falsch; und wären sie sogar richtig, könnte man dieselben, ebensoviel wie $\frac{d\omega}{dt} = 0$, und aus demselben Grunde, nicht integriren.

Aus der Integration der Gleichungen 7) hat Oppolzer alle seine Folgerungen gezogen. Die letzten sind also zweifach und sogar dreifach falsch, da die Gleichungen 5) selber schon nicht vollkommen richtig sind, weil dieselben ein mit t multiplicirtes Glied zweiter Ordnung vernachlässigen.

IV.

Ueber das zulässige Krümmungsmaass des Raumes.

Von K. Schwarzschild.

Wenn ich mir hier erlaube, Ihnen einige Bemerkungen vorzutragen, die weder von eigentlich praktischer Anwendbarkeit, noch von erheblicher mathematischer Bedeutung sind, so entschuldige mich das Thema, worauf sie sich beziehen, welches gewiss auch auf viele von Ihnen eine besondere Anziehungskraft ausübt, deshalb weil es eine Erweiterung unserer Vorstellungsbilder weit über den Kreis der uns zugänglichen Erfahrung hinaus darstellt und die merkwürdigsten Perspectiven für spätere mögliche Erfahrungen eröffnet. Dass es ein völliges Sichlosmachen von gerade dem Astronomen besonders fest eingewurzelten Anschauungen erfordert, erscheint nur als ein weiterer Vorzug für den, der von der Relativität aller unserer Kenntnisse überzeugt ist.

Es handelt sich um die Annahme einer Krümmung des Raumes. Es ist Ihnen bekannt, dass sich neben der euklidischen Geometrie im Laufe dieses Jahrhunderts andere — nicht euklidische — Geometrien entwickelt haben, an deren Spitze die Geometrie des sog. sphärischen und des sog. pseudosphärischen Raums stehen, auf die wir uns hier vornehmlich beziehen wollen. Man kann die Vorstellungen bis ins Einzelnste ausbilden, wie die Welt in einem sphärischen oder pseudosphärischen, gekrümmten, eventuell endlichen und in sich zurücklaufenden Raume aussehen würde. Ich brauche Sie in dieser Beziehung nur auf Helmholtz' Aufsatz: „Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome" zu verweisen. Man befindet sich da — wenn man will — in einem geometrischen Märchenland, aber das Schöne an diesem Märchen ist, dass man nicht weiss, ob es nicht am Ende doch Wirklichkeit ist. Es soll nun die Frage besprochen werden, wie weit wir die Grenzen dieses Märchenlandes zurückzuschieben haben, **wie gering die Krümmung des Raumes ist, wie gross sein Krümmungsradius mindestens gewählt werden muss.**

Gewöhnlich wird eine unzureichende Beantwortung dieser Frage gegeben, wenigstens eine für den Astronomen unzureichende. Während in der euklidischen Geometrie die Winkelsumme im Dreieck $2R$ beträgt, weicht sie in der nicht euklidischen davon ab, um so mehr, je grösser das betreffende Dreieck ist. Nun sagt man, selbst bei den grössten gemessenen Dreiecken, deren Spitze ein Fixstern und deren Basis ein Erdbahndurchmesser ist, weiche die Winkelsumme nicht merklich von $2R$ ab und darum müsse die Krümmung des Raumes ganz ausserordentlich gering sein. Dabei ist aber vergessen, dass der Winkel am Stern nicht gemessen ist, und dass die Entfernung des Sterns, die Grösse des Dreiecks, unter Voraussetzung der euklidischen Geometrie berechnet ist, deren Gültigkeit erst geprüft werden soll. Ausserdem würde es dem Astronomen nicht genügen, zu wissen, dass die Krümmung des Raumes bis zu den nächsten Fixsternen von messbarer Parallaxe vernachlässigt werden kann, er muss Distanzen bis zu den schwächsten, entferntesten Sternen in Betracht ziehen, wenn er ein Bild vom Bau der Sternenwelt entwerfen will.

Ich gehe an das Problem von einem Ausgangspunkt heran, der zugleich die erkenntnisstheoretische Stellung der nichteuklidischen Geometrie einigermaassen beurtheilen lässt. Ein Dreieck zwischen drei Punkten werde definirt durch den Weg der Lichtstrahlen von einem Punkt zum andern, die Seitenlängen a, b, c durch die Zeiten, die das Licht zu ihrer Zurücklegung braucht, die Winkel α, β, γ sollen mit einem gewöhnlichen astronomischen Instrument gemessen sein. Die Erfahrung lehrt uns die Gültigkeit der ebenen Trigonometrie innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit bei allen Dreiecken, von denen mehr als drei Stücke gemessen worden sind. Man nehme aber an, dass die gewöhnliche Trigonometrie nicht absolut genau sei und dass in Wirklichkeit und Strenge zwischen den Seiten und Winkeln die Gleichungen gelten:

$$a) \qquad \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\frac{a}{R} : \sin\frac{b}{R} : \sin\frac{c}{R}$$

$$b) \qquad \cos\frac{c}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{a}{R}\sin\frac{b}{R}\cos\gamma.$$

Dabei soll R eine gewisse gegebene sehr grosse Strecke sein, die wir den „Krümmungsradius des Raumes“ nennen wollen, ohne eine allzu enge Analogie mit dem Begriff des Krümmungsradius einer Fläche zu suchen. Es stimmen die vorstehenden Gleichungen überein mit den Grundformeln der sphärischen Trigonometrie und diese gehen bekanntlich in die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln über, wenn die Dreiecksseiten klein sind gegen den Kugelradius R. Setzt man aber R hinreichend gross an, so werden die Seiten jedes beliebigen gemessenen Dreiecks als klein gegen R erscheinen; durch Vergrösserung von R kann man es daher stets zu Wege bringen, dass innerhalb der Genauigkeit der Beobachtungen die Formeln (a) und (b) mit den gewöhnlichen trigonometrischen Formeln übereinstimmen, d. h. die Formeln (a) und (b) können mit der Erfahrung nie in Widerspruch kommen, wofern man nur R hinreichend gross wählt.

Die Frage rein mathematischer Natur, ob man ohne inneren Widerspruch die Formeln (a) und (b) für jedes Raumdreieck als gültig annehmen kann, haben wir hier nicht zu behandeln, sie ist bekanntlich in bejahendem Sinne gelöst, und es zeigt sich, dass durch die Forderung der Gültigkeit der sphärischen Trigonometrie für alle Raumdreiecke die Zusammenhangsverhältnisse des Raumes nicht einmal eindeutig bestimmt sind. Unter all den möglichen Raumformen mit sphärischer Trigonometrie sind die einfachsten und bekanntesten der sog. „sphärische Raum" und der sog. „elliptische Raum". Für den sphärischen Raum und den elliptischen Raum gemeinsam gelten folgende Eigenschaften: Der Raum ist endlich, er hat ein vom Krümmungsradius R abhängiges angebbares Volumen. Geht man einem Lichtstrahl folgend grade aus, so kommt man nach Durchlaufung einer gewissen grossen Strecke wieder zum Ausgangspunkt zurück. Die Verhältnisse in einer Ebene des Raumes sind ganz ähnlich den Verhältnissen auf der Oberfläche einer Kugel nach der gewöhnlichen Anschauung. Dabei ist eine Ebene im gekrümmten Raum praktisch natürlich, wie üblich, definirt durch alle Geraden, alle Lichtstrahlen, welche durch zwei sich schneidende Lichtstrahlen gehen. Jeder Geraden in der Ebene des gekrümmten Raumes entspricht nämlich ein grösster Kreis auf der Kugel. Sucht man zwei Parallelen zu construiren, d. h. Linien, die eine dritte unter gleichen Winkeln z. B. rechtwinklig schneiden, so entsprechen denselben etwa zwei Meridiane, die den Aequator rechtwinklig schneiden. Und wie sich die Meridiane im Pol treffen, so treffen sich die Parallelen im gekrümmten Raum in der Distanz $\frac{\pi}{2} \cdot R$. Nun wird man sagen, dass sich in der Ebene des gekrümmten Raumes zwei Gerade stets zweimal schneiden müssen, wie zwei grösste

Kreise auf der Kugel; diese Auffassung führt in der That zum Begriff des sphärischen Raumes. Es ist aber ebenso wohl möglich, dass sich zwei gerade Linien nur einmal schneiden, und das ist die Voraussetzung, die für den „elliptischen" Raum zutrifft. Die Abbildung einer Ebene des gekrümmten Raumes auf einer gewöhnlichen Kugel kann nämlich in der Weise erfolgen, dass jedem Punkt der Ebene nicht ein Radius, sondern ein Durchmesser und damit zwei diametrale Punkte der Kugel zugeordnet werden. Wenn sich dann die grössten Kreise, die durch einen Punkt der Kugel gehen, im gegenüberliegenden schneiden, so entspricht in der Ebene des gekrümmten Raumes der Ausgangspunkt und der diametrale Punkt einem einzigen Punkt, und in diesem einzigen Punkt schneiden sich die entsprechenden Linien. Zugleich folgt, dass man auf einem Wege von der Länge πR (nicht $2\pi R$) zum Ausgangspunkt zurückkommt, und dass die grösstmögliche Distanz zwischen zwei Punkten gleich einem Quadranten $\frac{\pi}{2} \cdot R$ ist. Dieser elliptische Raum, der einfachste der Räume mit sphärischer Trigonometrie, soll uns im Folgenden beschäftigen. (Nur weil der Ausdruck bekannter und beziehungsreicher ist, wurde oben zur vorläufigen Andeutung vom sphärischen Raum, statt vom elliptischen gesprochen.)

Zunächst ist indessen noch eine andere sehr einfache Verallgemeinerung der euklidischen Geometrie zu erwähnen. Ersetzt man in (a) und (b) R durch die rein imaginäre Grösse iR, so erhält man:

$$(a') \qquad \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \operatorname{Sin}\frac{a}{R} : \operatorname{Sin}\frac{b}{R} : \operatorname{Sin}\frac{c}{R}$$

$$(b') \qquad \operatorname{Cos}\frac{c}{R} = \operatorname{Cos}\frac{a}{R} \cdot \operatorname{Cos}\frac{b}{R} - \operatorname{Sin}\frac{a}{R} \cdot \operatorname{Sin}\frac{b}{R} \cos\gamma,$$

wobei durch die grossen Anfangsbuchstaben die hyperbolischen Functionen bezeichnet werden sollen. Auch diese Gleichungen gehen für wachsendes R in die Formeln der ebenen Trigonometrie über, und wieder giebt es eine ganze Reihe von Raumformen, in welchen die durch (a') und (b') ausgedrückte Trigonometrie gilt. Die einfachste und bekannteste dieser Raumformen ist der sog. „pseudosphärische" oder „hyperbolische" Raum. Derselbe ist unendlich, es giebt in ihm durch jeden Punkt ein ganzes Büschel von Linien, welche eine gegebene Linie nicht schneiden, die Geometrie in einer seiner Ebenen ist analog zur Geometrie auf der sog. Pseudosphäre, einer Fläche constanter negativer Krümmung.

Für die beiden Fälle des elliptischen und des hyperbolischen Raumes wollen wir jetzt die Aufgabe der Parallaxenbestimmung behandeln. Jede Parallaxenbestimmung kommt darauf hinaus, dass der Winkel an der Erde zwischen den Richtungen nach zwei Sternen gemessen wird zu zwei um ein halbes Jahr verschiedenen Zeiten. Zur Vereinfachung werde angenommen, dass der eine der beiden Sterne S_1 genau in der Richtung des betreffenden Erdbahndurchmessers, der andere Stern S_2 angenähert senkrecht dazu stehe. Sind E_1 und E_2 die Stellungen der Erde zu den beiden Zeiten, so dass $E_1E_2 = r$ den Erdbahndurchmesser bedeutet, so liefert die Beobachtung die beiden Winkel $S_1E_1S_2 = \alpha$ und $S_1E_2S_2 = \beta$ und die Grösse $p = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ist dasjenige, was man gewöhnlich als Parallaxe des Sterns S_2 bezeichnet. Die Aufgabe ist dann die, aus den drei Stücken α, β, $2r$ die Distanzen $E_2S_2 = a$ und $E_1S_2 = b$ des Sterns S_2 von der jeweiligen Erdstellung zu berechnen und zwar einmal unter Zugrundelegung der sphärischen, das andere Mal der pseudosphärischen Trigonometrie. In Rücksicht darauf, dass die Richtung nach S_2 ungefähr senkrecht zu $E_2E_1S_1$ stehen soll, darf man $a = b = d$ setzen, wo d kurz als Entfernung des Sterns bezeichnet werden kann, und wenn man ferner beachtet, dass die Parallaxe p stets ein sehr kleiner Winkel ist und der Krümmungsradius des Raumes zweifellos als gross gegen den Erdbahndurchmesser vorausgesetzt werden muss, so erhält man leicht als Formeln für die Distanzberechnung

im Falle des elliptischen Raumes:

$$\operatorname{cotg} \frac{d}{R} = \frac{R}{r} \cdot p \quad \text{oder} \quad \sin \frac{d}{R} = \frac{r}{\sqrt{p^2 R^2 + r^2}}, \qquad c)$$

im Falle des hyperbolischen Raumes:

$$\operatorname{Cotg} \frac{d}{R} = \frac{R}{r} \cdot p \quad \text{oder} \quad \operatorname{Sin} \frac{d}{R} = \frac{r}{\sqrt{p^2 R^2 - r^2}}. \qquad c')$$

Auf Grund der letzten dieser Formeln lässt sich der hyperbolische Raum sehr leicht erledigen. Man bemerkt, dass für jede reelle Distanz d die Ungleichung $pR > r$ gelten muss. Demnach giebt es hier eine Minimalparallaxe $p = \frac{r}{R}$, die jeder noch so weit entfernte Stern zeigen müsste. Da es aber gewiss ist, dass viele Sterne keine Parallaxe von 0.″05 haben, so muss der Werth dieser Minimalparallaxe unter 0.″05 liegen, und es folgt daraus als untere Grenze für den Krümmungsradius des hyperbolischen Raumes:

$$R > \frac{r}{\operatorname{arc} 0''\!.05} \text{ oder } R > 4\,000\,000 \text{ Erdbahnradien.}$$

Hiernach ist die Krümmung des hyperbolischen Raumes jedenfalls so gering, dass sie für alle Messungen im Planetensystem unmerklich bleibt, und da der hyperbolische Raum ebenso unendlich ist, wie der euklidische, würden in ihm auch keine ungewohnten Erscheinungen beim Anblick des Fixsternsystems zu beobachten sein.

Der Betrachtung des elliptischen Raumes möchte ich eine allgemeinere Bemerkung vorausschicken. Wie vor kurzem von Prof. Seeliger gezeigt worden ist, besteht die vernünftigste Ansicht, die man sich nach dem gegenwärtig vorhandenen Beobachtungsmaterial von der Anordnung des Sternsystems bilden kann, darin, alle sichtbaren Sterne, deren Zahl auf nicht über 40 Millionen zu schätzen ist, innerhalb eines Raumes von einigen hundert Millionen Erdbahnradien Durchmesser enthalten zu denken, um den herum dann eine weite relative Leere folgt. Wenn schon diese Ansicht etwas Beruhigendes hat, indem sie uns mit der vollständigen Erforschung dieses begrenzten Sternsystems einen gewissen Abschnitt in der Entwickelung unserer Welterkenntniss in Aussicht stellt, so würde eine solche beruhigende, die Vernunft sättigende Wirkung in noch höherem Maasse eintreten, wenn wir uns den Raum selbst als in sich geschlossen, an und für sich endlich und ganz oder nahezu von diesem Sternsystem ausgefüllt denken dürften. Denn wäre dies der Fall, so müsste eine Zeit kommen, wo der Raum durchforscht wäre, wie jetzt die Erdoberfläche, wo die makroskopische Forschung aufhörte und nur die mikroskopische fortzusetzen wäre. Auf dieser allerdings etwas weit gehenden Perspective scheint mir ein wesentliches Stück des Interesses zu beruhen, das der Hypothese des elliptischen Raumes innewohnt.

Prüfen wir jetzt die Parallaxenbestimmung im elliptischen Raum. Aus der obigen Formel:

$$\operatorname{cotg} \frac{d}{R} = \frac{R}{r} \cdot p$$

erhält man für jede gemessene Parallaxe p eine bestimmte reelle, an und für sich nicht unmögliche Sterndistanz d, welchen Werth man auch dem Krümmungsradius R zuschreiben mag. Wir erkennen es daraus sofort als einen Irrthum, zu glauben, dass durch das blosse Ergebniss der Parallaxenmessung an Fixsternen eine Grenze für R gefunden werden könne. Nach diesen Messungen könnte der Raum so stark gekrümmt sein, dass man schon nach Durchlaufung einer Strecke von — sagen wir — 1000 mal der

Distanz Erde-Sonne, welche das Licht in wenigen Tagen zurücklegt, zum Ausgangspunkt zurückkäme. Es sind nicht rein metrische, sondern erst physikalische Gründe, die zur Annahme eines grösseren Krümmungsradius veranlassen.

Ein gar zu kleiner Krümmungsradius würde freilich zu metrischen Unstimmigkeiten im Planetensystem selbst führen. Da wir ohnehin alsbald eine höhere Grenze finden werden, genüge hier die Angabe, dass bei einem Krümmungsradius von 30000 Erdbahnradien selbst für Dreiecke, die sich bis zur Neptunsbahn erstrecken, der Einfluss der Raumkrümmung unmerklich wäre. Dieser Krümmungsradius entspricht einer Strecke, welche noch nicht den 10. Theil der Distanz bildet, die man gewöhnlich den nächsten Fixsternen zuschreibt.

Nehmen wir einmal R zu 30000 Erdbahnradien an und berechnen nach (c) die für verschiedene Parallaxen folgenden Sterndistanzen, so erhalten wir:

$$\text{für } p = 1''0 \quad d = 0.908\,\frac{R.\pi}{2} = 42800 \text{ Erdbahnradien.}$$

$$0''1 \qquad 0.991\,\frac{R.\pi}{2} = 46700 \quad „$$

$$0.0 \qquad 1.000\,\frac{R.\pi}{2} = 47100 \quad „$$

Dieses Resultat erweist sich sofort als ziemlich absurd. Es mag 100 Sterne mit einer Parallaxe $p > 0''1$ geben. Diese 100 Sterne müssten über Distanzen bis zu 46700 Erdbahnradien zerstreut sein, während für die übrigen Millionen Sterne nur der Rest von 400 Erdbahnradien zur Verfügung stände. Es würde die Sonne also in einem Raum von ganz ausnahmsweise geringer Sterndichtigkeit stehen, während überall in einer bestimmten Entfernung von ihr eine ausserordentliche Sternfülle herrschen müsste. Um das Maass der Verdichtung zu verdeutlichen, habe ich noch das Volumen des Raumes von 46700 Erdbahnradien und das Volumen des verbleibenden Restes des ganzen Raumes berechnet und unter der Annahme, dass es im ganzen rund 100 Millionen Sterne giebt, den mittleren Abstand zweier Sterne abgeleitet. Es fand sich für die verhältnissmässig leere Umgebung der Sonne der zulässige mittlere Sternabstand von 15000 Erdbahnradien, während für den dicht erfüllten Rest des Raumes sich derselbe zu nur 40 Erdbahnradien ergab. Es ist ganz ausgeschlossen, dass die Sterne so dicht ständen, ohne dass sich ihre gegenseitigen physikalischen Einwirkungen verrathen hätten, und daraus folgt, dass ein Krümmungsradius von 30000 Erdbahnradien unbedingt zu klein ist.

Es ist klar, dass man durch Vergrösserung von R diesen Schwierigkeiten aus dem Wege gehen kann, weil sie ja für $R = \infty$, nach der gewöhnlichen Anschauung, nicht auftreten, und es genügt schon, R soweit zu vergrössern, dass die angenommenen 100 Millionen Sterne mit Parallaxen unter $0''.1$ einen 1 Million mal grösseren Raum zur Verfügung haben, als die 100 Sterne mit Parallaxen über $0''.1$. Eine einfache Rechnung lehrt, dass dies der Fall ist für:

$$R = 160 \text{ Millionen Erdbahnradien}$$

Bei einem derartigen Krümmungsradius würde der „Weg um die Welt πR" vom Licht etwa in 8000 Jahren zurückgelegt werden. Der zugehörige elliptische Raum wäre noch immer nicht so gross, wie die Dimensionen, die man dem Sternsystem bisher gewöhnlich zuschrieb, er entspräche etwa der Ausdehnung, die Seeliger für das endliche Fixsternsystem in Anspruch nimmt. Auch könnte man R noch auf die Hälfte oder ein Drittel verkleinern, ohne eine anormale Sternleere in der Umgebung der Sonne und eine übermässige Fülle in grösserer Entfernung von ihr zu erhalten.

Wir kommen demnach zum Schluss, dass sich kein Widerspruch gegen eine Erfahrungsthatsache ergiebt, sobald man etwa $R = 100$ Millionen Erdbahnradien annimmt. Für ein R dieser Grössenordnung wäre der ganze endliche Raum durch die uns sichtbaren Sternmassen einigermaassen gleichmässig erfüllt zu denken.

Nur ein Punkt ist dabei noch besonders zu berücksichtigen. Jeder Lichtstrahl kehrt im elliptischen Raum, nachdem er ihn ganz umlaufen, zum Ausgangsort zurück. Die Lichtstrahlen, die von der uns abgewandten Seite der Sonne in den Raum hinausgehen, treffen auf ihrem Rückweg nach Umkreisung des ganzen Raumes zum Theil die Erde, und müssen für uns ein der wirklichen Sonne genau gegenüberstehendes Gegenbild derselben erzeugen, welches an und für sich auch an Helligkeit der wirklichen Sonne nicht nachstünde, da sich die Strahlen beim Zurücklaufen zum Ausgangsort wieder ebenso condensiren, als ob sie direct auf dem kürzesten Weg von der Lichtquelle herkämen. Da thatsächlich kein derartiges Gegenbild der Sonne vorhanden ist, so ist man zu der Voraussetzung gezwungen, dass das Licht bei einem Umlauf um den Raum eine hinreichend starke Absorption erfährt, um das Gegenbild zu vernichten, und hierzu ist numerisch eine Absorption von gegen 40 Grössenklassen erforderlich. Weitere Bedenken stehen der Annahme einer derartigen, für irdische Distanzen betrachtet verschwindend geringen Absorption nicht gegenüber.

Zusammenfassend erhalten wir nun das Resultat: Man darf, ohne mit Erfahrungsthatsachen in Widerspruch zu gerathen, die Welt enthalten denken in einem hyperbolischen (pseudosphärischen) Raum von einem Krümmungsradius über 4000000 Erdbahnradien oder in einem endlichen, elliptischen Raum von einem Krümmungsradius über 100000000 Erdbahnradien, wofern man noch in letzterem Falle eine Absorption des Lichts von 40 Grössenklassen bei einem Umlauf um den Raum annimmt.

Und hierbei wird es vorläufig bleiben müssen. Ich sehe wenigstens nicht, wie mit Hülfe der bisherigen Forschungsmethoden ein principieller Fortschritt erzielt, also bewiesen werden könnte, dass das Volumen des Raumes gross gegen das Volumen des uns sichtbaren Sternsystems wäre, oder dass der Raum wirklich eine bestimmte positive oder negative Krümmung hätte. Indessen will ich Ueberlegungen andeuten, die, wenn auch keineswegs zu einem sicheren Entscheid, so doch zu einer Bevorzugung eines bestimmten Wertes R innerhalb der oben gesteckten Grenzen führen könnten.

Man sucht bekanntlich über die räumliche Anordnung der Fixsterne klar zu werden, indem man von möglichst einfachen und vernünftigen Annahmen über ihre durchschnittlichen Helligkeiten ausgeht, und sie dann derartig über die verschiedenen Distanzen von der Sonne vertheilt, dass man die richtigen, beobachteten Anzahlen für die Sterne jeder Grössenklasse erhält. Eine solche Untersuchung, deren Hauptresultat schon oben erwähnt wurde, ist kürzlich von Herrn Prof. Seeliger angestellt worden, und sie liesse sich in ganz ähnlicher Weise auch für den pseudosphärischen oder elliptischen Raum durchführen. Als ein einfaches Beispiel habe ich mir berechnet, wie in diesen beiden Raumformen die Sternanzahl von der Grössenklasse abhängt unter der Voraussetzung, dass die Helligkeit aller Sterne gleich, und ihre durchschnittliche Häufigkeit in allen Theilen des Raumes dieselbe sei, und habe gefunden, dass die Sternzahl mit der Grössenklasse im pseudosphärischen Raum langsamer, im elliptischen Raum rascher wächst, als unter denselben Voraussetzungen im euklidischen Raum. In Wirklichkeit wächst bekanntlich die Sternzahl langsamer, als aus diesen einfachen Hypothesen im euklidischen Raum folgt, und man könnte versucht sein, daraus auf die Existenz des pseudosphärischen Raumes zu schliessen. Natürlich kommt aber diesem Beispiel keine reale Bedeutung zu, weil die Voraussetzungen gleicher Helligkeit und Häufigkeit der Sterne gewiss nicht erfüllt sind. Indessen liesse sich, wie gesagt, die Theorie auf denselben allgemeinen Grundlagen, auf denen sie Herr Prof. Seeliger für den euklidischen Raum aufbaut, auch für den gekrümmten Raum entwickeln, und die Vergleichung mit der Erfahrung könnte eventuell zeigen, dass sich das einfachste Bild für die Vertheilung der Sterne unter Annahme eines Raumes von einer bestimmten Krümmung ergäbe. Freilich steht kaum in Aussicht, dass der Entscheid mit grosser Bestimmtheit fallen würde, und so tritt uns schliesslich die bedauerliche Thatsache entgegen, dass wenig Hoffnung ist, uns alsbald die Ueberzeugung von der Endlichkeit des Raumes verschaffen zu können.

N a c h t r a g. Im Vorstehenden sind von all den Raumformen, in welchen „freie Beweglichkeit starrer Körper" stattfindet, nur die S t a m m t y p e n (nach Herrn F. Klein's Ausdrucksweise) in Betracht gezogen worden. Zur vollständigen Erledigung des Themas empfiehlt es sich, auch die übrigen Räume dieser Eigenschaft mit der astronomischen Erfahrung zu vergleichen. Ausschliessen möchte ich aber dabei den „sphärischen Raum" und überhaupt die sogen. „Doppelräume", in welchen sich alles von einem Punkte ausgehende Licht noch in einem zweiten Punkte sammelt, da man so complicirte Annahmen nicht ohne Nöthigung verfolgen wird. Es bleiben dann die sogen. „e i n f a c h e n C l i f f o r d - K l e i n ' s c h e n R a u m f o r m e n" übrig.

Eine ist besonders merkwürdig von den Clifford-Kleinschen Raumformen, indem sie auf die einfachste Weise zeigt, dass mit der Gültigkeit der euklidischen Geometrie keineswegs, wie das meistentheils angenommen wird, die Unendlichkeit des Raumes verbunden sein muss. Man denke sich als das Resultat einer ungeheuer erweiterten astronomischen Erfahrung, dass die ganze Welt aus unzähligen identischen Wiederholungen unseres Milchstrassensystems bestehe, dass der unendliche Raum in lauter Würfel gespalten werden könne, deren jeder ein mit dem unserigen absolut gleiches Milchstrassensystem enthielte. Würden wir dann thatsächlich bei der Annahme unendlich vieler identischer Wiederholungen desselben Weltganzen stehen bleiben? Um das als sehr absurd zu erkennen, überlege man nur die Consequenzen daraus, dass auch wir selbst, die beobachtenden Subjecte, in unendlich vielen Wiederholungen vorhanden sein müssten. Wir werden uns viel lieber der Anschauung zuwenden, dass diese Wiederholungen nur scheinbare sind, dass in Wirklichkeit der Raum so eigenthümliche Zusammenhangsverhältnisse hat, dass wir, indem wir den betreffenden Würfel auf einer Seite verlassen, von selbst im Gradeausgehen durch die ge-

genüberliegende Seite wieder hereinkommen. Der Raum, den wir hierbei supponiren, ist nichts Anderes, als die einfachste der Clifford-Klein'schen Raumformen, ein endlicher Raum mit euklidischer Geometrie. Man erkennt unmittelbar die einzige Bedingung, welche die astronomische Erfahrung diesem Clifford-Klein'schen Raum auferlegt: Da von (scheinbaren) Wiederholungen des Milchstrassensystems bisher noch nichts bemerkt worden ist, so muss das Volumen des Raumes grösser sein, als das Volumen, welches wir dem Milchstrassensystem auf Grund euklidischer Anschauungen zuschreiben.

Die übrigen einfachen Clifford-Klein'schen Raumformen dürfen wir um so mehr in Kürze erledigen, als sie auch mathematisch noch nicht vollständig untersucht sind. Sie entstehen sämmtlich auf ähnliche Weise durch scheinbare identische Wiederholungen desselben Weltganzen, sei es nun in einem euklidischen, elliptischen oder hyperbolischen Raum, und die Erfahrung legt ihnen immer wieder die Bedingung auf, dass ihr Volumen grösser sein muss, als das des sichtbaren Sternsystems.

V.

Ueber die saecularen Störungen der kleinen Planeten.

Von C. V. L. Charlier.

In der Vorherrschaft der Hansen'schen Theorie bei der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten in den letzten 50 Jahren ist die Erklärung zu suchen, warum die systematische Behandlung der saecularen Störungen dieser Körper wenig vorgeschritten ist. Es giebt in der That, soviel ich weiss, über dieses Thema nur eine Abhandlung von Newcomb aus dem Jahre 1860, und zu jener Zeit waren nur 40 von den Asteroiden entdeckt.

In der letzten Zeit habe ich einige Untersuchungen über die saecularen Störungen der kleinen Planeten angestellt, dabei von einigen jungen Astronomen in Lund kräftig unterstützt, und ich wollte hier einen vorläufigen Bericht über diese Untersuchungen abgeben.

Die Bewegung der Bahnebenen der kleinen Planeten habe ich überall auf die unveränderliche Ebene — wie dieselbe durch die bekannten Untersuchungen von Stockwell bestimmt wird — bezogen. Man erreicht hierdurch gewisse Vortheile, die ich hier hervorheben will:

1) die Planetenelemente für verschiedene Zeiten werden direct mit einander vergleichbar;