Einfache Überlegungen zu Fermats letztem Satz

Martin Trömel, Institut für Anorganische und Analytische Chemie
der Goethe-Universität Frankfurt, Max von Laue-Strasse 7, D-60438 Frankfurt am Main.
e-mail: troemel@chemie.uni-frankfurt.de

Einleitung

Pierre de Fermat (1601-1665) formulierte in seinem Exemplar einer lateinischen Übersetzung der *Arithmetica* des Diophantos (3. Jh. n.Chr.?), die 1621 im Druck erschienen war, als Randnotizen achtundvierzig mathematische Theoreme ohne Beweis. Sein Sohn veröffentliche diese Notizen 1670 in einer Ausgabe dieses Werkes, in das die Randbemerkungen eingetragen waren. Spätere Mathematiker bewiesen die Richtigkeit dieser Theoreme. Eins davon, dessen Beweis Andrew Wiles erst 1994/5 führen konnte, wird deshalb als „Fermats letzter Satz" bezeichnet. Es lautet:

> Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben, ein Biquadrat in zwei Biquadrate und allgemein bis ins Unendliche irgend eine Potenz höher als das Quadrat in zwei Potenzen mit demselben Exponenten zu zerlegen. Hierfür habe ich einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt. Aber der Rand ist zu schmal, ihn zu fassen.

Lateinischer Text:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.[1]

Da dieser Satz erst auf Grund neuer Erkenntnisse bewiesen werden konnte und der Beweis keineswegs einfach ist, ist bezweifelt worden, dass Fermat überhaupt einen Beweis gefunden hat. War es mit den mathematischen Methoden des 17. Jahrhunderts möglich, zu einem Beweis des Satzes zu gelangen?

Überlegungen zu Fermats letztem Satz

Bei der Zerlegung einer Potenz in zwei Potenzen mit dem selben Exponenten muss die Zerlegungsgleichung erfüllt sein

(1) $$z^n - x^n - y^n = 0$$

In dieser Gleichung n-ten Grades sind x, y, z und n natürliche Zahlen grösser als Null.

x^n und y^n stellen einer Zerlegung nur dar, wenn beide kleiner sind als z^n.

x^n, y^n und z^n sind verschiedene Werte der selben Folge von Potenzen. Daher sind x, y und z Werte der selben Variablen. Diese wird hier als Unbekannte mit x bezeichnet:

(2) $$x^n - x_1^n - x_2^n = 0$$

Kann x^n in zwei Potenzen mit dem selben Exponenten zerlegt werden, so sind x_1 und x_2 die zwei Lösungen der Zerlegungsgleichung.

Jede Gleichung n-ten Grades mit einer Unbekannten hat genau n Lösungen. Deshalb entspricht der Zerlegung von x^n in x_1^n und x_2^n eine Gleichung mit zwei Lösungen, also eine quadratische Gleichung. Das ist die Aussage von Fermats letztem Satz.

Weiterführende Überlegungen

Auch die Produktdarstellung einer Gleichung n-ten Grades mit der Unbekannten x und den Lösungen $x_1, x_2, \ldots x_n$

(3) $$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

zeigt, dass nur eine quadratische Gleichung der Zerlegung in zwei Potenzen mit dem selben

Exponenten wie x^n entspricht. Die Produktdarstellung ist das Produkt von n Linearfaktoren der Form

(4) $(x - x_L) = 0$

wobei die x_L die Lösungen bzw. die Nullstellen der Gleichung sind.

Für n = 2 ist entsprechend dem Vietaschen Wurzelsatz

(5) $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

Mit dieser Gleichung kann für jedes pythagoreische Zahlentripel (x_1,x_2,x) die Zerlegungsgleichung aufgestellt werden. Für die kleinste zerlegbare Quadratzahl 25 mit dem pythagoreischen Tripel (3,4,5) ist

(6) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Aus dem Vietaschen Wurzelsatz folgt auch $x_1 \neq x_2$, da die Zerlegungsgleichung andernfalls linear wäre:

(7) $(x - x_1)^2 = 0$ und $x - x_1 = 0$

Kubikzahlen können nicht in zwei andere zerlegt werden. Die Produktdarstellung der kubischen Gleichung

(8) $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$

ist aber vereinbar mit einer Zerlegung in drei Kubikzahlen. So gilt für die kleinste zerlegbare Kubikzahl $6^3 = 216 = 3^3 + 4^3 + 5^3$ mit

(9) $(x - 3)(x - 4)(x - 5) = (x^2 - 7x + 12)(x - 5) = 0$

die Zerlegungsgleichung

(10) $x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$

Dass vierte Potenzen in vier andere mit dem selben Exponenten zerlegt werden können, zeigt das Beispiel $353^4 = 30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4$.

Können solche Überlegungen Fermat zu seinem Beweis geführt haben?

Der Satz, dass es zu jeder natürlichen Zahl n Gleichungen vom Grad n gibt, die genau n Lösungen haben, wurde im ersten Drittel des 17. Jahrhunderts bekannt. Das wurde zunächst ohne Beweis mitgeteilt,[2] und zwar 1608 durch den Nürnberger Rechenmeister Peter Roth.[3]
François Vietas (1540-1603) Wurzelsatz, 1615 postum veröffentlicht,[4] enthält ebenfalls keinen Beweis, und Gericke diskutiert die Frage, ob der Wurzelsatz und Folgerungen daraus ohne den Aufbau der Gleichung aus den Linearfaktoren gefunden werden konnten.
Eine weitere Veröffentlichung ohne Beweis (1629) stammt von Albert Girard (1595-1632).[5]
Der Beweis, dass Gleichungen keine anderen Lösungen haben als die aus den Linearfaktoren ablesbaren, was der Produktdarstellung der Zerlegungsgleichung entspricht, findet sich erst in einer postumen Veröffentlichung von Thomas Harriot (ca. 1560-1621), die 1631 erschien.[6]
Wenn Fermat seinen Beweis in der zweiten Hälfte der 1630er Jahre gefunden hat,[7] so können ihm alle diese Schriften bekannt gewesen sein, doch ist das nicht mehr nachweisbar. Fermats Bemerkung, er habe den Beweis gefunden, könnte aber darauf hindeuten, dass er die Untersuchung von Harriot nicht kannte. Vieta hatte in seinen Theoremen I bis IV den Wurzelsatz für n = 2 bis n = 5 abgeleitet. Fermats mathematischen Arbeiten waren stark von Vieta beeinflusst,[8] und in anderem Zusammenhang hält Gericke es für möglich, „daß jemand, der viel mit Gleichungen experimentiert, das Theorem I einfach sieht, und daß er, nachdem er den Aufbau dieser Gleichung durchschaut hat, auch die Aussagen für die höheren Grade konstruieren kann.“[9] Die Annahme, Fermat sei auf solche Art zu seinem Beweis gelangt, ist daher keineswegs unwahrscheinlich, und „wahrhaft wunderbar“ mag ihm erschienen sein, wie einfach sich dann auf die Unmöglichkeit der Zerlegung aller höheren Potenzen bis ins Unendliche, „in infinitum“, schliessen lässt.

Literatur und Anmerkungen

1 Faksimile-Wiedergabe: Singh, Simon: *Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels.* Deutscher Taschenbuch Verlag, München 2000, Abbildung 6, S. 90.

2 Gericke, Helmuth: *Mathematik im Abendland,* Fourier Verlag, Wiesbaden 2003.

3 Roth, Peter: *Arithmetica philosophica.* Gericke, S. 270 sowie S. 342.

4 Vieta, François: *De emendatione aequationum* XIV. Faksimile: Gericke, S. 268 sowie S. 345 f..

5 Girard, Albert: *Invention nouvelle en algebre.* Zitat und Übersetzung: Gericke, S.271 sowie S. 327.

6 Harriot, Thomas: *Artis analyticae praxis,* s. Gericke, S. 270 f. sowie S. 328 f..

7 Singh, S. 88, schreibt: um 1637.

8 Gericke, S. 287.

9 Gericke, S. 267.