrecht auf der Ebene a c h stehen. Auch liegt die Linie t d in derselben Ebene, worin t c und c g liegen, und die Linien t d und g c sind also auch einander parallel.

Die beiden Dreiecke d t b und c g h sind einander ähnlich, und es verhält sich also $ch : db = gh : tb$,

oder $\text{Rad.} : \sin. ab = \text{tang. } a : \text{tang. } eb$.

Ver-

Verlängert man die beiden Bogen e b und e a bis 90°, so erhält man auf dieselbe Weise:

Rad. : sin. e b = tang. e : tang. a b.

Es verhält sich also in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Radius zum Sinus eines Bogens, wie die Tangente des an diesem Bogen anliegenden Winkels zur Tangente des diesem Winkel gegenüber stehenden Bogens, welches sollte erwiesen werden.

§. 23.

Dritter Lehrsatz.

In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Winkel, wie die Sinus der diesen Winkeln gegenüber stehenden Bogen.

Beweis.

Es sey Fig. 7. Taf. V. c der Mittelpunkt der Kugel, auf deren Oberfläche das Dreieck a g d ist beschrieben worden.

Man lasse aus dem Scheitelpunkte g den senkrechten Bogen g b auf den Bogen a d fallen, so theilt dieser das Dreieck in zwei rechtwinklige, die beide den rechten Winkel bei b liegen haben.

Nach dem ersten Lehrsatze haben wir für das Dreieck a b g folgende geometrische Gleichung:

sin. a g : sin. g b = Rad. : sin a,

und für das Dreieck

g b d haben wir sin. g d : sin. g b = Rad . sin. d.

Kehrt man in der letzten Gleichung die innern Glieder um, so hat man:

sin. g d : Rad. = sin. g b : sin. d (I)

Verwechselt man in der vorletzten das erste und vierte Glied, und setzt dann die beiden hintern Glieder vorne, so hat man:

$$Rad. : sin.\, a\, g = sin.\, a : sin.\, g\, b \quad (II)$$

I u. II multip. gibt (Rad. sin. g d) : (Rad. sin. a g) = (sin. g b . sin. a) : (sin. g b . sin. d)

Streicht man in allen Gliedern die gleichen Faktoren weg, so erhält man:

$$sin.\, g\, d : sin.\, a\, g = sin.\, a : sin.\, d,$$

oder die Sinus der Winkel verhalten sich wie die Sinus der diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

Anmerk. Dieses ist der Hauptlehrsatz in der sphärischen Trigonometrie. Er ist völlig derselbe, wie der in der ebenen Trigonometrie; daß sich in jedem ebenen Dreiecke die Sinus der Winkel verhalten wie die diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten. Statt der Seiten werden in der sphärischen Trigonometrie die Sinus der Seiten gebraucht, da die Seiten Kreisbogen sind.

§. 24.

1) Mit Hülfe der drei Lehrsätze der vorigen Paragraphen, können wir von den sechs Fällen, die in der sphärischen Trigonometrie vorkommen, vier auflösen. Nemlich folgende:

1. Gegeben ist eine Seite, und die beiden anliegenden Winkel.
2. . . . . eine Seite, ein anliegender und ein gegenüber stehender Winkel.
3. . . . . ein Winkel, eine anliegende und eine gegenüber stehende Seite.
4. . . . . ein W. und die beiden anliegenden Seiten.

Den

Den fünften Fall, in dem alle drei Seiten, und der sechste, in dem alle drei Winkel gegeben sind, können wir hiemit noch nicht auflösen. Dazu bedürfen wir des vierten Lehrsatzes, den wir in §. 29. haben werden.

2) Wenn in einem Dreieck zwei von den gegebenen Stücken einander gegenüber liegen, und das Gesuchte liegt dem dritten von den gegebenen Stücken gegenüber, so kann man das Gesuchte immer nach dem dritten Lehrsatze finden, welcher sagt: daß in einem sphärischen Dreieck die Sinus der Winkel sich verhalten wie die Sinus der diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

1. Beispiel. In dem Dreieck abc Fig. 4. Taf. IV. sey gegeben:

die Seite $A = 64^\circ, 20'$
der Winkel $b = 48^\circ, 34'$
der Winkel $a = 86^\circ, 27'$
gesucht sei die Seite B.

Man hat nun folgende Gleichung:

$$\sin. a : \sin. A = \sin. b : \sin. B,$$

und $\sin. B = \dfrac{\sin. A : \sin. b}{\sin. a.}$

$$\begin{aligned}
\text{Log. sin. } A &= \text{log. sin. } 64^\circ, 20' = 9{,}9548834 \\
\text{log. sin. } b &= \text{log. sin. } 48^\circ, 34' = 9{,}8749027 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 19{,}8297861 \\
\text{log. sin. } a &= \text{log. sin. } 86^\circ, 27' = 9{,}9991659 \\
& \text{log. sin. } B = 9{,}8306202 = 42^\circ, 37'
\end{aligned}$$

Die Seite B ist also $42^\circ, 37'$ lang.

In dem Dreiecke abc kennen wir nun die Seiten A und B und die Winkel a und b. Den Winkel c und

die

die Seite C können wir aber mit diesem Satze nicht finden, weil sie nichts Bekanntem gegenüber liegen. Daß wir die Größe der Seite B finden konnten, kam daher, daß sie dem bekannten Winkel b gegenüber lag.

3) In dem Dreieck a b c Fig. 4. Taf. IV. soll gegeben seyn der Winkel a, die Seite A, und die Seite B, gesucht wird der Winkel b.

Wir haben nun wieder:

$$\sin. A : \sin. a = \sin. B : \sin. b,$$

$$\text{und } \sin. b = \frac{\sin. a : \sin. B}{\sin. A.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Log. sin. } a = \text{log. sin. } 86^\circ, 27' = & 9{,}9991659 \\ \text{log. sin. } B = \text{log. sin. } 42^\circ, 37' = & 9{,}8306202 \\ \hline & 19{,}8297861 \\ \text{log. sin. } A = \text{log. sin. } 64^\circ, 20' = & 9{,}9548834 \\ \hline \text{log. sin. } b = & 9{,}8749027 = 48^\circ, 34' \end{array}$$

Der Winkel b ist also 48°, 34'.

In diesem Falle konnten wir wieder die Größe des Winkels b bestimmen, weil er etwas bekanntem gegenüber lag, nemlich der Seite B. Hingegen c und C bleiben uns wieder unbekannt, weil sie nichts bekanntem gegenüber liegen.

4) In der ebenen Trigonometrie kann man mit dem Satze: daß sich die Sinus der Winkel verhalten wie die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüber stehen, ungleich mehr Fälle auflösen, als man es in der sphärischen mit dem ihm gleichbedeutenden Satze kann: daß sich die Sinus der Winkel verhalten wie die Sinus der diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten.

Die Ursache hievon ist folgende: In der ebenen Trigonometrie ist der dritte Winkel im Dreieck bekannt, sobald man die Größe von zweien kennt. Ist daher eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, so findet man den gegenüber stehenden durch Abziehen von 180°, und nun sind alle drei Winkel bekannt, und man kann nun jede der diesen Winkeln gegenüber stehenden Seiten finden. Diesen Fall kann man in der sphärischen Trigonometrie mit diesem Satze gar nicht lösen, weil man die Größe des dritten Winkels aus der von den beiden übrigen nicht finden kann.

Sind ferner in der ebenen Trigonometrie ein anliegender und ein gegenüber stehender Winkel gegeben, so kennt man wieder alle drei Winkel, und man kann nun auch die gegenüber stehenden Seiten finden. Allein in der sphärischen kann man blos die dem einen Winkel b gegenüber stehende B finden, wie wir dieses im ersten Beispiele sahen, aber nicht die Seite C, weil wir den Winkel c nicht durch Abziehen finden können. Sind endlich in der ebenen Trigonometrie zwei Seiten und ein anliegender Winkel gegeben, so kann man den dieser Seite gegenüber stehenden Winkel durch diesen Satz finden. Das kann man auch in der sphärischen, wie wir dieses am zweiten Beispiele gesehen haben, allein man kann nun nicht die Größe vom dritten Winkel finden. In der ebenen Trigonometrie findet man ihn durch Abziehen von 180°, und kann nun auch die diesem Winkel gegenüber stehende Seite berechnen.

5) Ist aber in der ebenen Trigonometrie ein Winkel und die beiden anliegenden Seiten gegeben, so kann man die drei übrigen Stücke auch nicht mit Hülfe des angeführten

führten Lehrsatzes finden, weil keine bekannte Seite einem bekannten Winkel gegenüber steht, und auf dieses Gegeneinanderüberstehen kommt alles an, da beide Lehrsätze, sowohl der in der ebenen als der in der sphärischen Trigonometrie hierauf beruhen. Man muß dann zu der Tangentenformel des zweiten Lehrsatzes seine Zuflucht nehmen, weil bei dieser es nicht auf das Gegeneinanderüberstehen der gegebenen drei Stücke, sondern auf das Nebeneinanderliegen ankommt. Den Satz für die Tangenten haben wir in der ebenen Trigonometrie in §. 11. angeführt, und mit ihm den vierten Fall aufgelöst. (Wenn ein Winkel und die beiden anliegenden Seiten gegeben sind.) Den ähnlichen Satz für die Tangenten haben wir in der sphärischen Trigonometrie §. 22. angeführt, und wir werden jetzt mit ihm alle Fälle auflösen, wo entweder alle gegebenen Stücke nebeneinander liegen, oder aber, wo dem Gesuchten nichts Bekanntes gegenüber liegt.

6) In der ebenen Trigonometrie gilt der zweite Lehrsatz für alle Dreiecke, sie mögen rechtwinklig oder schiefwinklig seyn. Hingegen gelten der erste und zweite Lehrsatz in der sphärischen Trigonometrie nur für rechtwinklige Dreiecke. Wir können also mit ihnen nur rechtwinklige Dreiecke auflösen, und wenn wir schiefwinklige haben, so müssen wir diese vorher in zwei rechtwinklige verwandeln, indem wir aus einer Spitze derselben einen senkrechten Bogen auf die gegenüber stehende Seite fallen lassen.

Die meisten Dreiecke, welche in der Trigonometrie vorkommen, sind indeß rechtwinklige, weil die größten Kreise, welche gewöhnlich gebraucht werden, fast alle senkrecht aufeinander stehen. So stehen z. B. alle Hö-

hen-

henkreise senkrecht auf dem Horizonte, ferner alle Mittagskreise senkrecht auf dem Aequator u. s. w.

Wir wollen jetzt zuerst die Berechnung der rechtwinkligen Dreiecke zeigen, und dann zur Berechnung der schiefwinkligen übergehen.

§. 25.

Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

1) Wir wollen annehmen, daß das Dreieck abc Fig. 8. Taf V. bei c rechtwinklig sey. Außer dem rechten Winkel bei c sind noch zwei Stücke gegeben, entweder noch zwei Seiten oder noch eine Seite und noch ein Winkel. Nur dürfen außer dem rechten Winkel nicht noch zwei Winkel gegeben seyn, weil sonst der Fall einträte, daß alle drei Winkel gegeben wären, welchen wir erst nach dem vierten Lehrsatze werden auflösen können.

2) In dem rechtwinkligen Dreiecke abc sind also drei Stücke bekannt, unter denen wenigstens eine Seite ist, man sucht die drei übrigen.

Von der Lage, die diese drei Stücke gegeneinander haben, hängt es nun jedesmal ab, ob wir den ersten oder den zweiten Lehrsatz, den mit den Sinus oder den mit den Tangenten anwenden müssen.

Um dieses in jedem Falle leichter beurtheilen zu können, wollen wir beide in den Buchstaben des Dreiecks hiehin setzen.

1. Lehrsatz. Rad. : sin. a = sin. C : sin. A.
Rad. : sin. b = sin. C : sin. B.

2. Lehrsatz. Rad. : sin. A = tang. b : tang. B.
Rad. : sin. B = tang. a : tang. A.
Rad. : sin. B = tang. c : tang. C.

3) Bei

3) Bei der Auflösung eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks hat man nur darauf zu sehen: ob unter den drei gegebenen Stücken zwei einander gegenüber stehen, oder aber, ob sie alle drei nebeneinander liegen. Einer von beiden Fällen muß nothwendig jedesmal statt finden, sobald unter den drei gegebenen Stücken, Seiten und Winkel sind.

Stehen zwei einander gegenüber, so sucht man das vierte nach dem ersten Lehrsatze. Sind vier bekannt, so sucht man das fünfte nach dem zweiten Lehrsatze: Hat man dieses, so kann man das sechste nach dem ersten oder nach dem zweiten Lehrsatze suchen, je nachdem man will.

Liegen aber alle drei Stücke nebeneinander, so sucht man das vierte nach dem zweiten Lehrsatze; hat man dieses, so kann man das fünfte und sechste entweder nach dem ersten oder nach dem zweiten suchen, je nachdem man will.

1. Beispiel. In dem Dreiecke a b c Fig. 8. sey gegeben der Winkel $a = 86°, 27'$. Die Seite $C = 88°, 40'$, und der Winkel $c = 90°$. Man sucht die Seite A, dann die Seite B, und endlich den Winkel b.

Nach dem ersten Lehrsatze hat man:

$$\text{Rad.} : \sin. a = \sin. C : \sin. A.$$

$$\begin{array}{rr} \text{Log. sin. } a = \text{log. sin. } 86°, 27' = & 9{,}9991659 \\ \text{Log. sin. } C = \text{log. sin. } 88°, 40' = & 9{,}9998824 \\ \hline & 19{,}9990483 \\ \text{Log. Rad.} = \text{log. sin. } 90° = & 10{,}0000000 \\ \hline \text{log. sin. } A = & 9{,}9990483 \end{array}$$

und $A = 86°, 12'$.

Jetzt sind in dem Dreiecke a b c vier Stücke bekannt, a A c und C, und man kann die dritte Seite B nun nach dem zweiten Lehrsatze berechnen.

Tang.

Tang. a : tang. A = Rad. : sin. B.

$$\begin{array}{rr} \text{Log. tang. A} = \text{log. tang. } 86^\circ, 12' = & 11,1777016 \\ \text{log. Rad} = \text{log. sin. } 90^\circ = & 10,0000000 \\ \hline & 21,1777016 \\ \text{log. tang. a} = \text{log. tang. } 86^\circ, 27' = & 11,2073380 \\ \hline \text{log. sin. B} = & 9,9703636 \end{array}$$

und B = 69°, 5'.

Jetzt sind in dem Dreiecke abc fünf Stücke bekannt, und wir können das sechste nun eben sowohl nach dem ersten als nach dem zweiten Lehrsatze berechnen.

Nach dem ersten Lehrsatze ist:

sin. C : sin. B = Rad. : sin. b.

$$\begin{array}{rr} \text{Log. sin. B} = \text{log. sin. } 69^\circ, 5' = & 9,9703636 \\ \text{log. Rad.} = \text{log. sin. } 90^\circ = & 10,0000000 \\ \hline & 19,9703636 \\ \text{log. sin. C} = \text{log. sin. } 88^\circ\ 40' & 9,9998824 \\ \hline \text{log. sin. b} = & 9,9704812 \end{array}$$

und b = 69°, 7'.

Anmerk. Man sieht leicht, daß von den fünf Logarithmen, die wir in jedem Beispiele schrieben, sich zwei hätten ersparen lassen, wenn man den Logarithmen des Radius, der immer 10 ist, an der Kennziffer des vorigen unmittelbar angebracht hätte. Bei wirklichen Rechnungen thut man dieses immer, — der größern Deutlichkeit wegen wurde er hier jedesmal ausgeschrieben.

2. Beispiel. In dem rechtwinkligen Dreieck abc Fig. 8. Taf. V. sey gegeben außer dem Winkel c = 90°, noch die Seite A = 86°, 12', und der an dieser Seite liegende Winkel b = 69°, 7'.

Da

Da die drei gegebenen Stücke nebeneinander liegen, so muß man das vierte nach dem zweiten Lehrsatze suchen.

$$\text{Rad.} : \sin. A = \text{tang. } b : \text{tang. } B.$$

$$\text{Log. tang. } b = \text{log. tang. } 69°, 7' = 10{,}4184718$$
$$\text{Log. sin. } A = \text{log. sin. } 86°, 12' = 9{,}9990441$$
$$20{,}4175159$$
$$\text{Log. Rad.} = \text{log. sin. tot.} = 10{,}0000000$$
$$\text{log. tang. } B = 10{,}4176159$$

und $B = 69°, 5.$

Jetzt sind vier Stücke gefunden, und man kann die beiden übrigen nun nach Belieben entweder nach dem ersten oder nach dem zweiten Lehrsatze suchen, da man aus den vier bekannten b B, c und A eben sowohl drei wählen kann, wovon zwei einander gegenüber liegen, wie b und B, als auch solche, die alle drei nebeneinander liegen, als A c und B.

Wir sehen aus diesen Beispielen, daß sobald in einem rechtwinkligen Dreiecke unter den drei gegebenen Stücken, Seiten und Winkel sind, die Berechnung gar keine Schwierigkeit hat. Liegen unter den drei gegebenen Dingen zwei einander gegenüber, so berechnet man das vierte nach dem ersten Lehrsatze. Liegen sie alle drei nebeneinander, so berechnet man es nach dem zweiten. Die ganze Rechnung beruht immer auf einer geometrischen Gleichung. Hat man diese hingeschrieben, so sieht man leicht wie man sie verwandeln muß, damit das zu suchende Stück ins letzte Glied komme. Die Berechnung ist dann ein bloßes Regula de Tri-Exempel, bei dem man Logarithmen gebraucht, um das Multipliciren und Dividiren zu vermeiden.

§. 26.

§. 26.

Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

Wenn in einem schiefwinkligen Dreiecke Seiten und Winkel gegeben sind, und unter den gegebenen Stücken stehen zwei einander gegenüber, so kann man das Stück, welches dem vierten gegenüber steht, mit Hülfe des dritten Lehrsatzes finden, wie wir dieses an ein paar Beispielen im vorigen Paragraph gesehen haben.

Allein das fünfte Stück können wir dann nicht mit Hülfe dieses Lehrsatzes finden, auch wenn viere schon bekannt sind, weil das fünfte keinem bekannten gegenüber steht. Eben so wenig hätten wir das vierte finden können, wenn die drei gegebene Stücke nebeneinander gelegen.

Um dann das Dreieck auflösen zu können, muß man es vorher durch Fällen von einem senkrechten Bogen, in zwei Rechtwinklige verwandeln.

1. Beispiel. Es sey in dem sphärischen Dreieck abc Fig. 9. Taf. V. der Winkel a, die Seite A und der Winkel c gegeben, so kann man die Seite C nach dem dritten Lehrsatze finden, allein nicht den Winkel bei b, und die ihm gegenüber stehende Seite ac.

Man läßt dann aus dem unbekannten Winkel bei b einen senkrechten Bogen auf die unbekannte Seite bd fallen, wodurch das Dreieck in zwei Rechtwinklige bda und bdc getheilt wird, die man nun einzeln berechnen kann. Denn in dem Dreieck bdc ist der Winkel bei c und die Seite A gegeben, und der Winkel bei d ist $= 90°$. Man kann also bd und dc berechnen. In dem Dreieck

bda

bda kennt man bd und den Winkel bei a, und der bei d ist = 90°. Man kann also auch ad berechnen, und ad + dc = ac. Kennt man die Seite ac, so findet man den ihr gegenüber stehenden Winkel abc nach dem dritten Lehrsatze, und das Dreieck ist aufgelöst.

2. Beispiel. In demselben schiefwinkligen Dreieck abc Fig. 9. seyen drei Stücke gegeben, die nebeneinander liegen, und wovon also keins dem andern gegenüber steht.

Gegeben sey der Winkel bei c, die Seite A und der Winkel bei b. Man läßt wieder aus b die Senkrechte bd fallen, und löse das rechtwinklige Dreieck bdc auf, welchem man außer dem rechten Winkel bei d, den Winkel bei c und die Seite A kennt.

Dann löst man das andere rechtwinklige Dreieck abd auf, in dem man außer dem rechten Winkel bei d die Seite bd kennt, und den Winkel abd. Denn da der Winkel abc gegeben, und dbc berechnet ist, so hat man nur diesen von jenem abzuziehen, um den Winkel abd zu finden.

Hat man dieses rechtwinklige Dreieck aufgelöst, so kennt man den Winkel bei a, die Seite C und ad, welche zu dc hinzugefügt, der Seite ac gleich ist. In dem schiefwinkligen Dreiecke abc sind nun alle drei Seiten und alle drei Winkel bekannt.

In diesem Beispiele fiel der senkrechte Bogen aus dem bekannten Winkel auf die unbekannte Seite ac.

3. Beispiel. Wenn aA und b gegeben wäre, so hätten wir den senkrechten Bogen nicht aus b dürfen fallen lassen, wie in Fig. 9., weil dann keins von den beiden

Drei-

Dreiecken hätte können berechnet werden, weil in jedem der Winkel bei b durchs Durchtheilen in zwei unbekannte Größen verwandelt worden, und zugleich die beiden gegebenen Stücke a und A in die beiden rechtwinklige Dreiecke zerstreut worden.

Dasselbe wäre der Fall gewesen, wenn der Winkel c, der Winkel a und die Seite a c gegeben wären. Durch die Senkrechte b d wird diese in zwei unbekannte Theile getheilt, und die beiden gegebenen Winkel a und c würden so in die beiden rechtwinklige Dreiecke zerstreut, daß man keins von beiden berechnen könnte.

In beiden Fällen hätte man, wie in Fig. 10., statt a c den Bogen a b zur Grundlinie nehmen müssen, und auf dessen Verlängerung den senkrechten Bogen c d fallen lassen.

Wenn nun a A und b gegeben ist, so kennt man auch den Nebenwinkel von $b = 180 - b = c\,b\,d$, und in dem Dreieck c b d kennt man also außer der Seite A noch den Winkel c b d und den Winkel d, der $= 90°$ ist.

Ist dieses Dreieck aufgelöst, so kann man auch a d c auflösen, da der Winkel bei a gegeben, der bei d ein rechter, und die Seite c d berechnet ist.

Dann ist $a\,d - b\,d = C$. Die Seite a c ist berechnet, und der W. a c b ist $= a\,c\,d - b\,c\,d$, die beide nun bekannt sind.

Wenn aber statt der gegenüber stehenden Stücke a A und b, der anliegende Winkel a, die Seite a c, und der Winkel a c b gegeben, so konnte man ebenfalls das Dreieck a c d berechnen, in welchem außer dem rechten Winkel bei d der Winkel a und die Seite a c bekannt ist. Kennt man dieses Dreieck, so kann man auch das Dreieck b c d berechnen, in welchem außer dem rechten Winkel bei d die Seite c d und der Winkel $b\,c\,d = a\,c\,d - a\,c\,b$ bekannt sind.

Sobald

Sobald man das Dreieck auf dem Papier gezeichnet, und die gegebene Größen beigeschrieben hat, so sieht man leicht, aus welchem Winkelpunkte man den senkrechten Bogen muß fallen lassen, und es wäre überflüßig, hierüber besondere Vorschriften zu geben.

§. 26.

Fällt die Senkrechte ins Dreieck oder außerhalb demselben?

Wenn man ein schiefwinkliges Dreieck durch einen senkrechten Bogen, den man auf eine seiner Seiten fallen läßt, in zwei rechtwinklige verwandelt, so muß man bei der Berechnung wissen, ob die Senkrechte ins Dreieck, oder aber ob sie außerhalb fällt, ob man ein Dreieck erhält wie Fig. 9, oder eins wie Fig. 10. Taf. V.

Nehmen wir wieder die Halbkugel Fig. 5. Taf. IV., so sehen wir, daß auf dieser der Bogen a p i die Senkrechte für alle Dreiecke ist, deren Spitzen im Punkte p liegen, weil dieser Bogen senkrecht auf dem Grunde steht, und also senkrecht auf einer der Seiten jedes Dreiecks, oder auf ihrer Verlängerung.

Wir sehen zugleich, daß jedes sphärische Dreieck zwei Senkrechten hat; nemlich den Bogen p a und den Bogen p i. Eine von diesen Senkrechten liegt jedesmal im Dreieck, sobald die beiden Winkel an der Grundlinie gleichartig sind, d. h. sobald beide spitz oder beide stumpf sind. So liegt sie im Dreieck q p b, weil die Winkel bei q und bei b beide stumpf sind. Ebenfalls liegt sie in dem Dreieck g p k, weil die Winkel bei g und bei k beide spitz sind.

Ist aber ein Winkel spitz, und der andere stumpf, wie z. B. in dem Dreieck l p o, so fallen beide Senkrechten außerhalb des Dreiecks. Jede Senkrechte ist dann mit dem von den beiden Winkeln an der Grundlinie gleicher Art, der von ihr am entferntesten liegt.

Beide Senkrechten p a und p i betragen zusammen 180°. Jede muß daher immer kleiner als 180° seyn. Auch muß immer eine außerhalb des Dreiecks liegen. Wollte man aber Dreiecke annehmen, deren eine Seite und ein Winkel überstumpf wären, so könnten beide Senkrechten innerhalb des Dreiecks liegen.

Nach diesen vorläufigen Erklärungen wollen wir jetzt sehen, wie man in jedem Falle die Lage der Senkrechten aus den drei gegebenen Stücken bestimmen kann.

I. Fall. Gegeben sind zwei Winkel und die eingeschlossene Seite. Es sey Fig. 5. Taf. IV. das Dreieck s p b gegeben, und in diesem die Seite p s und die beiden anliegenden Winkel s und p. Da beide Winkel bei s und p stumpf sind, so wird eine Senkrechte, die man aus der Spitze b auf die gegenüber stehende Seite p s zieht, ins Dreieck fallen. Allein diese Senkrechte kann man bei der Auflösung nicht gebrauchen, weil sie die gegebene Seite p s in zwei unbekannte Theile theilen würde. Um das Dreieck auflösen zu können, muß man eine aus dem Punkte p auf die gegenüber stehende Seite s b fallen lassen, und da man zwar den Winkel bei s, aber nicht den bei b kennt, so weiß man nicht, ob sie ins Dreieck fallen wird, oder außerhalb demselben.

Zeichnet man das Dreieck auf der Kugel, so sieht man leicht, daß sie innerhalb fällt, und den Bogen s b in a schneidet.

In

In diesem Dreieck war es leicht zu entscheiden, daß die Senkrechte innerhalb fiel. Allein wenn der Winkel bei p so klein gewesen, daß in der Zeichnung die Seite pb so nahe bei pa gefallen wäre, daß man nicht hätte bestimmen können, ob die Senkrechte pa links oder rechts, ob sie ins Dreieck oder außerhalb demselben gefallen wäre, und ob man also die beiden Bogen sa und ab zu einander addiren oder von einander abziehen mußte, um die Seite qb zu finden, dann hätte man die Lage der Senkrechten pa aus der Zeichnung nicht bestimmen können.

In diesem Falle gebraucht man die Senkrechte pa gar nicht, sondern die andern pi, von der man gewiß weiß, daß sie ausserhalb dem Dreiecke liegt, und daß man also die beiden Bogen die man findet, von einander abziehen muß, um die Seite qb zu finden.

Nun wäre es zwar auch noch möglich, daß ein Dreieck gegeben wäre, in dem der Winkel bei p so nahe 180° wäre, daß man in der Zeichnung auch nicht unterscheiden könnte, ob die Senkrechte pi ins Dreieck falle oder außerhalb.

Jetzt sind drei Fälle möglich: 1) Beide Senkrechten liegen außerhalb dem Dreieck; oder aber 2) die Senkrechte pa liegt drinnen und pi liegt draussen; oder 3) pi liegt drinnen und pa liegt draussen.

Man kann jetzt durch eine doppelte Rechnung entscheiden, welcher von diesen drei Fällen statt findet. Indem man die Rechnung für beide Senkrechten pi und pa macht, so entscheidet man sich für den Fall, in dem beide Resultate gleich sind. Wir können dieses leicht an den verschiedenen Dreiecken der Halbkugel zeigen.

 1) Ge=

1) Gegeben sey das Dreieck l p r. Die beiden Senkrechten p i und p a liegen beide draussen, der Winkel bei p sey aber so nahe 180°, daß man nicht mehr bestimmen könne, ob beide draußen liegen oder nicht. Rechnet man nun mit der Senkrechten p i, so hat man das Dreieck i p k und dann das Dreieck i p r zu berechnen, und die Seite l r ist = i r — i k. Rechnet man aber mit den Senkrechten p t, so hat man die Dreiecke l p t und r p t zu berechnen, und die Seite l r ist = l t — r t. Findet man in beiden Fällen die Seite l r eben groß, so ist dieses ein Zeichen, daß beide Senkrechten außerhalb dem Dreiecke gelegen haben.

2) Sind aber die beiden Werthe für l r ungleich, so ist dieses ein Zeichen, daß eine von beiden im Dreieck liegt. Man muß nun bestimmen, ob p a im Dreiecke liegt, und man ein Dreieck hat wie n p b.

Rechnet man mit der Senkrechten p a, so hat man n b = n a + a b.

Rechnet man mit p i, so hat man n b = i b — i n. Sind beide Werthe für n b einander gleich, so ist dieses ein Zeichen, daß p a im Dreieck und p i außerhalb lag.

3) Sind beide Werthe ungleich, so hat p i im Dreieck und p a außerhalb gelegen, und das Dreieck hatte die Form wie n p g.

Es wird zwar äußerst selten seyn, daß man nicht gleich an der Zeichnung die Lage der Senkrechten erkennen sollte; man sieht indeß wie man selbst in einem solchen Falle die Lage derselben durch bloße Rechnung bestimmen könne.

Von dem Einflusse, den die Ungewißheit der trigonom. Linie hierauf noch hat, wollen wir im folgenden §. reden.

II. Fall. Gegeben sind eine Seite s p, der anliegende W. s und der W. b. Da man die Senkrechte aus dem Punkte p auf die gegenüberstehende Seite s b fallen läßt, so kann man aus den beiden anliegenden Winkeln s und b leicht beurtheilen, daß sie ins Dreieck fallen wird, da beide Winkel stumpf sind.

III. Fall. Gegeben ist die Seite s p, die Seite p b und der anliegende W. bei s. Man berechnet nun zuerst nach dem dritten Lehrsatze den W. bei b, und da die Senkrechte aus p auf die Seite s b fällt, so kann man leicht beurtheilen, ob sie auf diese Seite oder auf ihre Verlängerung fällt, da man die beiden anliegenden W. s und b kennt.

IV. Fall. Gegeben sind die beiden Seiten p s, s b und der eingeschlossene Winkel bei s. In diesem Falle wird eine von den angegebenen Seiten die Grundlinie. Ob die Senkrechte auf sie oder aber ihre Verlängerung fällt, muß man so wie in I. durch Zeichnung oder Rechnung entscheiden.

V. Fall. Gegeben sind alle drei Seiten.

VI. Fall. Gegeben sind alle drei Winkel. In beiden Fällen bedarf man bei der Auflösung keiner Senkrechten, wie wir dieses im §. 28. und 29. sehen werden.

§. 27.

Ueber die Zweideutigkeit der trigonometrischen Linien.

Bekanntlich muß man von einer trigonometrischen Linie drei Stücke kennen, ehe man weiß, zu welchem

Winkel sie gehört. Nemlich: 1) ihre Länge, 2) ihre Lage und 3) ihr Zu- oder Abnehmen mit dem Winkel.

Unsere Tafeln geben nur ihre Länge, bestimmen also nur den ersten Punkt, lassen aber den zweiten und dritten unentschieden. — Auf den zweiten Punkt muß der Rechner bei der Rechnung sehen und Acht geben, ob die Linien, die zu den gegebenen Winkeln gehören, bejaht oder verneint sind, ob sie das Zeichen + oder — haben. Für den dritten Punkt, nemlich für das Zu- oder Abnehmen, gibt es kein Zeichen, und jede Linie, von der man blos ihre Länge und ihre Lage kennt, paßt daher in den vier Quadranten für zwei verschiedene Winkel.

Dadurch, daß man in der Trigonometrie keine überstumpfe Dreiecke betrachtet, schließt man alle Winkel und Seiten aus, welche größer als 180° sind, und man bleibt daher mit allen Seiten und Winkeln immer in den beiden ersten Quadranten. Unter den 8 trigonometrischen Linien, werden fast blos die Sinus und Cosinus, die Tangenten und Cotangenten gebraucht, und von diesen vieren sind die drei letzten im ersten Quadranten bejaht, und im zweiten verneint. Wenn man also ihre Länge und ihre Lage kennt, so ist man nicht mehr zweifelhaft, zu welchem Winkel sie gehören, zu einem spitzen oder stumpfen; vorausgesetzt, daß man die überstumpfen von diesen Betrachtungen ausgeschlossen hat. — Aber die Sinus machen hievon eine Ausnahme, weil diese im ersten und im zweiten Quadranten positiv sind, und man also noch nicht weiß, ob sie zu einem spitzen oder zu einem stumpfen Winkel gehören, sobald man blos ihre Länge und ihre Lage kennt. Um dieser Ungewißheit nun auszuweichen, vermeidet man es, die Sinus in den For-

meln

meln zu gebrauchen, und sucht die Formeln immer so einzurichten, daß statt ihrer, die Cosinus vorkommen, und dann läßt sich jede Ungewißheit heben, sobald der Rechner auf die Zeichen + und — Acht gibt.

Dieses Achtgeben auf die Vorzeichen, erschwert dem Anfänger die trigonometrischen Rechnungen, und man sieht oft, daß selbst geübte Rechner sich in nichts so oft irren, als gerade in den Vorzeichen. Um dieses zu vermeiden, gibt es kein leichteres Mittel, als aus den gegebenen Stücken das Dreieck auf der Kugel zu zeichnen; man sieht dann, ob die drei gesuchte Stücke spitz oder stumpf sind; es findet dann keine Zweideutigkeit statt, und man hat zugleich eine Controlle für seine Rechnung, die einen wenigstens vor groben Schreibfehlern schützt.

Doch kann man auch ohne Zeichnung bestimmen, ob das gesuchte spitz oder stumpf ist, und dieses ist in den Fällen angenehm, wo ein Winkel oder eine Seite nur wenige Minuten von 90° abweicht, und man, da keine Zeichnung bis auf 5 Minuten genau ist, immer in Ungewißheit bleibt, ob man das gesuchte Stück als spitz oder stumpf ansehen soll.

Dieses beruhet auf folgendem Verfahren:

Wir haben in den vorigen Paragraphen gesehen, daß die sphärischen Dreiecke jedesmal in rechtwinklichte verwandelt wurden, um sie nach dem ersten und zweiten Lehrsatze berechnen zu können. Nur der Fall machte eine Ausnahme, wenn ein gegebener Winkel einer gegebenen Seite gegenüber stand; wir konnten dann das vierte Stück unmittelbar nach dem dritten Lehrsatze berechnen, auch wenn das Dreieck schiefwinklicht war. Allein dieser Fall ist der Natur der Sache nach, immer zweideutig, wie wir dieses in §. 18. unter II. und III. gesehen haben, und die Zweideutigkeit, die aus der Natur der trigonometrischen Linien kommt, kommt hiebei nicht weiter in Betracht.

Wir haben also bei der Rechnung immer rechtwinklichte Dreiecke aufzulösen, in denen der rechte Winkel bei c, Fig. 8. Taf. V., immer eins von den drei gegebenen Stücken ist. Außer diesem sind nun entweder:

1) noch zwei Seiten A und B gegeben, die den rechten Winkel einschließen;

oder es sind 2) die beiden Winkel a und b gegeben, die an der Hypothenuse liegen;

oder es ist 3) eine Seite und die Hypothenuse gegeben, als A und C;

oder es ist 4) ein Winkel und die Hypothenuse gegeben, als b und C;

oder es ist 5) eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben, als A und b;

oder endlich es ist 6) eine Seite und ein gegenüber stehender Winkel gegeben, als A und a.

Der letzte Fall ist der Natur der Sache nach zweideutig, wie wir dieses in §. 18. in II. gesehen haben. In den fünf übrigen kann man aber immer bestimmen, von welcher Art das zu suchende Stück ist, ob spitz oder stumpf.

Nehmen wir wieder die Halbkugel Fig. 5. Taf. IV. zur Hand, so sehen wir ein, daß:

1) Wenn die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks gleichartig sind, daß dann die Hypothenuse spitzig ist.

In dem Dreieck p i k sind beide Seiten kleiner als 90°, und die Hypothenuse p k ist spitzig.

Ebenfalls sind in dem Dreieck t p l die beiden Seiten p t und l t größer als 90, und die Hypothenuse p l ist spitzig.

Wenn also die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, gleichartig sind, so ist die Hypothenuse spitzig, und ist die Hypothenuse spitzig, dann sind sie gleichartig.

Sind aber die beiden Seiten ungleichartig, so ist die Hypothenuse stumpf. Und umgekehrt: ist die Hypothenuse stumpf, dann sind die beiden Seiten ungleichartig.

In dem Dreieck t p q ist die Seite t p stumpf und q t spitzig. Die Hypothenuse p q ist stumpf.

2) Dasselbe gilt auch von den Winkeln die an der Hypothenuse liegen. Sind diese gleichartig, so ist die Hypothenuse spitzig, sind sie ungleichartig, so ist sie stumpf.

In dem Dreieck p i k ist der Winkel bei p spitzig, der bei k ist es ebenfalls, und die Hypothenuse p k ist auch spitzig.

In dem Dreieck t p l ist der Winkel bei p und der bei l stumpf; also beide gleichseitig und die Hypothenuse ist spitzig.

In dem Dreieck t p q ist der Winkel bei p spitzig, der bei q stumpf, und die Hypothenuse ist stumpf, da die Winkel ungleichartig sind. Ist die Hypothenuse spitzig, so sind die beiden anliegenden Winkel gleichartig; ist sie stumpf, so sind sie ungleichartig.

Zugleich bemerken wir noch an dieser Halbkugel, daß bei allen rechtwinklichen sphärischen Dreiecken, ein spitzer

Winkel jedesmal einer spitzen Seite gegenüber liegt, und ein stumpfer Winkel, einer stumpfen Seite, daß also die gegenüber stehenden Winkel und Seiten jedesmal von derselben Art sind.

Man sieht leicht die Ursache hievon ein, wenn man in Gedanken die punktirte Linie p n um den Pol p dreht. In n steht sie senkrecht auf p i. Der Winkel bei p ist ein rechter, und der Bogen der ihm gegenüber steht, hat ebenfalls 90°. Dreht man die Linie nach i hin, so wird der Bogen kleiner, und beide werden also spitz. Dreht man die Linie auf t zu, so wird der Bogen größer als 90°, der Winkel bei p wird ebenfalls größer und beide sind also stumpf. Man sieht hieraus, daß in jedem rechtwinklichten Dreiecke nothwendig eine spitze Seite einem spitzen Winkel gegenüber liegt.

Wir wollen dieses auf die eben angeführten 6 Fälle anwenden und hiernach entscheiden, von welcher Art das gesuchte ist, ob spitz oder stumpf.

1. Fall. Gegeben sind außer dem rechten Winkel bei i noch die beiden Seiten A und B.

Dann ist die Hypothenuse spitzig, wenn sie gleichartig sind, und stumpf, wenn sie ungleichartig sind.

Dann ist der Winkel a spitzig, wenn die Seite A spitzig war, war sie stumpf, so ist es auch der Winkel a. Dasselbe gilt von b.

2. Fall. Gegeben ist der Winkel a und der Winkel b.

Dann ist die Hypothenuse spitzig, wenn sie gleichartig, und stumpf, wenn sie ungleichartig sind. Die Seite A ist von der Art wie a, und B wie b.

3. Fall.

3. Fall. Gegeben ist A und die Hypothenuse C.

Ist die Hypothenuse spitz, so ist die Seite B gleichartig mit A, ist sie stumpf, so ist sie ungleichartig. Der Winkel a ist von der Art wie A, und der Winkel b wie B.

4. Fall. Gegeben der Winkel b und die Hypothenuse C.

Ist die Hypothenuse spitz, so ist der Winkel a gleichartig mit b, ist sie stumpf, so ist er ungleichartig. Die Seite B ist dann von der Art wie der Winkel b, und A wie a.

5. Fall. Gegeben ist die Seite A und der W. b.

Ist b spitz, so ist es auch B, ist b stumpf, so ist es auch B. Man weiß also ob A und B gleichartig sind oder nicht, und die Hypothenuse also spitz oder stumpf seyn wird. Der Winkel a ist von der Art wie die Seite A.

6. Fall. Gegeben ist die Seite A und der ihr gegenüber stehende Winkel a.

In diesem Falle kann man weder auf b noch auf B, noch auf die Hypothenuse schließen, da er zu denen gehört, die der Natur der sphärischen Dreiecke gemäß, unbestimmt sind. (§. 18. II.)

Wir hatten im vorigen §., auf welche Weise man bestimmt, ob die Senkrechte ins Dreieck fällt oder nicht. Wir fanden, daß wenn die Dreieckseite und die Senkrechte so nahe beisammen liegen, daß man nicht mehr durch die Zeichnung bestimmen könne, ob die eine rechts oder links liege, man dann die zweite Senkrechte bei der Rechnung zu Rathe ziehe, und hiernach sich dann entscheide. Bei dieser Rechnung muß man aber wissen, ob

das

das rechtwinklige Dreieck, welches man berechnet, bei p spitzwinklig oder stumpfwinklig sey. Man bestimmt dieses auf die Weise wie in diesem §. ist gelehrt worden. Die gegebene Seite ist immer die Hypothenuse im rechtwinkligten Dreieck, weil sie dem rechten Winkel gegenüber steht. Ist sie spitz, dann muß die gesuchte Seite von derselben Art seyn wie die Senkrechte, da beide den rechten Winkel einschließen. Von der Art, wie die gesuchte Seite ist, ist dann auch der ihr gegenüber liegende Winkel bei p. Auf diese Weise wird alles Zweideutige in der Rechnung aufgehoben.

Sollte aber die Senkrechte so nahe 90° seyn, daß man nicht mehr bestimmen könnte, ob man sie als spitz oder als stumpf ansehen solle, so berechnet man ihre Größe, wo es sich dann entscheidet, ob sie kleiner oder größer als 90° ist.

§. 28.

Wir haben in den vorigen Paragraphen die Berechnung aller sphärischen Dreiecke gezeigt, bei denen sich unter den gegebenen Stücken, Seiten und Winkel befinden. Wir wollen jetzt die beiden Fälle untersuchen, wenn blos Seiten oder blos Winkel gegeben sind. — Wir bedürfen hiezu eines neuen Lehrsatzes.

4. Lehrsatz.

In jedem sphärischen Dreieck verhält sich das Quadrat des Radius zum Quadrate vom Sinus des halben Winkels a.

Wie das Produkt aus dem Sinus der beiden Seiten B und C die diesen Winkel einschließen, zum Produkte

der

der Sinus der beiden Bogen, welche man erhält, wenn man von der halben Summe aller drei Seiten einmal die Seite B und das anderemal die Seite C abzieht.

Es sey Fig. 11. Taf. V., in dem Dreieck a b c die Seite a b = C, a c = B und b c = A, und die halbe Summe aller drei Seiten = $\frac{1}{2}$ S. so ist:

$rad.^2 : sin.^2 \frac{1}{2} a = sin. B . sin. C : sin. \frac{1}{2} S - B . sin. \frac{1}{2} S - C.$

Vorbereitung zum Beweise.

1) Man verlängere den Bogen a b unbestimmt, und mache b d = b c und d g = a c, so ist der Bogen a g die Summe aller drei Seiten.

2) Man mache a h = a b und a k = a c; ferner d o = b k und a f = f g, und ziehe dann durch b, h und o einen Kreis. In diesem Kreise ziehe man die Sehnen b h, b o und h o. Dann ziehe man k c, k d und d c, und auch die Tangente t b, welche d c parallel seyn wird. Denn d c ist die Sehne des Bogens, dessen Mittelpunkt in b liegt. Errichtet man in der Mitte von d c eine Senkrechte, so geht die durch b, und steht auf der Tangente t b ebenfalls senkrecht.

3) Die beiden Dreiecke b h o und k d c sind einander ähnlich, weil der Winkel bei b dem bei k und der bei h dem bei d gleich ist. Daß der Winkel bei b dem bei k gleich sey, folgt daraus, weil ihre beide Schenkel parallel sind. Daß der Winkel bei h dem bei d gleich sey, folgt daraus, daß beide dem Winkel t b o gleich sind. Der Winkel k d c ist ihm gleich, weil seine Schenkel den Schenkeln von jenen parallel sind. Der Winkel b h o ist ihm gleich, weil er mit ihm auf dem gleichen Bogen b v o steht. (S. Th. II. S. 246 und Fig. 72.)

4) Man

4) Man theile den Winkel a durch die Ebene ar, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht in zwei gleiche Theile, so wird diese auf bh und kc senkrecht stehen.

Man ziehe ferner durch die beiden Punkte b und h einen größten Kreis bph, so ist bs der Sinus vom Bogen bp.

Auch ziehe man durch die beiden Punkte k und c einen grösten Kreis kqc, so ist kr der Sinus des Bogens kq.

Beweis.

1) Weil die beiden Dreiecke bho und kdc einander ähnlich sind, so ist kc : bo = kd : bh. Und weil sich die Halben verhalten wie die Ganzen, so ist auch kr : bn = km : bs.

2) Weil af = fg, so ist af die halbe Summe aller drei Seiten $= \frac{1}{2}$ S.

Weil ab = C, so ist bf $= \frac{1}{2}$ S — C und bn = sin. $\frac{1}{2}$ S — C.

Weil ak = B, so ist kf $= \frac{1}{2}$ S — B und km = sin. $\frac{1}{2}$ S — B.

3) Man hat also nach 1) kr : bn = km : bs oder kr : sin. $\frac{1}{2}$ S — C $= \frac{1}{2}$ S — B : bs und kr . bs ist = sin. $\frac{1}{2}$ S — C . sin. $\frac{1}{2}$ S — B.

In dem rechtwinkligen Dreieck apb hat man nach dem 1. Lehrsatze:

R : sin. C = sin. bap : sin. bp (I) denn C ist = ab

In dem rechtwinkligen Dreieck kaq hat man:

R : sin. B = sin. kaq : sin. kq (II) denn B ist = ak

Ebenfalls sind beide Winkel bap und kaq einander gleich. Wir wollen sie $\frac{1}{2}$ a nennen.

5) Mul=

5) Multipliciren wir beide Gleichungen in I und II, so erhalten wir:

$R^2 : \sin. B . \sin. C = \sin.^2 \frac{1}{2} a : \sin. bp . \sin. kq.$

$\sin. bp$ ist bs und $\sin. kq$ ist $= kr$, also kann man auch setzen:

$$R^2 : \sin. B. \sin. C = \sin.^2 \tfrac{1}{2} a : kr . bs.$$

6) Wir hatten aber in 3), daß

$kr . bs = \sin. \frac{1}{2} S - C . \sin. \frac{1}{2} S - B$ wäre.

Also kann man auch sagen:

$R^2 : \sin. B. \sin. C = \sin.^2 \frac{1}{2} a : \sin. \frac{1}{2} S - C \sin. \frac{1}{2} S - B.$

Kehren wir die mittlern Glieder dieser Gleichung um, so haben wir:

$R^2 : \sin.^2 \frac{1}{2} a = \sin. B . \sin. C : \sin. \frac{1}{2} S - C . \sin. \frac{1}{2} S - B.$

Oder das Quadrat des Radius verhält sich zum Quadrate des Sinus des halben Winkels a, wie das Produkt aus den beiden Sinus B und C, die diesen Winkel einschließen, zum Produkte aus den Sinus der beiden Bogen die man erhält, wenn man von der halben Summe aller drei Seiten einmal die Seite C und einmal die Seite B abzieht; welches sollte erwiesen werden *).

§. 29.

Durch den Lehrsatz des vorigen §. ist nun der Weg zur Berechnung der drei Winkel eines Dreiecks gebahnt, wenn die drei gegebene Stücke blos Seiten sind.

Denn

*) Wenn die Summe aller drei Seiten genau 180° ist, so wird man die Seite ac bis g verlängern können, wo dann acg auch 180° ist, weil alle größte Kreise sich in Entfernungen von 180° durchschneiden. In diesem Falle erhält man ein Kugelsegment, welches von der Linie ar halbiret wird.

Denn setzt man die hintern Glieder der letzten Gleichung vorne, so erhält man:

$$\sin. B . \sin. C : \sin. \tfrac{1}{2} S - C . \sin. \tfrac{1}{2} S - B = R^2 : \sin.^2 \tfrac{1}{2} a$$

und $\sin.^2 \tfrac{1}{2}$ a ist $= \dfrac{\sin. \tfrac{1}{2} (S - C) \sin. (\tfrac{1}{2} S - B) R^2}{\sin. B . \sin. C}$

Zieht man hieraus die Wurzel, so findet man:

$$\sin. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\sin. \tfrac{1}{2} (S - C) \sin. (\tfrac{1}{2} S - B) R^2}{\sin. B . \sin. C.}}$$

Beispiel. In dem sphärischen Dreiecke a b c, Fig. 8. Taf. 8., seyen die drei Seiten A B C gegeben, man verlangt den W. a, den die Seiten B und C einschließen.

Die Seite A sey 86° 12′
B sey 69° 6′
C sey 88° 40′
2) 243° 58′
121° 59′ = ½ S.

121° 59′
C = 88° 40′
½ (S — C) = 33° 19′ log. sin. 33° 19′ = 9,7397827
121° 59′
B = 69° 5′
½ (S — B) = 52° 53′ log. sin. 52° 53′ = 9,9016808
R² = 20,0000000
39,6414635

B = 69° 6′ log. sin. 9,9704419
C = 88° 40′ log. sin. 9,9998824
19,9703243 ÷ 19,9703243
2) 19,6711392
log. sin. ½ a = 9,8355696 = 43° 13′

Der

Der Winkel a ist also 86° 26′, oder wenn man bei der Rechnung auf die Sekunden Rücksicht genommen hätte, 86° 26½′.

Sobald der Winkel a bekannt ist, so findet man die Winkel b und c leicht nach dem dritten Lehrsatze, da nun bekannte Seiten und Winkel einander gegenüber liegen. Der Winkel b ist = 69° 8′, und c = 89° 46′.

§. 30.

Es ist uns endlich noch der letzte Fall zu lösen übrig. Wenn nemlich statt der drei Seiten A, B und C die drei Winkel a, b und c gegeben sind, und man soll aus diesen die Seiten finden.

Wir hatten in §. 18. die Aufgabe: Ein Dreieck m n o Fig. 9. Taf. IV. zu zeichnen, in dem die Winkel so groß waren, wie die Winkel in dem Dreieck a b c Fig. 8., und das diesem also gleich sey.

Die drei gegebenen Winkel waren a = 38°
b = 60°
c = 100°

Um mit diesen gegebenen Winkeln das Dreieck m n o zu zeichnen, so zeichneten wir vorher das Dreieck d e f,
in dem die Seite e f = 38° = dem Winkel a,
die Seite d f = 60° = dem Winkel b,
und die Seite d e = 80° = 180° — c war.

Hiedurch erhielten wir mit Hülfe der dort gezeigten Construktion ein Dreieck m n o,
in dem die Seite m n = dem Winkel bei e,
die Seite n o = dem Winkel bei d,
und die Seite m o = dem Nebenwinkel bei f gleich war.

Wollen wir nun wissen, wie groß in dem Dreiecke m n o die Seite n o ist, die dem Winkel bei d in dem Dreiecke d e f gleich ist, so haben wir nur die Größe des Winkels d zu berechnen, welches wir leicht nach dem Lehrsatze des vorigen Paragraphs können, da in dem Dreiecke d e f alle drei Seiten bekannt sind.

1. Beispiel. e f sey $= 38^\circ = a$
d f sey $= 60^\circ = b$
d e sey $= 80^\circ = 180^\circ - c.$

$$\begin{array}{lrl}
 & 2\,|\,178 & \\
\tfrac{1}{2}\,S = & 89 & \\
de = & -80 & \\
\tfrac{1}{2}\,S - de = & 9^\circ & \text{log. sin. } 9{,}1943324 \\
 & 89 & \\
df = & -60 & \\
\tfrac{1}{2}\,S - df = & 29^\circ & \text{log. sin. } 9{,}6855712 \\
 & & \text{Log. } R^2 = 20{,}0000000 \\
 & & \phantom{\text{Log. } R^2 =}\ 38{,}8799036
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
de = 80 \text{ log. sin.} & 9{,}9933515 \\
df = 60 \text{ log. sin.} & 9{,}9375306 \\
 & 19{,}9308821 \quad -\ 19{,}9308821 \\
 & \qquad\qquad 2\,|\,18{,}9490215 \\
\text{log. sin. } \tfrac{1}{2}\,d = & \qquad\qquad 9{,}4745107
\end{array}$$

und $\frac{1}{2}\,d = 17^\circ\ 21'$ also $d = 34^\circ\ 42'$.

Da die Seite n o diesem Winkel d gleich ist, so hat die ebenfalls $34^\circ\ 42'$, und da die Seite b c in dem Dreieck a b c Fig. 8. der Seite n o gleich ist, so kennt man in dem Dreiecke a b c außer den drei gegebenen Winkeln, auch noch die Größe der Seite b c, und man kann nun

mit

mit Hülfe des dritten Lehrsatzes leicht die Größe der beiden andern Seiten finden, da sie bekannten Winkeln gegenüber liegen.

2. Beispiel. Gegeben sey in dem Dreieck a b c Fig. 8. Taf. IV. der Winkel $a = 86^\circ\ 26'$

$b = 69\ \ 8$

$c = 89\ \ 46$. Man sucht die Seite $bc = A$.

Man zeichne ein Dreieck d e f,

in dem die Seite $ef = 86^\circ\ 26'$,

die Seite $df = 69^\circ\ \ 8'$,

und die Seite $de = 90^\circ\ \ 14 = 180^\circ - c$ sey.

$$\frac{2|245,48}{\tfrac{1}{2} S = 122,54}$$

$$\begin{array}{r} 122^\circ\ 54' \\ -90^\circ\ 14' \\ \hline \end{array}$$

$\tfrac{1}{2} S - de = 32, 40$ log. sin. $9,7321932$

$$\begin{array}{r} 122,\ 54 \\ -69,\ \ 8 \\ \hline \end{array}$$

$\tfrac{1}{2} S - df = 53, 46$ log. sin. $9,9066671$

log. Rad. $^2 = 20,0000000$

$39,6388603$

$de = 90^\circ\ 14$ log. sin. $9,9999064$

$df = 69,\ \ 8$ log. sin. $9,9705383$

$19,9705447 - 19,9705447$

$2|19,6683156$

log. sin. $\tfrac{1}{2} d = 9,8341578$,

und $\tfrac{1}{2} d = 43^\circ\ 3'$, also $d = 86^\circ\ 6'$.

Da die Seite n o diesem Winkel gleich ist, so ist diese ebenfalls $86^\circ\ 6'$. Die Seite b c oder A im Dreieck

a b c

abc Fig. 8. ist dieser ebenfalls gleich, und hat also auch 86° 6′.

Da nun in dem Dreiecke abc außer den drei gegebenen Winkeln auch noch eine Seite bekannt ist, so findet man die beiden übrigen Seiten leicht nach dem dritten Lehrsatze.

Anmerk. Bei den Aufgaben, aus den drei Seiten oder aus drei Winkeln die drei übrige Stücke des Dreiecks zu finden, entsteht keine Zweideutigkeit aus den trigonometrischen Linien, weil man jedesmal nur die Hälfte des zu suchenden Winkels findet, die also nothwendig spitz seyn muß, weil sonst der ganze Winkel überstumpf würde.

§. 31.

Berechnung des Flächeninhalts sphärischer Dreiecke.

Nachdem wir gezeigt haben, wie man aus drei gegebenen Stücken eines sphärischen Dreiecks die drei übrigen durch Rechnung finden kann, so ist uns noch zu zeigen übrig, wie man den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks berechnet, sobald seine Seiten bekannt sind.

Diese Rechnung beruhet auf folgendem Lehrsatze.

5. Lehrsatz.

Die Fläche eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem Produkte aus dem Radius in die Summe aller drei Winkel, wenn man vorher von dieser Summe 180° abgezogen hat.

Nennt

Nennt man die Fläche des Dreiecks abc Fig. 12. Taf. V. $= X$, und die drei Winkel a, b und c, so ist

$$X = (a + b + c - 180°) R.$$

Vorbereitung zum Beweise.

Man verlängere bc nach beiden Seiten, bis sie den größten Kreis bcefb macht. Dieser theilt die Kugel in zwei gleiche Hälften.

Man verlängere auch die beiden andern Seiten des Dreiecks nach e und f, wo dann be und cf $= 180°$ werden.

Ebenfalls verlängere man beide Bogen bis nach d auf die andere Seite der Halbkugel, wo dann abd $=$ acd $= 180°$ sind. Auch sind cbf und cef $= 180°$, weil alle größte Kreise der Kugel einander halbiren.

Beweis.

Die beiden Dreiecke fae auf der vorderen, und bdc auf der hinteren Fläche der Kugel, sind symetrische Dreiecke, weil sie auf der Kugel einander gegenüber liegen. Sie sind also einander an Fläche gleich. Wir wollen die Fläche von jedem M nennen. P soll die Fläche des Dreiecks fab, N die des Dreiecks aec, und X die gesuchte Fläche des Dreiecks abc seyn.

Bekanntlich ist die Fläche der Kugel gleich dem Umfange eines größern Kreises, multiplicirt mit seinem Durchmesser oder 360° 2 R. *)

Da

*) 360° mal $\frac{1}{2}$ R. gibt die Oberfläche eines Kreises. Nach S. 324 Theil 2. ist die Oberfläche der Kugel gleich 360. $\frac{1}{2}$ R. 4. Also ist die Oberfläche der Kugel 360. 2 R., oder gleich dem Umfange multiplicirt mit dem Durchmesser.

Da alle Kugelausschnitte sich zur ganzen Kugel verhalten wie ihr Winkel am Pole zum ganzen Kreise, so ist der Ausschnitt a b d c a oder $X + M = a . 2 R.$

Ebenfalls ist der Ausschnitt c a f b c oder $X + P = c\,2 R.$ und der Ausschnitt b a e c b oder $X + N = b . 2 R.$

Addirt man diese drei Gleichungen, so hat man

$$3 X + M + P + N = (a + b + c)\, 2 R.$$

Aus der Figur ist klar, daß die Hälfte von der Oberfläche der Kugel oder $180^\circ . 2 R = X + M + P + N$ ist.

$$\begin{array}{rl} \text{Also } & 3 X + M + P + N = (a + b + c)\, 2 R. \\ \text{abgezogen } & X + M + P + N = 180^\circ\, 2 R. \\ \hline \text{bleibt } & 2 X = (a + b + c)\, 2 R. - 180^\circ . 2 R. \\ \text{und also } & 2 X + 180^\circ\, 2 R. = (a + b + c)\, 2 R. \\ \hline \text{Mit 2 div. gibt } & X + 180^\circ R. = (a + b + c)\, R. \\ & \text{und } X = (a + b + c - 180^\circ R. \end{array}$$

Man findet also den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, wenn man von der Summe aller drei Winkel 180° abzieht, und den Rest mit dem Rad. multiplicirt.

Beispiel. In dem Dreieck a b c Fig. 8. Taf. IV. sey der Winkel

$$\begin{array}{rrr} a = & 86^\circ & 26' \\ b = & 69 & 8' \\ c = & 89 & 46' \\ \hline \text{also } a + b + c = & 245 & 10' \\ & -180 & \\ \hline \text{Rest} = & 65 & 10' \end{array}$$

Diese $65\frac{1}{6}$ Grad mit dem Rad. der $= 57\frac{1}{3}^\circ$ ist multiplicirt, gibt den Flächeninhalt des Dreiecks zu $3736\frac{2}{9}$ Quadratgraden an.

Wenn dieses Dreieck auf der Erdkugel läge, auf der jeder Quadratgrad 15 Meilen lang und breit ist, so wäre

der

der Flächeninhalt des Dreiecks 835762 geographische Quadratmeilen.

Anmerk. Die Anzahl der Quadratgrade der Kugel ist 360. 2 R. und 2 R. = $114\frac{2}{3}$, also 41112 Quadratgrad. Die Summe aller Winkel in allen 8 Dreiecken der Kugel beträgt 24 rechte Winkel. Zieht man für jedes Dreieck — 180° oder 2 rechte Winkel ab, so bleiben von den 24 rechten Winkeln noch 8 rechte Winkel übrig. Diese mit dem Rad. $57\frac{1}{3}$ multiplicirt, geben 41112 Quadratgrad für den Inhalt aller 8 Dreiecke der Kugel. Auf diese Weise kann man sich leicht durch Rechnung von der Richtigkeit der eben angegebenen Regel überzeugen.

§. 32.

Aus dem Inhalte eines sphärischen Dreiecks die Summe seiner Winkel zu finden.

Wenn der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks bekannt ist, so ist es leicht die Summe seiner drei Winkel zu finden. Das Verfahren ist das Umgekehrte vom vorigen.

Wir fanden eben, daß wenn der Flächeninhalt eines Dreiecks X sey, so wäre $X = (a + b + c - 180°)$ Rad. Wenn man also die Fläche mit dem Radius dividirt, und hiezu 180° addirt, so findet man die Summe aller drei Winkel.

Beispiel. Auf der Erdkugel sey ein Dreieck gegeben, dessen Flächeninhalt 840650 geographische Quadratmeilen beträgt. Man verlangt die Summe seiner drei Winkel.

840650 Quadratmeilen mit 225 Quadratmeilen dividirt, geben den Flächeninhalt zu $3736\frac{2}{9}$ Quadratgraden.

Dieses

Dieses mit dem Halbmesser $57\frac{1}{3}$ dividirt, gibt $65\frac{1}{6}$ Grad. Hiezu 180° addirt, gibt die Summe aller drei Winkel zu 245° 10′.

So große Dreiecke kommen in der praktischen Geometrie nicht vor, da man selbst auf den höchsten Bergen einen so großen Theil der Erdkugel nicht übersehen kann.

Man bedient sich indeß dieses Satzes häufig, wenn man bestimmen will, ob man die Dreiecke, welche man auf der Oberfläche der Erdkugel gemessen hat, als sphärische berechnen muß, oder aber ob man sie noch als ebene ansehen dürfe. Je kleiner ein Dreieck auf der Kugel ist, um destoweniger weicht seine Fläche von einer geraden Ebene ab, und desto geringer ist der Unterschied in der Summe der drei Winkel über 180°. Bei einem Dreiecke von $3\frac{1}{2}$ Quadratmeile Fläche beträgt der Unterschied nur eine Sekunde.

Eine Quadratmeile ist $\frac{1}{225}$ Quadratgrad. Dieses mit dem Halbmesser des Kreises, dessen Umfang 360° ist, dividirt, gibt $\frac{1}{225 \cdot 57{,}3} = \frac{1}{12892}$. Hiezu 180° addirt, gibt die Summe aller drei Winkel eines Dreiecks, dessen Fläche 1 Quadratmeile ist zu $180\frac{1}{12892}$ Grad, oder zu 180° 0′ 0,28″.

Hätte das Dreieck 2 Quadratmeilen, so betrüge die Summe seiner Winkel 180° 0′ 0″,56. Ueberhaupt braucht man die Anzahl der Quadratmeilen nur mit 0″,28 zu multipliciren, um zu erfahren, wie viel die Summe aller drei Winkel mehr als zwei rechte beträgt. Bei einem Dreiecke von 10 Quadratmeilen beträgt sie 2″,8, und bei einem von 80 Meilen 22,4 Sekunden. Das größte Dreieck, welches bei der bergischen Landesvermessung vorgekommen ist, hatte nur 7 Quadratmeilen.

§. 33.

§. 33.

Trigonometrische Formeln.

Wir haben in dem vorigen gesehen, daß die Berechnung aller ebenen und sphärischen Dreiecken auf geometrischen Gleichungen beruhet, und daß die Ausrechnung weiter nichts ist wie ein Regula de Tri-Exempel, bei dem man, um die Multiplicationen und Divisionen zu vermeiden, Logarithmen gebraucht.

Die geometrischen Gleichungen entstehen aus den angeführten Lehrsätzen, deren drei in der ebenen Trigonometrie, und vier in der sphärischen sind. Wir haben diese Lehrsätze alle geometrisch bewiesen, weil uns diese Beweise die leichtesten schienen, da sie fast weiter nichts voraussetzen, als blos die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke. Auch hat dieses das Gute, daß wenn man auch den Lehrsatz vergißt, man doch die Figur im Gedächtniß behält, und mit Hülfe von dieser kann man ihn immer wieder aufs neue entwickeln.

Wer diese Lehrsätze kennt, kann alle Dreiecke berechnen, die vorkommen können; das heißt: er kann aus den drei Stücken, die gegeben sind, jedesmal das vierte, fünfte und sechste finden. Nach diesen Lehrsätzen zu rechnen ist nicht allein der leichteste, sondern auch der kürzeste Weg, sobald man alle sechs Stücke des Dreiecks kennen will, und man bedarf hiezu der trigonometrischen Formeln nicht, welche den Anfänger oft durch ihre verwickelte Form zurückschrecken, indem er sie für schwieriger hält als sie wirklich sind.

Diese Formeln entstehen durch das Zusammenziehen der verschiedenen Lehrsätze, und dienen dazu, daß sobald drei Stücke von einem Dreieck gegeben sind, man gleich das fünfte oder sechste finden kann, ohne vorher das vierte zu suchen, statt daß wir zuerst das vierte, dann das fünfte, und endlich das sechste suchten.

Will man das ganze Dreieck kennen lernen, d. h. alle seine sechs Stücke, so ist das Rechnen nach der Formel von weiter keinem Nutzen, denn ob man das sechste oder vierte zuerst findet, ist dasselbe. Will man aber in einem Dreieck blos das sechste Stück kennen lernen, dann ist es vortheilhaft nach der Formel zu rechnen, weil man dann das vierte und fünfte nicht zu suchen braucht.

So muß man z. B. wenn man unmittelbar nach den Lehrsätzen rechnet, 12 Logarithmen schreiben, um die Entfernung zweier Orte auf der Erdkugel zu finden, deren geographische Länge und Breite gegeben ist, statt daß Cagnoli bei einem solchen Beispiele, (Seite 283 seiner Trig.) wo er nach der Formel rechnet, nur 7 zu schreiben hat. Indeß muß Cagnoli auf die Vorzeichen acht geben, ob die Linien + oder — sind, welches man nicht nöthig hat, wenn man unmittelbar nach den Lehrsätzen rechnet, weil man hiebei immer weiß, ob das Gesuchte spitz oder stumpf ist. (Nach §. 24.)

Es schien uns deswegen am besten zu seyn, daß ein Anfänger immer den einfachern und leichtern Weg gehe, wenn er auch einige Zahlen mehr zu schreiben hat. Ist er aber durch eine längere Uebung recht vertraut mit den trigonometrischen Rechnungen geworden, so thut er wohl, ein vollständiges Werk über die Trigonometrie durchzustudiren, und sich mit allen Formeln und Rechnungsabkürzungen bekannt zu machen. Wir können hiezu kein

besseres

besseres empfehlen, als die Trigonometrie von Cagnoli, deren Titel unten angegeben ist *). Sie ist das Vollständigste was wir besitzen, und mit einer großen Deutlichkeit geschrieben. Nur ist sie für einen Anfänger zu weitläuftig. Sie besteht aus einem Quartbande von 60 Bogen, und die Länge des Weges erschwert die Uebersicht, wenn auch die Darstellung noch so schön und vortrefflich ist.

Das eigentliche Feld der sphärischen Trigonometrie ist die Geographie und Astronomie. Bei einer Landesvermessung kommen nur ein paar Fälle vor, wo man sie gebraucht, da alle Dreiecke als geradlinig berechnet werden. Blos bei der Reduktion der Winkel auf den Horizont und bei der Berechnung der möglichen Fehler der Spiegelsextanten, werden wir ein paar trigonometrische Formeln gebrauchen, die aber so unmittelbar aus den angeführten Lehrsätzen fließen, daß sie keiner besondern Entwickelung bedürfen.

Wir schließen deswegen hier die sphärische Trigonometrie ohne eine solche Tabelle von Formeln zu geben, wie man sie gewöhnlich in jeder Trigonometrie findet. Da es unmöglich ist, diese Formeln im Gedächtniß zu behalten, so hat Vega eine solche Tabelle von vier Oktavseiten hinter seine trigonometrische Tafeln abdrucken lassen, damit man sie gleich zur Hand habe, wenn man sich

*) Traité de Trigonometrie rectiligne et spherique, contenant des Methodes et des Formules nouvelles avec des applications à la plupart des problêmes de l'Astronomie, par M. Cagnoli. A Paris chez Didot. Seconde Edition.

sich in einem gegebenen Falle nicht gleich besinnen kann, nach welcher Formel man zu rechnen habe.

Wir haben hier eine solche Tabelle nicht aufnehmen wollen, weil wir glaubten, daß der Anfänger wohl thue, immer unmittelbar nach den Lehrsätzen zu rechnen, da es bei ihm noch nicht so sehr darauf ankommt, daß er schnell rechnet, sondern daß er mit Uebersicht und mit Sicherheit rechne, und daß er bei jedem Theile der Rechnung sich Rechenschaft könne ablegen: warum er so rechne?

Schluß.

Wir schließen hier den theoretischen Theil, mit einer kurzen Uebersicht des durchlaufenen Weges. Im zweiten Theile hatten wir die Rechenkunst des täglichen Lebens mit ihren Anwendungen. Wir sahen, daß sie beschränkt war, weil sie die entgegengesetzte Größen von ihrer Betrachtung ausschloß — und erst in diesem Theile erhielt die Rechenkunst ein größeres Feld, als sie bei der Zahlengrößen darauf Rücksicht nahm, ob sie bejaht oder verneint wären.

Zugleich wurden die Buchstaben als allgemeine und kürzere Zeichen der Größen statt der Zahlen eingeführt, und die Rechenkunst erhielt durch sie den neuen Namen der Buchstabenrechenkunst. Wir lösten nun jene Aufgaben, welche unter dem Namen der algebraischen Aufgaben bekannt sind, durch eine öftere Verwandelung und eine zweckmäßige Verbindung der Gleichungen.

Darauf

Darauf betrachteten wir die arithmetischen Reihen höherer Ordnung, und fanden in ihnen ein eben so leichtes als allgemeines Hülfsmittel, die Gleichungen aller Grade aufzulösen, — wenn diese nur in Zahlen gegeben sind. — Diese Art, die höheren Gleichungen aufzulösen, kürzten wir noch bedeutend dadurch ab, daß wir mit der Rechnung zugleich eine geometrische Zeichnung verbanden, wodurch wir eine deutlichere Ansicht von der Natur der krummen Linie erhielten, welche die Gleichung in der Nähe der Wurzeln bilden, und wir konnten nun schon nach dem Augenmaaße bestimmen, wo die Durchschnittspunkte, und wo die Wurzeln liegen. — Wir sahen, daß man mit dieser völlig allgemeinen Methode alle Aufgaben lösen kann, sie mögen von einem Grade seyn, von welchem sie wollen, und daß man selbst solche Probleme, die zu den schwierigsten in der angewandten Mathematik gehören — mit ihnen auflösen kann, wie wir dieses an dem Kometenprobleme sehen. Wir werden vielleicht in Zukunft noch Gelegenheit haben, sie auf ein anderes für sehr schwierig gehaltenes Problem anzuwenden, welches in der angewandten Mathematik von einem großen Werthe ist — ich meine: Die Berechnung der vortheilhaftesten Form der Gläser bei den farbenlosen Fernröhren.

Die arithmetischen Reihen höherer Ordnung boten uns ein leichtes Mittel dar, die höheren Wurzeln aus jeder Zahl zu ziehen. Wir bedienten uns derselben, um das Potenzentäfelchen von der Zahl 10 zu berechnen. Mit Hülfe von diesem Potenzentäfelchen konnten wir die Zahl 10 auf jede ganze und gebrochene Potenz erheben,

und

und wir hatten nun einen neuen und sehr leichten Weg gefunden, jeden Logarithmen durch einige wenige Multiplicationen oder Divisionen zu berechnen.

Wir lernten auch nun die natürlichen Logarithmen kennen; das heißt: diejenigen, bei denen das Verhältniß zwischen dem äußerst kleinen Exponenten, auf der die Grundzahl erhoben wird, und dem beständigen Decimalbruch wie 1 zu 1 ist. Auch für diese gaben wir ein Potenzentäfelchen, mit dessen Hülfe man den natürlichen Logarithmen von jeder Zahl durch einige wenige Divisionen findet.

Wir hatten nun zwei verschiedene Logarithmensysteme, die Briggischen und die natürlichen.

Bei jenen war die Grundzahl 10, bei diesen war sie 2,71828 ....

Bei jenen war der beständige Decimalbruch 2,30258... bei diesen war er 1,000000....

Das Verhältniß zwischen diesen beiden Decimalbrüchen, nannten wir den Modul des Systems.

Mit der leichten Berechnung der Logarithmen war das große Hülfsmittel zur leichten Berechnung der trigonometrischen Tafeln gefunden, und wir konnten nun zu der ebenen Trigonometrie übergehen.

Schon im vorigen Theile hatten wir gelehrt, wie man alle ebenen Dreiecke durch Zeichnung auflöste. Jetzt lösten wir sie ohne Zeichnung und viel genauer durch Rechnung, mit Hülfe der trigonometrischen Linien. — Wir zeigten die Entstehung derselben — wir lernten ihre Berechnung kennen, und sahen wie leicht es ist, alle trigonometrische Linien von einem gegebenen Winkel zu finden, sobald man von den achten nur eine kennt. — Die Berechnung

eines

eines Dreiecks führt immer auf einen Regula de Trisatz, und dieser auf eine Multiplication und auf eine Division, welche durch die große Anzahl der Ziffern beschwerlich werden. Nepper erfand die Logarithmen, um die Multiplication in eine Addition, und die Division in eine Subtraction zu verwandeln. — Es wurden deßwegen neben die trigonometrischen Linien zugleich ihre Logarithmen geschrieben, — und als man fand, daß man die trigonometrischen Linien wenig gebrauche, so ließ man diese endlich ganz weg, und behielt blos die Logarithmen derselben. Diese nannte man nun die künstlichen trigonometrischen Linien, zum Unterschiede von jener, die man die natürlichen nannte. —

Von der ebenen Trigonometrie gingen wir zur sphärischen über. Wir entwickelten die Eigenschaften der Kugeldreiecke aus den Eigenschaften der Kugel, und lösten dann alle Dreiecke durch Zeichnung auf der Kugel. Hiedurch wurden wir mit den sphärischen Dreiecken eben so vertraut, wie mit den ebenen, und wir lernten hier schon gleich die Fälle kennen, welche man zweideutig nennt, weil man in ihnen aus den drei gegebenen Stücken jedesmal zwei verschiedene Dreiecke beschreiben kann.

Wir gingen nun zur Berechnung der Kugeldreiecke über, bei denen wir auf dieselbe Weise die trigonometrischen Linien und die Logarithmen gebrauchten, wie bei den ebenen.

Bei der ebenen Trigonometrie hatten wir drei Lehrsätze gebraucht, um alle Dreiecke aufzulösen. — Bei der sphärischen gebrauchten wir vier. Wir mußten in den meisten Fällen, ehe wir ein sphärisches Dreieck auflösen können, dieses vorher durch Füllung eines senkrechten

Bogens

Bogens in zwei rechtwinkliche zerlegen. Wir bestimmten die Fälle, in welchen der senkrechte Bogen ins Dreieck fällt, und die, in welchen er außerhalb fällt.

Zugleich bestimmten wir, ob das zu suchende Stück des rechtwinklichen Dreiecks spitz oder stumpf — ob es kleiner oder größer als 90° sey. Wir müssen dieses wissen, weil die trigonometrischen Linien jedesmal zu zweien Bogen gehören, die beide gleichweit von 90° entfernt sind.

Wir lösten alle Dreiecke nach den Lehrsätzen auf, und vermieden die trigonometrischen Formeln, in denen gewöhnlich mehrere Sätze in einen zusammengezogen sind, wodurch die Rechnung mit ihnen zwar kürzer, aber ihre Form für den Anfänger verwickelter wird.

Zuletzt berechneten wir den Flächeninhalt sphärischer Dreiecke, wobei wir wieder eines neuen Lehrsatzes bedurften. Wir fanden einen ganz leichten Ausdruck für diese Rechnungen, der uns zeigte, daß die Fläche eines sphärischen Dreiecks von dem Ueberschuß seiner drei Winkel über 180° abhangen. Dieses gab uns zugleich ein Mittel an die Hand, aus der Fläche des Dreiecks die Summe seiner drei Winkel zu bestimmen, und wir sahen, daß selbst bei den größten Dreiecken, die wir auf unserer Erdkugel messen können, die Summe aller drei Winkel nur wenige Sekunden größer ist als 180°.

Wir schließen hier den theoretischen Theil, und gehen nun zum praktischen über, wo wir diese Sätze auf die Feldmeßkunst im Großen anwenden werden.

Von den Instrumenten des Trigonometers.

Nachdem wir bisher von den Kenntnissen gehandelt haben, die der Trigonometer bei seinen Messungen bedarf, so wollen wir jetzt von den Instrumenten handeln, die er bei denselben gebraucht.

Da er blos Linien und Winkel zu messen hat, so gebraucht er nur einen guten Maasstab und ein gutes Winkel-Instrument.

§. 1.

Von den Maasstäben.

Es ist bei einer großen Messung äußerst wichtig, sich vor allen Dingen ein genaues Grundmaas zu verschaffen, denn die Fehler desselben pflanzen sich durch die ganze Messung fort, und man hat kein Mittel sie zu entdecken, wohingegen bei einem Winkel-Instrument sich die Fehler durch Rundmessen im Horizont leicht finden lassen, weil alle Winkel zusammen 360 Grad betragen müssen.

Bei der Bergischen Landesvermessung gebrauchten wir als Grundmaas eine Pariser Toise, welche ich im Jahr 1804 von dort mitgebracht hatte. Es ist eine eiserne plattgeschliffene Stange von 6 Pariser Fuß Länge, $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $\frac{1}{3}$ Zoll Dicke. Sie ist von Lenoir verfertigt, und in meiner und des Astronomen Bouvard Gegenwart vierzehnmal unmittelbar mit der Toise verglichen worden, welche bei der Peruer Gradmessung gebraucht wurde, und die das genaueste und in Europa am allgemein bekannteste Grundmaas ist. Bei dieser Vergleichung fand sich, daß meine Toise nur um $\frac{1}{890}$ einer Linie länger war als die Peruer. Da dieses auf eine Standlinie von fünf Stunden nur etwa ein Zoll beträgt, so ließ sie der Künstler wie sie war. — Der Preiß der Toise ist 161 Francs. Man ist auf der Pariser Sternwarte auf das genaue Vergleichen der Maasstäbe sehr gut eingerichtet. Der Comparateur ist ein tannener Balken von 14 Fuß Länge, 6 Zoll Höhe und 3 Zoll Breite, über dem eine Messingstange liegt, die 14 Fuß lang, $\frac{1}{2}$ Zoll dick und $1\frac{1}{2}$ Zoll breit ist. Auf diese Stange werden die Maasstäbe gelegt, die verglichen werden sollen. Die Messingstange hat eine feine Eintheilung, auf der mit Hülfe eines Verniers und Mikroskops abgelesen wird, wie groß der zu vergleichende Maasstab ist. Die Eintheilung auf dem Comparateur gibt unmittelbar 10000 Theile der Toise, und der Vernier 100000 Theile. Die Millionentheile werden in dem Mikroskop geschätzt.

Die Vergleichungen unter sich weichen im Maximo um 4 Millionentheile der Toise von einander ab, dieses beträgt $\frac{1}{290}$ Linien.

Da es für den Trigonometer zu wissen nöthig ist, wie

wie genau man die Maasstäbe mit einander vergleichen kann, so will ich die einzelnen Beobachtungen hierher setzen. Ich bemerke vorher noch, daß beide Toisen wechselsweise auf den Comparateur gelegt wurden, wobei jede mit einem Kopfe vor einem am Ende desselben senkrecht stehenden Eisen anlag. Vor den andern Kopf wurde dann der runde Stift geschoben, der am Mikroskop saß.

Die Peruer Toise 10000 Theile.		Die Meinige 10000 Theile.	
Ich	284,62	Ich	284,62
Bouvard	64	Bouvard	63
Ich	64	Ich	60
Bouvard	61	Bouvard	63
Ich	62	Ich	60
Mittel	284,626	Bouvard	60
die Meinige =	284,613	Ich	61
Unterschied	0,013	Ich	62
		Bouvard	61
		Mittel	284,613

Der Unterschied betrug demnach 1 Milliontheil und 3 zehn Milliontheile der Toise, um die die Meinige größer ist, weil die Zahlen auf dem Comparateur rückwärts laufen, und der größeren Toise gehören, daher die kleineren Zahlen *).

Da

*) Diese Vergleichung geschah den 23 Aug. 1804. im Vestibulo der Sternwarte bei 14° Reaumur. Die Urmaaße liegen nemlich im Versammlungssaale der Commission für

 die

Da man indeß nicht immer Gelegenheit hat, die Maaße unmittelbar mit den Urmaßen vergleichen zu können, so bestellt man seinen Maasstab bei einem geschickten Künstler in Deutschland, wie z. B. bei Herrn Hofmechanikus Baumann in Stuttgardt, oder bei Herrn Hofmechanikus Rößler in Darmstadt. Diese haben sich von Paris sehr genaue Maasstäbe verschafft, und man kann sich darauf verlassen, daß sie diese mit aller Sorgfalt copiren.

§. 2.

Hat man sich nun auf irgend eine Weise eine Toise oder ein Meter verschafft, von dessen Genauigkeit man über-

zeugt

die Meereslänge, welche sich hier wöchentlich versammelt, und die es fremden Geometern gern erlaubt ihre Maaße hier zu vergleichen. Die Peruer Toise ist dieselbe, welche Condamine im Jahr 1740 bei der Gradmessung unter dem Aequator gebrauchte. Auf dem hölzernen Futteral ist eine Messingplatte mit folgender Inschrift:

Toise de Peru de l'Academie qui a servi à mesurer la grandeur du dégré sous l'équateur et sur laquelle ont été reglées les toises qui ont été envoyées par ordre du Roi dans les principales villes du Royaume.

Ein Beweis, wie genau in Paris die Maasstäbe auf dem Comparateur abgeglichen werden, ist folgendes: Meine Toise hatte Lenoir nach der seinigen gemacht. Die seinige war nach der von Herrn Prony abgeglichen worden, und die von Herrn Prony nach der Peruer. Die Meinige stammte also im dritten Gliede von der Peruer ab, und doch war sie nur um $\frac{1}{890}$ Linien größer als sie unmittelbar mit ihr verglichen wurde.

zeugt ist, so verfertigt man die Ruthen, mit denen die großen Standlinien gemessen werden. Bei der Bergischen Landesvermessung wurde hiebei auf folgende Weise verfahren:

Ich ließ aus ganz reinen Tannenbrettern, die 15 Jahre im Trockenen gelegen, 10 Ruthen schneiden, welche 12 Fuß lang $1\frac{3}{4}$ Zoll breit und 1 Zoll dick waren. Sie wurden mit Oel getränkt und dann zweimal mit Schieferweis überstrichen. An den Köpfen wurden sie mit Messing beschlagen.

Zugleich ließ ich eine Art Komparateur machen, der aus einem geraden Tannenbalken bestand, an dessen einem Ende ein senkrechter eiserner Stift stand, und auf dem von 6 zu 6 Fuß ein Messingplättchen eingelegt war. Auf diesen Komparateur wurde die Toise gelegt, und da wo 6 und 12 Fuß waren, auf dem Messingplättchen mit einer feinen Spitze eine Linie gerissen. Dann wurden die Ruthen aufgelegt, und so lange an den Köpfen abgeglichen, bis sie genau 12 Fuß hatten.

Dieses Abgleichen hat viele Schwierigkeiten, und man thut wohl, wenn man sie bis auf etwa $\frac{1}{10}$ Linie genau hat, aufzuhören, und den Unterschied zu bemerken und nachher Rechnung dafür zu tragen.

Aus den 10 Ruthen hatte ich 8 der besten ausgesucht und diese zu 4 und 4 in zwei Lagen getheilt, weil ich die großen Standlinien doppelt wollte messen lassen. Die 4 Ruthen in der einen Lage waren alle mit A 1, 2, 3, 4 und die in der anderen mit B 1, 2, 3, 4 bezeichnet: Nach dem Abgleichen hatten sie folgende Länge:

A N^{ro}. 1	= 12 Fuß	— 0,09	Linien
2	= 12 .	. + 0,15	—
3	= 12 .	. + 0,01	—
4	= 12 .	. — 0,00	—
B N^{ro}. 1	= 12 .	. + 0,15	—
2	= 12 .	. + 0,15	—
3	= 12 .	. + 0,20	—
4	= 12 .	. + 0,22	—

Da es sehr schwer hält den Kopf von elner Ruthe völlig winklig zu feilen, und da beim aneinander legen der Ruthen sich immer die höchsten Stellen berühren, so mußte ich, um völlig sicher zu seyn, die Länge einer ganzen Lage messen, wenn die 4 Ruthen so aneinander lagen, als sie dieses auf dem Felde beim Messen thaten.

Ich ließ deswegen einen langen Gang mit Brettern ganz gleich machen und in diese von 6 zu 6 Fuß Messingplättchen einlegen, die der Länge nach geschliffen waren, damit man die feinen Queerschnitte desto leichter sehen könnte. Darauf wurde die Toise aufgelegt und ihr Ende mit feinen Messerschnitten auf den Platten bemerkt. Als auf diese Weise die Länge von 48 Fuß genau bestimmt war, so wurden die Ruthen in der Ordnung aufgelegt, wie sie beim Messen auf den Brücken aneinander lagen.

Vor der letzten Ruthe wurde wieder fein eingeschnitten, und der Unterschied vom Schnitt der Toise mit dem Stangenzirkel gemessen.

Bei der Schraube des Stangenzirkels der Plankammer gehen 28,73 Umdrehungen auf 6 Pariser Linien.

Bei der ersten Messung waren bei 7 Grad Reaumur A Ruthen um 0,588 Pariser Linien größer als 48 Fuß, und B Ruthen 0,838 Pariser Linien größer als 48 Fuß.

Die

Die Ausdehnung des Eisens ist nach Ramsden für jeden Grad Reaumur $\frac{1}{72000}$ seiner ganzen Länge.

Die 8 eiserne Toisen waren also bei 10° Wärme um 0,288 p. Linie länger gewesen, als sie es jetzt bei 7 Grad waren. Die 4 Ruthen hingegen hatten bei 10 Grad dieselbe Länge gehabt, weil geradfaserigtes Tannenholz sich durch die Wärme fast gar nicht ausdehnt.

Bei 10° Wärme waren also

A Ruthen um 0,300 p. Lin. und
B . . 0,550 p. Lin. zu groß.

Den folgenden Tag wurde die Vergleichung bei einer Wärme von 10° wiederholt. Es fanden sich nun

A Ruthen um 0,292 p. Lin. und
B . . . 0,449 p. Lin. zu groß.

Das Mittel aus beiden Messungen gab, daß

A Ruthen um 0,296 p. Lin. und
B . . . 0,500 p. Lin. größer

als 48 Fuß waren, welche Größe ins Tagebuch bemerkt wurde, um bei der Berechnung der Standlinie hierauf Rücksicht nehmen zu können.

Auf diese Weise waren die Maßstäbe verfertigt, mit denen man eine Standlinie von mehreren Stunden auf das genaueste messen konnte. Solche tannene Maßstäbe sind äußerst bequem, weil sie sehr leicht sind und sich in der Sonne nicht werfen, da die Oelfarbe das Eindringen der Feuchtigkeit verhindert. Auch braucht man bei ihnen nicht auf die Ausdehnung von Wärme und Kälte Rücksicht zu nehmen.

§. 3.

Winkel-Instrumente.

Im vorigen Theile lehrten wir die Winkel auf dem Meßtische zu zeichnen, und ihre Größe dann mit dem Transporteur auszumessen.

Genauer als dieses mit dem gewöhnlichen Transporteur geschehen kann, geschieht dieses mit dem geradlinigten Transporteur oder dem tausendtheiligen Maßstabe.

Man beschreibt nemlich aus dem Mittelpunkt des Winkels einen Kreis, und mißt nicht den Bogen des Winkels sondern seine Sehne. Diese Sehne trägt man auf den geradlinigten Transporteur und sieht wie viel Grade und Minuten der Winkel hat.

Die älteren Geometer bedienten sich sehr häufig beim Winkelmessen zweier Diopter-Linealen mit denen sie nach den Gegenständen hinvisirten, und dann aus der Größe der Sehne die Größe des Winkels bestimmten. Ein solches Instrument ist in Fig. 1. Taf. VI. abgebildet. Es ist dasselbe welches Meyer in seinem mathematischen Atlas abgebildet hat, der 1745 erschien. Auf eins der Lineale war der geradlinigte Transporteur gestochen, auf dem die Sehne gemessen wurde, welche man mit dem Handzirkel zwischen den beiden Punkten abgegriffen hatte.

Als man anfing auf den Winkel-Instrumenten Fernröhre anzubringen, in denen ein feines Fadenkreuz war, um desto schärfer nach den Gegenständen zielen zu können, so brachte man sie auch auf den Sehnen-Instrumenten an, und Fig. 2 und 3. von Taf. VI. stellt ein solches vor, welches Meyer im Jahr 1752 bekannt

machte,

machte, und mit dem er zuerst die Winkel durch Wiederholung gemessen.

Indeß, die Sehnen-Instrumente sind immer unbequem, und man gebraucht jetzt fast allgemein Kreis-Instrumente, bei denen der Rand in Grade und Minuten getheilt ist. Dieses Eintheilen geschieht auf einer Maschine. Es würde überflüßig seyn dieses hier näher zu beschreiben, weil jeder der keine Maschine hat, ohnehin nicht genau theilen kann, und der welcher eine hat, bedarf der Beschreibung nicht. Der Engländer Ramsden war der erste welcher kleine Instrumente mit bis dahin unbekannter Genauigkeit theilte. Seine Theilscheibe hatte 4 Fuß Durchmesser und war mit einer Schraube ohne Ende, welche er mit der größten Sorgfalt bearbeitet hatte.

Außer Ramsden besitzt Herr Trougthon noch eine sehr gute Theilmaschine, so wie in Deutschland Hr. Reichenbach in München, und Hr. Baumann in Stuttgardt.

Obschon die Theilstriche die auf diesen Maschinen geschnitten werden, viel feiner wie ein Haar sind, und man sie nur dnrch ein Mikroskop sehen kann, so würde man doch nicht bis auf Sekunden mit ihnen messen können, wenn nicht ein Deutscher, Namens Werner, eine Einrichtung erfunden hätte, vermöge der man kleine Größen, nicht mit einem kleinen Maßstabe mißt, sondern mit dem Unterschiede zweier kleinen Maßstäbe.

Gesetzt, ich will die Entfernung zweier Punkte messen, die ungefähr 0,1 p. Zoll von einander entfernt sind. Ich habe einen Maßstab auf dem der Pariser Zoll in 10 Theile getheilt ist; und einen zweiten auf dem er in 9

Theile getheilt ist. Ich lege beide an die Punkte, allein keiner paßt, weil sie weder $\frac{1}{9}$ noch $\frac{1}{10}$ Zoll von einander entfernt sind. Ich lege nun beide Maßstäbe so nebeneinander, daß ihre Anfangspunkte einander gerade gegenüber liegen. Da auf dem einen die Theile um $\frac{1}{9}$ kleiner sind, so weicht der erste Theilstrich $\frac{1}{90}$, der zweite $\frac{2}{90}$, der dritte $\frac{3}{90}$ Zoll u. s. w. vom anderen ab. Ich lege nun ferner meine beide Punkte an die Differenz zweier Theilstriche, und ich finde daß sie gerade bei der 7ten passe. Ich weiß nun, daß beide $\frac{7}{90}$ Zoll von einander entfernt sind, und ich kann also Neunzigtheile des Zolles messen, obschon ich nur eine grobe Eintheilung in zehntel und neuntel Zoll habe. Hätte man von dem in $\frac{1}{10}$ Zolle getheilten Maßstabe $\frac{9}{10}$ genommen, und diese in 10 Theile getheilt, so hätte ein Theil davon aus $\frac{9}{100}$ Zoll bestanden, und mit diesen beiden Maßstäben hätte man $\frac{1}{100}$ Zolle messen können.

Zwei solcher Maßstäbe sind in Fig. 1. Taf. VII. abgebildet. Man nennt sie nach ihrem Erfinder: V e r n i e r. Auch werden sie wohl Nonius genannt, nach dem Portugiesen N u n n e z, der diese Erfindung fast zu gleicher Zeit machte.

Da man bei so kleinen Meßinstrumenten, als man auf dem Felde gebraucht, die Theilstriche nicht wohl näher als 10 Minuten von einander machen kann, so läßt man eine zweite Theilung, welche um $\frac{1}{61}$ größer ist, über diese als Vernier gehen, und der Unterschied zwischen beiden ist 10 Sekunden. Man kann nun auf diese Weise die Winkel bis auf 10 Sek. messen.

Noch ein zweites Hülfsmittel kleine Größen sehr genau zu messen, finden wir in der Schraube. Wenn man nemlich eine sehr feine und regelmäßig geschnittene Schraube hat, die etwa 40 bis 50 Umdrehungen auf den

Pariser

Pariser Zoll hat, so kann man diese ebenfalls zu feinen Messungen gebrauchen, wie wir dieses oben bei dem Messen mit dem Stangenzirkel sehen, welcher auch eine solche Mikrometerschraube hat, bei der 57,46 Umdrehungen auf 1 Pariser Zoll gehen.

Indeß hat auch die Feinheit der Schrauben ihre Grenzen, über die man nicht herausgehen kann. Herr Repsold in Hamburg hat welche mit 120 Umdrehungen auf 1 Par. Zoll geschnitten, und die Gänge waren so fein und scharf wie Postpapier. Hätte er sie noch feiner schneiden wollen, so wäre das Metall gebrochen.

Um aber nicht nöthig zu haben die Schrauben so äußerst dünn zu schneiden, und doch eine feine Bewegung zu erhalten, so hat Herr Prony folgende sehr einfache Einrichtung angegeben.

In Fig. 2. Taf. VII. ist z der Zeiger der sich langsam fortbewegt, so wie die Schraube herumgedreht wird. ab ist der feste Stützpunkt der Schraube, in dem sich die Schraube zwar herumdreht, aber nicht hin und her bewegt. Nun schlägt Herr Prony vor, auch in diesen eine Schraube zu schneiden, die nach derselben Richtung geht, aber etwas weniger Steigung hat, als die erste. Der Zeiger z wird sich nun mit dem Unterschiede der Steigungen beider Schrauben fortbewegen, und man wird vielleicht 50mal umdrehen müssen, ehe er eine Linie fortgerückt ist. Man sieht daß diese Einrichtung sehr viele Aehnlichkeit mit der des Verniers hat.

Um so feine Theilstriche zu sehen, bedient man sich der Vergrößerungsgläser (Mikroskope). Diese sind einfache, wenn sie nur aus einem Glase bestehen, oder zusammengesetzte, wenn sie mehrere haben.

Die

Die Fernröhre auf den Winkel-Instrumenten haben gewöhnlich nur zwei Gläser. Sie zeigen dann zwar alle Gegenstände umgekehrt, haben aber mehr Helligkeit als wenn sie vier Gläser hätten. — Ueberhaupt kann man sich folgende verschiedene Arten von Fernröhren bemerken.

1) Die holländischen oder gallilä'ischen, welche in Holland ums Jahr 1610 erfunden wurden. Sie bestestehen wie Fig. 3. aus einer erhaben geschliffenen Objektivlinse, und einer hohl geschliffenen Augenlinse. Man sieht in ihnen die Gegenstände gerade. Sie haben gewöhnlich nur eine zwei- oder dreimalige Vergrößerung, und ein kleines Gesichtsfeld. Sie werden von Kurzsichtigen häufig zu Operngukern gebraucht.

2) Die Kepplerischen. Sie bestehen aus zwei erhaben geschliffenen Linsen, und vergrößern um so mehr, je kleiner die Brennweite der Okularlinse, und je größer die der Objektivlinse ist. Sie werden am meisten in der Astronomie gebraucht. Man liebt sie wegen ihrer großen Helligkeit auf Meß-Instrumenten, obschon sie die Gegenstände umkehren. (Fig. 4.)

3) Erdfernröhre. Sie bestehen aus vier Linsen, und zeigen die Gegenstände aufrecht. Die meisten Taschenperspektive haben diese Einrichtung. (Fig. 5.)

Anmerk. Eine Linie, die in der Mitte durch alle Gläser eines Fernrohrs geht, heißt die Achse desselben.

Alle diese Fernröhre zeigen Farben, und man sieht um die Gegenstände, die man durch sie betrachtet, immer einen mehr oder weniger farbigen Ring. Im Jahr 1756 machte der Engländer Dollond die Erfindung der farbenlosen Fernröhre, welche alle Gegenstände in ihrem natürlichen Lichte zeigen. Das Objektivglas besteht

steht bei ihnen aus einer erhabenen Linse von Crownglas, und aus einer Hohllinse von Flintglas, (Fig. 6.) welche die Farbenzerstreuung aufheben. Der Erfinder nannte sie achromatische Fernröhre. Auch werden sie häufig Döllondsche genannt, und jetzt ganz allgemein gebraucht.

Die Fernröhre auf den Meß-Instrumenten sind alle achromatisch, weil sie ein weites Sehfeld und ein reines Licht haben müssen.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über Winkel-Instrumente, kommen wir zur Beschreibung derjenigen, welche am meisten gebräuchlich sind.

Eins der gewöhnlichsten Winkel-Instrumente ist das Astrolabium. Dieses besteht aus einem Kreise, der in 360 Grad eingetheilt ist, und der bei 0 und 180 Grad zwei Diopteren hat. Dann dreht sich auf diesem Kreise ein Lineal herum, welches ebenfalls zwei Diopteren hat. Will man nun den Winkel zwischen zweien Gegenständen A und B messen, so dreht man das Instrument nach A, bis die Kreisdiopteren ihn bedecken. Dann stellt man das Instrument fest, und dreht das Lineal nach B, bis dessen Diopteren ihn ebenfalls bedecken. Auf dem Rande ließt man dann, wie viel Grade das Lineal abgeschnitten hat, und man kennt die Größe des Winkels.

Ein solches Astrolabium ist Fig. 7. Taf. VII. abgebildet. Die Franzosen nennen es Graphometer und gebrauchen es sehr häufig. Gewöhnlich ist in der Mitte desselben noch eine Magnetnadel angebracht. Auch hat man Astrolabia, bei denen statt des ganzen Kreises, nur ein halber genommen worden. Diese sind aber nicht so bequem.

Das eben beschriebene Astrolabium ist eins der gemeinmeinsten. Man hat aber auch welche, auf denen statt der Diopteren Fernröhre sind, damit man desto schärfer zielen kann, und wo zugleich Mikroskopen angebracht sind, um die feine Eintheilung zu sehen. Diese haben auch gewöhnlich eine Kippregel, (ungefähr so wie an dem Visirrohr Taf. II. Fig. 1. 2ter Theil) damit man auf hoch und niedrig liegende Gegenstände mit ihnen zielen kann.

Ein solches Astrolabium ist sehr bequem, weil wenn man es horizontal gestellt hat, alle Winkel im Horizonte gemessen werden, und man also nicht nöthig hat, die Höhenwinkel zu messen und mit diesen den schief gemessenen Winkel auf den Horizont zu reduciren. Indeß muß man sicher seyn, daß die Kippregel sich genau senkrecht auf der Ebene des Instruments bewegen. Auch erfordert das Instrument seiner Natur nach beim Messen einen durchaus festen Stand.

Bei einer Landesvermessung, wo man seinen Standpunkt gewöhnlich in den engen Spitzen der Kirchthürme oder in den hohen Gipfeln ausgezeichneter Bäume hat, kann man das Astrolabium sehr oft aus Mangel an Platz nicht gebrauchen, und man muß häufig einen Stationspunkt deswegen wieder verlassen, weil man dem Instrumente keinen festen Stand geben kann.

Der Spiegelsextant hat hingegen das Bequeme, daß man mit ihm messen kann, ohne daß er fest steht, und daß man ihn in jeder Thurmspitze und in jedem Baumgipfel aufstellen kann. Das Messen geht daher mit ihm am geschwindesten von statten, weil man nirgend Aufenthalt bekommt, und man nie genöthigt ist, unverrichteter Sache von einer Station wieder fortzugehen, sobald es nemlich nur überhaupt möglich ist, die beiden Gegen-

stände

stände zwischen denen man messen will, von ihr zu sehen. Man muß freilich die Höhenwinkel messen und auf den Horizont reduciren — auch sieht man mit Spiegel-Instrumenten nicht so scharf als mit Dioptrischen, allein hieran gewöhnt man sich bald, auch hat man geschwind die nöthigen Höhenwinkel gemessen und diese mit den Tafeln auf den Horizont reducirt.

Aus diesen Gründen scheint es mir, daß der Spiegelsextant für eine Landesvermessung das bequemste Instrument ist. Auch hat sich dieses bei der Bergischen Landesvermessung bestätigt, bei der blos Sextanten gebraucht wurden.

§. 4.

Theorie des Spiegelsextanten.

1) Wenn ein Lichtstrahl auf einen Spiegel fällt, so wird er unter demselben Winkel zurück geworfen, unter dem er auffällt. Wenn z. B. der Strahl A (Fig. 8. Taf. VII.) auf den Spiegel sp unter einem Winkel von 50 Grad fällt, so wird er ebenfalls unter einem Winkel von 50 Grad nach B zurück geworfen. Der Strahl C, der unter einem Winkel von 30 Grad auffällt, wird auch unter einem Winkel von 30 Grad zurück geworfen nach D.

2) Wenn der Spiegel sich dreht, so behält der einfallende Strahl seine Richtung, allein der ausfallende ändert sie.

3) Wenn ein Strahl zweimal zurück geworfen wird, so ist der Winkel, den er mit seiner ersten Richtung macht, doppelt so groß als der Winkel, den die beiden Spiegel mit einander machen, welche ihn zurück werfen.

In

In Fig. 9. Taf. VII. wird der Strahl B vom ersten Spiegel in a zurück geworfen. Er fällt dann auf den zweiten Spiegel in b. Hier wird er zum zweitenmal zurück geworfen, und er geht dann nach x. Der Winkel x, der den doppelt zurück geworfenen Strahl bx mit seiner ersten Richtung Bax macht, ist doppelt so groß als der Winkel y, den die beiden Spiegel mit einander machen.

Beweis.

Die Winkel a und a′ sind einander gleich, als Ein- und Ausfallswinkel. Ebenfalls sind a und a″ als Scheitelwinkel gleich. Auch sind b und b′ als Ein- und Ausfallswinkel gleich. Wir können also die Winkel, die gleiche Buchstaben haben, miteinander verwechseln.

Nun ist $b = a' + y$ also $b - a' = y$ (I)

Ferner ist $a'' + x = b' + y$ also $x = b - a'' + y$

Da nun nach (I) $b - a = y$ ist,

so ist $x = 2y$.

Wenn man also den Winkel y mißt, den beide Spiegel mit einander machen, so hat man diesen nur mit 2 zu multipliciren, um den Winkel x zu finden.

Auf diesen Lehrsatz gründete der berühmte Engländer Hadley ums Jahr 1731 die Erfindung des Spiegelsextanten, ein Instrument, mit dem man nicht den Winkel mißt, den zwei Lichtstrahlen B und M miteinander machen, sondern den Winkel, den die beiden Spiegel mit einander bilden, wenn die beiden Lichtstrahlen sich bedecken.

Der kleine Spiegel bb ist nemlich nur zur Hälfte mit Zinnfolie belegt, so daß das Auge in x auch den Gegenstand M direkt und ohne alle Reflektion sieht. Ebenfalls sieht es in x den Gegenstand B auch nach der Richtung von M, weil sein Bild einmal in a, und das zweitemal in b zurück geworfen wird.

Der große Spiegel a a′ dreht sich um einen Zapfen. So wie man ihn herumdreht, geht der zurück geworfene Strahl auf dem kleinen Spiegel b b′ hin und her. Das Auge ist in x, und sieht den Gegenstand B in b gerade unter dem Gegenstande M, den es direkt sieht. Man sagt dann: die beiden Bilder decken sich. Sobald man dieses sieht, hört man auf, den großen Spiegel zu drehen, und man sieht unten auf der Theilung, wie groß der Winkel y ist, den beide Spiegel mit einander machten, als die beiden Gegenstände B und M sich deckten.

Damit man nicht nöthig habe, diesen Winkel mit 2 zu multiplieiren, um den Winkel x zu finden, den man eigentlich wissen will, so ist der Bogen von 60° schon gleich in 120° eingetheilt. Daher sind die Grade auf einem Spiegel-Instrumente immer nur halb so groß als auf einem Astrolabio.

Der Nullpunkt der Eintheilung liegt da, wo der Index hinzeigt, wenn der große Spiegel dem kleinen parallel ist. — Der Mittelpunkt des großen Spiegels ist zugleich der Mittelpunkt der Eintheilung.

§. 5.

Beschreibung des Spiegelsextanten.

Die gewöhnliche Größe des Spiegelsextanten ist 5, 7 oder 10 Zoll Radius. Der auf Taf. VIII. abgebildete hat 7 Zoll. Ich erhielt ihn 1806 von Troughton in

London. Sein Preis war 18 Guineen. Mit der Fracht und dem Statife und der Wasserwage, welche ich in Deutschland dazu machen ließ, kostete er 22 Carolin. Die Größe von 7 Zoll scheint die bequemste zu seyn. Ich gebrauchte früher einen von 5 Zoll, der auch so wie dieser bis auf 10 Sek. theilte, allein er war nicht so bequem im Ablesen. Späterhin erhielten wir noch einen von 10 Zoll, bei dem sich aber in einem engen Local schon Schwierigkeiten im Aufstellen fanden.

Da dieser Spiegelsextant einer der vollkommensten ist, die Troughton gemacht hat, so will ich ihn hier etwas ausführlich beschreiben.

a ist der große Spiegel, der im Mittelpunkte des Instruments sitzt, und sich mit der Alhidade herumdreht. Vor dem Spiegel ist die Alhidade geschwärzt, damit sie kein falsches Licht auf den Spiegel werfe.

b ist der kleine Spiegel, welcher dem Fernrohr gegenüber steht, und der unten belegt und oben durchbrochen ist.

g und g sind farbige Gläser, welche in Gewerben gehen, und die vor die Spiegel gedreht werden, wenn man Beobachtungen an der Sonne macht. In der Zeichnung stehen die 3 ersten zwischen dem großen und dem kleinen Spiegel, so daß der doppelt zurück geworfene Strahl durch sie hindurch gehen muß.

Das Fernrohr ist trompetenförmig. Das Objektivglas ist farbenlos, und hat 12 Pariser Linien Oeffnung. Zu dem Fernrohre gehören drei verschiedene Vergrößerungen 4= 9= und 14mal. Gewöhnlich gebraucht man bei irdischen Gegenständen die 9malige. Das Fernrohr theilt sich in der Mitte. Der Theil mit dem Objektive bleibt immer auf dem Sextanten. Der vordere Theil mit dem

Okulare

Okulare wird abgeschraubt. Es hat eine Einrichtung, daß man es hoch und tief stellen kann, je nachdem man das Objektiv viel oder wenig vom belegten Theile des kleinen Spiegels will fassen lassen.

Unter dem Fernrohre ist eine kleine Wasserwage, von der man aber nur wenig in der Zeichnung sieht, weil sie durch den doppelten Boden verdeckt wird. Ueber der Wasserwage steht noch ein kleiner Spiegel c unter einem Winkel von 45°, in dem man beobachtet, ob die Wasserwage einspielt. — Wir kommen nachher wieder auf diese Wasserwage zurück.

Der doppelte Boden hat ungefehr die Figur von einem umgekehrten lateinischen *T*, nemlich ⊥. Er ist mit dreien Pföstchen auf dem Hauptkörper des Sextanten befestigt. In die Mitte schraubt man die Handhabe, an der man den Sextanten dreht und anfaßt, wenn er auf dem Statiefe ist.

d ist das Vergrößerungsglas, mit dem man die Theilung abliest. Diese ist auf einen silbernen Bogen geschnitten, der in den Rand eingelegt ist. Jeder Grad ist in 6 Theile oder in 10 Minuten eingetheilt.

59 von diesen Theilen, oder ein Bogen von 9° 50′ ist auf dem Vernier in 60 Theile eingetheilt, folglich ist eine jede Abtheilung auf dem Vernier $\frac{1}{60}$ kleiner als eine Abtheilung auf dem Rande, da nun eine Abtheilung auf dem Rande 10 Minuten beträgt, so ist der Unterschied zwischen beiden 10 Sekunden.

h ist die Schraube für die feine Bewegung der Alhidade (oder die Mikrometerschraube). Unter der Alhidade liegt noch eine andere Schraube, (die man aber in der Zeichnung nicht sehen kann,) mit der man die Alhidade

 fest=

feststellt, sobald man den großen Spiegel genug herum gedreht hat, und man den Gegenstand durch doppelte Zurückwerfung im Kleinen sieht. Man dreht dann noch ein wenig an der Mikrometerschraube, bis sein Bild auf dem Bilde von dem zweiten Gegenstande liegt, den man direkt über dem kleinen Spiegel sieht.

Auf Taf. VIII. ist neben dem Spiegelsextanten das Nußstatif abgebildet, auf welches der Sextant beim Beobachten geschraubt wird.

§. 6.

Untersuchung der Fehler des Sextanten.

Jedes Meßinstrument kann mancherlei Fehler haben, und der Geometer muß es deswegen vor dem Gebrauche untersuchen, damit er weiß in wie fern er sich auf dasselbe verlassen, und wie genau er mit demselben messen könne. In der Mathematik nimmt man nichts auf guten Glauben an, — alles wird vorher untersucht und geprüft. Ein Geometer, der dieses nicht thun wollte, würde immer im Ungewissen seyn, und nie ein recht lebendiges Gefühl von der Genauigkeit seiner Arbeit haben.

Ich will hier der Reihe nach von den Fehlern handeln — die ein Spiegelsextant haben kann, und die man entweder verbessern muß, oder für die man Rechnung tragen muß, wenn man sie nicht verbessern kann. Ich werde hiebei die Ordnung befolgen, in der der Beobachter diese Fehler verbessern muß.

1) Fehler der Spiegel.

Die beiden Flächen der Spiegel müssen vollkommene Ebenen

Ebenen seyn, die unter sich genau parallel sind. Man kann dieses des Abends leicht untersuchen, wenn man einen hellen Stern mit dem Sextanten beobachtet. Bekommt man ein doppeltes Bild, so sind sie nicht parallel. Dieser Fehler ist nicht zu verbessern. Allein da man seine Instrumente nur bei den vorzüglichsten Künstlern kauft, so ist es selten, daß die Spiegel fehlerhaft sind, weil diese eine große Sorgfalt auf das Schleifen derselben verwenden, und keine wegschicken, die sie nicht vorher untersucht haben.

2) Senkrechter Stand des großen Spiegels.

Die Spiegel müssen auf der Ebene des Instruments senkrecht stehen. Denn alles Winkelmessen geschieht in der Ebene, in der der Winkel liegt, und welche durch das Auge und die beiden Gegenstände, auf die man mißt, bestimmt wird. — Das Zurückwerfen der Lichtstrahlen muß in dieser Ebene geschehen, und dieses geschieht nach den Gesetzen der Optik nur dann, wenn die Spiegel auf dieser Ebene senkrecht stehen.

Ob die Spiegel senkrecht stehen, untersucht man mit Hülfe von ein Paar Dioptern, (a und b Fig. 10. Taf. VII.) welche die Höhe des großen Spiegels haben, und die man überall auf den Sextanten hinstellen kann. In a ist ein feines Loch, und in b ist genau in derselben Höhe ein feines Haar gespannt. Ob die Dioptern gut sind, kann man leicht untersuchen, wenn man sie auf ein gerad gehobeltes Brett oder auf eine Spiegelplatte neben einander stellt. Das Haar muß dann genau das Loch bedecken.

Sind die Dioptern untersucht, so verfährt man, um

den

den senkrechten Stand der Spiegel zu finden, auf folgende Weise: Man schraubt das Fernrohr vom Sextanten so, daß man die Alhidade ganz zurückdrehen kann. Dann stellt man das Diopter mit dem Haar dicht an den großen Spiegel, und das mit dem Löchlein auf den Rand bei 0°. Sieht man nun durch das Löchlein in den großen Spiegel, so muß das Haar im andern, und das Löchlein im Spiegelbilde genau in einer geraden Linie liegen. — Ist dieses, so setzt man das eine Diopter weiter bei 60° und bei 120°, und dreht den Spiegel um. Sind auch hier die beiden Punkte und die beiden Haare in gerader Linie, so steht der Spiegel überall senkrecht. Steht er nicht senkrecht, so muß man ihn losschrauben, und die drei Körner ein wenig abgleichen, zwischen denen er liegt. Allein man hat dieses fast nie nöthig, sobald der Sextant von einem Künstler gemacht worden, der seine Instrumente eher untersucht, ehe er sie abliefert. Bei der Untersuchung von meinem Sextanten fand ich nirgend eine halbe Haardicke Unterschied. Da das Haar bei diesem Radius 4 Minuten dick war, so würde dieses beim reflektirten Bilde nur 1 Minute betragen haben. Eine solche Neigung des großen Spiegels hat keinen merklichen Einfluß auf den gemessenen Winkel, da eine Neigung von 10 Minuten nur eine von 2 Sekunden auf einen Winkel von 120 Grad hat, wo sie am größten ist.

Verschiedene Schriftsteller lehren wie man diesen Einfluß berechnen und in eine Tafel bringen könne. Indeß wird kein praktischer Geometer für einen Fehler Rechnung tragen, den er so leicht verbessern kann, — oder doch wenigstens in so enge Grenzen einschließen, daß er auf sie keine Rücksicht zu nehmen braucht.

3) Senk-

3) Senkrechter Stand des kleinen Spiegels.

Ist der große Spiegel berichtigt, so untersucht man den senkrechten Stand des kleinen auf folgende Weise: Man nimmt die obere Kante von einem Schornsteine, oder die Firste eines Hauses, und bringt sie ins Fernrohr. Zugleich sieht man direkt über den kleinen Spiegel weg, und bemerkt, ob das direkte Bild und das reflektirte gleich hoch sind. Ist dieses nicht, so dreht man an der Correktionsschraube des kleinen Spiegels so lange, bis sie es sind.

Bei den Berichtigungen der Spiegel muß man mit Vorsicht verfahren, und die Schrauben nicht zu stark anziehen. Hat das Fernrohr des Sextanten eine große Oeffnung, so müssen die Spiegel ebenfals eine verhältnißmäßige Größe haben, und man schraubt sie dann leicht krumm, wenn das Glas etwas dünn ist. Ich hatte einmal diesen Fall, und ich konnte gar nicht finden, woher es kam, daß der Sextant falsche Bilder machte. Endlich sah ich, daß der Trigonometer, der ihn gebraucht, die Schrauben an den Spiegeln zu stark angezogen hatte, in der Absicht, um sie recht fest zu stellen.

4) Parallele Lage des Fernrohrs.

Die Achse des Fernrohrs muß der Ebene des Sextanten parallel seyn. Um dieses zu untersuchen stellt man den Sextanten auf das Statif, und die Diopteren neben das Fernrohr, und zielt damit nach einem gut erleuchteten Gegenstande, z. B. nach der Kante einer Thurmfahne. Sieht man diese durch die Diopteren, und man findet, daß sie zugleich mitten im Fernrohre ist, so ist es der Ebene des Sextanten parallel. Ist sie aber nicht mitten im Fernrohr, so corrigirt man den Fehler durch die Correktionsschrauben am Fernrohrträger.

Man könnte den Winkel, den die Achse des Fernrohrs mit der Ebene des Sextanten macht, auf folgende Weise bestimmen. Man mißt einen Winkel von 120° am obern und am untern Faden des Fernrohrs. Beide Messungen müssen gleiche Resultate geben, wenn die Achse parallel ist, und die Fäden genau gleich weit von der Achse. Ist aber einer um 12″ größer, so ist das Fernrohr um 20 Minuten geneigt. Indeß würde diese Bestimmung sehr unsicher seyn, weil man auch im Messen des Winkels jedesmal um 6 Sekunden irren kann, und man könnte also einen Deviationsfehler von 20 Minuten finden, wo keiner von 1 Minute wäre.

5) Fehler des Zeigers.

In Fig. 11. ist y der Winkel von dem in Fig. 9. bewiesen worden, daß er die Hälfte von dem Winkel x ist. Der Winkel z, der die dem kleinen Spiegel parallele Linie g h macht, ist ihm als Wechselwinkel gleich, und dieses ist eigentlich der Winkel, der auf dem Rande gemessen wird. — Der Nullpunkt der Theilung liegt natürlich da, wo der große und der kleine Spiegel keinen Winkel mit einander machen, wo sie also einander parallel sind. Wenn der Zeiger der Alhidade auf 0° der Theilung steht, so ist der kleine Spiegel dem großen parallel. Stellt man den großen Spiegel dem kleinen parallel, und der Zeiger steht nicht auf Null, sondern z. B. 5 Minuten drüber, so sagt man: der Fehler des Index ist 5 Minuten. (Man nennt dieses auch den Collimationsfehler). Wenn man nun den kleinen Spiegel um

5 Minuten drehte, so wäre dieser gehoben. An den ältern Sextanten findet man auch eine Stellschraube, um den kleinen Spiegel zu drehen. Allein Ramsden hat diese an den neuern Sextanten verworfen, weil hiedurch der kleine Spiegel wandelbar wurde, und man auf diese Weise den Collimationsfehler doch nie bis auf 10 Sek. corrigiren kann. Man muß daher doch bei jeder Messung seine Größe bestimmen, und ihn in Rechnung bringen, und dann gilt es gleich, ob man einen Collimationsfehler von 5 Minuten oder von 5 Sekunden anzubringen hat. Der Werth eines Sextanten beruht größtentheils darauf, daß er fest gebaut ist, und daß sein Collimationsfehler sich selten ändert. Ein 5 zölliger Sextant von Troughton, den wir bei der Landesvermessung hatten, hielt seinen Collimationsfehler von 2′ 5″ einmal fest ein Vierteljahr ohne ihn zu ändern, obschon er in dieser Zeit täglich mit aufs Feld und in die Thürme ging, und immer ein- und ausgepackt wurde.

Wenn man das Fernrohr des Sextanten auf eine entfernte Thurmspitze richtet, und mit dem großen Spiegel zugleich das reflektirte Bild nimmt, und genau auf das direkte bringt, so sind die Spiegel parallel, und der Zeiger muß auf 0° stehen. Dieses thut er indeß nie. Man liest dann ab, wie viele Minuten und Sekunden hieran fehlen, und dieses ist der Fehler des Index. Liegt er rechts vom Nullpunkte, so wird er addirt, liegt er links, so wird er vom gemessenen Winkel abgezogen. Von der sorgfältigen Bestimmung dieses Fehlers hängt die Genauigkeit der Beobachtung ab, und man muß auf ihn dieselbe Sorgfalt verwenden, als auf die Messung selber. Die gewöhnlichste Art, ihn zu bestimmen, ist die

eben

eben angeführte mit einer entfernten Thurmspitze. Indeß ist diese Methode nicht die sicherste, denn wenn auf der Stelle des Randes gerade ein Fehler in der Eintheilung von 10 Sekunden ist, so findet man ihn jedesmal um 10 Sekunden zu groß oder zu klein, man mag ihn noch so oft messen. Folgende Methode zu bestimmen ist besser. Man mißt kleine Winkel, die nur ein Paar Grade haben, disseits und jenseits dem Nullpunkte der Eintheilung. Man kann dieses, da die Sextanten gewöhnlich 5 Grad rückwärts getheilt sind. Ist der Collimationsfehler Null, so findet man den Winkel beim Rückwärtsmessen so groß als beim Vorwärtsmessen. Ist er aber nicht Null, so nimmt man den halben Unterschied zwischen beiden Winkeln, und dieses ist der Collimationsfehler. Hiebei hat man den Vortheil, daß man ihn mit verschiedenen Winkeln bestimmen kann, wo sich denn die etwaige kleinen Fehler in der Eintheilung entweder gegen einander aufheben, oder doch vermindern. Als wir beim Messen in der Rheinebene in der Nähe von Cölln waren, so gebrauchte ich zur Bestimmung des Collimationsfehlers immer ein Paar nahe beisammen stehende Thurmspitzen. — Nachher, als wir uns mit der Messung von Cölln entfernten, so ließ ich auf eine Entfernung von 1000 Fuß ein Paar Pikete nahe zusammen stellen, und maß den Winkel zwischen ihnen durch Rückwärts- und Vorwärtsmessen.

Bei der Bestimmung des Collimationsfehlers muß man sehr vorsichtig seyn, — man muß ihn vor und nach jeder Messung untersuchen, weil jede Ungewißheit in ihm sich ganz auf alle gemessene Winkel überträgt.

6) Fehler des Verniers.

Der Bogen des Verniers muß genau seine gehörige Größe haben. Man untersucht dieses auf folgende Weise: Man stellt ihn auf 0°, und sieht zu, ob er sich bei 10° schneidet. Thut er es nicht, so liest man ab, und bemerkt, wie viel Sekunden fehlen. Dann stellt man ihn auf 5°, und sieht, ob er bei 15° schneidet, und bemerkt ebenfals seinen Fehler. Auf diese Weise geht man den ganzen Rand durch, und addirt am Ende alle Fehler zusammen. Heben die sich mit + und — gegeneinander auf, so ist das ein Zeichen, daß der Vernier seine gehörige Größe hat, und daß die Abweichungen von Ungleichheiten in der Eintheilung herrühren. Man hat auf diese Weise auch schon eine beiläufige Uebersicht über die Güte der Eintheilung erhalten, welche einem bei der folgenden Untersuchung derselben von Nutzen ist. Heben sich aber + und — nicht gegeneinander, so hat der Vernier nicht seine gehörige Größe, und man muß hiernach beim Messen rücksicht nehmen. Gesetzt, der Vernier wäre um 60 Sekunden zu klein, so wäre er bei der ersten Minute um 6, bei der zweiten um 12 u. s. w. zu klein, und man müßte bei einem Winkel von 30° 22′ noch 12″ addiren, und bei einem Winkel von 18° 56′ noch 36″. Bei den Sextanten, welche ich untersucht habe, hatte der Bogen des Verniers so genau seine Größe, daß man hierauf keine Rücksicht zu nehmen brauchte.

7) Fehler der Eintheilung.

Man hat eine lange Zeit die Eintheilung der Sextanten für fehlerfrei gehalten, und alle Geometer und Astronomen,

nomen, welche mit diesem Instrumente gearbeitet haben, übergehen sie mit Stillschweigen. Obschon sie bedeutender sind als alle andere, welche ein Spiegelsextant haben kann. — Die Astronomen konnten diese Fehler nicht wohl finden, weil sie bei ihren Höhenmessungen keine Probe für die Genauigkeit derselben haben. Indeß die Geometer konnten sie leicht finden, sobald sie nur alle Winkel im Horizont messen, und diese zusammen addiren. Sobald diese keine 360° betrugen, mußten noch unbekannte Fehler da seyn. Ich fand auf diese Weise im Jahr 1805 bei einem 5 zölligen Sextanten von Troughton, den der Künstler selber für einen der besten erklärt, den er gemacht habe, daß die Summe von 4 Winkeln, deren jeder ungefehr 90° betrug, immer 2 Min. 20 Sek. weniger betrug als 360°. Da ich den Collimationsfehler sehr genau bestimmt hatte, so konnte es davon nicht herrühren, und eben so wenig von nicht senkrechtem Stande der Spiegel, denn dieser war auch berichtigt. Der Sextant mußte also eine Excentricität, oder aber Fehler in der Theilung haben. Beide Fehler waren beständig, sie änderten alle Beobachtungen auf dieselbe Weise, und man konnte sich durch eine große Reihe von Beobachtungen der Wahrheit nicht mehr nähern, als durch eine kleine. Es war daher nothwendig, diese Fehler genau zu bestimmen, ehe wir anfiengen zu trianguliren, weil sich voraussehen ließ, daß sich das Dreiecknetz verschieben, und die Standlinien nicht stimmen würden. Als ich mit 3 Thürmen rund maß, so fand ich den Fehler der Eintheilung bei 120° zu 38″. Bei 90° war er 35″; bei 60 ungefehr 35, und bei 45° war er 31″. Der Bogen von 45° bis 120° war sehr regelmäßig geschnitten,

schnitten, und die 7″ Unterschied schienen von einer kleinen Excentricität herzurühren. Allein von 45° bis 36° war die Theilung unregelmäßig, und da man mit dem Vernier ablesen muß, der bald hier bald da auf dem Rande zeigt, so ließe sich hierüber nichts sicheres ausmachen. Von 0° bis 36 waren die Fehler der Eintheilung wieder regelmäßig wachsend. Ich verfertigte mir hiernach eine Tabelle über die Fehler der Eintheilung, mit der ich alle Winkel corrigirte. Nur die von 36 bis 45 Grad vermied ich, weil da die Fehler der Theilstriche zu regellos waren. Kam so ein Winkel, so theilte ich ihn entweder in zwei, und maß ihn durch die Summe, oder ich nahm ihn zu einem größern, und fand ihn dann durch Abziehen.

Da ich bei den kleinen Winkeln nicht so viele Thurmspitzen im Horizonte haben konnte, als nothwendig waren, um mit gleich großen Winkeln rund zu messen, so steckte ich auf der Wahner Heide einen Kreis von 1000 Fuß mit Pikets ab, und maaß zwischen diesen die Winkel. Auf diese Weise wurde die Heide gleichsam in eine große Theilscheibe verwandelt, und die Winkel wurden fast so genau, als wenn sie mit einem ganzen Kreise wären gemessen worden.

Als ich nachher den 7 zölligen Sextanten von Troughton erhielt, so untersuchte ich die Fehler der Eintheilung auf dieselbe Weise. Die Eintheilung auf diesem war indeß sehr regelmäßig, und hatte keine fehlerhafte Stellen. Der Sextant schien nur eine Excentricität zu haben, die bei 120° an 30 Sek. betrug. Wenn die Theilung so regelmäßig ist, daß man mit dem Vernier keine fehlerhafte Stellen auf ihr entdecken kann, so kann sie doch bei 120°

um

um 30 oder 40 Sek. zu groß oder zu klein seyn, denn dieses kann man mit dem Vernier nicht finden, weil dieses auf dem Bogen von 10° nur 3 oder 4 Sek. beträgt. Allein man kann dann durch Rundmessen in einigen wenigen Tagen die Theilungsfehler bestimmen, da man sie nur alle 20 oder 30 Grad zu untersuchen braucht.

8) Parallaxe des Spiegelsextanten.

Die Einrichtung des Spiegelsextanten bringt es mit sich, daß die beiden Strahlen B und M (Fig. 9.) sich in einem Punkte x schneiden, der nicht der Mittelpunkt des Instruments ist. In x wird der Winkel beobachtet, allein in a, dem Mittelpunkte des großen Spiegels, wird er gemessen. Bei einem dioptrischen Instrumente hingegen schneiden sich die Gesichtslinien im Mittelpunkte des Instruments, und man mißt gewöhnlich den Scheitelwinkel des zu messenden Winkels, der also genau eben so groß ist.

Die Parallaxe des Spiegelsextanten ist bei nahen Gegenständen sehr merklich, und da die meisten Schriftsteller, welche über diesen Gegenstand geschrieben, sie übergangen haben, so will ich etwas ausführlich von ihr handeln.

In Fig. 12. ist McB der rechte Winkel der beiden Gegenstände M B, welcher von c, dem Mittelpunkte der Theilung, gemessen wird. Hingegen der Winkel MxB ist derjenige, welcher vom Auge in x beobachtet wird. Die Entfernung des großen Spiegels von der Achse des Fernrohrs ist 2 Zoll. Ist nun der Gegenstand M so entfernt, daß diese 2 Zoll, oder die Linie cp nicht in Betracht kommt, so ist keine Parallaxe da. Z. B. bei

34000 Fuß beträgt der parallaktische Winkel bei M nur 1 Sekunde. Ist aber die Entfernung von M nur 1000 Fuß, so ist dieser Winkel 34 Sekunden, und man muß diese zum Gemessenen addiren, wenn man den wahren Winkel bei c haben will. Denn nach einem bekannten Satze aus der Geometrie ist der äußere Winkel McB so groß als der Winkel M und der Winkel x zusammen genommen.

Man sieht hieraus, daß 1) der parallaktische Winkel von der Entfernung der Achse des Fernrohrs vom Mittelpunkt des großen Spiegels abhängt. 2) Daß nur die Entfernung des Gegenstandes M in Betracht kommt, der das direkte Bild gibt, und daß der des andern B, der das doppelte reflektirte gibt, gleichgültig ist. 3) Daß der parallaktische Winkel immer zum gemessenen muß addirt werden, wenn der doppelt reflektirte Strahl rechts vom Direkten liegt. Liegt er aber links, so muß er abgezogen werden, wie in Fig. 13, weil der wahre Winkel McB um den Winkel M kleiner ist als der gesehene MxB.

Beim Messen auf nahe Gegenstände ist die Parallaxe sehr wichtig, da sie bald addirt und bald abgezogen werden muß, je nachdem man die Winkel disseits oder jenseits Null mißt, — d. h. je nachdem der Fall von Fig. 12. oder von Fig. 13. eintritt.

Ich berechnete nun folgendes Täfelchen für die Größe des parallaktischen Winkels M, da die Entfernung der Achse des Fernrohrs vom Centro des großen Spiegels gewöhnlich 2 Zoll ist, so kann man es fast bei allen Sextanten gebrauchen.

Tafel über die Parallaxe

Bei	500	Fuß Entfer.	= 68	Sek.	Bei	2000	Fuß	= 17	Sek.
	600	= =	= 57	=		2200	=	= 16	=
	700	= =	= 49	=		2500	=	= 14	=
	800	= =	= 43	=		3000	=	= 12	=
	900	= =	= 38	=		3500	=	= 10	=
	1000	= =	= 34	=		4000	=	= 9	=
	1100	= =	= 31	=		5000	=	= 7	=
	1200	= =	= 29	=		6000	=	= 6	=
	1300	= =	= 27	=		7000	=	= 5	=
	1400	= =	= 25	=		8000	=	= 4	=
	1500	= =	= 23	=		9000	=	= 3	=
	1600	= =	= 21	=		10000	=	= 3	=
	1700	= =	= 20	=		12000	=	= 2	=
	1800	= =	= 19	=		17000	=	= 2	=
						34000	=	= 1	=

Ich ließ, um den Einfluß der Parallaxe direkt zu prüfen, im Jahr 1805 auf dem Felde 4 Pikets in einem Kreise von 1000 Fuß Radius stellen. Ich fand die Parallaxe durch Vor= und Rückwärtsmessen zu 35″, und die 4 Winkel waren bei der Summe von 360° um 2 Minuten 20 Sekunden zu klein.

9) Fehler der Wasserwage des Sextanten.

Die Wasserwage ist auf dem Fernrohr befestigt, und muß der Achse desselben parallel seyn. Ob sie dieses ist, erfährt man auf folgende Weise. Man mißt einen Höhenwinkel von z. B. 20° über die Spitze eines nahen Thurms, auf die gewöhnliche Weise auf dem Quecksilber= oder Wasserhorizonte. Dann mißt man denselben Höhen=

winkel

winkel mit Hülfe der Wasserwage, und der Unterschied ist die Neigung der Wasserwage gegen die Achse des Sextanten. — Wir kommen hierauf noch einmal in folgenden Paragraphen zurück.

§. 7.

Winkelmessen mit dem Spiegelsextanten.

Die verschiedenen Operationen beim Winkelmessen erfordern eine gewisse Ordnung, in welcher sie aufeinander folgen müssen. Nur bei einer klaren Uebersicht weiß man was schon geschehen ist, und was noch geschehen muß. Es geschieht nichts doppelt, nirgend ist Stockung, die Arbeit schreitet immer stetig fort, und gewährt dem Beobachter das Vergnügen, welches man bei jedem wohlgeordneten Geschäfte empfindet. Bei der Verwirrung, welche aus Mangel an Ordnung und Uebersicht entsteht, wird die Arbeit lästig. Vorzüglich ist dieses bei geometrischen Operationen der Fall, wo zuletzt alles schließen muß, und wo der Beobachter sich nicht einmal durch falsche Angaben herausreißen kann, ohne die Verwirrung noch größer zu machen.

Beim Winkelmessen mit dem Spiegelsextanten kommen mehrere Umstände vor, welche den Winkel verfälschen können, und die man sorgfältig in Betracht ziehen muß, wenn man den wahren Winkel erhalten will.

1) Nachdem man alle Fehler des Spiegelsextanten untersucht und berichtigt hat, so kann man mit dem Winkelmessen anfangen, wobei folgende Ordnung beobachtet wird:

Man bereist zuerst die Gegend, und besteigt alle Thurmspitzen, und sieht welche Orte man von ihnen sehen kann. Dieses bemerkt man sich in sein Tagebuch, und damit man keine überschlage, so sucht man den ganzen Horizont mit dem Taschenfernrohr ab. Zugleich bemerkt man sich alle hochliegende Bäume, Windmühlen, und einzelne Berge, welche man für Signalpunkte dienlich hält. Hiernach zeichnet man sich nach dem Augenmaaße ein kleines Dreiecknetz, und wählt die Dreiecke aus, welche man messen will, und bestimmt zugleich die Punkte, wo man Signale errichten muß, um die Verbindung unter den Dreiecken zu erhalten.

2) Beim Winkelmessen in Thurmspitzen sucht der Geometer immer so hoch wie möglich zu steigen, und wenn es angeht bis oben in die Spitze zu den kleinen Fenstern, wo die Schieferdecker gewöhnlich heraussteigen, wenn sie die Wetterfahne aufsetzen. Sind keine Fenster in der Spitze, so macht er welche mit Setzlucken, welche von außen mit Schiefer bekleidet werden, und nur wenig kosten. In diese Fenster nagelt er ein Brettchen wie ein Taubenschlag, und auf dieses stellt er seinen Sextanten. Es ist ein großer Vorzug, den dieses Instrument vor allen andern hat, daß man so leicht ein Plätzchen findet, wo man mit ihm ganz bequem beobachten kann. Ich hatte öfter in Zeit von wenigen Stunden in einer Thurmspitze das schönste Local für Beobachtungen mit dem Spiegelsextanten gehabt, indeß es mir unmöglich würde gewesen seyn, mit einem andern Instrumente nur einen Winkel zu messen. Oft muß man des Instruments wegen ein Signal bauen, das 100 oder 200 Francs kostet. Hingegen mit dem Spiegelsextanten steigt man auf einen Baum, nagelt ein Brettchen in den Gipfel, und beobachtet bequem wie auf der Erde.

3) Ebe

3) Ehe man mit dem Beobachten anfängt, sieht man zu, ob die Thurmspitzen auf die man mißt, einseitig von der Sonne beleuchtet sind. Die Seite, die im Schatten ist, sieht man nicht, und man mißt immer auf die scheinbare Achse des Thurms, welche von der wahren verschieden ist. Man wartet dann, bis die Sonne mehr herum kommt, denn man mißt den Winkel des Morgens und des Abends.

Auch bemerkt man, ob man die Thurmspitzen mit einer hinlänglichen Deutlichkeit sehen kann. Die Bilder sind zwar immer schwach wegen des Verlustes von Licht, der bei dem doppelten Zurücktreffen der Strahlen statt findet, allein hieran gewöhnt man sich bald, und ein geübter Beobachter kann immer noch Winkel zwischen zwei Gegenständen messen, die ein anderer nicht einmal sehen kann. Sind aber die Bilder gar zu undeutlich, dann muß man das Winkelnehmen aussetzen, weil man doch nur unvollkommene Arbeit macht. Das, was man nicht sehen kann, kann man auch nicht messen. Die größte Undeutlichkeit rührt gewöhnlich von dicker Luft her. Im Sommer ist bei großer Hitze gegen Mittag eine Art von Heerrauch. Die Luft hat dann des Morgens bei Sonnenaufgang, oder des Abends bei Sonnenuntergang die größte Durchsichtigkeit, und man kann, wenn die Sonne schon untergegangen ist, immer noch am Winkelnehmen bleiben, bis die Dunkelheit das Ablesen unmöglich macht.

Zugleich bemerkt der Beobachter in sein Tagebuch: Ob die Thurmspitzen, auf die er mißt, gegen den Himmel zu sehen sind, oder aber gegen dahinter liegende Berge und Waldungen. In diesem Falle sieht man sie gewöhnlich undeutlich, wenn sie nicht etwa sehr weiß sind.

3) Alle Winkel werden vom Statife gemessen. Denn obschon die Einrichtung des Sextanten es erlaubt, daß man aus freier Hand die Winkel messen kann, so macht man hievon doch keinen Gebrauch, weil man aus freier Hand weder so genau noch so bequem messen kann, als vom Statife. In vielen Fällen ist es sogar unmöglich, einen Winkel aus freier Hand zu messen, wenn man ihn vom Statife noch recht gut messen kann. Wenn nemlich die beiden Gegenstände so schwach beleuchtet sind, daß es sehr schwer hält beide Bilder ins Fernrohr zu bringen, so kann man dieses beim Messen vom Statife auf folgende Weise: Man blendet den großen Spiegel mit einem der farbigen Gläser ab, und sucht den Gegenstand den man direkt sieht, durch Herumdrehen des Sextanten ins Fernrohr zu bringen. Ist dieser gefunden, so blendet man hinter dem kleinen Spiegel ab, und läßt den Sextanten unverrückt stehen. Dann gibt man dem großen Spiegel wieder Licht, und stellt ihn auf den Winkel, den die beiden Gegenstände mit einander machen, und den man nach dem Augenmaaße, z. B. auf 60 Grad geschätzt hat. Durch langsames Herumdrehen des großen Spiegels bringt man dann den zweiten Gegenstand ins Feld des Fernrohrs. Ist dieser gefunden, so gibt man dem ersten auch wieder Licht, indem man die Blendgläser zurück dreht. Man hat nun beide Gegenstände im Felde, und man kann sie mit der Schraube für die feine Bewegung leicht aufeinander bringen. — Auf diese Weise habe ich oft zwei Thurmspitzen ins Feld gebracht, die so schwach beleuchtet waren, daß man an der Möglichkeit

lichkeit zweifelte, den Winkel messen zu können. Allein durch das Abblenden hat man nur einen Horizont im Felde, und man sieht dann viel schärfer als wenn nicht abgeblendet ist, und man zwei hat, die sich über einander bewegen. Sind einmal beide Gegenstände im Felde, dann kann man sie auch zusammen bringen, weil das Auge nur einen sehr kleinen Fleck hat, auf dem es suchen muß. — Oft muß man auch während des Messens einen Gegenstand wieder abblenden, wenn man den andern verloren hat, oder man ihn einmal wieder recht deutlich suchen will. — Auf diese Weise kann man vom Statife Winkel messen, wenn auch die Gegenstände nur wie ein schwacher Duft erscheinen. Wollte man aber aus freier Hand solche Winkel messen, so würde man nie zu Stande kommen.

Auch kann man in derselben Zeit 10 Winkel vom Statife messen, in der man nur einen aus freier Hand mißt. Wenn man nemlich zwei solcher schwach erleuchteten Gegenstände im Fernrohr hat, so macht man um den Fuß des Statifs einen Strich mit der Bleifeder. Man kann dann den Sextanten wegnehmen und ablesen. Setzt man denn nachher das Statif wieder an den Strich, so hat man auch die Gegenstände wieder im Fernrohr, und so kann man mit der größten Leichtigkeit denselben Winkel 10 bis 12mal hintereinander messen, da das Aufsuchen sonst immer mehr Zeit kostet als das Messen selber.

Endlich ist die Beobachtung genauer, welche vom Statife im ruhigen Fernrohre gemacht wird, als die, welche man bei schwankenden Bildern aus freier Hand macht. Man sieht dann die Berührung viel schöner, besonders wenn die Gegenstände schwach erleuchtet sind.

Der Sextant ist ursprünglich ein Schiffer-Instrument, und auf den schwankenden Schiffen kann man natürlich kein Statif gebrauchen. Hier müssen alle Beobachtungen aus freier Hand und im Fluge gemacht werden. Hingegen auf dem festen Lande die Winkel zwischen unbeweglichen Gegenständen aus freier Hand zu messen, würde Unkunde des Geschäfts verrathen.

§. 8.

Centriren der Winkel.

Wenn also der Beobachter seine Stationspunkte in der Thurmspitze zurecht gemacht hat, sein Instrument aufgestellt, und die Winkel gemessen, so muß er diese noch centriren. Das heißt: er muß berechnen, wie groß der Winkel würde gewesen seyn, wenn er ihn aus dem Mittelpunkte des Thurms gemessen hätte. In den wenigsten Fällen kann sich der Beobachter in den Mittelpunkt der Station stellen, — allein er thut doch immer wohl, sich so nahe wie möglich bei den Mittelpunkt zu stellen, weil das Centriren dann um so genauer wird. Er erreicht dieses schon dadurch, daß er bis in die oberste Thurmspitze steigt, da er hier am nächsten beim Centro ist. — Auf den Thürmen mit Gallerien ist das Messen zwar sehr bequem, allein das Centriren ist schwierig. Ich hatte einmal auf der Siegberger Abtei den Fall, daß ich ein Paar Tage mit dem Centriren verlor, und doch am Ende die Winkel ausstreichen mußte. Der Thurm hat eine Gallerie mit einem steinernen Geländer. Der Sextant wurde auf dieses gestellt, und alle Winkel im Horizonte gemessen. Das Centriren war sehr beschwer-

lich,

sich, da der Sextant 12 bis 15 Fuß von der Achse des Thurms stand, und man auf diese nicht direkt messen konnte, weil keine Oeffnung in der Mauer war. — Als endlich alle Winkel centrirt waren, so wollte ihre Summe nicht bis auf 1 Minute mit 360° stimmen, welche Genauigkeit bei der Messung vorgeschrieben war. — Nach mehreren vergeblichen Versuchen mußte ich mich entschließen, die Gallerie zu verlassen, und oben in die Thurmspitze 4 Fenster brechen zu lassen. Jetzt wurden in einem Tage alle Winkel im Horizonte gemessen und centrirt, und sie stimmten nun bis innerhalb der vorgeschriebenen Fehlergrenze.

Das Centriren der Winkel beruhet auf folgendem geometrischen Satze:

Wenn Fig. 14. Taf. VII. G der gemessene, und C der centrirte Winkel ist, so findet man C, wenn man von G die beiden Winkel A und B abzieht, oder $C = G - (A + B)$.

Beweis.

Man ziehe durch C und G eine gerade Linie, so theilt diese beide Winkel in zwei Theile, und $k + h = G$ und $m + n = C$. Nun ist aber $k = m + A$ und $h = n + B$.

Also $k + h = m + A + n + B$.

Da aber $k + h = G$ und $m + n = C$ ist,

so ist $C = G - (A + B)$.

Wenn man also von G die beide Winkel A und B abzieht, so bleibt der centrirte Winkel C übrig.

Man muß daher die Größe der beiden Winkel A und B kennen, wenn man den Winkel G centriren will. Man findet diese Winkel leicht, wenn man den Perpendikel

dikel mißt, der ihnen gegenüber liegt, in Fig. 14. ist dieses für den Winkel A die Linie C d.

Weil die Gegenstände A und B, auf die man mißt, immer ein Paar Stunden entfernt sind, und der Perpendikel gewöhnlich nur einige Fuß beträgt, da der Beobachter nie entfernt vom Mittelpunkt der Station steht, so sind diese Winkel immer sehr klein, und betragen selten eine halbe oder ganze Minute. Um sie berechnen zu können muß man schon beiläufig die Entfernungen von den Punkten A und B vom Punkte G wissen. Man bestimmt diese entweder nach der Karte oder nach dem Augenmaaße, weil ein Fehler von ein Paar hundert Fuß auf diesen Winkel nur einen kleinen Einfluß hat. Hat man die Dreiecke berechnet, so kann man die Winkel aufs neue reduciren, weil dann die genaue Länge der Seiten bekannt ist.

Die Berechnung der Winkel A und B ist ein bloßer Regula de Tri-Satz. In Fig. 15. ist B G der Bogen von 57° 17′ 45″, oder von 206265 Sekunden, welcher dem Halbmesser G A gleich ist. Die Länge der Linie G A verhält sich zu der Länge des Perpendikels P G wie die 206265 Sekunden zu den Sekunden des Bogens P. G.

Gesetzt, die Linie G A sey ungefehr anderthalb Stunden oder 20626 Fuß, und der gemessene Perpendikel P G sey 1 Fuß, so ist der gegenüber liegende Winkel A = 10 Sekunden. Wäre die Entfernung 3 Stunden oder 41252 Fuß gewesen, so war der Winkel A nur 5 Sekunden, wenn der Perpendikel wieder 1 Fuß war.

Aus dem vorigen ergibt sich, daß man, um die Sekunden des Bogens P G zu finden, man die 206265 mit

dem

dem Perpendikel PG multipltciren muß, und dann mit der Linie GA dividiren.

Beispiel. Das Perpendikel sey 2, 3 Fuß, die Länge der Linie GA schätzt man zu 25000. So ist die Größe des Winkels $PAG = \frac{2,3 \,.\, 206265}{25000} = 19$ Sek.

Man sieht, daß diese Rechnung sehr leicht ist, und ich halte diese Art zu centriren für die bequemste.

Man kann den Winkel A Fig. 14. auch noch auf eine andere Weise finden, wenn man nemlich den Richtungswinkel CGA und die Entfernuug CG mißt, so kann man, da man auch die Seite CA wenigstens durch Schätzung kennt, den Winkel A trigonometrisch berechnen. Allein diese Rechnung ist immer weitläufiger wie die mit den Perpendikeln, und der Richtungswinkel bei G mißt sich sehr unbequem. Mit einem Spiegelwerkzeuge läßt er sich gar nicht messen, weil er sehr stumpf ist, und man müßte statt seiner den Nebenwinkel k messen, und ihn dann durch Abziehen finden.

Die Art, wie wir in der Bergischen Landesvermessung bei dem Messen der Perpendikel verfuhren, war folgende: Wir legten eine Latte in der Richtung von AG bis gegen die Königsstange, und hier maßen wir dann mit dem Fußstab die Länge des Pervendikels Cd, welches dem Winkel A gegenüber lag, bis auf die Mitte des Thurms, oder die Mitte der Königsstange.

Beim Centriren kommen mehrere Fälle vor, welche man wohl unterscheiden muß, wenn man sich nicht irren will. In Fig. 14. liegt der gemessene Winkel G im

Centrir=

Centrirten C, und man findet diesen, wenn man die Winkel A und B von jenem abzieht.

Hätte der Sextant aber hinter dem Mittelpunkte gestanden, so wäre es umgekehrt. Wir wollen die Figur beibehalten, und C den gemessenen, und G als den centrirten Winkel ansehen. Wir müssen nun die Winkel A und B zu C addiren, um G zu finden.

Hat der gemessene Winkel mit dem centrirten einen Schenkel gemein, das heißt: hat das Instrument in der Linie gestanden, welche vom Mittelpunkte des Thurms, in dem man mißt, zu einem der beiden gezogen wird, auf die man mißt, so wird blos der eine Winkel abgezogen, von dem man den Perpendikel gemessen hat, wie solches in Fig. 16. der Fall ist.

Hätte aber der Sextant hinter dem Mittelpunkte gestanden, so daß G der Mittelpunkt, und C der Ort des Sextanten war, so mußte dieser Winkel addirt werden, um den centrirten zu finden.

Endlich kann noch der Fall eintreten, daß das Instrument außerhalb dem centrirten Winkel steht, z. B. in G in Fig. 17, wo C der centrirte und G der gemessene Winkel ist.

In diesem Falle wird der Winkel A von B abgezogen, und ihre Differenz wird zum gemessenen Winkel addirt. Denn es ist $A + C = G + B$, weil $m = n$ ist.

Also ist $C = G + B - A$. Ist A größer als B, so wird die Differenz negativ, und man muß sie abziehen statt addiren.

Anfangs zeichneten wir bei jedem Winkel im Journal die Lage seiner Schenkel, um hiernach zu bestimmen, was man beim Centriren zu addiren oder abzuziehen habe.

Wir

Wir fanden aber bald, daß es viel bequemer sey, wenn man statt der Zeichnung gleich dabei schriebe was geschehen müsse.

Dieses geschah auf folgende Weise:

Nachdem die Perpendikel auf A und B gemessen, und die Entfernung von A und B geschätzt waren, so wurde im Journal, in dem jeder Winkel eine Seite einnahm, folgendes unten am Rande bemerkt:

Perpendikel A 2,4 Fuß Entfern. von A 2 Stund. geschätzt.
Perp. B 4,3 = = = = 23080 Fuß gemessen.

1) Die Summe wird abgezogen, (wenn nemlich der gemessene Winkel innerhalb des wahren lag) wie Fig. 14.

Oder 2) die Summe wird addirt, (wenn nemlich der wahre innerhalb dem gemessenen lag.)

Oder 3) die Differenz wird abgezogen, (wenn der gemessene Winkel neben dem wahren lag) und A größer als B.

Oder 4) die Differenz wird addirt, (wenn der gemessene neben dem wahren liegt) und B größer als A.

In dem Falle das Instrument in dem Schenkel des wahren Winkels stand, schreibt man blos drunter: die Summe wird abgezogen oder addirt. (je nachdem man vor oder hinter dem wahren Mittelpunkte stand). Man könnte statt Summe eben so gut Differenz setzen, da in diesem Falle der eine Perpendikel immer Null ist.

§. 9.

Reduciren der Winkel auf den Horizont.

Alle Winkel müssen horizontal gemessen werden, weil alle Dreiecke in einer wagerechten Ebene liegen. Es ist aber

aber sehr selten der Fall, daß die beiden Gegenstände, auf die man mißt, mit dem Beobachtungspunkte in einer horizontalen Ebene liegen. Oft liegen sie unter und oft über dem Horizonte des Beobachters — oder der eine liegt darunter und der andere liegt darüber. In allen diesen Fällen mißt man statt des horizontalen einen schiefen Winkel, und man muß nun berechnen, wie viel dieses beträgt, oder wie groß der Winkel gewesen, wenn er horizontal gelegen.

Bei Instrumenten, die eine Kippregel haben, hat man dieses nicht nöthig, weil hier das Instrument selber den Winkel auf den Horizont reducirt. Denn das Instrument wird horizontal gestellt, und die Kippregel, welche senkrecht auf und niedergeht, bringt immer den Gegenstand auf den Horizont, er mag hoch oder tief stehen.

Allein bei dem Sextanten ist dieses nicht der Fall. Dieser mißt den Winkel immer in der Ebene in der er liegt, und liegt der Winkel schief, so mißt er ihn auch schief. Man muß ihn dann durch Rechnung auf den Horizont bringen. Dieses heißt: das Reduciren auf den Horizont, welches fast von allen Meßkünstlern für das Schwierigste beim Winkelmessen angesehen wird.

Beim Reduciren auf den Horizont stellt man sich durch die beiden Schenkel des Winkels zwei senkrecht gestellte Ebenen vor. Da, wo der Horizont diese Ebenen schneidet, liegt der wahre Winkel. Der gemessene liegt in diesen beiden Ebenen bald höher bald tiefer, bald mehr bald weniger schief.

Um einen Winkel auf den Horizont zu bringen, muß man die Neigung seiner Schenkel gegeneinander und gegen den Horizont kennen; das erstere ist der schief gemessene

messene Winkel. — Das letzere sind die beiden Höhenwinkel. Um die Höhenwinkel zu messen muß man eine Wasserwage auf dem Sextanten haben, weil diese Winkel so klein sind, daß man sie nicht mehr mit doppelter Reflexion messen kann.

So viel ich weiß, sind unsere Sextanten die ersten gewesen, welche auf dem Fernrohre eine Wasserwage hatten, und daß bei bedeutenden Messungen, wie z. B. bei der von le Coqschen von Westphalen, keine Winkel auf den Horizont reducirt wurden, kam vielleicht mit von dem Umstande her, daß diese Meßkünstler keine Möglichkeit sahen, mit dem Sextanten so kleine Höhenwinkel zu messen als beim Reduciren vorkommen. Auch mogten sie glauben, daß in ebenen Gegenden die Vernachläßigung der Reduktion nur sehr geringe Fehler verursache. Ich glaubte dieses anfangs selber, als ich aber beim Rundmessen im Horizonte bei Winkeln, die in der Rheinebene gewesen waren, bedeutende Abweichungen von 360° fand, so sah ich, daß man das Reduciren auf den Horizont nie vernachläßigen dürfe, sobald man irgend eine Genauigkeit erreichen wolle.

Da es unmöglich war, die kleinen Höhenwinkel auf die gewöhnliche Weise mit dem Sextanten zu messen, so ließ ich eine Wasserwage mit zwei Ringen machen, die ich vorne aufs Fernrohr schieben konnte. Ich gebrauchte nemlich damals einen fünfzölligen Sextanten, auf den das Fernrohr auf die gewöhnliche Weise durch den Ring aufgeschroben wird, der das Fernrohr trägt. — Die Höhenwinkel wurden dann auf folgende Weise gemessen: Der Sextant wurde auf dem Statife senkrecht gestellt, und so um die Nuß gedreht, daß das Fernrohr horizontal stand, und die Wasserwage nahe einspielte. Die Fußschrauben gaben darinn das scharfe Einspielen. Nun wurden die Gläser hinter den kleinen Spiegel geschoben, so daß man direkt nichts sehen konnte. Darauf wurde der Gegenstand, dessen Höhenwinkel man messen wollte, durch Reflexion des großen Spiegels in die Mitte des Feldes gebracht. Lag der Gegenstand im Horizonte, so stand der Index auf Null. Lag er drüber, so wurde vorwärts — lag er drunter, so wurde er rückwärts abgelesen, und man hatte den Höhen- oder Tiefenwinkel.

Da man die Mitte vom Felde des Fernrohrs nur durch Schätzen finden kann, so thut man wohl, wenn man am oberen und am unteren Faden mißt, oder daß man sich in die Mitte ein feines Kreuz von Spinnenfäden spannt.

Da voraus zu sehen war, daß das Niveau der Achse des Fernrohrs nicht parallel seyn würde, so maß ich einen Höhenwinkel mit dem Quecksilberhorizont zu 9° 31′. Der Sextant blieb dann auf derselben Stelle, und nun maß ich die Höhenwinkel mit der Wasserwage zu 9° 14′. Es mußte also zu jedem Winkel 17 Minuten addirt werden.

Man ist oft genöthigt da Höhenwinkel zu nehmen, wo man dem Instrumente keinen festen Stand geben kann, z. B. in hohen Bäumen, oder im Winde auf Thurmspitzen. Man muß dann den Augenblick abpassen in dem die Wasserwage einspielt um den Höhenwinkel zu nehmen, und da man nicht zugleich ins Fernrohr und auf die Wasserwage sehen kann, so müssen dann zwei Beobachter seyn, von denen der eine dem andern angibt, wenn die Wage einspielt. Um am Fernrohre das Einspielen der Wage beobachten zu können, ließ ich an dem 7zölligen Sextanten eine feste Wasserwage unter das

Fern-

Fernrohr setzen, und hinter diese einen Spiegel mit einem Gewerbe der sich bis auf 45 Grad drehen läßt. Mit diesem kann ein Beobachter die Höhenwinkel nehmen ohne das Auge vom Fernrohre abzuwenden. Da die Wasserwage unterhalb dem Fernrohre sitzt, so muß man den Sextanten beim Messen umkehren und die Theilung nach oben stellen, wodurch die Höhenwinkel rückwärts abgelesen werden, und die Tiefenwinkel vorwärts Null.

Nachdem wir vom Messen der Höhenwinkel gehandelt welche der Beobachter beim Reduciren gebraucht, so kommen wir auf die Rechnung, die hiemit verknüpft ist.

Aus dem gemessenen schiefen Winkel und aus den gemessenen Höhenwinkeln seiner Schenkel, den wahren horizontalen zu finden, ist eine Aufgabe welche sich durch ebene Trigonometrie sowohl, als durch sphärische auflösen läßt. Wir wollen uns mit beiden Auflösungen jetzt näher beschäftigen.

In Fig. 18. sey ACB der gemessene schiefe Winkel, und ECD der gesuchte horizontale, so sieht man leicht daß die Länge der Schenkel auf die Größe des Winkels keinen Einfluß hat, und daß beide Winkel dieselbe bleiben, die Gegenstände mögen nah oder entfernt seyn.

Man setze $AC = BC = 1 = \sin.\ \mathrm{tot.}$

So kann man in dem rechtwinkligten Dreieck BCD alle sechs Stücke finden, weil der Höhenwinkel bei C gemessen ist.

Dasselbe gilt von dem Dreiecke ACE.

Da man $BD = FE$ kennt, so kennt man auch AF.

Auch kennt man in dem Dreiecke ACB den Winkel bei C weil er gemessen ist, und die beiden anliegenden Seiten sind $= 1$. Folglich kann man die Seite AB berechnen.

In

In dem rechtwinkligten Dreiecke A B F sind also die beiden Seiten A F und A B bekannt, und die dritte Seite B F findet sich durch Rechnung.

Endlich ist die Seite D E = B F und man kennt nun in dem Dreiecke E C D alle drei Seiten, und man kann auf die bekannte Weise den horizontalen Winkel E C D welcher der Seite E D gegenüberliegt, berechnen.

Diese Rechnung würde indeß zu weitläuftig seyn, um hiernach die Winkel auf den Horizont zu bringen. Mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie ist sie viel kürzer.

Es sey Fig. 19. A C B der gemessene Winkel = G
B C D der eine Höhenwinkel = p
A C E der andere — — = q
E C D der horinzontale — = H

Ferner sey A C = B C = D C = A C = 1 als Radien derselben Kugel.

Man errichte auf D und E zwei senkrechte Bogen, die durch B und A gehen und sich in Z schneiden.

Da D Z = E Z = 90° ist, so findet man die beiden B Z und A Z wenn man die Höhenwinkel von 90° abzieht.

Da A B gemessen ist, so sind in dem Dreieck A B Z alle drei Seiten bekannt, und man kann den Winkel Z nach der Seite 336 gegebenen Formel berechnen, wo er mit a bezeichnet ist. Dieser Winkel ist dem horizontalen E C D den wir H nannten, gleich, und man kennt also diesen, sobald man das Kugeldreieck berechnet hat.

Hätte ein Gegenstand im Horizonte gelegen, oder darunter, so wäre die Rechnung dieselbe, nur daß man im letzten Falle den Tiefenwinkel zu 90° addiren muß, statt von ihm abzuziehen.

Das Seite 336 angeführte Beispiel erläutert diese Rechnung hinreichend, und es würde überflüßig seyn, hier ein neues anzuführen.

Abkürzung der Rechnung.

Das Reduciren auf den Horizont führt immer zu einer mehr oder weniger weitläuftigen Rechnung, und die Geometer haben sich daher von jeher bemüht, theils durch bequeme Formeln, theils durch Hülfstafeln diese Rechnung abzukürzen.

Die bequemste Formel für den Fall, daß beide Gegenstände über oder unter dem Horizonte liegen, ist folgende, wobei wir die eben angeführten Buchstaben gebrauchen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}H = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(g+(q \div p)) . \sin.\tfrac{1}{2}(g \div (q \div p))}{\mathrm{Cos.}\ q\ .\ \mathrm{Cos.}\ p}}$$

Beispiel:

Gemessen ist

Der W. $g = 60°, 30$; $\tfrac{1}{2} g = 30°, 15$
Höhenw. $q = 2, 35$; $\tfrac{1}{2}(q \div p = 35$
. . . $p = 1, 25$; Sum. $30, 50$ l. s. $= 9{,}7097299$
$q \div p = 1, 10$ Diff. $29, 40$ l. s. $= 9{,}6945642$
$19{,}4042941 - 20$

$q = 2°, 35'$ log. cos. $9{,}9995584$
$p = 1, 25$ log. cos. $9{,}9998672$
$19{,}9994256$ . . . .

$19{,}9994256$
$2)19{,}4048685$
log. sin. $\tfrac{1}{2} H = 9{,}7024342$

$= 30°, 15', 15''$,
2

Der horizontale Winkel $60°, 31', 50''$, Liegt ein Gegenstand im Horizonte, der andere aber drüber oder drunter, so rechnet man nach dieser Formel:

$$\sin.\ \tfrac{1}{2} H = \sqrt{\frac{\sin.\ \frac{1}{2}(G + q)\ \sin.\ \frac{1}{2}(G \div q)}{\cos.\ q.}}$$

Beispiel.

Gemessen ist:

$G = 60^\circ\ 30'$; $\frac{1}{2} G = 30^\circ\ 15'$

Höhenw. $q = 2, 35$; $\frac{1}{2} q = 1\ 17'\ 30''$

" " $p = 0$, Summe $31, 32, 30$ log. sin. $= 9{,}7186001$

Differ. $28, 57, 30$ log. sin. $= 9{,}6850010$

$19{,}4036011 + 10$

$q = 2^\circ\ 35$ log. cos. $= 9{,}9995584$

$2 | 19{,}4040427$

log. sin. $\frac{1}{2} H = 9{,}7020213 = 30^\circ\ 14'\ 1''$

2

der horizontale Winkel $= 60, 28, 2$

Für den Fall, daß ein Schenkel über, und der andre unter

Beispiel.

Gemessen ist:

$G = 60° \; 30'$; $\frac{1}{2} G = 30° \; 15'$

cos. q. Höhenw. $q = 2, 35$; $\frac{1}{2} q = \underline{1 \; 17' \; 30''}$

= = $p = 0$, Summe $31, 32,30$ log. sin. $= 9,7186001$

Differ. $28, 57,30$ log. sin. $= 9,6850010$

$$\overline{19,4036011 + 10}$$

$q = 2° \; 35$ log. cos. $= 9,9995584$

$$2 | \overline{19,4040427}$$

log. sin. $\frac{1}{2} H = 9,7020213 = 30° \; 14' \; 1''$

$$\underline{\qquad 2}$$

der horizontale Winkel $= 60,28,2$

unter dem Horizonte liegt, rechnet man nach folgender Formel:

$$\sin.\tfrac{1}{2}H = \sqrt{\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(G-q+p)\ \sin.\tfrac{1}{2}(G-q-p)}{\cos.\ p.\ \cos.\ q.}}$$

Beispiel.

Gemessen ist

$G = 60^\circ\ 30'$ $\tfrac{1}{2}G = 30^\circ,15'$

der Höhenw. $q = 2^\circ\ 35'$ $\tfrac{1}{2}q+p = 2^\circ,$—

Tiefenwinkel $p = 1^\circ\ 25'$ Summe 32,15 log. sin. 9,7272276

$q+p = 4^\circ\ 0'$ Diff. 28,15 log. sin. 9,6751546

19,4023822 + 20

$q = 2^\circ\ 35'$ log. cos. 9,9995584

$p = 1,25$ log. cos. 9,9998672

19,9994256 .. 19,9994256

2 | 19,4029566

log. sin. $\tfrac{1}{2}H$ = 9,7014783 = $30^\circ\ 11'\ 31''$

2

der horizontale Winkel = 60,23,2

Ver=

Beispiel.

Gemessen ist

$G = 60^\circ\, 30' \quad \frac{1}{2} G = 30^\circ, 15'$

der Höhenw. $q = 2^\circ\ 35' \quad \frac{1}{2} q + p = 2^\circ, -$

Tiefenwinkel $p = 1^\circ\ 25'$ Summe $32,15$ log. sin. $9,7272276$

$q + p = 4^\circ\ 0'$ Diff. $28,15$ log. sin. $9,6751546$

$19,4023822 + 20$

$q = 2^\circ\, 35'$ log. cos. $9,9995584$

$p = 1,25$ log. cos. $9,9998672$

$19,9994256 \,..\, 19,9994256$

$2 | 19,4029566$

log. sin. $\frac{1}{2} H = 9,7014783 = 30^\circ\ 11'\, 31''$

2

der horizontale Winkel $= 60,23,2$

Vergleichen wir diese Beispiele mit dem S. 336, so sieht man, daß durch diese Veränderung der Grundformel in Hinsicht der Abkürzung der Rechnung wenig gewonnen worden. In jenem haben wir 135 Ziffern, und in diesem 125 *).

Da man sich vergeblich bemüht hatte der Reductionsformel eine bequemere Gestalt zu geben, so beschäftigten sich die Geometer mit Näherungsformeln. Da die Höhenwinkel immer sehr klein sind, so ist ihr Einfluß auf den gemessenen Winkel, der gewöhnlich zwischen 30° und 90° hat, geringe, und man kann deswegen Voraussetzungen machen, die zwar nicht völlig wahr sind, deren Einfluß aber auf den reducirten Winkel unmerklich ist.

Es

*) Man rechnet nach diesen Formeln gewöhnlich auf folgende Art:

$g = 60^\circ, 30'$; $\frac{1}{2} g = 30^\circ, 15'$

$q = 2^\circ, 35'$; $\frac{1}{2}(q+p) = 2^\circ, -$

$p = 1^\circ, 25'$ Summa $32^\circ, 15'$ log. sin. $= 9{,}7272276$

$q+p = 4^\circ, -$ Differenz $28^\circ, 15'$ log. sin. $= 9{,}6751546$

log. sin. tot. — log. cos. $2^\circ, 35' = 0{,}0004416$

log. sin. tot. — log. cos. $2^\circ, 25' = 0{,}0001328$

$2 \mid 19{,}4029566$

log. sin. $\frac{1}{2}$ H $= 9{,}7014783$

$= 3^\circ, 11', 31'' = \frac{1}{2}$ H.

2

$60^\circ, 23', 9''$ = dem horizontalen Winkel H.

Man hat hiernach nur circa 80 Ziffern zu schreiben nöthig, und erspart gegen die vorige Rechnungsart 45, und gegen die auf S. 336 angegebene 55 Ziffern in jedem Beispiel. Es wird daher durch diese Formeln in der Abkürzung der Rechnung 69 pC. gewonnen.

Anm. des Correctors.

Es würde zu weitläuftig seyn, alle die Näherungsformeln anzuführen, welche von den Geometern sind versucht worden. Wir begnügen uns blos zu bemerken, daß die, welche in der Instruction stehen, welchen das Depot de la guerre seinen Ingenieuren mitgetheilt hat, so wie auch die, welche Delambert in seinem Werke über die französische Gradmessung bekannt gemacht hat, zu den bequemsten gehören. Doch sind die, welche Herr von Lindenau in der Monatlichen Correspondenz hat abdrucken lassen, fast noch geschmeidiger. Alle diese Formeln sind mit kleinen Hülfstafeln begleitet, wodurch die Rechnung abgekürzt wird.

Indeß bleibt das Reduciren doch immer eine lästige Rechnung, besonders deswegen, weil man in ihr keine Controlle hat, und man daher alles doppelt rechnen muß. Hat man den Tag hindurch in der Zugluft der Thürme ein Paar hundert Winkel gemessen, so ist man den Abend müde und wenig aufgelegt zum Rechnen. Indeß muß man die Winkel doch centriren und reduciren, damit man sieht, wie ihre Summe mit 360 steht, und ob man den andern Tag weiter gehen kann, oder aber, ob man bleiben muß und nachmessen.

Die Erfahrungen, welche ich hierin in der Bergischen Landesvermessung machte, bestimmten mich, Tafeln mit doppelten Eingängen berechnen zu lassen, in denen man für jeden Winkel die Reduktion ohne alle Rechnung finden konnte. Diese Tafeln waren so eingerichtet wie die, welche ich im zweiten Theile von Seite 510 bis 517 habe abdrucken lassen. Die erste enthielt alle Reduktionen, wenn beide Gegenstände über oder beide unterm Horizont liegen. Die zweite enthielt alle Reduktionen, wenn ein

Gegen=

Gegenstand drüber und der andere darin oder darunter lag.

Die dort abgedruckten Tafeln gehen in den Höhenwinkeln nur von halben zu halben Grad. Diese gingen aber von 5 zu 5 Minuten, und im Horizontalen bis 120°, da dieses die größten Winkel sind, welche man noch mit Sicherheit mit dem Sextanten messen kann.

Ich fand, daß in den Dreiecken des ersten Rangs, welche gewöhnlich Seiten von 2 bis 4 Stunden hatten, keine Höhenwinkel vorkamen, die größer als $1\frac{1}{2}$ Grad waren. Ich ließ deswegen diese Tafeln auch nur bis $1\frac{1}{2}$ Grad berechnen. Die erste Tafel enthielt 171 horizontale Linien, und 24 senkrechte. In allem 4104 Exempel. Die zweite Tafel enthielt ebenfalls 24 senkrechte, aber 189 horizontale Linien, und in allem 4536 Beispiele.

In den Dreiecken des zweiten Rangs, deren Seiten von einer halben bis 2 Stunden Länge haben, gehen die Höhenwinkel bis 5 Grad. Allein in diesen ist die vorgeschriebene Genauigkeit in den Winkeln auch geringer, und die Reduktionstafeln brauchen nicht so enge berechnet zu seyn.

Ich nahm deswegen für die Dreiecke des zweiten Ranges die Höhenwinkel von 15 zu 15 Minuten, und ließ hiernach wieder zwei Tafeln berechnen, wovon die erste 210 horizontale Linien und 5040 Exempel enthielt, und die zweite 220 und 5280 Beispiele.

In den Dreiecken des dritten Ranges können die Höhenwinkel bis auf 10 Grad gehen, da ihre Seiten nur 1000 bis 6000 Fuß lang sind. In diesen ist die vorgeschriebene Genauigkeit noch geringer, und es ist daher hinlänglich, wenn die Tafeln für diese von halben zu

halben

halben Graden gehen. Sie enthalten dann eben so viele Exempel als die für den zweiten Rang. — Größere Höhenwinkel als 10 Grad kommen nicht vor; und kommen sie vor, so muß der Beobachter sie vermeiden, weil ein Winkel, der eine sehr starke Reduktion hat, nur in dem Falle genau kann gemessen werden, wenn beide Signale an ihren Endpunkten Kugeln haben. Sind sie spitz oder sonst nicht gut begrenzt, so irrt man sich immer mehr oder weniger bei dem schiefen Aufeinanderbringen der Bilder, und es ist daher äußerst schwierig, einen sehr schiefen Winkel mit dem Sextanten so genau zu messen, daß er beim Reduciren keinen größern Fehler hat als ein anderer der nahe horizontal war.

Es war anfangs meine Absicht, diese Tafeln hier abdrucken zu lassen. Allein ich fand bald, daß es besser wäre sie besonders zu drucken, und ihnen ein etwas größeres Format zu geben, so daß alle drei Tafeln 4 Bogen in Oktav einnehmen, welche der Trigonometer dann leicht bei sich führen kann. Anfangs theilten sich unsere Trigonometer diese Tafeln durch Abschriften mit, allein dieses war sehr lästig, da das fehlerfreie Abschreiben und Collationiren immer sehr viel Zeit kostete *).

§. 10

Eintragung der Winkel ins Tagebuch.

Um alle Verirrungen zu vermeiden muß beim Winkelmessen und bei ihrem Eintragen ins Tagebuch eine gewisse Ordnung beobachtet werden.

Jeder

*) Bei der Regierungsveränderung des Großherzogthums wurde die Landesvermessung aufgehoben, und diese Tafeln

Jeder Winkel wird fünfmal nacheinander gemessen, und hieraus das Mittel genommen. Dann geht man zum folgenden über, und so der Reihe nach, bis man rund im Horizont herum ist. Dann fängt man wieder am ersten an, und wiederholt dieses Rundmessen drei oder viermal. Beim letzten Rundmessen mißt man bei jedem Winkel die Größe der Perpendikel zum Centriren. Dann stellt man den Sextanten senkrecht, und mißt alle Höhenwinkel. Diese werden auf ein besonderes Blatt hinter die Station geschrieben. Da jeder Winkel eine ganze Seite im Journal einnimmt, so nehmen alle Winkel einer Station gewöhnlich 6 bis 8 Oktavblätter ein. Auf dem letzten Blatt im Journal wird der tägliche Collimationsfehler des Sextanten bemerkt.

Folgendes ist ein Beispiel, wie die Winkel im Journal eingetragen werden.

Sta-

feln bleiben wahrscheinlich ungedruckt. Ich bemerke dieses hier, damit wenn irgend ein fleißiger Rechner Lust hätte, solche Tafeln durch den Druck bekannt zu machen, er sich hiedurch nicht abhalten lasse, ein für alle Geometer so nützliches Unternehmen auszuführen. Sobald man die kleinen Rechnungsvortheile, die hiebei vorkommen, gefunden, so lassen sich die Tafeln in drei oder vier Monaten berechnen. Auch würde eine solide Buchhandlung, wie z. B. die Schreinerische in Düsseldorf, den Verlag solcher Tafeln gerne übernehmen, weil sie von allen Geometern gebraucht werden, und nie der Veraltung unterworfen, sobald sie einmal genau berechnet sind.

Station. Cöllner Dohm=Thürmchen auf dem Chore.

1806. 12 Aug. Winkel zwischen dem Düsseldorfer Lamberti= und dem Bensberger Schloßthurm.

100°	57′	35″
		30
		35
		45
		40
Mittel 100	57	37
		45
		45
		50
		45
		35
Mittel 100	57	44
		45
		45
		45
		40
		50
Mittel 100	57	45

Mittel	100°	57′	37″
			44
			45
Mittel aus allen	100	57	42
Coll. Fehler ÷		3	18
Fehler der Theilung +			30
Centriren ÷			1
Reduciren ÷			2
Wahrer Winkel =	100	54	51

Perpendikel auf Düsseldorf 8 Zoll, wird abgezogen) ÷ 1″
= = auf Bensberg 0 Zoll)

Entfernung von Düsseldorf 106200 Fuß.

Höhenwinkel auf Düsseldorf ÷ 6′) ÷ 2″
= = = Bensberg + 24′)

§. 11.

§. 11.

Beschreibung des Spiegelkreises.

Mit dem Spiegelsextanten kann man einen Winkel auf 10 bis 15 Sekunden genau messen. Oft trifft es sich auch, daß mehrere Messungen bis auf ein paar Sekunden übereinstimmen. Allein dieses ist zufällig, und man muß sich durch ein solches zufälliges Uebereinstimmen nicht verleiten lassen zu glauben, daß der Winkel nun wirklich bis auf 2 Sekunden genau wäre. Noch mehr würde man sich irren, wenn man sich durch eine solche imaginäre Genauigkeit verleiten lassen wollte, zu glauben, daß man alle Winkel mit dem Sextanten bis auf ein paar Sekunden, genau messen könne. Es muß schon ein guter Sextant seyn und ein sehr sorgfältiger Trigonometer, wenn man die Winkel im Durchschnitt bis auf 15 Sekunden sicher annehmen will. Die früheren Winkelmessungen, bei denen man nicht einmal den Fehler der Eintheilung untersucht hatte, enthalten Fehler von halben und ganzen Minuten, obschon man sie bis auf 5″ genau hielt.

Soll man die Winkel genauer messen, und ist ihre Fehlergrenze statt von 10 bis 15 Sek. auf 5 bis 10 bestimmt, so wird die Sache viel schwieriger, da die Schwierigkeit in einem steigenden Verhältnisse mit der Enge der Fehlergrenzen wachsen; und einen Winkel bis auf 5 Sek. genau zu messen, ist nicht doppelt, sondern viermal so schwierig, als ihn bis auf 10 Sek. genau zu messen.

Zu den Fehlern, die der Beobachter nun vorzüglich zu bekämpfen hat, gehören die der Eintheilung und die der Excentricität, und diese bis auf 5 Sek. auf dem

Rande eines Instruments aufzusuchen, das nur 7 Zoll Radius hat, ist eine sehr schwere Aufgabe.

Man würde auf diese Genauigkeit Verzicht leisten müssen, wenn nicht Tobias Meyer die Erfindung gemacht hätte, die Winkel mit Wiederholung zu messen, wodurch er den Beobachter in den Stand setzte, selbst mit einem fehlerhaft getheilten Instrumente, die Winkel eben so genau zu messen, als wenn die Theilung fehlerfrei wäre. Dieses war eine der wichtigsten Erfindungen für die praktische Geometrie, welche im vorigen Jahrhundert gemacht wurde; und ich will deswegen hier die Geschichte derselben kürzlich erzählen, weil hiedurch die Einrichtung des Spiegelkreises und die Art mit ihm zu beobachten desto deutlicher werden wird.

Tobias Meyer hatte das auf Taf. VI. Fig. 1 abgebildete Winkelinstrument in seinem mathematischen Atlas bekannt gemacht. Dieses war 1741.

Im Jahr 1752 machte er das in Fig. 2 u. 3 abgebildete Instrument bekannt, welches statt der Dioptern ein Fernrohr hatte. Mit diesem maß er die Winkel auf folgende Weise:

Das untere Lineal sitzt an der Hülse fest, und mit ihm dreht sich das ganze Instrument, wenn solches mit der Preßschraube in P nicht festgestellt wird. Das obere hingegen dreht sich mit dem Fernrohre im Kreise herum, ohne daß sich das Instrument bewegt. Wollte er nun einen Winkel zwischen den Gegenständen A und B messen, so stellte er das Instrument fest, und drehte das Fernrohr auf A. Er maß dann die Oeffnung beider Lineale, die z. B. 15° Grad betrug. Dann drehte er das Fernrohr auf B und maß wieder die Oeffnung beider

Lineale,

Lineale, die jetzt z. B. 65° war. Hievon die erste 15° abgezogen, (wenn nämlich das untere Lineal außerhalb dem Winkel gestanden,) gab die Größe des Winkels zu 50°.

Der Winkel war nun einmal gemessen. Er lößte dann die Preßschraube P und drehte das Instrument zurück, bis das Fernrohr wieder auf A stand. Dann wurde das Instrument wieder festgestellt, und nun drehte er das Fernrohr allein auf B. Der Winkel war nun zweimal gemessen, und auf der Gradenskaale fand er seine Größe zu 115°. Hievon die erste 15° abgezogen, gab den doppelten Winkel zu 100 Grad.

Auf diese Weise konnte er nun fortfahren den Winkel 3, 4, 5 .... mal zu messen; und er fand ihn immer um so genauer, je öfter er gemessen wurde, und die Fehler des Instruments wurden immer um so kleiner.

Meyer nannte dieses: Artificium Multiplicationis, oder die Kunst, die Winkel mit Wiederholungen zu messen. Dieser große Meßkünstler beschäftigte sich damals mit der Verfertigung neuer Mondtafeln, welche nachher von der Commission für die Meereslänge in London den Preis erhielten. Die Aufgabe hiebei ist die: den Abstand des Mondes von einem Stern sehr genau zu messen, und dann in den Tafeln nachzusehen, um wie viel Uhr der Mond in London denselben Abstand habe. Wenn z. B. der Schiffer den Abstand des Mondes am Sirius mißt, und findet, daß der des Abends um 10 Uhr 36 Grad ist; und er sieht in den Tafeln nach, daß dieser Abstand in London, um 9 Uhr, auch 36 Grad ist; so weiß er dann, daß wenn seine Uhr 10 zeigt, die in London erst 9 zeigt; und daß er also 15 Grad östlich von

London

London ist. Dieses ist die berühmte Aufgabe für die Meereslänge. —

Meyer hatte mit Hülfe seiner genauen Mondbeobachtungen solche Tafeln berechnet. Allein nun fehlte es an einem Instrumente mit dem man die Winkel auf der See, so genau messen konnte, als hiezu erforderlich war. Der Hadleysche Spiegelsextant war damals ungefähr 20 Jahre bekannt, allein er war noch sehr unvollkommen. Man konnte mit ihm die Winkel nicht genauer als bis auf 2 oder 3 Minuten messen. Dieses ist hinreichend für die Polhöhe, weil wenn der Schiffer seine Polhöhe bis auf 3 Minuten oder $\frac{1}{20}$ Grad kennt, so weiß er bis auf eine deutsche Meile, wo er, in Hinsicht seiner geographischen Breite, ist; allein dieses ist nicht der Fall mit der geographischen Länge; denn ein Fehler von 2 Minuten in der gemessenen Monddistanz, macht die Länge schon um einen ganzen Grad fehlerhaft. Meyer kannte den Spiegelsextanten nur aus Beschreibungen — er selber hatte nie Gelegenheit gehabt einen zu sehen. Er wandte nun auf dieses Instrument sein Artificium Multiplicationis an, und erfand den Spiegelkreis, welcher von ihm den Namen hat, und der Taf. VI. Fig. 4. abgebildet ist. Man sieht aus der Abbildung, daß zwei Alhidaden darauf sind, die des großen Spiegels, und die des kleinen, auf welcher zugleich das Fernrohr sitzt. Beide drehen sich um den Mittelpunkt des Kreises, und man kann jede besonders herumdrehen, ohne die andere zu bewegen.

Das Winkelmessen geschieht mit diesem Instrumente auf folgende Weise:

1) Man stellt die Alhidade des großen Spiegels auf Null der Theilung.

2) Man dreht die des kleinen Spiegels so lange herum, bis beide Bilder des Gegenstandes L einander decken. Alsdann sind beide Spiegel auf dieselbe Weise parallel, als beim Sextanten.

3) Man dreht den großen Spiegel links herum, bis der Gegenstand S im Felde des Fernrohrs durch doppelte Reflektion erscheint, und den anderen L deckt. Der Winkel, der z. B. 50° hat, wird abgelesen, und ist dann einmal gemessen, auf dieselbe Weise, als wenn er mit dem Sextanten wäre gemessen worden.

4) Man dreht nun das Fernrohr mit dem kleinen Spiegel ebenfalls links, bis es auf den Gegenstand S ist. Beide Spiegel sind dann wieder parallel.

5) Man dreht das ganze Instrument herum, so daß das Fernrohr wieder auf den ersten Gegenstand zu stehen kommt.

6) Man dreht den großen Spiegel bis er wieder auf dem Gegenstand S steht, und der Winkel ist zweimal gemessen. Beim Ablesen findet man den doppelten Winkel = 100°.

Man sieht leicht, daß man auf diese Weise die Winkel 3, 4, 5 .... mal messen kann, bis man über den ganzen Kreis des Instruments ist, wo sich dann am Ende die Fehler der Eintheilung und der Excentricität gegen einander aufheben; denn was an einer Seite die Grade zu klein sind, das sind sie an der andern zu groß, da alle zusammen immer wieder 360 machen müssen.

Meyer schickte seine Mondtafeln nach England nebst einer Abbildung und einem Modell von Spiegelkreise.

Indeß

Indeß erlebte er den Erfolg seiner Erfindung nicht. Er starb den 20. Febr. 1762, als er kaum 39 Jahr alt war. Er war geboren den 17. Febr. 1723.

Im Jahr 1770 machte das Büreau für die Meereslänge seine Tafeln und die Abbildung seines Spiegelkreises bekannt. In diesen lernte ihn der verstorbene Ritter von Borda kennen, der im Jahr 1772 eine Reise mit der Fregatte Flora in der Absicht machte, mehrere Methoden die Länge zur See zu bestimmen, zu prüfen.

Dieser ließ 1775 den ersten Spiegelkreis in Paris machen, an welchem er folgende Veränderung anbrachte: Statt daß an dem Meyerschen Kreise der kleine Spiegel und das Fernrohr so nahe beisammen stehen, daß keine Strahlen auf den großen Spiegel fallen können, die links einfallen, so rückte er das Fernrohr etwas zurück, und setzte zugleich den kleinen Spiegel unten nahe an den Rand, so daß die Strahlen, die links einfallen, eben so gut auf den großen einfallen können, als die, welche von der rechten Seite kommen. Wenn also beide Spiegel parallel sind, so kann der Beobachter auch das Fernrohr (Fig. 4.) nach S drehen, und dann auf den Gegenstand L rückwärts messen, so wie man dieses bei den Sextanten bei kleinen Winkeln thut. Diese Einrichtung hat den Vortheil, daß man auch rückwärts multipliciren kann, welches man dann thut, wenn die Sonne links und der Mond rechts steht, weil man das Fernrohr gerne nach dem Gegenstande richtet, der das schwächste Licht hat, damit der andere, der das stärkere hat, zweimal reflektirt werde.

Durch diese Einrichtung von Borda wurde es auch

möglich

möglich den doppelten Winkel zu messen, ohne daß man die Spiegel parallel stellte.

1) Man richtet das Fernrohr, nachdem es festgestellt worden, auf den Gegenstand rechts auf S, indem man das ganze Instrument im Kreise herumdreht.

2) Man stellt denn das Instrument fest, und läßt den Gegenstand L links im großen Spiegel reflektiren, bis beide sich decken. Man liest dann die Alhidade des großen Spiegels ab, die z. B. auf 20° steht.

3) Dann dreht man den ganzen Kreis herum, bis das Fernrohr auf den Gegenstand L kommt, und stellt ihn dann wieder fest.

4) Man dreht dann die Alhidade des großen Spiegels herum, bis diese auf S steht, liest den Winkel ab, der z. B. 120° ist. Hievon die 20° abgezogen, gibt für den doppelten Winkel 100°, und für den einfachen 50°.

Hiebei wird vorausgesetzt, daß die beiden Gegenstände, auf die man mißt, gleich hell sind, wie dieses bei irdischen Gegenständen häufig der Fall ist, und ich habe mich dieser Methode selbst beim Sextanten bei der Messung kleiner Winkel oft mit Vortheil bedient, wie wir dieses eben bei der Bestimmung des Collimationsfehlers hatten.

Will man auf diese Weise multipliciren, ohne den Spiegel parallel zu stellen, so verfährt man hiebei auf folgende Weise.

5) Nachdem man den Winkel doppelt gemessen hat, so steht das Fernrohr auf L, und der große Spiegel dann 50° auf S. Man dreht nun den Kreis 50° links herum, so daß das Fernrohr 50° außerhalb dem Winkel kommt. Der große Spiegel geht dann von S auf L,

und

und man sieht im Fernrohr blos den doppelt reflektirten Strahl von L.

6) Man stellt dann den Kreis fest, löst die Alhidade des Fernrohrs, und dreht das Fernrohr 100 Grad rechts, so daß es wieder auf S kommt.

7) Ist dieses geschehen, so dreht man den Kreis wieder 50° zurück. Das Fernrohr kommt dann wieder auf den Gegenstand links auf L, und der große Spiegel steht 50° außerhalb dem Winkel.

8) Man löst dann die Alhidade des großen Spiegels, welche von der vorigen Messung noch auf 120° stand, läßt sie 100° durchlaufen, und sie kommt auf den Gegenstand rechts auf S. Hier stellt man sie fest und liest ab. Sie steht dann auf 220 Grad. Hievon die ersten 20° abgezogen, bleibt für den vierfach gemessenen Winkel 200 Grad.

Indem man also die Bilder viermal zur Berührung gebracht, hat man auch den Winkel viermal gemessen. Nach Meyers Methode hat man ebenfalls den vierfachen Winkel, wenn man die Bilder viermal zur Berührung bringt, nur muß man zwischendurch auch noch die Spiegel viermal parallel machen. Um dieses zu vermeiden, schlug Meyer vor, an die Alhidade des großen Spiegels ein krummes Aermchen zu machen, an das sich die Alhidade des Fernrohrs anlegte, wenn die Spiegel parallel wären. Diese Einrichtung hat man bis jetzt noch an keinem Spiegelkreise angebracht, obschon sie sehr bequem seyn würde, wenn ein Gegenstand viel und der andere wenig Licht hat, weil man dann den schwach erleuchteten immer im Fernrohr behalten kann, ohne den Kreis umzukehren.

Man kann nemlich nach der Bordaischen Methode des Multiplicirens auch den schwach erleuchteten Gegenstand immer im Fernrohr behalten, aber dann muß man aus freier Hand messen, und bei der zweiten Messung den Kreis umwenden, so daß Spiegel und Fernrohr nach unten zu liegen kommen. Allein dieses ist unbequem und ermüdet den Beobachter, weil er den Arm dann umwenden muß. Um dieses zu vermeiden, hat man den Spiegelkreisen, welche auf der See gebraucht werden, Bügel angebracht, die rundherum gehen, und an denen die zwei Handhaben so befestigt sind, daß man den Kreis recht und auch umgekehrt halten kann, ohne den Arm zu wenden. Allein diese haben auch wieder ihre Unbequemlichkeiten.

Meyer bemerkt in seiner Beschreibung des Kreises, nachdem er die Idee mit dem krummen Aermchen für den Parallelismus der Spiegel angeführt hat, daß sich noch mehrere Verbesserungen am Kreise anbringen lassen, auf welche man mit der Zeit bei dem Gebrauche desselben schon von selber kommen würde. — Ich will die jetzt anführen, welche man in den ersten 50 Jahren nach des Erfinders Tode angebracht hat.

Die erste Verbesserung war die von Borda. Auf diese wäre Meyer vielleicht schon gekommen, wenn er die Sextanten so gut gekannt hätte wie Borda, und gewußt, daß man mit diesen kleine Winkel rückwärts und vorwärts messen könnte.

Die zweite Verbesserung brachte der englische Künstler Troughton am Kreise an, indem er ihm die fliegenden Verniers gab. Er machte nemlich an die Alhidade des Fernrohrs einen kleinen Kreis von 6 Zoll Durchmesser,

(Fig.

(Fig. 2. Taf. VIII.) der sich mit ihr um den Mittelpunkt des Kreises dreht. Auf diesem kleinen Kreise sind zwei Verniers, die sich auf ihm verschieben, und durch Federung fest gehen. Beim Anfange der Beobachtung, wenn das Fernrohr nach S steht, schiebt man beide Verniere an die Alhidade des großen Spiegels. Dreht man nun den großen Spiegel um 50° zurück, so daß er L reflektirt, so schiebt er den vordern fliegenden Vernier um 50° zurück, und läßt ihn da stehen.

Bei der zweiten Messung, wo das Fernrohr auf L steht, und der große Spiegel 50 Grad außerhalb dem Winkel, muß dieser 100° durchlaufen, um auf S zu kommen. Er schiebt, indem er zurückgeht, den hinter ihm liegenden fliegenden Vernier ebenfalls um 50 Grad zurück, und läßt ihn stehen. Beide Verniere sind nun genau um das Doppelte des Winkels, oder um 100° von einander entfernt, und der Beobachter hat bei den folgenden Messungen die Alhidade nur so zu drehen, daß sie sich an einen der Verniere anlegt. Die Bilder sind dann im Fernrohre beisammen und berühren sich.

Durch diese Einrichtung mit den fliegenden Verniers wird das Messen mit dem Spiegelkreis außerordentlich erleichtert, besonders wenn aus freier Hand gemessen wird, wie dieses auf der See immer geschieht.

Wenn bei einem Spiegelinstrumente die beiden Bilder sich berühren sollen, so muß:

1) Die Ebene des Instruments genau in der Ebene des zu messenden Winkels seyn.

2) Das Fernrohr muß nach dem einen Gegenstande gerichtet seyn.

3) Die Spiegel müssen einen Winkel miteinander machen, der genau die Hälfte des zu messenden ist.

Sieht man nun im Fernrohr den einen Gegenstand, und den andern nicht, so kann dieses daher kommen, daß die Spiegel nicht den gehörigen Winkel miteinander machen. Es kann aber auch daher rühren, daß das Instrument nicht in der Ebene des zu messenden Winkels ist. In dieser Ungewißheit ändert der Beobachter bald die Neigung der Ebene, bald die Größe des Winkels, und da er oft die eine ändert, wenn er die andere ändern sollte, so verliert er viele Zeit mit Suchen.

Sind aber fliegende Verniere auf dem Kreise, so hat er nur bei den beiden ersten Beobachtungen dieses Suchen, bei den folgenden lehnen sich die Alhidaden an den Vernier, er weiß, daß beide Spiegel den gehörigen Winkel haben, und daß, wenn er beide Bilder nicht im Felde hat, dieses daher rührt, daß die Ebene des Kreises nicht in der Ebene des Winkels liegt, und er hat also diese nur zu drehen, um beide Bilder zusammen zu haben. Für die Beobachtungen zur See war die Troughtonsche Verbesserung des Kreises vielleicht noch wichtiger als die Bordasche. Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß es bequemer ist mit einem Meyerschen Kreise zu beobachten, der fliegende Verniers hat, als mit einem Bordaschen der keine hat. Selbst bei den Beobachtungen auf dem festen Lande, wo man alle Winkel vom Statife mißt, sind die fliegenden Verniere recht angenehm. Obschon hier die Einrichtung des Statifs es schon mit sich bringt, daß der Kreis sich immer in der Ebene des Winkels dreht, wenn er einmal drinn ist, und diese Ebene sich nicht ändert, wie es bei himmlischen Gegenständen wegen

der

der Bewegung der Erde der Fall ist. — Das Wiederholen geht dann sehr schnell, weil man die Alhidaden nur so weit herumzudrehen hat, bis sie einen von den fliegenden Vernieren berühren. Ich habe öfter die Erfahrung gemacht, daß wenn man etwas vorsichtig im Messen ist, die fliegenden Verniere so genau ihre Lage auf dem Kreise während des Messens behalten, daß die Bilder beim Anlehnen der Alhidaden sich so scharf berühren, daß man die Schraube für die feine Bewegung fast gar nicht gebraucht.

Die dritte Verbesserung des Wiederholungskreises bestand in den trompetenförmigen Fernröhren, welche große Objektivgläser haben. Der Kreis von Borda hatte ein Fernrohr von nur 4 Zoll Länge, $3\frac{1}{2}$ Linie Oeffnung, und viermalige Vergrößerung. Spiegel-Instrumente bedürfen aber vorzüglich gute Fernröhre, weil von 100 Lichtstrahlen, die auf den großen Spiegel fallen, nur 66 auf den kleinen kommen, und von diesen nur 44 auf das Objektiv des Fernrohrs, da bei jedem Zurückwerfen $\frac{1}{3}$ der Strahlen verloren geht. Da man nun im Fernrohre zugleich zwei Bilder mit gleicher Deutlichkeit sehen muß, das Direkte und das Reflektirte, so muß der kleine Spiegel zu $\frac{2}{3}$ belegt seyn. Daher leistet ein Fernrohr von 14 Linien Oeffnung auf einem Spiegelinstrumente nicht mehr als ein anderes von 8 Linien auf einem dioptrischen Instrumente. — Der Kreis auf Taf. VIII. hat ein trompetenförmiges Fernrohr von 14 Linien Oeffnung, welches 8- 15- und 20mal vergrößert.

Die vierte Verbesserung des Spiegelkreises bestand darin, daß man den Schrauben für die feine Bewegung Federn und Ketten gab. Der Kreis bedarf dieser noch

mehr

mehr als der Sextant, weil er während dem Beobachten immer angefaßt wird. Hingegen beim Messen des Sextanten läßt man diesen unberührt, sobald wie der Winkel gemessen ist, bis man ihn auch abgelesen hat. — Wenn die Schrauben ein wenig festen Gang haben, so können sich die Alhidaden immer etwas während des Messens verschieben. Haben sie Federn und Ketten, so können sie es nicht, und es ist sehr angenehm, wenn man beim Beobachten sieht wie sich die Spiegel gleich drehen, sobald man die Schrauben nur ein wenig bewegt. Haben sie keine, so kann man diese immer ein wenig herumdrehen, ehe die Spiegel anfangen sich zu bewegen, welches von dem Spielraum herrührt, den die Schraube in der Mutter hat.

Die fünfte Verbesserung des Spiegelkreises bestand in der Wasserwage auf dem Fernrohr, ohne welche man die kleinen Höhenwinkel nicht messen konnte, welche man bei dem Reduciren auf den Horizont gebraucht. Ohne diese war das Instrument von einem sehr eingeschränkten Gebrauche bei großen Dreieckmessungen. Ihre Einrichtung ist gerade wie die beim Sextanten.

In dem Fig. 2. abgebildeten Spiegelkreis ist:

a der große Spiegel, b der kleine.

c und d die Einfassungen für die Blendgläser.

v die fliegenden Verniere.

w die Wasserwage mit ihrem Spiegel.

m m die beiden Mikrometerschrauben für die feine Bewegung. Die Uhrfeder und Kette liegen im Messing, und sind in der Zeichnung nicht zu sehen.

k ist eine Kapsel, welche beim Transport des Kreises auf den trompetenförmigen Theil des Fernrohrs ge-

schraubt

schraubt wird, damit dieser nicht schlottere. Beim Beobachten wird sie abgeschraubt, damit man das Fernrohr hoch und tief stellen kann, so wie beim Sextanten.

Neben dem Kreise ist das Statif desselben abgebildet. Von der guten Einrichtung desselben hängt größtentheils die Bequemlichkeit im Beobachten ab. Dieses ist ein Nußstatif, bei dem die Nuß durch einen Korkstöpffel festgestellt wird, der sich durch Herumdrehen der Hülse a im Innern desselben in die Höhe schraubt.

Die Preßhülse b wird beim Gebrauche an den Hals cd geschraubt, mit Hülfe des kleinen Schräubchen d. Ist nun der Kreis auf den Zapfen z geschraubt, so kann man ihn noch immer herumdrehen, auch wenn die Nuß feststeht. Nemlich die feine Linie cd zeigt an, daß der Hals aus zwei Theilen zusammengesetzt ist. Zieht man dann aber die Hülse b mit der Schraube S zusammen, so faßt diese den obern Theil des Halses, und dieser sitzt dann am unteren Theile fest, und man kann den Kreis nicht mehr drehen.

Das Beobachten von diesem Statife ist sehr angenehm. Nachdem man den Kreis aufgeschraubt hat, bringt man seine Fläche in die Ebene des messenden Winkels mit Hülfe der Nuß. Ist dieses geschehen, so stellt man sie fest. Fehlt noch ein wenig, so hilft man diesem durch die feine Bewegung der Fußschrauben. Dann kann man anfangen zu messen, indem man die Winkel auf die Weise wiederholt, wie oben gelehrt worden. So oft der Kreis feststehen muß, zieht man die Preßschraube S an. Soll er sich bewegen, so läßt man sie los, und der Kreis dreht sich um die Linie cd, die in der Ebene des zu messenden Winkels liegt, und der Kreis bleibt daher immer in dieser Ebene. Das Wiederholen geht dann beinahe von selber, da die fliegenden Verniers zugleich die Winkel angeben, um den man die Alhidade drehen muß.

Der hier abgebildete Kreis ist vom Hofmechanikus Baumann in Stuttgardt gemacht. Er hat 12 Zoll Durchmesser, — theilt den Quadranten in 100 Grad und kostet 32 Louisd'or.

§. 12.
Fehler des Spiegelkreises.

Der Spiegelkreis kann dieselbe Fehler haben wie der Sextant, und diese werden auf dieselbe Weise aufgesucht und corrigirt. Das Fernrohr muß der Ebene des Kreises parallel seyn, der große Spiegel muß senkrecht auf dieser Ebene stehen, und der kleine ebenfalls. Wie man dieses untersucht, ist oben beim Sextanten ausführlich gezeigt worden.

Beim Spiegelkreise kann man die senkrechte Lage des großen Spiegels auch noch auf folgende Weise untersuchen. Man läßt den Rand reflektiren, und das Reflektirte muß mit dem Nichtreflektirten einen fortgehenden Kreis machen, wenn er senkrecht steht.

Wir könnten hier theoretische Untersuchungen über den Einfluß anstellen, den es auf den gemessenen Winkel hat, wenn die Spiegel nicht senkrecht stehen. Allein da man diese Fehler des Instruments corrigiren kann, so würde dieses von keinem praktischen Nutzen seyn.

Das Sehen und das Messen muß in der Ebene des Winkels geschehen, also in der Mitte vom Felde, zwischen den beiden eingespannten Fäden. Der Abstand der Fä-

den

von der Achse ist bei mittlern Vergrößerungen gewöhnlich 30′. Fehlt man um ein Drittel dieser Größe, d. h. daß man die Berührung der Bilder statt in der Mitte des Feldes 10 Minuten von derselben macht, so hat dieses auf einen Winkel von 120 Grad, wo die Correktion am stärksten ist, nur einen Einfluß von 3 Sekunden.

Alle diese Untersuchungen gehören unter folgende Aufgabe:

„Die beiden Schenkel eines Winkels haben gegebene „Neigungen gegen eine gegebene Ebene; durch sie stehen „Ebenen senkrecht auf dieser Ebene, man sucht was diese „beiden Ebenen für einen Winkel mit einander machen.“ (Kästner.)

Es sind genau immer dieselben Rechnungen, die beim Reduciren der Winkel auf den Horizont vorkommen.

Dasselbe gilt bei der Untersuchung der Fehler, welche man bei dem Messen mit dem Meßtische begeht, wenn dieser nicht horizontal steht, und wenn die Kippregel sich nicht senkrecht um ihre Achse dreht. Auch dieses sind bloße Reduktionen eines Winkels von einer Ebene in die andere, die aber durchaus keinen praktischen Nutzen haben, weil ein Landmesser nicht auf einem schief stehenden Meßtische Winkel messen wird, und hiebei auch keine schiefe Kippregel gebrauchen. Die Fehler des Meßtisches und der Kippregel kann er eben so genau mechanisch untersuchen, als er auch mit diesem Instrumente genau messen kann. Ich bin deswegen dem Beispiele anderer

Schrift-

Schriftsteller nicht gefolgt, welche für alle diese Fälle besondere Formeln geben, weil es doch weiter nichts wie Reduktionsbeispiele sind, die jeder machen kann, der die Aufgabe gefaßt hat, und ein sphärisches Dreieck auflösen kann, wie das in Fig. 19. A Z B.

Allein wichtiger als dieses sind beim Spiegelkreise die Fehler der Eintheilung und die Fehler des Vernier. Es ist zwar wahr, daß man einen Winkel mit einem fehlerhaft getheilten Kreise durch beständiges Wiederholen am Ende genau messen kann, allein mit einem gut getheilten Kreise geht dieses doch schneller und sicherer.

Man fängt beim Spiegelkreise eben so wie bei dem Sextanten damit an, die Größe der Verniere zu untersuchen, indem man sie von 5 zu 5 Graden auf dem Rande herumführt und abliest. Hierüber macht man sich eine Tabelle, in der man auch sieht, auf welchen Stellen des Randes die Theilung am besten ist. Auf diesen Stellen fängt man immer an zu messen, unbekümmert, ob hier der Nullpunkt liegt oder nicht. Dann mißt man den Winkel so oft, daß man immer wieder sehr nahe auf der Stelle aufhört, wo man angefangen hat. Ist der Winkel von 73 Grad, so mißt man ihn fünfmal, diese machen 365°, (wenn der Kreis die alte Eintheilung hat) und man kommt dann nur 5° weiter als einmal rund. Die übrige Theilung mag nun seyn wie sie will, wenn nur diese 5° gut sind. — Die übrige Eintheilung könnte sogar fehlen, und man kann immer noch mit einem Kreise messen, auf dem nur ein Bogen von etwa 30° getheilt ist. Dadurch, daß man wieder auf der Stelle aufhört, wo man angefangen, werden die Fehler der Excentricität völlig aufgehoben. Das Verfahren einiger Beobachter, jeden Winkel immer mit einer runden Zahl zu wiederholen, z. B. 10 oder 20mal, ist fehlerhaft, weil man dadurch auf andere Stellen des Randes kommt, weil man daher sich auf die Genauigkeit eines größern Bogens der Theilung verlassen muß; und weil die Fehler der Excentricität sich hiedurch nicht aufheben.

§. 13.

Geschichte der Spiegelwerkzeuge.

Die Seefahrer bedienten sich bis in den Anfang des vorigen Jahrhunderts nur ganz grober Instrumente zur Bestimmung der Polhöhe, weil sie wegen der Bewegung des Schiffes keine Astrolabien oder andere dioptrische Instrumente gebrauchen konnten.

Ums Jahr 1731 machte Johann Hadley die Erfindung des Spiegelsextanten. Er war Vicepräsident der Londoner Königlichen Gesellschaft, welcher er im Mai desselben Jahrs ein Model des Sextanten vorlegte, welches von Holz war. Späterhin ließ er eins von Messing machen. — Hadley besaß große optische Kenntnisse, und diese führten ihn auf den §. 4. angeführten Satz, nach welchem der Winkel der Spiegel immer halb so groß ist, wie der Winkel des doppelt reflektirten Strahls. Er sah bald, daß man hierauf ein Winkel-Instrument gründen könne, und daß dieses sehr brauchbar seyn müsse, weil der direkte und der reflektirte Strahl beide in Ein und dasselbe Fernrohr kommen, an dessen Okular also der

Beob=

Beobachter immer mit dem Auge sehen kann, ohne genöthigt zu seyn, es nach einem zweiten Fernrohre zu richten, wie dieses bei allen dioptrischen Winkel-Instrumenten der Fall ist. Er sah ein, daß ein solches Instrument auch auf der See könne gebraucht werden, weil der Beobachter nur das Instrument in der Ebene des Winkels zu halten brauche, und das Fernrohr nach einem der beiden Gegenstände gerichtet, wo dann das Bild des andern durch Reflexion im Felde des Fernrohrs erscheine. Hadley ließ nachher einen solchen Sextanten von Kupfer machen, und die Erfahrung zeigte, daß man zur See das Instrument zwar nicht genau in der Ebene des zu messenden Winkels halten könne, daß aber der Beobachter durch die Bewegung seines Körpers die Bewegung des Schiffes so balanciren könne, daß es immer nahe bei dieser Ebene bleibe, und beim Durchgehen durch diese Ebene könne er sehen, ob die beiden Bilder sich berühren.

Nach Hadleys Tode fand man (im Jahr 1742) unter seinen Papieren eine Handschrift von Neuton, welche eine Zeichnung und eine Beschreibung von einem Instrument erhielt, das nicht sehr von Hadleys Sextant verschieden war. Neuton scheint also der erste Erfinder davon zu seyn, und Hadley scheint es nachher aufs neue erfunden zu haben, ohne daß er Neutons Idee kannte, welche ihm vielleicht später mitgetheilt wurde, da er ihrer nicht in seiner Abhandlung erwähnt, die er über dieses Instrument der Königlichen Societät überreichte. Der berühmte Name Neutons würde sonst die beste Empfehlung für dieses neue Instrument gewesen seyn.

Die

Die Seefahrer gehen schwer von ihren alten Gewohnheiten ab, und der Sextant wurde in den ersten 30 Jahren nur sehr wenig von ihnen gebraucht, ungeachtet er viel genauer war als ihr Jakobsstab, mit dem sie ihre Polhöhe bestimmten. Der Sextant war damals auch noch sehr unvollkommen, die Eintheilung war nicht fein, die Fernröhre schlecht, und La Caille konnte mit einem Sextanten einen Mondabstand nicht genauer als 5 Minuten messen.

Im Jahr 1763 brachte Ramsden seine Theilmaschiene zu Stande, und von diesem Zeitpunkte an wurden die Sextanten immer besser und vollkommner. Im Jahr 1773 machte er noch eine bessere Theilmaschiene, die ihm die Commission für die Meereslänge für 315 Pfund Sterling mit der Bedingung abkaufte, daß er alle Sextanten für die Flotte sehr wohlfeil theilen mußte, — zugleich gab sie ihm 300 Pf. Sterl. Belohnung.

In Deutschland machte Brander in Augsburg einige Veränderungen an den Sextanten, um auch Höhenwinkel mit ihnen auf dieselbe Weise, wie mit dioptrischen Instrumenten messen zu können. Hiedurch gingen aber die wesentliche Vorzüge des Instruments verloren, und der Sextant wurde in Deutschland fast gar nicht gebraucht. In den Jahren 1783 und folg. kamen Graf Brühl und Herr von Zach aus England nach Deutschland, und diese haben am meisten zur Verbreitung dieses nützlichen Instruments beigetragen, so wie auch Prof. Bohnenberger durch seine ausführliche Beschreibung desselben.

Alle Seefahrer gebrauchen jetzt den Sextanten allein, gewöhnlich haben sie hölzerne von 18 Zoll Radius, die

statt

statt des Fernrohrs eine Diopter haben, und eine Eintheilung in Viertel Grade auf Elfenbein. Sie gebrauchen diese nur zu ihren Breitenbestimmungen, indem sie ihre Längenbestimmungen durch Schätzung des zurückgelegten Weges nach ihrem Schiffsjournal machen. Die besser unterrichtete Seefahrer, und zu diesen gehören vorzüglich die Ostindienfahrer, bestimmen aber ihre Länge entweder mit Seeuhren oder mit Mondabständen, und zu beiden gebrauchen sie solche Sextanten, wie der auf Taf. VIII. abgebildete.

Die ganzen Kreise werden noch wenig gebraucht, weil sie nicht so leicht und so bequem sind wie die Sextanten, und weil sich auf der See ein Winkel ohnehin nicht wohl genauer als auf 20 Sekunden messen läßt. Diese Genauigkeit kann man mit einem guten 10 zolligen Sextanten leicht erreichen, wenn man eine Tabelle über die Fehler seiner Eintheilung hat. Ein Fehler von 20 Sekunden in einer Monddistanz macht die Länge nur um $\frac{1}{4}$ Grad unrichtig, und der Schiffer ist immer zufrieden, wenn er seine Länge bis auf $\frac{1}{3}$ Grad kennt, weil er von der Spitze des Mastes immer weiter als $\frac{1}{3}$ Grad sehen kann, ob Land oder Felsen in der See sind.

Vielleicht würden die Kreise mehr gebraucht, wenn man an ihnen das kupferne Aermchen angebracht hätte, welches Meyer zum Parallelstellen der Spiegel vorgeschlagen, denn das Parallelmachen nach der jetzigen Meyerschen Methode ist eben so unbequem, als das Multipliciren mit Kreuzbeobachtungen nach der Bordaschen, weil man schnell hintereinander messen muß, da alle Winkel, die man auf der See mißt, wegen der Bewegung der Erde und des Mondes sich beständig ändern.

Bei

Bei großen Dreieckmessungen sind die Spiegelkreise sehr bequem, sobald die vorgeschriebene Genauigkeit in den Winkeln zwischen 5 und 10 Sekunden seyn soll. Soll aber die Genauigkeit noch größer seyn, etwa 1 oder 2 Sekunden, wie bei Gradmessungen, dann muß man dioptrische Wiederholungskreise gebrauchen, weil auf den Spiegel-Instrumenten die Fernröhre immer zu schwach sind, um entfernte Gegenstände mit der hiezu erfoderlichen Schärfe sehen zu können. Von diesen werde ich im folgenden Theile dieses Werks handeln, welcher sich mit den eigentlichen geographischen Messungen beschäftigt. — Ich werde da auch von den künstlichen Horizonten handeln, welche man gebraucht, wenn große Höhenwinkel sehr genau sollen gemessen werden, wie z. B. Sonnen- oder Sternhöhen zur Bestimmung der Zeit oder der geographischen Breite. Doch dieses gehört schon ins Gebiet der Astronomie. Der Trigonometer hat nur dann große Höhenwinkel zu messen, wenn er den beständigen Fehler seiner Wasserwage bestimmt. Er gießt dann auf einen flachen schwarzen Teller so viel Wasser, daß der Gegenstand sich darin spiegelt, und mißt mit dem Sextanten oder dem Kreise den Winkel zwischen dem Bilde im Wasser und dem in der Luft, indem er nach jenem das Fernrohr richtet, und dieses in den Spiegel nimmt. Der halbe Winkel ist die Höhe des gemessenen Gegenstandes über dem Horizonte, weil (nach Fig. 8.) der Winkel, den der ausfallende Strahl macht, eben so groß ist, als den der einfallende macht. — Nimmt man statt Wasser Quecksilber, so gibt der Gegenstand ein deutliches Bild.

Dritter Abschnitt.

Im ersten Theile dieses Werks wurde gezeigt, wie der Feldmesser einzelne Grundstücke mit dem Winkelkreuz und den Ruthen aufnimmt.

Im zweiten Theile lehrten wir, wie der Geometer eine ganze Feldmark mit dem Meßtisch und der Magnetnadel aufmißt.

Jetzt wollen wir im dritten zeigen, wie der Trigonometer ein ganzes Land mit dem Spiegelsextanten aufnimmt.

§. 1.

Jede große Vermessung, wenn sie genau seyn soll, muß auf einem Dreiecknetz beruhen, welches über das ganze Land gezogen ist, und durch das die Lage und Entfernung der Hauptpunkte bestimmt wird. Man mißt eine große Standlinie von ein paar Stunden Länge mit aller Genauigkeit, und beobachtet die Winkel, welche der nächste Dreieckpunkt mit der Standlinie macht. Dasselbe wiederholt man am zweiten, dritten, vierten Punkte, und indem man auf diese Weise immer fortgeht,

geht, so überzieht man das Land mit 30, 40 oder mehreren Dreiecken, bis man endlich an der entgegengesetzten Seite die Versicherungs-Standlinie mißt, die zugleich die Seite eines Dreiecks ist. Die Uebereinstimmung, welche zwischen der Rechnung und der unmittelbaren Messung statt findet, zeigt dann, welche Genauigkeit man in diesen Dreiecken des ersten Rangs erreicht hat.

Die Dreieckseiten des ersten Rangs bilden eben so viele Standlinien für die Dreiecke des zweiten Rangs. Diese sind kleiner, und die Genauigkeit, welche in ihnen erreicht wird, ist geringer. Ihre Seiten bilden die Standlinien für die Dreiecke des dritten Rangs, welche den Geometern die feste Punkte für ihre Meßtische geben. In der Bergischen Landesvermessung wurden die Standlinien in der Rheinebene gemessen. Die eine war zwei und die andere drei Stunden lang. Die Genauigkeit, welche bei der Messung der Standlinien festgesetzt war, war die: daß auf 10000 Fuß nicht 1 Fuß durfte gefehlt werden.

§. 2.

Messung der Standlinie.

Ehe man die Standlinie mißt, muß die Genauigkeit bestimmt werden, mit welcher dieses geschehen soll, und deren Grad von dem Zweck der Vermessung abhängt. Wenn die Größe eines Landes soll gemessen werden, so erfodert dieses eine größere Genauigkeit, als wenn man die Größe einer Gemeine mißt.

Bei der Bergischen Landesvermessung verfuhren wir,

 um

um die gegebene Fehlergrenze von $\frac{1}{10000}$ zu erreichen, auf folgende Weise.

Nachdem die Gegend, in welcher die Standlinie sollte abgesteckt werden, nach mehreren Richtungen durchgangen war, so wurde die für die beste gehalten, welche zwischen den Thürmen von Bergheim und Merheim lag. Diese Orte sind vier Stunden von einander entfernt. Von dieser Standlinie konnten aber nur drei Stunden mit Bequemlichkeit gemessen werden, weil sie gegen das Ende durch ein Wasser ging.

Zuerst wurde sie mit drei Signalstangen, welche eine Stunde von einander standen, auf folgende Weise im Großen abgesteckt. Im Bergheimer Thurme war ein Trigonometer mit einem achromatischen Fernrohre. Ein zweiter war mit der 30 Fuß langen Signalstange auf dem Feld. Dieser hatte auch ein achromatisches Fernrohr, und beobachtete die Zeichen, welche ihm der Trigonometer im Thurme mit einer weißen Flagge geben ließ. Sobald die Signalstange die andere Thurmspitze deckte, wurde die Flagge eingezogen. Es ist schwer eine lange Linie völlig gerade abzustecken. Man kann es nur, wenn die Endpunkte gegeben sind, und man zwischen diese zwei oder drei Signale auf die angeführte Weise aufstellt. Zwischen diese wurden dann nachher große Pikets von 15 Fuß, und zwischen diese die kleine von 8 Fuß eingestellt, welche, so wie die Messung fortschritt, immer wieder ausgezogen wurden. — Gute Fernröhre sind beim Abstecken einer Standlinie durchaus nothwendig, weil man mit bloßen Augen nicht scharf genug in die Ferne sieht. Ich sah einmal, daß zwölf Feldmesser sich einen halben Tag vergeblich bemühten, um eine Signalstange in die

Rich-

Richtung zu bringen. Sie hatten kein Fernrohr, womit sie die Flagge im Thurme beobachten konnten, und hatten sich deßwegen von 1000 zu 1000 Fuß aufgestellt, um die Zeichen fortzupflanzen. Allein in dieser telegraphischen Linie war bald hier bald dort Unordnung, und die Zeichen kamen nicht bis ans Ende. Als ich ihnen nachher ein Taschenfernrohr schickte, so sahen sie die Fahne vom Ende der Linie, und die Signalstange stand in zehn Minuten.

Es ist kaum glaublich, welche Vortheile uns die achromatischen Taschenfernröhre bei diesen langen Linien gewährten. Indem sie unser Auge ums Zehnfache verstärken, bringen sie zugleich eine zehnfach größere Schnelligkeit in die Operationen, — ohne daß sie zugleich die Hindernisse vermehren, welche immer eintreten, wenn die Schnelligkeit durch die Anstellung einer größern Anzahl Menschen soll erhalten werden. Dieses ist die vortheilhafteste Vermehrung der Kräfte, wo mit der größern Kraft nicht auch der Widerstand, und mit der größern Geschwindigkeit nicht auch die Friktion wächst, wie dieses immer der Fall ist, wenn man, um sie zu erhalten, mehr Menschen und mehr Räder in der Maschiene gebraucht.

Kann man die Standlinie so wählen, daß ihre Endpunkte zwei Thurmspitzen sind, so ist dieses vortheilhaft. Man hat dann zwei natürliche Signale, die man auf große Entfernungen sieht, und die zugleich Dreieckpunkte sind. Auch kann man sich leicht beim ersten Besehen der Standlinie zwischen zwei Thurmspitzen in die Linie einstellen, wenn man nemlich ein Hinderniß, als z. B. ein Wasser, ein kleines Schlagholz oder ein Haus antrifft, und man wissen will, ob die Linie hindurchfällt, oder

 aber

aber nebenher geht. Sind dann zwei Feldmesser, so gehen diese ein Paar hundert Schritte auseinander, indem sie sich beide ansehen, bis jeder den andern in der Richtung seiner Thurmspitze sieht.

Ist die Linie abgesteckt, so mißt man mit der Kette, wie weit von einem Signal zum andern ist, damit man eine Uebersicht über die Länge der Linie bekommt.

Da man fast nie bis an den Kirchthurm messen kann, so schlägt man außerhalb des Dorfs, etwa 6 oder 800 Fuß vom Thurme entfernt, einen Pfahl ein, und in diesen einen Nagel, welcher dann der Anfangspunkt der Linie ist. Die Entfernung von diesem bis in den Mittelpunkt des Kirchthurms wird dann nachher durch ein Nebendreieck bestimmt.

Man kann, wenn man sehr gleichen Boden hat, die Ruthen über die Erde legen, indem man vorher eine schwere Walze von 1 Fuß Breite über den Boden zieht, damit die Ruthen immer ganz gleich liegen. Nur hat dieses das Unangenehme, daß, wenn es während der Messung regnet, die Ruthen sehr schmutzig werden, und sich leicht Sand zwischen die Köpfe setzt, wodurch das genaue Aneinanderschließen derselben erschwert wird. Ich zog es deßwegen vor, die Standlinie über Brücken zu messen. Diese bestehen in 4 Zoll breiten Weiden- oder Tannenbrettern, wo an den Enden ein Pfahl von 1 Fuß Länge untergenagelt ist. Mit diesem wurden sie in das lockere Erdreich eingedrückt, so daß sie nur 3 oder 4 Zoll über der Erde bleiben. Jede Brücke war 10 Fuß lang, und blieb von der nächsten 1 Fuß entfernt.

Beim Messen der Standlinie wurden zwei Trigonometer und zwanzig Landmesser gebraucht. Die Standlinie

wurde

wurde viermal und mit aller Sorgfalt gemessen, und jede Stunde Länge kostete nur 100 Rthlr. Wenn alles im Gange war, und die Witterung günstig, dann konnte täglich eine halbe Stunde, oder 6000 Fuß gemessen werden.

Die Ordnung, welche hiebei beobachtet wurde, war folgende:

Als die Standlinie im Großen abgesteckt war, so wurden ein paar tausend Fuß mit kleinen Pikets abgesteckt, und an diesen vorbei Schnüre von 500 Fuß Länge gespannt. An diesen wurden die Brücken vorbei gebaut, so daß immer ungefehr 1000 Fuß Brücken standen, wo dann hinten immer abgebrochen und vorne immer angebaut wurde.

Der erste Trigonometer hatte vier Landmesser, wovon jeder eine Ruthe hatte. Der erste Landmesser legte A Nr. 1 an den Anfangspunkt. An dessen Ruthe legte der andere A Nr. 2, an diese der dritte A Nr. 3, und endlich an diese der vierte A Nr. 4. Diese vier Ruthen hießen eine Lage. Wenn die vierte Ruthe lag, so ging A Nr. 1 vor, und legte seine Ruthe an Nr. 4, und so ging das Messen immer fort, wobei drei Ruthen beständig lagen, und auf den Brücken festgehalten wurden, wodurch alles Verschieben beim Aneinanderlegen der Köpfe unmöglich wurde. Der Trigonometer sah dann zu, daß die Ruthen immer gerade gelegt wurden, und daß die Köpfe gut aneinander schlossen.

Waren auf diese Weise 10 Lagen oder 480 Fuß gemessen, so wurde ein Pfahl eingeschlagen, und auf diesen ein Schnitt mit einem Federmesser an den letzten Ruthenkopf gemacht.

Unterdeß war der zweite Trigonometer mit seinen

vier

vier Landmessern, die B Ruthen Nr. 1, 2, 3, 4 hatten, auf dieselbe Weise am Messen, und schnitt, wenn er auf den Pfahl kam, sich ebenfalls da ein, wo nach seiner Messung die 480 Fuß aufhörten, welche wir eine Brücke hießen.

Der erste Trigonometer ging denn zurück, und maß dieselbe Brücke auf dieselbe Weise noch einmal, und bemerkte in sein Tagebuch den Unterschied von der ersten Messung. Dieser betrug gewöhnlich nur $\frac{1}{2}$ Pariser Linie, und selten eine ganze. Also im Maximo $\frac{1}{70000}$ und im Mittel $\frac{1}{140000}$ des Ganzen. Der zweite Trigonometer maß ebenfalls die Standlinie auf dieselbe Weise zum zweitenmal. So wie seine Ruthen von den Brücken weg waren, wurden die Brücken abgebrochen und vorwärts in die Linie getragen.

Beim Brückenbau wurde folgende Ordnung beobachtet. Zwei Landmesser steckten die Linie mit kleinen Pikets ab, und spannten die Schnüre. Dann kam einer und stellte die Brücken in die Linie und drückte sie ein wenig in die Erde. Dann kamen zwei andern und schlugen sie mit hölzernen Hämmern fest. Dann kam der Brückenbauer und legte eine Meßlatte darüber, um zu sehen, ob sie auch alle gleich hoch standen. Vier andere wurden gebraucht um die Brücken hinten abzubrechen und sie 1000 Fuß vorwärts in die Linie zu tragen. Dann waren noch ein Paar Landmesser übercomplet, welche gleich eintreten konnten, sobald einer aus der Linie trat, damit nirgend Stockung entstehe, weil sonst alle warten mußten. Endlich hatte ich noch immer einen Schreiner bei der Linie, welcher gleich die Brücken ausbesserte, welche schadhaft wurden. Dieses war besonders in hartem Boden nothwendig,

wendig, wo beim Einschlagen die Köpfe der Brücken sprangen, und sich dann beim Ausziehen von den Pfählen abrissen.

Beide Standlinien, sowohl die Mündelheimer als Bergheimer, gingen durch die große Rheinebene, in der nur unbedeutende Ungleichheiten von 4 bis 6 Fuß auf 20 bis 30 Ruthen Länge waren. Die Brücken wurden immer dicht am Boden weggebaut, damit sie fest standen, und kein Verschieben der Ruthen machten. Der Einfluß, den die Ungleichheiten des Bodens auf die wahre Länge der Linie hatten, war nicht groß. 78 Gefälle und Steigungen machten die Bergheimer Linie nur 19 Zoll zu lang, und in der Mündelheimer Linie machten 47 Gefälle und Steigungen nur 9 Zoll. Im Journale bemerkte der Trigonometer bei jeder Brücke wie viel Fall in ihr war, und auf wie viel Länge. Das Gefälle maß er mit der Wasserwage. In der Mündelheimer Standlinie war ein sehr starkes Gefälle am Abhange eines Ufers. Dieses wurde aus der Linie heraus geschnitten, oben und unten ein Pfahl eingeschlagen, und nachher besonders gemessen. Die Bergheimer Linie ging durch ein kleines Holz, durch welches in Zeit von einem halben Tage ein Weg von 1 Fuß Breite für die Brücken ausgerodet wurde, der vorher genau mit Pikets abgesteckt wurde. Nachher ging sie durch ein 50 Fuß breites Wasser. Durch dieses wurden hohe Brücken gebaut, und da so viele Ruthen angelegt, daß die erste und letzte auf dem festen Lande lag, wo zwey Pfähle eingeschlagen waren, auf denen man die Endpunkte der Ruthen bezeichnete. Bei jeder Ruthe stand ein Feldmesser im Wasser, der sie auf der Brücke festhielt.

Alle 10 Brücken oder alle 4800 Fuß wurde ein großer Nummerpfahl eingeschlagen, auf dem die letzte Ruthe eingeschnitten wurde, und dann wurde in den Schnitt gebohrt. Jeder Abend wurde mit einer ganzen Brücke geschlossen. Der letzte Pfahl wurde bedeckt, und über ihn der kleine Wagen gestellt, auf dem wir unsere Geräthschaften hatten, und in dem jede Nacht zwei Landmesser schliefen. Außerdem blieben noch ein Paar einzelne Brücken stehen, auf denen eine der letzten Ruthen auch eingeschnitten wurde, um den folgenden Morgen wieder eine Controlle für die Unbeweglichkeit des Pfahls zu haben.

Am Ende der Linie wurden 5 Fuß lange Hausteine eingegraben, in die oben zwei Kreuzlinien eingehauen waren.

Ich will als Beispiel, wie genau man auf diese Weise eine lange Linie messen kann, hier die Resultate der Mündelheimer und Bergheimer Standlinie anführen, welche ich schon früher an einem andern Orte mit Erlaubniß der Regierung bekannt gemacht habe.

Vom Kreuz auf dem Malsteine bei Mündelheim bis auf das Kreuz auf dem Malsteine bei Calkum, ist

nach der 1ten Messung	24062	Fuß	1	Zoll	8,1	Linien
2ten = =	24062	=	1	=	5,0	=
3ten = =	24062	=	3	=	3,6	=
4ten = =	24062	=	2	=	7,1	=
Mittel	24062	Fuß	2	Zoll	3	Linien.

Die mittlere Temperatur, bei der diese Linie gemessen wurde, mogte 12 Grad R. seyn. Es war in den warmen Septembertagen von 1805. Da die Ruthen von Holz waren, wurde auf ihre Ausdehnung weiter keine Rücksicht genommen.

Die

Die Bergheimer Standlinie war in zwei Theile getheilt. Vom Kreuz auf dem Malstein bei Bergheim bis aufs Kreuz auf dem Malsteine bei Wahn war

nach der 1ten Messung	26962 Fuß	6 Zoll	0 L.
2ten = =	26962 =	6 =	2 =
3ten = =	26962 =	4 =	8 =
4ten = =	26962 =	4 =	2 =
Mittel	26962 Fuß	5 Zoll	3 Linien.

Vom Kreuz auf dem Malsteine bei Wahn bis auf das Kreuz auf dem Malsteine bei Portz war

nach der 1ten Messung	13039 Fuß	0 Zoll	4 Linien
2ten = =	13039 =	0 =	7,5 =
3ten = =	13039 =	6 =	2,0 =
4ten = =	13039 =	6 =	2,4 =
Im Mittel aus allen	13039 Fuß	3 Zoll	4 Linien
	26962 =	5 =	3 =

Ganze Länge der Linie = 40001 Fuß 8 Zoll 7 Linien.

Der erste Theil der Bergheimer Standlinie wurde im Oktober 1805 gemessen. Die mittlere Temperatur mogte 5° R. seyn. Den zweiten Theil maßen wir im April 1806, wo die mittlere Temperatur etwa 8 Grad war.

Die Berechnung der Niveaus geschah nach dem Pytagoräischen Lehrsatze, da in dem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse und eine Seite bekannt war. Die Niveaus wurden aus dem Tagebuche auf folgende Weise abgeschrieben:

Nr. 1	In	3 Ruth.	Länge	2 Fuß	0 Zoll	Fall	macht	6,7	P. Lin.
= 2	=	35	=	= 5	= 10	=	=	= 5,0	= =
= 3	=	25	=	= 4	= 6	=	=	= 4,0	= =
= 4	=	16	=	= 1	= 6	=	=	= 0,7	= =

u. s. w.

Nachher wurde die Summe aller Niveaus von der ganzen Linie abgezogen, welche, wie schon oben bemerkt, bei der Bergheimer Linie auf 3 Stunden Länge nur 19 Zoll betrugen. Man hätte also noch keine 2 Fuß gefehlt, wenn man das Messen der Niveaus vernachläßigt hätte.

Aus der Uebereinstimmung der verschiedenen Messungen ging hervor, daß die Länge der Standlinien bis auf wenige Zoll bekannt sey, und daß die Ungewißheit dieser Länge wenigstens noch keinen Fuß betrage. Die Ungewißheit betrug also nur $\frac{1}{25000}$ des Ganzen. Eine solche Genauigkeit reicht bei der Messung selbst des größten Reiches hin, und wenn man auch die Standlinie bis auf 1 Zoll genau gemessen hätte, so würde dieses von weiter keinem Nutzen seyn, weil diese Genauigkeit ohnehin wieder im ersten Dreieck verloren geht, da man bei den Thurmspitzen selten sicher ist, daß sie bis auf einen halben Fuß gerade stehen.

Um sicher zu seyn, daß man sich während der Messung nicht um eine Lage von 48 Fuß verzählte, so wurden die 4800 Fuß von einem Nummerpfahl bis zum andern noch einmal mit der Kette gemessen.

Als Probe von der Genauigkeit der Kettenmessung will ich hier anführen, daß die Mündelheimer Standlinie fünfmal mit der Kette gemessen wurde, und daß das

Mittel aus diesen 5 Messungen sie zu 24066 Fuß angab.
Die wahre Länge war 24062

Also Fehler der Kettenmessung = 4 Fuß, oder $\frac{1}{6000}$ des Ganzen.

Die einzelnen Kettenmessungen weichen unter sich bis auf 16 Fuß von einander ab. Die Länge der Kette war bei ihrer mittlern Spannung auf zehn Züge zu 72 Pariser Fuß $8\frac{1}{4}$ Zoll bestimmt. Die Genauigkeit einer Kettenmessung hängt größtentheils davon ab, wie genau man ihre Länge bei ihrer mittlern Spannung kennt.

§. 3.

Man sieht aus dem vorigen, daß das genaue Messen einer langen Standlinie zwar eine schwierige Aufgabe der praktischen Geometrie ist, allein doch nicht so unendlich schwer als einige Meßkünstler dieses darstellen. — Sie erfodert Zeit und Geld, allein von beiden doch nicht so viel als man gewöhnlich glaubt. Auch kann man die Messung noch sehr dadurch abkürzen, wenn man bei trockenem Wetter über den bloßen Boden mißt, über den man vorher eine Linie hat walzen lassen. Man braucht dann nur eine kleine Anzahl Brücken, um die Unebenheiten an Wegen, Graben und Hecken gleich zu bauen. Jeder Landmesser hat ein Stück Leder, das er unter die Ruthenknöpfe legt, damit diese nicht schmutzig werden, und sich kein Sand zwischen die Köpfe setze. Nur ist diese Methode bei nassem Wetter nicht zu gebrauchen.

Je länger die Standlinie ist, desto besser. Nichts läßt sich auf dem Felde so genau messen als eine gerade

Linie in der Ebene, und nichts gibt einer großen Messung so eine sichere Haltung als dieses. Man thut wohl, wenn die Standlinie sehr lang wird, daß man sie durch Malsteine in mehrere Theile theilt. Ein Theil gibt dann immer eine Controlle für der andern, und man kann, je nachdem man es bei der nachherigen Bildung der Dreiecke am bequemsten findet, bald diesen, bald jenen, und bald das Ganze gebrauchen.

Hölzerne Meßstangen, welche die Einrichtung der unsrigen haben, sind wohl die besten Maßstäbe bei jeder großen Messung — wenn sie nemlich keine Gradmessung ist. Wie wenig sich trockenes, geradfaserigtes, mit Oel getränktes und zweimal angestrichenes Tannenholz durch Wärme und Feuchtigkeit zieht, davon gaben unsere Meßstangen einen Beweis. Die Mündelheimer Standlinie wurde zum Theil in einer Hitze gemessen, bei der die Brücken rissen. Bei der Bergheimer hingegen, fiel im Oktober 1805 eine frühe Kälte ein, und jeden Morgen waren die Brücken mit Reif und Eis bedeckt. Und obschon für diese verschiedene Temperatur keine Rechnung getragen wurde, so stimmten doch beide Standlinien, als sie nachher mit ungefähr 20 Dreiecken miteinander verbunden wurden, bis auf 1½ Fuß überein. Bei Gradmessungen bedient man sich gewöhnlich metallener Meßstäbe, wo auf jedem ein Thermometer angebracht ist. Ja man hat sogar an den Enden Verniere angebracht, weil man dieses für genauer hielt, als die unmittelbare Berührung. Allein metallene Meßstäbe sind schwer und unbehülflich. Diese Unbehülflichkeit kann leicht einen kleinen Stoß veranlassen, der eine Schiebung in der Lage

der

der Stangen macht, die mehr beträgt als die ganze Korrektion wegen der Temperatur.

Auch muß der Vernier wohl nicht so genau seyn, als die unmittelbare Berührung zwischen den Köpfen. Man sieht aus unserer Berechnung der Niveaus, daß diese in ebenem Felde sehr wenig betragen, und daß man dabei keine so ängstliche Genauigkeit anzuwenden braucht, als oft empfohlen wird. Unsere Niveaus sind mit Sorgfalt gemessen. Indeß würde sich die Standlinie vielleicht nur um 1 Zoll geändert haben, wenn sie mit weniger Sorgfalt gemessen wäre.

Daß die Ruthen mit aller Sorgfalt horizontal gelegt werden, ist nicht durchaus nothwendig, obschon es ebenfalls von berühmten Meßkünstlern empfohlen wird. Ich glaube sogar, daß man eine größere Genauigkeit erhält, wenn mon sie schief legt, und den Fehler, der aus der schiefen Lage entsteht, berechnet. Die Genauigkeit des Messens beruht auf der festen Lage der Ruthen, und diese auf dem festen Stande der Brücken. Diese sind um so unbeweglicher, je niedriger sie sind, und je mehr sie sich an den unbeweglichen Boden anschließen. Will man aber feststehende Brücken haben, so kann man nicht horizontal bauen, weil man sich sonst entweder festbauet, wenn es bergan geht, oder man zu weit vom Boden abkommt, wenn es bergab geht. Man hilft sich dann freilich durch Treppenbau und Absenken; allein dieses geht weder genau noch geschwinde, besonders wenn Wind ist. Man muß nur da mit den Brücken die Unebenheiten des Bodens ausbauen, wo Fall oder Neigung so steil sind, daß die Ruthen eine merklich schiefe Lage an den Köpfen bekom-

bekommen, und sie daher nicht anschließen können, weil sie Parallelipipede sind.

Daß die Ruthen Parallelipipede und keine mathematische Linien sind, erschwert überhaupt die Vermessung, weil man beim Aneinanderschließen immer darauf sehen muß, daß kein leerer Theil zwischen den Köpfen bleibt. Auch ist man beim Gebrauche der Verniers genöthigt, Brücken mit Schrauben zu haben, damit man jede Ruthe genau auf die Höhe bringen kann, welche nothwendig ist, daß der Vernier, vom Schieber der einen, gerade auf die anderen Ruthen paßt.

Vielleicht würde man auf folgende Weise leichter zum Ziele kommen, wenn man sich einmal vorgenommen, die Standlinie mit metallenen Maßstäben zu messen. Man nimmt eiserne Maßstäbe von 12,1 Fuß Länge, und reißt über diese in der Mitte eine gerade Linie, und einen halben Zoll von den Köpfen zwei Querlinien, welche genau 12 Fuß von einander entfernt sind. Auf jedem Maßstab sind zwei Dioptere, um ihn in die senkrechte Ebene der Standlinie einzuvisiren. Jeder liegt los auf einem hölzernen Balken, der an beiden Seiten drei eiserne Füße von 1 Fuß Länge hat, mit denen man ihn in den Boden drückt. Man stellt drei oder vier solcher Maßstäbe in die Linie, an einer gespannten Schnur vorbei, und visiert in die senkrechte Ebene der Linie. Jeder steht vom andern ein paar Zoll entfernt, so daß sie sich nicht berühren. Auf jedem ist eine kleine Wasserwage und ein Thermometer. Die Neigung gegen den Horizont und die Wärme der Stange wird im Tagebuche bemerkt. Der Abstand der beiden Querlinien voneinander wird dann mit einem kleinen Stangenzirkel, auf dem eine feine seine Eintheilung, nebst einem kleinen Niveau ist, gemessen, und der Stand des Stangenzirkels und des Niveaus, im Tagebuch bemerkt. Auf diese Weise wird man geschwind und sicher messen, da die Ruthen in der senkrechten Ebene der Standlinie sind. Die Reduktion der einzelnen schiefen Stücke, aus denen die Standlinie besteht, auf eine Temperatur und auf einen Horizont, ist eine Arbeit, die sich im Zimmer macht, wobei der Geometer nicht weiter vom Wetter abhängig ist. Je schneller die Messung der Standlinien auf dem Felde geendiget ist, desto weniger Aufenthalt hat man im schlechten Wetter zu befürchten.

Allein wenn man auch auf diese Weise eine Standlinie von 40000 Fuß bis auf 1 Zoll genau mißt, so geht doch gleich wieder viel von dieser Genauigkeit in den nächsten Dreiecken verloren, sobald man Kirchthürme gebraucht, von deren vollkommen senkrechtem Stande man sich nicht immer überzeugen kann. Selbst bei einer Gradmessung würde eine Genauigkeit von 1 Fuß bei einer solchen Standlinie von 2 deutschen Meilen schon hinreichen. Denn 1 Fuß Fehler in der Standlinie macht einen Fehler auf den Grad von $7\frac{1}{2}$ Fuß, und wenn die Messung eben so wie die französische 10 Grad umfaßte, so machte dieses den terrästrischen Bogen nur um 75 Fuß unrichtig. Nun macht aber 1 Sekunde Fehler in der Bestimmung der Polhöhen an den beiden Endpunkten denselben Bogen schon um 90 Fuß ungewiß, — und aus der letzten französischen Gradmessung ist es bekannt, wie schwer es ist, eine Polhöhe bis auf 1 oder 2 Sekunden sicher zu bestimmen.

Die Bogen, welche in Peru und Lappland sind gemessen

messen worden, umfaßten noch keine zwei Grade, und da die Ungewißheiten bei der Bestimmung der Polhöhe dieselben bleiben, auch wenn der Bogen klein ist, so würden die Standlinien für diese Messungen schon genau genug gewesen seyn, wenn sie blos mit der Kette wären gemessen worden.

§. 4.

Bildung der Dreiecke.

Ist die Standlinie gemessen, so ist der schwierigste Theil einer Dreieckmessung vollendet. Man muß nur noch die Endpunkte derselben mit den Thürmen in Verbindung setzen, die man als Signale gebraucht.

Um die Entfernung des Malsteins von der Achse des Thurms zu finden, maßen wir zwei kleine Querstandlinien von 600 Fuß Länge, und bestimmten mit zwei kleinen Dreiecken die Entfernung des Kreuzes im Malstein von der Achse des Mündelheimer Thurms zu 684,6 Pariser Fuß. Bei Bergheim fanden wir auf dieselbe Weise den Abstand des Kreuzes im Malsteine von der Achse des Thurms zu 752,42 Fuß. Da wegen der Nähe der Thürme die Höhenwinkel sehr stark waren — sie betrugen 5 bis 8° — so wurde es schwer, das schiefe Berühren der Bilder genau zu beobachten, und obschon mit aller Sorgfalt verfahren wurde, so war doch zu Bergheim ein Unterschied von 1 Fuß zwischen den Resultaten zweier Messungen, die im Jahr 1805 und 1806 gemacht wurden.

Auch konnten die Signalstangen nicht über dem Malsteine eingegraben werden, sondern standen ein Paar Fuß davon entfernt, wofür ebenfalls Rechnung getragen wurde.

Bei der Bergheimer Standlinie war die Entfernung des Bergheimer Thurms vom Signal bei Wahn 27713,27 Pariser Fuß. Dieses war die erste Dreieckseite.

Vom Signal in Wahn bis zum Signal bei Portz, — welches vom Stein rückwärts stand, war 12966,4 Fuß. Bei der Mündelheimer Standlinie war die erste Dreieckseite 24746,78 Pariser Fuß.

Als diese Bestimmungen gemacht waren, so fing das Trianguliren an, und beide Standlinien wurden durch ungefehr 20 Dreiecke des ersten Rangs mit einander verbunden.

Nachdem die Thürme ausgesucht waren, welche die besten Dreiecke geben, so wurden auf jedem dieser Thürme 10 bis 12 Winkel im Horizonte auf die Weise mit dem Spiegelsextanten gemessen, wie oben gezeigt worden. Die Winkel wurden centrirt und auf den Horizont reducirt, und denn addirt, ob sie 360° geben. Die Abweichung von 360° durfte keine Minute betragen. Betrug sie mehr, so wurden sie aufs neue gemessen. Nur ein paarmal hatten wir den Fall, daß wir die Winkel aufs neue messen mußten, und jedesmal lag die Schuld am Centriren, oder an der einseitigen Beleuchtung der Thürme, auf welche gemessen wurde.

Wenn man beim Centriren das Instrument zu weit von der Achse des Thurms aufstellt, so ist es schwer die langen Perpendikel mit der Genauigkeit zu messen, welche nothwendig ist, um nachher beim Addiren die 360° innerhalb einer Minute zu erhalten. Als wir auf dem Bensberger Schloßthurme maßen, so kamen wir in denselben Fall wie auf der Siegburger Abtei, — wir erhielten sehr lange Perpendikel, wenn wir die Winkel aus den Fenstern des Sallons nahmen, der in der Kuppel ist. Der Castellan sagte uns, daß im Dache ein Fenster sey, wo heraus man auf den Knopf steigen könnte, der mitten auf dem Thurme steht, und der früher dazu bestimmt war, eine Bildsäule zu tragen. Einen bessern Standpunkt für den Sextanten ließ sich nicht wünschen. Der Schieferdecker band vier Leitern rund um den Knopf, wir stellten den Sextanten auf die Mitte, und indem einer den Winkel beobachtete, las der andere ihn ab. Die Messung ging schnell und die Winkel stimmten sehr nahe mit 360 Grad.

Mit keinem andern Winkel-Instrumente würden wir hier haben messen können, — man würde sich tiefer haben stellen müssen, man würde nicht alle Thurmspitzen gesehen haben, die man vom Knopfe sehen konnte, und man würde endlich kaum in einer Woche so viel gethan haben, als wir in einem Tage thun konnten. — Als wir den dritten Tag zu Bensberg eben mit dem Messen fertig waren, fiel stürmische Witterung ein, welche 8 Tage anhielt. Hätten wir mit einem andern Instrumente gemessen, so hätte uns diese früher überrascht, ehe wir unsere Operationen geschlossen hatten. Das Jahr vorher maß der Oberste Tranchot an einem unserer Dreieckpunkte, auf dem Löwenberge über vier Wochen, weil er seine Messung bei der guten Witterung, die er in den ersten Tagen hatte, nicht vollenden konnte, da er immer sehr viel Zeit mit dem Transport und dem Aufstellen des Bordaschen Wiederholungskreises verlor. — Denselben Vortheil beim Messen mit Sextanten fanden wir, als wir im Jahr 1807 in den gebirgigten Theil des Herzogthums kamen. Statt künstliche Signale zu bauen, banden wir

in

in die höchsten Eichen Signalstangen mit einem Strohbündel, und nagelten neben die Signalstange zwischen die Zweige des Baums ein kleines Brett, auf das wir den Sextanten stellten. Die andern Zweige, welche die Aussicht hinderten, wurden dann weggehauen, und so konnte man über die Waldungen wegmessen, ohne daß es großer Anstalten bedurfte. Das Schwierigste bei diesen Arbeiten war das Messen der Höhenwinkel, wozu man eine windstille Stunde abwarten mußte, weil sonst das Schwanken der Aeste in einer Höhe von 60 bis 80 Fuß über der Erde zu stark war, um das Niveau beobachten zu können.

Die Signale, welche wir auf kahlen Bergen erbauten, waren ganz einfach. Es wurden drei Löcher in die Erde gegraben, welche ungefehr 10 Fuß von einander entfernt waren. Dann wurden drei 25 Fuß lange Bäume abgehauen, ausgeschnitten und oben 5 Fuß von der Krone zusammen gebunden. Diese wurden aufgerichtet und in die drei Löcher eingelassen. Dann wurden einige Latten darum genagelt, und ein Dornenbusch in die Krone gehangen, um sie leichter aus der Ferne zu sehen. Oben wurde ein Brett eingenagelt, auf das man den Sextanten stellte, und gerade unter diesen wurde in den Boden eine Grube eingegraben, und in diese ein Stein, damit man den Dreieckpunkt immer wieder finden könne. Diese Signale waren leicht errichtet, und standen sehr fest.

So oft es die Lage der Dreiecke erlaubte, wurde die Entfernung zweier Orte immer aus mehreren Dreiecken hergeleitet, und dann aus den verschiedenen Angaben das Mittel genommen, und dieses beim Fortpflanzen gebraucht. Solche Hauptlinien waren z. B. die Entfernung vom Cöllner Dom und Bensberg, und die vom

Düsseldorfer und Homberger Thurme. Diese Linien, welche der Quere nach durch das Dreiecknetz lagen, machten alles Verschieben der Dreiecke unmöglich.

Als endlich die Dreiecke bei der Mündelheimer Versicherungslinie ankamen, so gaben sie die Länge dieser Linie zu . . . . 24748,6 Fuß an,
die unmittelbare Messung gab 24746,8

so daß der Unterschied nur 1,8 Fuß war.
Diese genaue Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und der Messung hatte ihren Grund in dem sorgfältigen Aufsuchen der Fehler des Sextanten, in dem Rundmessen im Horizonte, wodurch alle Winkel mit 360 Grad verbessert wurden, und endlich in den eben angeführten Hauptlinien, wodurch sich die Fehler in den verschiedenen Dreiecken früher gegen einander aufhoben, ehe man an die Standlinien kam.

Uebrigens bedarf es wohl keiner Erwähnung, daß an allen Dreiecken immer alle drei Winkel gemessen wurden, und ihre Summe mit 180° corrigirt. Ein ebenes Dreieck, welches diese Correktion nicht hat, ist kein ebenes Dreieck, sondern eine ungeschlossene Figur, und läßt sich gar nicht berechnen. Die Abweichung von 180° durfte indeß keine 30 Sekunden übersteigen. Dieses war die hiefür vorgeschriebene Genauigkeit.

Bei der ganzen Vermessung wurde kein Dreieck sphärisch berechnet. Das größte Dreieck, welches wir hatten, war Cronenberg, Düsseldorf und Cölln. Die Länge der Seiten betrug 7 Stunden. Der Inhalt des Dreiecks war nahe 7 Quadratmeilen, und die Abweichung der drei Winkel von 180° konnte wegen der sphärischen Gestalt

der

der Erde nur 1,9 Sekunden betragen. Es wäre also blos Mückenseigerei gewesen, wenn man die Dreiecke als sphärische berechnet hätte.

Eben so wenig war es nöthig, die Dreiecke auf den Horizont des Meeres zu reduciren, da unsere Standlinien nicht über 250 Fuß höher als die See lagen. Durch das Reduciren der Winkel auf den Horizont kommen alle Dreiecke in den Horizont der Standlinie, denn die Winkel werden dann zwischen zwei senkrechten Ebenen gemessen, die sich im Mittelpunkt der Erde schneiden, und die Winkel bleiben immer dieselben, sie mögen näher oder entfernter vom Mittelpunkte gemessen werden. Es hat also auf die Winkel eines Dreiecks keinen Einfluß, ob sie auf der Spitze eines Berges oder unten im Thale gemessen werden, — ob ein Winkelpunkt höher oder tiefer liegt wie der andere, sie betragen zusammen immer 180 Grad, weil sie alle auf den Horizont reducirt werden, und weil die Dreiecke so klein sind, daß die sphärische Gestalt der Erde keinen merkbaren Einfluß hierauf hat.

In einem Dreiecksystem kommt daher von selber das ganze Netz in die Ebene zu liegen, in der die Standlinien liegen, weil von diesen alle Berechnung ausgeht. Man würde daher nur in dem Falle eine Correktion anbringen müssen, wenn die Verifikationslinie auf der Ebene eines hohen Berges, wie z. B. des Brockens gemessen würde. Indeß wäre, wenn sie 3000 Fuß über der See läge, *der Unterschied auf 27000 Fuß immer doch nur 4,1 Fuß, und auf solchen Höhen wird man nie eine Standlinie* von einer solchen Länge messen können.

§. 5.

Orientiren und Auftragen der Dreiecke.

Ist das Dreiecknetz fertig, so wird durch den Hauptpunkt desselben eine Mittagslinie gezogen. Wie man diese bis auf ein Paar Minuten genau ziehen könne, ist im vorigen Theile (S. 531) gezeigt worden. Diese Genauigkeit reicht in vielen Fällen hin. Aber dann nicht, wenn man die geographische Breite und Länge der Hauptorte berechnen will. Man muß dann die Mittagslinie bis auf 10 oder 15 Sekunden genau haben. Die Aufgabe gehört dann schon in die Geographie, und da sie mehrere astronomische Kenntnisse voraussetzt, so werden wir sie eben so wie die Bestimmung der geographischen Längen und Breiten erst im vierten Theile abhandeln.

Hat man auf die Weise, wie im zweiten Theile gezeigt worden, die Mittagslinie gefunden, so wird das ganze Netz mit Rechtecken überzogen, welche die Größe der Kartenblätter bezeichnen.

Die ganz großen Rechtecke bezeichnen die Grenzen der Landeskarten, welche im Maasstabe von 100000 zu 1 gezeichnet wird. Das bequemste Format für sie ist: auf 8 Decimeter Länge, 5 Decimeter Höhe.

In diese werden kleinere Rechtecke gezeichnet, welche die Grenzen der Bezirkskarten bezeichnen. Diese Karten werden im Maasstabe von 10000 zu 1 gezeichnet.

Endlich werden in diese Quadrate gezeichnet, welche die Grenzen der Gemeinheitskarten bezeichnen, die im Maasstabe von 2000 zu 1 aufgenommen werden. Jedes Quadrat ist ½ Meter lang und ½ Meter breit, es ist gerade die Größe eines Meßtisches, und enthält bei dem

Maas-

Maasstabe von 2000 zu 1 gerade 1000000 Quadratmeter oder 100 Hektaren, (also nahe 310 Morgen köllnisch.)

Jedes Blatt der Bezirkskarte enthält 40 Blätter der Gemeindekarte, also 4000 Hektaren, oder ungefehr 12400 köllnische Morgen, also beinahe $\frac{3}{4}$ Quadratmeile.

Jedes Blatt der Landeskarte enthält 25 Blätter der Bezirkskarte, also 100000 Hektaren oder ungefehr 18 Quadratmeilen.

Bei der Bergischen Landesvermessung war der Hauptpunkt die Düsseldorfer Sternwarte, von dieser wurden alle Abstände der Karten gemessen, und hiernach wurden sie auch nummerirt. Um sich indeß durch Verwechseln der Nummern weniger zu irren, so bekam jedes Blatt noch einen besondern Namen von dem Hauptorte der auf demselben lag.

Um die Dreiecke mit Genauigkeit auftragen zu können, so klebt man jedes Kartenblatt auf ein leichtes Reißbrett, auf diesem bleibt es aufgespannt bis es ganz fertig ist. Um das Rechteck von 8 Decimeter Länge und 5 Decimeter Breite schnell und genau zu zeichnen, so hat man einen meßingenen Rahmen mit 4 feinen Löchern. Durch diese steckt man mit der Punktirnadel die vier Punkte ab. Einen ähnlichen Rahmen gebraucht man für die Meßtische. Beim Auftragen der Dreieckpunkte bedient man sich mit Vortheil der Reißschiene der Baumeister, welche immer rechtwinklig am Reißbrett vorbei läuft. Man findet dann die Perpendikularabstände der Punkte schnell und zugleich genau.

Ehe man die Dreieckpunkte auftragen kann, muß man eine Tabelle über die Abstände vom Meridian und Breitenkreise des Hauptorts auf folgende Weise berechnen:

Sobald

Sobald die Mittagslinie des Hauptpunktes, den wir A nennen wollen, bestimmt ist, so kennt man den Winkel, den die umliegenden Dreieckpunkte B, C, D.... mit dieser machen. Dieser Winkel heißt ihr Azimuth.

Um die senkrechte Entfernung dieser Punkte vom Meridian und Breitenkreise des Punktes A zu finden, so hat man nur eben so viele rechtwinklige Dreiecke aufzulösen, in denen außer dem rechten Winkel noch der Azimuthalwinkel und eine Seite bekannt ist. Diese Seite ist die gerade Entfernung von A nach B, von A nach C, von A nach D u. s. w. die aus dem Dreiecknetz bekannt ist.

Hat man auf diese Weise die senkrechten Abstände der umliegenden Dreieckpunkte vom Meridian und Breitenkreise des Punktes A bestimmt, so geht man nach dem Punkte B, und verfährt da auf dieselbe Weise. Man zieht nemlich durch den Punkt B eine Linie, welche dem Meridian von A parallel ist. (Diese Linie ist aber nicht der Meridian von B, denn die Meridiane zweier Punkte sind sich nie parallel, da sie sich alle im Pole der Kugel schneiden.) Da alle Winkel um den Punkt B im Horizonte gemessen sind, so kennt man auch die Neigung aller Dreieckseiten, die im Punkte B beisammen laufen, gegen diese Parallellinie, und man kann die senkrechten Abstände aller Punkte a, b, c, d, die um B herum liegen, wieder auf die eben angeführte Weise berechnen. Kennt man nun die senkrechten Abstände von der Parallellinie von B, so findet man die von dem Meridiane von A, indem man beide zusammen addirt. Auf dieselbe Weise findet man den senkrechten Abstand vom Breitenkreise von B, und dann durch Addiren den vom Breitenkreise von A.

Man

Man sieht aus dem Angeführten, daß es sehr leicht ist, die senkrechten Abstände der Dreieckpunkte vom Meridiane und Breitenkreise des Hauptortes zu berechnen. Auch sind alle diese Abstände so klein, daß die Kugelgestalt der Erde eben so wenig dabei in Betracht kommt, wie bei den Dreiecken.

Ist das Verzeichniß dieser Abstände fertig, so werden sie mit dem Stangenzirkel und dem verjüngten Maasstabe auf die Karten getragen, welche auf den Reißbrettern ausgespannt sind. Auf diese Weise erhält man auf den Karten eine Menge fester Punkte, deren Lage gegen einander sehr genau bestimmt ist, und an die sich nachher das Detail der Vermessung mit Leichtigkeit und Sicherheit anschließt.

§. 6.

Einrichtung einer allgemeinen Landesvermessung.

Im vorigen Theile zeigten wir wie der Geometer eine ganze Gemeine aufnimmt und in Karten bringt. Jetzt kommen wir zur Aufnahme eines ganzen Landes, welches das Geschäft des Trigonometers ist.

Die Aufnahme eines Landes kann wegen verschiedener Zwecke geschehen, und hiernach bekommt die Vermessung auch eine verschiedene Einrichtung. Will man blos eine allgemeine Landeskarte entwerfen, wie z. B. die Cassinische von Frankreich, die Bohnenbergersche von Schwaben, die Le Coqsche von Westphalen, so erfodert sie, sobald das Dreiecknetz vollendet ist, verhältnißmäßig nur wenig Zeit. Das Detail der Karte wird von den Ingenieurs auf folgende Weise aufgenommen. Sie spannen

auf

auf den Meßtisch ein weißes Blatt Papier, und tragen auf dieses die festen trigonometrischen Punkte. Dann gehen sie über die Bergrücken und nehmen diese mit Schritten und nach dem Augenmaaße auf, indem sie sich immer mit den festen Punkten orientiren und von ihnen ausgehen. Gehen Wege über die Bergrücken, so folgen sie diesen und nehmen alles auf, was rechts und links liegt. Die Krümmungen bestimmen sie mit der Magnetnadel, und die Entfernungen mit Schritten. Kommen sie auf Kreuzwege oder sonst auf merkwürdige Punkte, wo sie drei von den gegebenen trigonometrischen Punkten sehen können, so bestimmen sie die Lage des Punktes wo sie stehen, mit Hülfe des Problems von den vier Punkten, welches wir im zweiten Theile ausführlich betrachtet haben. (S. 373) Die beiden Winkel zwischen den festen Punkten messen sie durch Zeichnung auf dem Meßtische, oder auch mit einem kleinen Dosensextanten, den sie in der Tasche bei sich tragen, wenn sie nemlich die Lage des Punktes, wo sie stehen, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung finden wollen.

Haben sie auf diese Weise die Bergrücken und Landstraßen aufgenommen, so gehen sie den Thälern und dem Laufe der Flüsse und Bäche nach, und nehmen diese ebenfalls auf. Dieses ist schwieriger, weil sie in den Thälern selten die Signale sehen können, die auf die Berge gestellt sind. Da sie aber schon die Bergrücken auf dem Papier haben, so können sie sich immer orientiren, wenn sie die Querthäler herauf gehen und sehen, ob sie auf dem Bergrücken auch auf der Stelle heraus kommen, welche ihr Meßtisch angibt. Sobald man die Fahrwege, die Fußpfade, die Bäche und die Flüsse in einer Gegend

aufge-

aufgenommen hat, dann ist das übrige Detail leicht einzutragen, und ein Ingenieur, der fertig im Zeichnen ist, kann auf diese Weise in einem Jahre leicht 8 bis 12 Quadratmeilen aufnehmen.

Ist die Witterung für die Arbeiter mit dem Meßtische ungünstig, so nimmt der Ingenieur kleine Distrikte vor, welche viel Detail haben, wie z. B. Dörfer mit ihren Umgebungen, und nimmt die theilweise in sein Tagebuch mit Bleistift auf. Diese Aufnahmen trägt er dann nachher zu Haus auf den Meßtisch.

Alle diese Aufnahmen geschehen gewöhnlich in dem Maasstab von $\frac{1}{10000}$ oder $\frac{1}{20000}$, und werden nachher in den von $\frac{1}{100000}$ reducirt, in welchen die allgemeine Landeskarte gezeichnet wird. Der Maasstab der Cassinischen Karte ist so gewählt, daß 100 Toisen auf dem Felde 1 Duodecimallinie auf dem Papier sind, also $\frac{1}{86400}$. Diese berühmte Karte von Frankreich hat den spätern zum Muster gedient, und die Karten von Le Coq und Bohnenberger haben denselben Maasstab.

§. 7.

Die Potanotsche Aufgabe oder das Problem der vier Punkte.

Wir haben im zweiten Theile diese für die praktische Geometrie so wichtige Aufgabe ausführlich abgehandelt, (Seite 373 bis 387) und alle Fälle gelöst, welche hiebei vorkommen können.

Die Aufgabe wurde dort durch bloße Zeichnung aufgelöst, und wir fanden, daß die Auflösung mit 4 Sehnen in einem Kreise die bequemste sey. Indeß muß man auch

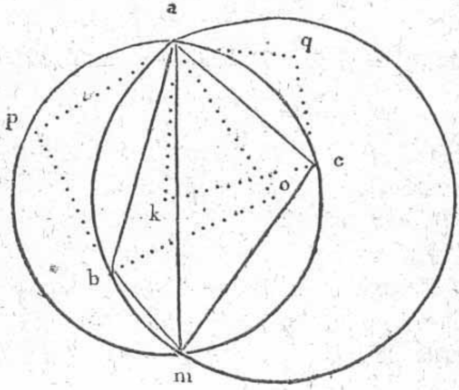
bei

bei dieser immer noch zwei Winkel ansetzen und zwei Sehnen halbiren, um den Mittelpunkt des Kreises zu finden. Auch müssen wir noch die Linie n m (Fig. 133) ziehen, um die Lage des Punktes m zu bestimmen, welcher gesucht wurde.

Es liegt in der Natur der Sache, daß durch diese verschiedene Operationen die Lage des Punktes m immer mehr oder weniger ungewiß werden kann, da in jeder etwas kann gefehlt werden; indeß ist dieses Problem keiner kürzern Auflösung fähig, sobald man alles durch bloße Zeichnung finden will. Wir wollen deßwegen jetzt zeigen, wie man die Lage des Punktes m genauer bestimmen kann, sobald man etwas Rechnung mit der Auflösung verbindet.

Auflösung der Aufgabe durch Verbindung von Rechnung und Zeichnung.

In folgender Figur sind a b c die drei gegebene Punkte, und m der Punkt, wo der Beobachter steht, und dessen Lage er auf dem Papier sucht.



Statt

Statt daß man die Tangenten cq, aq, bp und ap zieht und auf diese Senkrechten errichtet, um die Punkte k und o zu finden, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise sind, so berechnet man die Halbmesser dieser Kreise, und greift diese vom Maasstabe mit aller Genauigkeit ab; zieht man dann mit diesen Halbmessern zwei Kreisbogen, so schneiden diese sich in dem gesuchten Punkte in m.

Die Berechnung der Halbmesser geschieht auf folgende Weise. Der Winkel acq ist so groß als der Winkel amc, weil ein Winkel, den die Tangenten mit der Sehne macht, immer so groß ist als der Peripheriewinkel, der auf derselben Sehne steht. (S. §. 51. Nr. 6 und 7 Theil II. S. 246). Da amc gemessen ist, so kennt man auch acq. Ebenfalls kennt man in dem Dreieck akc den Winkel ack, welcher = 90° — acq ist. Der Winkel cak ist ihm gleich, weil das Dreieck gleichschenklig ist; und da außerdem noch die Seite ac bekannt ist, so kann man leicht die Größe des Halbmessers kc berechnen. Auf dieselbe Weise findet man die Größe des Halbmessers ob vom andern Kreise.

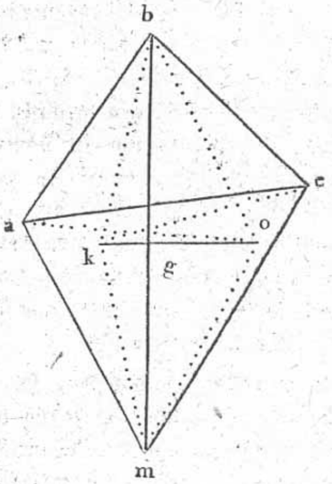
Kennt man die beiden Halbmesser, so greift man sie vom Maasstabe ab, und findet dann die beiden Mittelpunkte o und k durch ein einfaches Durchkreuzen zweier Kreisbögen. Durch ein zweites Durchkreuzen aus diesen Punkten o und k findet man den Punkt m.

Diese Auflösung des Problems ist für die Anwendung die brauchbarste, weil sie Genauigkeit mit Bequemlichkeit verbindet, da sie nur eine kleine Rechnung voraussetzt.

Auflösung der Aufgabe durch bloße Rechnung.

Man kann auch die Abstände des Punktes m von den Punkten a und c ohne alle Zeichnung auf folgende Weise durch eine leichte trigonometrische Rechnung finden.

In folgender Figur ist wieder abc das gegebene Dreieck. m der gesuchte Punkt, und k und o die Mittelpunkte der beiden Kreise.



In dem Dreieck kbo sind die beiden Seiten kb und ob bekannt. Es sind die Radien der beiden Kreise, die man nach dem vorigen berechnet hat. Ferner kann man die Größe des Winkels kbo finden, da der Winkel abc gegeben ist, und die Winkel kbc und abo noch aus dem vorigen bekannt sind. Zieht man nemlich von abc den

Winkel

Winkel cbk ab, so bleibt abk übrig. Zieht man von abc den Winkel abo ab, so bleibt obc übrig. Man findet also kbo, wenn man von abc die beiden Winkel abk und obc abzieht.

Da nun in dem Dreiecke kbo drei Stücke bekannt sind, nemlich die beiden Seiten kb und ob, und der Winkel bei b, den sie einschließen, so kann man nach der Tangentenformel (§. 13. Seite 266.) die drei übrigen Stücke finden, und also auch den Winkel kob.

In dem Viereck kbom, welches von den vier Radien der beiden Kreise eingeschlossen wird, ist bm eine Sehne, die beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, und die Linie ok, welche die Mittelpunkte der beiden Kreise mit einander verbindet, steht auf ihr senkrecht und halbirt sie in g. Das Dreieck gbo ist also in g rechtwinklig, und da man in ihm den Winkel bei o und die Seite bo kennt, so kann man bg berechnen, und man kennt also bm, da diese doppelt so groß als bg ist.

Auf diese Weise ist nun der Abstand des Punktes m vom Punkte b gefunden. Die andern beiden Abstände nach a und c finden sich nun leicht, da in jedem der Dreiecke abm und cbm zwei Seiten und drei Winkel bekannt sind.

Diese Methode ist indeß für den Gebrauch etwas weitläuftig, da man, nachdem man die Halbmesser berechnet hat, noch immer drei Dreiecke auflösen muß, um den Abstand des Punkts m von den Punkten a, b und c zu finden. Auch läßt sich diese Rechnung durch Zusammenziehen der Formeln nicht bedeutend abkürzen. Der Fall wird indeß sehr selten seyn, daß man den Abstand des Punktes m aufs genaueste durch Rechnung bestimmen muß.

Bei

Bei der Aufnahme einer topographischen Karte wird man sich in den meisten Fällen bei der vorigen Auflösung begnügen können, bei der man blos die Halbmesser der Kreise berechnet. Man erhält hiebei alle die Genauigkeit, welche man beim Auftragen fester Punkte auf dem Papier erreichen kann.

Uebrigens haben dieses alle Methoden mit einander gemein, daß je näher die vier Punkte in einem Kreise liegen, die Auflösung um so ungewisser wird, man mag zeichnen oder rechnen. In diesem Falle muß man entweder den Punkt m verlassen, oder man muß statt der Punkte a, b, c einen andern Dreieckpunkt nehmen.

§. 8.

Einrichtung einer Cadastral-Vermessung.

Unter allen Messungen gibt es keine, welche einen solchen Aufwand an Zeit und an Geld kostet, wie die Vermessungen für die Steuerrollen. Bei diesen muß jedes Stück einzeln gemessen werden, damit man weiß, wie viel Morgen, Garten, Ackerland, Wiesen, Waldungen, Haiden und Moräste jeder Eigenthümer, jede Gemeine und jeder Bezirk hat. Nachher muß der reine Ertrag von jedem Stück ausgemittelt werden, damit man bestimmen könne, wie viel jeder Eigenthümer, jede Gemeine und jeder Bezirk in der Steuer zu bezahlen hat, wenn von diesem reinen Ertrage z. B. $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{6}$ als Steuer genommen wird. Die Verfertigung der Steuerrollen gehört ganz in die angewandte Mathematik, sowohl was die Vermessung als was die Abschätzung betrifft, und wir wollen hier diesen wichtigen Theil der praktischen Feldmeßkunst

meßkunst eben so ausführlich darstellen, als wir im zweiten Theile die Theilung der Gemeinheiten und das Zusammenlegen der Feldmarken abgehandelt haben.

1) Plan zur Verfertigung der Steuerrollen.

Wir wollen annehmen, das Land, von welchem der Trigonometer die Steuerrollen machen soll, habe 60 Quadratmeilen Fläche, jede von 5000 metrischen Morgen, und sey in vier Bezirke, jeder von 15 Quadratmeilen eingetheilt. Ferner habe die Regierung den Zweck, die Dauer und die Kosten der Messung auf folgende Weise bestimmt:

„Es soll ein genaues Cadaster vom ganzen Lande „gemacht werden. Die Genauigkeit soll so seyn, daß „nicht mehr als 1 Procent in Hinsicht der Größe der „Grundstücke darf gefehlt werden, und nicht mehr als „10 Procent in Hinsicht der Abschätzung des reinen Ertrags. Die Dauer der Verfertigung des Cadasters ist „auf 8 Jahre festgesetzt, wovon 3 Jahre für die Einrichtung des Geschäfts, und 5 Jahre für die Ausführung „desselben bestimmt sind. Die Kosten sind auf zwei und „einen halben Frank für den metrischen Morgen festgesetzt. Hiemit werden alle Ausgaben bestritten, welche „auf die Verfertigung des Cadasters Bezug haben, die „Verfertigung der Rollen und der Karten mit eingerechnet."

Nach diesen Bestimmungen würde die Verfertigung des Cadasters jedes Jahr 93750 Franks, oder 31250 Rthlr. kosten. Dieses ist eine große Ausgabe, aber eine Stunde Straßenbau kostet auch oft 30000 Rthlr., und

30 die

die richtige Vertheilung der Abgaben ist eine eben so große Wohlthat für die Gesellschaft als gute Straßen.

Entschließt sich der Staat zu dieser Ausgabe, dann muß auch dafür gesorgt werden, daß alles das geschehe, was für eine so bedeutende Summe geschehen kann, und daß der Staat nur einmal diese Ausgabe zu machen hat, und in Zukunft durchaus nichts mehr braucht messen zu lassen, da die Cadasterkarten über jede Frage Auskunft geben müssen, welche der Chef von jedem Zweige der Verwaltung, an Karten nur immer thun kann.

Die Vermessung muß auf vier verschiedenen Dreiecksystemen beruhen, wovon das eine das andere controllirt; die Abschätzung muß sich auf die Natur und die Lage des Bodens gründen, welche immer dieselbe bleibt, indeß Eigenthümer und Kulturarten wechseln.

2) Uebersicht aller Cadasterarbeiten.

1) Werden drei verschiedene Systeme von Dreiecken über das ganze Land gezogen; die vom ersten, zweiten und dritten Rang. An diese schließen sich die kleinen Dreiecke des vierten Rangs an, welche der Geometer auf seinem Meßtische construirt. Hierdurch verbinden sich alle Arbeiten der Geometer, weil sie von den festen Punkten desselben Dreiecknetzes ausgehen.

2) Werden mit dem Meßtische alle Grundstücke aller Eigenthümer in dem Maßstabe von 2000 zu 1 aufgenommen. Jeder Plan ist ein halbes Meter lang und breit, sein Inhalt ist genau 100 metrische Morgen. Die Flurkarte des Landes besteht also aus 3000 solcher Plane.

3) Wer-

3) Werden diese Plane in den Maßstab der Gemeinekarten von 1000 zu 1 reducirt. Diese sind 8 Decimeter lang und 5 hoch. Es gehen also 40 Flurkarten auf eine Gemeinheitskarte. Die Gemeinheitskarte des Landes besteht demnach aus 75 Blättern.

4) Die Gemeinheitskarten werden in dem Maßstab der Bezirkskarten, von 50,000 zu 1 reducirt. Diese haben dasselbe Format, und werden etwa 5 oder 6 ausmachen, da einige, die über die Landesgrenze fallen, zum Theil weiß bleiben.

5) Die Bezirkskarten werden in den Maßstab der Landeskarte von 200,000 zu 1 reducirt, welche auf einem Blatte das ganze Land darstellt.

Alle diese Maßstäbe sind decimal. Sie sind aus der Reihe genommen, welche im Depot de la guerre von Frankreich angenommen, und im Memorial topographique, Cahier 5., bekannt gemacht sind. Es sind N^ro. 1, 3, 5 und 7.

6) Werden die Meßregister für die 3000 Flurkarten berechnet, so wie dieses Seite 387 des zweiten Theils, bei der Aufnahme der Gemeinheiten ist gezeigt worden. Die Meßregister enthalten die Namen der Eigenthümer, und die Größe jedes einzelnen Grundstücks, welches sie besitzen.

7) Werden die Grundstücke nach der Güte des Bodens in verschiedene Klassen gebracht, und für jede Klasse der reine Ertrag entwickelt.

8) Nach dem reinen Ertrage bestimmt sich der Steuerantheil jeder Klasse nach Morgen. Multiplicirt man nun die Größe jedes Stückes mit dem Steuerantheile der Klasse, in die es gehört, so findet man den Steuer-

antheil

antheil des Stücks, und den des Eigenthümers, wenn man den von allen Stücken zusammen addirt, die ihm gehören. Hierdurch entsteht die Steuerrolle.

9) Wird eine Tabelle über jede Kulturart jeder Gemeine entworfen, welche angibt, wie viel Morgen Garten, Wiesen, Ackerland u. s. w. in der Gemeine ist, und wie viel ihr reiner Ertrag ist.

10) Dieselbe Tabelle wird für jeden Bezirk und fürs ganze Land gemacht.

3) Vertheilung der Arbeiten.

In jedem Bezirke wird eine Plankammer eingerichtet. Diese besteht aus

1 Trigonometer der die Dreiecke des zweiten Ranges macht.
1 Sekretär.
2 Zeichner, welche die Flurkarten copiren.
2 Rechner, welche die Rechnungsregister nachrechnen.

Ferner ist, in jedem Bezirk eine Brigade Geometer. Diese besteht aus

1 Trigonometer der ihnen die Dreiecke des dritten Ranges macht.
1 Rechner, welcher ihm bei seinen Rechnungen hilft.
10 Geometer, welche die Flurkarten mit dem Meßtische aufnehmen, und aus
10 Feldmessern, welche bei diesen als Lehrlinge arbeiten, und sich zu Geometern bilden.

Endlich ist in jedem Bezirk ein Oberabschätzer, der unter dem Trigonometer der Plankammer arbeitet.

Der Gang der Arbeiten ist dann folgender:

Der Trigonometer der Plankammer erhält von dem Direktor der Landesvermessung die Dreiecke des ersten Ranges. Die Seiten derselben sieht er als eben so viele Standlinien an, welche er bei seinen Dreiecken des zweiten Ranges zum Grunde legt. Er mißt die Winkel mit einem 7zölligen Spiegelsextanten. So wie er die Dreiecke des zweiten Ranges vollendet hat, so übergibt er diese dem Trigonometer auf dem Felde, welcher unter ihm arbeitet, und der mit einem fünfzölligen Spiegelsextanten, oder mit einem Astrolabio die Winkel für die Dreiecke des dritten Ranges mißt.

Sind diese fertig, so werden sie auf der Plankammer auf die Meßtische der Geometer getragen, und diese nehmen nun zwischen diese feste Punkte, das Detail der Gegend im Maßstab von $\frac{1}{2000}$ auf. Die Geometer liefern ihre Flurkarten an die Plankammer ab, und legen zugleich ihr Journal, ihr Rechnungsregister und ihr Meßregister bei. Diese werden auf der Plankammer nachgerechnet, um alle Fehler aufzufinden, und aus ihnen und aus den Abschätzungen des Oberabschätzers läßt der Trigonometer dann die Steuerrollen zusammensetzen.

Die Steuerrollen werden, nebst der Copie der Flurkarten, die auf der Plankammer gemacht wird, an den Direktor der Landesvermessung geschickt, dieser läßt sie auf seinem Bureau nachsehen, und die Karten in den Maßstab von $\frac{1}{10000}$ reduciren. Die Rollen werden dann der Regierung zur Genehmigung vorgelegt.

Wenn alle Arbeiten im Gange sind, so können in jedem Bezirke jährlich ungefähr 15000 metrische Morgen gemessen und cadastrirt werden; da man im Durchschnitte annehmen kann, daß jeder Geometer mit seinem Feldmesser auf diese Weise jährlich 1500 Morgen begrenzen, aufnehmen, zeichnen und berechnen kann.

Die Begrenzung der Stücke geschieht durch die Eigenthümer. Da diese gewöhnlich in diesem Punkte nachlässig sind, so müssen die Geometer dieses im Winter auf Kosten der Eigenthümer, und auf die Weise thun, wie solches im zweiten Theile Seite 335 ist gelehrt worden. Bei dieser Begrenzung der einzelnen Stücke sowohl, wie der Gemeinen, lernt der Geometer die Gegend kennen, die er den nächsten Sommer aufzumessen hat, und dieses erleichtert ihm seine Aufnahme.

Zu jedem Meßtische gehören 6 Blätter. Das Papier wird auf der Plankammer aufgespannt, und die Tischblätter dem Geometer zugesandt, der sie voll arbeitet und dann wieder zurückschickt. Sie bleiben auf der Plankammer aufgespannt, bis sie mit der Copiermaschine copiert sind.

Da das ganze Land als ein Continuum mit Quadraten aufgenommen wird, so machen die Gemeinegrenzen dem Geometer keine Schwierigkeit, auch selbst dann nicht wenn sie streitig sind. Die alten Gemeinegrenzen sind sehr irregulär, sie sind in vergangenen Jahrhunderten, durch Lehnsverbindungen, Familienverhältnisse und andere Umstände entstanden, welche es gemacht haben, daß oft Stücke von einer Gemeine, wie Inseln oder Halbinseln in einer andern liegen. Eine allgemeine Landesvermessung gibt die beste Gelegenheit, den Gemeinen natürliche Grenzen zu geben. Der Geometer zieht daher nur die alten Grenzen mit Farben auf seine Karte; sind sie zwischen zweien Gemeinen streitig, so zieht er beide darauf, und hiernach werden auf der Plankammer natürliche und dem Interesse der Einwohner angemessene Grenzen entworfen, welche nachher von der Regierung genehmigt werden. Sind sie genehmigt, so wird für jede Gemeine ihre Karte nach diesen Grenzen im Maßstabe von $\frac{1}{10000}$ gezeichnet, und sie bekommt zugleich eine Copie von den Blättern der Flurkarten, die innerhalb diesen Grenzen liegen, und die im Maßstabe von $\frac{1}{2000}$ gezeichnet sind. Es ist ein großer Vortheil, den das Aufnehmen mit Quadraten hat, daß man nachher in den Karten jede Grenzveränderung machen kann, welche die Regierung für gut findet. Auch ist es eine große Ersparniß, in Hinsicht der Grenzsteine, wenn die Gemeine grade und natürliche Grenzen haben.

4) Die Abschätzung des reinen Ertrags.

Da der Trigonometer der Plankammer die Steuerrollen seines Bezirks zusammensetzen muß, so muß er auch die Abschätzung des reinen Ertrags leiten, und ich will deswegen hier kurz die Grundsätze berühren, auf denen sie beruht. Ausführlicher habe ich dieses in einem Aufsatze: Ueber die Verfertigung genauer Steuerrollen entwickelt, der im Westphäl. Anzeiger von 1806 abgedruckt worden ist.

Bei der Ausmittelung des reinen Ertrags, nimmt der Abschätzer allein auf die Güte des Bodens und auf die Preise der Früchte Rücksicht, welche darauf gezogen werden. Nachdem er den Bezirk nach allen Richtungen durchgangen, so theilt er ihn in 8 oder 10 Ackerdistrikte ein, wobei er sich nach der Lage der Flöze, nach der Richtung der Gebürgsketten und nach dem Laufe

der

der Flüsse richtet. Diese Distrikte bringen Zusammenhang in die Abschätzung. Sie sind für diese ungefähr dasselbe, was die Dreiecke des ersten Rangs für die Messung sind.

Bei der Abschätzung geht man von folgenden Grundsätzen aus:

1) Ein Acker wird gewöhnlich um so theurer bezahlt, je fruchtbarer er ist. Der Ertrag hat also einen großen Einfluß auf den Kaufpreis, und man kann von diesem immer einigermaßen auf jenen schließen.

2) Einen noch größern Einfluß hat der reine Ertrag auf die Pachtpreise. Denn wenn auch jemand einen Acker aus Liebhaberei ein wenig zu theuer bezahlt, so wird doch keiner aus Liebhaberei zu theuer pachten. Man kann also mit großer Sicherheit von den Pachtpreisen der Aecker auf ihren reinen Ertrag schließen.

3) Endlich kann man den reinen Ertrag aus dem rohen Ertrag entwickeln, wenn man von diesem alle Kulturkosten abzieht.

Er sammelt deswegen alle Kaufbriefe, um aus ihnen den mittlern Kaufpreis zu entwickeln. Eben so sammelt er alle Pachtbriefe, um die mittleren Pachtpreise zu finden. Endlich sammelt er alle Nachrichten über den mittleren Ertrag der Aecker in gewöhnlichen Jahren. Nachdem er hiebei die Meinungen der verständigsten Ackerleute seines Distrikts zu Rathe gezogen, so arbeitet er eine Tabelle über den reinen Ertrag der verschiedenen Kulturen des Ackerdistrikts aus, wobei jede Kulturart, wenigstens in drei und höchstens in fünf Klassen getheilt werden.

Diese Tabellen werden an den Direktor der Vermessung geschickt, welcher alle drei Monathe die Trigonometer und Oberabschätzer bei sich versammelt. In dieser Versammlung werden die Tabellen untersucht, und definitiv festgesetzt.

Folgendes ist ein Muster einer solchen Tabelle:

	1	2	3	4	5
Kulturen	Nach den Käufen	Nach den Pächten	Nach dem rohen Ertrag	Mittel aus 1, 2, 3 fur den reinen Ertrag	Steuer-Anschlag
Felder					
1. Klasse	—	—	—	—	—
2. —	—	—	—	—	—
3. —	—	—	—	—	—
4. —	—	—	—	—	—
Wiesen					
1. Klasse	—	—	—	—	—
2. —	—	—	—	—	—
3. —	—	—	—	—	—
Weinberge					
1. Klasse	—	—	—	—	—
2. —	—	—	—	—	—
3. —	—	—	—	—	—
4. —	—	—	—	—	—
Waldungen					
1. Klasse	—	—	—	—	—
2. —	—	—	—	—	—
3. —	—	—	—	—	—
Wiesen					
1. Klasse	—	—	—	—	—
2. —	—	—	—	—	—
3. —	—	—	—	—	—

Ist der reine Ertrag jeder Kulturart festgesetzt, so werden in jeder Gemeine zwei Ackerverständige gewählt,

welche

welche den Oberabschätzer beim speciellen Classificiren der einzelnen Grundstücke begleiten, und hiebei eine berathende Stimme haben. Er hat die Flurkarten hiebei in der Hand, und schreibt mit Bleistift in jedes Stück, in welche Classe es gehört. Zu Hause schreibt er neben jedes Stück die Classe ins Meßregister, in welchem hiefür eine besondere Colonne offen geblieben.

Nachdem dieses geschehen ist, so legt er die Karten, die Tabelle des reinen Ertrags und die Classirung auf dem Gemeindehause nieder, und läßt bekannt machen, daß jeder Eigenthümer sie durchsehen möge, und seine Bemerkungen darüber machen. Nach einem Monate werden alle diese Stücke, nebst den Bemerkungen der Grundeigenthümer, nach der Plankammer geschickt, wo man sie untersucht, und aus ihnen die Steuerrollen zusammensetzt.

5) Die Zusammensetzung der Mutterrollen.

Ist die Umfangslinie einer Gemeine bestimmt, und sind alle Data gesammelt, welche sich auf den Steueranschlag beziehen, so legt der Trigonometer der Plankammer alle Flurkarten nebeneinander, welche innerhalb der Umfangslinie der Gemeinen liegen, und schreibt in jedes Stück eine schwarze Nummer, 1, 2, 3, 4.... wobei er oben anfängt, und von der Linken nach der Rechten so lange fortfährt, bis er unten ist, und alle Stücke nummerirt sind. Dann legt er die Meßregister, die zu diesen Flurkarten gehören, ebenfalls beisammen, und schreibt aus ihnen die Mutterrolle der Gemeine in 10 Colonnen zusammen.

In der 1ten Col. steht die Nummer der Mutterrolle, z. B. 117.

2ten = steht die rothe Nummer des Meßregisters, z. B. 35.

3ten = die gegenwärtige Cultur, z. B. Ackerland.

4ten = der gegenwärtige Besitzer, z. B. J. Berg.

5ten = der gegenwärtige Pächter, z. B. Peter Weiß.

6ten = die Nummer der Bodengüte der Gemeine, z. B. 3.

7ten = die Ackernummer des Landes in Hinsicht der Steuer nach Morgen, z. B. 87 Decimen.

8ten = die Größe in Morgen und Ruthen, z. B. 4,3 Morgen.

9ten = die Grundsteuer des Stücks, in dem die Colonne 7 und 8 mit einander multiplicirt, 37 Fr. 4. Decim.

10ten = der reine Ertrag, in dem man die 9te Colonne mit 5 multiplicirt, wenn nemlich die Grundsteuer $\frac{1}{5}$ ist.

Sobald die Mutterrolle vollendet ist, wird sie an den Direktor der Landesvermessung zur Untersuchung eingeschickt. Dieser läßt alle Zahlen auf seinem Büreau nachrechnen, und schlägt dann der Regierung die vorläufige Annahme derselben vor. Sind noch Fehler darin, so finden diese sich gleich im ersten Jahre, wenn nach der neuen Rolle die Steuer erhoben wird. Hat sie endlich auch diese Probe überstanden, so wird sie definitiv angenommen, und es wird an der Mutterrolle nichts mehr geändert.

6) Der jährliche Steuerzettel.

Die Mutterrolle bleibt ungeändert, — allein jährlich wird ein neuer Steuerzettel gemacht, welcher die Namen der gegenwärtigen Besitzer enthält, und in dem aus der Mutterrolle ausgezogen wird, wie viel jeder hat, und wie viel er von jedem bezahlen muß. — Dieser Steuerzettel wird von einem Ausschuß aus dem Gemeinderath gemacht, und jedes Jahr einen Monat offen gelegt. Er enthält mit Ab- und Ansetzen die Veränderungen, die in dem Jahre durch Tausch, Kauf, Erbschaft u. s. w. in der Gemeine vorgefallen sind.

7) Von der Controlle des Geschäfts.

Ob die vorgeschriebene Genauigkeit in allen Theilen des Geschäfts erreicht werde, controllirt sich bei dieser Einrichtung der Cadasterarbeiten sehr leicht. Der Trigonometer besucht jede Woche seine Geometer auf dem Felde, sieht ihre Arbeiten nach, untersucht ihre Papiere, mißt ihnen eine Linie auf dem Meßtische nach, und dieselbe nachher auf dem Felde, sieht, ob sie gut begrenzen u. s. w. — Auf der Plankammer werden ihnen alle Rechnungsregister nachgerechnet, und jede Nachläßigkeit in der Arbeit findet sich gleich. — Umgekehrt controlliren die Geometer auch wieder ihre Obern, indem sie kleine Standlinien auf dem Felde messen, und so die Genauigkeit der festen Punkte untersuchen, die von den Trigonometern auf ihren Meßtisch gezeichnet sind.

Diese beständige Controlle hält alle Arbeiter aufmerksam, und jeder bekommt Freude an einer Arbeit, die immer sichern Schrittes und ohne Verwirrung vorwärts schreitet, und bei der das Treffliche so gut wie das Mitgelmäßige von den Obern bemerkt wird. Auch sind diese Arbeiten nicht schwer, sobald sie einmal im Gange sind, weil jeder das ganze Jahr immer dieselbe Arbeit macht, und daher bald eine große Uebung darin erhält. Die Zeichner auf der Plankammer thun das ganze Jahr nichts wie die Plane der Geometer copiren, — die Rechner thun nichts wie Rechnungen wiederholen, die Geometer nichts wie aufnehmen, — und dieses gibt nicht allein eine große Uebung, sondern auch eine große Schnelligkeit im Arbeiten.

Die unvermeidlichen Fehler sind durch die Anwendung der besten Instrumente in sehr engen Grenzen eingeschlossen. Die Gleichheit in den Grundsätzen führt zu einer Gleichheit der Resultate, und selbst die kleinen unvermeidlichen Fehler werden immer mehr oder weniger gleichförmig vertheilt, da man sowohl in der Messung als in der Abschätzung vom Allgemeinen zum Besondern herab steigt. Auch ist nicht möglich, daß irgend ein Betrug statt finde, weil die Arbeiten durch so viele Hände gehen. Es ist gerade wie in einer Fabrik. Jeder macht nur einen Theil des Fabrikats, und wenn es in die Hände des folgenden kommt, so findet dieser die Fehler, die der vorige gemacht hat.

In allen Theilen des Cadasters macht sich die Controlle in den drei nächsten Monaten nach der eingeschickten Arbeit. Weder der Trigonometer, noch die Rechner, noch die Zeichner dürfen die Verificationen warten lassen, weil sich diese sonst täglich häufen, da die Brigade-Geometer jede Woche ihre Arbeiten einschicken.

Die Geschwindigkeit in der Controlle gibt auch eine Geschwindigkeit im Bezahlen, die sehr wohlthätig aufs Ge-

Geschäft wirkt, da keine Arbeiten früher bezahlt werden können, bis sie untersucht sind.

8) Vom Bezahlen der Arbeiten.

Sobald die Controlle gut eingerichtet ist, so kann die Bezahlung pünktlich geschehen. Viele Cadasterarbeiten sind durch die Unordnung des Bezahlens zu Grunde gegangen. Die Geometer erhielten ihren verdienten Lohn erst nach Jahren, weil die Verification nicht zu Ende ging.

Die beßte Art des Bezahlens ist die, daß die Hälfte der Bezahlung festes Gehalt ist, und die andere Hälfte in Belohnung für fertige Arbeit besteht. Ein Trigonometer bei der Bergischen Landesvermessung bekam z. B. 500 Rthlr. Gehalt, und 500 Rthlr. Gratificationen, etwas mehr oder weniger, je nachdem er viele Quadratmeilen triangulirt, und viele Winkel und Dreiecke gemessen hatte.

Für jede Quadratmeile, die ein Trigonometer triangulirte, bekam er 4 Rthlr.; für jeden Horizont, wo er rund maß, 3 Rthlr.; für jedes Signal 2 Rthlr.; für jedes Dreieck des ersten Ranges, 4 Rthlr.; für jedes vom zweiten Range, 2 Rthl.; für jeden Winkel $\frac{1}{3}$ Rthl. Durch diese Vertheilung des Bezahlens wurde der Vortheil des Trigonometers aufs engste mit dem Interesse der Messung verbunden. Hiebei wurde die Anzahl der Quadratmeilen, durch die Umfangslinie bestimmt, welche das gezeichnete Dreiecknetz auf dem Papier einnahm; für jeden Ort wurde nur ein Horizont bezahlt, wenn auch die Winkel in mehrere zusammengestellt waren. Die Anzahl der zum Trianguliren nöthigen Dreiecke wurde

aus

aus dem Netze abgezählt, und die Anzahl der Winkel wurde theils nach der Anzahl der Dreiecke, theils nach der Anzahl der Horizonte bestimmt, wobei für jeden Horizont nicht mehr als 12 Winkel gerechnet wurden, gesetzt auch, daß der Trigonometer Gründe hatte, mehrere zu messen.

Als Beispiel will ich eine halbjährige Rechnung über die Arbeiten eines Trigonometers hieher setzen.

Es waren 16 Q. Meil. gemessen, à 4 Rth. macht	64	Rth.
13 Horizonte, à 3 Rthl. . .	39	=
6 Signale, à 2 Rthl. . . .	12	=
28 Dreiecke des 1. Rangs, à 4 Rth. =	112	=
28 = = 2. = à 2 Rth. =	56	=
162 Winkel, à $\frac{1}{3}$ Rthl. . . .	54	=
Summe der Gratifikationen	337	=
Gehalt für 6 Manathe	250	=
Einnahme des Trigonometers	587	=

Hiefür mußte er seinen Gehülfen selber besolden, und auch die Meßlöcher in den Thürmen machen und schließen, so daß weiter keine Nebenrechnungen statt fanden. Zu den Dreiecken des ersten Ranges wurden alle gerechnet, deren Seiten größer als 10000 Meter waren, und zu denen des zweiten Rangs, deren Seiten zwischen 2500 und 10000 Meter waren.

Ehe die Bezahlung geschah, wurden folgende Proben über die Genauigkeit der Arbeit angestellt.

1) Wurden die Tagebücher des Trigonometers mit den Berichten verglichen, die er jede Woche während dem Laufe der Messung, an die Direktion eingeschickt hatte, und in denen jeder Winkel angegeben war, der in der

Woche

Woche gemessen worden. Für jeden Bericht der fehlte, wurden 5 Rthlr. an den Gratifikationen abgezogen.

2) Wurden die Tagebücher durchgesehen, ob sie genau der Vorschrift gemäß geführt waren.

3) Dann wurde das Buch der Horizonte nachgesehen, ob es mit den Tagebüchern stimmte, und wie groß die Abweichung von 360 Grad war. Das Maximum war 48 Sek. Also noch 12 Sek. unter der erlaubten Fehlergrenze.

Die mittlere Abweichung gaben 60 Horizonte zu 21 Sekunden.

4) Wurde das Buch der Dreiecke mit den Horizonten verglichen. Das Maximum der Abweichung von 180° Grad war einmal 25″ und einmal 37″. Die mittlere Abweichung war in 22 Dreiecken 15 Sek. (Die Winkel waren mit einem fünfzölligen Troughtonschen Sextanten gemessen.)

Die mittlere Abweichung in Horizonten und Dreiecken war 18″, also 12 geringer als die erlaubte Fehlergrenze.

5) Darauf wurde die Berechnung der Dreiecke wiederholt. 31 Seiten gaben als Maximum der Abweichung zweier Resultate für dieselbe Seite $\frac{1}{2000}$ in den Dreiecken des zweiten Rangs, und $\frac{1}{3000}$ in denen des ersten. Ihre mittlere Abweichung war $\frac{1}{6600}$.

Endlich gaben diese Dreiecke die Länge der Verifications-Linie zu . . . . . . 8039,26 Met.
die unmittelbare Messung gab . 8038,73 =

Unterschied = 0,53 =

oder $\frac{1}{16000}$ des Ganzen.

Man

Man sah hieraus, daß die Vermessung mit Sorgfalt gemacht war, und daß die kleinen unvermeidlichen Fehler sich sehr gut gegen einander aufgehoben.

Für die Dreiecke des dritten Rangs, welche der Trigonometer für die Meßtische macht, und deren Seiten gewöhnlich 1000 bis 1500 Meter Länge haben, ist folgendes der schicklichste Maßstab des Bezahlens:

1) Für jede Quadratmeile zu trianguliren 40 Rthlr.
2) Für jedes Dreieck 1 Rthlr.
3) Für jeden Horizont 2 =
4) Für jeden Winkel $\frac{1}{3}$ =
5) Für jede Flurkarte seiner Brigade 3 Rthlr.

Die Signale in den Dreiecken des dritten Rangs sind unbedeutend, und werden nicht besonders bezahlt.

Die Geometer bekommen jährlich 600 Rthlr., wofür sie sich selber ihren Gehülfen stellen. Sie erhalten 200 Rthlr. Gehalt und 400 Rthlr. in Gratifikationen. Nemlich für jeden Morgen 10 Stbr., welches 250 Rthlr. jährlich einbringt, und für jede Parcelle 1 Stbr., welches auch etwa 150 Rthlr. macht. Die Grenzberichtigungen und das Steinsetzen wird ihnen von den Privaten bezahlt.

Uebersicht der jährlichen Kosten des Cadasters.

Die 40 Geometer in den vier Bezirken erhalten jeder à 600 Rthlr. . . .	24000 Rthlr.
8 Trigonometer mit ihren Gehülfen .	8000 =
4 Oberabschätzer = = = .	4000 =
8 Zeichner, jeder 400 Rthlr. . .	3200 =
4 Sekretaire u. 8 Rechner, jeder 400 .	4800 =
Kosten des Generalbureau's . .	5000 =
Summa	48000 =
und in 5 Jahren	240000 =
Einnahme in 5 Jahren	250000 =

Hiernach bleiben also noch 10000 Rthlr. disponibel für die Einrichtung der Plankammer in den ersten drei Jahren; für die Dreiecke des ersten Rangs, und für den Ankauf der Instrumente *).

Allge=

*) Zu den größten Unternehmungen dieser Art, gehört das Cadaster in Frankreich, an dem schon seit zehn Jahren unabläßig gearbeitet wird. Im Jahr 1791 wurde die Allgemeinheit der Grundsteuer dekretirt, und zugleich ein neues Cadaster, zu dem der große Colbert schon den Entwurf gemacht hatte. Die Stürme der Revolution erlaubten nicht die Ausführung desselben. Im Jahr 1802 versammelte der erste Consul eine Special=Commission, welche für das Beste hielt, 1800 Gemeinen in allen Departements durchs Loos zu ziehen, diese zu Cadastriren, und hiernach die Grundsteuer des ganzen Departements zu bestimmen. Diese Arbeiten waren indeß

wenig

Allgemeine Bemerkungen über die Verfertigung genauer Cadaster.

Die meisten Cadasterarbeiten, welche man in neuern Zeiten unternommen hat, sind ins Stecken gerathen. Die Ursache war gewöhnlich die, daß man mit zu wenig Kenntnissen über den Umfang und die Schwierigkeiten des Geschäfts anfing, daß man vorher nicht genau genug die Summen und die Zeit berechnete die es koste, daß man dem Geschäft gleich eine große Ausdehnung gab, ehe man die Plankammer gehörig organisirt, und die Men-

wenig befriedigend, und zwei Jahre nachher wurde die Vermessung und Abschätzung *aller Gemeinen* von Frankreich dekretirt. Nach den darüber festgesetzten Preisen kam diese Arbeit für ganz Frankreich auf ungefähr 67 Millionen Francs zu stehen.

Allein man sah bald ein, daß dieses Cadaster immer unvollkommen bleiben würde, weil man dann zwar die Gemeinen unter sich richtig anschlagen könne, allein die einzelne Eigenthümer wären doch noch immer der Willkühr in der Vertheilung ausgesetzt. Im Jahr 1805 wurde deswegen befohlen, daß das Cadaster ganz speciel seyn, und daß jeder Eigenthümer alle seine Stücke deklariren solle, und zwar sollten diese Deklarationen mit dem Plane der Gemeine übereinstimmen. Hiedurch trat das Cadaster in seine dritte Periode, in der es ungefähr 110 Millionen würde gekostet haben.

Endlich fand man, daß die Arbeit mit den Deklarationen weder genau noch geschwind gehe, und den 1sten Decemb.

Menschen, welche man brauchte, gebildet hatte. Hierdurch wurden dann eine Menge Plane und Meßregister fertig, deren Güte sehr zweifelhaft war. Die Geometer, welche nicht unter einer beständigen Aufsicht der Trigonometer arbeiteten, erlaubten es sich, Standlinien auf dem Papiere zu ziehen, die sie auf dem Felde nie gemessen hatten, und wenn dann bei der Verification der größte Theil dieser Arbeiten verworfen wurde, so fing man endlich an der Möglichkeit zu zweifeln, ein genaues Cadaster zu Stande zu bringen.

In

Decemb. 1807 trat das Cadaster in seine 4te Periode; — es wurde nemlich dekretirt, daß alle Stücke aller Eigenthümer von ganz Frankreich sollten gemessen werden. Seit der Zeit wird dieser Plan unaufhörlich befolgt. Man rechnet, daß das Cadaster in 30 Jahren wird vollendet seyn, und daß die Kosten der Vermessung allein etwas über 200 Millionen, und die der übrigen Arbeiten des Abschätzers, des Verfertigens der Rollen u. s. w. noch etwa 50 Millionen betragen.

Umständlich findet man die Geschichte des französischen Cadasters in der Collection des lois relatifs à l'arpentage cadastrale. Paris, chez Rondonneau. IV. Tomes, und in dem Récueil méthodique, welches im Jahr 1812 im Finanzministerio erschienen ist. Dieses ist in Quarto und ein systematischer Auszug aus der Collektion des lois, wobei alle Verordnungen ausgelassen sind, die durch eine spätere Verfügung wieder aufgehoben worden. Allein dieses Récueil ist bis jetzt noch nicht in den Buchhandel gekommen, sondern blos an die Angestellten des Cadasters vertheilt worden.

In Frankreich hat man schon seit dem großen Colbert an einem allgemeinen Cadaster gearbeitet — allein das Interesse der privilegirten Stände war so sehr dagegen, daß keiner der vielvermögenden Minister es auch nur zum Theil ausführen konnte. Mit der Revolution fielen die Hindernisse, welche diese in den Weg legten, weg, und der Cadaster von Frankreich wurde selbst eine Lieblingsidee des Volks. Der berühmte Mathematiker Prony stand eine Zeitlang an der Spitze, und in der schlimmsten Periode der Revolution wurden die größten Mathematiker beim Cadaster angestellt, um die großen Decimaltafeln zu berechnen, und — um ihnen Brod zu verschaffen. Als man nachher fand, daß das Cadaster wenige Fortschritte gemacht hatte, so glaubte man, die Schuld läge an den Gelehrten, welche kein bürgerliches Geschäft zu fördern verständen, und sich immer mit einer scrupulösen und unnöthigen Genauigkeit aufhielten, wie z. B. mit dem Berechnen der großen Decimaltafeln von 10 Stellen, da die vorhergehenden von 5 Stellen schon mehr als hinreichend genau fürs Cadaster wären.

Man versuchte es nun einmal auf einem andern Wege, indem man Personen anstellte, welche wenigstens als Mathematiker nicht berühmt waren. Allein auch hiemit scheint es Schwierigkeiten gehabt zu haben, wie man aus dem öfteren Verändern des Plans schließen sollte, und vielleicht hätte man das Cadaster aufgegeben, wenn nicht der Kaiser für die Ausführung des großen Planes wäre, und wenn nicht die große Beharrlichkeit für die Vollendung desselben bürgte.

Vielleicht hätte man weniger Schwierigkeiten gefunden, wenn man das provisorische Cadaster und das

definitive

definitive zu gleicher Zeit angefangen hätte. Man kann ein provisorisches Cadaster, welches nur für einige Jahre ist, recht gut auf die Erklärungen der Eigenthümer bauen; weil jeder seine Grundstücke richtig angibt, sobald er weiß, daß die allgemeine Messung kommt, die über die Richtigkeit seiner Angabe entscheidet.

In der Verfertigung der Cadaster gibt es drei verschiedene Stufen. Man darf keine überspringen, will man etwas Vollkommnes in einer möglichst kurzen Zeit liefern.

Wenn, wie dieses in neueren Zeiten öfter der Fall war, eine Vereinigung von Ländern und Provinzen statt findet, die früher sich fremd waren, so ist zwischen ihnen kein Verhältniß für die Grundsteuer bekannt. Um nun gleich etwas beiläufig genaues zu finden, so muß man ihren Steueranschlag 1) nach ihrer Bevölkerung berechnen, 2) nach ihrer Größe in Quadratmeilen und 3) nach ihren bisherigen Abgaben. Nimmt man dann aus allen dreien Angaben das Mittel, so erhält man ein Verhältniß, was wenigstens beiläufig genau ist. Dieses ist die erste Stufe des Cadasters. Hierdurch erhält man aber keine Vertheilung im Innern, und man muß die alten Vertheilungsarten der verschiedenen Provinzen wenigstens fürs erste Jahr beibehalten, bis man das vorläufige Cadaster fertig hat, welches auf den Erklärungen der Eigenthümer beruht.

Man läßt dann aus den vorhandenen Karten die Größe der verschiedenen Provinzen und Bezirke, so gut berechnen als es geht, um einigermaßen eine Controlle für die Deklarationen der Eigenthümer zu haben. Zugleich läßt man folgende Deklarationszettel drucken, in die jeder Einwohner seine Grundstücke einschreibt:

Vor-

Vorläufiges Cadaster.

Ich unterzeichneter N. N., wohnhaft in der Gemeine N., erkläre hiemit, daß ich folgende Grundstücke in dieser Gemeine besitze:

3 Morgen Ackerland im Herrenfelde.
2 Morgen Wiesen in den Schafbänden, und
10 Morgen Waldungen.

Ich versichere an Eidesstatt, daß ich alles nach beßtem Wissen angegeben, und thue auf alle Stücke Verzicht, die ich nicht angegeben, so wie auch auf das, was ich in der Morgenzahl der angegebenen Stücke verschwiegen habe, so wie sich dieses bei der allgemeinen Vermessung finden wird.

N. N.

Auf diese Weise erhält man sehr genaue Deklarationen, wenn nemlich zugleich die allgemeine Landesvermessung im Gange ist, und die Eigenthümer wissen, daß es nur für wenige Jahre ist, wenn sie ihr Stück auch ein wenig zu hoch angeben.

In jeder Gemeine ist ein Sekretair, welcher die Deklarationen sammelt, und sie mit Hülfe einiger Abschätzer in die Klassen 1, 2 und 3 einträgt. Die Summe der Deklarationen von einem Bezirk, wird mit der Größe des Bezirks verglichen, den die Karten angeben, und beider Uebereinstimmung gibt eine vorläufige Uebersicht über die Güte der Arbeit. Das Abschätzen des Ertrags geschieht auf eine ähnliche Weise wie oben gezeigt worden.

Auf diese Weise erhält man innerhalb Jahresfrist ein provisorisches Cadaster, was zwar nicht fehlerfrei ist, aber doch allgemein brauchbar. Dieses ist die zweite Stufe des Cadasters. Man darf sie nicht überspringen. Sie bildet die Angestellten, verbreitet richtige Begriffe über die Steuerrollen unter den gebildetern Eigenthümern der Gemeine, und erleichtert als Vorarbeit die Arbeiten des definitiven Cadasters in einem hohen Grade.

Ist das provisorische Cadaster vollendet, dann fängt die Organisation fürs Definitive an. Die Plankammern werden eingerichtet. Auf jeder wird ein Trigonometer angestellt, welcher im ersten Jahre nichts thut, als junge Leute unterrichten, welche entweder Feldmesser oder Geometer werden wollen. Diese Pflanzschulen des Zeichnens und der praktischen Geometrie wirken sehr wohlthätig auf den Fortgang des Cadasters. In Frankreich sind die jungen Leute, so lange sie im Cadaster arbeiten, von der Conscription ausgenommen. Da sich nun viele melden, so hat der Trigonometer die Auswahl, und kann diejenigen nehmen, die am meisten Geschick und Talent zur praktischen Geometrie haben.

Uebrigens ist es keinem Zweifel unterworfen, daß sich innerhalb 8 Jahren von jedem Lande ein genaues Cadaster machen läßt, sobald man die Arbeiten zweckmäßig ordnet, sobald man keine Stufe überspringt, und sobald man mit dem Anfange den Anfang macht, nemlich mit der Bildung junger Geometer. Man muß nicht eher anfangen als bis man sicher ist, daß man gute Arbeit erhält. Das Verändern, das Herumtappen, das wieder von vorne anfangen, ist dasjenige, was das Cadaster um seinen Ruf bringt, und wodurch immer am meisten an Zeit und Geld verloren wird.

Wie groß die Wohlthat des neuen Cadasters von

Frank=

Frankreich ist, zeigt eine Tabelle, die der Finanzminister hat bekannt machen lassen. In 208 Gemeinen bezahlten im Durchschnitt die, am niedrigsten besteuerten 46 Fr., und die am höchsten 336 Fr. Nimmt man an, daß sie im Durchschnitt 191 Francs hätten bezahlen sollen, so bezahlten die erstern nur ein Viertel was sie bezahlen sollten, und die letzteren das Doppelte.

Das Cadaster von Frankreich kostet ungefähr 250 Millionen. Die Grundsteuer beträgt jährlich auch 250 Millionen. Mit der doppelten Steuer von einem Jahre bezahlt Frankreich also die Wohlthat der gleichförmigen Vertheilung, welche für Jahrhunderte und für Kind und Kindes Kinder ist, nicht zu theuer.

§. 9.

Entwerfung der Landkarten.

Die Erde ist eine Kugel, und jede Karte ist eine Fläche. Da man die Oberfläche einer Kugel nun wieder auf einer Kugel darstellen kann, so folgt, daß man jedesmal mehr oder weniger fehlt, wenn man einen Theil von der Erdoberfläche auf der Ebene des Papiers darstellt. — Allein dieser Fehler ist sehr klein, so bald dieser Theil der Erdoberfläche nur etwa 3 oder 400 Quad. Meilen beträgt. Wir haben oben gesehen, daß bei unserem größten Dreieck es noch keine 2 Sek. Unterschied macht, ob man es als sphärisch oder eben betrachtete. Bei der Karte von einem Lande das 20 Meilen lang und 20 Meilen breit ist, beträgt der Fehler auf dem Papier noch keine achtel Linie, und ist also völlig unmerklich. Man kann daher alle Karten, die in den Maßstäben $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{50000}$, $\frac{1}{100000}$ und $\frac{1}{200000}$ gezeichnet werden,

immer

immer als völlig eben entwerfen und der Fehler wegen der Krümmung der Erde wird immer ungleich weniger betragen, als die Ausdehnung des Papiers durch Wärme und Feuchtigkeit.

Werden aber von einem Lande, das mehrere tausend Quadratmeilen hat, wie z. B. von Frankreich, specielle Karten im Maßstabe von $\frac{1}{100000}$ entworfen, so ist für diese die schicklichste Entwerfungsart: die Polyedrische. — So wie man den Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen kann, so kann man die Kugel als ein Polyeder von unendlich vielen Flächen betrachten, welche lauter Quadrate bilden, die an zwei Seiten von Meridianen und an den beiden anderen durch Parallelen begrenzt sind. Eine Karte im Maßstab von $\frac{1}{100000}$ kann auf eine künstliche Erdkugel geklebt werden, die 395 Fuß Durchmesser hat. Gibt man den Blättern einen halben Grad für die Höhe, und einen ganzen für die Länge, so würden in unsern Breiten die Blätter ungefähr $\frac{1}{2}$ Meter hoch und $\frac{2}{3}$ Meter lang werden. Das Zusammenlaufen der Meridiane beträgt auf einen halben Grad nur $\frac{1}{134}$ des Ganzen. Die Blätter würden also sehr nahe rechtwinkligt. Auch kann man die beiden Meridiane, die sie begrenzen, ohne merklichen Fehler, als gerade Linien betrachten. Da von so großen Karten, wie die Cassinische, nie alle Blätter zusammengeklebt werden, so würde man es nie bemerken, daß das Ganze der Karte nur auf einer Kugel könne zusammengelegt werden. Auch ist der Unterschied in der Größe zwischen den nördlichen und den südlichen Blättern so groß nicht, daß man ihn im Portefeuille auf eine unangenehme Art bemerkte.

Wählt

Wählt man die Cylinder-Projection, wie bei der Cassinischen Karte, so hat diese das Unangenehme, daß die Meridiane nicht zusammenlaufen, weil die Karte so gezeichnet wird, als wenn das Stücke der Erde, das sie darstellt, ein Zylinder sey.

Wählt man die Kegelprojektion, bei der das Stück der Erde, welches die Karte darstellt, als ein Kegel betrachtet wird, so laufen zwar die Meridiane zusammen, allein man hat dann die Unannehmlichkeit, daß in den vom Meridian des Hauptortes entfernten Blättern, Norden nicht oben ist, sondern in einer Ecke, und daß die Meridiane schief über die Blätter laufen. Dieses ist z. B. der Fall bei der neuen Karte die im Dépot de la guerre im Maßstabe von $\frac{1}{100000}$ von Frankreich und allen benachbarten Staaten gezeichnet wird.

Die polyedrische Projektion ist demnach die bequemste, sobald man die Karte von einem großen Reiche in einem großen Maßstabe entwirft, weil diese der Natur der Sache nach, aus vielen Blättern besteht, die nie in ein Ganzes vereinigt, sondern immer nur zu zwei, drei oder höchstens viere zusammengelegt werden.

Die Entwerfungsart der Landkarten, die auf einem Blatte einen so großen Theil der Erde umfassen, daß die Krümmung derselben merklich wird, werden wir im folgenden Theile lehren. Sie gehören in das Gebieth der Geographie.

Bei einer allgemeinen Landesvermessung, geschieht das Reduciren der Landkarte am besten mit der Reducir-Maschine. Diese ist auf einem großen Tische befestigt, und so eingerichtet wie ein Storchschnabel. Die Flurkarten, die im Maßstabe von $\frac{1}{2000}$ gezeichnet sind, werden

mit

mit den Tischblättern, auf die sie noch aufgeklebt sind, so auf die Maschine befestigt, daß sie genau in das Quadrat passen, welches sie in der Gemeindekarte im Maßstab von $\frac{1}{10000}$ einnehmen sollen. Diese Art des Reducirens, verbindet Schnelligkeit und Genauigkeit, ist aber nur da vorzüglich anwendbar, wo man viele Karten, und alle von demselben Formate und demselben Maßstabe zu reduciren hat.

Wie die Flurkarten gezeichnet werden, ist im ersten und zweiten Theile gelehrt worden. Die Gemeinheitskarten im Maßstabe von $\frac{1}{10000}$ werden ebenfalls in Farben gelegt, und die Berge werden mit der Feder gezeichnet.

Ueber die Größe der Kartenschrift und über die verschiedenen Kartenzeichen, werde ich hier nichts angeben, da man hiebei die Vorschriften befolgen kann, welche das Dépot de la guerre, im 5ten Hefte seines Memorials, mit aller Präcision gegeben hat. Es ist zu wünschen, daß alle Kartenzeichner diese Vorschriften befolgen mögen, theils wegen ihrer Zweckmäßigkeit, und theils weil dadurch die gewünschte Uebereinstimmung in alle topographische Zeichnungen kommt.

§. 10.

Bestimmung der geographischen Länge und Breite.

Bei jeder Landesvermessung wird die Länge und Breite des Hauptorts entweder aus schon vorhandenen Karten genommen, oder aufs neue bestimmt. Diese

Bestim-

Bestimmung gehört indeß mehr in die Geographie als in die Topographie, und wir werden hierin ausführlich im vierten Theile reden, wo wir zugleich diejenigen astronomischen Vorkenntnisse voraussetzen dürfen, welche bei diesen beiden Problemen nothwendig sind.

§. 11.

Nivellement mit dem Barometer.

Der Hauptzweck jeder Landesvermessung ist: eine richtige statistische Uebersicht zu erhalten, in welcher alle die Fragen beantwortet werden, die die verschiedenen Zweige der Verwaltung, der Straßenbau, der Wasserbau, das Forstamt u. s. w. an sie machen. Hiehin gehöret auch eine allgemeine Kenntniß über die Höhe der Gebirge, die Tiefe der Thäler, und das Gefälle der Bäche und Flüsse.

Das zweckmäßigste Instrument des Nivellement eines Landes zu machen, ist das Barometer, oder wie es die Bergleute nennen: die Quecksilberwage. Wir wollen hier nun kurz die Theorie dieser Messungen auseinandersetzen, da wir an einem andern Orte hierüber ausführlicher gehandelt haben *).

§. 12.

Beschreibung der Instrumente.

Die Barometer bestehen aus einer gläsernen Röhre, welche an einem Ende zugeschmolzen ist, und dann mit Queck-

*) Beschreibung eines einfachen Reisebarometers, nebst einer Anleitung zur leichten Berechnung der Berghöhen. Düsseldorf bei Schreiner 1811.

Quecksilber gefüllt. In das offene Ende drückt die Luft, und das Quecksilber steht um so höher, je stärker der Druck ist. In der eben angeführten Schrift habe ich dieses Instrument abgebildet und ausführlich beschrieben. Zu dem dort Gesagten wüßte ich nichts hinzuzusetzen, als daß Herr Loos jetzt die Scale auf die runde Röhre äzt, ohne sie vorher flach zu schleifen. Auch macht er Hebebarometer mit einem Hahne, welche die Eigenschaft haben, daß sie nicht springen, wenn sich das Quecksilber ausdehnt, wie dieses bei den gewöhnlichen der Fall ist. Der Hahn ist nemlich doppelt durchbohrt wie ein lateinisches a T b

e.

Ist er offen, so spielt das Quecksilber durch a b in den kleinen Schenkel. Ist er geschlossen, d. h. ist er um einen Quadranten herumgedreht worden, so ist die Oeffnung e gegen den langen Schenkel gerichtet, und a und b sind verschlossen, da sie an den Seitenwänden der Behrung anliegen. Das Quecksilber kann dann durch c in ein kleines Beutelchen von Gummi Elastik treten, welches hinter dem Hahnen liegt und auch voll Quecksilber ist. So wie sich das Quecksilber ausdehnt, gibt dieses Beutelchen nach, und die Röhre ist nicht mehr der Gefahr des Zerspringens ausgesetzt.

Auch macht Herr Loos jetzt Gefäßbarometer mit gläsernen Cylindern von einer sehr zweckmäßigen Form. Im Zylinder bewegt sich ein Embolus auf und nieder. Dieser ist mit Leder gefüllt und gepolstert. Er gibt daher der Ausdehnung des Quecksilbers nach. Ferner ist die ganze Glasröhre in eine Röhre von Messing einge-

schlossen,

schlossen, und mit Leder gefüttert. In der Messingröhre ist eine Spalte, durch die man die Höhe des Quecksilbers beobachtet. Die Scale ist auf der Messingröhre, und auf dem Schieber ist der Vernier. Das Ganze wird in einen Stock von Holz gesteckt, der inwendig mit Tuch gefüttert ist, ungefähr auf die Weise, wie die Angelruthen, welche man in Stöcken trägt.

§. 13.

Theorie des Höhenmessens.

Der Druck der Luft nimmt von unten nach oben ab und zwar in einer geometrischen Reihe, wenn man in ihr nach einer arithmetischen steigt.

Beweis.

1) Man theile die Atmosphäre in gleich hohe Schichten, wie in folgender Figur, so verhält sich offenbar der Druck, den jede Schicht ausübt, wie ihre Schwere, und die Schwere jeder Schicht verhält sich wie ihre Dichtigkeit, da alle Schichten gleich hoch sind.

2) Die Dichtigkeit verhält sich in jeder Schicht, nach dem Mariottischen Gesetze, wie der Druck mit dem sie zusammengedrückt wird.

Da ferner der Druck von unten nach oben abnimmt, weil immer weniger Schichten drücken, so wird die Dichtigkeit und die Schwere der Schichten, und den Druck, den sie ausüben, ebenfalls von unten nach oben abnehmen, und zwar in demselben Verhältnisse wie der Druck abnimmt, den sie erleiden.

3) Daß der Druck aber in einem geometrischen Verhältnisse abnimmt, kann auf folgende Weise bewiesen werden:

Man nenne den Druck der ganzen Atmosphäre A
den auf die unterste Schicht nenne man . . B
den auf die folgende C
den auf die folgende . . . . D
den auf die folgende . . . . E
u. s. w.

Der Druck, den jede Schicht auf die untere ausübt, ist gleich dem Druck der ganzen Luftsäule, weniger dem Drucke der Luftsäule, die auf dieser Schicht steht, so ist der Druck der untersten oder ersten Schicht $= A - B$
der Druck der zweiten . . . . $= B - C$
der Druck der dritten . . . . $= C - D$
der Druck der vierten . . . . $= D - E$
u. s. w.

4) Da sich nun der Druck, den jede Schicht ausübt, verhält wie ihre Schwere, und diese wie ihre Dichtigkeit, und diese wie der Druck, den sie trägt, so verhält sich der Druck, den jede Schicht ausübt, wie der Druck den sie trägt.

Bei-

Beispiel: Eine Luftschicht von 12 Fuß Höhe, die mit 20 Pfund gedrückt wird, ist also doppelt so dicht, und übt einen doppelt so starken Druck aus, als eine andere von gleicher Höhe, die mit 10 Pfund gedrückt wird.

Daher verhält sich der Druck der ersten Schicht $A - B$
zu dem Druck, den die erste Schicht trägt, zu B
wie der Druck der zweiten Schicht . . $B - C$
zu dem Druck, den die zweite Schicht trägt, also zu C

Also $A - B : B = B - C : C$.

Aus demselben Grunde ist $B - C : C = C - D : D$
und $C - D : D = D - E : E$.

5) Wenn man in einer geometrischen Gleichung die ersten und zweiten Glieder zusammen addirt, so erhält man eine neue geometrische Gleichung.

Also $A - B + B : B = B - C + C : C$.

Und da sich in dieser die Zeichen $+$ und $-$ gegen einander aufheben, so hat man $A : B = B : C$
und $B : C = C : D$
und $C : D = E : F$ u. s. w.

Die Verhältnisse bilden aber eine geometrische Reihe, nemlich $A : B = B : C = C : D = D : E$ u. s. w.

Der Druck der Atmosphäre nimmt also nach einer geometrischen Reihe ab, indeß sich die Anzahl der Schichten nach der arithmetischen Reihe 1, 2, 3, 4 vermindert, nach welcher der Beobachter in die Höhe steigt, welches sollte erwiesen werden.

§. 14.

Gewicht der Luft gegen Quecksilber.

Aus dem vorigen Lehrsatze folgt nun unmittelbar, daß der Druck der Luft von oben nach unten in einer geometrischen Reihe wächst, indeß die Anzahl der Schichten in einer arithmetischen zunimmt. Da beide Reihen auf dieselbe Weise neben einander fortlaufen, und ihre Nullpunkte einander gegenüber liegen, so sind die letztern die Logarithmen, oder die Verhältnißzähler der erstern. (S. II. Theil Seite 65.)

Da ein Barometer, welches von oben nach unten durch die Atmosphäre niedersteigt, in jeder Schicht den Druck angibt, den alle obern auf das Quecksilber ausüben, so wird das Quecksilber in einem geometrischen Verhältnisse steigen, indeß das Barometer in einem arithmetischen durch die Atmosphäre hinabsinkt. In unsern Logarithmentafeln haben wir eine arithmetische und eine geometrische Reihe schon vollständig berechnet, und wir brauchen nur das Steigen des Barometers hiemit in Verbindung zu bringen, um eine leichte und bequeme Rechnung zu haben, welche immer nur aus einem Regula de Tri-Satze besteht.

Wenn das Barometer auf 28 Zoll steht, und das Thermometer auf dem Gefrierpunkte, so ist die Luft 10495mal leichter als das Quecksilber. Eine Luftsäule von gleichförmiger Dichtigkeit, die 10495mal $2\frac{1}{3}$ Fuß, oder 24488 Fuß lang ist, ist also so schwer wie eine Quecksilbersäule von $2\frac{1}{3}$ Fuß, oder 28 Zoll. Wäre die Luft nur mit 14 Zoll Quecksilber zusammen gedrückt, so wäre sie um die Hälfte dünner und leichter, sie wäre dann

20990=

2099omal so leicht als Quecksilber. Eine Luftsäule von 2099omal $1\frac{1}{6}$ Fuß, oder von 24488 ist also so schwer als eine Quecksilbersäule von $1\frac{1}{6}$ Fuß oder von 14 Zoll. Eine Luftsäule von 24488 Fuß ist also jedesmal so schwer als die Quecksilbersäule, die sie zusammendrückt. Diese Zahl 24488 ist beständig, — sie ist eine Folge des Mariottischen Gesetzes, daß sich die Dichtigkeit verhält wie der Druck, und man nennt sie **die beständige Zahl.**

Wenn das Barometer auf 28,00 Zoll steht, so fällt es um 0,01 Zoll, wenn man um 8,743 Fuß steigt, weil eine Luftsäule von 8,743 Fuß so viel wiegt als eine Quecksilbersäule von 0,01 Zoll. Befolgte das Fallen des Quecksilbers dasselbe Gesetz, wie das in die Höhesteigen des Beobachters, so hätte man nur z. B. zu finden, wie hoch man gestiegen wäre, wenn das Quecksilber auf 25 Zoll gefallen ist, folgenden Regula de Tri-Satz:

28,00 — 27,99 Zoll thun 8,743 Fuß, wie viel thun 28,00 — 25,00 Zoll? Antw. 25,23 Fuß.

Aber das in die Höhesteigen ist eine arithmetische Reihe, und das Fallen des Quecksilbers eine geometrische. Man nimmt daher statt der beobachteten Barometerstände ihre Logarithmen aus der nebenstehenden arithmetischen Reihe, um nun das in die Höhesteigen des Beobachters, das auch arithmetisch ist, zu berechnen.

Man hat also: Log. 28,00 — Log. 27,99 thun 8,743 Fuß, wie viel thun Log. 28,00 — Log. 25,00.

Der natürliche Log. von	28,00	ist	7,937374
der von	27,99	ist	7,937017
also ihr Unterschied			0,000357
da der Log. von	28,00	=	7,937374
und der von	25,00	=	7,824045 ist,
so ist ihr Unterschied		=	0,113329

Man

Man hat nun folgenden de Tri-Satz:

0,000357 thun 8,743 Fuß, was thun 0,113329?
Antw. 2775 Fuß.

Hätten wir 8 Decimalstellen statt 6 in den Logarithmen genommen, so hätten wir die Differenz zwischen 28,00 und 27,99 zu 0,00035714 gefunden. Dividiren wir hiemit die Zahl 8,743, so erhalten wir wieder die beständige Zahl 24488 Fuß. Man hat also die kürzere Rechnung:

1 thut 24488 Fuß, was thut 0,113329?
Wir haben demnach folgende leichte Regel zur Berechnung der Berghöhen:

Man nehme von den beiden Barometerhöhen, die man unten und oben beobachtet hat, die natürlichen Logarithmen, ziehe den kleinen vom größern ab, und multiplicire die Differenz mit 24488 Fuß.

Damit man nicht nöthig habe, die Tafeln der natürlichen Logarithmen bei sich zu führen, so habe ich die natürliche Logarithmen von 1300 bis 2900, welche nur einen Bogen einnehmen, hier mit abdrucken lassen. Alle haben die Kennziffer 7, welche aber zur Ersparung des Raums weggelassen ist, die sechs Stellen, welche abgedruckt sind, sind ein Decimalbruch. Bei der Rechnung kann man sich indeß mit der Genauigkeit begnügen, die fünf Stellen geben.

Ueber jeder Tafel stehen die Zolle. In der ersten Spalte stehen die Hunderttheile des Zolls, und unten darunter stehen die Tausenttheile fürs Einschalten.

Man kann bei diesen Rechnungen auch statt der natürlichen die Brigischen gebrauchen, nur muß man dann die

Zahl

Zahl 24488 mit dem Modul des Systems, nemlich mit 2,3025 vorher multipliciren. Dieses ist aber ein Umweg, doch werden die Brigischen Logarithmen bei diesen Rechnungen gebraucht, weil ihre Tafeln fast in jedermanns Händen sind, wohingegen die Tafeln der natürlichen Logarithmen seltner sind.

§. 15.

Berichtigung wegen der Ausdehnung der Luft durch die Wärme.

Die Zahl 24488 gilt nur dann, wenn die Luft auf 0° Wärme ist, — ist sie wärmer, so wird sie leichter, und die Zahl wird größer — ist sie kälter, so wird sie dichter, und die Zahl wird kleiner.

Für jeden Grad Wärme des Reaumürschen Thermometers wird die Luft $\frac{1}{213}$ ausgedehnt, und das Quecksilber um $\frac{1}{4330}$. Will man wissen, wie viel leichter die Luft z. B. bei 8° Wärme als Quecksilber ist, das auch 8° warm ist, so hat man 10495mal $\frac{8}{213} - \frac{8}{4330}$. Dehnten sich beide Körper gleich stark aus, so blieb das Verhältniß in ihren specifischen Gewichten bei allen Wärmegraden dasselbe. Jetzt aber, da die Luft sich viel stärker ausdehnt, so wird das Verhältniß um die Differenz beider Ausdehnungen größer. Hiebei ist vorausgesetzt, daß der Druck mit dem die Luft zusammengedrückt war, derselbe geblieben sey, nemlich 28 Zoll Quecksilber bei 0° R. Ist aber diese Quecksilbersäule ebenfalls auf 8° Wärme, so ist sie mehr ausgedehnt, und folglich leichter, und 28 Zoll von 8° leichter oder weniger dichte um $\frac{8}{4330}$ als 28 Zoll bei 0°.

Fragt

Fragt man nun: wie viel leichter ist die Luft als Quecksilber von 8° R. wenn sie von einer Quecksilbersäule von 28 Zoll zusammengedrückt wird, die auch 8° warm ist? so ist die Antw. 10495mal $1 + (\frac{8}{213} - \frac{8}{4330} + \frac{8}{4330})$. Die Ausdehnung des Quecksilbers kommt also hiebei zweimal in Betracht, und zwar mit entgegen gesetzten Zeichen, so daß sie sich gegeneinander aufheben, die Correktion für die Wärme ist also 10495mal $1 + \frac{8}{213} = 10889$. Dieses mit $2\frac{1}{3}$ multiplicirt, gibt 25408 Fuß für die beständige Zahl. Das heißt: eine Luftsäule von 25408 Fuß von gleichförmiger Dichtigkeit, und von 8° Wärme, welche mit 28 Zoll Quecksilber zusammengedrückt ist, das auch 8° Wärme hat, ist so schwer als eine Quecksilbersäule von 28 Zoll, die auch 8° warm ist. *)

Beim Beobachten nimmt man aus der oberen und unteren Wärme der Luft das Mittel, und nimmt an, daß die ganze Luftsäule diese mittlere Wärme gehabt habe. Z. B. unten stand der Therm. auf 18° und oben auf 6°, so ist die mittlere Wärme 12°.

Um nicht nöthig zu haben, die beständige Zahl für jeden Wärmegrad zu berechnen, so macht man sich ein Täfelchen wie folgendes:

Wärme

*) S. 48. der angeführten Schrift ist die Correktion wegen der Wärme irrig zu $\frac{1}{200} - \frac{1}{4330}$ angenommen worden. Sie muß seyn $\frac{1}{200} - \frac{1}{4330} + \frac{1}{4330}$. Wenn man nemlich nicht auf die Correktion wegen der Feuchtigkeit der Luft Rücksicht nehmen will. Von dieser werden wir nachher reden. Führt man aber eine besondere Rechnung für die Feuchtigkeit der Luft, so ist diese Correktion die oben angeführte: $\frac{1}{213} - \frac{1}{4330} + \frac{1}{4330}$.

Wärme	Beständige Zahl	Wärme	Beständige Zahl
— 5°	23913 Fuß	+ 8°	25408 Fuß
4	24028	9	25523
3	24143	10	25638
2	24258	11	25753
1	24373	12	25868
0	24488	13	25983
+ 1	24603	14	26098
2	24718	15	26213
3	24833	16	26328
4	24948	17	26443
5	25063	18	26558
6	25178	19	26673
7	25293	20	26788

Wenn also die mittlere Wärme der Luft 12° war, so multiplicirt man den Unterschied der Logarithmen mit 25868 Fuß.

§. 16.

Berichtigung wegen der Ausdehnung des Quecksilbers im Barometer.

Das Barometer ist eine Wäge, auf der Luft und Quecksilber bei gleichen Wärmegraden gegeneinander abgewogen werden. Es wird indeß sehr selten seyn, daß das Quecksilber auf der unteren und der oberen Station genau die mittlere Wärme der Luft hatte. Man reducirt in diesem Falle das Quecksilber auf diese mittlere Temperatur mit Hülfe von folgender Tafel, bei der die Ausdehnung des Quecksilbers zu $\frac{1}{4330}$ angenommen ist.

Länge der Quecksilbersäule.

Wärmegrad	Verlängrung auf 27 Zoll	Verlängrung 25 Zoll	Verlängrung 23 Zoll	Verlängrung 21 Z. Länge
1	0,006	0,006	0,005	0,005 Zoll
2	13	12	10	9
3	19	17	16	15
4	25	23	21	20
5	32	29	26	24
6	0,037	0,034	0,032	0,029
7	43	40	37	34
8	50	46	42	39
9	56	51	47	43
10	63	58	53	48

§. 17.

Berichtigung wegen der Feuchtigkeit der Luft.

Wenn man sagt, daß die Luft 10495 mal leichter als Quecksilber sey, so versteht man hierunter vollkommen trockne Luft. Die Luft unserer Atmosphäre ist aber nie vollkommen trocken, sondern bald mehr bald weniger mit Feuchtigkeit geschwängert. Im Sommer, wo es am wärmsten ist, ist die meiste Feuchtigkeit in ihr; — im Winter hat sie die wenigste.

In folgendem Täfelchen findet man nun, wie viel die Luft in jedem Monate des Jahrs bei ihrer mittleren Feuchtigkeii leichter ist, als vollkommen trockene Luft.

Im Januar ist sie leichter um	0,0017
Februar	18
März	20
April	24
Mai	35
Junius	41
Juli	48
August	48
September	40
Oktober	27
November	24
December	18
Und im Mittel im ganzen Jahre	0,0029

Einen Berg von 10000 Fuß Höhe, den man im August gemessen hat, bekommt also noch einen Zusatz von 48 Fuß wegen der Feuchtigkeit der Luft.

Die meisten Schriftsteller führen die Berichtigung wegen der Feuchtigkeit nicht besonders an, sondern sie vermehren die Ausdehnung der Luft von $\frac{1}{213}$ auf $\frac{1}{200}$, wodurch sich dieses größtentheils aufhebt, weil im Sommer, wenn die meiste Feuchtigkeit in der Luft ist, die Correktion wegen der Wärme der Luft, auch am stärksten ist.

Das Gewicht der Wasserdämpfe ist nur 0,7 vom Gewichte der trockenen Luft, und daher kommt es, daß feuchte Luft immer leichter ist als trockene.

§. 18.

Berichtigung wegen Veränderung der Schwere in Hinsicht der ganzen Breite.

Wenn man das Gewicht der Luft zu $\frac{1}{10495}$ des Quecksilbers angibt, so setzt man hiebei voraus, daß die Abwägung unterm 45ten Grade der Breite sey gemacht worden. Gegen den Aequator hin ist die Luft unter gleichen Umständen leichter, weil die Schwere dort geringer ist, und nach den Polen hin nimmt die Dichtigkeit mit der größern Schwere ebenfalls zu. Die Correktion, die hieraus entsteht, ist bedeutend, da die Schwere am Aequator um $\frac{1}{367}$ geringer ist, als auf dem 45ten Grade, und die Luft also um eben so viel dünner.

In folgendem Täfelchen findet man diese Correktion für eine Höhe von 20000 Fuß berechnet, aus der man sie dann leicht für jede andere Höhe herleiten kann.

Grad der Breite	Berichtigung	Grad der Breite	Berichtigung
0°	+ 56 Fuß	45°	— 0
5	55	50	10
10	53	55	19
15	49	60	28
20	43	65	36
25	36	70	43
30	28	75	49
35	19	80	53
40	10	85	55
45	0	90	56

§. 19.

Berichtigung wegen Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung.

Die Schwere nimmt ebenfalls in senkrechter Richtung ab, und wenn man das Gewicht der Luft zu $\frac{1}{10495}$ angibt, so wird hierunter trockene Luft verstanden, welche unter dem 45ten Grad der Breite am Ufer der See abgewogen ist, als das Barometer auf 28 Zoll stand und der Wärmemesser auf 0 Grad.

Folgende Tafel zeigt die Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung.

Für 1000 Fuß Höhe ist die Schwereabnahme	0,00010
2000	20
3000	30
4000	41
5000	51
6000	0,00061
7000	71
8000	82
9000	92
10000	102
11000	1,00112
12000	122
13000	132
14000	142
15000	152
16000	0,00163
17000	173
18000	184
19000	194
20000	204

Die

Die Abnahme der Schwere hat einen doppelten Einfluß aufs Höhemessen mit dem Barometer.

1) Sind die oberen Luftschichten dünner als sie seyn würden, wenn keine Schwereabnahme da wäre. Bei einer Luftsäule von 12000 Fuß ist die Anziehungskraft oben um 0,00122 kleiner als unten, also die Luft wegen dieses Umstandes um so viel dünner. Die mittlere Anziehungskraft in der ganzen Luftsäule ist nur 0,00061 kleiner als unten. Dieses mit 12000 Fuß multiplicirt, gibt 7,3 Fuß Correktion.

2) Zugleich ist aber bei der Messung auf der Spitze des Berges das Quecksilber im Barometer leichter, als es am Fuße desselben war, eben weil die Schwere abnimmt. Da aber das Barometer eine Waage ist, auf der der Druck der Luft gegen den Druck im Quecksilber abgewogen wird, bei gleicher Wärme und bei gleicher Schwere, so muß man die Beobachtung auf der Spitze des Berges auf die Schwere an der See reduciren. Bei einem Berge von 12000 Fuß ist die Schwere oben 0,00122 geringer. Das Quecksilber steht noch auf 17 Zoll, ist also um 0,00122 mal 17 Zoll oder um 0,02 Zoll leichter als an der See; das heißt: eine Quecksilbersäule von 17 Zoll auf dem Berge, drückt nicht schwerer als eine von 16,98 Zoll an der See.

Man muß daher den oberen Barometerstand auf die Schwere an dem Ufer der See reduciren, ehe man sie von einander abzieht. Ist dieses geschehen, so ist die Differenz zwischen ihnen die Quecksilbersäule, welche der Luftsäule das Gleichgewicht gehalten hat, bei gleicher Temperatur und bei gleicher Schwere.

Statt daß man die 0,02 Zoll abzieht, um sie auf die

Länge

Länge von 16,98 Zoll zu bringen, so kann man auch berechnen, wie viel diese 0,02 Zoll in Fuß betragen. Bei 12000 Fuß Höhe betragen 0,02 Zoll Fallen des Quecksilbers 30 Fuß Steigung. Man hat also:

1te Verbesserung wegen des Dünnerwerdens der Luft bei der Abnahme der Schwere . . . . 7,3 Fuß
2te Verb. wegen d. Leichterwerdens d. Quecks. 30,0

Berichtigung für 12000 Fuß Höhe = 37,3 Fuß

In folgender Tafel findet man diese Berichtigung für alle Berghöhen bis 20000 Fuß.

Verbesserung wegen Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung.

Berghöhe	Verbesserung wegen der Luftschichten	Verbesserung wegen des Quecksilbers	Summe beider Verbesserungen
Fuß	Fuß	Fuß	Fuß
1000	0,1	2,4	2,5
2000	0,2	4,7	4,9
3000	0,5	7,5	8,0
4000	0,8	9,8	10,6
5000	1,3	12,9	14,2
6000	1,8	16,0	17,8
7000	2,5	18,0	20,5
8000	3,3	21,0	21,3
9000	4,1	23,2	27,3
10000	5,1	25,0	30,1
11000	6,2	27,3	33,5
12000	7,3	31,0	38,3
13000	8,6	32,4	41,0
14000	9,9	34,6	44,5
15000	11,4	37,1	48,5
16000	13,1	39,9	53,0
17000	14,8	42,4	57,2
18000	16,6	44,9	61,5
19000	18,4	47,3	65,7
20000	20,4	50,0	70,4

§. 20.

Berichtigung wegen der Daltonschen Theorie.

Unsere Atmosphäre besteht aus vier verschiedenen elastischen Flüßigkeiten. Aus Stickluft, aus Sauerstoffluft, aus Kohlensaurer Luft und aus Wasserdampf. Folgendes Täfelchen gibt eine Uebersicht über ihre verschiedene specifische Gewichte und über ihre Mischungsverhältnisse.

Namen der Luftarten.	Inhalt in 100 Theilen trockener Luft	Specifische Gewichte jeder Luftart	Antheil dem Gewichte nach in 100 Theilen trockener Luft
Gemeine Luft	100,00	1,0000	100,00
Stickluft	78,93	0,9691	76,49
Sauerstoffluft	21,00	1,1148	23,41
Kohlensaure Luft	0,07	1,5000	0,10
Wasserdampf	—	0,7000	—
Summe	100,00		100,00

Da bald mehr bald weniger Wasserdampf in der Luft ist, so muß man diesen hiebei ausschließen, und die Mischungsverhältnisse für trockene Luft annehmen, weil nur diese beständig sind. Bei mittlerer Feuchtigkeit sind gewöhnlich so viele Wasserdämpfe in der Luft, daß sie das Barometer auf 0,42 Zoll Höhe halten können.

Der englische Physiker Dalton hat ein neues System in der Chemie aufgestellt, nach dem diese verschiedene Luftarten so durcheinander gemischt sind, daß keine auf die andere wirkt, und daß jede, so für sich existirt, als wenn die andern nicht da wären. Nach ihm leben wir auf dem Boden von vier verschiedenen Atmosphären,

deren

deren jede besonders aufs Barometer drückt, und die es alle zusammen auf seinem mittleren Stande von 28,18 Zoll halten.

Namen der Atmosphären	Höhe, auf welcher jede Atmosphäre das Barometer hält	Ihr Gewicht gegen Quecksilber bei 0° Wärme und 28 Zoll Druck	Beständige Zahl der Luftarten
Die Stickluftatmosphäre	21,2336 Zoll	$\frac{1}{10830}$	25,270 Fuß
Die Sauerstoffluftatmosphäre	6,4986	$\frac{1}{9414}$	21,966
Die Kohlensaure-Luftatmosphäre	0,0278	$\frac{1}{6997}$	16,326
Gemeine trockene Luft	27,7600	$\frac{1}{10495}$	24,488
Die Wasserdampfatmosphäre	0,4200	$\frac{1}{14993}$	34,984
Gemeine Luft bei mittler Feuchtigkeit	28,18	$\frac{1}{10542}$	24,599

Man kann sich die Sache nun so vorstellen, als wenn für die vier verschiedene Atmosphären auch vier verschiedene Barometer wären, und es ist dann leicht mit Hülfe der beständigen Zahl die Höhe zu berechnen, worauf jedes steht, wenn man 1000, 2000, 3000 Fuß .... steigt. Diese Rechnung ist das Umgekehrte von den gewöhnlichen Barometerrechnungen. Bei jener schließt man von der Länge der Quecksilbersäule auf die Länge der Luftsäule, die ihr das Gleichgewicht hält. Bei diesen schließt man von der Länge der Luftsäule von 1000, 2000, 3000 ....

Fuß,

Fuß, auf die der Quecksilbersäule. Man findet nemlich die Berghöhen, wenn man die Differenz der Logarithmen mit der beständigen Zahl multiplicirt. Umgekehrt findet man die Differenz der Logarithmen, wenn man die Berghöhe mit der beständigen Zahl dividirt, und diese zum untern Logarithmen addirt, gibt den Logarithmen, neben dem in der Tafel die Barometerhöhe steht.

Ich habe an einem andern Orte die Gründe entwickelt, welche es mir wahrscheinlich machen, daß die Daltonsche Ansicht von unserer Atmosphäre die richtige sey. *) Ich habe da auch ihren Einfluß auf die Lehre vom Barometermessen, auf die von dem Messen der Luftgüte, und auf die Geschwindigkeit des Schalls berechnet, und ich will hier nur die Resultate anführen, welche das Höhenmessen mit dem Barometer betreffen.

In folgendem Täfelchen steht in der zweiten Colonne die Barometerhöhe nach Dalton. Dieses ist die Summe von den vier verschiedenen Barometerhöhen, welche einzeln berechnet, und dann zusammen addirt sind.

*) Briefe, geschrieben auf einer Reise durch die Schweiz. Düsseldorf bei Schreiner. 2ter Theil. S. 440.

Einfluß der Daltonschen Theorie auf das Höhenmessen.

Höhe über der See Fuß	Barometerhöhe nach Dalton Zoll	 nach der alten Theorie Zoll	Untersch. in Zoll	Werth von $\frac{1}{10000}$ Zoll in Fuß	Unterschied in Fuß
0	28,1800	28,1800	0,0000	0,087	0,0
1000	27,0534	27,0574	0,0040	0,091	3,6
2000	25,9717	25,9795	0,0078	0,094	7,3
3000	24,9343	24,9446	0,0103	0,098	10,1
4000	23,9381	23,9509	0,0128	0,102	13,0
5000	22,9820	22,9967	0,0147	0,106	15,6
6000	22,0642	22,0806	0,0164	0,112	18,4
7000	21,1832	21,2010	0,0178	0,116	20,6
8000	20,3376	20,3564	0,0188	0,120	22,6
9000	19,5260	19,5455	0,0195	0,125	24,4
10000	18,7470	18,7667	0,0197	0,131	25,8
11000	17,9991	18,0192	0,0201	0,136	27,3
12000	17,2812	17,3014	0,0202	0,142	28,7
13000	16,5921	16,6121	0,0200	0,148	29,6
14000	15,9309	15,9504	0,0195	0,154	29,9
15000	15,2957	19,3150	0,0193	0,160	30,9
16000	14,6862	14,7049	0,0187	0,167	31,2
17000	14,1008	14,1191	0,0183	0,174	31,8
18000	13,5394	13,5566	0,0172	0,181	31,1
19000	13,0002	13,0166	0,0164	0,188	30,8
20000	12,4829	12,4980	0,0151	0,196	29,6

Da unsere Barometertafeln nach der alten Theorie berechnet sind, (nach der unsere Atmosphäre eine innige Verbindung der vier Luftarten ist,) so muß diese Berichtigung immer abgezogen werden. Wenn z. B. das

Barometer auf 14,6862 Zoll steht, so ist man nach Dalton 16000 Fuß hoch. Hingegen ist man nach der alten Theorie schon 16000 Fuß bei 14,7049 Zoll, und bei 14,6862 ist man 16031 Fuß hoch. Diese gibt also 31 Fuß zu viel, welche müssen abgezogen werden.

§. 21.

Rechnungsbeispiele.

1. Beispiel. Berechnung der Höhe des Montblanc.

Wir wollen hier als Beispiel der Rechnung, die Barometermessung des Hrn. von Saussure nehmen, welche er den 3. Aug. 1787 auf der Spitze des Montblanc um 12 Uhr Mittags machte. Barometer 16,022 Zoll. Die Wärme des Quecksilbers + 1°, 2 R. Die Wärme der freien Luft im Schatten — 2°, 3.

Zu gleicher Zeit stand in Genf im Kabinette des Hrn. Senebier, das Barometer auf 27,260 Zoll. Die Wärme des Quecksilbers war + 19°, 2 R., und die der Luft im Schatten war + 22°, 6. Das Kabinet des Hrn. Senebier ist auf der Sternwarte auf dem Walle, 78 Fuß über dem Genfersee. Die Breite des Montblanc ist 45°, 50′.

Die mittlere Wärme der Luftsäule war also 10,15 Grad R.

Bei 10°, 15 wäre 16,022 Z. = 16,053 Log. 380961
10 , 15 wäre 27,260 Z. = 27,204 Log. 908530

Unterschied der Logarithmen = 0,527569
Bei 10°, 15 ist die beständige Zahl 25653 Fuß

Beides multipl. gibt die Berghöhe zu 13534 Fuß
Berichtigung wegen der Feuchtigkeit + 65 Fuß
Wegen Veränderung der Schwere in Hinsicht der Breite . . . . . . ÷ 2
Wegen Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung . . . . . . + 43
Wegen der Daltonschen Theorie ÷ 30
Höhe des Kabinets über dem See + 78

Wahre Höhe des Montblanc über dem Genfersee . . . . . 13688 Fuß
Nach der sehr genauen trigonom. Messung von Prof. Tralles . . 13659

Unterschied = 29 Fuß
oder $\frac{1}{471}$ der ganzen Höhe.

2. Beispiel. Berechnung der Höhe des Monte Gregorio.

Im Oktober 1809 hat Hr. Daubuisson 10 sehr genaue Barometermessungen auf diesem Berge angestellt. Wir wollen die vom 17 Okt. berechnen.

Barometer unten 27,418 Zoll oben 22,351 Zoll.
Wärme des Quecks. unten 15°, 9 R. oben 8°, 4 R.
Wärme der Luft unten 16°, 0 R. oben 7°, 9 R. alle +.
Mittlere Wärme der Luftsäule + 12°.
Geographische Breite 45°.

 27,418

27,418 Zoll sind bei 12°	= 27,393	Log. =	915454
22,351 Zoll sind bei 12°	= 22,369	Log. =	712847
			0,202607
Für 12° ist die beständige Zahl =			25865
Beides multipl. gibt die Berghöhe zu			5240 Fuß
Berichtigung wegen der Feuchtigkeit		+	14
Wegen Veränderung der Schwere in Hinsicht der Breite			0
Wegen Veränderung der Schwere in senkrechter Richtung		+	15
Wegen der Daltonschen Theorie		—	16
Wahre Höhe des Berges =			5253 Fuß
Die trigonometrische Messung gibt			5259
Unterschied =			6 Fuß

Man sieht aus diesen Beispielen, daß die Berechnung ganz einfach ist. Zuerst sucht man die mittlere Temperatur der abgewogenen Luftsäule. Dann reducirt man die beiden Quecksilbersäulen auf die Länge die sie würden gehabt haben, wenn das Quecksilber gerade diese mittlere Temperatur gehabt hätte. Darauf sucht man die beiden Logarithmen, zieht diese von einander ab, und multiplicirt sie mit der beständigen Zahl, die für diese mittlere Temperatur gilt. — Wenn man kleine Berghöhen hat, so kann man die beiden Korrektionen wegen Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung und wegen der Daltonschen Theorie weglassen, da sie sich immer mit + und — sehr nahe gegeneinander aufheben.

§. 22.

Berichtigung wegen der Haarröhrchenkraft.

Wenn man eine gläserne Röhre, die an beiden Enden offen ist, in eine Schaale mit Quecksilber hält, so steht das Quecksilber in der Röhre niedriger, als außerhalb, und zwar um so niedriger, je enger die Röhre ist. Man nennt dieses: die Herabdrückung wegen der Haarröhrchenkraft. In Heberbarometern hebt sich diese Herabdrückung immer in beiden Schenkeln sehr nahe gegeneinander auf, wenn beide gleich weit sind, obschon in dem offenen Schenkel die Halbkugel auf der Oberfläche des Quecksilbers immer etwas flächer ist als in dem geschlossenen; wahrscheinlich wegen der Feuchtigkeit die sich auf der innern Glasfläche anlegt. In den Gefäßbarometern ist diese Herabdrückung aber bedeutender, weil sie in dem weiten Zylinder des Gefäßes ganz unmerklich ist, und hingegen in der engen Barometerhöhe desto größer. Die Gefäßbarometer stehen deswegen immer etwas niedriger als die Heberbarometer, wenn ihre Scale nemlich nicht nach diesen regulirt ist. Will man daher zwei Beobachtungen miteinander vergleichen, die mit verschiedenen Barometern angestellt sind, so muß man die Weite der Röhre messen, um hiernach den Unterschied in dem Stande der beiden Barometer berechnen zu können, den sie zeigen würden, wenn sie neben einander hingen. Man gebraucht bei dieser Rechnung folgendes Täfelchen:

Innerer Durchmesser der Röhre.	Herabdrückung des Quecksilbers.
6,76 Linien	0,056 Linien
5,62	0,079
4,50	0,169
3,94	0,282
3,38	0,405
2,81	0,562
2,25	0,754
1,69	1,035
1,13	1,575

Es ist aber immer besser, daß man die Barometer unmittelbar miteinander vergleicht, indem man sie neben einander hängt. Alle kleine Verschiedenheiten, die aus einem kleinen Fehler in der Scale, oder aus sonst einem Umstande in ihrem Baue herrühren können, finden sich alsdann. Uebrigens weichen gut gebaute Barometer wenig von einander ab, wenn sie auch von ganz verschiedenen Künstlern gemacht sind. Im Jahr 1812 verglich ich bei meiner Reise in die Schweiz, von Frankfurt bis nach Chur in Graubündten, zwanzig verschiedene Barometer mit meinem Reisebarometer, und die größten Abweichungen waren nur 2, 3 bis höchstens 4 Hunderttheil eines Zolles.

§. 23.

Berechnung einzelner Beobachtungen.

Bei allen Barometermessungen werden zwei Barometer zu gleicher Zeit beobachtet, wovon das eine unten und das andere oben ist. Ist aber der Berg nicht sehr hoch,

hoch, so kann man auch mit einem ausreichen, indem man einmal am Fuße des Berges beobachtet, dann auf der Spitze, und endlich wieder am Fuße, um zu sehen, wie fern sich der Barometer in der Zwischenzeit geändert hat.

Mißt man aber auf einer Reise mehrere Höhen hinter einander, so muß man sich die correspondirenden Beobachtungen aus einer benachbarten Stadt zu verschaffen suchen, deren Höhe über der See bekannt ist. So werden z. B. in Genf, in Aarau, in Carlsruhe, in Düsseldorf, in Paris und an mehreren andern Orten täglich die Barometer beobachtet, die Journale werden gedruckt, und der Reisende kann hieraus die correspondirende nehmen. Doch werden diese um so ungewisser, je entfernter die Barometer von einander sind. Zwar befolgen die Barometer in ganz Europa denselben Gang mit Steigen und Fallen, wie man dieses sieht, wenn man die Journale entfernter Orte mit einander vergleicht, indem man sie linearisch verzeichnet; allein an dem einen Orte kann das Fallen oder Steigen 24 Stunden früher oder später seyn, als an einem andern, der 100 Stund davon entfernt ist. Gewöhnlich hängt dieses vom Windstriche ab.

Will man indeß schon gleich auf dem Berge wenigstens beiläufig wissen, wie hoch man über der See ist, so kann man dieses, indem man annimmt, daß die Barometer an der See gerade auf ihrem mittlern Stande von 28,18 Zoll sind, — eine Annahme, bei der man sich selten mehr als um 400 Schuh irren wird, da die gewöhnliche Abweichung von dem mittlern Stande höchstens nur $\frac{1}{2}$ Zoll ist. Auch muß man den Stand des Thermometers,

meters, an der See wenigstens beiläufig bestimmen, indem man annimmt, daß für jede 600 Fuß Höhe es um 1° R. kälter wird. Dieses leidet aber auch an verschiedenen Tagen bedeutende Ausnahmen, indem oft diese Wärmeabnahme auf 400 Fuß 1° beträgt, und oft auf 1200 Fuß, ohne daß man im Stande ist eine Ursache so bedeutender Unterschiede anzugeben.

Ich will die Rechnung einer isolirten Beobachtung an einem Beispiele erläutern.

Den 4. September 1810 beobachtete ich den Stand meines Reisebarometers im Hospitio des Gotthards zu 22,07 Zoll. Die Wärme der Luft war 10°. Da dieser Paß ungefehr 6000 Fuß über der See ist, so mußte unserer Annahme gemäß das Thermometer an der See auf 20°, und das Barometer auf 28,18 Zoll stehen.

Also Log. von 28,18 = 94378
22,07 = 69939
0,24439

beständige Zahl für 15° = 26210 Fuß

gibt die Höhe des Berges zu 6406 Fuß.

Als ich später meine Beobachtung mit einer Correspondirenden verglich, die in Zürch war angestellt worden, so fand ich die Höhe des Berges zu 6365 Fuß, also bis auf 40 Fuß dieselbe. Diese Uebereinstimmung ist indeß nur zufällig, und rührt daher, daß am 4. September 1810 die Barometer gerade nahe bei ihrem mittlern Stande waren. Uebrigens bedarf es wohl kaum einer Erwähnung, daß man bei einer so beiläufigen Rechnung weder auf die Correktion für die Feuchtigkeit, noch auf die für die Schwere oder für die Daltonsche Theorie braucht Rücksicht zu nehmen.

§. 24.

§. 24.

Ueber die Genauigkeit der Barometermessungen.

Man kann annehmen, daß eine einzelne Barometermessung die Höhen bis auf $\frac{1}{250}$ genau angibt, wenn die Witterung günstig ist, die Barometer nicht zu weit von einander entfernt, und die Höhen 3 bis 5000 Fuß betragen. — Bei kleinern Höhen von 500 bis 2000 Fuß beträgt die Genauigkeit unter gleichen Umständen aber nur $\frac{1}{150}$, weil der Fehler beim Ablesen derselbe bleibt, und weil dieser kleine Höhen verhältnißmäßig mehr änderte, als große.

Die Messung des Montblanc stimmt bis auf $\frac{1}{471}$, und die des Monte Gregorio bis auf $\frac{1}{900}$. Die Umstände, unter denen der Montblanc gemessen wurde, waren sehr günstig, und der Berg ist über 13000 Fuß hoch. Die Beobachtungen wurden mit aller Sorgfalt gemacht; und die Barometer waren genau gegeneinander verglichen. Es war auch kein höherer Berg zwischen beiden Barometern, und daher hatte es wenig Einfluß, daß sie 18 Stunden von einander entfernt waren.

Beim Monte Gregorio ist zwar die Uebereinstimmung bis auf $\frac{1}{900}$ nur zufällig, da die andern Beobachtungen, die mit derselben Sorgfalt angestellt sind, bis auf $\frac{1}{300}$ abweichen. Indeß weicht das Mittel aus allen 10 Beobachtungen doch nur um 2 Fuß von der trigonometrischen Messung ab, und diese Uebereinstimmung beweißt nicht allein die Genauigkeit der Beobachtungen, sondern auch, wie es scheint, die Richtigkeit der Daltonschen Theorie, denn ohne die Correktion von 16 Fuß würde die Barometermessung um 18 Fuß von der trigonometrischen abweichen.

§. 25.

§. 25.

Geschichte des Höhenmessens mit dem Barometer.

Im Jahr 1643 erfand der berühmte italiänische Geometer Toricelli das Barometer. Diese Erfindung verbreitete sich sehr schnell über Europa, und die Barometer wurden bald unter dem Namen Wettergläser allgemein bekannt.

Im Jahr 1648 kam Pascal in Frankreich auf den Gedanken, daß das Barometer auf den Bergen niedriger stehen würde als in den Thälern, weil oben weniger Luft auf das Quecksilber drücke. Um dieses zu untersuchen, veranlaßte er seinen Schwager Perrier, der zu Clermont wohnte, mit einem Barometer auf einen benachbarten Berg, den Pic de Dome, zu steigen. Dieser fand, daß das Barometer auf dem Berge 23 Zoll 2 Linien stehe, indeß es zu Clermont 26 Zoll $5\frac{1}{2}$ Linie stand. Perrier schätzte den Berg zu 3000 Fuß. Diese erste Höhenmessung geschah den 18. September 1648.

Boyle in England und Mariotte in Frankreich, entdeckten zu gleicher Zeit das Gesetz: daß die Luft in demselben Grade dichter wird, und einen kleinern Raum einnimmt, in welchem sie gedruckt wird, d. h. durch einen dreimal so starken Druck wird sie dreimal dichter. Dieses ist das sogenannte Mariottische Gesetz.

Sobald man dieses Gesetz kannte, so war der Weg zur Berechnung der Berge gebahnt, man brauchte nur die Atmosphäre in Gedanken in eine gewisse Anzahl Schichten einzutheilen, deren jede z. B. das Gewicht von 0,01 Zoll Quecksilber hatte, und hierüber eine Tabelle zu machen. — Mariotte machte eine solche Tabelle von $\frac{1}{12}$ zu $\frac{1}{12}$ Linie Quecksilberhöhe, und bestimmte das Gewicht der Luft zu $\frac{1}{8972}$ des Quecksilbers. Er glaubte nemlich bei einer Messung auf der Pariser Sternwarte zu finden, daß er 63 Fuß steigen müsse, wenn das Barometer 1 Linie fallen sollte. Er irrte sich hiebei um 15 Procent. Vielleicht war das Barometer nicht luftleer, und die Eintheilung nicht fein. Irrte er sich im Ablesen um 1 oder 2 Zehntellinien, so hatte dieses auf die geringe Höhe, die er maaß, einen sehr starken Einfluß. Zu diesem Fehler kam noch ein zweiter. Der bequemern Rechnung wegen nahm er statt 63 Fuß 60 Fuß an, und berechnete seine Tabelle ebenfalls aus Bequemlichkeit als eine arithmetische Reihe erster Ordnung mit gleichen Differenzen.

Da seine Tabelle auf 100 Fuß Höhe ungefehr 20 Fuß fehlte, so kam sie so wie die Schichtmethode, welche er gebraucht hatte, in üblen Ruf. Die Schrift, in der er sie bekannt machte, ist vom Jahr 1676.

Im Jahr 1685 legte der berühmte Halley der Königlichen Gesellschaft in London eine Abhandlung vor, in der er zeigte, daß man die Logarithmen bei der Berechnung der Berghöhen vortheilhaft gebrauchen könne. Zugleich bemerkt er, daß nach genauen Abwiegungen das Gewicht der Luft bei mittler Wärme $\frac{1}{10891}$ des Quecksilber sey. Nimmt man für die mittlere Wärme 10 Grad an, so ist das Gewicht bei $0° = \frac{1}{10372}$ des Quecksilbers, da die neuesten Abwiegungen es zu $\frac{1}{10495}$ angeben, so war Halleys Bestimmung nur um $\frac{1}{92}$ fehlerhaft, und sie mußte alle Höhen ungleich genauer angeben als Mariottes Tabelle, die nahe um $\frac{1}{5}$ unrichtig war. Seit

dieser

dieser Zeit wurde die Berechnung mit Logarithmen allgemein, indem man irrig glaubte, daß hierin der Grund von der großen Genauigkeit liege, die die Halleysche Theorie in Vergleich mit Mariottes Schichttabelle gab, und diese wurde nun ganz vergessen.

Halley dachte auch an die Verdünnung der Luft durch die Wärme, aber er meinte, daß man bei der Rechnung hierauf keine Rücksicht zu nehmen brauche, weil mit der größern Wärme zugleich mehr Dünste in ihr aufstiegen. Man glaubte nemlich damals noch, daß die Dünste die Luft schwerer machen, statt daß sie sie wirklich leichter machen.

Nach Halley kam eine Periode von 70 Jahren, in denen nichts Bedeutendes für diese Lehre geschah, obschon sich sehr berühmte Namen mit ihr beschäftigten. Man übersah den großen Einfluß, den die Wärme und Kälte auf die Dichtigkeit und auf die specifische Gewichte von Luft und Quecksilber haben, und klagte immer vergeblich, daß die Barometermessungen mit den trigonometrischen nicht übereinstimmen wollten.

Diese Ungewißheit veranlaßte Herrn de Luc in Genf die Höhenmessungen mit dem Barometer aufs neue zu untersuchen, und dieser thätige Naturforscher beschäftigte sich anhaltend hiemit zehn Jahre lang. Er fand, daß man sehr leicht übereinstimmende Barometer machen könne, wenn man sie nur auskoche. Er zeigte den großen Einfluß der Wärme auf die Dichtigkeit von Luft und Quecksilber, er bestimmte ihre Ausdehnung für jeden Grad Reaumür, und zugleich in ihren specifischen Gewichten. Er maaß nemlich auf dem Berge Saleve bei Genf 15 Höhen geometrisch, welche von 200 bis 2900

Fuß

Fuß gingen. Auf diese hing er sein Barometer und seine Thermometer, und machte so eine große Menge Beobachtungen zu allen Jahrszeiten. Er fand hiedurch eine Regel fürs Höhenmessen mit den Barometern, welche genauer war als alle bisherigen. Ums Jahr 1772 erschien sein Werk über die Atmosphäre, welches seine Beobachtungen enthielt, und das 1776 unter folgendem Titel ins Deutsche übersetzt wurde:

J. A. de Luc Untersuchungen über die Atmosphäre, und die zur Abmessung ihrer Veränderungen dienlichen Werkzeuge. Aus dem Französischen. Leipzig 1776. 2 Oktavbände mit Kupfern.

Nach der Genauigkeit und Anzahl der Beobachtungen zu urtheilen, hätte die Regel, welche Hr. de Luc gefunden, die Höhen wenigstens bis auf $\frac{1}{200}$ müssen genau angeben. Allein sie hatte einen Fehler von $\frac{1}{50}$ der von folgendem Umstande herrührte: Hr. de Luc hing sein Thermometer in die Sonne, um die Wärme der Luft zu erfahren, und nicht in den Schatten. Durch das Bescheinen der Sonnenstrahlen häufte sich die Wärme im Glase und im Quecksilber an, und das Thermometer zeigte die Wärme des Quecksilbers, aber nicht die Wärme der freien Luft. Dieser Fehler betrug 3 Grad.

Dann machte auch Hr. de Luc seine Rechnungen unbequem und unverständlich durch das Einführen seiner Normaltemperatur und zweier ganz verschiedenen Thermometer-Scalen. Hiermit hatte es folgende Bewandniß: de Luc gebrauchte Briggische Logarithmen, so wie die übrigen Rechner, und gab die Berghöhen in Toisen an. Nun gibt es eine gewisse Temperatur der Luft, bei der man die Höhe eines Berges in Toisen findet, wenn

man

man die Briggischen Logarithmen des oberen und unteren Barometerstandes von einander abzieht, und den Rest mit 10000 dividirt. Diese Temperatur findet nach unserer Tafel bei 13°, 7 statt, wo die beständige Zahl 26058 ist. Diese mit 2,3025 als dem Modul des Briggischen Systems multiplicirt, gibt 60000 Fuß oder 10000 Toisen.

Beispiel.

Barom. unt. 28 Z. d. Briggischen Log. ist	=	1,44715
oben 24 Z. . . .	=	1,38021
		0,06694

dieses mit 10000 multip. gibt die Höhe des Berges zu 669,4 Tois.

De Luc glaubte indeß aus seinen Beobachtungen schließen zu müssen, daß die Normaltemperatur nicht bei 13°, 7, sondern bei 16°, 7 läge, weil seine Thermometer ihm immer 3 Gr. Wärme mehr gezeigt, als die Luft wirklich hatte. Hr. von Saußure machte ihn hierauf aufmerksam, und zeigte, daß man, um die wahre Temperatur der Luft zu erfahren, das Thermometer nicht den Sonnenstrahlen aussetzen müsse. Hr. de Luc blieb indeß bei seiner Meinung, und verlor hiedurch die schönste Früchte seiner Arbeit. Hr. de Luc machte nun zwei verschiedene Thermometer-Scalen, wovon die, welche die Wärme des Quecksilbers anzeigte, ihren Mittelpunkt bei 10° R. hatte, und die, welche die Wärme der Luft anzeigte, bei 16°, 7 R. Glücklicher Weise ist ihm hierin kein Naturforscher gefolgt, sonst würde der Verwirrung kein Ende geworden seyn, da jeder den Punkt nach seinen Beobachtungen auf eine andere Stelle würde gesetzt haben.

Um das Jahr 1780 beschäfftigten sich die Engländer Schuckburgh, Trembley und Roy mit sehr genauen Barometermessungen, welche sie auf trigonometrisch gemessenen Punkten, theils in der Schweiz, theils in England anstellten. Die Regeln, welche sie fanden, wichen nur wenig von einander ab, und geben im Durchschnitt die Höhen bis auf $\frac{1}{300}$ genau.

Man wußte jezt, worauf es bei Barometermessungen vorzüglich ankomme — auf die genaue Bestimmung der Gewichte von Luft und Quecksilber, und auf die Ausdehnung von beiden durch die Wärme. Auf den Einfluß, den die Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung habe, hatte Neuton schon aufmerksam gemacht. Plairfay war aber der erste, der diesen Einfluß vollständig entwickelte. Den Einfluß, den die Veränderung der Schwere in Hinsicht der Breite habe, entwickelte Kramp in seinem Werke über die Strahlenbrechung.

La Place brachte die Barometerformel auf ihre einfachste Form. Doch gibt seine ältere Formel die Höhen um $\frac{1}{50}$ zu klein, weil er bei ihr die Bestimmungen von de Luc zum Grunde legte. Die neue Formel, welche auf den Messungen beruht, welche Hr. Rammond in den Pyrenäen angestellt hat, gibt die Berghöhen bis auf $\frac{1}{300}$ genau.

In den letzten Jahren haben sich mehrere Physiker bemüht, die Genauigkeit in den Barometermessungen noch höher zu bringen. Durch sehr genaue Abwiegungen an der zweiarmigen Waage, haben die Hrn. Biot und Arago das Gewicht der Luft aufs schärfste bestimmt. Nämlich zu $\frac{1}{10495}$ das Quecksilber bei 28 Zoll Barometerstand und 0° Wärme. Ferner hat man die Ausdehnung von beiden aufs neue untersucht, und diese zu $\frac{1}{213}$ und $\frac{1}{4330}$ für jeden Grad Reaumur gefunden. Endlich hat Hr. Daubuisson auf dem Monte Gregorio äußerst genaue trigonometrische und barometrische Messungen angestellt, welche im Mittel die Höhe des Berges bis auf $\frac{1}{300}$ genau geben, wenn man die Biotsche Abwiegungen bei der Rechnung zum Grunde legt. Wenn man auf die Genauigkeit und Anzahl der Beobachtungen Rücksicht nimmt, und zugleich die Sorgfalt erwägt, die auf sie verwandt ist, und die günstigen Umstände, unter denen sie angestellt sind, so muß man schließen, daß beide Messungen nicht über $\frac{1}{1000}$ sich voneinander entfernen dürfen. Es scheint demnach noch ein Umstand da zu seyn, den man bis jetzt in der Theorie übersehen hat. Wahrscheinlich ist es der, daß man bei diesen Rechnungen, auf die Daltonsche Theorie bis jetzt keine Rücksicht genommen hat. Bringt man diese in Rechnung, so geht die Uebereinstimmung bis auf $\frac{1}{6000}$ des Ganzen. Ich habe gefunden, daß die Daltonsche Theorie meine Schallversuche eben so genau darstellt, indeß nach der alten Theorie, der Unterschied bis auf $\frac{1}{7}$ ging.

Auch hat man sich in neueren Zeiten sehr bemüht, die Rechnungen möglichst bequem zu machen. Hr. von Lindenau gab im Jahr 1809 einen Oktavband Tafeln unter dem Titel heraus: Tables barometriques pour façiliter le calcul des nivellements et des mesures des hauteurs par les barometres. Gotha chez Becker. 1809.

In demselben Jahre gab Hr. Oltmanns Barometertafeln in klein Folio heraus, welche den Titel haben: Tables hypsometriques ou tables auxiliaires pour

le

le calcul des hauteurs à l'aide du barometre, d'après la formule de Mr. la Place, à Tubingue chez Cotta.

Zwei Jahre nachher gab Hr. Biot kleine Barometertafeln unter folgendem Titel heraus: Tables barometriques portatives, donnant les differences de niveau par un simple soustraction, avec un instruction contenant l'histoire de la formule barometrique et sa demonstration complète par les simples éléments de l'Algêbre. Paris chez Klostermann. 1811. Diese Tafeln sind indeß unbequem bei der Rechnung; auch geben sie nicht den Unterschied der Höhen durch eine bloße Subtraktion, wie auf dem Titel steht, und welches der Natur der Sache nach auch unmöglich ist.

Bei so vielen Barometertafeln könnte es überflüßig scheinen, die Anzahl derselben noch durch neue zu vermehren. Allein alle diese Tafeln beruhen auf höheren Rechnungen, welche den Freunden der Barometermessungen größtentheils unbekannt sind. Es schien mir daher nützlich, diese an sich leichte Lehre auf eine für jedermann verständliche Weise vorzutragen, und alle Berichtigungen aus der bloßen physikalischen Betrachtung der Aufgabe zu entwickeln. Ich fand, daß man bei der Rechnung nicht einmal Logarithmen gebrauche, und daß man jede Berghöhe eben so genau und eben so bequem nach der alten Mariotteschen Schichtmethode berechnen könne, nur müsse man keine fehlerhafte Elemente dabei zum Grunde legen, noch Rechnungsfehler machen, wie dieses bei Mariotte und späterhin bei Rosenthal der Fall war. Dieses war die Veranlassung, daß ich meine Schichttafeln bekannt machte, deren Titel schon eben angegeben worden. Sie erschienen 1811. In ihnen habe ich indeß

auf

auf die Daltonsche Theorie auch noch keine Rücksicht genommen, weil ich erst diejenigen Versuche über die Geschwindigkeit des Schalls anstellte, welche mich von der Richtigkeit dieser Theorie überzeugten.

Werfen wir einen Blick auf die neuesten Barometermessungen und ihre Berechnung, so finden wir, daß die Genauigkeit der Beobachtungen sowohl, als die Schärfe der Rechnung fast nichts mehr zu wünschen übrig lassen, und daß es nicht wahrscheinlich ist, daß man es je bedeutend weiter in dieser Lehre wird bringen können. Auch ist die Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ schon so groß, daß sie bei den wenigsten geometrischen Operationen erreicht wird. Selbst bei den Messungen fürs Cadaster in Frankreich, ist die vorgeschriebene Genauigkeit nur $\frac{1}{100}$, und bei der großen Cassinischen Gradmessung in Frankreich, war die Genaugikeit nur $\frac{1}{700}$ des Ganzen.

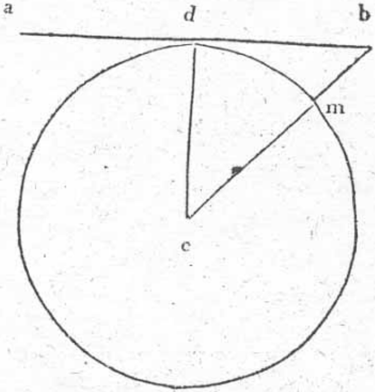
§. 26.

Tafel über den Unterschied zwischen dem wahren und dem scheinbaren Horizonte beim Wasserwägen.

Wenn c der Mittelpunkt der Erde ist, und ab der Horizont des Beobachters in d, so bildet diese eine Tangente, welche die Erdkugel im Punkte d berührt. Beim Wasserwägen will man die Punkte bestimmen, die in einer Wasserebene liegen, die also gleich weit vom Mittelpunkte der Erde entfernt sind, wie z. B. die Punkte d und m. Da aber die Wasserwage nach b steht, so muß man berechnen, wie groß der Unterschied zwischen der wahren Horizontallinie dm, und der scheinbaren db ist.

Die

Die Rechnung ist leicht, sobald die Entfernung d b und der Halbmesser der Erde d c bekannt sind. *) Dieser ist 63,66200 Meter. Folgende Tafel enthält die Größe der Linie m b für alle Entfernungen von d b von 100 bis 10000 Meter.



Länge

*) Man sieht aus der Figur, daß das Problem sich nach dem Pytagoräischen Lehrsatze auflöst. Das Ausziehen der Quadratwurzel ist leicht, sobald man die Quadrattafeln zur Hand nimmt. Es ist nur eine Division. Hat man einige Exempel gerechnet, so sieht man, daß sich die Rechnung noch mehr abkürzen läßt, und daß man die Tafel durch bloße Addition als eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung construiren kann, weil die Aufgabe vom zweiten Grade ist. Herr Puissant hat S. 214 seines

Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb
Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter
100	0,001	2600	0,531	5100	2,043	7600	4,536
200	3	2700	573	5200	2,124	7700	4,657
300	7	2800	616	5300	2,206	7800	4,778
400	13	2900	660	5400	2,290	7900	4,902
500	20	3000	707	5500	2,376	8000	5,026
600	0,028	3100	0,755	5600	2,463	8100	5,153
700	38	3200	804	5700	2,552	8200	5,281
800	50	3300	855	5800	2,642	8300	5,410
900	64	3400	908	5900	2,734	8400	5,542
1000	78	3500	962	6000	2,827	8500	5,674
1100	0,095	3600	1,018	6100	2,922	8600	5,809
1200	113	3700	1,075	6200	3,019	8700	5,945
1300	133	3800	1,134	6300	3,117	8800	6,082
1400	154	3900	1,195	6400	3,217	8900	6,221
1500	177	4000	1,257	6500	3,318	9000	6,362
1600	0,201	4100	1,320	6600	3,421	9100	6,504
1700	227	4200	1,385	6700	3,525	9200	6,648
1800	255	4300	1,452	6800	3,632	9300	6,793
1900	283	4400	1,520	6900	3,739	9400	6,940
2000	314	4500	1,590	7000	3,848	9500	7,188
2100	0,346	4600	1,662	7100	3,959	9600	7,238
2200	380	4700	1,735	7200	4,071	9700	7,390
2300	415	4800	1,810	7300	4,185	9800	7,543
2400	452	4900	1,886	7400	4,301	9900	7,698
2509	491	5000	1,963	7500	4,420	10000	7,854

Wenn man die Höhe der Berge aus Entfernungen mißt, die größer als 10000 Meter sind, so muß man den Einfluß der Krümmung der Erde entweder unmittelbar berechnen, oder ihn aus einer Tafel nehmen, die weiter geht als die vorige. Da man hiebei nur die Zehntel

von

Traité de topographie diese Aufgabe auf eine etwas gedehntere Weise durch Näherung gelöst, um eine Auflösung vom zweiten Grade zu vermeiden.

von Meter gebraucht, so habe ich in folgender Tafel, welche bis 50000 Meter geht, zuerst die Millimeter, und nachher auch die Centimeter weggelassen.

Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb	Länge von db	Länge von mb
Meter	Meter	Meter	Meter	Metrr	Meter	Meter	Meter
10000	7,85	20000	31,42	30000	70,7	40000	125,7
10500	8,66	20500	33,01	30500	73,1	40500	128,8
11000	9,50	21000	34,65	31000	75,5	41000	132,0
11500	10,39	21500	36,32	31500	77,9	41500	135,3
12000	11,31	22000	38,04	32000	80,4	42000	138,6
12500	12,27	22500	39,79	32500	83,0	42500	141,9
13000	13,27	23000	41,57	33000	85,6	43000	145,2
13500	14,32	23500	43,40	33500	88,2	43500	148,6
14000	15,39	24000	45,27	34000	90,8	44000	152,0
14500	16,51	24500	47,18	34500	93,5	44500	155,5
15000	17,67	25000	49,10	35000	96,2	45000	159,1
15500	18,87	25500	51,09	35500	99,0	45500	162,6
16000	20,10	26000	53,11	36000	101,8	46000	166,2
16500	21,38	26500	55,17	36500	104,6	46500	169,9
17000	22,70	27000	57,28	37000	107,5	47000	173,6
17500	24,05	27500	59,42	37500	110,5	47500	177,2
18000	25,45	28000	61,60	38000	113,4	48000	181,0
18500	26,89	28500	63,82	38500	116,4	48500	184,7
19000	28,36	29000	66,07	39000	119,5	49000	188,6
19500	29,87	29500	68,36	39500	122,5	49500	192,4
						50000	196,3

§. 27.

Tafel über den Einfluß, den die irrdische Strahlenbrechung aufs Wasserwägen hat.

Wenn ein Lichtstrahl aus einem dichtern in einen weniger dichtern Körper geht, so wird er von seinem geraden Wege abgelenkt. Dasselbe geschieht, wenn er aus einem weniger dichten in einen dichtern Körper geht. Ein Stein, der im Wasser liegt, liegt nicht auf

der

der Stelle, wo man ihn sieht, sondern näher. Ebenfalls sieht man einen Fisch, der im Wasser steht, immer entfernter, und daher die Regel beim Fischeschießen, daß man immer unter sie zielen muß, wenn man sie treffen will. Eben so erscheint ein gerader Stock, den man ins Wasser hält, auf der Stelle gebrochen, wo er aus dem Wasser in die Luft kommt. — Legt man auf den Boden eines Gefäßes eine Geldmünze, und stellt sie so, daß sie dem Auge durch den Rand des Gefäßes verdeckt wird, so wird man sie sehen können, sobald Wasser ins Gefäß geschüttet wird. Die Ursache von allen diesen Erscheinungen ist die Brechung der Lichtstrahlen, welche sie an der Oberfläche des Wassers erleiden, wo sie aus dem dichtern Körper des Wassers in den dünnern der Luft übergehen.

Die Brechung der Lichtstrahlen rührt von der anziehenden Kraft der Körper her. Ein Lichtstrahl, der z. B. durch Glas geht, wird immer in gerader Richtung fortgehen, weil er von allen umgebenen Körpern, welches lauter Glastheilchen sind, gleich stark angezogen wird. Tritt er aber aus dem Glase heraus in die Luft, so wird er auf der äußern Glasebene von den benachbarten Glastheilchen stärker gezogen, als von den benachbarten Lufttheilchen, und er wird dann von seinem geraden Wege abgelenkt, und zwar jedesmal nach dem dichtern Körper hin.

Geht aber ein Lichtstrahl genau senkrecht aus einem dichtern in einen dünnern, oder aus einem dünnern in einen dichtern Körper, so wird er gar nicht gebrochen. Seine Geschwindigkeit erleidet im ersteren Falle eine kleine Verminderung, in letzterem eine

kleine

kleine Vermehrung, die aber so unbedeutend ist, daß man beides nicht bemerkt. — Die Ursache, daß denn keine Brechung statt findet, ist die: daß er beim Heraustreten von allen Seiten gleich stark angezogen wird. So sieht man einen Fisch im Wasser genau auf der Stelle wo er steht, wenn das Auge senkrecht über ihm ist.

Unsere Atmosphäre ist ungefehr 10 deutsche Meilen hoch. Die Lichtstrahlen, die aus dem leeren Raume kommen, erleiden, so wie sie in sie herein treten, eine Ablenkung von ihrem geraden Wege, die um so stärker ist, je tiefer sie kommen, weil die Luftschichten, durch die sie hindurch gehen, immer dichter und dichter werden. Wir sehen deswegen keinen Stern genau auf der Stelle, wo er wirklich steht, blos die Sterne ausgenommen, die gerade über uns im Scheitelpunkte stehen, weil die Lichtstrahlen von diesen senkrecht auf unsere Atmosphäre fallen, so gehen sie ungebrochen hindurch. Man nennt dieses Ablenken der Lichtstrahlen von ihrem geraden Wege: die himmlische Strahlenbrechung, sie ist am stärksten nahe am Horizonte, wo sie 33 Minuten beträgt, und nimmt immer ab, so wie die Sterne dem Zenith oder dem Scheitelpunkte näher sind. Ein Stern, der im Horizonte ist, erscheint uns noch 33 Minuten, also über einen halben Grad höher, und wir sehen ihn noch bis er 40 Minuten unterm Horizonte ist. In folgendem Täfelchen sieht man die Größe der himmlischen Strahlenbrechung von 0 bis 90 Grad Höhe.

Höhe	Strahlenbrechung	Höhe		Strahlenbrechung
0°	33,46	40°	=	1′,9″
3	14,28	50	=	49
5	9,54	60	=	33
10	5,20	70	=	21
20	2,39	80	=	10
30	1,41	90	=	0

Bei der himmlischen Strahlenbrechung durchläuft der Lichtstrahl immer die ganze Atmosphäre. Bei der irdischen hingegen durchläuft er nur immer einen größeren oder kleineren Theil derselben, je nachdem der Gegenstand dem Beobachter näher oder ferner ist. Von der Größe des Weges hängt nun seine Brechung ab, und man hat gefunden, daß sie zwischen den beiden Gegenständen d und b der vorigen Figur 0,08 von dem Winkel beträgt, den beide Gegenstände im Mittelpunkte der Erde in c miteinander machen. Wann der Winkel dcb z. B. 100 Min. ist, so sieht der Beobachter in d den Gegenstand b wegen der Strahlenbrechung um 8 Minuten höher.

Beim Wasserwägen muß der Beobachter wissen, um wie viel er den Gegenstand b wegen der Strahlenbrechung höher sieht, sobald er die Entfernung des Gegenstandes b kennt. Es würde lästig seyn, dieses jedesmal zu berechnen, und man bedient sich deswegen folgender Tabelle, in der man diese Erhöhung ohne Rechnung findet. In ihr ist nicht der Winkel angegeben um den er b höher sieht, sondern diese Höhe ist in Längenmaß ausgedrückt, welches bei der Ausübung bequemer ist. Die

Tabelle

Tabelle ist auf folgende Weise berechnet: Zieht man in der vorigen Figur eine gerade Linie von d nach m, so ist der Winkel mdb halb so groß als der Winkel mcd. Denn nach §. 1. Nro. 7. der Geometrie (Theil II. Seite 246.) ist der Winkel, den die Tangente mit der Sehne macht, so groß wie der Peripherie-Winkel, der auf dieser Sehne steht, folglich halb so groß wie der Winkel am Mittelpunkte. Wenn also die Strahlenbrechung 0,08 des Winkels c am Mittelpunkte ist, so ist sie 0,16 des Winkels bdm. Da dieser Winkel immer sehr klein ist, und das Dreieck bdm sehr nahe gleichschenkligt, so kann man ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Seite mb sich immer verhält wie der ihr gegenüberstehende Winkel bei d, und daß die Erhöhung wegen der Strahlenbrechung immer 0,16 der Größe von der Linie mb sey. Indem man also die Länge von mb, welche die vorige Tafel angibt mit 0,16 multiplicirt, so erhält man die Erhöhung für die Strahlenbrechung in Metern.

Entfernung	Erhöhung durch die Strahlenbrech.	Entfernung	Erhöhung durch die Strahlenbrech.	Entfernung	Erhöhung durch die Strahlenbrech.	Entfernung	Erhöh. durch die Strahlenbr.
Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter
100	0,000	2600	0,085	5100	0,327	7600	0,726
200	0,000	2700	92	5200	340	7700	745
300	0,001	2800	98	5300	353	7800	764
400	2	2900	106	5400	366	7900	784
500	3	3000	113	5500	380	8000	804
600	0,005	3100	0,121	5600	0,394	8100	0,824
700	6	3200	129	5700	408	8200	845
800	8	3300	137	5800	423	8300	866
900	10	3400	145	5900	437	8400	887
1000	13	3500	154	6000	452	8500	908
1100	0,015	3600	0,163	6100	0,467	8600	0,929
1200	18	3700	172	6200	483	8700	951
1300	21	3800	181	6300	499	8800	973
1400	25	3900	191	6400	515	8900	995
1500	28	4000	201	6500	531	9000	1,018
1600	0,032	4100	0,211	6600	0,547	9100	1,041
1700	36	4200	222	6700	564	9200	1,064
1800	41	4300	232	6800	581	9300	1,087
1900	45	4400	243	6900	598	9400	1,110
2000	50	4500	254	7000	616	9500	1,134
2100	0,055	4600	0,266	7100	0,634	9600	1,158
2200	61	4700	278	7200	951	9700	1,182
2300	66	4800	289	7300	670	9800	1,207
2400	72	4900	302	7400	688	9900	1,232
2500	78	5009	314	7500	707	10000	1,257

Beim Wasserwägen hat man nie größere Entfernungen als bis auf 10000 Meter. Sollte man die Strahlenbrechung indeß bis 50000 Meter berechnen wollen, so ist dieses leicht. Man hat nur die Zahlen der Tafel des vorigen Paragraphen mit 0,16 zu multipliciren.

Beispiel: Welches ist die Strahlenberechnung für 50000 Meter? — Die Länge von mb ist 193,3 Meter. Dieses mit 0,16 multiplicirt, gibt für die Strahlenbrechung 30,9 Meter.

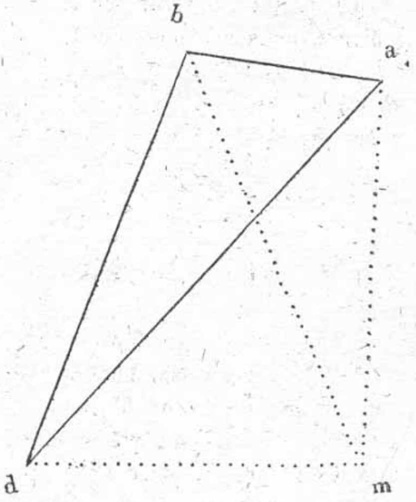
§. 28.

§. 28.

Trigonometrische Messung der Berge.

Nachdem wir den Einfluß untersucht haben, den die Krümmung der Erde und die Strahlenbrechung auf das Höhenmessen hat, so wollen wir jetzt zeigen, wie man die genaue Höhe der Berge mit Dreiecken messen könne.

Es sey in folgender Figur a die Spitze des Berges, am seine Höhe, db sey eine Standlinie, welche am Fuße des Berges gemessen worden, so entsteht eine vierseitige Pyramide, in der man eine Seite und fünf Winkel messen kann. Nemlich die drei Winkel in dem Dreiecke adb und die beiden Höhenwinkel bei d und b.



Man

Man wählt die beiden Standpunkte d und b so, daß sie eine möglichst gleichseitige Pyramide mit der Linie m a bilden. Finden sich Hindernisse zwischen ihnen, so mißt man die Standlinie wo anders, und triangulirt bis auf die Punkte d und b. Die Signale, welche man in a b und d setzt, sind Stangen, auf denen oben Kugeln sind, weil man sonst die schiefe Berührung der Bilder bei der geneigten Lage des Winkel-Instruments nicht genau beobachten kann. Hat man die Winkel bei d und b gemessen, so berechnet man zuerst die Seiten a b und a d, und aus diesen mit den gemessenen Höhenwinkeln die Seiten m d und m b. Hiedurch erfährt man die horizontalen Entfernungen vom Punkte m, und man kann nun die Größe der Verbesserungen bestimmen, welche man wegen der Kugelgestalt der Erde, und wegen der Strahlenbrechung anbringen muß. Jetzt berechnet man die Höhe a m, und indem man diese Verbesserungen anbringt, so findet man die wahre Höhe des Berges über der Standlinie.

§. 29.

Trigonometrische Messung des Monte Gregorio.

Wir wollen das im vorigen Paragraphen gelehrte Verfahren, die Berge zu messen, durch ein Beispiel erläutern. Wir können hiezu kein schicklicheres wählen, als die äußerst genaue Messungen, welche Hr. Daubuisson auf dem Monte Gregorio im Jahre 1809 angestellt hat.

Die Länge der Standlinie d b war 670,2 Meter, und auf den Eispunkt reducirt 670,3 Meter. Das öst-

liche

liche Ende d lag in 1,8 Meter niedriger als das westliche in b. Am östlichen Ende hing das Barometer, und deswegen wurde die Höhe des Berges über dem Endpunkte d bestimmt.

Die Winkel wurden mit einem Lenoirschen Wiederholungskreise von 8 Zoll gemessen.

Die Größe des Winkels a d b an dem östlichen Ende war 97°, 13′, 10″. Nemlich:

Wiederholungen	einfacher Winkel
2 . . . 194°, 26′, 15″	97°, 13′, 7″
4 . . . 28, 53, 0	13, 15
6 . . . 225, 19, 0	13, 10
8 . . . 57, 45, 30	13, 11
10 . . . 252, 11, 45	13, 10

Die Größe des Winkels a b d am westlichen Ende war 76°, 32′, 46″. Nemlich:

Wiederholungen	einfacher Winkel
2 . . . 153°, 6′, 15″	76°, 33′, 7″
4 . . . 306, 12, 30	33, 7
6 . . . 99, 18, 0	33, 0
8 . . . 252, 22, 0	32, 45
10 . . . 45, 27, 45	32, 46

Der dritte Winkel bei a konnte nicht gemessen werden. Hr. Daubuisson war zweimal mit dem Kreise auf dem Berge, und jedesmal verhüllten Wolken die Aussicht. Durch Abziehen von 180 Grad findet man ihn zu 6°, 14′, 4″.

Hieraus findet man die Entfernung a d = 6003,2
und a b = 6123,7

Zu

Zu gleicher Zeit hatte Hr. Daubuisson den Höhenwinkel a d m zu 16°, 31′, 10″ gemessen. Nemlich:

Wiederholungen				einzelner Winkel
2 . . .	146°,	47′,	0″	73°, 28′, 30″
4 . . .	293,	55,	0	28, 45
6 . . .	80,	53,	0	28, 50
8 . . .	227,	50,	0	28, 45
10 . . .	14,	48,	15	73, 28, 50 Zenithdistanz u.
				16, 31, 10 Höhenwinkel

Der Höhenwinkel a b c war 16°, 12′, 7″. Nemlich;

Wiederholungen				einfacher Winkel
2 . . .	147°,	35′,	30″	73°, 47′, 45″
4 . . .	295,	11,	45	47, 58
6 . . .	282,	47,	45	47, 58
8 . . .	230,	23,	0	47, 53
10 . . .	17,	58,	45	73, 47, 53 Zenithdistanz u.
				16, 12, 7 Höhenwinkel.

Setzt man die Winkel bei m als rechtwinkligt, so findet man aus dem Dreiecke a d m die Höhe des Berges zu 1707,0 Meter, und aus dem Dreiecke a b m zu 1708,7 Meter. Da der Punkt b um 1,8 Meter höher lag, so gab letzteres 1706,9 Meter über dem Punkte d, wo das Barometer hing.

Diese Höhe von 1707 Meter bedarf aber vorher noch dreier kleiner Verbesserungen ehe man die wahre Höhe hat. Zuerst muß man die Winkel bei m verbessern, die nicht genau 90 Grad waren, und dann muß man zweitens den Einfluß berechnen, den die Krümmung der Erde und die Strahlenbrechung auf die gemessene Höhe haben.

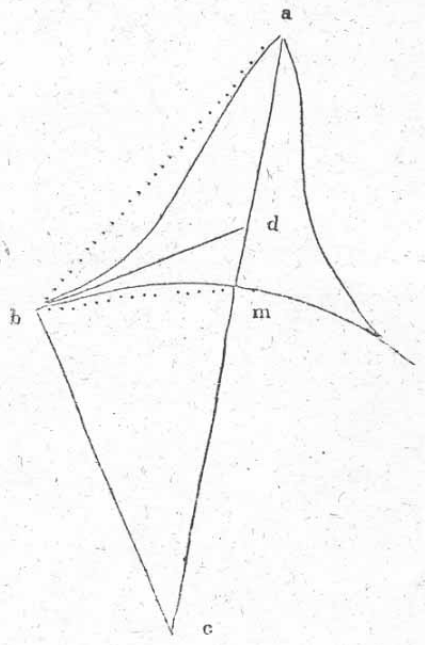
Um

Um dieses zu können, so müssen vorher die horizontalen Abstände der Punkte b und d an m bekannt seyn. Die Rechnung gibt d m zu 5755,4 Meter

und b m zu 5880,4 Meter.

Wir wollen zuerst den Einfluß untersuchen den es hat, daß der Winkel bei m nicht vollkommen ein rechter ist.

In folgender Figur ist der Durchschnitt des Berges dergestalt: c ist der Mittelpunkt der Erde, b ein Endpunkt der Standlinie, m der Punkt im Berge, der mit



ihm

ihm gleiche Höhe hat. da ist die scheinbare Höhe des Berges und ma die wahre.

bd ist die Tangente oder der scheinbare Horizont, der Winkel adb ist bei der Berechnung der Höhe des Berges als rechtwinkligt angenommen worden. Dieses ist er aber nicht, sondern ist etwas größer als 90 Grad, und zwar um so viel als der Winkel dcb beträgt, weil sein Nebenwinkel bdc um so viel kleiner als 90 Grad ist.

Da man die Entfernung bd = 5880 Meter kennt, so findet man den Winkel c durch folgenden Satz: 10000 Meter sind 324 Sek., wie viel sind 5880 Meter? Antw. 3′, 10″. Wiederholt man die Rechnung für die Höhe des Berges, so findet man, daß durch diese 3′, 10″ diese gar nicht geändert wird, weil so nahe bei 90° ein Unterschied von 5 Min. im Winkel erst eine Veränderung des Sinus der 7ten Decimale macht.

Man hat also die Berechnung von der Höhe des Berges nicht zu wiederholen, sondern blos die Correktionen anzubringen, welche die Strahlenbrechung und Krümmung der Erde erfordern.

Scheinbare Höhe des Berges aus dem Dreieck adm	= 1707,	00 Meter
Krüm. der Erde für 5755 Met. nach §. 25.	+ 2,	60
	1709,	60
Strahlenbrechung = 5755 = = §. 26.	—	41
Wahre Höhe des Berges	= 1709,	19 Meter
Scheinb. Höhe des Berges aus dem Dreieck abm	= 1706,	90
Krüm. der Erde für 5880 Fuß Meter	= + 2,	71
	1709,	61
Strahlenbrechung für 5880 Fuß Meter	= —	43
Wahre Höhe des Berges	= 1709,	18 Meter.

Obschon

Obschon die Uebereinstimmung bis auf 0,01 Meter wohl nur zufällig ist, so sieht man doch aus der ganzen Rechnung die große Sorgfalt, welche Hr. Daubuisson auf diese Messung verwandte, und wir können sie für eine der genauesten halten, welche wir besitzen.

An der untern Station hing das Barometer 0,86 Meter niedriger als der Wiederholungskreis, und auf der Spitze des Berges hing es 1,52 Meter unter dem Signalpunkte. 1,52 — 0,86 = 0,66 Meter müssen also noch von 1709, 18 abgezogen werden, und wir finden die senkrechte Entfernung beider Barometer zu 1708, 52 oder in runder Zahl zu 1708, 5 Meter oder zu 5259, 5 Fuß. Hr. Daubuisson versichert, daß er die Genauigkeit dieser Messung bis auf einen halben Meter glaubt verbürgen zu können.

Diese Messung zeigt uns zugleich, wie genau man einen Berg messen kann, sobald man gute Instrumente hat und mit Sorgfalt verfährt. Die Strahlenbrechung hat auf die Höhe der Berge nur einen geringen Einfluß, hier noch kein halbes Meter, und obschon diese zu verschiedenen Tagszeiten verschieden ist, und von $\frac{1}{3}$ bis auf $\frac{1}{24}$ des Bogens am Erdmittelpunkte sich verändert, so kann dieses eine solche Berghöhe doch nur um einige Zoll änderen, und die Geometer haben daher sehr Unrecht, wenn sie die Schuld von ihren fehlerhaften Höhenmessungen auf die Strahlenbrechung schieben. Die Strahlenbrechung ist nur dann veränderlich, wenn die Wärme in den unteren Luftschichten sehr ungleichförmig abnimmt. Dieses ist des Morgens bei Sonnenaufgang der Fall, wo die Luftschichten in einer Höhe von 20 oder 30 Fuß bald von der Sonne durchwärmt sind, hingegen die, welche dicht an der Erde sind, immer wieder von der Erde, die länger kalt bleibt, abgekühlt werden. Des Abends ist es umgekehrt, dann kühlen sich die öberen schneller ab, und die dicht an der Erde, bleiben länger warm. Wenn man dann einen Gegenstand auf eine große Entfernung dicht an der Erde wegsieht, so kann dieser seine scheinbare Höhe bis auf 4 Minuten verändern. Indeß Niemand wird bei Sonnenauf= oder Untergang nivelliren. Die beßte Zeit ist des Morgens um 9 Uhr, und des Nachmittags zwischen drei und vier. Die Strahlenbrechung ist dann immer nahe 0,08, so wie wir sie bei der Tafel in §. 27. angenommen haben.

Daß die Veränderlichkeit der Strahlenbrechung selbst auf große Entfernungen nur einen sehr geringen Einfluß habe, sobald man nicht zu den ungünstigen Tageszeiten mißt, oder wenn Wolken oder Gewitter an der Luft sind, das beweisen die Messungen, die Prof. Tralles in der Schweiz angestellt hat.

Die Höhe des Molesson im Kanton Freiburg bestimmte er von la Rochelle zu 4840,0 Pariser Fuß
vom Schlosse zu Neufchatel zu 4841,0
von Belleveaux . . . . zu 4842,7
vom Chasseral . . . . . zu 4841,8

Bei allen diesen Messungen betrug die Entfernung des Beobachtungspunkts vom Berge über 10 Stunden.

Noch auffallender ist der geringe Einfluß von der Veränderlichkeit der Strahlenbrechung bei der Messung des Montblanc, vom Molesson fand Prof. Tralles die Höhe
des Montblanc . . . zu 13451 Pariser Fuß
vom Chasseral . . . . zu 13453
vom Schloß in Neufchatel zu 13455

über

über dem Neufchateler-See der 206 Fuß höher liegt wie der Genfer.

Bei der ersten Messung betrug die Entfernung ungefähr 12 Stunden, und bei der letztern ungefähr 25. Doch gingen hiebei die Lichtstrahlen nicht dicht an der Erde vorbei, da die Stationspunkte selber schon sehr hoch lagen.

Je höher man in die Höhe steigt, desto dünner wird die Luft, und desto geringer wird die Strahlenbrechung. Wenn die Strahlenbrechung an der Erde 0,08 ist,

so ist sie in 1000 Fuß Höhe nur noch	0,07
3000	0,06
6000	0,05
12000	0,04

Vom Chasseral, der ungefähr 6000 Fuß über dem Meere ist, betrug die Strahlenbrechung bis auf den Montblanc, wenn man seine Entfernung zu 50000 Meter annimmt, ungefähr 16 Meter. Prof. Tralles mußte also die Größe der Strahlenbrechung sehr genau kennen, als er es unternahm die Höhe des Montblanc, aus so großen Entfernungen zu bestimmen.

§. 30.

Barometer-Messung des Monte Gregorio.

Herr Daubuisson hat folgende Barometermessungen auf dem Monte Gregorio in der Absicht angestellt, um zu sehen, wie genau diese mit der trigonometrischen Messung übereinstimmten.

Obere Station. Untere Station.

Okt. 1809	Druck der Luft	Wärme des Quecks.	Wärme der Luft	Druck der Luft	Wärme des Quecks.	Wärme der Luft	Mittl. Wärme der Luftsäule
	Zoll	G. R.	G. R.	Zoll	G. R.	G. R.	G. R.
1	27,300	17,4	14,8	22,207	7,5	5,8	10,3
4	612	12,9	12,4	395	5,3	1,8	7,1
7	497	15,0	14,9	348	7,0	3,0	9,0
8	494	15,0	14,7	326	4,7	2,6	8,6
17	418	15,9	16,0	351	8,4	7,9	11,9
18	27,532	15,6	15,6	22,425	8,9	7,9	11,8
20	625	13,3	13,0	473	8,5	6,5	9,8
25	842	14,7	14,3	719	10,3	10,0	12,2
30	512	10,9	10,9	279	3,1	0,6	5,8
31	388	10,9	10,6	183	1,9	1,4	6,0

Berechnung dieser Beobachtungen mit Rücksicht auf die Daltonsche Theorie.

1809 Okt.	Berechnete Höhe in Fuß	Unterschied in Fuß	Unterschied in Theile des Ganzē	Winde	Witterung Unten	Witterung Oben
1	5253,3	6,2	$\frac{1}{848}$	NNO stark	sehr schön	schön
4	5256,7	2,8	$\frac{1}{1878}$	SSO schw.	Sonne	in den Wolken
7	5256,1	3,4	$\frac{1}{1547}$	desgleichen	desgl.	desgleichen
8	5257,3	2,2	$\frac{1}{2391}$	SO.	desgl.	desgleichen
17	5251,6	7,9	$\frac{1}{666}$	SW schw.	sehr schön	sehr schön
18	5273,7	14,2	$\frac{1}{370}$	S. ruhig	bedeckt	hoher Nebel
20	5269,9	10,4	$\frac{1}{506}$	SW. schw.	desgl.	Regen um 1 Uhr
25	5250,2	9,3	$\frac{1}{566}$	desgl.	sehr schön	schön
30	5272,8	13,3	$\frac{1}{395}$	SO.	bedeckt	in Wolken
31	5261,7	2,2	$\frac{1}{2391}$	desgl.	Sonne	Sonne u. unterhalb Wolken
Mittel	5260,3	0,8	$\frac{1}{6575}$			

Diese große Uebereinstimmung zwischen der Barometrischen Messung, die bis auf $\frac{1}{6575}$ der ganzen Höhe geht,

geht, rührt theils von der günstigen Lage des Berges her, theils von der Genauigkeit der Instrumente, und größtentheils aber von der Anzahl der Beobachtungen und der Sorgfalt mit der sie angestellt wurden. Die Messungen geschahen im Oktober, wenn in den Alpen gewöhnlich die schönste Witterung ist. Der Berg ist nach der italienischen Seite hin sehr steil, und beide Barometer waren kaum anderthalb Stunden in gerader Linie von einander entfernt; sie empfanden also jede Veränderung im Drucke der Luft zu gleicher Zeit. Die Beobachtungen wurden um den Mittag angestellt, also in der Stunde, wo die Atmosphäre am meisten im Gleichgewicht ist. An der untern Station hing das Barometer auf einer Wiese im Schatten eines Baumes. Das Thermometer, welches die Wärme der Luft angab, hing 12 Fuß von der Erde an einer Pappel 1 Fuß vom Stamme. Auf diese Weise wurde alle natürliche Erwärmung vermieden, die im Oktober ohnehin so stark nicht ist, als mitten im Sommer. Oben hingen Barometer und Thermometer ebenfalls im Schatten, und es wurde dieselbe Sorgfalt angewendet, damit das Thermometer keine örtliche Wärme statt der allgemeinen zeige, die in dieser Höhe statt findet. Bei den Beobachtungen wurde fünfmal abgelesen; oben von Hr. Daubuisson und unten von Hr. Mallet, und dann aus den fünf Beobachtungen das Mittel genommen. Die obere Tafel enthält also die Resultate von 50 Beobachtungen. Die Barometer waren von Hr. Fortin in Paris gemacht. Die Scale war von Messing. Für die Ausdehnung der Scale durch die Wärme trug Hr. Daubuisson noch besondere Rechnung. Da an unseren Barometern die Scalen auf dem Glase

sind,

sind, und dieses sich nur sehr wenig ausdehnt, so haben wir bei unsern Messungen auf diese Correktion keine Rücksicht genommen.

§. 31.

Messung senkrechter Standlinien mit dem Barometer.

Die große Genauigkeit unserer Barometermessungen macht es möglich, daß man sie zum Messen senkrechter Standlinien gebrauchen kann, wenn nemlich im Gebirge das Messen der horizontalen Standlinien unmöglich ist. Man kann jede Barometermessung bis auf ungefehr $\frac{1}{250}$ der ganzen Höhe als genau annehmen, wenn diese über 2000 Fuß beträgt, und die Umstände nicht ungünstig sind. Dieses ist eine Genauigkeit, welche bei den wenigsten geometrischen Arbeiten erreicht wird, und mit der man, wenn man die Karte von einem gebirgigten Lande aufnimmt, immer kann zufrieden seyn.

Das Verfahren hiebei ist das Umgekehrte von dem, was wir §. 28. hatten. Dort fanden wir aus der horizontalen Entfernung die Senkrechte, und hier finden wir aus der Senkrechten die Horizontale.

Nehmen wir wieder die Figur aus §. 29., so ist a m die mit dem Barometer gemessene Höhe des Berges. In b ist der Höhenwinkel a b d beobachtet, und da man ohne merklichen Fehler annehmen kann, daß das Dreieck bei d rechtwinklig ist, so kann man die horizontale Entfernung b d berechnen.

Dieses ist indeß nicht die Wahre, sondern sie muß noch vom Einfluß der Strahlenbrechung und der Krümmung

mung der Erde befreit werden. Da man bd kennt, so sieht man in den §. 26. und 27. mitgetheilten Tafeln nach, wie viel diese für die gegebene Entfernungen betragen, und corrigirt hiemit die Höhe ad. Man berechnet denn aufs neue das Dreieck abd, und findet so die wahre Entfernung bd, welche der Linie bm gleich ist, da für so kleine Bogen die Sehnen und Tangenten nicht merklich von einander abweichen.

Beispiel. Die gemessene Höhe des Berges sey = am = 1200 Meter, und der beobachtete Höhenwinkel adb sey 2°, 45′, so ist der Tiefenwinkel bad = 87°, 15′. Hieraus findet man die Seite bd = 24982 Meter, oder die Entfernung vom Berge ungefehr 6 Stunden. Hiefür gibt die Tafel in §. 26. 49 Meter für die Erhöhung des scheinbaren Horizonts. Nach §. 27. ist der Einfluß der Strahlenbrechung = 49 . 0,16 = 8 Meter. In dem Dreieck abd ist also ad = 1200 — 49 — 8 Met. = 1143. Mit dieser corrigirten Seite ad berechnet man die Entfernung von bd aufs neue, vorher aber corrigirt man den stumpfen Winkel bei d, der nicht genau 90 Grad ist, wie bei der vorigen Rechnung angenommen worden. Da 10000 Meter 324 Sekunden sind, so beträgt er bei 24982 Meter Entfernung 90° 14 Minuten, und der Winkel bei a ist 87° 1′. Mit diesem Winkel, und mit der Seite von 1143, finden wir bd = 23791 Meter, also ungefehr 1200 Meter kleiner. Dieses ändert den Einfluß der Krümmung der Erde um 4 Meter, welcher statt 49 nur 45 ist. Da hiedurch die Linie ad um ungefehr $\frac{1}{300}$ ihrer Länge geändert wird, so müßte man die Rechnung zum drittenmale wiederholen. Allein man kann dieses leicht vermeiden, indem man gleich bei der ersten Rechnung nach

dem

dem Augenmaaße die Entfernung des Berges schätzt, und nach dieser Schätzung die Verbesserungen, welche die Strahlenbrechung und die Krümmung der Erde erfodern, vorher anbringt. Man wird sich nicht leicht in der Entfernung eines Berges um eine Stunde irren, und die erste Rechnung gibt denn die Entfernung von b d so genau, daß man die zweite Rechnung als völlig scharf ansehen kann.

Es ist nun noch zu untersuchen übrig, ob man ohne merkliche Fehler die Linie b m so groß als die Entfernung b d setzen dürfe, welche man berechnet hat.

Wir sehen eben, daß in unserm Beispiele der Winkel bei c = 14 Minuten war. Da das Dreieck c b m gleichschenklig ist, so ist der Winkel bei b = 89° 53′, und der Winkel d b m = 7′. Der Winkel b d m ist = 90° — 14′ = 89° 46′, und der Winkel b m d = 89° 53′. Die Seite b d fanden wir zu 23791 Meter, und die Rechnung gibt für die Seite b m ebenfalls 23791 Meter. Der Unterschied beträgt kaum ein Paar Zehntel Meter.

Da es selten ist, daß man auf diese Weise horizontale Entfernungen bestimmt, die größer als 6 Stunden sind, so braucht man auf ihn nie Rücksicht zu nehmen.

Außer der horizontalen Entfernung b d findet man auch die schiefe a b, welche man ebenfalls als eine Standlinie ansehen, und aus ihr wieder neue Entfernungen bestimmen kann. Wie die Rechnung in jedem Falle geführt wird, lehrt die Ansicht der Figur. Man erhält bei den Messungen im Gebirge immer Pyramiden, so wie die Figur §. 28., und man kann aus ihr immer leicht beurtheilen, welche Linien und Winkel man messen, und welche man berechnen muß.

§. 32.

§. 32.

Das Barometer als Markscheidewerkzeug.

Die Markscheider nennen das Barometer die Quecksilberwage, und nivelliren mit ihm die Thäler, in welche ihre Stollen zu Tage gehen, und oft auch ihre Gruben. Doch geschieht das Letztere nur zur Probe, denn die Barometermessungen in Bergwerken können die Genauigkeit nicht geben, welche die sogenannte Grubenzüge geben, theils weil die Höhen immer geringe sind, und theils weil man in der Erde beim Flackern der Bergwerkslampe das Barometer nicht so genau ablesen kann, als wenn man zu Tage ist. Hiezu kommt noch, daß in den Bergwerken die Luft immer in Ruhe ist, weil die kalte Luft zu den Stollen einfällt, dann durch die Strecken zieht, und zu den Schichten endlich wieder heraus. Dieser Wetterwechsel, welcher für den Bergmann so angenehm ist, macht es schwierig, genau die Temperatur der abgewogenen Luftsäule zu bestimmen.

Herr von Vilefosse hat in den Jahren 1804 und 5 ein großes Nivellement auf dem Harze mit dem Barometer gemacht. Die Resultate davon finden sich in Gilberts Annalen der Physik 1808. Er hat bei dieser Gelegenheit auch in den Bergwerken gemessen, und die Höhen mit den Markscheideangaben verglichen. Ich will einige seiner Messungen als Beispiel der Genauigkeit anführen, welche sich mit dem Barometer in Bergwerken erreichen läßt.

1) Den 15. Februar stand das Barometer an der Hängebank der Grube Dorothea zu 25,926 Zoll. Der

Wärme-

Wärmemesser stand — 4°,5 R. Zu gleicher Zeit stand das correspondirende Barometer an der Sohle des Georgstollens zu Grund 27,000 Zoll, und der Wärmemesser — 2,5.

Höhe nach dem Barometer 966,3 Fuß
nach der Markscheideangabe 922,2

Unterschied + 44,1 Fuß.

2) Den 20. Februar stand das Barometer an der Hängebank der Grube: Obern Thurn Rosenhof 26,263 Zoll. Therm. + 2°,5. Zu gleicher Zeit stand das Barom. in Grund 27,142 Zoll, das Thermometer + 2°.

Höhe nach dem Barometer 811,4 Fuß
nach der Markscheideangabe 793,6

Unterschied + 17,8 Fuß.

3) Den 23. April 1805 stand das Barometer an der Hängebank des oberrheinischen Weinschachts 26,223 Zoll, Thermometer + 5°,5, das correspondirende Barometer auf der Sohle des tiefen Georgsstollens in diesem Schachte stand auf 27,000 Zoll, die Wärme war + 10°.

Höhe nach dem Barometer 714,5 Fuß
nach der Markscheideangabe 699,6

Unterschied + 14,9 Fuß.

4) An demselben Tage stand das Barometer im Tiefsten der Grube 27,29 Zoll, als die Wärme + 14 Grad war. Bei 10° stand es auf der Stollensohle 27,000 Zoll.

Höhe nach dem Barometer 249,4 Fuß
nach den Markscheideangaben 272,4

Unterschied ÷ 23,0 Fuß.

5) Vergleicht man den eben angeführten Stand im

Tiefsten

Tiefsten der Grube mit dem an der Hängebank, so findet man den Höhenunterschied 968,0 Fuß
nach den Markscheideangaben 972,0

Unterschied ÷ 4,0 Fuß.

6) Den 8. April stand das Barometer an der Hängebank des neuen Gesammtschachtes zu Lauterberg auf 27,022 Zoll bei einer Wärme von + 8°. Zu gleicher Zeit stand das Correspondirende im Tiefsten der Grube Luise Christiane 27,562 bei einer Wärme von + 12°.

Höhe nach dem Barometer 491,5 Fuß

nach den Markscheideangaben 475,0

Unterschied + 16,5 Fuß.

Man sieht, daß das Barometer die Höhe bald zu groß und bald zu klein angegeben, und daß dieses seinen Grund blos in Fehlern der Beobachtung habe, welche wahrscheinlich durch mangelhaftes Ablesen entstanden sind. Auch fand sich, daß eins von diesen Barometern, als es mit dem Heberbarometer des physikalischen Cabinets in Göttingen verglichen wurde, 1,8 Linien niedriger stand. Da alle gute Barometer immer bis auf 4, oder höchstens 5 Zehntel Linien mit einander übereinstimmen, so muß eins von beiden fehlerhaft gewesen seyn. *)

Messung

*) Herr von Villefosse hielt die Barometer für Individua. Dieses ist ein Irthum. Gute Barometer stehen alle gleich hoch bis auf eine Kleinigkeit, die selten in Betracht kommt, und die fast nie eine halbe Linie beträgt. Um seine Barometermessungen mit den Markscheiderangaben übereinstimmend zu machen, nahm er bei der Rechnung

Messung der Entfernung mit Hülfe des Schalls.

§. 33.

Geschichte der Schallmessungen.

Der Schall gebraucht eine gewisse Zeit um sich von einem Orte zum andern zu bewegen. Dieses ist eine sehr bekannte Erfahrung, welche man bei jedem Holzhacker macht, den man in der Entfernung hauen sieht. Man hört den Hieb immer später als man ihn sieht. Noch auffallender ist dieses beim Schießen mit dem groben Geschütz. Man sieht den Blitz von den Kanonen, und der Schall kommt erst nach einer halben oder ganzen Minute an.

Es sind jetzt 200 Jahre, daß man die erste Versuche über die Geschwindigkeit des Schalls anstellte. Diese waren sehr unvollkommen, die Standlinien waren klein, die Uhren schlecht, und der Beobachtungen nur wenige.

Cassini

nung an, daß die Ausdehnung der Luft nicht $\frac{1}{213}$ sey, sondern $\frac{1}{1825}$ Die genauere Messungen von de Luc, Trembley, Roi und Schukburgh, waren damals schon bekannt, und da diese eine große Anzahl Beobachtungen gemacht hatten, und zwar auf Höhen bis zu 3000 Fuß, so war es etwas gewagt, auf 6 Beobachtungen eine neue Regel zu gründen, besonders da diese unter sehr ungünstigen Umständen auf Höhen angestellt waren, die noch keine 1000 Fuß betrugen.

Cassini fand die Geschwindigkeit zu 1473 Par. Fuß 1 Sek.

Mersenne	1380
Die Florentiner	1185
Huyghens	1172
Flamstead und Derham . .	1070
Condamine in Cajenne . .	1100
und in Quito	1050

Die letzteren Versuche waren mit mehr Sorgfalt angestellt worden, und ihre Resultate näheren sich schon sehr der Wahrheit.

Im Jahr 1737 unternahmen die Herren La Caille, Maraldi und Cassini diese Versuche aufs neue, und zwar auf einer Standlinie von 87816 Fuß. Sie fanden sie bei verschiedenen Wärmegraden zu 1038 bis 1048 Fuß in der Sekunde. Reducirt man diese Beobachtungen auf den Gefrierpunkt, so findet man die Geschwindigkeit zu 1026,6 Fuß.

Im Jahr 1778 haben die Herren Kästner und Mayer in Göttingen, und im Jahr 1791 Herr Müller ebendaselbst Schallversuche angestellt, und seine Geschwindigkeit zu 1034 bis 1040 Fuß gefunden. Die Standlinien, welche sie hiebei gebrauchten, waren nur 3 bis 8000 Fuß lang.

Im Jahr 1809 stellte ich den 3. Dec. 26 Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalls zwischen Ratingen und Düsseldorf, auf einer Standlinie von 27927 Par. Fuß an, diese gaben mir die Geschwindigkeit des Schalls bei 1°, 5 R. zu 1031,9 Par. Fuß, und auf 0 reducirt zu 1028,4 Fuß.

Den 8. Juni 1811 fand ich sie bei einer Temperatur von 22°, 4 R. auf derselben Standlinie aus 12 Beobachtungen

tungen zu 1079,7 par. Fuß, und auf 0 reducirt zu 1027,1 Par. Fuß.

An demselben Tage fand sie der Trigonometer Windgassen auf derselben Standlinie zu 1080 Fuß bei 22°, 7, und auf den Gefrierpunkt reducirt zu 1026,8 Par. Fuß.

Man sieht aus den letzten Versuchen den großen Einfluß den die Wärme der Luft auf die Geschwindigkeit des Schalls hat. Die Luft war bei ihnen 21 Grad wärmer als bei den Versuchen am 3. Dec., und der Schall ging um 48 Fuß in der Sekunde geschwinder.

Die Versuche, welche Bianconi im Jahr 1740 in Italien anstellte, bewiesen auch schon, daß der Schall im Sommer geschwinder gehe als im Winter. Den 19. Aug. ließ er auf der Festung Urbana 4 Kanonen abbrennen, welche er mit einigen seiner Freunde in einem 30 italienische Meilen entfernten Kloster beobachtete. Sie bemerkten die Zeit an einem Pendel. Der Schall traf mit der 76ten Sek. ihr Ohr. Das Thermometer stand auf 18° R. Den 7. Febr. 1741 wiederholten sie diese Versuche. Das Thermometer stand auf 1,2 Grad unter dem Gefrierpunkte, und der Schall durchlief die Linie in $78\frac{1}{2}$ Sek.

§. 34.

Theorie von der Geschwindigkeit des Schalls.

Wenn man mit dem Finger über den Rand eines Glases mit Wasser streicht, so entsteht ein Ton; auf dieser sehr bekannten Erfahrung beruht die gewöhnliche Glasharmonika, bei der die Gläser nicht herumlaufen, sondern fest stehen. Die Höhe oder Tiefe des Tons

hängt

hängt theils von der Menge des Wassers in demselben ab, und man stimmt die Gläser höher durch Zugießen und tiefer durch Ausgießen des Wassers. In dem Augenblicke, in dem der Ton entsteht, wird die ganze Oberfläche des Wassers mit äußerst feinen Wellen regelmäßig überzogen, welche mit einer großen Geschwindigkeit sich vom Rande gegen die Mitte des Glases hin bewegen. Diese rühren von den Schwingungen des Glases her, und dieselbe Wellen pflanzen sich, obschon für unser Auge unsichtbar, durch die Luft bis in unser Ohr fort, und erzeugen auf dem Trommelfell und in den Gehörnerven die Empfindung des Schalls.

Neuton zeigte in seinem unsterblichen Werke über die Naturphilosophie: daß man auf die wellenförmigen Bewegungen des Schalls in der Luft die Gesetze des Pendels anwenden könne, und daß hiebei die beständige Zahl als Pendellänge vorkomme.

Wenn das Gewicht der trockenen Luft $\frac{1}{10495}$ vom Gewichte des Quecksilbers ist, so wiegt die Luft bei ihrer gewöhnlichen, Feuchtigkeit $\frac{1}{10525}$, und hiefür ist die beständige Zahl 24558 Fuß. Auf dem 45ten Grade der Breite ist die Länge des Sekundenpendels 440,4 Par. Linien. Da sich die Quadrate der Schwingungszeiten zweier Pendel gegeneinander verhalten wie die Länge dieser Pendel, so wird ein Pendel von 24558 Fuß Länge, zu einer Schwingung 89,62 Sek. gebrauchen, und zu einem Hin- und Hergange 179,24 Sek. Ein Kreis von 24558 Fuß Radius hat 154302 Fuß Umfang.

Neuton zeigte nun aus der Theorie: daß in der Zeit, in welcher ein Pendel von der Länge der beständigen Zahl (24558) eine hin- und hergehende Schwingung

mache,

mache, (also in 179,24 Sek.) der Schall in der Luft einen Weg durchlaufe, der so lang sey als der Umfang des Kreises, von dem jene beständige Zahl der Radius sey. Hiernach war also die Geschwindigkeit des Schalls in 1 Sek. $\frac{154302 \text{ Fuß}}{179,24} = 861$ Fuß. Zu gleicher Zeit zeigte Neuton, daß sich in zweien elastischen Flüßigkeiten die Geschwindigkeit des Schalls verhalten müsse, wie die Quadratwurzelen aus ihren Elasticitäten.

Die Geschwindigkeit von 861 Fuß, welche die Theorie gab, stimmte indeß nicht mit der von 1027 Fuß, welche die Erfahrung gab. Die verschiedenen Meinungen, welche Neuton, Euler, La Grange und La Place hierüber geäußert haben, um diesen Unterschied zu erklären, beweisen die Schwierigkeit der Aufgabe.

Die Daltonsche Theorie von den vier verschiedenen Atmosphären, erkläret diesen Unterschied auf eine sehr befriedigende Weise. Denn wenn jede Atmosphäre so für sich existirt, als wenn die drei übrigen nicht da wären, so muß auch jede den Schall für sich allein fortpflanzen, und er muß in der Wasserdampfatmosphäre am geschwindesten gehen, weil diese die leichteste ist. Da nach Herr von Saußure das Gewicht des Wasserdampfs sich zu dem der atmosphärischen Luft verhält wie 7 : 10, so gibt dieses eine Geschwindigkeit des Schalls in der Wasserdampfatmosphäre von 1027 Fuß, gerade so wie wir sie beobachten.

Folgendes Täfelchen gibt eine Uebersicht über die Geschwindigkeit des Schalls in den verschiedenen Luftarten.

Wasser=

	Beständige Zahl als Pendellänge	Dauer eines Hin- und Herschwungs	Umfang des Kreises dessen Halbmesser die beständige Zahl ist.	Geschwindigkeit des Schalls in 1 Sek
	Fuß	Sek.	Fuß	Fuß
Wasserdämpfe	34984	213,90	219810	1027,6
Stickluft	25270	181,80	158776	873,4
Sauerstoffluft	21966	169,50	138075	814,5
Kohlens. Luft	16326	146,12	102479	701,3
Trockene Luft	24488	178,96	153863	859,7
Feuchte Luft	24599	179,36	154560	861,7

Wenn man in einer großen Entfernung einen scharfbegrenzten Schall, z. B. den Schlag einer Thurmuhr beobachtet, so hört man, daß dieser eine Dauer von 1 oder 2 Sek. hat, daß er Anfangs schwächer ist, dann stärker wird und endlich wieder abnimmt, gerade so als wenn der erste Schall durch die Dampfatmosphäre käme, die nur 0,42 Zoll Quecksilber trägt, als wenn der stärkste durch die 21 Zoll Quecksilber tragende Stickluftatmosphäre ging, und als wenn der letzte durch die 6 Zoll Quecksilber tragende Sauerstoffluftatmosphäre käme. Die Kohlensaure Luftatmosphäre ist zu dünn, als daß sie den Schall fortpflanzen sollte, da sie nur 003 Zoll Quecksilber im Barometer das Gleichgewicht halten kann. Durch diese hört man also keinen Schall. Vielleicht hörte man einen dreifachen Schall, wenn er in jeder Atmosphare scharf begrenzt wäre. Allein die den schallenden Körper umgebenden Gegenstände, werfen immer einen Theil der Schallwellen nach allen Seiten zurück, diese haben dann ein paar hundert Fuß mehr zu durchlaufen, und kommen später ins Ohr.

Bei einer Entfernung von 14000 Fuß habe ich bemerkt, daß die Schallwelle folgende Form hatte:

1 2 2½ Sek.

Nimmt man an, daß bei o die Schallwelle der Dampfatmosphäre, bei 1 die der Stickluft und bei 2 die der Sauerstoffluft angekommen sey, so ging der Schall in den beiden letzteren doch noch um 1,6 Sek. geschwinder als es die Theorie angibt, welches wahrscheinlich daher rührt, daß durch die Zusammendrückungen der Schallwellen Wärme frei wird, welche die Geschwindigkeit des Schalls vergrößert. Hingegen in der Dampfatmosphäre vermehrt diese frei werdende Wärme die Geschwindigkeit nicht, weil sie hier auf die Erhaltung des Dampfs in seinem elastischen Zustande verwendet wird *).

In folgender Tabelle ist die Geschwindigkeit des Schalls zu 1027 Fuß angenommen, so wie sie die Daltonsche Theorie angibt.

Die

*) Ausführlicher habe ich dieses in Gilberts Annalen der Physik, Stück 9 und 10 von 1812 auseinander gesetzt, und auch am Ende des zweiten Theils der Schweizerbriefe. Hier sind auch die Versuche angeführt, welche ich über die Geschwindigkeit des Schalls in reinen Wasserdämpfen mit einer Orgelpfeife angestellt habe, und die diese Geschwindigkeit bis auf ein paar Fuß eben so angeben wie die Daltonsche Theorie.

Die Akademiker fanden sie in Frankreich zu 1026,6 Fuß
Den 3. Dec. 1809 fand ich sie zu . . 1028,4
Den 8. Juni 1811 fand ich sie ebenfalls zu . 1027,1
und Herr Windgassen zu 1026,8

Das Mittel aus allen ist 1027,2 Fuß

Tafel über die Geschwindigkeit des Schalls von 0 bis 30° Wärme.

Wärme	Dichtigkeit der Luft	Geschw. des Schalls	Wärme	Dichtigkeit der Luft	Geschw. des Schalls
		Fuß			Fuß
0	1:10525	1027,0	16	1:11315	1064,7
1	10574	29,3	17	11364	1067,0
2	10624	31,8	18	11413	1069,4
3	10673	34,2	19	11462	1071,8
4	10723	36,5	20	11513	1074,0
5	10772	38,9			
6	10821	1041,2	21	11563	1076,3
7	10871	43,7	22	11613	1078,6
8	10920	46,0	23	11662	1080,9
9	10970	48,4	24	11712	1083,2
10	11019	50,7	25	11761	1085,5
11	11069	1053,1	26	11810	1087,8
12	11118	55,4	27	11859	1090,1
13	11160	57,4	28	11908	1092,3
14	11209	59,8	29	11957	1094,6
15	11258	62,0	30	12007	1096,9

§. 35.

Instrumente zu den Schallbeobachtungen.

Diese bestehen in ein Paar Thermometern, um die Wärme der Luft zu bestimmen, die man hiebei sehr ge=

nau kennen muß, und dann in einer Uhr, an welcher man die Zwischenzeit, welche zwischen dem Blitz und dem Schall verstreicht, beobachten kann.

Die ältern Beobachter bedienten sich bei diesen Beobachtungen des bloßen Sekundenpendels. Sie gebrauchten gewöhnlich ganz kurze Pendel, die nur halbe oder Viertel Sekunden schlugen. Späterhin gebrauchte man Tertienuhren, welche so gebaut sind wie eine Taschenuhr, und die einen besondern Zeiger haben, der in jeder Sekunde einmal herum läuft. Sie schlagen fünfmal in der Sekunde, und haben einen Sperrhacken, mit welchem man die Uhr nach Gefallen stillehalten kann. So wie man diesen los läßt, fängt die Uhr wieder an zu gehen. Eine solche Uhr ist auf der Göttinger Sternwarte. Ich habe sie bei den Versuchen über die Fallzeiten gebraucht, welche ich im Jahr 1802 im Hamburger Michaelisthurme anstellte. Der Gang dieser Uhren ist sehr ungleich, und vielen Veränderungen unterworfen, weil die Unruhe sehr leicht ist, und daher sehr empfindlich gegen alle kleine Ungleichheiten des Räderwerks und der Schnecke. Man muß mit ihnen eine große Anzahl Beobachtungen anstellen, ehe man sich auf die Genauigkeit der Mittel verlassen darf.

Einen ungleich genauern Weg haben die Tertienuhren mit Centrifugalpendeln, welche der Uhrmacher Pfaffius in Wesel für 6 Louisd'or macht. Diese sind wie eine Tafeluhr gebaut, und geht das Pendel nicht hin und her, sondern beständig im Kreise fort. Das Zeigerwerk liegt oben auf der Uhr, und wird mit einem Sperrhacken angedrückt und losgelassen. Die Uhr bleibt immer am Gehen, und die Zeiger stehen still. In dem Augenblick, in dem man den Blitz von der Kanone sieht, drückt man das Zeigerwerk an, und in dem Augenblick, in dem man den Schall hört, läßt man es wieder los. Es hat dann genau so lange gegangen, als der Schall unterwegens war. Mit einer solchen Uhr sind die Schallversuche angestellt, die ich nachher anführen will. Sie hatte Decimalzeit, und theilte den Tag in 10000 Sekunden.

§. 36.

Ueber die Art, die Schallmessungen anzustellen, und über die Genauigkeit derselben.

Man richtet ein Fernrohr nach dem schallenden Körper, um genau den Augenblick zu beobachten, wenn der Schall entsteht. Bei den Schallversuchen, die Lichtenberg in Göttingen machte, richtete er das Fernrohr nach dem Jakobithurm, wo er das Aufschlagen des Hammers auf die Glocke beobachten konnte. In dem Augenblick, daß er das Niederfallen des Hammers sah, drückte er die Uhr an, und in dem Augenblick, in dem er den Schall hörte, ließ er sie wieder still stehen.

Bei den Versuchen in Ratingen richtete ich das Fernrohr auf die Batterie des Eiskellers zu Düsseldorf, wo die Kanonen standen. Ich hatte die Uhr neben mir im Thurme stehen, und hing das Thermometer außer dem Thurme auf, um die genaue Wärme der Luft zu erfahren. Ein zweites Thermometer wurde in Düsseldorf beobachtet. Während ich die Beobachtungen machte, schrieb mein Gehülfe den Stand der Zeiger auf. Jede Minute wurde eine Kanone abgefeuert, und da der Schall ungefähr eine halbe Minute unterwegens war, so konnte ein Beobachter die

Beobachtungen nicht wohl zu gleicher Zeit machen und aufschreiben.

Wir wollen jetzt einige Schallversuche berechnen, um die Genauigkeit zu prüfen, mit welcher diese Messungen die Entfernungen der Orte angeben.

Nach unserer Tabelle geben die oben angeführten Beobachtungen von Bianconi die Entfernung des Klosters von der Festung Urbana im Mittel zu 80856 Fuß.

Nemlich die den 19. Aug. 1740. gaben 81290 Fuß,
und die den 7. Febr. 1741. gaben 80423

Unterschied 867

Den 12. Febr. 1741. stellte Bianconi Versuche über die Geschwindigkeit des Schalls im Nebel an. Er hatte auf das Kloster auch eine Kanone bringen lassen, diese wurde zuerst abgefeuert, und in dem Augenblick, in dem Bianconi diesen Schall in der Festung hörte, brannte er auch eine Kanone ab, die dann in dem Kloster beobachtet wurde. Der Schall gebrauchte zu einem Hin- und Hergange 157 Sekunden. Das Thermometer stand auf dem Gefrierpunkte. Dieses gibt die Entfernung des Klosters vom Schlosse zu 80620 Fuß, und der Nebel scheint also keinen merklichen Einfluß auf die Geschwindigkeit des Schalls gehabt zu haben.

Diese Versuche wurden mit unvollkommenen Instrumenten angestellt. Wir wollen jetzt die Genauigkeit der Schallmessungen an solchen Beobachtungen prüfen, die mit ganz vorzüglichen Instrumenten angestellt worden sind.

Ich will jetzt als Beispiel die Ratinger Schallversuche vom 3. December 1809 nehmen, welche des Morgens zwischen 7 und 8 Uhr angestellt wurden. Die Luft war heiter

heiter und windstill. Das Thermometer stand + 1,°5 R. und der Schall war sehr deutlich

Beob.	Stand der Zeiger	Zwischenzeit
1	00″,00‴	31″,24‴
2	31,24	30,86
3	62,10	31,17
4	93,27	31,20
5	124,47	30,93
6	155,40	31,46
7	186,86	31,23
8	218,09	31,39
9	280,40	31,36
	Mittel	31,20

Beob.	Stand der Zeiger	Zwischenzeit
	280″,84‴	
10	312,06	31″,22‴
11	343,17	31,11
12	374,35	31,18
13	405,71	31,36
14	436,74	31,03
15	468,01	31,27
	70,00	
16	101,50	31,50
17	132,64	31,14
18	163,79	31,15
	Mittel	31″,22‴

Beob.	Stand der Zeiger	Zwischenzeit
	65,00	
19	96,24	31″,24‴
20	127,38	31,14
21	158,45	31,17
22	189,44	30,99
23	220,93	31,49
24	252,28	31,35
25	283,49	31,21
26	314,88	31,39
	Mittel	31,25

Die ersten 9 Beob. geben ein Mittel	31″,20‴
zweiten 9	31,22
letzten 8	31,25
Die Beob. von 1 bis 15 geben .	31,20
Die von 16 bis 26 geben . .	31,23
Mittel aus allen	31,22,5
Für den Gang der Uhr +	9,7
	31″,32‴,2 Decimalzeit.

Dieses sind 27,0622 Sexagesimalsekunden. Da

Da bei der Temperatur von + 1°,5 die Geschwindigkeit des Schalls nach unserer Tabelle 1030,6 Fuß in 1 Sekunde ist, so durchlief der Schall in 27,0622 Sek.
27890 Fuß.
Die trigonometrische Messung gab 27927

Also Fehler der Schallmessung = 37 Fuß,
oder $\frac{1}{755}$ des Ganzen.

Den 8ten Junius wurden auf der Batterie des Eiskellers zu Düsseldorf 50 Kanonenschüsse wegen des Geburtsfestes abgebrannt, das dem Könige von Rom zu Ehren gegeben wurde. Der Tag war sehr schwül. Des Mittags um 2 Uhr stand das Thermometer auf 25° im Schatten. Des Abends zwischen 6 und 7 Uhr stand es auf 22°,7. Der Trigonometer W i n d g a s s e n machte folgende Beobachtungen im Ratinger Kirchthurme mit der Tertienuhr von Pfaffius.

1	Beob.	29'',80'''	10	Beob.	30'',00'''
2	—	29,88	11	—	29,90
3	—	29,91	12	—	29,83
4	—	29,73	13	—	29,70
5	—	29,77	14	—	29,85
6	—	29,84	15	—	29,78
7	—	29,82	16	—	29,84
8	—	29,93	17	—	29,73
9	—	29,86	18	—	29,81
Mittel		29,83,8	Mittel		29,82,7
					29,83,8
			Mittel		29,83,3
			Gang der Uhr	+	9,4

Wahre Zwischenzeit = 29,92,7 Decimalzeit
Dieses sind 25,857 Sexagesimalsekunden.

Unsere

Unsere Tafel gibt für die Wärme von 22°,7 eine Geschwindigkeit von 1080,2 Fuß. Dieses mit 25,857 Sekunden multiplicirt, gibt die Entfernung zwischen den Kanonen und dem Beobachter zu 27931 Fuß,

die trigonom. Messung gab 27927 Fuß,

also Unterschied 4 Fuß,

oder $\frac{1}{6982}$ des Ganzen.

Wenn man auch annehmen will, daß diese Uebereinstimmung zum Theil zufällig ist, so sieht man doch, wenn man die einzelnen Beobachtungen miteinander vergleicht, daß die Abweichung nicht groß seyn konnte.

An demselben Tage machte ich bei der Temperatur von 22°,4 R. 12 Beobachtungen, welche die Zwischenzeit zu 25,866 Sekunden gab. Unsere Tafel gibt für diese Temperatur eine Geschwindigkeit von 1079,5 Fuß in 1 Sekunde. Hieraus findet man die Entfernung zu 27922 Fuß, also 5 Fuß geringer wie die trigonometrische Messung.

Man wird daher immer annehmen können, daß man mit 10 Schallversuchen eine Entfernung bis auf $\frac{1}{1000}$ genau bestimmen könne, wenn die Luft ruhig und der Schall deutlich zu hören ist.

Nur muß man sehr genau die wahre Temperatur der Luft kennen, weil ein Grad Fehler in der Wärme die Entfernung um $\frac{1}{400}$ ändert.

Auf den Stand des Barometers braucht man bei diesen Messungen keine Rücksicht zu nehmen, da die Geschwindigkeit des Schalls blos von der beständigen Zahl abhängt, und diese bei allen Barometerständen dieselbe bleibt.

Man kann indeß nur dann mit Hülfe des Schalls die Entfernung zweier Orte genau messen, wenn die Luft windstill ist. Der Wind vermehrt die Geschwindigkeit des Schalls, wenn er mit dem Schall geht, und vermindert sie, wenn er ihr entgegen geht. Geht der Wind senkrecht auf die Richtung des Schalls, so vermehrt oder vermindert er sie nicht merklich. Man kann annehmen, daß ein schwacher Wind die Geschwindigkeit des Schalls um 5 Fuß vermehrt oder vermindert, ein starker verändert sie um 10, und ein ganz starker um 15 Fuß. Bei 32 Schallversuchen, die ich den 2ten December 1809 anstellte, fand ich, daß ein ziemlich starker Südwestwind, der mit der Richtung des Schalls ging, die Geschwindigkeit desselben um 7 Fuß in der Sekunde vermehrte. Die Zwischenzeit war nemlich 26,7786 Sekunden, die Wärme + $3\frac{1}{2}$ Grad. Hiefür ist die Geschwindigkeit des Schalls nach unserer Tafel 1035,5 Fuß, und die Entfernung wäre 27729 Fuß gewesen, also 198 Fuß. Der Wind kam stoßweise, und hatte in den einzelnen Stößen eine viel größere Geschwindigkeit als 7 Fuß; allein aus den Schallversuchen sah man, daß seine mittlere Geschwindigkeit auf der ganzen Linie doch nur 7 Fuß war.

Schluß.

Indem wir diesen Theil schließen, werfen wir noch einen Blick auf den zurückgelegten Weg, und machen einige Bemerkungen über den gegenwärtigen Zustand der angewandten Geometrie.

Die Vollkommenheit, welche die Winkel-Instrumente mit kleinen Halbmessern seit der Erfindung der Theilmaschinen erreicht haben, bringt in alle geometrische Arbeiten eine Genauigkeit, eine Schnelligkeit, und selbst eine Wohlfeilheit, welche den frühern Geometern mit ihren großen und unbehüflichen Instrumenten zu erreichen unmöglich war.

Wir haben gesehen, wie leicht es war, einen Winkel bis auf 15 Sekunden genau zu messen, und eine solche Ungewißheit macht nur eine von einem halben Meter in der Größe der gegenüber stehenden Seite, wenn diese die Länge von 2 Stunden hat, und die Dreiecke nahe gleichseitig sind. Dieses ist nur $\frac{1}{8000}$ des Ganzen.

Durch die Correktion mit 360° wird aller Einfluß des Collimationsfehlers aufgehoben, und durch die mit 180° werden zum zweitenmale die kleinen Fehler zerstöhrt, welche noch in den Winkeln des Dreiecknetzes sind. Hiezu kommt noch, daß man die Länge der Hauptlinien immer aus mehreren Dreiecken bestimmt, und indem man dann mit dem Mittel zu trianguliren fortfährt, so heben sich zum drittenmale die kleinen noch übrig bleibenden

Fehler

Fehler der Messung. Es war daher kein Wunder, daß die Dreiecke die Länge der Versicherungslinie doppelt so genau angaben, als vorgeschrieben war; und daß indeß die erlaubte Fehlergrenze $\frac{1}{3000}$ war, die wirkliche noch nicht $\frac{1}{6000}$ betrug. Auch stimmen unsere Dreiecke mit den französischen bis auf $\frac{1}{4000}$ des Ganzen, als sie mit diesen einige Jahre später verbunden wurden. Diese Probe war um so schärfer, da die französischen Dreiecke auf einer ganz andern Standlinie beruhten, die ungefehr 100 Stunden von der unsrigen entfernt war. Die Verbindung geschah nemlich mit den Dreiecken, welche der Oberste Tranchot von der Melüner Standlinie mit einem Wiederholungskreise bis an den Rhein geführt hatte. Es war dieses dieselbe Standlinie, welche von Delambre für die französische Gradmessung mit Platinamaßstäben war gemessen worden, und deren Länge 36455,34 Pariser Fuß ist.

Unsere Standlinien sind nur mit hölzernen Maßstäben gemessen, und die Genauigkeit in den Winkeln ist nur 10 bis 15 Sekunden. Allein diese Genauigkeit ist reel, und deswegen mußten die Dreiecke an der Versicherungs-Standlinie so genau stimmen. Ein Trigonometer hat bei seinen Messungen vorzüglich darauf zu sehen, daß seine Fehlergrenze immer reel, und nie immaginär sey. Die Cassinische Messung in Frankreich wurde für sehr genau gehalten, — sie war dieses auch in vielen Theilen, allein sie enthielt doch Dreiecke, in denen in einem Winkel um 15 bis 30 Sekunden gefehlt war.

Aehnliche Fälle findet man in mehreren neuern Messungen. Der Trigonometer darf sich nie durch eine zufällige Uebereinstimmung täuschen lassen, seine Messung für genauer zu halten wie sie ist. Er muß die mittlere Genauigkeit seiner Messung kennen, und zugleich das Maximum, welches von keinem Fehler überschritten wird. Bei jedem Horizonte, bei jedem Dreiecke muß er die Abweichung von 360 und 180 Grad bestimmen, alle Seiten, für die er ein doppeltes Resultat hat, muß er mit einander vergleichen, und indem er so alle Fehler in ein Tableau zusammen stellt, so sieht man leicht das Maximum, welches die Fehler nicht überschritten haben, so wie auch die mittlere Genauigkeit der Messung. In allen praktischen Arbeiten nähert man sich nur der Wahrheit, wie sehr man sich ihr nähern muß, hängt von der Natur der Sache ab. Jede Aufgabe aus der praktischen Geometrie ist unbestimmt, wenn nicht zugleich angegeben wird, mit welcher Genauigkeit sie soll gelöst werden. Keine Messung ist fehlerfrei, aber jede Messung ist gut, wenn sie so genau ist, als vorgeschrieben worden.

Kehren wir von den geometrischen Messungen zu den physikalischen zurück, zu dem Bergmessen mit dem Barometer, und zu den Schallmessungen, so finden wir hier dieselbe Genauigkeit, und wir sehen, auf welcher hohen Stufe der Vollkommenheit die praktische Geometrie im Anfange des neunzehnten Jahrhunderts in allen ihren Theilen steht. Die Instrumente sind einfach, die Messungen sind leicht, und die Rechnung ist geschmeidig. Sie fodert nur eine klare Ansicht dessen, was man will, und lehrt dann alle Aufgaben auf eine leichte Weise

lösen,

lösen, ohne verwickelte Formeln und ohne höhere Rechnungen.

Die angewandte Meßkunst liegt ganz im Kreise des täglichen Lebens, und sie fodert zu ihrer Ausübung nur diejenigen Kenntnisse, die dem gebildeten Manne ohnehin nicht fremd sind.

Verbesserungen.

Seite 80 Zeile 11 von unten statt $\overset{IV}{12-9}$ lies $12-\overset{IV}{9}$

— 102 — 5 . . . . statt Differenz lies Reihe.

— 165 — 10 von oben statt 5^2 lies $\frac{1}{5^2}$

— — — 11 . . . . statt 5^4 lies $\frac{1}{5^4}$

— — — 14 . . . . statt 5^2 lies $\frac{1}{5^3}$

— 167 — 6 . . . . statt nie lies die.

— 178 — 3 lies $-4+027844$ vollkommen gleich und $10^{-4,+027844}$

— 197 — 6 statt Und lies Um.

— — — 15 statt 230281 zu lies 23028 zu 1.

— 343 — 1 statt 835762 lies 840650.

— 494 — 12 statt T lies ⊢.

— 508 — 15 statt Quecksilber lies von Quecksilber.

— 511 müssen in der letzten Colonne der Tafel die Commata in den Zahlen weggestrichen werden.

— 522 Zeile 13 statt Pic dû Dome lies Pui dû Dome.

— 526 — 7 von unten: statt Mittelpunkt lies Nullpunkt.

— 530 — 2 lies: erst später

— 531 — 3 statt 63,66200 lies 6366200.

— 549 — 17 statt natürliche lies örtliche.

— 553 — 12 statt immer lies nimmer.

— 564 — 24 statt und lies nur.

— 570 — 5 von unten lies: 198 Fuß zu klein.

In der Vorrede.

Seite VI Zeile 11 statt Winkelwerkzeug lies Winkelkreuz

— XIV — 5 wird folgendes weggestrichen: und ihre besondere Arbeit.

— — — 4 von unten statt dieses lies diese.

— XVI — 9 von oben, statt Zahlen lies Zeichen.

— — — 11 statt reellen lies vollen.

— XVII lies: Nur das, was er weise verschweigt, zeigt mir den Meister des Stiels.

Im Register Seite 3 fehlt als Ueberschrift: Die sphärische Trigonometrie.

Tafel

der

natürlichen Logarithmen

aller Zahlen

von

1300 bis 2900.

Die Kennziffer 7 ist bei allen weggelassen, und blos der Decimalbruch mit 6 Stellen gedruckt.

---

13 Zoll.

Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm. Reihe Logarithmen.	Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	170120	35	196687	70	222566
1	170888	36	197435	71	223296
2	171657	37	198184	72	224025
3	172425	38	198931	73	224753
4	173192	39	199678	74	225481
5	173958	40	200425	75	226209
6	174724	41	201171	76	226936
7	175490	42	201916	77	227662
8	176255	43	202661	78	228388
9	177019	44	203406	79	229114
10	177782	45	204149	80	229839
11	178545	46	204893	81	230563
12	179308	47	205635	82	231287
13	180070	48	206377	83	332010
14	180831	49	207119	84	232733
15	181592	50	207860	85	233455
16	182352	51	208600	86	234177
17	183112	52	209340	87	234898
18	183871	53	210080	88	235619
19	184629	54	210818	89	236339
20	185387	55	211557	90	237059
21	186144	56	212294	91	237778
22	186901	57	213032	92	238497
23	187657	58	213768	93	239215
24	188413	59	214504	94	239933
25	189168	60	215240	95	240650
26	189922	61	215975	96	241366
27	190676	62	216709	97	242082
28	191429	63	217443	98	242798
29	192182	64	218177	99	243513
30	192934	65	218910	100	244228
31	192686	66	219642		
32	194437	67	220374		
33	195187	68	221105		
34	195937	69	221836		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000074.

14 Zoll.

Geom. Reihe.	Arithm. Reieh.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.
0	244228	35	268920	70	293018
1	244942	36	269617	71	293698
2	245655	37	270313	72	294377
3	246368	38	271009	73	295056
4	247081	39	271704	74	295735
5	247793	40	272398	75	296413
6	248504	41	273093	76	297091
7	249215	42	273786	77	297768
8	249926	43	274480	78	298445
9	250636	44	275172	79	299121
10	251345	45	275865	80	299797
11	252054	46	276556	81	300473
12	252762	47	277248	82	301148
13	253470	48	277939	83	301822
14	254178	49	278629	84	302496
15	254885	50	279319	85	303170
16	255591	51	280008	86	303843
17	256297	52	280697	87	304516
18	257003	53	281386	88	305188
19	257708	54	282074	89	305860
20	258412	55	282761	90	306531
21	259116	56	283448	91	307202
22	259820	57	284135	92	307873
23	260523	58	284821	93	308543
24	261225	59	285507	94	309212
25	261927	60	286192	95	309881
26	262629	61	286876	96	310550
27	263330	62	287561	97	311218
28	264030	63	288244	98	311886
29	264330	64	288928	99	312553
30	265430	65	289611	100	313220
31	266129	66	290293		
32	266827	67	290975		
33	267525	68	291656		
34	268223	69	292337		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000069.

15 Zoll.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	313220	35	336286	70	358831
1	313887	36	336937	71	359468
2	314553	37	337588	72	360104
3	315218	38	338238	73	360740
4	315884	39	338888	74	361375
5	316548	40	339538	75	362011
6	317212	41	340187	76	362645
7	317876	42	340836	77	363280
8	318540	43	341484	78	363914
9	319202	44	342132	79	364547
10	319865	45	342779	80	365180
11	320527	46	343426	81	365813
12	321189	47	344073	82	366445
13	321850	48	344719	83	367077
14	322510	49	345365	84	367709
15	323171	50	346010	85	368340
16	323831	51	346655	86	368970
17	324490	52	347300	87	369601
18	325149	53	347944	88	370231
19	325808	54	348588	89	370860
20	326466	55	349231	90	371489
21	327123	56	349874	91	372118
22	327781	57	350516	92	372746
23	328437	58	351158	93	373374
24	329094	59	351800	94	374002
25	329750	60	352441	95	374629
26	330405	61	353082	96	375256
27	331060	62	353722	97	375882
28	331715	63	354362	98	376508
29	332369	64	355002	99	377134
30	333023	65	355641	100	377759
31	333676	66	356280		
32	334329	67	356918		
33	334982	68	357556		
34	335634	69	358194		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000065.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	377759	35	399398	70	420579
1	378384	36	400010	71	421178
2	379008	37	400621	72	421776
3	379632	38	401231	73	422374
4	380256	39	401842	74	422971
5	380879	40	402452	75	423568
6	381502	41	403061	76	424165
7	382124	42	403670	77	424762
8	382746	43	404279	78	425358
9	383368	44	404888	79	425954
10	383989	45	405496	80	426549
11	384610	46	406103	81	427144
12	385231	47	406711	82	427739
13	385851	48	407318	83	428333
14	386471	49	407924	84	428927
15	387090	50	408531	85	429521
16	387709	51	409136	86	430114
17	388328	52	409742	87	430707
18	388946	53	410347	88	431300
19	389564	54	410952	89	431892
20	390181	55	411556	90	432484
21	390799	56	412160	91	433075
22	391415	57	412764	92	433667
23	392032	58	413367	93	434257
24	392648	59	413970	94	434848
25	393263	60	414571	95	435438
26	393878	61	415175	96	436028
27	394493	62	415777	97	436617
28	395108	63	416378	98	437206
29	395722	64	416980	99	437795
30	396335	65	417580	100	438384
31	396949	66	418181		
32	397562	67	418781		
33	398174	68	419381		
34	398786	69	419980		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000061.

Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.
0	438384	35	458763	70	478735
1	438972	36	459339	71	479300
2	439559	37	459915	72	479864
3	440147	38	460490	73	480428
4	440734	39	461066	74	480992
5	441320	40	461640	75	431556
6	441907	41	462215	76	482119
7	442493	42	462789	77	482682
8	443078	43	463363	78	483244
9	443664	44	463937	79	483807
10	444249	45	464510	80	484369
11	444833	46	465083	81	484930
12	445418	47	465650	82	485492
13	446001	48	466228	83	486053
14	446585	49	466799	84	486613
15	447168	50	467371	85	487174
16	447751	51	467942	86	487734
17	448334	52	468513	87	488294
18	448916	53	469084	88	488853
19	449498	54	469654	89	489412
20	450080	55	470224	90	489971
21	450661	56	470794	91	490529
22	451242	57	471363	92	491088
23	451822	58	471932	93	491645
24	452402	59	472501	94	492203
25	452982	60	473069	95	492760
26	453562	61	473637	96	493317
27	454141	62	474205	97	493874
28	454720	63	474772	98	494430
29	455298	64	475339	99	494986
30	455877	65	475906	100	495542
31	456455	66	476472		
32	457032	67	477038		
33	457609	68	477604		
34	458186	69	478170		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000057.

18 Zoll.

Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.
0	495542	35	514800	70	533694
1	496097	36	515345	71	534228
2	496652	37	515889	72	534763
3	497207	38	516433	73	535297
4	497762	39	516977	74	535830
5	498316	40.	517521	75	536364
6	498870	41	518064	76	536897
7	499423	42	518607	77	537430
8	499977	43	519150	78	537963
9	500529	44	519692	79	538495
12	501082	45	520235	80	539027
11	501634	46	520776	81	539559
12	502186	47	521318	82	540090
13	502738	48	521859	83	540622
14	503290	49	522400	84	541152
15	503841	50	522941	85	541683
16	504392	51	523481	86	542213
17	504942	52	524021	87	542744
18	505492	53	524561	88	543273
19	506042	54	525101	89	543803
20	506592	55	525640	90	544332
21	507141	56	526179	91	544861
22	507690	57	526718	92	545390
23	508239	58	527256	93	545918
24	508787	59	527794	94	546446
25	509335	60	528332	95	546974
26	509883	61	528869	96	547502
27	510431	62	529406	67	548029
28	510978	63	529943	98	548556
29	511525	64	530480	99	549083
30	512071	65	531016	100	549609
31	512618	66	531552		
32	513164	67	532088		
33	513709	68	532624		
34	514255	69	533159		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000054.

19 Zoll.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	549609	35	567863	70	585789
1	550135	36	568379	71	586296
2	550661	37	568896	72	586804
3	551187	38	569412	73	587311
4	551712	39	569928	74	587817
5	552237	40	570443	75	588324
6	552762	41	570959	76	588820
7	553287	42	571474	77	589336
8	553811	43	571988	78	589842
9	554335	44	572503	79	590347
10	554859	45	573017	80	590852
11	555382	46	573531	81	591357
12	555905	47	574045	82	591862
13	556428	48	574558	83	592366
14	556951	49	575072	84	592870
15	557473	50	575585	85	593374
16	557995	51	576097	86	593878
17	558517	52	576610	87	594381
18	559038	53	577122	88	594884
19	559559	54	577634	89	595387
20	560080	55	578145	90	595890
21	560601	56	578657	91	596392
22	561122	57	579168	92	596894
23	561642	58	579679	93	597396
24	562162	59	580189	94	597898
25	562681	60	580700	95	598399
26	563201	61	581210	96	598900
27	563720	62	581720	97	599401
28	564238	63	582229	98	599902
29	564757	64	582738	99	600402
30	565275	65	583248	100	600902
31	565793	66	583756		
32	566311	67	584265		
33	566828	68	584773		
34	567346	69	585281		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000051.

20 Zoll.

Geom. Reihe.	*Arithm. Reihe.*	*Geom. Reihe.*	*Arithm. Reihe.*	*Geom. Reihe.*	*Arithm. Reihe.*
100th. des Zolls.	*Logarithmen.*	*100th. des Zolls.*	*Logarithmen.*	*100th. des Zolls.*	*Logarithmen.*
0	600902	35	618251	70	635304
1	601402	36	618742	71	635787
2	601902	37	619233	72	636270
3	602401	38	619724	73	636752
4	602960	39	620215	74	637234
5	603399	40	620705	75	637716
6	603898	41	621195	76	638198
7	604396	42	621685	77	638680
8	604894	43	622175	78	639161
9	605392	44	622664	79	639642
10	605890	45	623153	80	640123
11	606387	46	623642	81	640604
12	606885	47	624131	82	641084
13	607381	48	624619	83	641564
14	607878	49	625107	84	642044
15	608374	50	625595	85	642524
16	608871	51	626083	86	643004
17	609367	52	626570	87	643483
18	602862	53	627057	88	643962
19	610358	54	627544	89	644441
20	610853	55	628031	90	644919
21	611348	56	628518	91	645398
22	611842	57	629004	92	645876
23	612337	58	629490	93	646354
24	612831	59	629976	94	646831
25	613325	60	630461	95	647309
26	613819	61	630947	96	647786
27	614312	62	631432	97	648263
28	614805	63	631917	98	648740
29	615298	64	632401	99	649216
30	615791	65	632886	100	649693
31	616284	66	633370		
32	616776	67	633854		
33	617268	68	634337		
34	617760	69	634821		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000049.

21 Zoll.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	649693	35	666222	70	682482
1	650169	36	666690	71	682943
2	650645	37	667158	72	683404
3	651120	38	667626	73	683864
4	651596	39	668094	74	684324
5	652071	40	668561	75	684784
6	652546	41	669028	76	685244
7	653020	42	669495	77	685703
8	653495	43	669962	78	686162
9	653969	44	670429	79	686621
10	654443	45	670895	80	687080
11	654917	46	671361	81	687539
12	655391	47	671827	82	687997
13	655864	48	672262	83	688455
14	656337	49	672758	84	688913
15	656810	50	673223	85	689371
16	657283	51	673688	86	689829
17	657755	52	674153	87	690286
18	658228	53	674617	88	690743
19	658700	54	675082	89	691200
20	659171	55	675546	90	691657
21	659643	56	676010	91	692113
22	660114	57	676474	92	692570
23	660585	58	676937	93	693026
24	661056	59	677400	94	693482
25	661527	60	677864	95	693937
26	661998	61	678326	96	694393
27	662468	62	678789	97	694848
28	662938	63	679251	98	695303
29	663408	64	679714	99	695758
30	663877	65	680176	100	696213
31	664347	66	680637		
32	664816	67	681099		
33	665285	68	681560		
34	665753	69	682022		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000046.

Geom. Reihe.	*Arithm. Reihe.*	*Geom. Reihe.*	*Arithm. Reihe.*	*Geom. Reihe.*	*Arithm. Reihe.*
100th. *des Zolls.*	*Logarithmen.*	100th. *des Zolls.*	*Logarithmen.*	100th. *des Zolls.*	*Logarithmen.*
0	696213	35	711995	70	727534
1	696667	36	712443	71	727974
2	697121	37	712891	72	728415
3	697575	38	713338	73	728856
4	698028	39	713785	74	729295
5	698481	40	714231	75	729734
6	698935	41	714677	76	730173
7	699389	42	715123	77	730612
8	699842	43	715570	78	731052
9	700295	44	716015	79	731492
10	700747	45	716460	80	731930
11	701199	46	716905	81	732369
12	701651	47	717350	82	732806
13	702104	48	717795	83	733244
14	702556	49	718241	84	733682
15	703008	50	718685	85	734120
16	703459	51	719130	86	734558
17	703910	52	719574	87	734996
18	704361	53	720017	88	735433
19	704812	54	720461	89	735870
20	705262	55	720905	90	736307
21	705713	56	721348	91	736744
22	706162	57	721792	92	737180
23	706612	58	722234	93	737616
24	707062	59	722676	94	738051
25	707512	60	723119	95	738487
26	707961	61	723562	96	738923
27	708411	62	724004	97	739359
28	708859	63	724447	98	739794
29	709307	64	724888	99	740230
30	709756	65	725329	100	740664
31	710205	66	725771		
32	710653	67	726213		
33	711101	68	726653		
34	711548	69	727094		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000044.

23 Zoll.

Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100theile des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	740664	35	755766	70	770665
1	741098	36	756194	71	771067
2	741533	37	756622	72	771488
3	741968	38	757050	73	771909
4	742401	39	757479	74	772330
5	742834	40	757906	75	772751
6	743268	41	758333	76	773172
7	743702	42	758759	77	773594
8	744136	43	759185	78	774014
9	744570	44	759612	79	774434
10	745003	45	760039	80	774855
11	745436	46	760466	81	775276
12	745868	47	760893	82	775695
13	746300	48	761318	83	776115
14	746732	49	761744	84	776534
15	747164	50	762170	85	776953
16	747596	51	762596	86	777373
17	748029	52	763021	87	777793
18	748460	53	763446	88	778211
19	748891	54	763870	89	778630
20	749322	55	764295	90	779048
21	749753	56	764720	91	779466
22	750184	57	765145	92	779884
23	750615	58	765569	93	780303
24	751045	59	765993	94	780720
25	751475	60	766416	95	781137
26	751905	61	766839	96	781554
27	752335	62	767263	97	781971
28	752764	63	767687	98	782389
29	753194	64	768109	99	782807
30	753623	65	768531	100	783224
31	754052	66	768954		
32	754481	67	769377		
33	754910	68	769800		
34	755338	69	770223		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000043.

Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.
0	783224	35	797701	70	811973
1	783641	36	798112	71	812378
2	784056	37	798523	72	812782
3	784472	38	798933	73	813187
4	784888	39	799343	74	813591
5	785304	40	799753	75	813995
6	785720	41	800163	76	814399
7	786136	42	800572	77	814803
8	786551	43	800982	78	815207
9	786966	44	801391	79	815611
10	787381	45	801800	80	816014
11	787797	46	802209	81	816417
12	788211	47	802618	82	816820
13	788626	48	803026	83	817223
14	789040	49	803435	84	817625
15	789454	50	803843	85	818027
16	789868	51	804251	86	818429
17	790282	52	804659	87	818831
18	790696	53	805067	88	819233
19	791110	54	805474	89	819636
20	791523	55	805881	90	820038
21	791936	56	806288	91	820440
22	792349	57	806695	92	820840
23	792762	58	807102	93	821241
24	793174	59	807510	94	821642
25	793586	60	807916	95	822043
26	793998	61	808323	96	822444
27	794410	62	808728	97	822845
28	794822	63	809134	98	823245
29	795235	64	809540	99	823645
30	795646	65	809946	100	824045
31	796058	66	810352		
32	796468	67	810758		
33	796879	68	811163		
34	797290	69	811568		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000041.

25 Zoll.

Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe	Arithm. Reihe	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen
0	824045	35	837948	70	851661
1	824446	36	838343	71	852050
2	824845	37	838738	72	852439
3	825245	38	839132	73	852828
4	825644	39	839526	74	853216
5	826043	40	839919	75	853604
6	826442	41	840312	76	853992
7	826842	42	840706	77	854380
8	827241	43	841100	78	854768
9	827640	44	841492	79	855157
10	828038	45	841884	80	855544
11	828436	46	842277	81	855932
12	828834	47	842670	82	856319
13	829233	48	843063	83	856706
14	829630	49	843456	84	857093
15	830027	50	843848	85	857480
16	830424	51	844241	86	857867
17	830821	52	844632	87	858254
18	831229	53	845023	88	858640
19	831617	54	845414	89	859026
20	832014	55	845806	90	859412
21	832411	56	846198	91	859799
22	832807	57	846590	92	860185
23	833203	58	846980	93	860571
24	833599	59	847371	94	860956
25	833995	60	847762	95	861341
26	834391	61	848153	96	861726
27	834788	62	848543	97	862112
28	835183	63	848934	98	862497
29	835578	64	849323	99	862882
30	835974	65	849713	100	863266
31	836370	66	850103		
32	836765	67	850493		
33	837160	68	850882		
34	837554	69	851272		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000039.

26 Zoll.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	863266	35	876637	70	889833
1	863650	36	877016	71	890208
2	864035	37	877395	72	890582
3	864420	38	877775	73	890956
4	864803	39	878155	74	891330
5	865186	40	878534	75	891704
6	865570	41	878913	76	892078
7	865954	42	879291	77	892452
8	866338	43	879669	78	892825
9	866722	44	880047	79	893198
10	867105	45	880425	80	893571
11	867489	46	880803	81	893944
12	867871	47	881182	82	894317
13	868253	48	881559	83	894691
14	868635	49	881936	84	895063
15	869018	50	882314	85	895435
16	869401	51	882692	86	895808
17	869784	52	883068	87	896181
18	870165	53	883445	88	896553
19	870547	54	883822	89	896925
20	870929	55	884199	90	897296
21	871311	56	884576	91	897667
22	871692	57	884953	92	898039
23	872074	58	885329	93	898411
24	872455	59	885705	94	898782
25	872836	60	886081	95	899153
26	873217	61	886457	96	899524
27	873598	62	886833	97	899895
28	873978	63	887209	98	900266
29	874359	64	887584	99	900637
30	874739	65	887959	100	901007
31	875119	66	888334		
32	875499	67	888709		
33	875879	68	889084		
34	876258	69	889459		

Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000038.

Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.	Geom. Reihe.	Arithm. Reihe.
100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.	100th. des Zolls.	Logarithmen.
0	901007	35	913883	70	926602
1	901377	36	914248	71	926964
2	901746	37	914614	72	927324
3	902116	38	914980	73	927685
4	902486	39	915346	74	928045
5	902856	40	915712	75	928405
6	903226	41	916078	76	928765
7	903596	42	916442	77	929126
8	903965	43	916807	78	929485
9	904334	44	917171	79	929845
10	904703	45	917535	80	930205
11	905073	46	917900	81	930565
12	905441	47	918265	82	930925
13	905810	48	918628	83	931285
14	906178	49	918992	84	931643
15	906546	50	919355	85	932002
16	906915	51	919719	86	932361
17	907284	52	920083	87	932720
18	907651	53	920447	88	933079
19	908019	54	920809	89	933438
20	908386	55	921172	90	933796
21	908753	56	921535	91	934155
22	909120	57	921898	92	934513
23	909487	58	922261	93	934871
24	909854	59	922624	94	935229
25	910221	60	922986	95	935587
26	910588	61	923348	96	935945
27	910955	62	923709	97	936303
28	911323	63	924071	98	936660
29	911691	64	924433	99	937017
30	912057	65	924795	100	937374
31	912423	66	925157		
32	912788	67	925519		
33	913153	68	925880		
34	913518	69	926241		

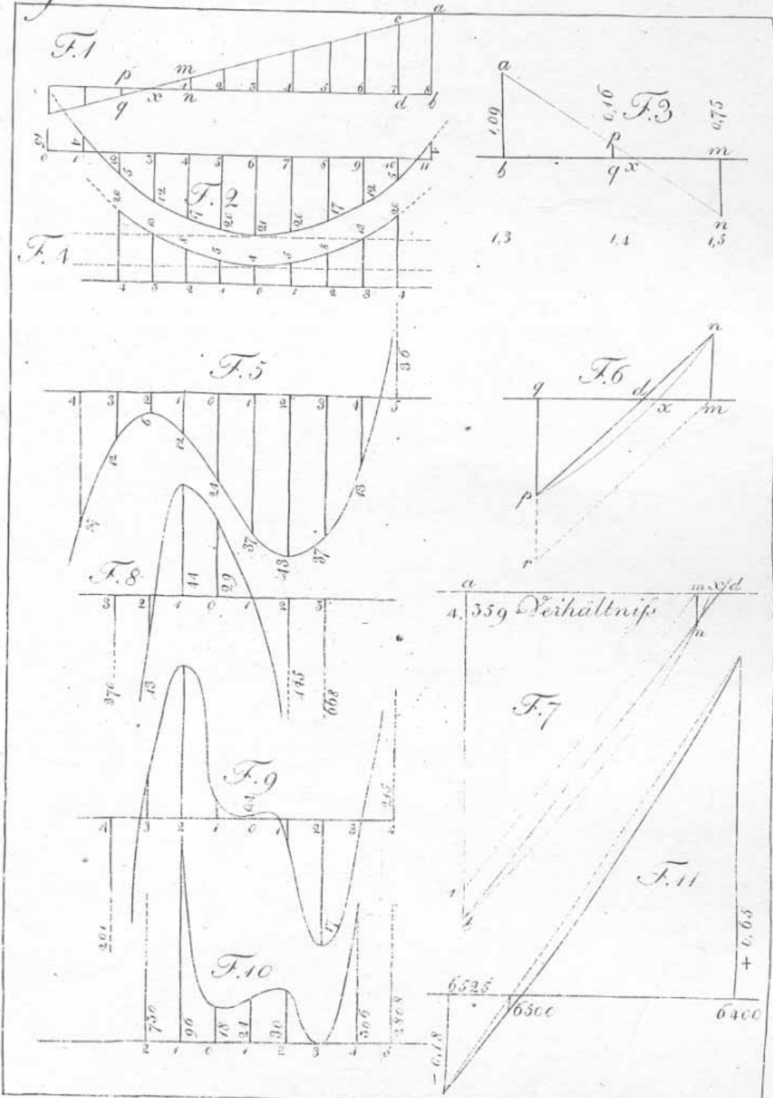
Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000036.

28 Zoll.

Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.	Geom. Reihe. 100th. des Zolls.	Arithm. Reihe. Logarithmen.
0	937374	35	949796	70	962067
1	937732	36	950149	71	962415
2	938089	37	950502	72	962763
3	938446	38	950854	73	963112
4	938802	39	951207	74	963459
5	939158	40	951559	75	963806
6	939514	41	951911	76	964154
7	939870	42	952263	77	964502
8	940227	43	952615	78	964850
9	940584	44	952966	79	965198
10	940939	45	953317	80	965545
11	941295	46	953668	81	965893
12	941651	47	954019	82	966239
13	942007	48	954370	83	966585
14	942362	49	954721	84	966932
15	942717	50	955073	85	967279
16	943072	51	955425	86	967626
17	943427	52	955775	87	967973
18	943782	53	956125	88	968319
19	944137	54	596475	89	968665
20	944491	55	956825	90	969011
21	944845	56	957176	91	969357
22	945199	57	957527	92	969703
23	945553	58	957876	93	970049
24	945907	59	958226	94	970394
25	946261	60	958576	95	970739
26	946616	61	958926	96	971085
27	946971	62	959275	97	971431
28	947324	63	959624	98	971776
29	947677	64	959973	99	972121
30	948031	65	960322	100	972465
31	948385	66	960671		
32	948738	67	961021		
33	949091	68	961370		
34	949443	69	961719		

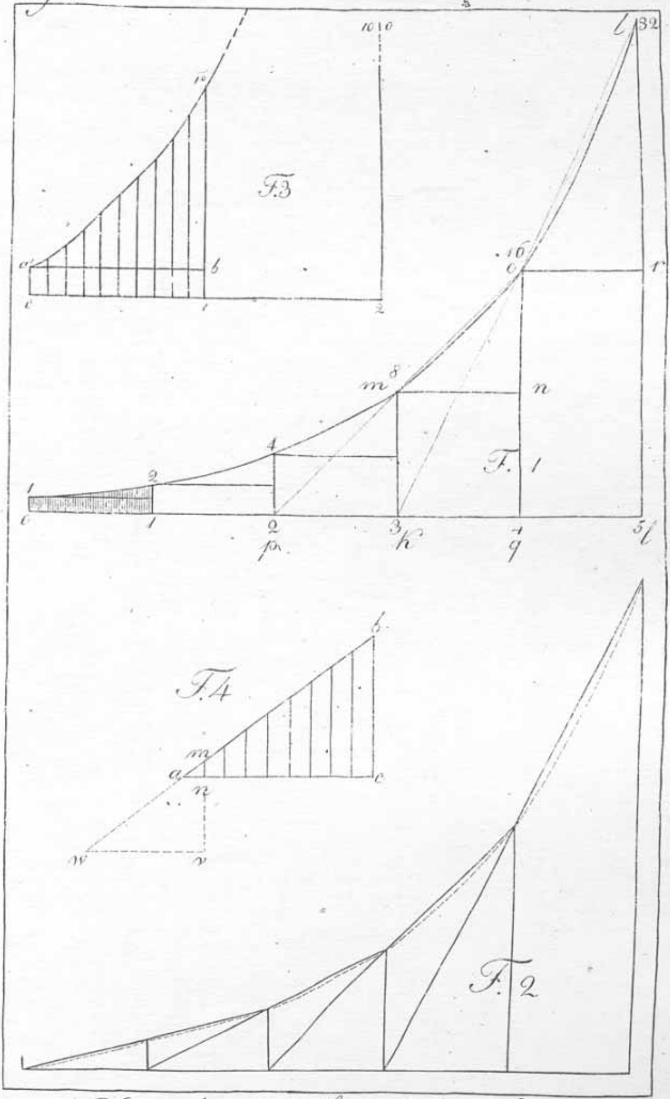
Unterschied für 0,001 Zoll = 0,000035.

Taf. 1



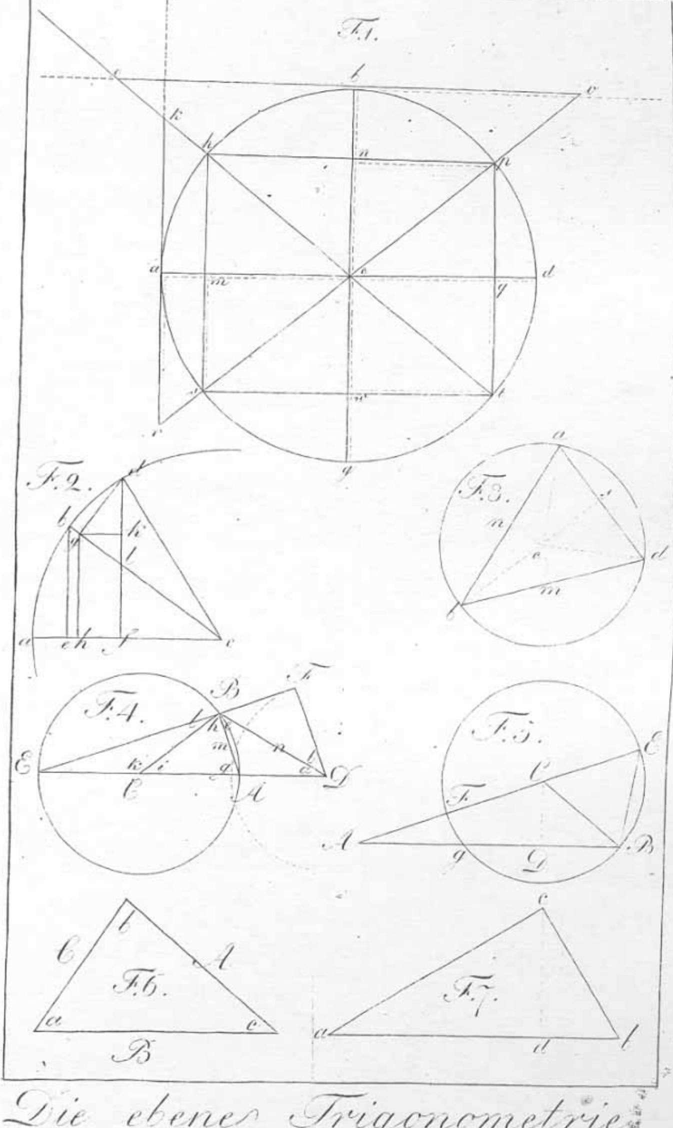
Arithmetische Reihen höherer Ordnung.

Taf. 2



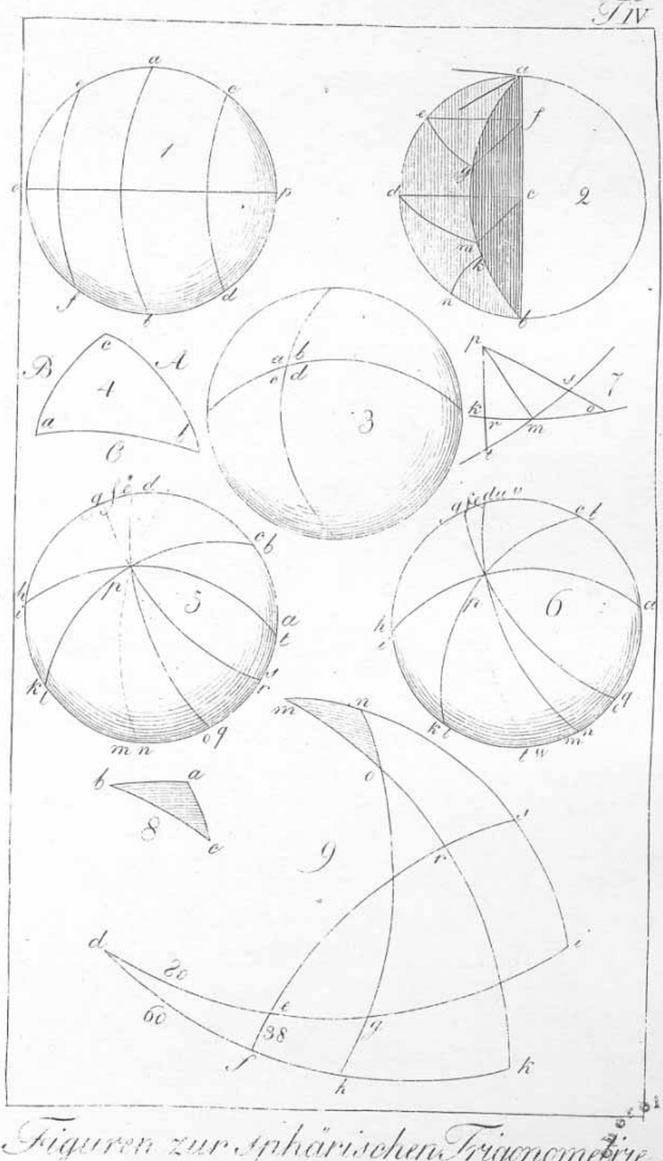
Die logarithmische Linien.

T. III

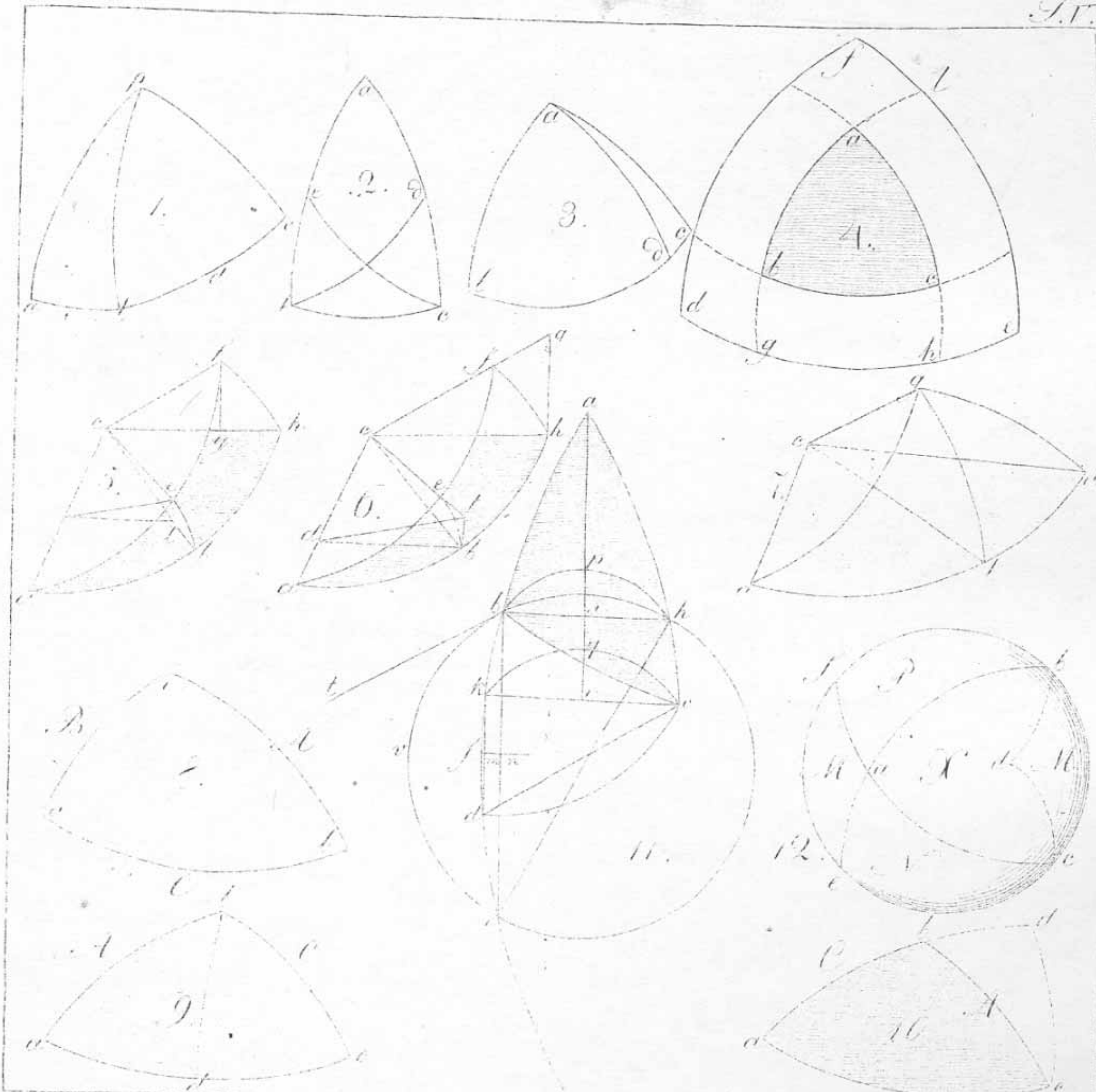


Die ebene Trigonometrie

T IV



Figuren zur sphärischen Trigonometrie



Figuren zur Berechnung der sphärischen Dreyecke.

Taf. VI.

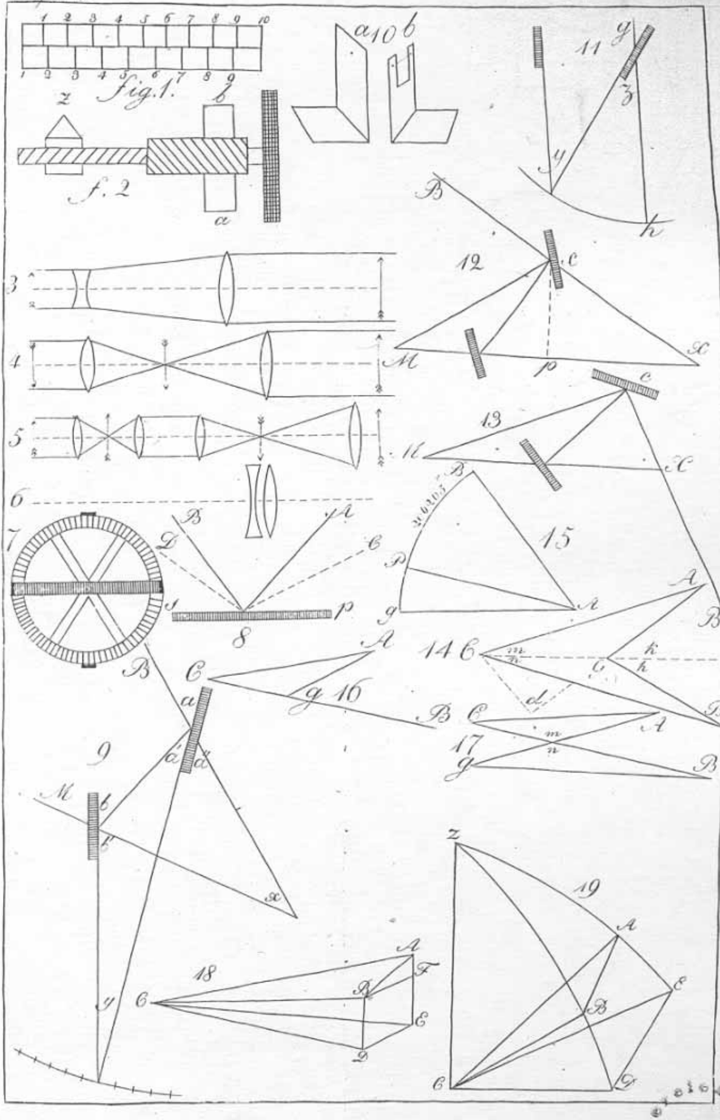
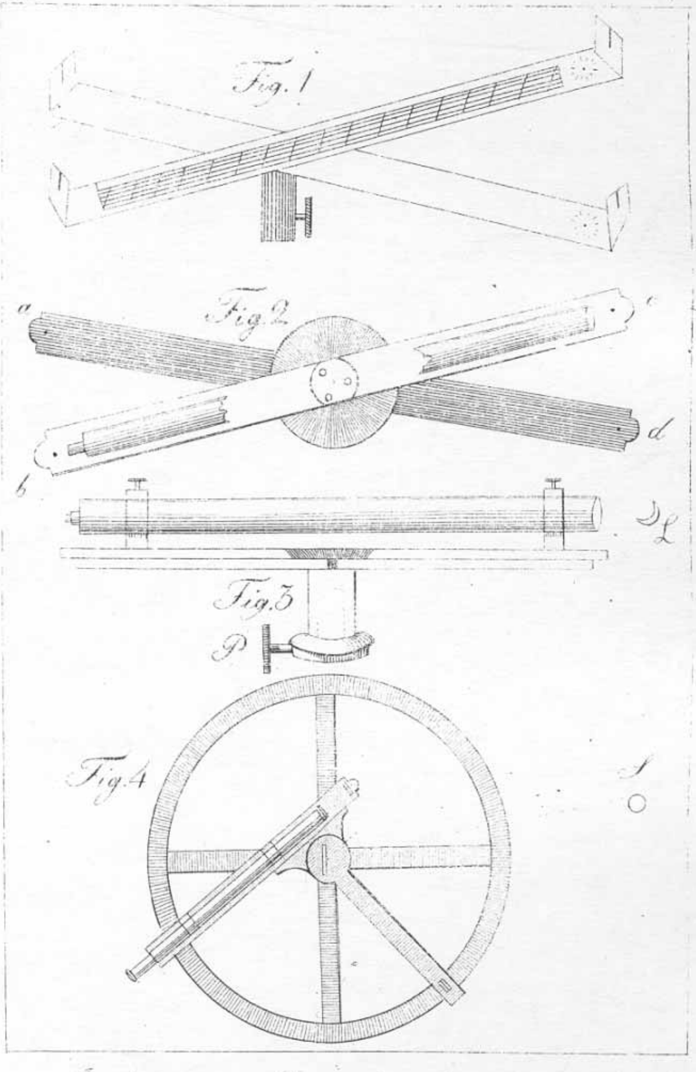
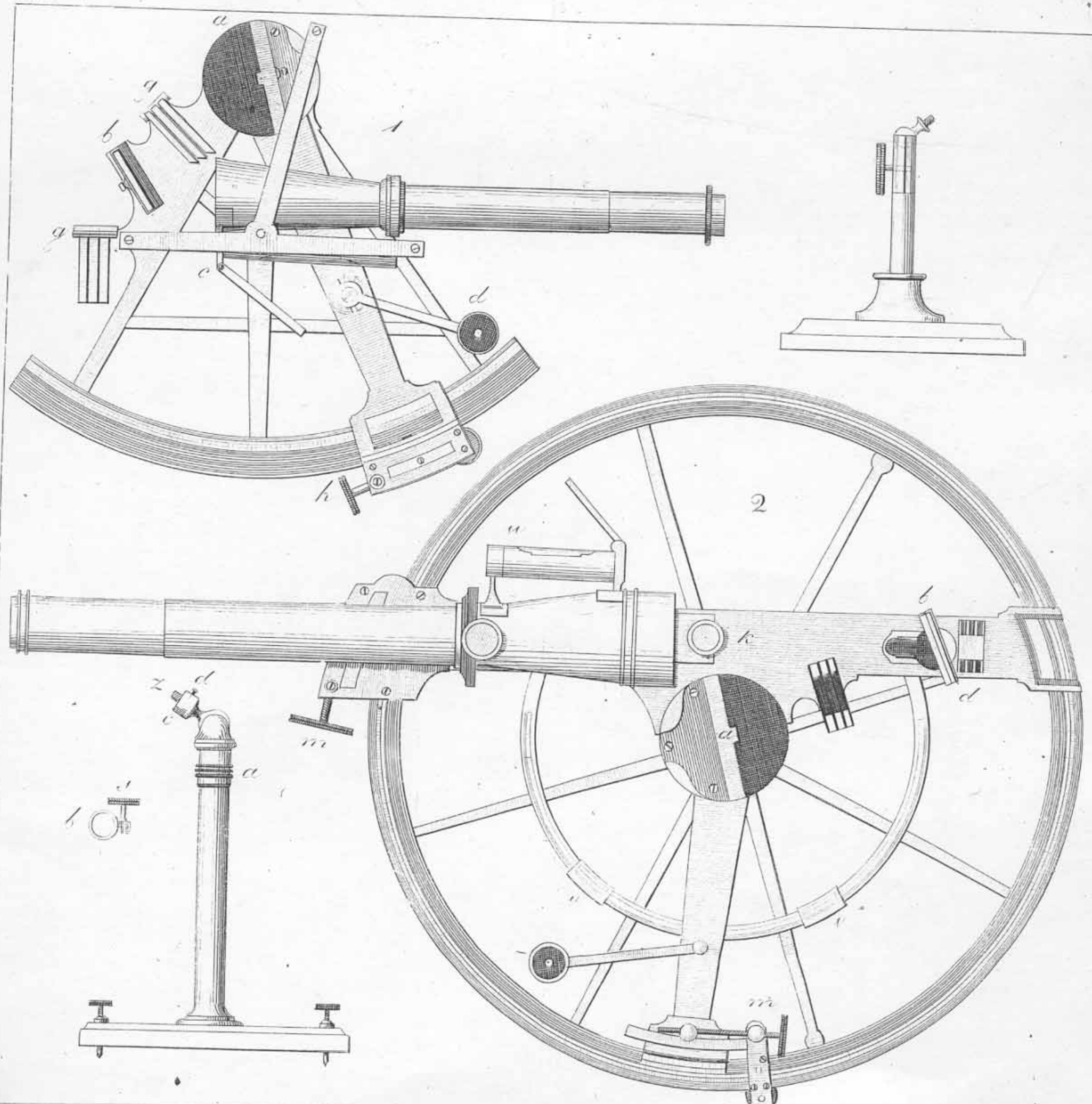


Fig. 1.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9
f. 2
z b a
a 10 b
11 g z y h
12 B c M p x
13 c M x
3 4 M 5 6 7
8 B D A C s p
15 B P g A
14 C m n k h G d A B
9 B a a' d M b b' x y
16 C A g B
17 C A m n g B
18 A F B C E D
19 z A E B C D

VII



Artificium Multiplicationis oder Tobias Mayers Winkelinstrumente.



1. Hadleys Spiegelsextant. 2. Mayers Spiegelkreis.