



25th IVR World Congress
LAW SCIENCE AND TECHNOLOGY
Frankfurt am Main
15–20 August 2011

Paper Series

No. 049 / 2012

Series A

Methodology, Logics, Hermeneutics, Linguistics, Law and Finance

*Loisima Barbosa Bacelar Miranda Schiess / Lossian Barbosa
Bacelar Miranda*

Physikalische und Mathematische
Verbindungen der
Teilungsgerechtigkeit

URN: urn:nbn:de:hebis:30:3-249074

This paper series has been produced using texts submitted by authors until April 2012.
No responsibility is assumed for the content of abstracts.

Conference Organizers:

Professor Dr. Dr. h.c. Ulfrid Neumann,
Goethe University, Frankfurt/Main
Professor Dr. Klaus Günther, Goethe
University, Frankfurt/Main; Speaker of
the Cluster of Excellence “The Formation
of Normative Orders”
Professor Dr. Lorenz Schulz M.A., Goethe
University, Frankfurt/Main

Edited by:

Goethe University Frankfurt am Main
Department of Law
Grüneburgplatz 1
60629 Frankfurt am Main
Tel.: [+49] (0)69 - 798 34341
Fax: [+49] (0)69 - 798 34523

Loisima Barbosa Bacelar Miranda Schiess* und Lossian Barbosa Bacelar Miranda**,
Teresina-Piauí / Brasil

Physikalische und Mathematische Verbindungen der Teilungsgerechtigkeit

Abstract: Es wird eine Verbindung zwischen dem von Antiphon entwickelten infinitesimalen Berechnungsverfahren, der Theorie Verteilungsgerechtigkeit von Aristoteles, des Hebelgesetzes, der eben radialen Figuren und der Verteilung hergestellt.

Die Problemstellung stellt sich wie folgt dar:

dem Kennenlernen der Gründe, die Antiphon mutmaßen ließ, die Exhaustionsmethode als ein Mittel der Bildung des Quadratur des Kreises anzusehen,

Beziehungen von grundsätzlicher und historischer Art zwischen der Verteilungsgerechtigkeit und den Hebelgesetz herzustellen,

ein Model der Verteilungsgerechtigkeit, basierend auf der modernen Mathematik der Verteilung, von multipler Partizipierung zu konstruieren.

Die Zielsetzungen sind:

Die These zu erstellen, dass die Exhaustionsmethode aus der Gerichtspraxis stammt; dass das Hebelgesetz und die Theorie der Proportionen von Eudoxos Modelle der Verteilungsgerechtigkeit von Aristoteles sind; weiter soll gezeigt werden, dass die ebene Verteilung der materiellen Partikel auch ein Modell der Verteilungsgerechtigkeit ist.

Das Modell der Mehrteiligkeit der Verteilung, das vorgestellt wurde, enthält zwei Arten von Freiheitsgraden, einen für den Wert der zu verteilenden Güter an jeweils einen der Beteiligten und einen zweiter Freiheitsgrad für die verschiedenen Ebene zwischen den Beteiligten im Falle der Ungleichheit.

Keywords: Exhaustionsmethode, Hebelgesetz, Verteilungsgerechtigkeit, Verteilung.

I. Einführung

Der Erfolg der euklidischen Geometrie als *formales* logisches System hat dazu beigetragen, dass, im Laufe der Jahrhunderte, die Juristen ihre methodologische Inspirierung in der Geometrie suchten. Doch der *Parallelismus* zwischen Mathematik und Jura stammt von den Ägyptern, da sowohl die juristische Sprache als auch die Geometrie in Zusammenhang mit der Frage des Eigentums entstanden sind. Während der *Überschwemmungen* des Nils, hatten die ursprünglichen Studien der Geometrie die praktische Lösung der Probleme des Eigentümers zum Ziel. Gleichzeitig wurden in Sizilien, Corax und Tísias die juristische

* Brasilianische Richterin und Vizedirektorin des Associação dos Magistrados Brasileiros.

** Brasilianer, Professor für Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Piauí.

Rhetorik eingeweiht, um Probleme der Agrarreform, aufgrund der Etablierung von *stabilen* Regierungen zwischen antagonistischen Gruppen in der post-tyrannischen Zeit, zu lösen.

Die geschichtliche Analyse dieser Fragen führt uns zur Studie der Beziehung zwischen den Prinzipien der mathematischen und juristischen Sprache. In diesem Zusammenhang *zeichnen* sich Antiphon von Athen und Aristóteles aus. Antiphone werden die ersten juristischen Reden zugeschrieben. Er (oder ein Homonym von ihm, denn es gibt bis heute noch Kontroversen über seine multiple oder singuläre Identität) ist auch der Vater der Integralrechnung, nach Informationen von Aristóteles. Die Verteidigung der unitarischen These über Antiphons Identität führte uns, durch Plausibilität (seine Lieblingsmethode) zur Verfechtung der These nach der der Sprecher nicht nur auch der Sophist ist, sondern auch seine juristisch-rhetorische Methode als Instrument zur Etablierung der *Ausschöpfungsmethode*, wiederum Keim der Integral und Differentialrechnung, benutzt hat.

Obwohl er das Hebelgesetz in „*Nikomachische Ethik*“, wo er seine Verteilungsgerechtigkeitstheorie entwickelt, nicht erwähnt, deutet er eine Analogie zwischen dieser Theorie und dem Hebelgesetz an, in dem er sich auf die Verhältnistheorie bezieht. Unter Zugrundelegung dieser Analogie von Aristoteles, ist die Konstruktion multipartizierenden Modelle der Verteilungsgerechtigkeit, einschließlich der Fälle in denen es einen Dynamismus in den modellierten Phänomenen gibt, möglich.

In den Fällen in denen nach dem kommutativen Recht gesucht wird, sorgen die Theoremen von Banach-Knaster und Taylor-Brams, über die Verteilung, für die Einrichtung von vollständig rationalen Konsens-Algorithmien. Doch in den Fällen in denen man es auf die Verteilungsgerechtigkeit abgesehen hat und es eine Mehrzahl von relevanten Merkmalen-betreffend der Aufteilung des Vermögens zwischen den verschiedenen Teilen gibt-, entsteht das große Problem der Einrichtung von Graden der Relevanz (numerisch, durch Gewichte angegeben) jedes einzelnen Merkmals.

Die Studien, die zur vorliegenden Arbeit führten, wurden von Lossian Miranda und Giovana Santos, des „Federalen Institut für Erziehung Wissenschaft und Technologie Piauís“, innerhalb des Rahmens des *VIII Nationalen Seminar der Geschichte der Mathematik* in Belém/Pará – Brasilien 2009 mittels eines *Poster*, dargestellt und vorgetragen.

II. Antiphons Vermutung und die Entstehung der Berechnung

Die juristische Rhetorik etabliert sich mit großer Kraft in Griechenland, vor allem in Athen, mit Gorgias (485-380 v.C., Sizilien) und Antiphon (480-411 v.C., Griechenland).¹ In 430 v.C, vier Jahre nach der Festnahme von Anaxagoras (500-428 v.C., Türkei), der nach Plutarch, eine Kreisquadratur in Haft versucht hatte, schlug Antiphon die Ausschöpfungsmethode als Mittel zur Ausrechnung der Kreisquadratur vor.² Die Ausschöpfungsmethode beruht auf Antiphons folgendem Satz:

“Two unequal magnitudes being set out, if from the greater there is subtracted a magnitude greater than its half, and from that which is left a magnitude greater than its half, and if this process is repeated continually, then there will be left some magnitude less than the lesser magnitude set out”. Euclid’s Elements, X-1. <<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookX/bookX.html>>.

Sehen wir mal was Aristoteles und seine klassischen Kommentatoren über Antiphons Vorschlag sagen:

Aristotle’s, *Physica*, I-2: *“Moreover, no man of science is bound to solve every kind of difficulty that may be raised, but only as many as are drawn falsely from the principles of the science: it is not our business to refute those that do not arise in this way: just as it is the duty of the geometer to refute the squaring of the circle by means of segments, but it is not his duty to refute Antiphon’s proof”*. *Physics*. By Aristotle. Book I, Part 2. Translated by R. P. Hardie and R. K. Gaye. <<http://classics.mit.edu/Aristotle/physics.mb.txt>>.

Simplicio, *In Aristotelis Physica* 54.12-55. 24 Diels [B.13 DK/ B.13 U/ F13(e) P]:

“Pois, enquanto muitos buscam a quadratura do círculo (isto é, estabelecer um quadrado que fosse igual a um círculo), tanto Antifonte quanto Hipócrates de Quios consideram erroneamente tê-la descoberto. Mas o erro de Antifonte, por não partir de princípios geométricos, como aprenderemos, não é próprio do geômetra refutar... Antifonte desenhou um círculo e inscreveu nele a área de um dos polígonos que podem ser inscritos. Seja, por exemplo, um quadrado o polígono inscrito. Em seguida, cortando cada um dos lados do quadrado em dois, traçava linhas ortogonais desde o ponto do corte até a circunferência, cada uma das quais, evidentemente, dividia em dois o respectivo segmento do círculo. Depois, desde o ponto de corte, ligava com linhas retas as extremidades das linhas do quadrado, de modo a formar quatro triângulos a partir dessas linhas retas, sendo o todo da figura inscrita um octógono. E assim novamente segundo o mesmo método, cortando em dois cada um dos lados do octógono e traçando linhas ortogonais do ponto de corte até a circunferência, ligava os pontos em

¹ Xavier Laborda Gil. *De Retórica: la comunicación persuasiva*, Capítulo 2, 2005: 2. <http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaNumeroRevistaIU.visualiza&numeroRevista_id=634>. 01/04/2011.

² Thomas Little Heath. *A History of Greek Mathematics*, Vol I, (1921): 220 und Petr Beckman. *Historia de (pi)*. Mexico: D. R. Librería, AS de CV, 2006: 165.

que linhas traçadas tocavam a circunferência até as extremidades das retas divididas, fazendo da figura inscrita um polígono de dezesseis lados. E cortando de novo, seguindo o mesmo raciocínio, os lados do polígono inscrito de dezesseis lados, ligando com retas, duplicando o polígono inscrito e isso sempre fazendo, achava que, quando estivesse esgotada a superfície, restaria inscrito desse modo no círculo certo polígono, cujos lados, por causa da máxima pequenez, adequar-se-iam à circunferência do círculo. E como podemos estabelecer um quadrado equivalente a todo polígono, como aprendemos nos Elementos (Euclides II 14), por supor o polígono igual ao círculo que a ele corresponde, teremos estabelecido um quadrado equivalente a um círculo”. [ANTIFONTE - Testemunhos, Fragmentos, Discursos. Edição bilíngue. Prefácio e tradução: Luís Felipe Bellintani Ribeiro. São Paulo: Edições Loyola, 2008: 53-55].

Themistius, *in phys.* ed. H. Schenkl, 4, 2-8

„Gegen Antiphon aber dürfte wohl der Geometer nichts weiter zu sagen haben. Denn dieser zeichnete ein gleichseitiges Dreieck in den Kreis, beschrieb über jeder der Seiten nach dem Kreisumfang zu ein anderes, gleichschenkliges und indem er dies beständig wiederholte, glaubte er, daß schließlich einmal die Seite des letzten Dreiecks, die doch geradlinig ist, sich mit dem Umfang decken würde, — während er doch damit die Teilung ins Unendliche aufhob, die der Geometer als Grundsatz annimmt”. [Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates - Simplicius, Ferdinand Rudio, 1907, 104].

Die Analyse des Diskurses von Antiphons zeigt, dass für ihn, die juristischen Beweise auf Fakten, Zeugen und Plausibilität beruhen, während Letztere eine Position von großer betrieblicher Bedeutung einnimmt. Die überzeugende Rede wird aus der Konstruktion einer Folge von Argumenten, die sich immer mehr des erwünschten Zieles nähern, entwickelt. Das Wort *Plausibilität* an sich, wird in seinen Reden wiederholt benutzt, wie es die unteren Zitate veranschaulichen; entnommen (der Übersetzung der *Bezeugungen, Reden und Fragmenten*) von Antiphon:

“É preciso que vós, conhecendo essas coisas, assim que aprenderdes uma verossimilhança qualquer, confieis nisto com todas as vossas forças”.

“Pois foi encontrado ainda respirando e, inquirido por nós, disse apenas ter reconhecido o acusado entre os agressores. Refutado pelas verossimilhanças e pelas testemunhas, de nenhum modo seria justo nem conveniente que ele fosse absolvido por vós”.

“Se os assassinos, entretanto, não deixam evidências, é por verossimilhança que podemos argumentar, e, nesse caso, nenhum outro senão ele seria o assassino”.

“Nós, porém, não vos pedimos nada, apenas vos dizemos: se agora nesse caso a culpa não é provada, nem pelas verossimilhanças, nem pelas testemunhas, nunca haverá prova alguma contra os acusados”.

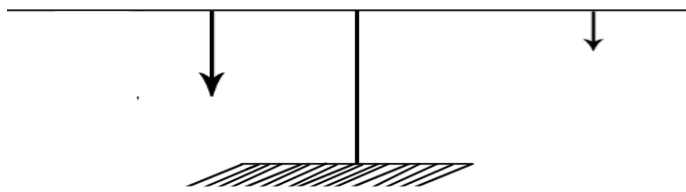
“Eles se valem de verossimilhanças para provar minha culpa, mas não dizem que sou o assassino verossímil do homem, e sim real. As verossimilhanças para mim são mais como eu demonstrei, pois a testemunha de acusação, argumentei que ela era para mim indigna de fé, e que não houve sequer interrogatório”.

[ANTIFONTE - *Testemunhos, Fragmentos, Discursos*. Edição bilíngue. Prefácio e tradução: Luís Felipe Bellintani Ribeiro. São Paulo: Edições Loyola, 2008, 131-149].

Die von Antiphon vorgeschlagene Technik der Quadratur des Kreises war genau die gleiche Technik, die er in seinen juristischen Diskursen angewendet hatte. Es gibt eine Annäherung durch Plausibilität im Bezug zur Fläche, da die Flächen der Polygone sich der Fläche des Kreises nähern. Die Annäherung durch Plausibilität, mehr als das, Identität im Prozess der Konstruktionen der Figuren, da sowohl der Kreis und der Polygon mit Lineal und Zirkel konstruiert werden kann. Es gibt eine Annäherung durch Plausibilität im Bezug zu den Dimensionen des Kreises und der Polygone, da beide zweidimensionale Figuren sind. Es gibt auch eine Annäherung durch Plausibilität im Bezug zu den Längen der jeweiligen Seiten der Polygone und deren *Bögen*.

III. Das Hebelgesetz und die Gerechtigkeit in Aristoteles

Beachte den Hebel, mit Stützpunkt und Armen, wie die Figur unten es darstellt (Figur 1).



Figur 1. Hebel

Das Hebelgesetz, auch das erste Gesetz der Mechanik genannt, da es das älteste³ ist, besagt, dass eine bestimmte und genügende Voraussetzung vorhanden sein muss, damit zwei Gewichte sich auswiegen (da Hebel sich nicht drehen lassen). Gewichte und ihre Entfernungen zum Stützpunkt sind umgekehrt proportional. Wir zitieren Archimedes, nach Heath: *“Two magnitudes, whether commensurable [Prop. 6] or incommensurable [Prop. 7], balances at distances reciprocally proportional to the magnitudes”* [Thomas Little Heath, *The Works of Archimedes* (1897), 192].

Man beachtet, dass dieses Gesetz die Theoretische Grundlage zum Bau von Waagen durch Vergleichende Gewichte möglich machte.

³ Peter Damerow; Jürgen Renn; Simone Rieger; Paul Weinig. *Mechanical Knowledge and Pompeian Balances*. PREPRINT 145 (2000). Max Planck Institute for the History of Science. <<http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Preprints/P145.PDF>>. 24/04/2011.

In Kapitel 6 und 7 des Fünften Buches „*Nikomachische Ethik*“,⁴ in dem von Aristoteles die Verteilungsgerechtigkeit analysiert wird, bezieht sich Aristoteles direkt auf die Verhältnistheorie von Euxodo, auf die Methode der doppelten Reduzierung bis zum Absurden,⁵ und so wird indirekt auf die Verteilungsgerechtigkeit und auf das Hebelgesetz hingewiesen. Tatsächlich nutzt die aus der Verhältnistheorie entstandene Analogie verschiedene Definitionen und Sätze aus *Euclides Elementen*, inklusive des Satzes V-12. Die im Text vorgestellte Definition des Gerechten, als jener, die das Verhältnis uneben macht, ist ähnlich der Nutzung der Methode der doppelten Reduzierung zum Absurden von Euxodo, um einige Gesetzmäßigkeiten des Buches XII von *Euclides Elementen* zu beweisen.

Was die indirekte Hinweis auf das Hebelgesetzes in „*Nikomachische Ethik*“ sowie in dem Buch „*Politik III 9-13*“ betrifft, schlägt Aristoteles vor, dass die öffentlichen Stellen so unter den Menschen aufgeteilt würden, dass die Vorteile dieser Stellen ein direktes Verhältnis zum Verdienst jeder dieser Menschen sei. In dem Buch „*Politik*“ assoziiert Aristoteles diesen Verdienst der politischen Tugend, die sich als die Teilnahme der Person im Sinne des Gemeinwohls übersetzt ließe. Wenn man berücksichtigt, dass die politische Tugend an sich umgekehrt proportional dem von privaten Beziehungen kommenden sozialen Wohle darstellt, soll diese Tugend, je nach Aristoteles Theorie, auch umgekehrt proportional dem Wohle der öffentlichen Ämter sein, genau wie es bei der gleichgewichtigen Waage geschieht. Die Verteilungsgerechtigkeit wäre, wenigstens zum Teil, eine Kompensierung. In dem Buch „*Mechanische Probleme*“, dass Aristoteles zugewiesen wird, formuliert er ausdrücklich das Hebel-Waage Modell. Aber die geschichtlichen Studien erlauben noch nicht die Annahme, dass dieser Philosoph das Hebelgesetz kannte, wie es von Archimedes dargestellt wurde.⁶

IV. Teilungsgerechtigkeit bei teilbaren Güter

Als zu Beginn der Zivilisation die Menschen zum Fischen gingen und vorher vereinbarten, den Fischfang gerecht zu teilen, wurden der Vertrag und der Sozialpakt geboren, wodurch die Voraussetzung der Teilung als Prämisse geschaffen wurde. Und welches war der Vorgang für eine Aufteilung? Der Division-Algorithmus, der einzige Vorgang, der als elementarstes Verfahren die Verteilung, das heißt, die Teilung aller Gegenstände eines nach dem anderen, beinhaltet, bis alle Gegenstände m unter allen Personen n bis auf einen sehr kleinen

⁴ Aristoteles. *Nikomachische Ethik* - *Êthika nikomacheia*: Deutsche Übersetzung von Adolf Lasson (1909).

⁵ Euclid's Elements, V, XII <<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookX/bookX.html>>. 12/04/2011.

⁶ Jürgen Renn; Peter Damerow; Peter McLaughlin. *Aristóteles, Arquímedes y los orígenes de La mecánica: perspectiva desde la epistemología histórica* (lecture version) <[http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/Arquimedes/Renn_AristotelesOrigenesMecanica\(esp\).pdf](http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/Arquimedes/Renn_AristotelesOrigenesMecanica(esp).pdf)>. 20/04/2011.

verbleibenden Rest (von 0 bis n-1), aufgeteilt sind. Die Notwendigkeit einer absoluten Teilung, führte folglich zum Begriff der Bruchzahl oder rationalen Zahl, die Jahrhunderte als der größte numerische Satz bezeichnet wurde. Vor Pythagoras Tod wurde zu Unrecht geglaubt, dass jede endliche Zahl in der Menge einer gleichen Größenordnung immer *messbar* sei. Die Existenz eines Restes, der größer als Null ist, führt zu großen Schwierigkeiten bei der praktischen Anwendung des Aufteilungsverfahrens, dass das Recht in allen seinen Verzweigungen gut charakterisiert. Sehen wir nun was das brasilianische Zivilgesetzbuch Von 2002 zu diesem Thema sagt.

Art. 2.017. No partilhar os bens, observar-se-á, quanto ao seu valor, natureza e qualidade, a maior igualdade possível.

Art. 2.019. Os bens insuscetíveis de divisão cômoda, que não couberem na meação do cônjuge sobrevivente ou no quinhão de um só herdeiro, serão vendidos judicialmente, partilhando-se o valor apurado, a não ser que haja acordo para serem adjudicados a todos.

§ 1º Não se fará a venda judicial se o cônjuge sobrevivente ou um ou mais herdeiros requererem lhes seja adjudicado o bem, repondo aos outros, em dinheiro, a diferença, após avaliação atualizada.

§ 2º Se a adjudicação for requerida por mais de um herdeiro, observar-se-á o processo da licitação.

(Art. 2'017

Bei der Verteilung der Güter ist auf grösstmögliche Ausgeglichenheit hinsichtlich des Wertes, der Natur und der Qualität zu achten.

Art. 2'019

Die Güter, die einer einfachen Teilung nicht zugänglich sind und nicht in die Hälfte des überlebenden Ehegatten oder in den Erbteil bloss eines Erbens Platz finden, sind richterlich zu veräussern, es sei denn es besteht darüber Einigkeit, dass sie allen zufallen sollen; Der Erlös ist zu verteilen.

1. § Von der richterlichen Veräusserung ist abzusehen, falls der überlebende Ehegatte oder einer oder mehrere Erben die Zuweisung der Sache verlangen und die sich nach aktueller Schätzung ergebende Differenz mit Geld den übrigen ausgleichen.

2. § Falls mehr als ein Erbe die Zuweisung an ihn verlangt, sind die Regeln über den streitigen Prozess zu befolgen).

Es wird darauf hingewiesen, dass im Zivilgesetz alle möglichen Wege zur wirksamen Teilung gegeben sind. So wurde mittels des Zivilrechtes das mathematische Ideal der Teilung in die juristische Welt integriert und so dass auch unteilbare Güter in teilbare umwandeln können. Es gibt aber noch andere Werte, wie Herkunft, der emotionale Wert oder die Qualität, der zu teilenden Güter. Dies bedeutet, dass die juristische Aufteilung Werturteile, die Menschen über

Güter fällen, entsprechen sollte. Wenn die aufzuteilenden Güter, wie im Falle des Geldes, teilbar sind, sind die subjektiven Werte von geringer Relevanz. Angelehnt an die obige Darstellung sind die mathematischen Algorithmen mit der Teilung von teilbaren Gütern verbunden (von Banach-Knaster, Selfridge-Conway und Taylor-Brams).⁷

Theorem 1 (Banach-Knaster): Nimmt man ein Gut B der gesamten Menge $\#(B)$. B kann folglich so zwischen n Personen aufgeteilt sein, so dass keiner dieser Personen annimmt, dass einer von ihnen einen geringeren Menge $\frac{\#(B)}{n}$ erhalten hat.

Theorem 2 (Selfridge-Conway): Unter drei Personen soll ein teilbares Gut so unter allen dreien in einer Weise aufgeteilt werden, dass jeder einzelne annimmt, dass er einen größeren oder gleichen Teil wie je die zwei anderen erhalten hat.

DEFINITION 1 (Befreiung des Neides). In einem Teilungsvorgang, bezeichnet man denjenigen einer Parteien als *neidisch*, der meint, dass die andere Partei bei der Teilung mehr bekommen hat als er. Man bezeichnet eine Aufteilung als Neidbefreit, wenn es nach der Teilung keine neidischen Parteien gibt.

Im Jahre 1995 haben Brams und Taylor das Selfridge-Conway-Theorem für eine beliebige Anzahl von Menschen verallgemeinert. Aus der Sicht der Rechtswissenschaften stellen die Theoreme von Banach-Knaster und Brams Taylor ein ideales Konsensmodell dar, doch gilt dies nicht für Prozess- und Schiedsverfahren, Phänomene welche die Aufteilung voraussetzen, aber viel zu komplex sind, da sie einen besonderen Vermittler, den Richter, bedürfen. In der klassischen Theorie ist der Richter im Besitz seines *Willens*, jemand der durch die aktive Vermittlung einer Aufteilung, sich nach dem erfolgreich abgeschlossenen Teilungsprozess darüber bewusst ist, dass alle Parteien die gleichen Anteile, mit allen Ausgleichungen bezüglich der Teilung bekommen haben. Genauer betrachtet, handelt es sich bei dem aufzuteilenden Gut um einen Komplex von Gütern, Werten und Pflichten, die als positiv oder negativ bezeichnet werden. Unabhängig von der Art des Verfahrens, ergibt sich immer eine Aufteilung in Krediten oder Schulden.

DEFINITION 2 (Juristische- oder Schiedsaufteilung und der Richter). Eine *juristische Aufteilung* ist jene, die von verschiedenen Parteien, mit Hilfe eines Vermittlers, dessen Gewinne nicht Teil der aufzuteilenden Güter sind, vorgenommen wird. Dieser "Vermittler" wird *Richter* genannt.

⁷ Steven J. Brams and Alan. D. Taylor. *An Envy-Free Division Protocol*. AMS, Vol. 102, N° 1, Jan.1995: 9-18.

V. Das Problem der Unparteilichkeit des Richters und der Staatsanwaltschaft

In der obigen Darstellung kann man erkennen, dass jede Lösung eines juristischen Problems sich auf die Teilbarkeit von Gütern bezieht. Das Theorem nach Brams-Taylor besagt auch, dass ein Richter nicht nur für die gerechte Aufteilung, sondern auch für eine von Neid befreite Lösung, notwendig ist. Aber warum ist in diesem Fall in Praxis ein Richter notwendig? Ist er eine unnötige Zumutung des Staates? Ganz sicher, ja, falls wir in einer Gesellschaft leben würden, die ausschließlich aus perfekten rationalen und „Goodwill“-besitzenden Wesen bestünde. Der Komplex von Gütern, Werten und Pflichten, geregelt durch gesetzliche Vorschriften, sollte mit dem kleinstmöglichen Grad an Ermessen durch die juristische Entscheidungen gefällt werden. Ansonsten würde man riskiert, Richter dazu zu veranlassen, bei Rechtsstreitigkeiten Partei zu ergreifen und somit parteiisch bei der Aufteilung der Güter zu handeln, um sich an diesen mit zu bereichern.

Die Analyse der Vorgehensweisen des Selfridge-Conway und Brams-Taylor Theoreme zeigen uns, dass es wenigstens für eines der Parteien der Aufteilung, nämlich derjenige, der die erste Teilung vollzieht, die Überzeugung vorhanden ist, dass alle Beteiligten gleichgroße Teile bekommen haben. Die gleiche Analyse zeigt uns auch, dass das Akzeptieren dieser Überzeugung für einen Außenstehenden möglich ist und dies auch bei einer einfachen Aufteilung mit nur zwei Parteien. Für uns ist dies die mathematische Darstellung der Unmöglichkeit eines unparteilichen Richters, der nicht ein Beteiligter der Aufteilung ist. Zusammenfassend kann man sagen, falls der Richter nicht am Verfahren teilnimmt (auf der Suche nach der Aufteilung zu gleichen Teilen), kann er nicht davon überzeugen sein, dass alle gleichgroße Teile erhalten. Also bleibt die folgende paradoxe Situation bestehen: Der Richter soll einer der Beteiligten der Aufteilung sein, doch seine Gewinne dürfen nicht Teil der Aufteilung sein.

Das oben beschriebene Paradox könnte mit der Verteilungstheorie gelöst werden, basierend auf dem Grundsatz von Brams-Taylor :

Nehmen wir an $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, \vec{p}_n$ seien die Teilnehmer einer Verteilung des Gutes B und \vec{p}_n stellt die Staatsanwaltschaft dar. (Hier vektoriell dargestellt, um zu zeigen, dass er der Repräsentant einer k- upla von Personen ist).

Der Richter soll sich wie ein zusätzliches Mitglied entsprechend der Ordnung $n + 1$ einbringen, so sei der Richter der p_{n+1} .

Dann machte er die Verteilung des Gutes B durch die $n + 1$ Teilnehmer, einschließlich für sich, in Übereinstimmung mit dem Protokoll von Brams-Taylor.

Dann führt der Richter die Verteilung des Gutes B für die $n + 1$ Teilnehmer einschließlich für sich selber in Übereinstimmung nach den Regeln von Brams-Taylor⁸ durch, und danach erfolgt die kompensatorische Aufteilung, so dass jeder den gleichen Teil der Aufteilung erhält $\frac{\#(B)}{n+1}$ der jeweiligen erneuten Teilung $\#(B)$.

Im Folgenden, in einer zweiten Etappe, „spendet“ der Richter seinen ersten Teil p_{n+1} für die zweite Teilung $\frac{\#(B)}{n+1}$ zwischen den $n + 1$ Mitgliedern, einschließlich für sich selbst.

Bei dieser zweiten Teilung bekommt jeder vom $n + 1$ Teilnehmern folgenden Anteil $\frac{\#(B)}{(n+1)^2}$. Nach mathematischen Regeln der Induktion erhält nach der s -ten Verteilung bekommt jeder Teilnehmer einen Anteil von $\frac{\#(B)}{(n+1)^s}$. Für den Richter bleibt auch der betreffende letzte minimale Anteil und für die andern n Teilnehmer eine Summe von $\sum_{i=1}^s \frac{\#(B)}{(n+1)^i}$, die, wie wir wissen, der Gleichung der Theorie der geometrischen Reihen $\frac{\#(B)}{n} [1 - \frac{1}{(n+1)^s}]$ entspricht.

Wenn s steigt geht der Anteil des Richters gegen Null und der Anteil der anderen Teilnehmer konvergiert gegen $\frac{\#(B)}{n}$.

Es ist immer zu beachten, dass die Kompensationen, die der Richter durchführte, nach juristischen festgelegten Normen erfolgt. Die juristischen Verteilungen - in Einklang mit den festgelegten obigen Theorien - ist eine Sequenz, die man mit $n = 1$ nur einem Teilnehmer anwenden kann. In der Theorie ist die Staatsanwaltschaft immer Teil der Teilung. Eine mögliche Verteilungsgerechtigkeit, wie sie oben beschrieben wurde, entspricht folgender Gleichung: $1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^i}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Der Richter wird nie die Sicherheit haben, dass er die Aufteilung perfekt durchgeführt hat. Aber er kann sich sicher sein, dass er der perfekten Aufteilung so nah wie möglich gekommen ist. In Praxis, ist der fast „ideale“ Richter möglich, sofern er „Goodwill“ besitzt. Unser Modell verwirft jedoch auch nicht ganz die Möglichkeit des „Maschinen-Richters“, welcher schon durch die Theoreme der Unvollständigkeit von Gödel in den gleichzeitigen logischen Hypothesen der Vollständigkeit und Konsistenz verworfen wurde.⁹ Wäre die Rechtsgrundlage tatsächlich widerspruchlos und genügend gut strukturiert damit der Aufbau eines Algorithmus möglich wäre, könnte das obige Modell dazu entwickelt werden, einen „Maschinen-Richter“, betreffend des Aufteilungsverfahrens der Fälle die durch das

⁸ Brams und Taylor (note 7).

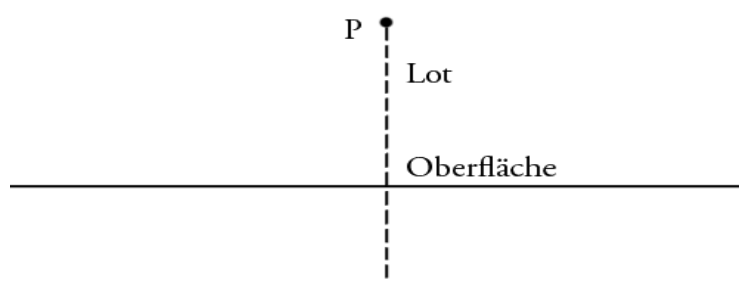
⁹ FEFERMAN, Solomon. *The nature and significance of Gödel's incompleteness theorems*. Gödel Centenary Program. Institute for Advanced Study, Princeton, Friday, Nov. 17, 2006: 7-15
<<http://math.stanford.edu/~feferman/papers/Godel-IAS.pdf>>. 15/04/2011.

normative System gedeckt sind, „zu erstellen“. Bei der Analyse und der Überzeugung wird die Wahrhaftigkeit und (oder) die Plausibilität bei der Beweisführung höchstwahrscheinlich erreicht.

In engem Zusammenhang mit dem oben dargestellten Problem stehen auch die Aktivitäten der Staatsanwaltschaft. Genauso wie das ganze Universum nur der einzige rechtmäßige Gegenstand der Physik ist, bildet entsprechend die Gesamtheit der Gesellschaft den einzigen rechtmäßigen Gegenstand der juristischen Wissenschaften. In einem Rechtsstreit werden, in letzter Instanz, in größerem oder kleinerem Grad, die Güter, Werte und Interessen von allen Menschen aufgeteilt. Genau wie in der Physik, wird zur Vereinfachung der Studien eine Idealisierung durchgeführt, so dass die kleinen Interessen, der nicht im Fall verwickelten Menschen, (Träger von aktiver und/oder passiver Legitimität) ausgeschlossen werden. Diese Interessen werden einem speziellen staatlichen Organ übertragen und zwar der Staatsanwaltschaft. In der folgenden Ausführung sollen die juristischen Überlegungen auf die Mathematik übertragen werden.

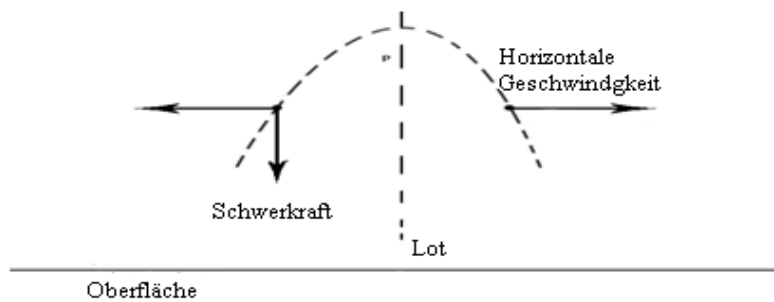
VI. Die ebene Verteilung von Partikeln als Generalisierung des Hebels

Nehmen Sie an, dass ein Partikel, der in der Nähe der Erdoberfläche am Punkt P ruht, sich durch innere Kräfte in zwei Partikel teilt, so dass die Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Subpartikel dem Lot senkrecht entsprechen (Figur 2). Bevor diese beiden Subpartikel



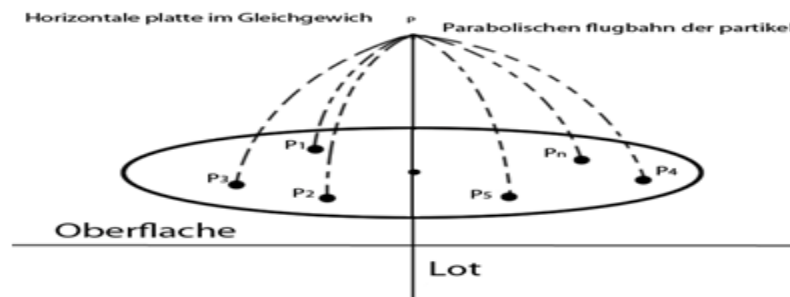
Figur 2. Partikel

den Erdboden erreichen, werden sie koplaneare parabolische Flugbahnen beschreiben, wobei ein waagerechter Hebel, dessen Mittelpunkt sich auf der durchgehenden senkrechten Linie befindet, gleichzeitig von beiden Subpartikeln getroffen wird und in waagerechter Richtung das Gleichgewicht behält. Dieses Ergebnis wird wegen des Prinzips der Impulserhaltung



Figur 3. Koplaneare parabolische Flugbahnen

erreicht. Das ist ein Indiz dafür, dass sich jede materielle Zerteilung, die durch innere Kräfte und in einem Feld mit einheitlichen Stärken erfolgt dem Hebelgesetz gehorchend entwickelt, sei es in der Beziehung zwischen den Massen der Subpartikel und deren Geschwindigkeit oder zwischen den Massen der Subpartikel und deren jeweiligen Entfernungen zur Senkrechten Linie, die den Mittelpunkt beinhaltet. Ein ähnliches Ergebnis erhält man durch die Teilung einer Partikel in eine beliebige Anzahl von Subpartikeln in dem man waagerechte Hebel durch waagerechte horizontale ebene Scheiben ersetzt. Unabhängig davon in welchem Zeitmoment die Subpartikel vor dem Erreichen des Bodens auf einer waagerechten festen Scheibe, die in ihrem Zentrum ausgelotete wurde, aufprallen, werden diese den Gleichgewichtszustand der Scheibe nicht stören (Figur 4).



Figur 4. Gleichgewichtszustand der Scheibe

Diese Mittel der materiellen Teilung richten sich nach der Menge der Materie der Subpartikel und deren anfänglichen Geschwindigkeiten. Es handelt sich um Gesetzmäßigkeiten, die den physischen Prinzipien des klassischen Determinismus folgen und die räumliche Lage der Subpartikel im Laufe der Zeit bestimmen. Bei einer beliebigen Teilung des Partikels legt die Natur, dem Prinzip der Impulserhaltung folgend, dem Zustand der anfänglichen Geschwindigkeit Einschränkungen auf. In die gleiche Weise, erlegt das Prinzip der Gerechtigkeit den unterschiedlichen Eigenheiten der Parteien, die in einem Aufteilungsverfahren ein Gut erhalten, betreffende Einschränkungen auf. Nimmt man im

ersten Fall, unabhängig von der Anzahl der Subpartikel - ein Paar der Subpartikel – variiert die Masse von jeder dieser Subpartikel auf lineare Weise mit der anderen, wobei die Koeffizienten die Geschwindigkeiten sind. Im zweiten Fall variiert die Menge, der an beide Parteien verteilten Güter, auf lineare Weise mit der anderen, wobei die Koeffizienten die Messungen als relevant bezeichnete “Größe” der Teile der Aufteilung ist.

Mit den oben erläuterten Aspekten ist klar, dass die ebene Verteilung von Partikeln einer gleichen Massenquelle ein mehrteiliges Modell für die aristotelische Verteilungsgerechtigkeit darstellt; genauso wie der gleichgewichtige Hebel es für die Aufteilung von zwei Teilen darstellt. Im Fall des Hebels, kommt es zu einer Neigung des Hebels im Bezug auf seine waagerechte Lage, wenn eine Ungerechtigkeit vorkommt. Im mehrteiligen Fall erfolgt eine Neigung der Scheibe, wenn eine Ungerechtigkeit vorkommt. Damit eine ebene Verteilung von Partikeln der gleichen Quelle das Gleichgewicht der Scheibe stört, ist ein Einfluss von äußeren Kräften auf die Partikel notwendig, sei es von einer radialen, tangentialen Richtung oder beider dieser Richtungen ausgehend. Die Aktion in der radialen Richtung würde, in Analogie mit der juristischen Aufteilung, der Erhöhung oder Erniedrigung des für die Aufteilung relevanten Größenmaßstabes entsprechen. In der tangentialen Richtung würde die Entfernung oder Annäherung der einzelnen Parteien einem Kriteriums entsprechen - genau wie in der Politik, wo die Vereinigung den größtmöglichen Ausgleichs erzeugt, die Vetternwirtschaft dagegen bringt die Verwaltungen der Organisationen aus dem Gleichgewicht.

Ein großes Problem der praktischen Anwendung der Verteilungsgerechtigkeit ist die Wahl des Grades an Relevanz, die die verschiedenen Größenordnungen, bezüglich der Merkmale der Teile, in der Aufteilung haben sollten. Diesem Problem haben sich Richter und Gesetzgeber, durch das Aufopfern der Rationalität und dem Nutzen eines hohen Grades von Ermessung, gestellt. In Analogie mit den Theoremen von Banach-Knaster und Taylor-Brams, stellt die Entwicklung eines Aufteilungsprotokolls dieser Relevanzgrade, die gleichzusetzten sind mit einer Auswahl der Gewichte eines gewogenen Durchschnittes, ein mathematisches Problem mit starken Anwendungen in den juristischen und politischen Wissenschaften dar. Sogar im hypothetischen Fall, in dem die Einrichtung eines Protokolls nicht möglich wäre, bliebe immer noch die Möglichkeit eines Versuches, diese Aufteilung in ein Spiel zu verwandeln, dass zu einem Gleichgewicht oder einem endlichem sequentiellen Vorgang führt.

Im statisch gerechten Fall der Aufteilung eines Gutes zwischen n Menschen, ohne die Beachtung von verwandtschaftlichen und freundschaftlichen Beziehungen, ergibt sich ein entsprechendes geometrisches und physikalisches Modell, das von Partikeln mit gleichen

Massen auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Vielecks senkrecht zum Lot steht. Wenn n gleich 2 ist, erreichen wir dann genau die kommutative aristotelische Gerechtigkeit und erhalten wir die normale Waage mit zwei Waagschalen. Im statischen Falle einer gleichmäßigen Aufteilung eines Gutes zwischen Personen (zwischen n Menschen), deren Merkmale innerhalb der gesellschaftlichen Gruppe, das heißt deren verwandtschaftliche und freundschaftliche Grade beachtet wurde, entsteht ein Modell, das bestimmt wird durch n Partikeln mit beliebiger Masse, die auf einer runden Scheibe liegen, und deren Dichte auf eine Weise gleichmäßig auf dem Lot zentriert ist, damit die Scheibe senkrecht im Bezug zum Lot steht. Diese Partikel, deren Dichte gleichmäßig auf dem Lot zentriert ist, balancieren in waagerechter Lage auf einer runden Scheibe.

VII. Schlussfolgerung

Auf Grund geschichtlicher Dokumenten, es nur einen Hinweis den Antiphon mit der Mathematik verbindet und zwar die Tatsache, dass er eine Methode der mathematischen Berechnung von Flächen und Volumen vorgeschlagen hat, die der Methode ähnelten, die er bei der Entwicklung der Verteidigung seiner Klienten in Gerichten anwendete. Die grundlegende Überzeugungstechnik von Antiphon war die Annäherung durch Plausibilität, welche die gleiche ist, die er bei der Entwicklung der Ausschöpfungsmethode verwendete. Die hier vorgetragenen Ideen stärken die unitäre These über Antiphons Identität und die geschichtliche Verbindung zwischen Mathematik und Jura.

Das Verteilungsrecht unterliegt den gleichen Prinzipien der Verhältnismäßigkeit des Hebelgesetzes. Sowohl bei dem Hebelgesetz und dem Gesetz der Verteilung kommt das Prinzip der Verhältnismäßigkeit vor; allerdings lässt sich durch historische Studien nicht Aristoteles Kenntnisse bezüglich des Hebelgesetzes nachweisen, und folglich auch nicht, dass zu seiner Zeit das Model der Verteilungsgerechtigkeit bereits angewendet wurde. Folglich, sowohl bei „Mechanischen Problemen“ aus auch bei der „*Nikomachische Ethik*“, lässt eine unbewusst Intuition vermuten, dass es bereits Hinweise durch Aristoteles auf das Hebelgesetz gab. Analog zu dem was Aristoteles vollbracht hat, ist es möglich, statische und dynamische Modelle, die die Waage und Aristoteles Hebel der Gerechtigkeit verallgemeinert, zu entwickeln.

Dank

Wir danken den Studenten Oannes de Oliveira Miranda, Liuhan Oliveira de Miranda, Lohans de Oliveira Miranda und Dr. Reinhild Roeder für die Vorschläge und Diskussionen.

Bibliographie

Antifonte. *Testemunhos, Fragmentos, Discursos*. Edição bilíngue. Prefácio e tradução: Luís Felipe Bellintani Ribeiro. São Paulo: Edições Loyola, 2008.

Aristoteles. *Nikomachische Ethik - Êthika nikomacheia*: Deutsche Übersetzung von Adolf Lasson (1909). München: GRIN Verlag GmbH, 2008.

Aristoteles. *Nikomachische Ethik*, übersetzt und herausgegeben von Ursula Wolf. Reinbek: Rowohlt, 2006.

Aristotle: *Minor Works. Mechanical Problems*. Translated by W. S. HETT. Loeb Classical Library. Harvard University Press, Cambridge, 1955.

Beckman, Petr. *Historia de (pi)*. Mexico: D. R. Libreria, AS de CV, 2006.

Brams, Steven J. and Taylor, Alan D. *An Envy-Free Division Protocol*. AMS, Vol. 102, N° 1, Jan.1995: 9-18.

Feferman, Solomon. *The nature and significance of Gödel's incompleteness theorems*. Gödel Centenary Program. Institute for Advanced Study, Princeton, Friday, Nov. 17, 2006.

Gil, Xavier Laborda. *De Retórica: la comunicación persuasiva*, 2005.

<http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaNumeroRevistaIU.visualiza&numeroRevista_id=634>.

Heath, Thomas Little. *The Works of Archimedes*. London: Cambridge University Press, 1897.

Heath, Thomas Little. *A History of Greek Mathematics*. Oxford: The Clarendon press, 1921.

Simplicius. *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates – Simplicius*, übersetzt und herausgegeben von Ferdinand Rudio. Leipzig: B. G. Teubner, 1907.

Adresse:

Loisima Barbosa Bacelar Miranda Schiess, Rua Prisco Medeiros, 1670, Teresina-Piauí / Brasil. E-Mail: loisima.schiess@gmail.com

Lossian Barbosa Bacelar Miranda, Rua Walter Martins, 991, Timon-Maranhão / Brasil. E-Mail: lossian@oi.com.br