XXI.

Ueber einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.

Von

Dr. F. Grube

in Schleswig.

§ 1.

Ueber die Zahlen, welche sich höchstens auf eine Art durch irgend eine zweigliedrige quadratische Form von negativer Determinante darstellen lassen.

I. Jede Primzahl und das Doppelte jeder Primzahl lässt sich höchstens auf eine Art durch irgend eine zweigliedrige Form $mx^2 + ny^2$ von negativer Determinante darstellen.

Beweis: Die Determinante der Form sei $-D$, so dass $D = mn$. Im Folgenden soll der Buchstabe q immer eine ungerade Primzahl, und der Buchstabe δ irgend einen Factor der Determinante bedeuten. Es sei die Zahl A entweder von der Form* q oder von der Form $2q$ und durch die Form $mx^2 + ny^2$ darstellbar. Jede Darstellung der Zahl A ist (nach der Bezeichnung von Gauss) jedenfalls eine eigentliche, d. h. die darstellenden Zahlen x und y sind relative Primzahlen. Deshalb gehört jede Darstellung der Zahl A zu irgend einem Werth des Ausdrucks $\sqrt{-D}$ (*mod.* A) (Art. 155).** Derselbe hat aber nur zwei, und zwar entgegengesetzte Werthe (Art. 104, 105); diese seien $\pm v$. Nach der Voraussetzung existirt jedenfalls eine Darstellung der Zahl A durch die Form $mx^2 + ny^2$. Diese gehöre zu dem Werthe v. Dann ist die Form $mx^2 + ny^2$ eigentlich äquivalent mit der Form $\left(A, v, \frac{v^2 + D}{A}\right)$. Eine eigentliche Transformation der ersteren Form in die zweite sei diese $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Aus Art. 180 ergiebt sich: Wenn

---

* Das Wort „Form" wird hier in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht.

** Die Citate beziehen sich auf Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*.

$D > 1$, so wird es keine anderen zu v gehörigen Darstellungen geben, als diese zwei: $x = \pm \alpha$, $y = \pm \gamma$; wenn aber $D = 1$, so giebt es ausser diesen beiden noch folgende zwei: $x = \mp \gamma$, $y = \pm \alpha$. Da die Form $mx^2 + ny^2$ eine Anceps ist, so ist sie auch mit der Form $\left(A, -v, \frac{v^2+D}{A}\right)$ eigentlich äquivalent, und geht in diese über durch die Substitution $\alpha, -\beta, -\gamma, \delta$. Hieraus ergeben sich, wenn $D > 1$, noch zwei andere Darstellungen der Zahl A durch die Form $mx^2 + ny^2$, die zu $-v$ gehören, nämlich $x = \pm \alpha$, $y = \mp \gamma$; und wenn $D = 1$, ausser diesen beiden noch folgende zwei zu $-v$ gehörige: $x = \pm \alpha$, $y = \pm \gamma$. Ausser diesen vier, resp. acht Darstellungen der Zahl A giebt es keine; da dieselben jedoch alle mit dieser einen Darstellung $A = m\alpha^2 + n\gamma^2$ zusammenfallen, so können wir sagen: Jede Zahl A von der Form q oder $2q$ lässt sich höchstens auf eine Art durch irgend eine zweigliedrige Form*) darstellen.

II. Aber auch irgend ein Product oder doppeltes Product einer Primzahl in irgend einem Factor der Determinante irgend einer zweigliedrigen Form $mx^2 + ny^2$ lässt sich höchstens auf eine Art durch dieselbe darstellen.

Denn es sei $A = ma^2 + nb^2$, und δ der grösste gemeinschaftliche Factor der beiden Zahlen A und D; ferner sei, wenn $A = \delta A'$, A' entweder von der Form q oder $2q$. Der grösste gemeinschaftliche Factor der beiden Zahlen A und m sei $\delta_1^2\, \delta'_1$, und der beiden Zahlen A und n, $\delta_2^2\, \delta'_2$, so dass δ'_1 und δ'_2 keinen quadratischen Factor enthalten, und endlich sei $m = \delta_1^2\, \delta'_1\, m'$, $n = \delta_2^2\, \delta'_2\, n'$. Die Zahlen m und n können der Allgemeinheit unbeschadet als relative Primzahlen vorausgesetzt werden; dann ist klar, dass a den Factor $\delta_2\, \delta'_2$ und b den Factor $\delta_1\, \delta'_1$ enthalten muss. Wenn also $a = \delta_2\, \delta'_2\, a'$, $b = \delta_1\, \delta'_1\, b'$, so ist

$$A' = \delta'_2\, m'\, a'^2 + \delta'_1\, n'\, b'^2.$$

Existirte nun noch eine zweite Darstellung der Zahl A durch die Form $mx^2 + ny^2$, so würde sich aus dieser ebenso noch eine zweite Darstellung der Zahl A' durch die zweigliedrige Form $\delta'_2\, m' x^2 + \delta'_1\, n' y^2$ herleiten lassen. Nach I lässt sich aber A' höchstens einmal durch irgend eine zweigliedrige Form darstellen.

Durch Zusammenfassung von I und II ergiebt sich: Jede Zahl von der Form δq oder $2\delta q$ (wo δ auch 1 sein kann) lässt sich höchstens einmal durch eine zweigliedrige Form darstellen.

§ 2.

Die Euler'schen Zahlen.

Wenn eine Zahl A durch eine zweigliedrige Form F nur auf eine Weise dargestellt werden kann, aber dann so, dass diese eine allein existirende

*) Der Zusatz „von negativer Determinante" soll fortan als selbstverständlich weggelassen werden.

Darstellung durch relative Primzahlen erfolgt, so wollen wir der Kürze wegen sagen, die Zahl A werde durch die Form F primitiv dargestellt. Die Zahl 590 wird z. B. durch die Form $14x^2 + y^2$ primitiv dargestellt; denn es existirt nur diese eine Darstellung $590 = 14.1^2 + 24^2$, und die darstellenden Zahlen 1 und 24 sind relative Primzahlen. Die Zahl 16 wird durch die Form $x^2 + 15y^2$ dargestellt, aber nicht primitiv; denn ausser dieser Darstellung $16 = 15.1^2 + 1^2$, die freilich durch relative Primzahlen erfolgt, existirt noch eine zweite $16 = 15.0^2 + 4^2$. Ebenso wird die Zahl 325 durch die Form $3x^2 + y^2$ nicht primitiv dargestellt: es existirt freilich nur diese eine Darstellung $325 = 3.10^2 + 5^2$, aber die darstellenden Zahlen 10 und 5 haben den gemeinschaftlichen Factor 5.

Euler hat zuerst bemerkt, dass es Formen giebt, für welche der allgemeine, am Schluss des § 1 aufgestellte Satz sich umkehren lässt. Wenn daher eine Form so beschaffen ist, dass alle durch dieselbe primitiv darstellbaren Zahlen entweder von der Form δq oder von der Form $2\delta q$ sind, so wollen wir jene Form eine Euler'sche Form nennen. Es giebt auch solche Formen, dass alle durch eine derselben primitiv darstellbaren Zahlen entweder eine der beiden genannten Formen haben oder auch die Form $\delta.2^\lambda$; auch solche sollen Euler'sche genannt werden. Eine solche ist z. B. $15x^2 + y^2$; durch dieselbe werden unter anderen diese beiden Zahlen von der Form $\delta.2^\lambda$, 16 und 24, primitiv dargestellt ($16 = 15.1^2 + 1^2$, $24 = 15.1^2 + 3^2$), während alle übrigen nicht in der Form $\delta.2^\lambda$ enthaltenen und durch die Form $15x^2 + y^2$ primitiv darstellbaren Zahlen eine der beiden Formen δq und $2\delta q$ haben. Die Definition einer Euler'schen Form ist demnach folgende:

> Eine Form soll dann und nur dann eine Euler'sche heissen, wenn alle durch dieselbe primitiv darstellbaren Zahlen keine andere Form haben als eine dieser drei: δq, $2\delta q$, $\delta.2^\lambda$.

Euler selbst nannte eine solche Form *formula idonea* oder *congrua*, deshalb, weil sie geeignet ist, um zu prüfen, ob eine Zahl eine Primzahl sei oder nicht. In Bezug auf die Euler'schen Formen heben wir zunächst folgenden, von Euler aufgestellten Satz hervor:

Wenn irgend eine Form $mx^2 + ny^2$ der Determinante D eine Euler'sche ist, so ist jede andere (zweigliederige) derselben Determinante gleichfalls eine solche.

Dies ist der Euler'sche Beweis.

I. Voraussetzung: $mnx^2 + y^2$ ist eine Euler'sche Form.

Behauptung: $mx^2 + ny^2$ ist eine Euler'sche Form.

Wäre $mx^2 + ny^2$ keine Euler'sche Form, so gäbe es wenigstens eine durch dieselbe primitiv darstellbare Zahl C, die nicht in einer der drei Formen δq, $2\delta q$, $\delta 2^\lambda$ enthalten wäre. Es sei $C = ma^2 + nb^2$; hieraus folgt $nC = mna^2 + (nb)^2$. Die Zahl nC wäre also durch die Form $mnx^2 + y^2$ darstellbar. Dieselbe könnte aber auch nur auf eine Art durch diese Form darstellbar sein. Denn wäre auch $nC = mna_1^2 + (nb_1)^2$, so würde daraus folgen $C = ma_1^2 + nb_1^2$; es wäre also C auf zwei Arten durch die Form $mx^2 + ny^2$ darstellbar, was der über C gemachten Annahme widerstreitet. Es könnte also nC wirklich nur auf eine Art durch die Form $mnx^2 + y^2$ darstellbar sein; dann würde aber diese Form keine Euler'sche sein, was gegen die Voraussetzung ist. Die Form $mx^2 + ny^2$ muss also eine Euler'sche sein.

II. Ebenso zeigt man, dass, wenn $mx^2 + ny^2$ eine Euler'sche Form ist, dann auch $mnx^2 + y^2$ eine solche sein muss, mithin auch $m'x^2 + n'y^2$, wenn $m'n' = mn$.

Der aufmerksame Leser wird bemerkt haben, dass dieser Beweis nur für den Fall giltig ist, dass wenigstens eine der beiden Zahlen m und n keinen quadratischen Factor hat. Ein allgemeiner Beweis dieses Satzes wird sich aus dem Folgenden ergeben (§ 8 am Ende).

Mit Rücksicht auf diesen Satz können wir die Determinante einer Euler'schen Form, positiv genommen, also die Zahl $-D = mn$ passend eine Euler'sche Zahl nennen. (Euler nannte sie *numerus idoneus*.)

Euler hat ein Criterium aufgestellt, um zu entscheiden, ob eine beliebig gegebene Zahl eine Euler'sche ist oder nicht, und mit Hilfe desselben alle Euler'schen Zahlen, die zwischen 1 und 10000 enthalten sind, wirklich gefunden. Das Criterium findet sich zuerst ohne Beweis in einer kurzen Notiz von Euler in den *Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin* 1776, *pag.* 338. Eine grössere Abhandlung von Euler über diesen Gegenstand, die bald darauf erschien (*Nova acta Petr. XIII*) „*De variis modis numeros praegrandes examinandi, utrum sint primi necne*" enthält auch einen Beweis dieses Criteriums. Der Euler'sche Beweis ist aber entschieden als ungenügend zu bezeichnen. In einer zweiten Abhandlung über die Euler'schen Zahlen (gleichfalls in den *Nov. act. Petr.*) „*De formulis speciei* $mx^2 + ny^2$ *ad numeros primos explorandos idoneis earumque mirabilibus proprietatibus*" stellt Euler eine Reihe von Eigenschaften der Euler'schen Zahlen auf; aber auch deren Beweise sind theilweise mangelhaft. Ich werde zunächst die im Euler-schen Beweise des Criteriums enthaltenen Mängel aufdecken und dann einen strengen Beweis eines von dem Euler'schen etwas abweichenden Criteriums geben, welcher auf der Gauss'schen Eintheilung der Formen einer Determinante in Geschlechter und Classen beruht. Darauf werde ich auch die Euler'schen Beweise der Eigenschaften der Euler'schen Zahlen, in wie weit dieselben mangelhaft sind, durch strenge Beweise ersetzen, welche auf demselben Princip beruhen. Der Beweis des Euler'schen Criteriums ist mir bisher nicht gelungen, obleich Gauss dasselbe *demonstratu facile* nennt (Art. 303).

Dem erwähnten Criterium hat Euler, wie schon bemerkt, alle Zahlen von 1 bis 10000 unterworfen. Unter diesen haben sich nur 65 Zahlen als

Euler'sche erwiesen, von welchen 1848 die letzte ist. Dies ist allerdings eine äusserst merkwürdige Erscheinung, und es scheint hiernach, dass die Reihe der Euler'schen Zahlen mit der genannten Zahl wirklich abbricht. Euler selbst sagt hierüber: *Postquam omnes numeros idoneos sive congruos exhibuerim, primo quidem hoc phaenomenon maxime mirandum se obtulit, quod multitudo istorum numerorum neutiquam in infinitum excrescat, verum adeo non plures quam* 65 *hujusmodi numeros complectatur.* Folgendes sind die von Euler gefundenen 65 *numeri idonei:*

1	16	48	120	312
2	18	57	130	330
3	21	58	133	345
4	22	60	165	357
5	24	70	168	385
6	25	72	177	408
7	28	78	190	462
8	30	85	210	520
9	33	88	232	760
10	37	93	240	840
12	40	102	253	1320
13	42	105	273	1365
15	45	112	280	1848.

Es ist interessant, zu verfolgen, wie Euler während der Ausarbeitung der ersten Abhandlung gleichzeitig mit einem wahren Feuereifer die Arbeit des Aufsuchens der *numeri idonei* immer weiter geführt hat. Zuerst heisst es: *neque post hunc* (*numerum* 1848) *ullum alium majorem mihi quidem invenire licuit, postquam istum laborem usque ad* 3000 *et ultra sum exsecutus;* an einer späteren Stelle: *cum enim hanc investigationem usque ad* 4 *millia essem prosecutus, in toto hoc intervallo ne unicus quidem numerus idoneus se mihi obtulerat;* und endlich: *postquam autem hunc calculum usque ad* 10000 *essem prosecutus, nullus novus numerus se mihi obtulit, praeter illos quos tabula superior exhibuit ex quo ista tabula omnes plane numeros idoneos in se complecti videtur.*

§ 3.

Das Euler'sche Criterium

lautet folgendermassen:

In dem Ausdruck $D+n^2$ substituire man für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen von 1 an, die zu D relative Primzahlen sind, bis der Ausdruck $D+n^2$ grösser wird als $4D$. Den Complex der hieraus resultirenden Zahlen wollen wir durch Ω bezeichnen.

I. Wenn Ω auch nur eine Zahl enthält, die eine andere Form hat als eine dieser vier:

$$q,\ 2q,\ q^2,\ 2^\lambda,$$

dann ist D keine Euler'sche Zahl.

II. Umgekehrt, wenn alle in Ω enthaltenen Zahlen irgend eine jener vier Formen haben, dann ist D eine Euler'sche Zahl.

Euler erläutert diese Regel an mehreren Beispielen, von denen ich einige anführe.

1. Beispiel. Zu prüfen, ob 14 eine Euler'sche Zahl ist. Man hat also in dem Ausdruck $14+n^2$, da $14+7^2$ schon grösser als 4.14 ist, für n alle ganzen Zahlen von 1 bis 6 zu setzen, die mit 14 keinen gemeinsamen Factor haben.

$$\frac{14+1^2,\ 3^2,\ 5^2}{15,\ 23,\ 39}.$$

Hier sind die beiden Zahlen 15 und 39 in keiner der vier Formen q, $2q$, q^2, 2^λ enthalten; mithin ist 14 keine Euler'sche Zahl.

2. Beispiel. Untersuchung der Zahl 13.

$$\frac{13+1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2}{14,\ 17,\ 22,\ 29,\ 38,\ 49}.$$

Alle diese Zahlen haben eine der drei Formen q, $2q$, q^2; die Zahl 13 ist demnach eine Euler'sche.

3. Beispiel. Untersuchung der Zahl 11.

$$\frac{11+1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2}{12,\ 15,\ 20,\ 27,\ 36}.$$

Hier ist keine der resultirenden Zahlen in einer jener vier Formen enthalten; folglich ist 11 keine Euler'sche Zahl.

4. Beispiel. Untersuchung der Zahl 1848.

$$\begin{array}{llll}
1848+\ 1^2=1849=43^2=q^2 & & 1848+31^2=2809=53^2=q^2 & \\
\quad\ \ +\ 5^2=1873 & =q & \quad\ \ +37^2=3217 & =q \\
\quad\ \ +13^2=2017 & =q & \quad\ \ +41^2=3529 & =q \\
\quad\ \ +17^2=2137 & =q & \quad\ \ +43^2=3697 & =q \\
\quad\ \ +19^2=2209=47^2=q^2 & & \quad\ \ +47^2=4057 & =q \\
\quad\ \ +23^2=2377 & =q & \quad\ \ +53^2=4657 & =q \\
\quad\ \ +25^2=2473 & =q & \quad\ \ +59^2=5329=73^2=q^2 & \\
\quad\ \ +27^2=2689 & =q. & \quad\ \ +61^2=5569 & =q.
\end{array}$$

Hieraus geht die Zahl 1848 als Euler'sche Zahl hervor.

§ 4.

Ueber den Euler'schen Beweis des Criteriums.

Die in dem Criterium in I aufgestellte Behauptung will Euler folgendermassen beweisen.

Wenn sich in dem Complex Ω eine Zahl A befindet, die keine Quadratzahl ist und die keine dieser drei Formen q, $2q$, 2^λ, also auch keine dieser drei δq, $2\delta q$, $\delta.2^\lambda$, hat, da alle Zahlen Ω relative Primzahlen zu D sind so existirt wenigstens eine, nicht in einer der drei Formen δq, $2\delta q$, $\delta.2^\lambda$ enthaltene Zahl, nämlich A, welche primitiv durch die Form Dx^2+y^2 darstellbar ist; mithin kann D keine Euler'sche Zahl sein Dass A durch die Form Dx^2+y^2 wirklich primitiv darstellbar ist, sieht man leicht; denn darstellbar ist A durch diese Form, da alle Zahlen Ω von der Form $D+n^2$ sind; ferner sind die darstellenden Zahlen relative Primzahlen, da $x=1$ ist; endlich kann A nur einmal darstellbar sein, denn setzt man $x=0$, so erhält man aus der Form Dx^2+y^2 nur Quadratzahlen; nimmt man aber $x>1$, so giebt die Form Dx^2+y^2 Zahlen, die grösser als $4D$ sind; in keinem Fall kann also die Zahl A erzeugt werden.

Exisirt aber in dem Complex Ω keine Zahl A von der ebengenannten Beschaffenheit, aber wohl eine Zahl A', die das Quadrat einer Primzahl ist, $A'=q^2$, so kann deshalb die Form Dx^2+y^2 noch immerhin eine Euler'sche sein; denn die Zahl A' ist freilich von keiner der drei Formen δq, $2\delta q$, $\delta.2^\lambda$, wird aber auch nicht primitiv durch die Form Dx^2+y^2 dargestellt, da diese Form sie zweimal darstellt; $A'=D.1^2+n^2=D.0^2+q^2$. Euler übersieht hierbei, dass ganz dasselbe gilt, wenn in Ω keine Zahl wie A existirt, aber eine Zahl A', die das Quadrat irgend einer Zahl z wäre, die nicht grade eine Primzahl zu sein braucht. Mithin hat Euler nur bewiesen: wenn in Ω auch nur eine Zahl existirt, die eine andere Form hat als eine dieser vier: q, $2q$, 2^λ, z^2, dann ist D keine Euler'sche Zahl; während er behauptet hatte, wenn auch nur eine der Zahlen keine dieser vier Formen q, $2q$, 2^λ, q^2 hätte, dann sei schon D keine Euler'sche Zahl. Euler hätte, um die Behauptung aufrechthalten zu können, zeigen müssen, dass eine Quadratzahl, deren Wurzel keine Primzahl und keine Potenz von 2 ist, sich durch eine Euler'sche Form, wenn einmal, so dass x und y relative Primzahlen sind, dann zweimal so darstellen lässt, dass x nicht Null ist. Dieser Nachweis fehlt aber bei Euler; aus dem Folgenden wird sich diese Behauptung ergeben.

Es folgt der Euler'sche Beweis für die in dem Criterium unter II aufgestellte Behauptung:

Wenn alle in Ω enthaltenen Zahlen eine der vier Formen q, $2q$, q^2, 2^λ haben, dann ist D eine Euler'sche Zahl.

Wäre D keine Euler'sche Zahl, dann müsste wenigstens ein Product $A=qp$ $(q>2, p>2)$ existiren, welches primitiv durch die Form Dx^2+y^2 darstellbar und zu D relative Primzahl ist*. Euler will nun zeigen, dass dann in Ω wenigstens eine Zahl enthalten sein müsste, die von keiner der vier Formen q, $2q$, q^2, 2^λ sein könnte. Liesse sich dies zeigen, dann wäre offenbar die Behauptung bewiesen.

---

* Schon dieser Schluss ist nicht gerechtfertigt; denn die Zahl D wäre auch dann schon keine Euler'sche, wenn nur irgend eine Zahl von der Form δqp, die mit D den Factor δ gemeinsam hätte, durch die Form Dx^2+y^2 primitiv darstellbar wäre. Es existiren freilich, wenn D keine Euler'sche Zahl ist, sogar unendlich viele Producte qp, die zu D relative Primzahlen sind und sich primitiv durch die Form Dx^2+y^2 darstellen lassen (s. § 6); aber der Nachweis hiervon fehlt bei Euler.

Aus der Existenz des Productes $A = qp$ ergiebt sich zunächst Folgendes:

α) Wenn eine gleichfalls durch q theilbare Zahl $A' = q \cdot r$, welche kleiner als A ist, sich auch durch die Form $Dx^2 + y^2$ darstellen lässt, und zwar, wenn auch nicht primitiv, doch jedenfalls durch relative Primzahlen, so kann r weder q, noch 1, noch 2 sein.

Es sei nämlich

1) $$A = qp = Da^2 + b^2,$$

2) $$A' = qr = Df^2 + g^2.$$

Hieraus folgt

3) $$pr = D\left(\frac{ag \pm bf}{q}\right)^2 + \left(\frac{Daf \mp bg}{q}\right)^2.$$

Multiplicirt man 1) mit Df^2 und 2) mit b^2 und subtrahirt, so erhält man

4) $$q\,(pDf^2 - b^2) = D^2a^2f^2 - g^2b^2 = (Daf + gb)\,(Daf - gb).$$

Da nun q eine Primzahl ist, so muss jedenfalls einer der beiden Factoren $Daf + gb$ und $Daf - gb$ durch q theilbar sein. Nehmen wir an, dass der zweite durch q theilbar ist (wäre es der erste, so werden die folgenden Schlüsse dadurch nicht afficirt), so ist, wie aus 3) ersichtlich, auch $aq + bf$ durch q theilbar. Setzen wir also

$$\frac{ag + bf}{q} = h, \quad \frac{Daf - bg}{q} = k,$$

so wird

5) $$pr = Dh^2 + k^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass r nicht gleich q sein kann, denn dann wäre $pq = Dh^2 + k^2$, was der Voraussetzung widerspricht, der zufolge nur die eine Darstellung $x = a$, $y = b$ der Zahl pq durch die Form $Dx^2 + y^2$ existirt. Dass nämlich wirklich a, b von h, k resp. verschieden sind, ergiebt sich leicht. Denn aus

$$a = h = \frac{ag + bf}{q},$$

würde folgen, dass bf durch a theilbar sein müsste, d. h. f durch a, da a und b relative Primzahlen sind. Ebenso folgt aus

$$b = k = \frac{Daf - bg}{q}$$

dass Daf durch b theilbar sein müsste, d. h. f durch b, da auch D und b relative Primzahlen sein sollen. Es müsste also f durch ab theilbar sein, d. h. $f = f'ab$. Da nun f von Null verschieden ist, so muss $f' \gtreqless 1$ sein. Dann könnte aber

$$A' = Df^2 + g^2 = Df'^2a^2b^2 + g^2$$

nicht kleiner als $A = Da^2 + b^2$ sein.

Aus 2) und 5) folgt

6) $$r^2pq = D\,(fk \pm gh)^2 + (Dfh \mp gk)^2$$

Die Zahlen h und k sind beide von Null verschieden. Wäre nämlich $h = 0$, so müsste $ag = \pm bf$ sein. Da aber a und b, sowie auch f und g relative Primzahlen sind, so ist dies nicht anders möglich, als dass $f = a$ und $g = b$ ist. Dann wäre aber $A = A'$. Wäre $k = 0$, so müsste $Daf = \pm bg$ sein; da aber b mit D und a keinen gemeinsamen Factor hat, so müsste $n = \frac{f}{b}$ eine ganze Zahl sein, und $g = Da.n$. Da aber $A' < A$, so müsste auch $Df^2 + D^2a^2n^2 < Da^2 + b^2$ sein, was offenbar unmöglich ist. Da nun h und k beide von Null verschieden sind, so geht aus der Gleichung 6) auf der Stelle hervor, dass r nicht gleich 1 sein kann; denn dann wäre pq zweimal durch die Form $Dx^2 + y^2$ darstellbar.

Ebenfalls aus 6) ist ersichtlich, dass r nicht gleich 2 sein kann. Denn aus 2) und 5) folgt ähnlich, wie 4) aus 1) und 2)

$$r\,(Dh^2q - g^2p) = (Dfh + gk)\,(Dfh - gk).$$

Wäre nun $r = 2$, so müsste zunächst einer der Factoren auf der rechten Seite durch 2 theilbar sein; ist es aber der eine, so ist es auch der andere. Hieraus und aus 6) folgt weiter, dass auch die beiden Zahlen $fk + gh$ und $fk - gh$ durch 2 theilbar sein müssten. Denn sonst müsste wegen 6) D durch 4 theilbar sein; dies ist aber, wenn $r = 2$, wegen 2) unmöglich. Es wäre also wegen 6) pq wieder auf zwei Arten durch die Form $Dx^2 + y^2$ darstellbar, was der Voraussetzung widerstreitet. Somit ist die Behauptung α) erwiesen.

Nun leitet Euler aus der Gleichung

$$A = qp = Da^2 + b^2$$

ein anderes Product qr ab, welches gleichfalls den Factor q enthält und durch die Form $Dx^2 + y^2$ darstellbar ist, indem er

$$x = na + \mu q = f,$$
$$y = nb + \nu q = g$$

setzt und die Zahlen n, μ, ν so bestimmt, dass das neue Product qr kleiner als das ursprüngliche pq wird. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} Df^2 + g^2 &= D\,(na + \mu q)^2 + (nb + \nu q)^2 \\ &= n^2\,(Da^2 + b^2) + qP = q\,(n^2p + P), \end{aligned}$$

wo

$$P = D\mu^2 q + 2n\mu a D + 2n\nu b + \nu^2 q,$$

folglich, wenn man $n^2p + P = r$ setzt,

$$qr = Df^2 + g^2.$$

Für die folgenden Schlüsse ist es nothwendig, dass f und g relative Primzahlen sind. Euler hebt dies nicht besonders hervor, hat dies aber offenbar im Sinne, indem er es als zwekmässig empfiehlt, n und μ so zu bestimmen, dass $f = 1$ wird, was offenbar immer möglich sei. Dann geht aus α) hervor, dass r weder q, noch 1, noch 2 werden kann. Der kleinste in qr enthaltene Primfactor, welcher grösser als 2 ist, sei q', also $qr = q'p'$. Aus der Gleichung $q'p' = Df^2 + g^2$ lässt sich auf dieselbe Weise wieder ein neues Product $q'r'$ ableiten, welches gleichfalls in der Form $Dx^2 + y^2$ enthalten ist. Aber von diesem Product können wir schon nicht mehr behaupten, dass der Factor r' weder q', noch 1, noch 2 sein könne. Denn die Behauptung α), dass r weder q, noch 1, noch 2 sein könne, beruhte wesentlich auf folgenden zwei Voraussetzungen: erstens dass das ursprüngliche Product zu D relative Primzahl sei, zweitens dass dasselbe nur einmal darstellbar sei. Was den ersten Punkt anbetrifft, so hätte Euler also zeigen müssen, dass g so bestimmt werden könne, dass es relative Primzahl zu D werde; allein dies erwähnt er gar nicht einmal, viel weniger untersucht er, ob dies immer möglich sei. Ebenso fehlt der Nachweis, dass das aus dem ersten Product qp abgeleitete Product qr immer so bestimmt werden könne, dass es gleichfalls nur auf eine Art durch die Form Dx^2+y^2 darstellbar sei, in dem Euler'schen Beweise gänzlich: Euler behauptet eben nur, dass auch das neue Product so bestimmt werden könne, dass es nur einmal durch die Form Dx^2+y^2 darstellbar sei. Der letzte Schluss des Euler'schen Beweises ist nun illusorisch. Euler fährt nämlich fort: so könne man immer kleinere Producte entwickeln, die weder von der Form q (unter q irgend eine Primzahl verstanden, nicht gerade die in dem ersten Product enthaltene), noch von der Form $2q$, noch von der Form q^2 seien*, bis man zu einem solchen Producte gelange, welches kleiner als $4D$, also gewiss von der Form $D+n^2$ sei.

Man erhält übrigens in der That aus dem ursprünglichen Product pq durch die von Euler angegebene Substitution gar nicht immer ein neues Product, welches gleichfalls nur einmal in der Form Dx^2+y^2 enthalten ist. Dies soll uns das folgende Beispiel zeigen. Das Product $313.647=202511$ lässt sich durch die Form $11x^2+y^2$ darstellen, und zwar, wie die Induction ergiebt, nur auf eine Art. Es ist nämlich

$$313.647=202511=11.1^2+450^2.$$

In der Gleichung

$$f=na+\mu q=n+313\,\mu$$

bestimmen wir n und μ so, dass $f=1$ wird; dies wird erreicht, wenn wir $n=314$, $\mu=-1$ setzen. Dann wird

$$g=nb+\nu q=314.450+\nu.313=450+\nu'.313.$$

Soll das neue Product kleiner als das ursprüngliche werden, kann ν' nur $=-1$ oder $=-2$ gesetzt werden, woraus g, resp. 137 oder 176 wird. Der Werth 176 ist zu verwerfen, da er durch 11, d. i. durch D theilbar ist. Der Werth $g=137$ liefert das neue Product

$$11.1^2+137^2=18780=313.60.$$

Es ist aber dies Product in der That noch auf eine zweite Art in der Form $11x^2+y^2$ enthalten, nämlich $18780=11.37^2+61^2$.

---

* Von der Form 2^λ kann das neue Product offenbar auch nicht sein, da es immer einen von 1 und 2 verschiedenen Primfactor enthalten muss.

Es ist schon hervorgehoben, dass aus Euler's Beweis nicht ersichtlich ist, warum in den neuen Producten und namentlich in dem letzten Product, welches also von der Form $D+n^2$ ist, die Zahl n mit D keinen gemeinschaftlichen Factor zu haben brauche, warum dieses letzte Product also eine der Zahlen Ω sein müsse. Ich bemerke hierzu noch Folgendes. Gerade in dem Beispiel, welches Euler zur Erläuterung seines Beweises giebt, hat die Zahl n mit D wirklich einen gemeinsamen Factor. In demselben ist $D=14$ und $qp=59.131$. Dies Product ist in der That nur auf eine Art in der Form $14x^2+y^2$ enthalten: $59.131=14.6^2+85^2$. Hieraus entwickelt Euler das neue Product $59.10=14.1^2+24^2$, und daraus schliesslich $10.3=14.1^2+4^2$, welches kleiner als $4D$ ist. Hier ist $n=4$, hat also mit D den Factor 2 gemeinsam, und folglich ist das Product 10.3 gar nicht unter den Zahlen Ω enthalten. In diesem Beispiel hätte Euler dies freilich leicht vermeiden können, wenn er aus dem ersten Product dies neue $59.117=14.1^2+83^2$ $=3.2301$ entwickelt hätte, und hieraus $3.5=14.1^2+1^2$. Dies Product ist auch kleiner als $4D$ und $n=1$ ist zu 14 relative Primzahl. Aber es bleibt doch fraglich, ob das letztere immer erreicht werden kann.

Es scheint, dass Euler später selbst der Meinung gewesen, n brauche nicht relative Primzahl zu D zu sein. Denn in der zweiten vorhin erwähnten Abhandlung stellt er ein etwas anderes Criterium auf, welches sich von dem ersten gerade dadurch unterscheidet, dass man in dem Ausdruck $D+n^2$ für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ setzen soll, nicht blos diejenigen, welche zu D relative Primzahlen sind. Er theilt sämmtliche Zahlen in Bezug auf D in zwei Classen, von denen die erste alle Primzahlen und solche, „die als Primzahlen anzusehen sind" (*instar primorum spectandi*), die zweite alle „wirklich zusammengesetzten" (*revera compositi*) umfasst. Zu der ersten Classe rechnet Euler alle Zahlen, die in einer dieser Formen enthalten sind: q, $2q$, δq, q^2, 2^λ, zu der zweiten alle übrigen. Darauf stellt er folgende Regel auf.

„In dem Ausdruck $D+n^2$ setze man für n der Reihe nach alle ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w., bis man zu einer Summe gelangt, die grösser als $4D$ ist; wenn die auf diese Weise resultirenden Zahlen entweder Primzahlen (q) sind, oder $2q$ oder δq oder auch Potenzen von 2 oder Quadrate von Primzahlen, so ist die Zahl D eine „geeignete", wenn sich darunter aber auch nur eine einzige wirklich zusammengesetzte Zahl befindet, dann ist D keine geeignete Zahl."

Euler hebt aber gar nicht besonders hervor, dass dies Criterium von dem ersteren abweiche; er recapitulirt hiermit nur ein „früher von ihm bewiesenes Criterium".

Zur Erläuterung dieser Regel giebt er selbst folgendes Beispiel.

„Wir wollen diese Regel an der Zahl 48 erläutern; wenn wir die Quadrate der Zahlen von 1 bis 12 addiren, so erhalten wir folgende Zahlen, die entweder Primzahlen sind, oder doch solche, die als Primzahlen zu betrachten sind:

$$\begin{array}{ll} 48 + 1 = 49 = q^2 & 48 + 7^2 = 97 = q \\ \quad + 2^2 = 52 = 4.13 = \delta q & \quad + 8^2 = 112 = 16.\ 7 = \delta q \\ \quad + 3^2 = 57 = 3.19 = \delta q & \quad + 9^2 = 129 = 3.43 = \delta q \\ \quad + 4^2 = 64 = 2^\lambda & \quad + 10^2 = 148 = 4.37 = \delta q \\ \quad + 5^2 = 73 = q & \quad + 11^2 = 169 = 13.13 = q^2. \\ \quad + 6^2 = 84 = \delta q & \end{array}$$

Hiernach ist 48 offenbar eine geeignete Zahl."

Während wir die Richtigkeit des ersten Euler'schen Criteriums noch bezweifeln müssen, ist dieses zweite offenbar falsch. Denn hiernach wäre z. B. die Zahl 33 keine Euler'sche Zahl, während sie doch in der That eine solche ist und sich auch in der Euler'schen Tafel befindet. Es ist nämlich $33 + 3^2 = 42$. Die Zahl 42 ist aber von keiner der Formen q, $2q$, δq, q^2, 2^λ, sondern vielmehr von der $2\delta q$. Ebenso finden wir für die Euler'sche Zahl 72:

$$72 + 3^2 = 81,$$

die also hiernach, da 81 von der Form $\delta . q^2$ ist, auch keine Euler'sche Zahl sein würde.

§ 5.

Die einclassigen Formen.

Im Folgenden muss die Bekanntschaft mit der von Gauss eingeführten Eintheilung der Formen einer Determinante in Ordnungen, Geschlechter und Classen vorausgesetzt werden. Wenn in jedem Geschlecht der eigentlich primitiven Ordnung einer Determinante nur eine Classe vorhanden ist, so soll diese Determinante eine einclassige Determinante oder (positiv genommen) eine einclassige Zahl genannt werden. Irgend eine zweigliedrige Form $mx^2 + ny^2$ der eigentlich primitiven Ordnung einer einclassigen Determinante soll eine einclassige Form heissen.

Bekanntlich ist die Anzahl der Geschlechter sowohl der eigentlich, als auch der uneigentlich primitiven Ordnung für jede Determinante gleich der Anzahl der Ancepsclassen der eigentlich (Art. 258, I), mithin auch der uneigentlich primitiven Ordnung (Art. 259). Hieraus folgt:

1. Für eine einclassige Determinante enthält die primitive Ordnung nur Ancepsclassen.

2. Wenn die primitive Ordnung einer Determinante nur Ancepsclassen enthält, dann ist die Determinante einclassig.

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die einclassigen Zahlen und Formen mit den Euler'schen identisch sind. Gauss hat zuerst auf diesen Zusammenhang der Euler'schen und einclassigen Zahlen aufmerksam gemacht; er sagt von den letzteren (Art. 303): *Ceterum iidem 65 numeri (sub as-*

pectu paullulum diverso et cum criterio demonstratu facili) jam ab ill. Eulero traditi sunt. Nouv. Mém. de l'Ac. de Berlin 1776 *p.* 338.

Um die Identität der Euler'schen und einclassigen Formen zu zeigen, beweisen wir zunächst:

§ 6.

Jede Euler'sche Form ist eine einclassige.

Der Beweis dieses Satzes gründet sich auf folgendes Lemma, von dem wir auch in der Folge Gebrauch machen werden.

Wenn D keine einclassige Zahl ist, so giebt es (sogar unendlich viele) aus zwei ungeraden Primfactoren zusammengesetzte Zahlen aa', die beliebige Primfactoren q, q'... nicht enthalten, welche nur einmal durch eine primitive Form mx^2+ny^2 der Determinante $-D$ darstellbar ist.

Beweis. Weil D keine einclassige Zahl ist, so giebt es wenigstens in einem Geschlecht der eigentlich primitiven Ordnung auch solche Classen, die nicht Ancipites sind. Eine solche Classe sei C. Die Classe, der die Form mx^2+ny^2 angehört, sei K. Es giebt immer eine, aber auch nur eine solche Classe, die mit C zusammengesetzt K hervorbringt (Art. 249); diese sei L, so dass $L+C=K$. Die der Classe C entgegengesetzte Classe sei C', und $L+C'=K_1$. Dann ist K_1 verschieden von K; denn durch die Zusammensetzung verschiedener Classen (C und C') mit einer und derselben eigentlich primitiven Classe (L) entstehen verschiedene Classen (Art. 249). Jede eigentlich primitive Form stellt unendlich viele Primzahlen dar (Schering, „die Fundamentalclassen der zusammengesetzten arithmetischen Formen" im 14. Band der Abh. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen); es seien also a, a' zwei ungerade, durch die Formen der Classen C und L resp. darstellbare Primzahlen, die beide von q, q'.... verschieden sind. Dann ist a auch durch die Formen der Classe C' darstellbar, mithin die zusammengesetzte Zahl aa' durch die Formen beider Classen K und K_1. Der Ausdruck $\sqrt{-D}$ (mod. aa') hat nur zwei nicht entgegengesetzte Werthe, N und N_1. Eine der beiden Formen $\left(aa', N, \frac{N^2+D}{aa'}\right)$ und $\left(aa', N_1, \frac{N_1^2+D}{aa'}\right)$ gehört also nur der Classe K an, da die andere der Classe K_1 angehören muss, die von K verschieden ist. Eine derselben kann also auch nur mit der Form mx^2+ny^2 eigentlich äquivalent sein; mithin existirt auch nur eine eigentliche Darstellung der Zahl aa' durch die Form mx^2+ny^2 (vgl. § 1), also überhaupt nur eine, da die Zahl aa' keine quadratischen Factoren enthält.

Wäre nun eine Euler'sche Form mx^2+ny^2 keine einclassige, so gäbe es, wenn man für die Zahlen q, q'... des Hilfssatzes die Primfactoren von D setzt, Zahlen, die keine der Formen δq, $2\delta q$, $\delta . 2^\lambda$ haben, welche nur einmal durch die Form mx^2+ny^2 darstellbar wären; folglich wäre diese Form keine Euler'sche, was der Voraussetzung widerstreitet.

Um zu zeigen, dass auch umgekehrt jede einclassige Form eine Euler'sche ist, schicken wir erst folgende Sätze über die einclassigen Zahlen voran.

§ 7.

Zwei Sätze über die einclassigen Zahlen.

1. Es giebt nur drei einclassige Zahlen, für welche auch die uneigentlich primitive Ordnung existirt, oder (weil D von der Form $4n+3$ sein muss, wenn für die Determinante $-D$ die uneigentlich primitive Ordnung existirt) welche von der Form $4n+3$ sind, nämlich 3, 7, 15.

Denn für die Determinanten $-11, -19, -23, -27, -31, \ldots -(4n+3)$ existiren resp. die reducirten Formen $(3, 1, 4)$, $(4, 1, 5)$, $(4, 1, 6)$, $(4, 1, 7)$, $(4, 1, 8) \ldots (4, 1, n+1)$, welche sämmtlich keine Ancipites sind, und entweder der eigentlich oder der uneigentlich primitiven Ordnung angehören. Für alle diese Determinanten enthält die primitive Ordnung also auch Classen, die keine Ancepsclassen sind; folglich sind nach § 5 alle diese Determinanten keine einclassigen. Es können also unter den Zahlen von der Form $4n+3$ höchstens diese drei, 3, 7, 15, einclassige Zahlen sein; diese sind es aber auch wirklich, wie man findet, wenn man für dieselben (nach Art. 174) alle reducirten Formen aufstellt und die sich daraus ergebenden Classen nach Geschlechtern ordnet.

2. Wenn $\lambda^2 i$ eine einclassige Zahl ist, so ist auch i eine solche.

Wenn nämlich $\lambda^2 i$ eine einclassige Zahl ist, so enthält die eigentlich primitive Ordnung der Determinante $-\lambda^2 i$ nur Ancepsclassen. Deshalb kann die Ordnung O dieser Determinante, die abgeleitet ist aus der eigentlich primitiven Ordnung der Determinante $-i$, auch nur Ancepsclassen enthalten. Denn jede Classe der Ordnung O kann angesehen werden als zusammengesetzt aus der Classe dieser Ordnung, welcher die Form $(\lambda, 0, \lambda i)$ angehört (also einer Anceps), mit einer Classe der eigentlich primitiven Ordnung (also einer Anceps) (Art. 251). Wenn aber eine Anceps mit einer Anceps zusammengesetzt wird, so entsteht immer eine Anceps (Art. 249). Da nun die Ordnung O nur Ancipites enthält, so kann auch die eigentlich primitive Ordnung der Determinante $-i$ nur Ancipites enthalten; mithin ist i eine einclassige Zahl.

§ 8.

Jede einclassige Form ist eine Euler'sche.

Voraussetzung: mx^2+ny^2 ist irgend eine einclassige Form der Determinante $-D$.

Behauptung: mx^2+ny^2 ist eine Euler'sche Form.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jede nicht in einer der drei Formen q, $2q$ und 2^λ enthaltene Zahl, die mit D keinen Factor gemeinsam hat, sich durch die Form $mx^2 + ny^2$ wenigstens auf zwei Arten darstellen lässt, wenn sie durch dieselbe überhaupt und zwar durch relative Primzahlen darstellbar ist. Es sei $A = 2^\lambda\, a\, b\, c \ldots$ eine solche Zahl; $a, b, c \ldots$ bedeuten ungerade Primzahlen oder Potenzen von solchen; die Anzahl derselben sei μ.

I. D ist von 3, 7, 15 verschieden.

Man beachte, dass in diesem Fall die uneigentlich primitive Ordnung nicht existirt.

Die Zahl λ muss entweder 0 oder 1 sein: der Fall $\lambda \geqq 2$ kann nicht vorkommen. Denn wenn λ nicht Null ist, so muss D nothwendig ungerade sein (weil D und A relative Primzahlen sein sollen); da ferner $-DRA$ sein muss, so muss auch $-DR2^\lambda$ sein; da $-D$ aber, wenn ungerade, nach der Voraussetzung von der Form $4k+3$ ist, so ist $-DN2^\lambda$, wenn $\lambda \geqq 2$ ist (Art. 103).

Wir unterscheiden die beiden Fälle $\mu = 1$ und $\mu > 1$.

1. $\mu = 1$. Dann ist A entweder $= q^r$ oder $= 2q^r$ $(r > 1)$.

a. $A = q^r$. Ist $r = 2k$, so ist A ein Quadrat und von der Form $8n+1$; die Form $mx^2 + ny^2$, durch welche A darstellbar ist, muss also dem Hauptgeschlecht angehören, mithin, da die Determinante einclassig sein soll, die Hauptform $Dx^2 + y^2$ sein. Dann existirt offenbar ausser der einen, nach der Voraussetzung stattfindenden Darstellung durch relative Primzahlen in allen Fällen noch diese zweite $x = 0$, $y = q^k$. Ist aber $k > 1$, dann existirt noch eine dritte Darstellung der Zahl A durch die Form $Dx^2 + y^2$, in welcher x von Null verschieden ist; denn A hat denselben Charakter, den q^2 hat, es muss sich also auch q^2 durch die Form $Dx^2 + y^2$ mittels relativer Primzahlen darstellen lassen, da die Classe, der diese Form angehört, die einzigste ihres Geschlechtes ist: es sei $q^2 = Da^2 + b^2$, dann ist $A = q^{2k} = D(aq^{k-1})^2 + (bq^{k-1})^2$. — Ist $r = 2k+1$, dann hat A denselben Charakter, den q hat, es muss sich also auch q durch die Form $mx^2 + ny^2$ darstellen lassen, da D einclassig ist. Es sei $q = ma^2 + nb^2$; dann existirt ausser der nach der Voraussetzung stattfindenden Darstellung der Zahl A durch relative Primzahlen noch diese zweite $A = m(aq^k)^2 + n(bq^k)^2$. Man beachte noch, dass auch bei dieser zweiten Darstellung x nicht Null ist. Dies wird sich auch in allen übrigen Fällen zeigen; nur für den Fall $A = q^2$ existirt keine andere zweite Darstellung, als solche, wo x Null ist.

b) $A = 2q^r$. In diesem Fall muss D ungerade sein. Ist $r = 2k$, also $A = 2q^{2k}$, dann hat A denselben Charakter in Bezug auf alle Primfactoren von D, den 2 hat; wenn sich also A durch die Form $mx^2 + ny^2$ darstellen lässt, so muss sich auch 2 durch dieselbe darstellen lassen. Denn wenn $D = 4k+1$, so giebt es keine zwei Genera, also auch, da D einclassig, keine zwei Classen, die in Bezug auf alle Primfactoren von D denselben Charakter haben. (S. Dirichlet Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind,

§ 123, wo gezeigt wird, dass der Totalcharakter einer jeden Form so beschaffen ist, dass die dort durch $\Pi C'$ bezeichnete Grösse stets $=1$, und niemals $=-1$ wird.) Da aber D ungerade ist, so lässt sich 2 durch keine andere zweigliedrige Form darstellen, als durch diese: x^2+y^2; mit dieser muss also die Form mx^2+ny^2 identisch sein. Dann existirt aber ausser der nach der Voraussetzung stattfindenden eigentlichen Darstellung der Zahl A noch diese uneigentliche $A=(q^k)^2+(q^k)^2$. — Ist $r=2k+1$, also $A=2q^{2k+1}$, so hat $2q$ in Bezug auf alle Primfactoren von D denselben Charakter, den A hat; es muss sich also auch $2q$ durch die Form mx^2+ny^2 darstellen lassen: es sei $2q=ma^2+nb^2$, dann ist $A=m(aq^k)^2+n(bq^k)^2$. Diese Darstellung ist wieder von der nach der Voraussetzung stattfindenden (eigentlichen) verschieden.

2. $\mu>1$. Mussten wir in dem Fall $\mu=1$ zu uneigentlichen Darstellungen unsere Zuflucht nehmen, um wenigstens zwei Darstellungen aufweisen zu können, so wird sich zeigen, dass, wenn $\mu>1$, immer wenigstens zwei eigentliche Darstellungen existiren. Es ist $-DRA$, der über A gemachten Voraussetzung zufolge. Die Werthe des Ausdrucks $\sqrt{-D}$ (*mod.* A) seien $\pm N$, $\pm N'$ u. s. w.; die Anzahl derselben, die wir durch m bezeichnen wollen, ist 2^μ (Art. 104, 105), also mindestens gleich 4. Da nun die Classe, welcher die Form mx^2+ny^2 angehört, die einzigste ihres Geschlechtes ist und die uneigentlich primitive Ordnung nicht existirt, so ist die Form $\left(A, N\ \frac{N^2+D}{A}\right)$ nothwendig der Form mx^2+ny^2 eigentlich äquivalent; denn erstere kann keiner derivirten Ordnung angehören, weil A mit D keinen gemeinsamen Factor hat; ferner gehört sie demselben Geschlecht an, dem die Form mx^2+ny^2 angehört, da beide die Zahl A darstellen. Ist daher α, β, γ, δ eine eigentliche Substitution, durch welche die letztere in die erstere übergeht, so existirt ausser dieser nur noch die andere $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$, welche dieselbe Eigenschaft hat. Es giebt daher zwei verschiedene Darstellungen der Zahl A durch die Form mx^2+ny^2, die zu der Wurzel N gehören, nämlich diese beiden α, γ; $-\alpha$, $-\gamma$. Dasselbe gilt von jeder andern Wurzel; im Ganzen giebt es daher $2m$ (eigentliche) Darstellungen der Zahl A durch die Form mx^2+ny^2. Man erkennt ferner leicht, dass, wenn die beiden Darstellungen $\pm\alpha$, $\pm\gamma$ zu der Wurzel N gehören, die beiden Darstellungen $\mp\alpha$, $\pm\gamma$ zu der Wurzel $-N$ gehören. Je vier der $2m$ Darstellungen sind mithin als identisch anzusehen; es giebt daher $\frac{m}{2}$, d. h. wenigstens zwei wirklich verschiedene eigentliche Darstellungen der Zahl A durch die Form mx^2+ny^2.

II. $D\equiv 3$. Wenn D von der Form $8n+3$ ist, so hat keine Classe der eigentlich primitiven Ordnung mit irgend einer Classe der uneigentlich primitiven Ordnung denselben Charakter (Art. 264, II). Die Zahl A kann also jedenfalls nicht durch irgend eine Form der uneigentlich primitiven Ordnung dargestellt werden. Nachdem dies festgestellt ist, lässt sich der Beweis ganz ähnlich wie vorhin führen, für den Fall $\mu > 1$. Wenn aber $\mu = 1$, so ist, da für $D = 3$, λ entweder 0 oder 2 sein muss, je nachdem eine der beiden Zahlen x und y gerade, die andere ungerade, oder beide ungerade sind, A entweder $= q^r$ oder $= 4q^r$. Im zweiten Fall ist der Beweis wie für I, 2; im ersten wie für I, 1, a.

III. $D = 7, 15$.

Ist A eine ungerade Zahl, so ist der Beweis ebenso zu führen, wie für I, da eine ungerade Zahl nicht durch eine Form der eigentlich primitiven Ordnung dargestellt werden kann.

Ist aber die durch die Form $mx^2 + ny^2$ der Determinante $-D = -(8n+7)$ darstellbare Zahl A gerade, so muss A den Factor 8 enthalten, wie leicht ersichtlich ist, wenn man bedenkt, dass die darstellenden Zahlen x und y relative Primzahlen und deshalb beide ungerade sind. Wenn also $A = 2^\lambda a$, so dass a ungerade, so ist λ wenigstens 3. Es muss $-D R (2^\lambda a)$ sein; der Ausdruck $\sqrt{-D}$ (*mod.* $2^\lambda a$) hat, wenn nur a von 1 verschieden ist, d. h. wenn nur A nicht eine Potenz von 2 ist, wenigstens acht Werthe: $\pm N_1$, $\pm N_2$, $\pm N_3$, $\pm N_4$. Denn der Ausdruck $\sqrt{-D}$ (*mod.* 2^λ) hat, da $\lambda \gtreqless 3$, vier Werthe; nennen wir einen v, so sind die übrigen $-v$, $\pm (2^{\lambda-1} - v)$ (Art. 104); der Ausdruck $\sqrt{-D}$ (*mod.* a) hat, da a von 1 verschieden und relative Primzahl zu D ist, wenigstens zwei Werthe, $\pm k$. Aus den beiden Werthen v und $2^{\lambda-1} - v$ des Ausdrucks $\sqrt{-D}$ (*mod.* 2^λ) und aus den beiden Werthen $\pm k$ des Ausdrucks $\sqrt{-D}$ (*mod.* a) ergeben sich nach Art. 105 die folgenden vier verschiedenen und auch nicht entgegengesetzten Werthe des Ausdrucks $\sqrt{-D}$ (*mod.* $2^\lambda a$):

$$N_1 = 2^\lambda z_1 + v, \quad N_2 = 2^\lambda z_2 + 2^{\lambda-1} - v,$$
$$N_3 = 2^\lambda z_3 + v, \quad N_4 = 2^\lambda z_4 + 2^{\lambda-1} - v,$$

in denen die Grössen z_1, z_2, z_3, z_4 so zu bestimmen sind, dass $N_1 \equiv k$, $N_2 \equiv k$, $N_3 \equiv -k$, $N_4 \equiv -k$ (*mod.* a) wird. Bilden wir nun folgende vier Formen, so dass die Determinante einer jeden $-D$ wird:

$$\alpha) \qquad (A, N_1, x_1), \quad (A, N_2, x_2)$$
$$(A, N_3, x_3), \quad (A, N_4, x_4),$$

so ist leicht zu zeigen, dass von den beiden Grössen x_1 und x_2 und ebenso von den beiden Grössen x_3 und x_4 die eine gerade, die andere ungerade sein muss. Denn aus

$$-D = N_1^2 - 2^\lambda a x_1 = N_2^2 - 2^\lambda a x_2$$

folgt

$$2^\lambda a (x_2 - x_1) = N_2^2 - N_1^2,$$

oder nach Substitution der für N_1 und N_2 aufgestellten Werthe und Division durch 2^λ:

$$a (x_2 - x_1) = 2R - v,$$

wo R eine von z_1, z_2 und v abhängige ganze Zahl ist. Hieraus geht hervor, da v ungerade ist, dass auch $x_2 - x_1$ ungerade ist, d. h. dass von den beiden Zahlen x_1 und x_2 die eine gerade, die andere ungerade ist. Dasselbe wird ebenso von x_3 und x_4 gezeigt. Von den vier Formen α) gehören also zwei der eigentlich, zwei der uneigentlich primitiven Ordnung an. Zwei der vier Formen α) müssen also der Form $mx^2 + ny^2$ eigentlich äquivalent sein, da die Classe, der diese Form angehört, die einzige ihres Geschlechtes ist, und da alle jene vier Formen denselben Charakter haben, welchen die Form $mx^2 + ny^2$ hat, weil sie alle fünf die Zahl A darstellen, die zu D relative Primzahl ist. Dann ergiebt sich aber aus jeder der beiden Transformationen der Form $mx^2 + ny^2$ in je eine der beiden Formen α), die mit dieser äquivalent sind, eine Darstellung der Zahl A durch diese letztere, und zwar aus jeder eine andere. Es existiren also wenigstens zwei eigentliche Darstellungen der Zahl A durch die Form $mx^2 + ny^2$.

Ist aber $a = 1$ oder A eine Potenz von 2, so hat $\sqrt{-D}$ (*mod.* A) nur vier Werthe, nämlich $\pm v$, $\pm(2^{\lambda-1} - v)$, und statt der vier Formen α) haben wir jetzt nur zwei, nämlich:

$$(2^\lambda,\ v,\ x_1),\ (2^\lambda,\ 2^{\lambda-1} - v,\ x_2),$$

von denen, wie vorhin, die eine der eigentlich, die andere der uneigentlich primitiven Ordnung angehört, so dass für jede Potenz von 2 höchstens eine eigentliche Darstellung durch irgend eine einclassige Form der Determinanten -7 und -15 existirt.

Es ist nun noch zu zeigen, dass auch jede Zahl A, **die mit D einen gemeinschaftlichen Factor δ hat** (δ sei der grösste) und die nicht von einer der Formen δq, $\delta . 2q$, $\delta 2^\lambda$ ist, wenigstens auf zwei Arten durch die einclassige Form $mx^2 + ny^2$ dargestellt werden kann, wenn A überhaupt durch diese Form und zwar so dargestellt werden kann, dass x und y relative Primzahlen sind.

Es sei also

$$A = ma^2 + nb^2.$$

Ferner sei, wie in § 1, $A = \delta A'$; der grösste gemeinschaftliche Factor den beiden Zahlen A und m: $\delta_1^2 \delta'_1$ und der Zahlen A und n: $\delta_2^2 \delta'_2$, so dass δ'_1 und δ'_2 keinen quadratischen Factor enthalten; und endlich

$$m = \delta_1^2 \delta'_1 m', \quad n = \delta_2^2 \delta'_2 n', \tag{1}$$

so dass A' und m' und auch A' und n' relative Primzahlen sind. Es ist klar, dass a den Factor $\delta_2 \delta'_2$, und b den Factor $\delta_1 \delta'_1$ enthalten muss; wenn also

$$a = \delta_2 \delta'_2 a', \quad b = \delta_1 \delta'_1 b', \tag{2}$$

so ist

$$A' = \delta'_2 m' a'^2 + \delta'_1 n' b'^2. \tag{3}$$

Die Zahlen a' und b' sind relative Primzahlen, weil a und b es sind. Die Determinante der Form $\delta'_2 m' x^2 + \delta'_1 n' y^2$ sei $-D'$, so dass $D' = \delta'_1 \delta'_2 m' n'$. D' und A' können keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Denn zunächst ist klar, dass A' und $m'n'$ relative Primzahlen sind. Aber auch A' und δ'_1 können keinen gemeinschaftlichen Factor haben; denn hätten sie einen, so müsste wegen 3) auch δ'_1 wenigstens mit einer der Zahlen δ'_2, m', a' einen gemeinschaftlichen Factor haben. Hätten nun δ'_1 und δ'_2 einen gemeinschaftlichen Factor, so hätten nach 2) auch a und b einen solchen; hätten δ'_1 und m' einen, so hätten nach 3) auch A' und m' einen; hätten endlich δ'_1 und a' einen, so hätten nach 2) auch a und b einen. Ebenso zeigt man, dass auch A' und δ'_2 keinen gemeinschaftlichen Factor haben können. Also sind D' und A' relative Primzahlen. Es ist $D = D'(\delta_1\delta_2)^2$. Da nun D eine einclassige Zahl ist, so ist nach § 7, 2 auch D' eine solche, also $\delta'_2 m'x^2 + \delta'_1 n'y^2$ eine einclassige Form. Da ferner A' weder q, noch $2q$, noch 2^λ ist und nach 3) durch die einclassige Form $\delta'_2 m'x^2 + \delta'_1 n'y^2$ mittels relativer Primzahlen darstellbar ist, so ist A', wie vorhin bewiesen, wenigstens zwei Mal durch diese Form darstellbar. Wenn also auch $A' = \delta'_2 m' a'^2_1 + \delta'_1 n' b'^2_1$, so folgt hieraus durch Multiplication mit $\delta = \delta_1^2\delta_2^2\delta'_1\delta'_2$, dass $A = m\delta_2^2\delta'^2_2 a'^2_1 + n\delta_1^2\delta'^2_1 b'^2_1$, oder wenn man $\delta_2\delta'_2 a'_1 = a_1$ und $\delta_1\delta'_1 b'_1 = b_1$ setzt,

$$A = m a_1^2 + n b_1^2,$$

wo a_1, b_1 von a, b resp. verschieden sind. Mithin ist die Zahl A durch die Form $mx^2 + ny^2$ wenigstens zweimal darstellbar.

Somit ist die Behauptung bewiesen, dass jede einclassige Zahl eine Euler'sche Zahl ist. Da nun in § 6 bewiesen ist, dass jede Euler'sche Zahl eine einclassige ist, so haben wir das Resultat:

Die Euler'schen Zahlen, resp. Formen sind mit den einclassigen identisch.

Hieraus ergiebt sich beiläufig ein sehr einfacher Beweis des in § 3 erwähnten Satzes: „Wenn $mn = m'n'$ (m', n' als relative Primzahlen vorausgesetzt), und die Form $mx^2 + ny^2$ eine Euler'sche ist, so ist auch $m'x^2 + n'y^2$ eine solche." Wenn nämlich $mx^2 + ny$ eine Euler'sche Form ist, so ist sie auch eine einclassige. Mithin ist auch $m'x^2 + n'y^2$ eine einclassige Form; denn für die verschiedenen Geschlechter derselben Determinante ist die Classenzahl dieselbe. Wenn aber die Form $m'x^2 + n'y^2$ eine einclassige ist, so ist sie auch eine Euler'sche.

§ 9.

Criterium der Euler'schen Zahlen.

Um also ein Criterium der Euler'schen Zahlen zu haben, brauchen wir uns nur nach dem Criterium der einclassigen negativen Determinanten umzusehen. Eine negative Determinante ist dann und nur dann einclassig, wenn sämmtliche Classen Ancipites sind. Sämmtliche reducirte Formen der Determinante $-D$ erhält man (Art. 171), wenn man in dem Ausdruck $D + n^2$ für n alle ganzen Zahlen von 0 an setzt, welche nicht grösser als

$\sqrt{\frac{1}{3}D}$ sind, und für jede einzelne dieser Zahlen den Ausdruck $D+n^2$ auf alle möglichen Arten in zwei Factoren auflöst, welche beide nicht kleiner als $2n$ sind. Die hieraus resultirenden Classen werden dann und nur dann sämmtlich Ancipites, wenn dies nicht anders geschehen kann, als dass der kleinere Factor gleich $2n$ wird oder dass beide Factoren gleich werden. Hieraus ergiebt sich also folgendes Criterium für die Euler'schen Zahlen:

Um zu untersuchen, ob eine Zahl D eine Euler'sche Zahl ist, setze man in dem Ausdruck $D+n^2$ für n alle ganzen Zahlen von 1 an, welche nicht grösser als $\sqrt{\frac{1}{3}D}$ sind, und für jede einzelne dieser Zahlen zerlege man den Ausdruck $D+n^2$ in zwei Factoren, welche beide nicht kleiner als $2n$ sind. Wenn dies nicht anders geschehen kann, als dass der kleinere Factor gleich $2n$ wird oder dass beide Factoren gleich werden, dann ist die Zahl D eine Euler'sche, sonst nicht.

Später werden wir diesem Criterium noch eine andere Form geben.

§ 10.

Die Euler'schen Sätze über die Euler'schen Zahlen.

In zehn Sätzen hat Euler eine Reihe bemerkenswerther Eigenschaften der Euler'schen Zahlen aufgestellt; aber seine Beweise dieser Sätze sind, wie schon bemerkt, theilweise mangelhaft; auch lassen einige dieser Sätze eine Verallgemeinerung zu. Ich habe mir erlaubt, die Reihenfolge derselben etwas zu ändern.

1. Wenn $\lambda^2 i$ eine Euler'sche Zahl ist, so ist auch i eine Euler'sche Zahl.

Der Euler'sche Beweis ist unrichtig, er lautet wörtlich:

„Weil $\lambda^2 i$ eine geeignete Zahl ist, wird es zusammengesetzte Zahlen C geben, so dass

$$C=\lambda^2 i a^2+b^2=\lambda^2 i c^2+d^2.$$

Setzen wir $\lambda a=f$, $\lambda c=g$, so wird sein

$$C=if^2+b^2=ig^2+d^2.$$

Hieraus erkennt man zur Genüge, dass auch i eine geeignete Zahl ist."

Euler beweist nur, dass diejenigen zusammengesetzten Zahlen, welche durch die Form $\lambda^2 ix^2+y^2$ dargestellt werden können, durch die Form ix^2+y^2 auf zwei Arten dargestellt werden. Er zeigt aber nicht, dass jede zusammengesetzte Zahl, die sich durch die Form ix^2+y^2 darstellen lässt, sich immer auf zwei Arten durch diese Form muss darstellen lassen; denn die zweite Form stellt auch solche Zahlen dar, die sich nicht durch die erste darstellen lassen.

Der strenge Beweis ergiebt sich aus § 7, 2 und dem Schluss von § 8.

Ich bemerke, dass dieser Satz sich im Allgemeinen nicht umkehren lässt. Die speciellen Fälle, in denen die Umkehrung gestattet ist, sind in den folgenden vier Sätzen enthalten.

2. Wenn i eine Euler'sche Zahl von der Form $4\alpha - 1$ ist, so ist auch $4i$ eine Euler'sche Zahl.

Der Euler'sche Beweis ist strenge; er lautet:

Wäre $4i$ keine Euler'sche Zahl, so müsste es zusammengesetzte Zahlen geben (und zwar auch solche, die zu $4i$ relative Primzahlen sind*), die nur auf eine Art durch die Form $4ix^2 + y^2$ darstellbar wären. Sei C eine solche Zahl, so dass

$$1)\qquad \begin{aligned} C &= 4if^2 + b^2 \\ &= i(2f)^2 + b^2 = ia^2 + b^2. \end{aligned}$$

Die Zahl C ist also auch durch die Form $ix^2 + y^2$ darstellbar, und zwar so, dass x eine gerade Zahl ist. Durch diese Form, als Euler'sche, ist dann aber C noch auf eine zweite Art darstellbar, es sei also auch

$$2)\qquad C = ig^2 + d^2.$$

Ich behaupte, dass auch g eine gerade Zahl sein muss. Denn wäre g ungerade, so müsste, da C, als relative Primzahl zu $4i$, ungerade ist, d gerade sein. Da dann ferner g^2 von der Form $4\alpha + 1$ wäre, also ig^2 von der Form $4\alpha - 1$, so müsste auch $ig^2 + d^2$, d. i. C, von der Form $4\alpha - 1$ sein, während nach 1) C von der Form $4\alpha + 1$ ist. Es muss also g gerade sein; es sei $g = 2c$, so ist nach 2) $C = 4ic^2 + d^2$. C wäre also durch die Form $4ix^2 + y^2$ noch auf eine zweite Art darstellbar. Dies ist gegen die Annahme, nach der C nur auf eine Art durch diese Form darstellbar sein sollte. Folglich giebt es keine solche Zahl C; mithin ist $4i$ eine Euler'sche Zahl.

3. Wenn i eine Euler'sche Zahl von der Form $4\alpha + 2$ ist, so ist auch $4i$ eine solche.

Der Euler'sche Beweis ist strenge; er lautet:

Wäre $4i$ keine Euler'sche Zahl, so würde es eine zusammengesetzte Zahl C geben, die sich nur auf eine Art durch die Form $4ix^2 + y^2$ darstellen liesse. Es sei

$$C = 4if^2 + b^2 = i(2f)^2 + b^2 = ia^2 + b^2.$$

Da sich nun C überhaupt durch die Form $ix^2 + y^2$ darstellen lässt, so lässt sich dieselbe Zahl noch auf eine andere Weise durch diese Form darstellen, da $ix^2 + y^2$ eine Euler'sche Form ist; es sei also auch $C = ic^2 + d^2$. Weil i gerade ist, so sind die Zahlen b und d ungerade, und deshalb ihre Quadrate von der Form $8\alpha + 1$, also die Differenz derselben, $b^2 - d^2$, durch 8 theilbar. Es ist aber $b^2 - d^2 = i(c^2 - 4f^2)$. Da nun i nur durch 2, nicht durch 4 theilbar ist, so muss $c^2 - 4f^2$ durch 4 theilbar sein, also c gerade sein. Wenn also $c = 2g$, so ist $C = i(2g)^2 + d^2 = 4ig^2 + d^2$. Also ist C auch durch die Form $4ix^2 + y^2$ zweimal darstellbar. Dies steht im Widerspruch mit der Annahme u. s. w.

---

*) Dies hat Euler freilich nicht gezeigt (vgl. die Note § 4); es ergiebt sich aber aus dem Lemma in § 6.

4. Wenn i ungerade und $4i$ eine Euler'sche Zahl ist, so ist auch $16i$ eine Euler'sche Zahl.

Der Euler'sche Beweis ist dem vorigen Beweis ähnlich.

5. Wenn $i = 3\alpha - 1$ eine Euler'sche Zahl ist, so ist auch $9i$ eine solche.

Der Euler'sche Beweis ist streng und lautet:

Wäre $9i$ keine Euler'sche Zahl, so gäbe es zusammengesetzte Zahlen, die nur auf eine Art durch die Form $9ix^2 + y^2$ darstellbar wären. Sei C eine solche, die zugleich nicht durch 3 theilbar ist (auch solche müsste es geben nach § 6; vergl. die Note zu 1), und zwar sei

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} C &= 9ig^2 + b^2 \\ &= i(3g)^2 + b^2 = ia^2 + b^2, \end{aligned}$$

wo $a = 3g$. C ist also auch durch die Form $ix^2 + y^2$ darstellbar. Da diese Form eine Euler'sche sein soll, so ist C noch auf eine andere Art durch dieselbe Form darstellbar; es sei also auch $C = if^2 + d^2$. Ich behaupte, f muss durch 3 theilbar sein. Denn da C nicht durch 3 theilbar ist, so ist auch b nicht durch 3 theilbar, also C von der Form $3\alpha + 1$. Wäre nun f nicht durch 3 theilbar, so wäre f^2 von der Form $3\alpha + 1$, also if^2 von der Form $3\alpha - 1$, und $if^2 + d^2$, d. i. C, entweder von der Form 3α (wenn d nicht durch 3 theilbar) oder von der Form $3\alpha - 1$ (wenn d durch 3 theilbar). Es muss also auch f durch 3 theilbar sein; es sei also $f = 3c$, so ist $C = i(3c)^2 + d^2 = 9ic^2 + d^2$. Es wäre also C zweimal durch die Form $9ix^2 + y^2$ darstellbar; dies steht im Widerspruch mit der Annahme u. s. w.

6. Wenn i eine Euler'sche Zahl von der Form $4\alpha + 1$ ist, so ist $4i$ keine Euler'sche Zahl.

Euler's Beweis ist unrichtig; er lautet wörtlich:

„Man betrachte diese Gleichung $C = ia^2 + b^2 = ic^2 + d^2$, und setze darin $a = 2f$, so dass $C = 4if^2 + b^2$. Wenn es nun nicht durchaus nothwendig ist, dass auch c eine gerade Zahl sein muss, so wird die Zahl $4i$ keine geeignete Zahl sein."

Dieser Schluss kann doch nur so lauten: „so würde die Behauptung, dass auch $4i$ eine geeignete Zahl sein müsse, sich jedenfalls nicht ebenso beweisen lassen, wie Satz 2".

Euler fährt fort: „Betrachten wir also den Fall, wo c eine ungerade Zahl ist, dann wird c^2 von der Form $4\alpha + 1$ sein, und deshalb ic^2 von der Form $4\alpha + 1$; da nun d gerade sein muss, so wird $ic^2 + d^2$ von der Form $4\alpha + 1$ sein; hieraus geht hervor, dass c nicht nothwendig eine gerade Zahl zu sein braucht, und eben dies zeigt, dass die Zahl $4i$ keine geeignete ist."

Der Schluss müsste wieder lauten: „und eben dies zeigt, dass der Beweis der Behauptung, $4i$ müsse auch eine geeignete Zahl sein, jedenfalls nicht wie vorhin (*ad* 2) geführt werden kann".

Ich bemerke zu Satz 6, dass derselbe einer Verallgemeinerung fähig ist und so lauten muss:

6'. Die Zahl 4 ausgenommen, giebt es überhaupt keine Euler'sche Zahl von der Form $4(4\alpha+1)$;

oder:

Wenn $i=4\alpha+1$, so ist $4i$ nie eine Euler'sche Zahl, einerlei ob i eine solche ist oder nicht, ausgenommen den Fall $i=1$.

Wenn nämlich i von der Form $4\alpha+1$ und nicht gleich 1 ist, so ist i wenigstens gleich 5. Deshalb ist jede der Formen $(1, 0, 4i)$ und $(4, 0, i)$ eine reducirte Form der Determinante $-4i$, und beide gehören offenbar dem Hauptgeschlechte an, ohne äquivalent zu sein; dies enthält also mindestens zwei Classen. Mithin kann $4i$ keine Euler'sche Zahl sein.

7. Wenn i ungerade und $8i$ eine Euler'sche Zahl ist, so ist $32i$ keine Euler'sche Zahl.

8. Wenn i ungerade und $16i$ eine Euler'sche Zahl ist, so ist $64i$ keine Euler'sche Zahl.

Von den Euler'schen Beweisen dieser beiden Sätze gilt dasselbe, wie für den Beweis des Satzes 6; Euler beweist eigentlich wieder nur, dass sich die entgegengesetzten Behauptungen, dass nämlich $32i$ und $64i$ resp. auch Euler'sche Zahlen seien, nicht wie Satz 4 würden beweisen lassen. Uebrigens sind diese beiden Sätze wieder einer Verallgemeinerung fähig und lassen sich in diesen einen Satz zusammenfassen:

(7 und 8)'. Es giebt überhaupt keine Euler'sche Zahl von der Form $32i$.

Es ist nämlich jede der beiden Formen $(1, 0, 32i)$ und $(4, 2, 8i+1)$ eine reducirte Form der Determinante $-32i$, und beide gehören dem Hauptgeschlecht an, ohne äquivalent zu sein; dies enthält also wenigstens zwei Classen. Mithin kann $32i$ keine Euler'sche Zahl sein.

9. Wenn i eine Euler'sche Zahl von irgend einer Form ist, und $i+a^2=p^2$, wo p eine Primzahl bedeutet, deren Quadrat kleiner als $4i$ ist, so ist $4i$ keine Euler'sche Zahl.

Auch dieser Satz lässt sich allgemeiner fassen und lautet dann so:

9'. Wenn p irgend eine ungerade Zahl, einerlei ob Primzahl oder nicht, und $p^2-a^2=i$, so ist $4i$ keine Euler'sche Zahl.

Denn aus $i=p^2-a^2$, wo p ungerade ist, folgt, dass i entweder von der Form $8n$, oder von der Form $4n+1$ ist. Im ersten Fall kann $4i$ nach (7 und 8'), im zweiten Fall nach 6' keine Euler'sche Zahl sein.

10. In der Reihe der Euler'schen Zahlen kommen keine anderen Quadrate vor als diese: 1, 4, 9, 16, 25.

Auch dieser Satz ist einer Erweiterung fähig.

10'. Euler'sche Zahlen können nur diese fünf quadratischen Divisoren enthalten: 1, 4, 9, 16, 25.

Durch 9 theilbare Euler'sche Zahlen giebt es ausser der Zahl 9 selbst nur noch diese drei: 18, 45, 72.

Durch 25 theilbar ist unter allen Euler'schen Zahlen nur die eine Zahl 25 selbst.

Unter den Euler'schen Zahlen, welche durch 4 und durch keine höhere Potenz von 2 theilbar sind, kommen ausser der Zahl 4 selbst nur noch diese drei vor: 12, 28, 60.

Durch 16 theilbare Euler'sche Zahlen giebt es ausser der Zahl 16 selbst nur noch diese drei: 48, 112, 240.

Beweis: I. Wenn $k > 1$, q eine ungerade Primzahl und $D = kq^2$ ist, und wenn wir die Zahl, die angiebt, wie viel mal die Anzahl aller Classen der eigentlich primitiven Ordnung für die Determinante $-D$ grösser ist als für die Determinante $-k$ durch n bezeichnen, so ist (Art. 256. II; oder Dirichlet's Zahlentheorie § 100):

$$n = q + 1, \text{ wenn } -kNq,$$
$$n = q \quad , \text{ wenn } k \text{ durch } q \text{ theilbar},$$
$$n = q - 1, \text{ wenn } -kRq \text{ und } k \text{ nicht durch } q \text{ theilbar.}$$

Die Zahl, welche angiebt, wie viel mal die Anzahl aller Classen in jedem Geschlecht der eigentlich primitiven Ordnung der Determinante $-D$ grösser ist als für die Determinante $-k$, wollen wir durch m bezeichnen. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. k ist nicht durch q theilbar; dann hat offenbar die eigentlich primitive Ordnung der Determinante $-D$ zweimal so viel Geschlechter als die der Determinante $-k$. Mithin ist

$$m = \frac{q+1}{2}, \text{ wenn } -kNq,$$
$$m = \frac{q-1}{2}, \text{ wenn } -kRq.$$

2. k ist durch q theilbar; dann ist die Anzahl der Geschlechter der eigentlich primitiven Ordnung für die beiden Determinanten $-D$ und $-k$ dieselbe, mithin $m = q$.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Zahl m nur dann gleich 1 werden kann, wenn $q = 3$ und zugleich $-kR3$, d. h. k von der Form $3\alpha + 2$ ist, dass mithin eine Zahl von der Form kq^2, wo $k > 1$ und q eine ungerade Primzahl (> 1), nur dann eine Euler'sche Zahl sein kann, wenn $q = 3$ und k von der Form $3\alpha + 2$ ist, und dass sie ferner dann wirklich eine solche ist, wenn ausserdem noch k eine ist. (Das Letztere stimmt mit Satz 5 überein.) Hiernach könnten also durch 9 theilbare Euler'sche Zahlen diese sein: 9.2, 9.5, 9.8, 9.11, 9.14 u. s. w. Man überzeugt sich leicht (mit Hilfe des § 9 angegebenen Criteriums), dass die drei ersten 9.2, 9.5, 9.8 oder 18, 45, 72 wirklich Euler'sche Zahlen sind, weil nämlich 2, 5, 8 solche sind. Ferner ist klar, dass die übrigen alle, nämlich 9.11, 9.14 u. s. w., keine Euler'schen Zahlen sein können, weil nämlich 11, 14... $3\alpha+2$ keine sind. Denn wenn $\alpha > 2$ ist, kann $3\alpha+2$ keine Euler'sche Zahl sein, weil dann die Form $(3, 1, \alpha+1)$ eine reducirte und keiner Ancepsclasse angehörige Form der Determinante $-(3\alpha+2)$ sein würde.

II. Wenn aber $k=1$, also $D=q^2$, wo q wie vorhin eine ungerade Primzahl bedeutet, so ist (Art. 256, V; oder Dirichlet a. a. O.) statt der Grösse n in I die Grösse $\frac{1}{2}n$ zu setzen, mithin die Anzahl der Classen in jedem Geschlecht der eigentlich primitiven Ordnung für die Determinante $-D\,\frac{n}{4}$ mal grösser als für die Determinante -1, d. h. als 1, also diese Anzahl selbst

$$\text{entweder } \frac{q+1}{4}, \text{ wenn } -1\,N\,q \text{ oder } q=4\alpha+3,$$

$$\text{oder } \frac{q-1}{4}, \text{ wenn } -1\,R\,q \text{ oder } q=4\alpha+1.$$

Die Ausdrücke $\frac{q+1}{4}$ und $\frac{q-1}{4}$ werden gleich 1 für $q=3$ und $q=5$ resp., in allen anderen Fällen grösser als 1. Also ausser der Zahl 1 selbst giebt es nur noch zwei Euler'sche Zahlen, welche Quadrate ungerader Primzahlen sind, nämlich 9 und 25.

Durch Zusammenfassung von I und II ergiebt sich:

Euler'sche Zahlen, die durch das Quadrat irgend einer ungeraden Primzahl (>1) theilbar sind, giebt es nur diese fünf:

9, 18, 25, 45, 72.

III. Ueber die Euler'schen Zahlen, die etwa durch die Quadratzahl 4, aber nicht durch 16 theilbar sind, geben die Sätze 1, 2, 3 und 6′ Auskunft. Wenn i keine Euler'sche Zahl ist, so ist auch $4i$ keine. Wenn aber i eine Euler'sche Zahl von der Form $4\alpha-1$ oder $4\alpha+2$ ist, so ist auch $4i$ eine solche; hingegen giebt es keine Euler'sche Zahl von der Form $4(4\alpha+1)$, mit Ausnahme der Zahl 4. Da es nur drei Euler'sche Zahlen von der Form $4\alpha-1$ giebt (§ 7, 1), nämlich 3, 7, 15, so giebt es also auch nur vier Euler'sche Zahlen, welche durch 4 und nicht zugleich durch 8 theilbar sind, nämlich diese:

4, 12, 28, 60.

IV. Ueber die Euler'schen Zahlen endlich, welche durch die Quadratzahl 16 theilbar sind, geben die Sätze 1, (7 und 8′), 4 Auskunft. Damit $16i$ eine Euler'sche Zahl sein könne, muss i eine solche sein (1), und i ungerade, denn es giebt nach (7 und 8′) keine Euler'sche Zahl, welche durch 32 theilbar ist; umgekehrt, wenn i ungerade ist, und $4i$ eine Euler'sche

Zahl, so ist auch $16i$ eine solche (4). Durch 16 theilbare Euler'sche Zahlen sind also diese vier:

$$16, 48, 112, 240$$

und keine andere (vgl. III).

§ 11.

Ein anderes Criterium der Euler'schen Zahlen.

Mit Hilfe der Sätze des vorigen Paragraphen können wir dem in § 9 aufgestellten Criterium eine etwas andere Form geben, welche der des zweiten Euler'schen Criteriums sehr nahe kommt.

Für die durch eine Quadratzahl theilbaren Euler'schen Zahlen bedarf es keines Criteriums mehr. Denn diese sind alle aus Satz 10' bekannt, bis auf die durch 4 theilbaren von der Form $4(4\alpha+2)$; die Zahlen von dieser Form sind aber dann Euler'sche Zahlen, wenn $4\alpha+2$ eine ist, sonst nicht. Die übrigen durch eine Quadratzahl theilbaren Euler'schen Zahlen sind folgende dreizehn:

$$4, 9, 12, 16, 18, 25, 28, 45, 48, 60, 72, 112, 240.$$

Wir setzen also im Folgenden voraus, dass die zu untersuchende Zahl D keinen quadratischen Factor enthält.

Zunächst ist klar, dass, wenn D eine Euler'sche Zahl ist, dann der Ausdruck

$$\text{I)} \qquad D+n^2 \quad (n \gtreqless 1,\ n < \sqrt{\tfrac{1}{3}D})$$

im Allgemeinen keine andere Form haben kann, als eine von diesen:

$$\delta q,\ 2\delta q,\ \delta q^2,$$

zu welchen, wenn D ein Vielfaches von 7 oder 15 ist, noch die Form $\delta . 2^\lambda$ als möglich hinzutritt (§ 8). Denn alle in I enthaltenen Zahlen lassen sich ja durch die Form Dx^2+y^2 darstellen, und zwar so, dass x und y (weil $x=1$) relative Primzahlen sind; hätten also einige dieser Zahlen noch eine andere Form, so müssten sich diese nach § 8 wenigstens zweimal durch die Form Dx^2+y^2 (als Euler'sche) so darstellen lassen, dass x nicht Null ist, was aber offenbar unmöglich ist, weil selbst die grösste unter ihnen höchstens gleich $\frac{4D}{3}$ ist, und für $x=2$ aus der Form Dx^2+y^2 schon Zahlen hervorgingen, die wenigstens gleich $4D$ sind.

Was nun die Form δq^2 betrifft, so ist leicht zu sehen, dass $\delta=1$ sein muss. Denn wenn

$$D+n^2=\delta q^2,\ D=D'\delta,$$

so muss, da δ, als Factor von D, keinen quadratischen Divisor besitzen kann, $n=\delta n'$ sein; substituirt man diesen Werth für n, so ergiebt sich $D'+\delta n'^2=q^2$. Die Determinante der Form $D'x^2+\delta y^2$ ist $-D'\delta=-D$. Da q^2 (das Quadrat einer ungeraden Zahl) durch diese Form dargestellt werden kann, so gehört diese dem Hauptgeschlecht der Determinante $-D$

an; dasselbe würde also, wenn δ von 1 verschieden wäre, ausser der Hauptclasse noch eine zweite Classe enthalten, was, da D eine Euler'sche Zahl sein soll, unmöglich ist.

Was ferner die Form $\delta 2^\lambda$ betrifft, so zeigt sich bei näherer Betrachtung, dass sich dieselbe auf die Form 2^λ reducirt. Dies lässt sich folgendermassen zeigen. Es sei D eine Euler'sche Zahl, und

$$D + n^2 = \delta 2^\lambda.$$

Da die Form $Dx^2 + y^2$ die Zahl $\delta . 2^\lambda$ eigentlich darstellt, so muss $-DR(\delta 2^\lambda)$, also auch $-DR(2^\lambda)$ sein; folglich muss D, da es keinen quadratischen Factor enthalten soll, mithin auch nicht durch 4 theilbar ist, von der Form $4n+3$ sein; als Euler'sche Zahl kann D also nur eine der Zahlen 3, 7, 15 sein. Für diese drei Werthe von D giebt der Ausdruck I aber folgende Zahlen:

für 3 die eine Zahl 4,
„ 7 „ „ „ 8,
„ 15 die beiden Zahlen 16, 19.

Unter diesen Zahlen tritt also keine andere Form, $\delta 2^\lambda$ auf als die Form 2^λ selbst.

Schliessen wir, der grösseren Einfachheit wegen, ausser denjenigen Euler'schen Zahlen, die einen quadratischen Factor enthalten, auch noch diese drei: 3, 7, 15 aus, so kann der Ausdruck I also, wenn D eine Euler'sche Zahl ist, nur die Formen δq, $2\delta q$, q^2 annehmen. Umgekehrt, wenn der Ausdruck I nur solche Werthe annimmt, die in diesen drei Formen enthalten sind, dann ist D eine Euler'sche Zahl. Da nämlich n den Factor δ, der ja kein Quadrat enthalten kann, haben muss, so lassen sich aus diesen Werthen nur solche reducirte Formen bilden, die einer Ancepsclasse angehören. Aus δq lässt sich nämlich gar keine reducirte Form bilden, da δ höchstens gleich n ist; aus $2\delta q$ entweder gar keine reducirte Form, wenn $n < \delta$, oder, wenn $n = \delta$, diese Anceps $(2\delta, \delta, q)$; aus q^2 endlich entweder gar keine reducirte Form, wenn $2n > q$, oder, wenn $2n < q$, diese (q, n, q), welche einer Ancepsclasse angehört.

Das Criterium für diejenigen Euler'schen Zahlen, welche nicht mit einem quadratischen Factor behaftet sind und welche von 3, 7, 15 verschieden sind, wird demnach folgendes sein:

Wenn der Ausdruck

$$D + n^2 \quad (n \geqq 1, n < \sqrt{\tfrac{1}{3} D})$$

keine anderen Zahlen enthält, als solche, die entweder von der Form δq oder von der Form $2\delta q$ oder von der Form q^2 sind, dann ist D eine Euler'sche Zahl, sonst nicht.

Wenden wir dies Criterium auf die Zahl 1848 an. Dieselbe ist von der Form $4(4\alpha + 2)$, da sie gleich 4.462, und 462 von der Form $4\alpha + 2$ ist. Die Zahl 1848 wird also dann und nur dann eine Euler'sche Zahl sein, wenn

462 eine ist. Einen quadratischen Factor enthält diese Zahl nicht. In dem Ausdruck $462 + n^2$ haben wir also für n alle ganzen Zahlen zu setzen, welche kleiner $\sqrt{\frac{462}{3}}$ sind, also alle Zahlen von 1 bis 12 incl.

$462 + 1^2 = 463 = q$	$462 + 7^2 = 511 = 7 \,.\, 73 = \delta q$
$+ 2^2 = 466 = 2 \,.\, 233 = \delta q$	$+ 8^2 = 526 = 2 \,.\, 263 = \delta q$
$+ 3^2 = 471 = 3 \,.\, 157 = \delta q$	$+ 9^2 = 543 = 3 \,.\, 181 = \delta q$
$+ 4^2 = 478 = 2 \,.\, 239 = \delta q$	$+ 10^2 = 562 = 2 \,.\, 281 = \delta q$
$+ 5^2 = 487 = q$	$+ 11^2 = 583 = 11 \,.\, 53 = \delta q$
$+ 6^2 = 498 = 6 \,.\, 83 = \delta q$	$+ 12^2 = 606 = 6 \,.\, 101 = \delta q.$

Hiernach ist 462, mithin auch 1848 eine Euler'sche Zahl.