

Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen.

Von Gunnar Nordström.

Es ist ja eins der großen Verdienste der Relativitätstheorie, daß sie den elektromagnetischen Zustand des Äthers durch einen Vektor, den Minkowskischen Sechservektor f zu charakterisieren vermag, während nach der alten Auffassung hierfür zwei Feldvektoren erforderlich waren. Diese Möglichkeit, den Ätherzustand durch einen Vektor zu charakterisieren, wird aber hinfällig, sobald man außer dem elektromagnetischen Felde noch ein Gravitationsfeld im Äther annimmt. In den Gravitationstheorien, die Herr Mie¹⁾ und ich²⁾ entwickelt haben, wird das Gravitationsfeld im Äther durch einen Vierervektor angegeben; wenn eine derartige Theorie der Wahrheit entspricht, wird also der Ätherzustand durch einen Sechservektor und einen Vierervektor charakterisiert.

Wir wollen die Komponenten des elektromagnetischen Sechservektors mit

$$f_{xy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{xu}, f_{yu}, f_{zu}$$

bezeichnen, indem $u = cit$ gesetzt ist, wo c die Lichtgeschwindigkeit. Für die Komponenten der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H} und der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} hat man dann³⁾

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= f_{yz} = -f_{zy} \text{ usw.}, \\ -i\mathfrak{E}_x &= f_{xu} = -f_{ux} \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Rein formal führen wir nun weiter für die Komponenten des Vierervektors des Gravitationsfeldes folgende Bezeichnungen ein:

$$f_{wx}, f_{wy}, f_{wz}, f_{wu},$$

(wobei $f_{xw} = -f_{wx}$ usw.) und schreiben folgende Gleichungssysteme auf:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xu}}{\partial u} + \frac{\partial f_{xw}}{\partial w} &= \frac{1}{c} f_x, \\ \frac{\partial f_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{yu}}{\partial u} + \frac{\partial f_{yw}}{\partial w} &= \frac{1}{c} f_y, \\ \frac{\partial f_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zu}}{\partial u} + \frac{\partial f_{zw}}{\partial w} &= \frac{1}{c} f_z, \\ \frac{\partial f_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial f_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{uw}}{\partial w} &= \frac{1}{c} f_u, \\ \frac{\partial f_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{wz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{wu}}{\partial u} &= \frac{1}{c} f_w, \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial f_{zu}}{\partial y} + \frac{\partial f_{uy}}{\partial z} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial f_{xu}}{\partial z} + \frac{\partial f_{uz}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial f_{yu}}{\partial x} + \frac{\partial f_{ux}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial f_{zw}}{\partial y} + \frac{\partial f_{wy}}{\partial z} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial f_{xw}}{\partial z} + \frac{\partial f_{wz}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial f_{yw}}{\partial x} + \frac{\partial f_{wx}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial f_{uw}}{\partial x} + \frac{\partial f_{wz}}{\partial u} + \frac{\partial f_{zu}}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial f_{uw}}{\partial y} + \frac{\partial f_{wy}}{\partial u} + \frac{\partial f_{yu}}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial f_{uw}}{\partial z} + \frac{\partial f_{wz}}{\partial u} + \frac{\partial f_{zu}}{\partial w} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Die Gleichungssysteme sind beide vollkommen symmetrisch in bezug auf x, y, z, u, w . Sie haben natürlich zunächst keine physikalische Bedeutung; setzt man aber alle partiellen Ableitungen nach w gleich null, so findet man, daß sie in die Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes übergehen, indem f_x, f_y, f_z, f_u die Komponenten des Viererstroms sind und $-\frac{1}{c} f_w$ die Ruhdichte der gravitierenden Masse¹⁾ ist. Die vier ersten Gleichungen in den beiden Systemen sind nunmehr die Maxwell'schen Gleichungen in der von Minkowski gegebenen Form; die letzte Gleichung (I) ist die Fundamentalgleichung der Gravitation, und die sechs übrigen Gleichungen (II) drücken die Wirbellosigkeit des Gravitationsvektors aus.

Diese Deutung der Gleichungen (I), (II) zeigt, daß es berechtigt ist, die vierdimensionale Raumzeitwelt als eine durch eine fünfdimensionale Welt gelegte Fläche aufzufassen. In

1) Hierunter verstehe ich die Größe, die ich in den zitierten Aufsätzen mit $g \cdot v$ bezeichnet habe; es ist also $-\frac{1}{c} f_w = g \cdot v$.

Man könnte ja allgemeiner für die Komponenten des Gravitationsvektors die Bezeichnungen $a f_{wx}, a f_{wy}, a f_{wz}, a f_{wu}$ einführen, wo a eine beliebige reelle oder imaginäre Konstante sein würde; dann würde man $-\frac{a}{c} f_w = g \cdot v$ haben. Es wird sich aber bei der Aufstellung des Impuls-Energiesatzes zeigen, daß a gleich $+1$ oder -1 sein muß, damit die letzte Gleichung (I) sich wirklich wie die übrigen verhalte.

1) G. Mie, Ann. d. Phys. 40, 25, 1913.
2) G. Nordström, diese Zeitschr. 13, 1126, 1912; Ann. d. Phys. 40, 872, 1913; 42, 533, 1913.
3) H. Minkowski, Gött. Nachr. 1908, S. 58.

jener fünfdimensionalen Welt sind die f_{mn} Komponenten eines Fünfervektors und die f_{mn} Komponenten eines Zehnervektors; der letztere Vektor charakterisiert vollständig den physikalischen Zustand des Äthers. Die fünfdimensionale Welt hat eine ausgezeichnete Achse, die w -Achse; die vierdimensionale Raumzeitwelt steht senkrecht zu dieser Achse und in allen ihren Punkten sind die Ableitungen sämtlicher Komponenten von f nach w gleich null.

Die Komponenten von f lassen sich durch ein Fünferpotential mit den Komponenten $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_u, \Phi_w$ ausdrücken, indem für jede Komponente von f

$$f_{mn} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial m} \quad (2)$$

Durch Differentiation der Gleichungen (I) findet man für den „Fünferstrom“ f die Beziehung

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} + \frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{\partial f_w}{\partial w} = 0, \quad (3)$$

und deswegen kann man für das Fünferpotential folgende sechs partielle Differentialgleichungen vorschreiben:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_u}{\partial u} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial w} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial w^2} &= \\ &= -\frac{1}{c} f_x, \\ \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial u^2} + \frac{\partial^3 \Phi_w}{\partial w^2} &= \\ &= -\frac{1}{c} f_w. \end{aligned} \right\} (5)$$

Von den fünf Gleichungen in (5) sind wegen Raumersparnis nur die erste und letzte ausgeschrieben. Wenn diese sechs Bedingungen erfüllt sind, befriedigen die Ausdrücke (2) identisch die Feldgleichungen (I), (II).

Unsere Formeln (I), (II) ermöglichen auch, den Impuls-Energiesatz für das kombinierte elektromagnetische und Gravitationsfeld in einheitlicher Weise aufzustellen. Um diesen Satz für die x -Richtung zu erhalten, multipliziere man diejenigen vier Gleichungen (I), die sich auf die übrigen Achsenrichtungen beziehen, mit $f_{xy}, f_{xz}, f_{xu}, f_{xw}$, und diejenigen sechs Gleichungen (II), die x enthalten, mit f_{mn} , wo m, n die beiden übrigen in der betreffenden Gleichung vorkommenden Indizes in richtiger Reihenfolge bedeuten. Die so erhaltenen zehn Gleichungen sind zu addieren, wonach eine einfache Umformung den gewünschten Satz gibt.

Wir wollen den Satz für die u -Richtung

— also den Energiesatz — aufstellen und haben dann die drei ersten Gleichungen (I) mit f_{ux}, f_{uy}, f_{uz} , die letzte mit f_{uw} zu multiplizieren. Weiter sind von den Gleichungen (II) die zweite, dritte, vierte, achte, neunte und zehnte mit bzw. $f_{yz}, f_{zx}, f_{xy}, f_{wx}, f_{wy}, f_{uz}$ zu multiplizieren. Wir erhalten durch Addition und nach einiger Umstellung der Terme

$$\begin{aligned} & f_{ux} \left(\frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xw}}{\partial w} \right) + \\ & + f_{uy} \left(\frac{\partial f_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{yw}}{\partial w} \right) + \\ & + f_{uz} \left(\frac{\partial f_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zw}}{\partial w} \right) + \\ & + f_{uw} \left(\frac{\partial f_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{wz}}{\partial z} \right) + \\ & + f_{yz} \left(\frac{\partial f_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yu}}{\partial u} \right) + f_{zx} \left(\frac{\partial f_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{xu}}{\partial u} \right) + \\ & + f_{xy} \left(\frac{\partial f_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{xu}}{\partial u} \right) + f_{wx} \left(\frac{\partial f_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial f_{xu}}{\partial u} \right) + \\ & + f_{wy} \left(\frac{\partial f_{yw}}{\partial y} + \frac{\partial f_{yu}}{\partial u} \right) + f_{wz} \left(\frac{\partial f_{wz}}{\partial z} + \frac{\partial f_{zu}}{\partial u} \right) + \\ & + f_{ux} \frac{\partial f_{xu}}{\partial u} + f_{uy} \frac{\partial f_{yu}}{\partial u} + f_{uz} \frac{\partial f_{zu}}{\partial u} + f_{uw} \frac{\partial f_{wu}}{\partial u} + \\ & + f_{yz} \frac{\partial f_{yz}}{\partial u} + f_{zx} \frac{\partial f_{zx}}{\partial u} + f_{xy} \frac{\partial f_{xy}}{\partial u} + \\ & + f_{wx} \frac{\partial f_{wx}}{\partial u} + f_{wy} \frac{\partial f_{wy}}{\partial u} + f_{wz} \frac{\partial f_{wz}}{\partial u} = \\ & = \frac{1}{c} (f_{ux} f_x + f_{uy} f_y + f_{uz} f_z + f_{uw} f_w). \end{aligned}$$

Eine einfache Umformung gibt die gesuchte Gleichung

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (f_{uy} f_{yx} + f_{uz} f_{zx} + f_{uw} f_{wx}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (f_{ux} f_{xy} + \dots) + \frac{\partial}{\partial z} (f_{ux} f_{xz} + \dots) + \\ & + \frac{\partial}{\partial w} (f_{ux} f_{xw} + \dots) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} (-f_{ux}^2 - \\ & - f_{uy}^2 - f_{uz}^2 - f_{uw}^2 + f_{yz}^2 + f_{zx}^2 + \\ & + f_{xy}^2 + f_{wx}^2 + f_{wy}^2 + f_{wz}^2) = \\ & = \frac{1}{c} (f_{ux} f_x + f_{uy} f_y + f_{uz} f_z + f_{uw} f_w). \end{aligned} \right\} (6)$$

Die Größen in den Klammern links sind Komponenten eines fünfdimensionalen Tensors, und die Gleichung hat demnach die Form

$$\frac{\partial P_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial P_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial P_{uw}}{\partial u} + \frac{\partial P_{uw}}{\partial w} = \mathfrak{R}_u \quad (6a)$$

Indem man sie mit ic multipliziert und $\frac{\partial P_{uw}}{\partial w}$

gleich null setzt, erhält man die Energiegleichung in ihrer gewöhnlichen Form. Man findet so für die x -Komponente des Energiestromes

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= ic \left(f_{xy} f_{yx} + f_{xz} f_{zx} + f_{wv} f_{vw} \right) \\ &= c (\mathcal{E}_y \mathcal{S}_z - \mathcal{E}_z \mathcal{S}_y) - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} \end{aligned} \right\} (7)$$

Der letzte Ausdruck ist mittels der Formeln (1) und (2) erhalten, und es sind die auftretenden Ableitungen nach w gleich null gesetzt. In vektoranalytischer Schreibweise lautet der Ausdruck für \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = c [\mathcal{E} \mathcal{S}] - \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \nabla \Phi_w. \quad (7a)$$

Für die Energiedichte bekommt man ebenfalls aus (6) einen Ausdruck, der, vektoranalytisch geschrieben, lautet:

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{E}^2 + \mathcal{S}^2 + (\nabla \Phi_w)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right)^2 \right\}. \quad (8)$$

Diese Ausdrücke für Energiestrom und Energiedichte setzen sich aus den bekannten Ausdrücken für die betreffenden Größen im elektromagnetischen Felde und im Gravitationsfelde additiv zusammen; was ja das gewünschte Resultat unserer Betrachtungen ist.

Man sieht leicht, daß die Behauptung in der Note S. 504 r. Sp. richtig ist, und daß also von den Komponenten des Zehnervektors f und des Fünfervektors \mathfrak{f} nur die mit einem Index u versehenen imaginär sind.

Durch Permutation der Indizes in Gleichung (6) erhält man vier andere Gleichungen. Die drei, die sich auf räumliche Achsenrichtungen beziehen, drücken natürlich den Impulssatz in bekannter Weise aus. Die Gleichung für die w -Richtung lautet nach Einführung der Feldstärken und des Gravitationspotentials Φ_w vektoranalytisch geschrieben

$$\begin{aligned} & - \operatorname{div} \left\{ [\mathcal{S}, \nabla \Phi_w] + \frac{1}{c} \mathcal{E} \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{E} \nabla \Phi_w) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \mathcal{S}^2 - \mathcal{E}^2 - (\nabla \Phi_w)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right)^2 \right\} = \\ & = - \frac{1}{c} \left\{ \mathfrak{f} \nabla \Phi_w + \mathfrak{f}_u \frac{\partial \Phi_w}{\partial u} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist vorläufig nicht einzusehen, daß dieser Gleichung eine physikalische Bedeutung zukäme.

Die obige Betrachtungsweise bietet, wie wir gesehen haben, formale Vorteile, indem nach ihr das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld als ein einziges Feld sich auffassen lassen. Ein neuer physikalischer Inhalt ist natürlich den Gleichungen damit nicht gegeben. Ich halte es indessen nicht für ausgeschlossen,

daß die gefundene formale Symmetrie einen tieferen Grund haben könnte. Auf die Möglichkeiten, die man sich in dieser Hinsicht denken könnte, will ich jedoch hier nicht eingehen.

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß eine einheitliche Behandlung des elektromagnetischen Feldes und des Gravitationsfeldes möglich ist, wenn man die vierdimensionale Raumzeitwelt als eine durch eine fünfdimensionale Welt gelegte Fläche auffaßt.

Helsingfors, 30. März 1914.

(Eingegangen 3. April 1914.)

Grundlagen einer relativistischen elektromagnetischen Gravitationstheorie. II.

Von Jun Ishiwara.

Im Anschluß an die im ersten Teil der oben genannten Arbeit mitgeteilte Gravitationstheorie¹⁾ versuche ich hier den Zusammenhang zwischen dem Gravitationsfeld und dem elektromagnetischen Feld zu ermitteln und damit die beiden fundamentalen Naturerscheinungen in das System eines einheitlichen physikalischen Weltbildes einzuordnen. Der Grundgedanke beruht auf dem Postulat, daß das Elektron dem materiellen Gebilde, welches als die Sinkstelle des Gravitationsfeldes aufgefaßt ist, identisch sei.

§ 1. Gravitierendes System.

Bevor ich die Theorie weiterführe, möchte ich mir erlauben, einige Verbesserungen der in der zitierten Arbeit gemachten Ansätze einzubringen.

Während ich nämlich dabei die Lichtgeschwindigkeit c unmittelbar als das Gravitationspotential angenommen habe, halte ich es nunmehr vom Standpunkt der Relativitätstheorie aus für rationeller, anzunehmen, daß das Gravitationspotential durch

$$\psi = c^2 \quad (1)$$

bestimmt sei²⁾.

Dementsprechend sei der Ausdruck für die Wirkungsgröße eines abgeschlossenen Systems, welches aus dem Gravitationsfeld und seinen Quellen besteht, folgendermaßen bestimmt:

$$W' = \int u' d\Sigma = \int \frac{1}{\alpha} F^2 d\Sigma + \text{konst.}, \quad (2)$$

worin der Vierervektor

$$F = - \diamond \psi \quad (3)$$

1) Jun Ishiwara, diese Zeitschr. 15, 294, 1914.

2) Daß dadurch aber die Einheit der Masse geändert werden muß, kann man leicht aus einer Dimensionsbetrachtung ersehen. Vgl. unten § 3.