

KERNE, SUPERSCHWERE ELEMENTE
UND HYPERKERNE
IN EINEM CHIRALEN $SU(3)$ -MODELL

Diplomarbeit

von

Wolf Christian Beckmann

aus Düsseldorf

Institut für Theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

September 1999

INHALTSVERZEICHNIS

1	EINLEITUNG	9
2	GRUNDLAGEN	13
2.1	Feldtheoretische Grundlagen	13
2.1.1	Der Lagrange-Formalismus	13
2.1.2	Bewegungsgleichungen relativistischer Fermionen und Bosonen	15
2.2	Symmetrien	18
2.2.1	Die chirale Symmetrie	18
2.2.2	Eigenschaften der chiralen Transformationen	20
2.2.3	Chirale Transformation von Mesonen	22
2.2.4	Mechanismen der Symmetriebrechung	24
2.3	Grundlegende Modelle	28
2.3.1	Das lineare Sigma-Modell	28
2.3.2	Das nichtlineare Sigma-Modell	33
2.3.3	Das Walecka-Modell	34
3	DAS CHIRALE $SU(3)$-MODELL	37
3.1	Grundlagen	38
3.1.1	Die Hadronen in linearer Darstellung	38
3.1.2	Transformation der Hadronen	39
3.1.3	Der Übergang zur nichtlinearen Darstellung	42
3.1.4	Die chiralen Invarianten	45
3.2	Die Lagrangedichte des nichtlinearen $SU(3)$ -Modells	46
4	GRUNDLAGEN ZU KERNEN	53
4.1	Mean-Field-Näherung	53

4.2	Pairing	54
4.3	Die Lösung der Bewegungsgleichungen	57
4.4	Die Observablen	60
4.4.1	Bindungsenergie und Separationsenergie	60
4.4.2	Observablen der Ladungsverteilung	61
5	DER FIT	65
5.1	Die χ^2 -Funktion	65
5.2	Powells Methode	67
6	ERGEBNISSE	69
6.1	Kerne	69
6.1.1	Die Fit-Observablen	70
6.1.2	Die Vakuum- und Kernmaterie-Eigenschaften nach dem Fit an Kerne	71
6.1.3	Die Parameter	72
6.1.4	Ladungsverteilungen	73
6.1.5	Was sagen uns die Einteilchenenergien?	77
6.1.6	Schalenabschlüsse und magische Kerne	80
6.1.7	Braucht man den ω^4 -Term wirklich?	86
6.1.8	Wie glaubwürdig ist ein Multiparameterfit?	88
6.2	Superschwere Elemente	91
6.2.1	Schalenabschlüsse	91
6.2.2	Ladungsverteilung und α -Zerfall	93
6.2.3	Möglichkeiten der Herstellung eines doppeltmagischen, su- perschweren Kerns	98
6.3	Hyperkerne	99
6.4	MEMOs	103
7	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	107
A	DAS NOETHER-THEOREM	111
B	DAS GOLDSTONE-THEOREM	113
C	DIE PCAC-RELATION	117

D	DIE GOLDBERGER-TREIMAN-RELATION	119
E	DIE VERWENDETEN MATRIZEN	121

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	<i>Potential ohne spontane Symmetriebrechung (a) und mit spontaner Symmetriebrechung (b)</i>	25
2.2	<i>Das Potential des linearen Sigma-Modells</i>	31
2.3	<i>Das explizit gebrochene Potential des linearen Sigma-Modells</i>	33
6.1	<i>Ladungsdichteverteilung von Sauerstoff für verschiedene Parametersätze im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	74
6.2	<i>Ladungsdichteverteilung von Kalzium im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	74
6.3	<i>Ladungsdichteverteilung von Blei im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	75
6.4	<i>Formfaktor von Sauerstoff im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	75
6.5	<i>Formfaktor von Kalzium im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	76
6.6	<i>Formfaktor von Blei im Vergleich zum Experiment [Vri87].</i>	76
6.7	<i>Einteilchenenergien der Neutronen in Blei</i>	78
6.8	<i>Einteilchenenergien der Protonen in Blei</i>	79
6.9	<i>Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit N=8 Neutronen und Isotope mit Z=8 Protonen. Es zeigt sich, daß ^{16}O ein doppeltmagischer Kern ist.</i>	81
6.10	<i>Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit N=20 Neutronen und Isotope mit Z=20 Protonen. Offenbar hat man bei 20 Protonen und bei 20 Neutronen einen Schalenabschluß.</i>	82
6.11	<i>Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit N=50 Neutronen und Isotope mit Z=50 Protonen. Man erkennt, daß ^{100}Sn doppelt magisch und stabil ist.</i>	83

6.12	<i>Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=50$ Neutronen und Isotope mit $Z=40$ Protonen. Der Kern ^{90}Zr ist interessant als Edukt bei der Produktion von superschweren Kernen mit $Z = 120$.</i>	84
6.13	<i>Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=82$ Neutronen und Isotope mit $Z=126$ Protonen. ^{208}Pb ergibt sich also als doppelt magisch.</i>	85
6.14	<i>Energie von Nukleonen und Antinukleonen. Links mit ω^4-Term, rechts ohne ω^4-Term</i>	87
6.15	<i>Ladungsdichteverteilung in ^{208}Pb in einem Modell mit (C1) und ohne (C1B) ω^4-Term.</i>	87
6.16	χ^2 -Landschaft für ein von zwei Parametern abhängiges χ^2	89
6.17	<i>Bindungsenergie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen -Gap für 172 Neutronen bzw. 120 Protonen. Magische Protonenzahl ist hier 120. 114 ist nur sehr schwach ausgeprägt und allenfalls eine Unterschale. Für die Neutronen hat man 172, 184 und 198 als Schalenabschlüsse.</i>	92
6.18	<i>Bindungsenergie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen -Gap für 184 Neutronen bzw. 120 Protonen. Man erhält im Bereich der Protonen 120 als magische Schale, während 114 weniger ausgeprägt ist. Für die Neutronen sind 172, 184 und 198 magische Schalen.</i>	94
6.19	<i>Struktur eines Bucky-Balls mit 60 α-Teilchen</i>	95
6.20	<i>Ladungsdichteverteilung in $^{292}120$. Auffällig ist die geringe Ladungsdichte im Innern des Kerns.</i>	95
6.21	<i>Energien des α-Zerfalls von $^{292}120$</i>	96
6.22	<i>Energien des α-Zerfalls von $^{293}118_{175}$</i>	97
6.23	<i>Einteilchen-Niveaus von Λ-Teilchen in verschiedenen Kernen. (Experimentelle Daten: [Aji95, Has96].)</i>	100
6.24	<i>Bindungsenergie von Λ-Baryonen in leichten Kernen</i>	101
6.25	<i>Kerne mit unterschiedlich vielen Λ</i>	102
6.26	<i>Hyperonen-Potentiale in Hyperonmaterie. Oben: Ξ-Teilchen in Ξ-Materie, Mitte: Λ-Teilchen in Λ-Materie, Unten: Nukleonen in Nukleon-Materie.</i>	104

KAPITEL 1

EINLEITUNG

„Alle Materie besteht aus Atomen“. Diese Vermutung wurde zum ersten Mal im 5. Jahrhundert v. Chr. von dem griechischen Philosophen Demokrit aufgestellt. Nach seiner Vorstellung waren Atome stofflich gleichartige Teilchen, die sich im leeren Raum bewegen und durch Vereinigung und Trennung alle Dinge im Universum bilden. Zu unterscheiden seien sie nur durch ihre Größe und Form.

Demokrits Idee hatte tatsächlich eine große Ähnlichkeit mit dem, was wir heute unter Atomen verstehen. Allerdings stellte sich heraus, daß sie keineswegs unteilbar sind, wie das griechische Wort vermuten läßt (*atomos* (griech.): unteilbar). Das Experiment, Alpha-Teilchen auf eine dünne Goldfolie zu schießen, welches von Rutherford um die Jahrhundertwende durchgeführt wurde, wies vielmehr darauf hin, daß im Atom positive Ladungen auf einen kleinen Bereich verteilt sind. Nach Rutherford besteht das Atom also aus einem positiv geladenen Kern, welcher von einer negativ geladenen Atomhülle umgeben ist. Diese Vorstellung ist bis heute aktuell, wurde aber durch spätere Untersuchungen verfeinert.

Die Herausforderungen der jüngeren Vergangenheit bestanden vor allem in der theoretischen Beschreibung des Atoms. Für die Hülle hat sich inzwischen die *Quantenelektrodynamik (QED)* etabliert, der zufolge die Elektronen über Photonen miteinander wechselwirken. Ursache der Kraft ist hier die elektrische Ladung. Der Kern ist kein elementares Teilchen, sondern seinerseits aus den sogenannten Nukleonen aufgebaut. In unserer normalen Umgebung sind das die Protonen und die Neutronen.

In Experimenten, welche Kerne miteinander reagieren ließen, wurde stets eine riesige Anzahl neuartiger Teilchen produziert. Aufgrund von Symmetrieüber-

legungen postulierten Gell-Mann und Zweig 1963, daß all diese Teilchen durch Kombination von drei fundamentalen Teilchen, genannt *Quarks*, dargestellt werden können. Aus dieser Überlegung wurde analog zur QED die Theorie der Kernkräfte, die *Quantenchromodynamik (QCD)*, entwickelt. Zwischen den beiden Theorien bestehen allerdings zwei wichtige Unterschiede. Erstens basiert die Kernkraft im Gegensatz zur elektromagnetischen Wechselwirkung auf einer dreipoligen Ladung, und zweitens tragen die Austauschteilchen der QCD selber Ladung und wechselwirken miteinander, während die Photonen elektrisch neutral sind. Daraus ergeben sich Komplikationen bei der Berechnung von Observablen, die bisher nicht gelöst sind. Bei der Untersuchung von Kernen kommt hinzu, daß man es mit einem Vielteilchenproblem zu tun hat, für welches ebenfalls noch keine Lösung gefunden wurde. Zur Berechnung von Kernobservablen ist also die QCD bis jetzt noch nicht geeignet.

Frühere Untersuchungen von Kernen wurden mit sehr einfachen Modellen durchgeführt, welche den Kern als Nukleonengas oder als Flüssigkeitstropfen betrachten. Inzwischen spielen die Mesonen-Feldtheorien hier eine wichtige Rolle. Man geht dabei von Nukleonen aus, welche durch "Mesonen" genannte Austauschteilchen miteinander wechselwirken. Solche Modelle berücksichtigen nur einen Teil der Einschränkungen, die durch die QCD vorgegeben werden, und haben deshalb immer eine große Zahl freier Parameter, welche an experimentelle Daten angepaßt werden müssen. Man ist natürlich bestrebt, die Zahl der Parameter so klein wie möglich zu halten, ohne dabei die Berechnung von Observablen unmöglich zu machen. Für das in dieser Arbeit verwendete Modell wurden zu diesem Zweck Symmetrieeigenschaften der QCD verwendet, allen voran die chirale Symmetrie. Es ist damit möglich, Kerneigenschaften wie die Bindungsenergie und Ladungsverteilungen zu berechnen. Alle bekannten Schalenabschlüsse können richtig beschrieben werden, und es lassen sich Vorhersagen in bisher experimentell nicht zugängliche Regionen des Periodensystems der Elemente machen. Da hier ein $SU(3)$ -Modell verwendet wurde, lassen sich auch Kerne mit seltsamen Baryonen, sogenannte Hyperkerne, untersuchen. Besonders interessant ist zur Zeit die Untersuchung superschwerer Kerne mit einer Kernladungszahl größer als $Z = 100$, da hier unter Umständen ein Bereich denkbar ist, in welchem die Kerne makroskopische Lebensdauer haben könnten. Die bisher bekannten superschweren Kerne leben nur den Bruchteil einer Sekunde.

In dieser Arbeit werden zunächst einige Grundlagen der Mesonen-Feldtheorie sowie die wichtigsten Konzepte der Symmetrien besprochen. Sie werden anhand einfacher Modelle eingeführt.

In Kapitel 3 wird dann das hier verwendete chirale Modell vorgestellt.

Es folgt eine Darstellung der wichtigsten Kerneigenschaften und der verwendeten Näherungen. Nach einer Beschreibung der Routine zur Anpassung der freien Parameter an die experimentellen Daten folgen in Kapitel 6 die Ergebnisse. Hier werden zuerst die bekannten Kerne untersucht sowie einige Bemerkungen zur Anpassung der Parameter und Besonderheiten des Modells gemacht. Anschließend werden die Ergebnisse zu superschweren Kernen und Hyperkernen vorgestellt.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels zeigt die Probleme des Modells bei der Beschreibung von Objekten auf, welche nur seltsame Baryonen enthalten.

KAPITEL 2

GRUNDLAGEN

In diesem Kapitel werden zuerst einige feldtheoretische Grundlagen dargestellt, die das Verständnis der behandelten Modelle erleichtern sollen. Es folgt eine Einführung in Symmetrien und anschließend eine Beschreibung der grundlegenden Modelle.

2.1 Feldtheoretische Grundlagen

Um die formale Struktur des in dieser Arbeit verwendeten Ansatzes verstehen zu können, sind einige Vorkenntnisse zur feldtheoretischen Beschreibung von Elementarteilchen nötig. Im folgenden Kapitel soll deshalb zuerst der Lagrange-Formalismus erläutert werden, um dann die Einbeziehung der Felder in das Modell erklären zu können.

2.1.1 Der Lagrange-Formalismus

In der klassischen Mechanik ist die Bewegung eines Systems von Punktteilchen, das insgesamt f Freiheitsgrade hat, durch die Angabe seiner generalisierten Koordinaten $q_i(t)$ und Geschwindigkeiten $\dot{q}_i(t)$ zur Zeit t bestimmt ($i = 1, \dots, f$), wenn die Bewegungsgleichungen bekannt sind. Die Wirkung S , die dem System bei seiner Bewegung zwischen den Zeitpunkten t_1 und $t_2 > t_1$ zukommt, ist

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) \quad , \quad (2.1)$$

wobei $L = T - U$ die aus kinetischer (T) und potentieller Energie (U) gebildete Lagrangefunktion ist.

Das *Hamiltonsche Prinzip* besagt nun, daß die vom System tatsächlich durchlaufene Trajektorie diejenige ist, für welche die Variation der Wirkung verschwindet, also $\delta S = 0$. Dies führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Bewegung des klassischen Systems,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Ist also die Lagrangefunktion L bekannt, hat man mit den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen des Systems.

In der (klassischen) Feldtheorie kann man ganz analog vorgehen. Ein physikalisches Feld $\Phi^A(\vec{x}, t)$ kann hier (bei nichtrelativistischer Betrachtung) aufgefasst werden als Grenzfall eines Systems $\Phi_i(t)$ mit unendlich vielen Freiheitsgraden, wobei der Index $i = (A, \vec{x})$ über alle unabhängigen Komponenten des Feldes und seiner räumlichen Koordinaten \vec{x} läuft. Die Lagrangefunktion hängt natürlich nicht von der speziellen Wahl der verallgemeinerten Koordinaten ab und deshalb auch nicht explizit von den Indizes i . Einer Summation über \vec{x} entspricht dabei eine Integration über den gesamten Raum.

In der kovarianten Formulierung geht man nun davon aus, daß die Feldgröße $\Phi^A(x)$ im Raumzeit-Punkt x^μ gegeben ist. Hier entspricht also x^μ der Zeit im klassischen Fall, $\Phi^A(x)$ den generalisierten Koordinaten und die Ableitungen von $\Phi^A(x)$ nach x^μ den generalisierten Geschwindigkeiten. Damit ist die Wirkung, die der Bewegung des Feldes von einer Konfiguration auf der raumartigen Hyperfläche Σ_1 zu einer anderen Konfiguration auf der raumartigen Hyperfläche Σ_2 zukommt, gegeben durch

$$S(\Sigma_1, \Sigma_2) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi^A(x), \partial\Phi^A(x)) \quad . \quad (2.3)$$

Dabei ist \mathcal{L} die Lagrangedichte des Feldes, auch *Lagrangian* genannt. $\Omega \subseteq M_4$ ist das von den beiden Hyperflächen Σ_1 und Σ_2 eingeschlossene Volumen im Minkowski-Raum. Die Feldgleichungen ergeben sich analog zur Mechanik durch Anwendung des Hamiltonschen Prinzips als

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A(x))} = 0 \quad . \quad (2.4)$$

2.1.2 Bewegungsgleichungen relativistischer Fermionen und Bosonen

Man kann sich nun überlegen, wie die Bewegungsgleichungen und Lagrangedichten der verschiedenen im Modell vorkommenden Teilchen aussehen müssen. An die Gleichungen sind folgende Anforderungen zu stellen:

- Es existiert eine Wellenfunktion, die das physikalische System beschreibt. Sie ist eine Funktion der klassischen Freiheitsgrade und aller auftretenden Quantenzahlen.
- Die Gleichungen müssen kovariant sein.
- Im freien Fall sind ebene Wellen die Lösungen.
- Die Gleichungen müssen linear sein, damit das Superpositionsprinzip gilt.

Durch welche Gleichung ein Teilchen letztendlich beschrieben wird, hängt von seinem Spin ab. Im Standardmodell sind elementaren Teilchen die Leptonen

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

und die Quarks

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} .$$

Sie besitzen Spin 1/2 und wechselwirken über Eichfelder miteinander. Aus den Quarks lassen sich nun zusammengesetzte Teilchen konstruieren, wie zum Beispiel die Mesonen (Spin 0) und Baryonen (Spin 1/2). Darüber hinaus gibt es die ω - und die ρ -Mesonen (Spin 1). Massive Punktteilchen mit Spin 0 werden durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben, Teilchen mit Spin 1/2 durch die Dirac-Gleichung und solche mit Spin 1 durch die Proca-Gleichung.

Die Klein-Gordon-Gleichung

Das einfachste Feld, das in ein Modell zur Beschreibung hadronischer Materie eingeht, ist das ungeladene skalare Mesonenfeld, im folgenden $\sigma(x, t)$ genannt. Es hat den Spin 0 und wird deshalb durch die Klein-Gordon-Gleichung beschrieben. Diese geht hervor aus der relativistischen Energie-Impulsbeziehung

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad \text{oder} \quad p^\mu p_\mu - m^2 = 0 \quad (2.5)$$

Ersetzt man den klassischen Impuls durch den quantenmechanischen Operator

$$p_\mu \rightarrow i\partial_\mu \quad , \quad (2.6)$$

so erhält man die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\sigma(x, t) \equiv (\square + m^2)\sigma(x, t) = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Sie erfüllt die oben gestellten Bedingungen und läßt sich aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m^2 \sigma^2) \quad (2.8)$$

über das Hamiltonsche Prinzip (2.4) ableiten.

Die Dirac-Gleichung

Ein grundlegender Bestandteil jedes Modells zur Beschreibung von Kernen müssen natürlich die Baryonen sein. Sie sind Fermionen mit Spin 1/2 und werden folglich durch die Dirac-Gleichung beschrieben. Die Dirac-Gleichung wurde als relativistisch kovariante Gleichung mit positiv definiter Wahrscheinlichkeitsdichte entwickelt. Um die Kovarianz zu gewährleisten, müssen Zeit- und Ortsableitung im gleichen Grad auftreten. In der Dirac-Gleichung treten deshalb nur erste Ableitungen auf. Sie hat die Form:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0 \quad , \quad (2.9)$$

wobei die γ_μ 4×4 Matrizen wie z.B.

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

sind. Die Wellenfunktion ψ muß damit ein Vierer-Spinor sein, wobei σ_i für die die Pauli-Matrizen steht. Die γ_μ hängen nicht vom Ort ab, damit alle Punkte der Raumzeit äquivalent sind. Die Lagrangedichte, die mit (2.4) zur Diracgleichung führt, ist durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu - m \right) \psi \quad (2.11)$$

gegeben, mit $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ als adjungiertem Spinor. Für das adjungierte Feld erhält man die Gleichung

$$\bar{\psi} \left(-i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu + m \right) = 0 \quad . \quad (2.12)$$

Antisymmetrisiert hat die Lagrangedichte folgende Form:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu \bar{\partial}^\mu - i\gamma_\mu \overleftarrow{\partial}^\mu \right) - m \bar{\psi} \psi \quad . \quad (2.13)$$

Die allgemeine Lösung der Dirac-Gleichung lautet:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \left[u(p, s) e^{-ipx} + v(p, s) e^{ipx} \right] \\ \psi^\dagger(x) \gamma_0 &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=\pm 1} \int d^3p \left[\bar{u}(p, s) e^{ipx} + \bar{v}(p, s) e^{-ipx} \right] \quad , \end{aligned} \quad (2.14)$$

wobei $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ ist. Die Spinoren $u(p, s)$ und $v(p, s)$ sind die Lösungen der Dirac-Gleichung für positive bzw. negative Energie.

Die Proca-Gleichung

Die Proca-Gleichung beschreibt massive Teilchen mit Spin 1. Die Lagrangedichte, die zu ihrer Bewegungsgleichung führt, sieht wie folgt aus:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \quad , \quad (2.15)$$

mit $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$. Durch Einsetzen in die Lagrangegleichung (2.4) ergibt sich daraus die Proca-Gleichung:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2 \right) \omega_\mu - \partial_\mu \partial^\nu \omega_\nu = 0 \quad . \quad (2.16)$$

Betrachtet man nun die Divergenz dieser Gleichung

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2 \right) \partial^\mu \omega_\mu - \partial^\mu \partial_\mu \partial^\nu \omega_\nu = 0 \quad , \quad (2.17)$$

so sieht man, daß

$$m_\omega^2 \partial^\mu \omega_\mu = 0 \quad (2.18)$$

gelten muß, womit sich die Proca-Gleichung effektiv auf vierkomponentige Klein-Gordon-Gleichungen

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m_\omega^2 \right) \omega_\nu = 0 \quad (2.19)$$

reduziert.

2.2 Symmetrien

Um Eigenschaften endlicher und unendlicher Kernmaterie berechnen zu können, müßte man eigentlich die Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) lösen. Bisher ist das nicht möglich, und so ist man darauf angewiesen, allgemeine Eigenschaften der QCD zu betrachten. Es ist dann möglich, eine einfachere Lagrangedichte aufzustellen, welche diese Eigenschaften erfüllt, aber trotzdem noch Berechnungen von Observablen zuläßt.

Symmetrien bilden hier eine interessante Möglichkeit. Es läßt sich leicht überprüfen, ob ein Modell oder eine Theorie symmetrisch bezüglich der Anwendung einer bestimmten Transformation ist. Es können dann Regeln für die Konstruktion von Invarianten aufgestellt und aus ihnen ein Modell aufgebaut werden. In unserem Fall sind die wichtigsten Symmetrien, die in das Modell eingehen, die Lorentz-Invarianz und die chirale Symmetrie. Letztere ist näherungsweise eine Eigenschaft der QCD für den Fall, daß die Massen der Quarks verschwinden.

2.2.1 Die chirale Symmetrie

Die chirale Symmetrie ist die Invarianz gegenüber der sogenannten vektoriellen Transformation

$$\Lambda_V : \quad \psi \longrightarrow e^{-i\theta_a \hat{G}^a} \psi(x) \quad (2.20)$$

und der axialen Transformation

$$\Lambda_A : \quad \psi \longrightarrow e^{-i\gamma_5 \theta_a \hat{G}^a} \psi(x) \quad . \quad (2.21)$$

Die Operatoren \hat{G}^a stehen hierbei für die Generatoren der zugrundeliegenden Gruppe. Die θ_a sind die Parameter der Transformation. Entwickelt man die Exponentialfunktion für kleine θ_a , also

$$\theta_a \approx \delta\theta_a \quad ,$$

so erhält man für die infinitesimalen Transformationen

$$\Lambda_V : \quad \psi \longrightarrow (1 - i\delta\theta_a \hat{G}^a) \psi \quad (2.22)$$

$$\Lambda_A : \quad \psi \longrightarrow (1 - i\gamma_5 \delta\theta_a \hat{G}^a) \psi \quad . \quad (2.23)$$

Für die Felder $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ ergeben sich die chiralen Transformationen durch hermitesche Transformation von Gl.(2.20) und Gl.(2.21):

$$\Lambda_V : \quad \psi^\dagger \quad \longrightarrow \quad \psi^\dagger e^{+i\theta_a \hat{G}^a} \quad (2.24)$$

bzw.

$$\Lambda_A : \quad \psi^\dagger \quad \longrightarrow \quad \psi^\dagger e^{+i\gamma_5 \theta_a \hat{G}^a} \quad (2.25)$$

und damit

$$\Lambda_V : \quad \bar{\psi} \quad \longrightarrow \quad \bar{\psi} e^{+i\theta_a \hat{G}^a} \approx \bar{\psi} (1 + i\delta\theta_a \hat{G}^a) \quad (2.26)$$

und

$$\Lambda_A : \quad \bar{\psi} \quad \longrightarrow \quad \bar{\psi} e^{+i\gamma_5 \theta_a \hat{G}^a} \approx \bar{\psi} (1 + i\gamma_5 \delta\theta_a \hat{G}^a) \quad , \quad (2.27)$$

wobei die Antikommutationsrelation der γ -Matrizen

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu} \quad (2.28)$$

verwendet wurde. Möchte man die Invarianz eines Systems bezüglich endlicher chiraler Transformationen überprüfen, so reicht es, dies für den einfacheren Fall der infinitesimalen Transformationen, Gl.(2.22), nachzurechnen [Gre5].

Zur Illustration soll im folgenden der Fall eines masselosen Fermions untersucht werden.

Chirale Symmetrie bei masselosen Fermionen

Die Lagrangedichte für masselose Fermionen ist aus Abschnitt 2.1.2 als

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\psi}_j \gamma_\mu \partial^\mu \psi_j \quad (2.29)$$

bekannt. Anwendung der infinitesimalen Vektortransformation ergibt:

$$\begin{aligned} i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi &\longrightarrow i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - i\delta\theta_a (\bar{\psi} i \gamma_\mu \partial^\mu \hat{G}^a \psi - \bar{\psi} i \hat{G}^a \gamma_\mu \partial^\mu \psi) \\ &= i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi \quad , \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei nur Terme linear in $\delta\theta_a$ berücksichtigt werden. Entsprechend erhält man durch Anwendung der axialen Transformation

$$\begin{aligned} i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi &\longrightarrow i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi - i\delta\theta_a (\bar{\psi} i \partial^\mu \gamma_\mu \gamma_5 \hat{G}^a \psi - \bar{\psi} \gamma_5 \hat{G}^a i \gamma_\mu \partial^\mu \psi) \\ &= i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial^\mu \psi \quad , \end{aligned} \quad (2.31)$$

wobei wieder die Antikommutationsrelation Gl.(2.28) verwendet wurde. Nach dem Noether-Theorem (siehe Anhang A) ist jeder Symmetrietransformation eine Erhaltungsgröße zugeordnet, welche allgemein einem erhaltenen Strom entspricht. Für die beiden chiralen Transformationen haben diese die folgende Form:

- Vektorstrom:

$$V_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \hat{G}^a \psi \quad (2.32)$$

- Axialer Strom:

$$A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \hat{G}^a \psi \quad (2.33)$$

Es wurde schon bemerkt, daß die chirale Symmetrie nur im Falle verschwindender Massen erfüllt ist. Diese Aussage läßt sich nun auch direkt belegen, in dem man einfach einen Massenterm in die Dirac-Lagrangedichte einfügt. Es zeigt sich, daß die vektorielle Invarianz erhalten bleibt. Unter der axialen Transformation ergibt sich jedoch:

$$\bar{\psi} \psi \longrightarrow \bar{\psi} \psi - 2i\delta\theta_a (\bar{\psi} \hat{G}^a \gamma_5 \psi) \quad (2.34)$$

Es stellt sich die Frage, ob denn die chirale Symmetrie überhaupt für eine effektive Beschreibung hadronischer Materie geeignet sein kann, wo doch die Quarks keineswegs masselos sind. Die Antwort lautet: Ja, sie ist nützlich, man macht aber einen Fehler, dessen Größe davon abhängt, welche Quarks in die Betrachtung einbezogen werden. Die Masse des *up*- und *down*-Quarks beträgt etwa 5 bis 10 MeV, was klein im Vergleich zur Energieskala der QCD von ca. 1 GeV ist. Für das *strange*-Quark mit einer Masse von ca. 170 MeV ist die Näherung verschwindender Massen schon wesentlich schlechter.

Betrachtet man die Symmetriebrechung durch die Massenterme als klein, so sollte der axiale Strom näherungsweise erhalten sein. Dies führt zur sogenannten *PCAC-Relation* (Partially Conserved Axial Current), die in Anhang C vorgestellt wird.

2.2.2 Eigenschaften der chiralen Transformationen

Gruppeneigenschaften

Die chiralen Transformationen bilden die Elemente einer *Lie-Gruppe*. Lie-Gruppen sind kontinuierliche Gruppen, deren Elemente differenzierbare Funk-

tionen der Parameter sind. Insbesondere können Operatoren eine solche Gruppe bilden, wobei dann jedes Gruppenelement wie folgt dargestellt werden kann

$$U(\alpha) = \exp \left[-i \sum_{a=1}^N \alpha_a Q^a \right] . \quad (2.35)$$

Hier sind die α_a die reellen Parameter der Transformation und

$$Q^a = \left. \frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha_a=0} \quad (2.36)$$

bilden die Generatoren der zugehörigen *Lie-Algebra*. Die Generatoren der chiralen Symmetriegruppe sind gerade die Ladungen, die sich durch Volumenintegration über die Ströme (2.32) und (2.33) ergeben:

$$\begin{aligned} Q^a(t) &= \int V_0(x) d^3x \\ \gamma_5 Q^a(t) \equiv Q^{5a}(t) &= \int A_0(x) d^3x . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Für Generatoren gelten die folgenden gleichzeitigen Kommutationsrelationen

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= if^{abc} Q^c \\ [Q^a, Q^{5b}] &= if^{abc} Q^{5c} \\ [Q^{5a}, Q^{5b}] &= if^{abc} Q^c , \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der jeweils zugrundeliegenden Gruppe bezeichnet. In diesen Kommutationsrelationen fällt auf, daß die axialen Ladungen das Gruppenaxiom der Abgeschlossenheit nicht erfüllen. Die nach Gl.(2.35) erzeugten Operatoren bilden also *keine* Gruppe und die entsprechenden Relationen sind *keine* Algebra!

Nun ist es aber möglich, eine Umdefinition der Generatoren vorzunehmen, so daß man zwei von einander entkoppelte Algebren erhält, und alle Ladungen die Generatoren einer Gruppe sind. Dazu definiert man *rechts-* und *linkshändige* Ladungen wie folgt:

$$Q_L^a = \frac{1}{2} (Q^a - Q^{5a}) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) Q^a \quad (2.39)$$

$$Q_R^a = \frac{1}{2} (Q^a + Q^{5a}) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) Q^a . \quad (2.40)$$

Mit diesen neuen Ladungen ergeben sich die Kommutationsrelationen jetzt als

$$\begin{aligned} [Q_L^a, Q_L^b] &= if^{abc}Q_L^c \\ [Q_R^a, Q_R^b] &= if^{abc}Q_R^c \\ [Q_L^a, Q_R^b] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.41)$$

Diese Umschreibung auf links- und rechtshändigen Generatoren entspricht dem Übergang von der Lie-Algebra der Gruppe $SU(3)_V \times SU(3)_A$ zur Lie-Algebra der Gruppe $SU(3)_L \times SU(3)_R$.

Hat man nun die Wellenfunktion ψ eines Teilchens gegeben, so kann man sie mit Hilfe des Projektionsoperators

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5) \quad (2.42)$$

in einen links- und rechtshändigen Anteil zerlegen:

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\psi = P_{L,R}\psi \quad . \quad (2.43)$$

Diese Komponenten transformieren sich dann jeweils nur im linken oder rechten Raum. Die früher schon besprochene Verletzung der chiralen Symmetrie durch einen Massenterm erhält man in dieser Darstellung sofort wieder: Im Falle eines freien, masselosen Fermions gilt:

$$\mathcal{L}_{\text{frei}} = \bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi = \bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L + \bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R \quad , \quad (2.44)$$

der linke und der rechte Anteil lassen sich also problemlos trennen. Betrachtet man aber zusätzlich einen endlichen Massenterm, so ergibt sich:

$$\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi = m[\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L] \quad , \quad (2.45)$$

die Beiträge verschiedener *Chiralität* mischen also. Da die Transformationen im linken und rechten Teilraum unabhängig voneinander sind, kann also der Massenterm nicht chiral invariant sein.

2.2.3 Chirale Transformation von Mesonen

Um den Zusammenhang zwischen linearer und nichtlinearer Realisierung chiraler Symmetrie sowie die Bedeutung der Symmetriebrechung besser verstehen zu

können, ist es sinnvoll, vorher die Wirkung der chiralen Transformationen auf π -Mesonen (Pionen) und ρ -Mesonen im Fall der Isospin-Gruppe $SU(2)$ zu betrachten. Es wird sich nämlich herausstellen, daß die axiale Transformation das Pion in das σ -Meson rotiert, wodurch sich das Problem in Polarkoordinaten behandeln läßt.

Die Mesonen setzen sich aus Quarkfeldern ψ zusammen. Wir können also solche Zusammensetzungen aus Quarks betrachten, welche die Quantenzahlen der entsprechenden Mesonen haben:

$$\begin{aligned}
\text{Pion-artige Zustände :} & \quad \vec{\pi} = i\bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_5\psi \\
\text{Sigma-artige Zustände :} & \quad \sigma = \bar{\psi}\psi \\
\text{Rho-artige Zustände :} & \quad \vec{\rho} = \bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\psi \\
a_1\text{-artige Zustände :} & \quad \vec{a}_{1\mu} = \bar{\psi}\vec{\tau}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (2.46)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\vec{\tau}$ der Vektor der drei Pauli-Matrizen. Betrachten wir zuerst das Verhalten der beiden Teilchen unter der Vektortransformation Λ_V (Gl.(2.20)), wobei die Generatoren der Transformation jetzt die Paulimatrizen $\vec{\tau}$ und die Θ_j die Parameter der Lie-Gruppe sind:

$$\begin{aligned}
\pi_i : \quad i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi & \longrightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \Theta_j \left(\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\psi - \bar{\psi}\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5\psi \right) \\
& = i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + i\Theta_j\epsilon_{ijk}\bar{\psi}\gamma_5\tau_k\psi \quad . \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Hier wurde die Kommutationsrelationen der τ -Matrizen $[\tau_i, \tau_j] = 2i\epsilon_{ijk}\tau_k$ verwendet. Schreibt man diesen Übergang in Pionfeldern, so sieht man sofort, daß hier der Isospin des Pions um den Winkel Θ gedreht wurde:

$$\vec{\pi} \longrightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta} \times \vec{\pi} \quad . \quad (2.48)$$

Ganz analog verhält es sich für das Rho-Meson:

$$\vec{\rho} \longrightarrow \vec{\rho} + \vec{\Theta} \times \vec{\rho} \quad . \quad (2.49)$$

Offenbar kann man also die Vektortransformation mit einer Isospinrotation identifizieren. Der Vektorstrom (2.32) ist nichts anderes als der Isospin Strom, von dem bekannt ist, daß er für die starke Wechselwirkung eine Erhaltungsgröße darstellt.

Kommen wir nun zur axialen Transformation Λ_A (Gl.(2.21)). Das Pion verhält sich in diesem Fall wie folgt:

$$\begin{aligned} \pi_i : \quad i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi &\longrightarrow i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \Theta_j \left(\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\psi + \bar{\psi}\gamma_5\frac{\tau_j}{2}\tau_i\gamma_5\psi \right) \\ &= i\bar{\psi}\tau_i\gamma_5\psi + \Theta_i\bar{\psi}\psi \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei die Antikommutationsrelationen der τ -Matrizen $\{\tau_i, \tau_j\} = 2\delta_{ij}$ sowie $\gamma_5\gamma_5 = \hat{1}$ verwendet wurde. Schreibt man das wieder in Mesonenfeldern, so erhält man

$$\vec{\pi} \longrightarrow \vec{\pi} + \vec{\Theta}\sigma \quad , \quad (2.51)$$

Pionen und Sigma-Mesonen werden also durch die axiale Transformation ineinander rotiert. Auf analoge Weise wird das ρ in das a_1 rotiert:

$$\vec{\rho}_\mu \longrightarrow \vec{\rho}_\mu + \vec{\Theta} \times \vec{a}_{1\mu} \quad . \quad (2.52)$$

Man könnte erwarten, daß Zustände, die durch Rotation ineinander überführt werden können, gleiche Massen haben. Die Masse des ρ -Mesons ist $m_\rho = 770$ MeV, die des a_1 ist $m_{a_1} = 1260$ MeV, die a_1 -Masse ist also ca. 50 % größer als die des ρ . Diese Differenz läßt sich *nicht* durch die endlichen Quarkmassen erklären, da diese, wie in Abschnitt 2.2.1 besprochen, sehr klein sind. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß sich dieses Problem mit Hilfe der spontanen Symmetriebrechung lösen läßt.

2.2.4 Mechanismen der Symmetriebrechung

Spontane Symmetriebrechung

Um eine Vorstellung von spontaner Symmetriebrechung zu bekommen, betrachten wir zuerst eine mechanische Analogie. In Abb. 2.1 sind zwei rotationsinvariante Potentiale gezeigt. Im Fall (a) liegt der Grundzustand in der Mitte und das Potential *mit Grundzustand* ist rotationsinvariant. Das Potential (b) ist, wie schon gesagt, an sich rotationsinvariant. Legt man aber eine Kugel ins Zentrum dieses Potentials, so wird sie an einen vorher nicht bestimmbar Ort rollen, und irgendwo im kreisförmigen Minimum zur Ruhe kommen. Dieser Punkt wird dadurch vor den anderen gleich tiefen Punkten des Minimums als Grundzustand ausgezeichnet. Das Potential ist jetzt *zusammen mit diesem Grundzustand* nicht mehr rotationsinvariant, das heißt die Symmetrie ist gebrochen. Dadurch, daß

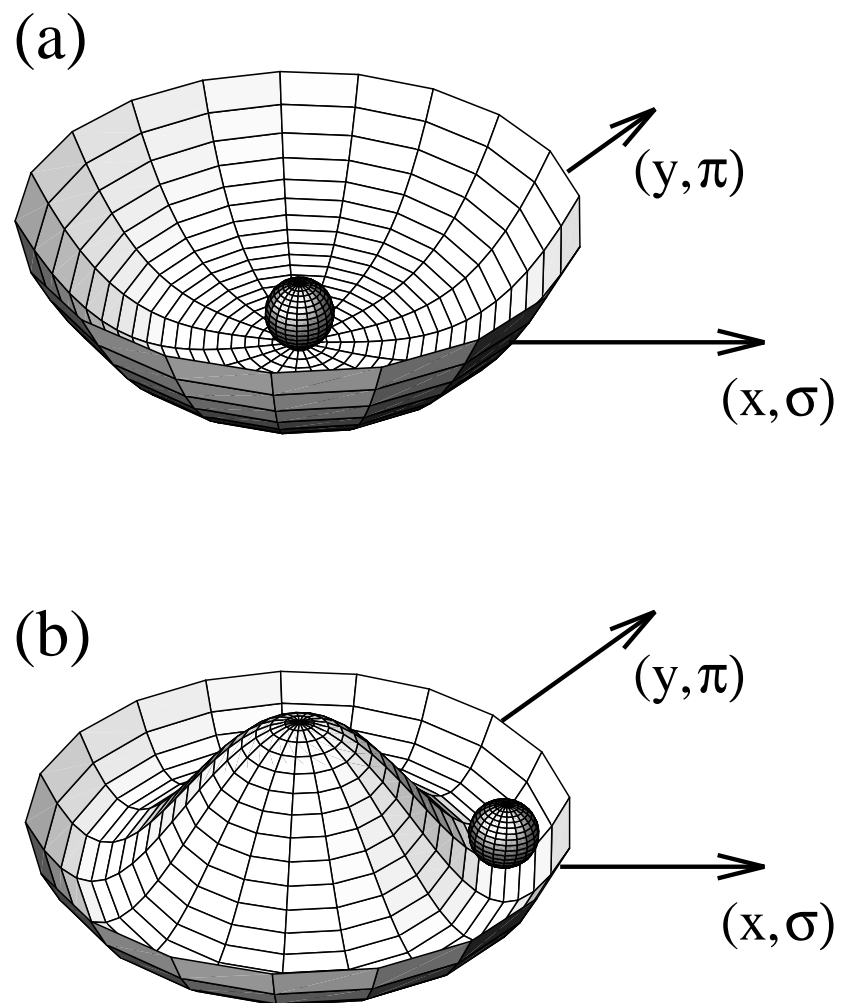


Abbildung 2.1: Potential ohne spontane Symmetriebrechung (a) und mit spontaner Symmetriebrechung (b)

man aus allen Punkten des Minimums *einen* als Grundzustand ausgewählt hat, wird also die Rotationsymmetrie *spontan* gebrochen.

Im Abschnitt 2.2.3 hatten wir gesehen, daß die axiale Transformation einer Rotation zum Beispiel des σ - in das π -Meson entspricht (Gl.(2.51)). Betrachtet man jetzt ein Potential der Form 2.1 (b) in einem aus σ und π aufgespannten Raum, so wird die Analogie sofort klar. Da der Grundzustand des Systems nicht in der Mitte, sondern nur in endlicher Entfernung liegen kann, muß mindestens eines der Felder einen endlichen Vakuum-Erwartungswert haben. Dieses kann aber nur das σ -Feld sein, da es die gleichen Quantenzahlen wie das Vakuum hat. Das pseudoskalare Pion dagegen hat negative Parität. Man erwartet also für das σ -Feld einen nicht verschwindenden Wert $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$. Da es sich hier bei um die σ -Mesonen handelt, wurden jetzt für die zugrundliegenden Felder ψ Quarkwellenfunktionen q eingesetzt. Pionische Anregungen entsprechen in diesem Bild kleinen Rotationen um den Grundzustand, entlang des Minimums. Solche Anregungen kosten keine Energie, woraus man schließen kann, daß die Pionen masselos sein müssen: Die Masse ist ja gerade durch die Krümmung des Potentials im Minimum gegeben (Vergleiche Anhang B). Die Anregung des Systems in σ -Richtung kostet dagegen Energie, denn die Krümmung ist endlich. Die σ -Mesonen haben also eine endliche Masse.

Man erkennt, daß das Konzept der spontanen Symmetriebrechung tatsächlich zur Erklärung des Massenunterschiedes ineinander transformierbarer Mesonen geeignet ist. Die Vorhersage, daß das Pion masselos sei, stimmt mit den Aussagen der PCAC-Relation (Anhang C) überein, wenn man annimmt, daß der axiale Strom vollkommen erhalten ist. Die beobachtete Differenz zwischen ρ - und a_1 -Masse wird durch die spontan gebrochene axiale Symmetrie ebenfalls gut beschrieben [Koc95].

Explizite Symmetriebrechung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde gezeigt, daß sich aus der spontanen Symmetriebrechung ein masseloses Pion ergibt. Da das Pion in der Natur eine endliche Masse hat, muß es einen Mechanismus geben, durch den sie erzeugt wird. Dies kann durch die explizite Symmetriebrechung bewirkt werden, bei der einer chiralen symmetrischen Lagrangedichte ein Term hinzugefügt wird, der die Symmetrie explizit bricht:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{SB}} \quad . \quad (2.53)$$

Da die chirale Symmetrie die Grundlage des Modells bildet, sollte der symmetriebrechende Term klein sein, damit sie erkennbar bleibt. Ein konkretes Beispiel wird im Zusammenhang mit dem linearen Sigma-Modell besprochen (Abschnitt 2.3.1).

2.3 Grundlegende Modelle

Wie bereits erwähnt, stellt die explizite Berechnung von Observablen aus der QCD noch ein generelles Problem dar, so daß man sich vorerst damit begnügen muß, Rechnungen mit sogenannten effektiven Modellen durchzuführen. Diese sind im allgemeinen die einfachste Realisierung grundlegender Eigenschaften (wie z.B. Symmetrien) der QCD. So kann man einerseits Kerne und Kernmaterie berechnen, andererseits bekommt man aber auch ein Gefühl dafür, welche Bedeutung eine bestimmte Symmetrie für die QCD hat.

Im folgenden Abschnitt sollen einige einfache effektive Modelle vorgestellt werden, die zum Teil die Grundlage des in dieser Arbeit untersuchten chiralen Modells bilden. An ihnen lassen sich wichtige Eigenschaften des Modells erklären, ohne dabei immer eine aufwendigere Lagrangedichte betrachten zu müssen.

2.3.1 Das lineare Sigma-Modell

Das lineare Sigma-Modell ist eines der einfachsten chiralen Modelle. Es wurde zum ersten Mal von Gell-Mann und Levy im Jahre 1960 vorgestellt [Gel60], also bevor die QCD als Theorie der starken Wechselwirkung angesehen wurde.

Um ein solches Modell zu konstruieren, muß man eine lorentzinvariante Lagrangedichte aufstellen, welche unter der in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Vektor- und Axialtransformation invariant ist. Die berücksichtigten Felder sind das skalare σ -Meson, das π -Meson und natürlich die Baryonen. Man kann leicht nachrechnen, daß die Quadrate dieser Felder invariant unter der Vektortransformation sind,

$$\Lambda_V : \quad \vec{\pi}^2 \longrightarrow \vec{\pi}^2 \quad ; \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 \quad (2.54)$$

jedoch nicht unter axialer Transformation:

$$\Lambda_A : \quad \vec{\pi}^2 \longrightarrow \vec{\pi}^2 - 2\sigma\Theta_i\pi_i \quad ; \quad \sigma^2 \longrightarrow \sigma^2 + 2\sigma\Theta_i\pi_i \quad . \quad (2.55)$$

Betrachtet man das Verhalten der beiden Felder, erkennt man sofort eine einfache Möglichkeit, chirale Invarianten zu konstruieren, denn offensichtlich gilt:

$$\Lambda_V, \Lambda_A : \quad (\vec{\pi}^2 + \sigma^2) \longrightarrow (\vec{\pi}^2 + \sigma^2) \quad . \quad (2.56)$$

Da diese Struktur auch lorentzinvariant ist, kann man auf ihr basierend eine chirale Lagrangedichte konstruieren:

- Ein Bestandteil einer jeden Lagrangedichte sind natürlich die kinetischen Terme der Felder, wie sie aus Abschnitt 2.1 bekannt sind. Für die Baryonen heißt das

$$i\bar{\psi}\gamma_{\mu}\partial^{\mu}\psi \quad , \quad (2.57)$$

für die Mesonen

$$\frac{1}{2}(\partial_{\mu}\vec{\pi}\partial^{\mu}\vec{\pi} + \partial_{\mu}\sigma\partial^{\mu}\sigma) \quad . \quad (2.58)$$

- Die einfachste Wechselwirkung zwischen den Pionen und den Nukleonen ist durch folgenden Term gegeben:

$$g_{\pi}\left(i\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi\right)\vec{\pi} \quad (2.59)$$

Seine Struktur, und damit sein Transformationsverhalten, ist die gleiche wie jene von π^2 , wie man durch Vergleich mit Gl.(2.46) sofort erkennen kann. g_{π} ist die Kopplungskonstante zwischen Pion und Nukleon.

Wir hatten festgestellt, daß dieser Term alleine nicht chiral invariant ist. Es bedarf also noch eines Terms der Form σ^2 , damit die Symmetrie erfüllt ist. Die einfachste Möglichkeit für einen solchen Term ist

$$g_{\pi}\left(\bar{\psi}\psi\right)\sigma \quad . \quad (2.60)$$

Der gesamte Wechselwirkungsterm zwischen Nukleonen und Mesonen ist damit also

$$\delta\mathcal{L}_{\text{WW}} = -g_{\pi}\left[\left(i\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi\right)\vec{\pi} + \left(\bar{\psi}\psi\right)\sigma\right] \quad . \quad (2.61)$$

- Der Nukleonenmasse sollte man bei der Konstruktion einer chiral invarianten Lagrangedichte besondere Aufmerksamkeit zuwenden, da wir im Abschnitt 2.2.1 gesehen hatten, daß explizite Massenterme nicht chiral invariant sind. Die einfachste Möglichkeit, dem Nukleon eine Masse zu geben, ohne die chirale Symmetrie zu brechen, besteht darin, die Nukleon- σ -Kopplung, Gl.(2.60), zu verwenden. Vergleicht man sie nämlich mit der Dirac-Gleichung, stellt man fest, daß sie die Form eines Massenterms hat. Dazu muß allerdings das σ -Feld einen endlichen Vakuumerwartungswert haben:

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_0 = f_{\pi} \quad . \quad (2.62)$$

Der Wert $\sigma_0 = f_{\pi}$ wird durch die Goldberger-Treiman-Relation (Anh.D) für den Grenzfall $g_a = 1$ gegeben. Wie wir in Abschnitt 2.2.4 gesehen

hatten, bedeutet ein endlicher Vakuumerwartungswert für σ eine spontan gebrochene chirale Symmetrie, und das Potential, welches wir für das Modell verwenden, muß sein Minimum an der Stelle $\sigma = f_\pi$ haben.

- Das Potential muß in irgendeiner Weise aus der chiralen Invarianten aufgebaut sein, die wir oben vorgestellt hatten. Die einfachste Wahl ist

$$V = V(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2, \quad (2.63)$$

wobei $\mu^2 < 0$ gewählt wird um ein Potential wie in Abb. 2.2 zu erhalten. Aus naheliegenden Gründen wird es gerne als “Mexican Hat Potential” bezeichnet. V wird minimal für

$$(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = -\frac{\mu^2}{\lambda}. \quad (2.64)$$

Da der Erwartungswert der pseudoskalaren Mesonen im Vakuum verschwinden soll, ergibt sich für den Vakuumerwartungswert des σ -Feldes

$$\sigma_0 = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}. \quad (2.65)$$

Durch die Festlegung dieses Wertes wird die Symmetrie, wie in Abschnitt 2.2.4 besprochen, spontan gebrochen.

Die vollständige Lagrangedichte des linearen Sigma-Modells sieht damit wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{L.S.}} = & i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - g_\pi(\bar{\psi}\gamma_5\vec{\tau}\psi\vec{\pi} + \bar{\psi}\psi\sigma) + \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\pi}\partial^\mu\vec{\pi} + \frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma \\ & - \frac{\mu^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Wir hatten gesehen, daß die Masse des Nukleons durch seine Wechselwirkung mit dem σ -Feld dynamisch generiert wird. Im folgenden sollen die Massen der beiden Mesonen betrachtet werden. Da die Masse durch die Krümmung des Potentials im Grundzustand gegeben ist, können wir das Potential für kleine Abweichungen um den Grundzustand entwickeln um die Mesonenmassen zu berechnen:

$$\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma \quad ; \quad \pi = \delta\pi \quad (2.67)$$

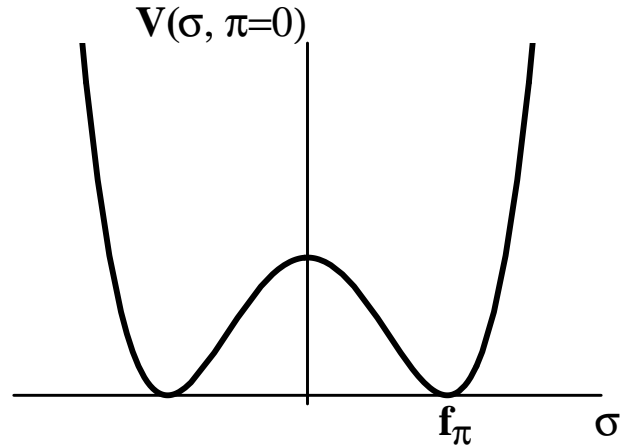


Abbildung 2.2: Das Potential des linearen Sigma-Modells

Diese Fluktuationen können dann mit den eigentlichen Teilchen identifiziert werden. Da die Felder in bosonische Massenterme quadratisch eingehen, entwickeln wir das Potential bis zur zweiten Ordnung in den Mesonen. Die linearen Terme verschwinden, und man erhält:

$$V(\sigma, \pi) = \lambda f_\pi^2 (\delta\sigma)^2 + \mathcal{O}(\delta^3) \quad , \quad (2.68)$$

wobei $\sigma_0 = f_\pi$ verwendet wurde. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Lagrangendichte eines freien Bosons, so erkennt man, daß gilt

$$m_\sigma^2 = \lambda f_\pi^2 \quad . \quad (2.69)$$

Für das Pion findet man keinen Massenterm. Dieses Ergebnis entspricht also genau dem, was wir nach Betrachtung der spontanen Symmetriebrechung erwartet hatten, daß nämlich das Pion masselos ist.

Zusammengefaßt hat das lineare Sigma-Modell folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \sigma_0 = f_\pi \\ \langle \pi \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_N &= g_\pi \sigma_0 = g_\pi f_\pi \\
m_\sigma^2 &= -2\mu^2 \\
m_\pi &= 0
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Explizite Symmetriebrechung im linearen Sigma-Modell

Es wurde schon erwähnt, daß man die Symmetrie des Modells explizit brechen muß, wenn man dem Pion seine beobachtete Masse geben möchte. Dazu muß man das Potential so modifizieren, daß seine Krümmung in azimuthaler Richtung nicht mehr verschwindet. Die einfachste Möglichkeit ist, das Potential etwas zu kippen. Dies erreicht man zum Beispiel durch Addition eines Terms

$$\mathcal{L} = -\epsilon\sigma \quad . \tag{2.71}$$

Das modifizierte Potential (Abb.2.3) lautet dann:

$$V = \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - \epsilon\sigma \quad . \tag{2.72}$$

Soll das Minimum, welches sich durch den zusätzlichen Term leicht verschoben hat, immer noch bei f_π liegen, damit die Goldberger-Treiman-Relation erfüllt bleibt, so muß gelten:

$$-\frac{\mu^2}{\lambda} = f_\pi^2 + \frac{\epsilon}{\lambda f_\pi} \quad . \tag{2.73}$$

Man sollte durch diese Symmetriebrechung nur relativ kleine Pionenmassen generieren, damit die Symmetrie ihre Bedeutung nicht verliert. Tatsächlich ist das Pion das leichteste Hadron. Die Massen der beiden Mesonen des Modells ergeben sich mit dem modifizierten Potential zu

$$\begin{aligned}
m_\sigma^2 &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma_0} = -2\mu^2 + \frac{\epsilon}{f_\pi} \\
m_\pi^2 &= \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2} \right|_{\sigma_0} = \frac{\epsilon}{f_\pi} \neq 0
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Damit läßt sich der Parameter ϵ angeben:

$$\epsilon = f_\pi m_\pi^2 \quad . \tag{2.75}$$

Das Quadrat der Pionenmasse ist also direkt proportional zur expliziten Symmetriebrechung ϵ .

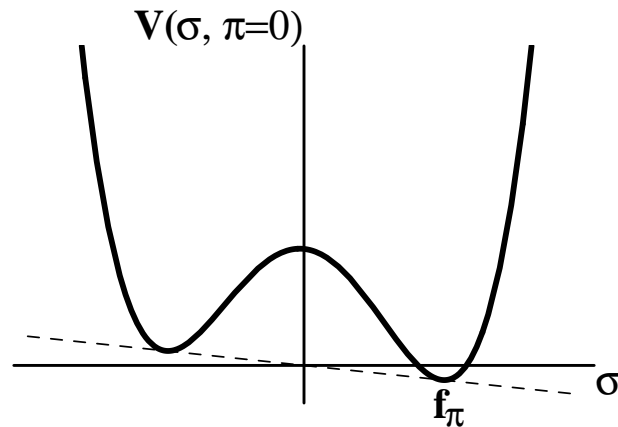


Abbildung 2.3: Das explizit gebrochene Potential des linearen Sigma-Modells

2.3.2 Das nichtlineare Sigma-Modell

Im folgenden soll nun der Übergang zur nichtlinearen Realisierung der chiralen Symmetrie erläutert werden. Zur Vereinfachung sollen hier nur die Mesonenfelder betrachtet werden, ein vollständiges Modell wird in Kapitel 3 vorgestellt.

Wir betrachten wieder die chirale Invariante (2.56), die wir durch Einführen der Mesonenmatrix

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}) \quad (2.76)$$

als

$$(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = \text{Sp } M^+ M \quad (2.77)$$

schreiben können. Man erkennt, daß diese Invariante die Form einer Kreisgleichung in kartesischen Koordinaten hat. Es liegt nun nahe, die Invariante in Polarkoordinaten aufzuschreiben, das heißt, die Felder $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ durch transformierte Felder (s, \vec{p}) zu ersetzen:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}) = s \exp \left[i \frac{\vec{\tau}\vec{p}}{f_\pi} \right] . \quad (2.78)$$

Betrachtet man die Wirkung der chiralen Transformationen (2.20) und (2.21) auf die neuen Felder, so sieht man, daß s sich nur unter der vektoriiellen Transformation ändert, unter der axialen aber invariant ist. Das ist nicht verwunderlich, weil s ja der radialen Koordinate entspricht. Durch Vergleich der Quantenzahlen kann man s mit dem skalaren Feld und \vec{p} mit dem pseudoskalaren Feld identifizieren. Das Transformationsverhalten der beiden zeigt deutlich, daß die axiale Transformation einer Rotation auf dem chiralen Kreis entspricht. Der Parameter dieser Transformation ist der Drehwinkel, also die pseudoskalaren Mesonen. Die chirale Invariante ist in den neuen Feldern einfach:

$$\text{Sp } M^+ M = (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = s^2 \quad . \quad (2.79)$$

Man erkennt sofort, daß sich in dieser Formulierung die Betrachtung der chiralen Symmetrie stark vereinfacht: Da die chirale Invariante nur noch von den skalaren Feldern abhängt, erkennt man die Invarianz bezüglich der axialen Transformation sofort daran, daß die pseudoskalaren Felder nicht explizit auftreten. Möchte man also die chirale Invarianz nachweisen, braucht man nur noch die vektorielle Invarianz zu überprüfen.

2.3.3 Das Walecka-Modell

Das einfachste vorstellbare effektive Modell enthält nur die Nukleonen, ein Feld für die attraktive Wechselwirkung, ein Feld für die repulsive Wechselwirkung und die Kopplung der Mesonen an die Baryonen und an sich selbst. Ein solches Modell ist das σ - ω -Modell von Teller und Duerr, welches nur diese beiden (im Namen enthaltenen) Mesonen berücksichtigt. Das σ -Meson sorgt hier für die Attraktion, das ω -Meson für die Repulsion. Weitere Mesonen können hinzugezogen werden. Im folgenden wollen wir eine Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L}_W = \mathcal{L}_{\text{Nukleonen}} + \mathcal{L}_{\text{Mesonen}} + \mathcal{L}_{\text{Kopplung}} \quad (2.80)$$

als Walecka-Modell bezeichnen. Auch die Bezeichnung "QHD" für *Quanten-Hadron-Dynamik* ist gebräuchlich. Die im Modell berücksichtigten Felder sind:

- Ein isoskalar-skalares Feld $\Phi(x^\mu)$, das σ -Meson entspricht,
- ein isoskalar-vektorielles Feld $V_\nu(x^\mu)$ (das ω -Meson)
- ein isovektor-vektorielles Feld $\vec{R}_\nu(x^\mu)$ (das ρ -Meson)

- und ein masseloses Vektorfeld $A_\nu(x^\mu)$, das Photon (γ).

Wie schon erwähnt, bewirkt das σ die längerreichweitige Anziehungskraft zwischen den Nukleonen und das ω die kurzreichweitige Abstoßung. Das ρ -Meson wird eingeführt, um die Isospinabhängigkeit der Kernkräfte zu berücksichtigen. Das Photon, das Austauscheteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung, wird durch Coulomb-Terme approximiert, wobei magnetische Felder vernachlässigt werden. Die Lagrangedichte läßt sich nun folgendermassen explizit aufschreiben:

- Für die Nukleonen hat man die altbekannte Dirac-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Nukleonen}} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m_{\text{N}}) \psi_{\alpha} \quad , \quad (2.81)$$

wobei die Summe über die besetzten Zustände positiver Energie läuft (no-sea-approximation) und ω_{α} die Besetzungswahrscheinlichkeiten angibt.

- Die Mesonen-Lagrangedichte ist die Summe der einzelnen Klein-Gordon- und Proca-Lagrangedichten und der Maxwell-Dichte für die Photonen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Meson}} = & \frac{1}{2} \left(\partial^{\mu} \Phi \partial_{\mu} \Phi - m_{\sigma}^2 \Phi^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\partial^{\nu} \widetilde{V}^{\mu} \partial_{\mu} V_{\nu} - m_{\omega}^2 V^{\mu} V_{\mu} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\partial^{\nu} \widetilde{R}^{\mu} \partial_{\mu} R_{\nu} - m_{\rho}^2 R^{\mu} R_{\mu} \right) - \frac{1}{2} \partial^{\nu} \widetilde{A}^{\mu} \partial_{\mu} A_{\nu} \quad . \quad (2.82) \end{aligned}$$

Dabei ist $\partial^{\nu} \widetilde{V}^{\mu} = \partial^{\nu} V^{\mu} - \partial^{\mu} V^{\nu}$ (analog für R_{μ} und A_{μ}).

- Die Kopplung der Mesonen und des Photons an die Nukleonen wird durch

$$\mathcal{L} = -g_{\sigma} \Phi \rho_{\sigma} - g_{\omega} V^{\mu} \rho_{\mu} - \frac{f_{\omega}}{2m_{\text{N}}} V^{\mu} \rho_{\mu}^{\text{T}} - \frac{1}{2} g_{\rho} \vec{R}^{\mu} \vec{\rho}_{\mu} - e A^{\mu} \rho_{\mu}^{\text{p}} \quad (2.83)$$

dargestellt. Hier wurde mit ρ_{μ}^{T} auch eine Tensorkopplung berücksichtigt. Die Dichten sind in der Mean-Field-Näherung (siehe Abs. 4.1)

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma} &= \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \psi_{\alpha} \\ \rho_{\mu} &= \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_{\alpha} \bar{\psi}_{\alpha} \gamma_{\mu} \psi_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_\mu^T &= \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_\alpha \partial^\nu (\bar{\psi}_\alpha \sigma_{\mu\nu} \psi_\alpha) \\
\vec{\rho}_\mu &= \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_\alpha \bar{\psi}_\alpha \vec{\tau} \gamma_\mu \psi_\alpha \\
\rho_\mu^p &= \sum_{\alpha=1}^{\Omega} \omega_\alpha \bar{\psi}_\alpha \frac{1}{2} (1 + \tau_0) \gamma_\mu \psi_\alpha
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Zur korrekten Beschreibung der Kompressibilität wird noch eine nichtlineare Selbstwechselwirkung des σ -Mesons berücksichtigt, wobei die einfachste Wahl ein Polynom ist [Bog77]:

$$U(\Phi) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \Phi^2 + \frac{1}{3} b_2 \Phi^3 + \frac{1}{4} b_3 \Phi^4 \quad . \tag{2.85}$$

KAPITEL 3

DAS CHIRALE $SU(3)$ -MODELL IN NICHTLINEARER DARSTELLUNG

In den vorangegangenen Kapiteln hatten wir die chirale Symmetrie im $SU(2)$ -Fall kennengelernt. Wir wollen nun zur $SU(3)$ übergehen, um anschließend das in dieser Arbeit verwendete Modell vorstellen zu können. Es ist wie das Sigma-Modell eine auf chiraler Symmetrie basierende Lagrangedichte, die um den Freiheitsgrad der Seltsamkeit erweitert wurde. Der Übergang von der $SU(2)$ zur $SU(3)$ besteht vor allem darin, daß die Nukleonen, die Pionen und die σ -Felder durch die entsprechenden $SU(3)$ -Multipletts ersetzt werden. Außerdem haben wir hier, im Gegensatz zu den vorher besprochenen Modellen, Terme, welche die gebrochene Skaleninvarianz modellieren. Wie in [Pap98] ausführlich besprochen, wurde die nichtlineare Darstellung der chiralen Symmetrie gewählt.

In linearer Realisierung ergeben sich Probleme zum Beispiel dadurch, daß die Kopplung der Spin-0-Mesonen an die Baryonen auf die symmetrische Kopplung (d -Typ) eingeschränkt ist, während die Vektormesonen antisymmetrisch an die Baryonen koppeln (f -Typ). Diese Tatsache hat eine Störung der Balance zwischen der Repulsion des Vektorfeldes und Attraktion des skalaren Feldes zur Folge. Ein weiteres Problem besteht darin, daß das seltsame Kondensat ζ an das nichtseltsame σ koppelt. Es trägt also auch dann zum attraktiven Potential bei, wenn die Nettoseltsamkeit Null ist. Andererseits koppelt das seltsame Vektorfeld ϕ_μ weder an das ω_μ noch an die Nukleonen, so daß die attraktive Wechselwirkung nicht durch eine entsprechende repulsive Wechselwirkung kompensiert wird. Darüberhinaus gelingt es im linearen Modell nicht, die unrealistischen Hy-

peronenpotentiale zu korrigieren, weil sonst die PCAC-Relation verletzt würde.

3.1 Grundlagen

Es sollen nun die verwendeten Felder in der linearen Darstellung eingeführt werden, um anschließend zu zeigen, wie man allgemein zur nichtlinearen Darstellung übergeht.

3.1.1 Die Hadronen in linearer Darstellung

Die elementaren Bausteine hadronischer Materie sind die Quarks, aus welchen die Mesonen und Baryonen aufgebaut sind. Wir werden in unserem Fall drei Quarks berücksichtigen, das up-Quark, das down-Quark und das strange-Quark. Das Quark-Triplet ist also

$$q = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \\ s(x) \end{pmatrix} . \quad (3.1)$$

Wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt, kann man die Wellenfunktion eines Teilchens durch Anwendung des Projektionsoperators (2.42) in links- und rechtshändige Anteile aufspalten. Wenden wir ihn auf eine Quarkwellenfunktion an, so erhalten wir

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q$$

$$q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q . \quad (3.2)$$

$$(3.3)$$

Ihre fundamentale Darstellung werde durch $(3, 1)$ für die linkshändigen und $(1, 3)$ für die rechtshändigen Quarks symbolisiert [Gre5]. Die Darstellung der Antiteilchen erhält man einfach durch Konjugation, das heißt \bar{q}_L entspricht $(3^*, 1)$ und \bar{q}_R entspricht $(1, 3^*)$.

Mesonen sind nun aus Quark und Antiquark zusammengesetzte Teilchen, und wir können sie dementsprechend schreiben als [Pap98]

$$\bar{q} \mathcal{O} q . \quad (3.4)$$

Die 12×12 -Matrix \mathcal{O} ist hier das direkte Produkt der 4×4 Dirac-Matrizen und der 3×3 Gell-Mann Matrizen ($\mathcal{O} = \Gamma \otimes \lambda$). Da λ für die Darstellung der Mesonen keine Rolle spielt, wollen wir es hier nicht mitberücksichtigen.

Die einfachste derartige Kombination bilden die skalaren Mesonen, welche durch $\bar{q}q$ gegeben sind. Teilen wir sie in rechts- und linkshändigen Anteil auf, so erhalten wir

$$\bar{q}q = \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R \quad . \quad (3.5)$$

Diese Darstellung ergibt, wie in [Gre5] dargestellt, nach

$$[3] \otimes \overline{[3]} = [8] \oplus [1] \quad (3.6)$$

ein Oktett und ein Singlett, die zum skalaren bzw. pseudoskalaren Nonett zusammengefaßt werden. Die eckigen Klammern stehen hier für die $SU(3)$ -Multiplikts. Analog können wir bei den Vektormesonen vorgehen, welche durch $\bar{q}\gamma_\mu q$ gegeben sind. Ihre Aufspaltung führt zu

$$\bar{q}\gamma_\mu q = \bar{q}_L \gamma_\mu q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu q_R \quad , \quad (3.7)$$

womit man den Vektor- und Axialvektormesonen die Darstellung $(8, 1) \oplus (1, 8)$ zuordnen kann.

Wenden wir uns nun den Baryonen zu. Sie sind aus drei Quarks zusammengesetzt:

$$\Psi \sim q_a q_b q_c \epsilon_{abc} \quad (3.8)$$

Dabei sind a, b und c Farbindizes, die von eins bis drei laufen. Um eine Darstellung des Baryonen-Okts zu erhalten, müssen zwei der drei Quarks im Flavourraum antisymmetrisiert werden, also

$$\Psi_{k\ell} \sim q_{a,i} q_{b,j} q_{c,k} \epsilon_{abc} \epsilon_{ij\ell} \quad , \quad (3.9)$$

wobei i, j, k, ℓ die Flavourindices sind. Hiermit ist es möglich, die Baryonen in die Darstellungen $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ oder $(8, 1) \oplus (1, 8)$ einzuordnen [Iof81, Chr87].

3.1.2 Transformation der Hadronen

Nun, da wir die Zusammenstetzung der Hadronen aus Quarks kennen, können wir uns überlegen, wie sie sich unter der chiralen $SU(3) \times SU(3)$ -Transformation

verhalten. Betrachten wir also zuerst ein beliebiges Element unserer Symmetriegruppe, der $SU(3)_L \times SU(3)_R$:

$$U(\alpha, \beta) = \exp \left[-i\alpha_a Q^a - i\beta_a Q^{5a} \right] \quad . \quad (3.10)$$

Dabei sind α und β achtkomponentige Vektoren, welche die Parameter der Transformation darstellen. Q^a und Q^{5a} sind die bereits aus Abs. 2.2.2 bekannten Generatoren der vektoriellen und axialen Transformation. Auch auf sie können wir nun wieder die Projektionsoperatoren anwenden, so daß sich das Gruppenelement auch schreiben läßt als

$$\begin{aligned} U(\alpha, \beta) &= \exp \left[-i(\alpha - \beta) Q_L^a \right] \exp \left[-i(\alpha + \beta) Q_R^a \right] \\ &= U_L \cdot U_R \quad . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Wir können nun einfach ausrechnen, wie sich ein Quark unter chiraler Transformation verhält. Als Beispiel wenden wir die Transformation (3.11) auf ein rechtshändiges Quark an:

$$\begin{aligned} q'_R &= \exp \left[-i(\alpha + \beta) P_R Q^a \right] \exp \left[-i(\alpha - \beta) P_L Q^a \right] q_R \\ &= \exp \left[-i(\alpha + \beta) P_R Q^a \right] \cdot (1 - i(\alpha - \beta) P_L Q^a + \dots) q_R \\ &= \exp \left[-i(\alpha + \beta) P_R Q^a \right] q_R \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Hier sind P_L und P_R die bereits bekannten Projektionsoperatoren (2.42). Vom ersten zum zweiten Schritt wurde die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion eingesetzt. Außerdem wurde verwendet, daß der Links-Operator auf ein rechtshändiges Teilchen angewandt verschwindet. Wir stellen fest, daß auf ein rechts- (links-) händiges Teilchen nur die rechte (linke) Transformation wirkt, also

$$\begin{aligned} q'_R &= \exp \left[-i(\alpha + \beta) P_R Q^a \right] q_R \\ q'_L &= \exp \left[-i(\alpha + \beta) P_L Q^a \right] q_L \quad . \end{aligned}$$

Für Antiquarks erhält man in einer analogen Rechnung

$$\begin{aligned} \bar{q}'_R &= \bar{q}_R \exp \left[+i(\alpha + \beta) P_L Q^a \right] \\ \bar{q}'_L &= \bar{q}_L \exp \left[+i(\alpha + \beta) P_R Q^a \right] \quad . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Wir kennen jetzt die Transformation der Quarks und können damit die Transformationen der Hadronen direkt angeben. Dazu entwickeln wir die Mesonen- und

Baryonen-Felder in einer Basis von Gell-Mann-Matrizen [Pap95] und erhalten die in Anhang E aufgeführten Matrizen. Auf diese Art und Weise lassen sich die Spin-0-Matrizen zum Beispiel schreiben als

$$M = \Sigma + i\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a=0}^8 (\sigma_a + i\pi_a) \lambda_a \quad , \quad (3.14)$$

wobei $\sigma_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{q} \lambda_a q$ und entsprechend für π_a . Hier repräsentiert π_a die pseudoskalaren Mesonen, so daß eine Paritätstransformation (entspricht einer Multiplikation mit γ_0) zu einem Vorzeichenwechsel des Π -Terms führt. Wir erhalten

$$M^\dagger = \Sigma - i\Pi \quad , \quad (3.15)$$

also das hermitesch Konjugierte von M . Wie anschaulich schon zu erwarten war, kann man leicht nachrechnen, daß die Paritätstransformation ein linkshändiges in ein rechtshändiges Quark überführt.

Betrachten wir nun die chiralen Transformationen: Ein Spin-0-Meson ist, wie wir gesehen hatten, ein skalares Kondensat aus Quark und Antiquark. Möchten wir es einer Links-Transformation unterwerfen, so müssen wir von links die Links-Transformation und von rechts die konjugiert komplexe Rechts-Transformation auf das Quark anwenden. Es gilt also

$$M' = U_L M U_R^\dagger \quad . \quad (3.16)$$

Analog erhalten wir für die Rechts-Transformation des Mesons

$$M^{\dagger'} = U_R M^\dagger U_L^\dagger \quad . \quad (3.17)$$

Im Falle der Spin-1-Mesonen lassen sich rechtshändiger und linkshändiger Anteil trennen (Gl.(3.7)), so daß wir die Vektor- und Axialvektormesonen als

$$\begin{aligned} V_\mu &= \ell_\mu + r_\mu \\ A_\mu &= \ell_\mu - r_\mu \end{aligned} \quad (3.18)$$

schreiben können. Hier sind ℓ_μ und r_μ linker und rechter Anteil der Mesonen. Man erhält für die Transformationen

$$\begin{aligned} \ell'_\mu &= U_L \ell_\mu U_L^\dagger \\ r'_\mu &= U_R r_\mu U_R^\dagger \end{aligned} \quad . \quad (3.19)$$

Für die Transformation der Baryonen in der Darstellung $(3, 3^*) \oplus (3^*, 3)$ findet man schließlich

$$\begin{aligned}\Psi'_L &= U_L \Psi_L U_L^\dagger \\ \Psi'_R &= U_R \Psi_R U_R^\dagger \quad .\end{aligned}\quad (3.20)$$

3.1.3 Der Übergang zur nichtlinearen Darstellung

Wir wollen nun allgemein zeigen, wie sich die Felder beim Übergang von der linearen Realisierung der chiralen Symmetrie zur nichtlinearen verhalten. Dazu stellen wir fest, daß sich jedes (endliche) Element g einer kompakten, halbeinfachen Gruppe G mit einer Untergruppe H , folgendermaßen aufspalten läßt [Col69]:

$$g = \exp \left[i \sum \xi_a x_a \right] \exp \left[i \sum \theta_i t_i \right] \equiv U(\xi_a) V(\theta_i) \quad . \quad (3.21)$$

Hierbei ist V ein Element der Untergruppe H von G . t_i sind also die Generatoren dieser Untergruppe. Entsprechend ist $x_a \in G/H$. ξ_a und θ_a sind die Parameter der beiden Symmetrietransformationen. Im Falle der chiralen $SU(3)$ -Symmetrie kann man $U(\xi_a)$ mit der axialen Transformation identifizieren und $V(\theta_i)$ mit der Vektortransformation, g entspricht also einem Element der $SU(3)_A \times SU(3)_V$. Man sieht sofort, daß man durch Multiplikation von g mit $U(\xi_a)$ wieder ein Element von G erhält, wobei sich nur die Transformationsparameter geändert haben:

$$g \exp \left[i \sum \xi_a x_a \right] = \exp \left[i \sum \xi'_a(g, \xi_a) x_a \right] \exp \left[i \sum \theta'_i(g, \xi_a) t_i \right] \quad . \quad (3.22)$$

Wir können nun durch

$$g : \phi \longrightarrow D \left(\exp \left[i \sum \theta'_i(g, \xi_a) t_i \right] \right) \phi \quad (3.23)$$

eine nichtlineare Darstellung der Gruppe G definieren. Daß in dieser Transformation eine Gruppenstruktur realisiert ist, kann man durch Hintereinanderausführen direkt zeigen [Col69]. Dabei ist ϕ ein Feld, welches sich in der nichtlinearen Darstellung transformiert. Entsprechend soll Ψ ein Feld der linearen Darstellung sein, das heißt sich nach

$$\Psi \longrightarrow D(g) \Psi \quad (3.24)$$

transformieren, wobei $D(g)$ für die Darstellung der linearen Transformation steht. Unser Ziel ist, eine Transformation der linearen Felder in die nichtlinearen zu

finden, das heißt Ψ so zu transformieren, daß sich das Ergebnis nur noch nach der Untergruppe H transformiert. Ein solcher Übergang ist nun gegeben durch

$$\phi = D \left(\exp \left[-i \sum \xi_a x_a \right] \right) \Psi \quad , \quad (3.25)$$

wie man durch Anwenden von g und anschließendem Transformieren der Felder sehen kann:

$$\begin{aligned} \phi' &= D \left(\exp \left[-i \sum \xi'_a x_a \right] \right) \Psi' \\ &= D \left(\exp \left[-i \sum \xi'_a x_a \right] g \right) \Psi \\ &= D \left(\exp \left[-i \sum \xi'_a x_a \right] g \exp \left[i \sum \xi_a x_a \right] \right) \phi \\ &= D \left(\exp \left[i \sum \theta'_i t_i \right] \right) \phi \\ &= D (V(\theta_i)) \phi \quad . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Betrachten wir die Bedeutung dieser Aussage für die nichtlineare Realisierung der chiralen Symmetrie. Die neuen (nichtlinearen) Felder ϕ transformieren sich nur nach der Vektortransformation, welche wir ja mit V identifiziert hatten. Es ist uns also gelungen, die Felder, welche sich nach der vollen Gruppe G transformieren, in Felder zu überführen, die sich nur nach der Untergruppe H transformieren. Den Transformationsparameter der axialen Transformation ξ_a können wir jetzt mit den pseudoskalaren Feldern identifizieren, wie wir es ja aus unseren Betrachtungen im $SU(2)$ -Fall schon erwarten würden, wo der Parameter der nichtlinearen Transformation der Drehwinkel auf dem chiralen Kreis ist und als Pion betrachtet wird. Die x_a entsprechen den Generatoren der axialen Transformationen, wir können für unsere Transformation zwischen linearem und nichtlinearem Feldern also schreiben

$$u(\pi_a(x)) = \exp \left[i \sum \pi_a(x) Q^{5a} \right] \quad . \quad (3.27)$$

Um chirale Symmetrie zu gewährleisten, brauchen wir in der nichtlinearen Realisierung nur noch zu testen, ob der betreffende Term invariant unter Vektortransformation ist. Die Erfüllung der axialen Symmetrie erkennt man einfach daran, daß die pseudoskalaren Felder nicht explizit auftauchen.

Möchte man nun die "neuen" (nichtlinearen) Felder aus den "alten" (linearen) ableiten, so betrachtet man zu erst am besten wieder die Quarks. Identifiziert man die alten und neuen Quarks mit den oben verwendeten Feldern Ψ und ϕ , so können die Transformationen direkt aufgeschrieben werden:

$$\tilde{q}_L = u^\dagger q_L$$

$$\tilde{q}_R = u q_R \quad . \quad (3.28)$$

Bereits in (3.26) wurde gezeigt, daß auf sie nur die vektorielle Transformation wirkt.

Da wir den Aufbau der Hadronen aus Quarks kennen, können die neuen Hadronen nun unmittelbar aus den alten hergeleitet werden, und man erhält, indem man die Wirkung von u auf die Quarkbestandteile betrachtet:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} (u^\dagger M u^\dagger + u M^\dagger u) \\ Y &= \frac{1}{2} (u^\dagger M u^\dagger - u M^\dagger u) \\ \tilde{\ell}_\mu &= u^\dagger \ell_\mu u \\ \tilde{r}_\mu &= u r_\mu u^\dagger \\ B_L &= u^\dagger \Psi_L u \\ B_R &= u \Psi_R u^\dagger \quad , \end{aligned} \quad (3.29)$$

wobei $M = \Sigma + i\Pi$ die bereits vorgestellten linearen skalaren (Σ) und pseudoskalaren (Π) Mesonen repräsentiert, Y ist das pseudoskalare Singlett. ℓ_μ und r_μ sind linkshändiger und rechtshändiger Anteil der Spin-1-Mesonen (vergl. Gl.(3.18)), welche mit den Vektor- (V_μ) und Axialvektormesonen (A_μ) wie folgt verknüpft sind

$$\begin{aligned} \ell_\mu &= \frac{1}{2} (V_\mu + A_\mu) \\ r_\mu &= \frac{1}{2} (V_\mu - A_\mu) \quad . \end{aligned} \quad (3.30)$$

B_L und B_R stellen den links- bzw. rechtshändigen Anteil der Baryonen dar. Auf der linken Seite stehen die Felder in nichtlinearer Realisierung.

Es wurde behauptet, daß die neuen Felder sich ausschließlich vektoriell transformieren. Wir wollen diese Aussage exemplarisch für ein linkshändiges Baryon B_L beweisen. Dazu müssen wir zunächst das Transformationsverhalten von u untersuchen. Wir setzen in Gl.(3.22) $g = U_L$. Die Bedeutung der anderen Faktoren wurde oben schon erwähnt. Bringt man V auf die andere Seite, kann man direkt ablesen, daß gilt:

$$u(\pi'_a(x)) = U_L u(\pi_a(x)) V^\dagger \quad . \quad (3.31)$$

Hier ist V die Vektortransformation (siehe oben). Anwenden einer Paritätstransformation führt die Linkstransformation U_L in eine Rechtstransformation U_R

über, und das pseudoskalare Feld π_a ändert sein Vorzeichen. Man erhält also

$$u(-\pi'_a(x)) = U_R u(-\pi_a(x)) V^\dagger \quad . \quad (3.32)$$

Hermitesche Konjugation liefert dann

$$u(\pi'_a(x)) = V u(\pi_a(x)) U_R^\dagger \quad . \quad (3.33)$$

Offenbar gilt also für die Transformation von u :

$$u(\pi'_a(x)) = U_L u(\pi_a(x)) V^\dagger = V u(\pi_a(x)) U_R^\dagger \quad . \quad (3.34)$$

Durch hermitesche Konjugation erhält man außerdem

$$u^\dagger(\pi'_a(x)) = V u(\pi_a(x)) U_L^\dagger = U_R u^\dagger(\pi_a(x)) V^\dagger \quad . \quad (3.35)$$

Das Transformationsverhalten der linkshändigen Baryonen können wir jetzt direkt aufschreiben: Das transformierte Baryon in alten Feldern ist

$$B'_L = u^{\dagger'} \psi'_L u' \quad . \quad (3.36)$$

Verwenden wir jetzt unsere Erkenntnisse über die Transformation von u , wobei $u' = u(\pi'_a)$ sei, so erhalten wir

$$\begin{aligned} B'_L &= V u^\dagger U_L^\dagger U_L \psi_L U_L^\dagger U_L u V^\dagger \\ &= V u^\dagger \psi_L u V^\dagger \\ &= V B_L V^\dagger \quad . \end{aligned} \quad (3.37)$$

In einer analogen Rechnung erhält man für die anderen Felder:

$$X' = V X V^\dagger \quad V'_\mu = V V_\mu V^\dagger \quad A'_\mu = V A_\mu V^\dagger \quad B' = V B V^\dagger \quad . \quad (3.38)$$

Alle verwendeten Matrizen sind in Anhang E zu finden.

3.1.4 Die chiralen Invarianten

Sowohl in der linearen als auch in der nichtlinearen Realisierung der chiralen Symmetrie existiert nur eine kleine Anzahl voneinander unabhängiger chiraler Invarianten. Die Kopplungsmöglichkeiten der skalaren Mesonen untereinander

werden, wie oben gezeigt, in der nichtlinearen Realisierung nur durch die vektorielle $SU(3)_V$ -Symmetrie bestimmt. Es existieren dann drei voneinander unabhängige chirale Invarianten [Pap98] :

$$I_1 = \text{Sp}X, \quad I_2 = \text{Sp}X^2, \quad I_3 = \det X \quad . \quad (3.39)$$

Alle Terme der Form $\text{Sp}X^n$ mit $n \geq 3$ können als Funktion dieser drei Invarianten ausgedrückt werden.

3.2 Die Lagrangedichte des nichtlinearen $SU(3)$ -Modells

Die kinetischen Terme

Da die vektorielle Transformation im allgemeinen lokal ist, weil sie von den pseudoskalaren Feldern abhängt, müssen in den kinetischen Termen kovariante Ableitungen verwendet werden. Diese sind gegeben durch

$$D_\mu = \partial_\mu + i[\Gamma_\mu, \dots] \quad , \quad (3.40)$$

mit

$$\Gamma_\mu = -\frac{i}{2} [u^\dagger \partial_\mu u + u \partial_\mu u^\dagger] \quad . \quad (3.41)$$

Γ ist ein vektorartiges Feld, das sich nach

$$\Gamma'_\mu = V \Gamma_\mu V^\dagger - iV \partial_\mu V^\dagger \quad (3.42)$$

transformiert. V und u sind die aus den vorigen Abschnitten bekannten Transformationen. Für den kinetischen Term der pseudoskalaren Mesonen wurde hier ein Ansatz gewählt, für den die skalaren Teilchen mit den pseudoskalaren gekoppelt sind [Pap98]. Er lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Pseudo}} = \text{Sp} (u_\mu X u^\mu X + X u_\mu u^\mu X) \quad , \quad (3.43)$$

wobei u_μ folgender axialer Vektor ist:

$$u_\mu = -\frac{i}{2} [u^\dagger \partial_\mu u - u \partial_\mu u^\dagger] \quad , \quad (3.44)$$

welcher sich wie $u'_\mu = Vu_\mu V^\dagger$ transformiert.

Auch in den Feldstärketensoren der Vektor- und Axialvektormesonen müssen wir die Ableitungen durch die kovarianten Ableitungen ersetzen, so daß wir definieren:

$$V_{\mu\nu} = D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu \quad (3.45)$$

und für die axialen Vektormesonen entsprechend mit A_μ anstelle von V_μ . So erhalten wir für die kinetischen Terme folgende Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} = & \ i \text{Sp} \bar{B} \gamma_\mu D^\mu B + \frac{1}{2} \text{Sp} D_\mu X D^\mu X + \text{Sp} (u_\mu X u^\mu X + X u_\mu u^\mu X) \\ & + \frac{1}{2} \text{Sp} D_\mu Y D^\mu Y + \frac{1}{2} D_\mu \chi D^\mu \chi - \frac{1}{4} \text{Sp} (V_{\mu\nu} V^{\mu\nu}) \\ & - \frac{1}{4} \text{Sp} (A_{\mu\nu} A^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} \text{Sp} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad . \end{aligned} \quad (3.46)$$

$F_{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor des Photons. Das Dilaton-Feld χ , welches hier auftaucht, wird später noch ausführlich diskutiert.

Baryon-Meson-Wechselwirkung

Schreiben wir zunächst die allgemeinste Form einer Wechselwirkung zwischen Baryonen B und einem beliebigen Meson W auf [Pap98]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{BW} = & \ -\sqrt{2}g_8^W \left(\alpha_W [\bar{B} \mathcal{O} B W]_f + (1 - \alpha_W) [\bar{B} \mathcal{O} B W]_d \right) \\ & - g_1^W \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Sp}(\bar{B} \mathcal{O} B) \text{Sp} W \end{aligned} \quad (3.47)$$

mit

$$\begin{aligned} [\bar{B} \mathcal{O} B W]_f & := \text{Sp}(\bar{B} \mathcal{O} W B - \bar{B} \mathcal{O} B W) \\ [\bar{B} \mathcal{O} B W]_d & := \text{Sp}(\bar{B} \mathcal{O} W B + \bar{B} \mathcal{O} B W) - \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Sp}(\bar{B} \mathcal{O} B) \text{Sp} W \quad . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dabei sind g_8^W und g_1^W zwei Parameter, welche die Stärke der Kopplung bestimmen. Ihre genaue Bedeutung wird später noch deutlich. Mit dem Parameter α_W kann man f - und d -Kopplung beliebig mischen. \mathcal{O} bestimmt die Art der Mesonen. Man erhält die Wechselwirkungen für die verschiedenen Mesonen daher aus dem allgemeinen Term durch folgende Ersetzungen:

skalare Mesonen:	$\mathcal{O} = 1,$	$W = X$
Vektormesonen:	$\mathcal{O} = \gamma_\mu,$	$W = V_\mu$
Axialvektormesonen:	$\mathcal{O} = \gamma_\mu \gamma_5,$	$W = \mathcal{A}_\mu$
pseudoskalare Mesonen:	$\mathcal{O} = \gamma_\mu \gamma_5,$	$W = u_\mu$

Eine Besonderheit des chiralen Modells gegenüber konventionellen RMF-Modellen ist die Tatsache, daß die Baryonenmassen durch Wechselwirkung mit den skalaren Feldern dynamisch generiert werden. Man erhält durch Einsetzen der Vakuummatrizen der skalaren Mesonen und der Baryonen in (3.47) [Pap98]:

$$\begin{aligned}
m_N &= m_0 - \frac{1}{3}g_8^S(4\alpha_S - 1)(\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Lambda &= m_0 - \frac{2}{3}g_8^S(\alpha_S - 1)(\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Sigma &= m_0 + \frac{2}{3}g_8^S(\alpha_S - 1)(\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Xi &= m_0 + \frac{1}{3}g_8^S(2\alpha_S + 1)(\sqrt{2}\zeta - \sigma) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

mit $m_0 = g_1^S (\sqrt{2}\sigma + \zeta) / \sqrt{3}$. Die Parameter g_1^S , g_8^S und α_S kennen wir aus der allgemeinen Form der Wechselwirkung (3.47), wobei $W = S$ für die skalaren Mesonen steht. Wir können sie an die experimentellen Werte der Baryonenmassen anpassen. Die Felder $\sigma = \langle \bar{u}u + \bar{d}d \rangle$ und $\zeta = \langle \bar{s}s \rangle$ stammen aus der Spurbildung über die skalare Matrix X .

Wie man sehen kann, hängen die Nukleonenmassen hier sowohl vom nichtseltsamen Kondensat σ als auch vom seltsamen Kondensat ζ ab. Eine Alternative, bei welcher die Massen nur von σ abhängen, erhält man, wenn man nur eine Kopplung von f -Typ berücksichtigt, das heißt $\alpha_S = 1$ setzt und $g_1^S = \sqrt{6}g_8^S$. Ein Problem dieser Möglichkeit liegt allerdings darin, daß die Kopplungskonstanten zwischen den Baryonen und den beiden skalaren Kondensaten durch das additive Quarkmodell festgelegt sind, so daß nicht mehr genügend freie Kopplungskonstanten zur Verfügung stehen um die Vakuummassen anzupassen. Es bleibt also nur eine Kopplungskonstante, um die Nukleonenmasse zu fixieren. Um die anderen (seltsamen) Baryonenmassen anpassen zu können, muß man einen explizit symmetriebrechenden Term einführen, welcher die $SU(3)$ -Symmetrie entlang der Hyperladungssachse bricht. Eine Möglichkeit ist [Pap98]:

$$\mathcal{L}_{\Delta m} = -m_1 \text{Sp}(\bar{B}B - \bar{B}BS) - m_2 \text{Sp}(\bar{B}SB) \quad , \tag{3.50}$$

wobei $S_b^a = -\frac{1}{3} [\sqrt{3}(\lambda_8)_b^a - \delta_b^a]$ ist. Auf diese Weise hat man sich zwei neue Parameter geschaffen, mit welchen man die Massen der Hyperonen anpassen kann. Man erhält

$$\begin{aligned} m_N &= -g_{N\sigma}\sigma \\ m_\Lambda &= -\frac{2}{3}g_{N\sigma}\sigma - \frac{1}{3}g_{N\sigma}\sqrt{2}\zeta + \frac{1}{3}(m_1 + 2m_2) \\ m_\Sigma &= -\frac{2}{3}g_{N\sigma}\sigma - \frac{1}{3}g_{N\sigma}\sqrt{2}\zeta + m_1 \\ m_\Xi &= -\frac{1}{3}g_{N\sigma}\sigma - \frac{2}{3}g_{N\sigma}\sqrt{2}\zeta + m_1 + m_2 \quad , \end{aligned} \quad (3.51)$$

mit den freien Parametern m_1 , m_2 und $g_{N\sigma} = 3g_8^S$.

Auch die Wechselwirkung der Spin-1-Mesonen mit den Baryonen ergibt sich aus Gl.(3.47), wobei wir hier eine reine f -Kopplung verwenden ($\alpha_V = 1$). Wie bei den skalaren Mesonen ist $g_1^V = \sqrt{6}g_8^V$, und das seltsame Vektorfeld $\phi \sim \bar{3}\gamma_\mu s$ koppelt nicht an die Nukleonen. Auch hier sind alle Kopplungskonstanten durch das additive Quarkmodell bestimmt, sobald die Kopplung der Nukleonen an das nichtseltsame Vektorfeld ω fixiert ist. Man hat dann:

$$g_{\Lambda\omega} = g_{\Sigma\omega} = 2g_{\Xi\omega} = \frac{2}{3}g_{N\omega} = 2g_8^V \quad g_{\Lambda\phi} = g_{\Sigma\phi} = \frac{g_{\Xi\phi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}g_{N\omega} \quad . \quad (3.52)$$

Massenterme der Vektormesonen

Für die Spin-1-Mesonen muß ein expliziter Massenterm eingeführt werden. Die einfachste skaleninvariante Wahl ist

$$\mathcal{L}_{\text{vec}}^{(1)} = \frac{1}{2}m_v^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2} \text{Sp} V_\mu V^\mu + 2g_4^4 \text{Sp}(V_\mu V^\mu)^2 \quad . \quad (3.53)$$

Diese Lagrangedichte enthält einen Selbstwechselwirkungsterm der Vektormesonen und eben den Massenterm. Um die Massenaufspaltung richtig modellieren zu können, wird noch ein zusätzlicher Term eingeführt:

$$\mathcal{L}_{\text{vec}}^{(2)} = \frac{1}{4}\mu \text{Sp} [V_{\mu\nu} V^{\mu\nu} X^2] \quad (3.54)$$

Für eine ausführlichere Diskussion der Vektormesonmassen siehe [Pap99].

Gebrochene Skaleninvarianz

Die Skaleninvarianz ist die Invarianz bezüglich der Transformation

$$x' = \lambda x \quad . \quad (3.55)$$

Möchte man nun angeben, wie sich ein beliebiges Feld $\phi(x)$ unter Skalentransformation verhält, so betrachtet man am besten die allgemeine Transformation

$$\phi'(x) = f(\lambda)\phi(\lambda x) \quad , \quad (3.56)$$

wobei vorausgesetzt wurde, daß das Feld $\phi'(x')$ am Punkt $x' = \lambda x$ linear aus $\phi(x)$ hervorgeht. Man erhält mit den Annahmen $f(1) = 1$ und $f(\lambda_1\lambda_2) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)$ die allgemeine Transformation

$$\phi'(x) = e^{\tau d}\phi(e^\tau x) \quad , \quad (3.57)$$

wobei λ durch die Exponentialfunktion parametrisiert wurde. Die Variable d bezeichnet die Dimension der Felder und τ ist ein beliebiger Parameter. Die infinitesimale Transformation läßt sich durch

$$\delta\phi = (d + x^\mu\partial_\mu)\phi \quad (3.58)$$

ausdrücken. Eine Theorie ist nun invariant unter Skalentransformation, wenn die durch (3.58) induzierte Änderung in der Lagrangedichte eine totale Divergenz ergibt [Pap98]:

$$\delta\mathcal{L} = 4\mathcal{L} + x^\mu\partial_\mu\mathcal{L} = \partial_\mu(x^\mu\mathcal{L}) \quad . \quad (3.59)$$

Dann nämlich läßt sich die Wirkung nach dem Integralsatz von Gauß in ein Oberflächenintegral umwandeln, welches bei hinreichend großem Volumen verschwindet.

In unserem Modell wird die Skaleninvarianz durch das Gluonenkondensat χ gebrochen. Der entsprechende Term in der Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L}_{\text{scale}} = -k_4\chi^4 - \frac{1}{4}\chi^4 \ln \frac{\chi^4}{\chi_0^4} + \frac{\delta}{3}\chi^4 \ln \frac{\det X}{\det\langle X \rangle} \quad . \quad (3.60)$$

Explizite Symmetriebrechung

Die wesentliche Bedeutung der expliziten Symmetriebrechung wurde schon beim linearen Sigma-Modell besprochen. Sie bestand darin, den pseudoskalaren Mesonen, welche Goldstone-Bosonen sind, eine endliche Masse zu geben. Die explizite Symmetriebrechung ist etwas willkürlich, wir wählen hier

$$\mathcal{L}_{\text{SB}} = -\frac{1}{2}m_{\eta_0}^2 \text{Sp}Y^2 - \frac{1}{2}\text{Sp}A_p (uXu + u^\dagger Xu^\dagger) - \text{Sp}(A_s - A_p) \quad . \quad (3.61)$$

Der erste Term gibt dem pseudoskalaren Singlett Y eine Masse. Im linearen Sigma-Modell hatten wir gesehen, daß der Term, welcher die Symmetrie bricht um den pseudoskalaren Mesonen eine Masse zu geben, proportional zum Quadrat der Masse dieser Felder war (Gl.(2.75)). Der zweite Term in (3.61) erledigt diese Aufgabe im hier verwendeten Modell. Da auch seltsame pseudoskalare Mesonen berücksichtigt werden müssen, wählt man für den Proportionalitätsfaktor A_p :

$$A_p = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{diag} \left(m_\pi^2 f_\pi, m_\pi^2 f_\pi, 2m_K^2 f_K - m_\pi^2 f_\pi \right) \quad . \quad (3.62)$$

Die Massen m_π und m_K sind Parameter und werden hier als $m_\pi = 139$ MeV und $m_K = 498$ MeV vorgegeben. Der letzte Term in Gl.(3.61) bricht mit $A_s = \text{diag}(x, x, y)$ die $SU(3)_V$ -Symmetrie. x und y sind freie Parameter, welche verwendet werden können, um Vakuumbedingungen anzupassen [Pap98].

KAPITEL 4

GRUNDLAGEN ZU KERNEN

4.1 Mean-Field-Näherung

Zur Berechnung der Kernobservablen sind einige Näherungen nötig. Die wichtigste ist die *Mean-Field-Näherung*, welche die Quantenfluktuationen der Mesonenfelder vernachlässigt und nur ihre Erwartungswerte berücksichtigt. Das heißt, die Baryonen werden als unabhängige Teilchen behandelt, die über klassische Felder miteinander wechselwirken. Durch diese Mittelung fallen die räumlichen Anteile der Vektormesonen weg, so daß nur die Zeitkomponenten einen endlichen Erwartungswert haben:

$$\begin{aligned}\omega &= \langle \omega_0 \rangle \\ \rho &= \langle \rho_0 \rangle \\ A &= \langle A_0 \rangle\end{aligned}\tag{4.1}$$

Darüber hinaus wird die Dirac-See der Antiteilchen vernachlässigt (*no-sea-approximation*) und alle Rechnungen in sphärischer Symmetrie und zeitunabhängig durchgeführt. Die Lagrangedichte des chiralen Modells lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= -i \sum_i \bar{B}_i \gamma_\mu \partial^\mu B_i - \frac{1}{2} \sum_{\Phi=\sigma,\zeta,\chi,\omega,\phi,\rho,A} \nabla_i \Phi \nabla^i \Phi \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= - \sum_i \bar{B}_i \gamma_0 \left[g_{i\omega} \omega_0 + g_{i\rho} \tau_3 \rho_0 + g_{i\phi} \phi_0 + \frac{1}{2} e (1 + \tau_3) A_0 + m_i^* \gamma_0 \right] B_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{vec}} &= -\frac{1}{2}k_0\frac{\chi^2}{\chi_0^2}\left(m_\omega^2\omega^2 + m_\rho^2\rho^2\right) + g_4^4\left(\omega^4 + 6\omega^2\rho^2 + \rho^4\right) \\
\mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}k_0\chi^2(\sigma^2 + \zeta^2) + k_1(\sigma^2 + \zeta^2)^2 + k_2\left(\frac{\sigma^4}{2} + \zeta^4\right) \\
&\quad + k_3\chi\sigma^2\zeta + k_{3m}\chi\left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{2}} + \zeta^3\right) - k_4\chi^4 \\
&\quad - \frac{1}{4}\chi^4\ln\frac{\chi^4}{\chi_0^4} + \frac{\delta}{3}\chi^4\ln\frac{\sigma^2\zeta}{\sigma_0^2\zeta_0} \\
\mathcal{L}_{\text{SB}} &= -\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^2 [x\sigma + y\zeta] \tag{4.2}
\end{aligned}$$

mit $x = m_\pi^2 f_\pi$ und $y = \sqrt{2}m_K^2 f_K - \frac{1}{\sqrt{2}}m_\pi^2 f_\pi$. Die Summe über i repräsentiert hier die verschiedenen Baryonen. Für die Berechnungen von Kernen brauchen hier natürlich nur die normalen Nukleonen betrachtet zu werden. Die Terme der kinetischen Energien kennen wir aus der Dirac- bzw. Klein-Gordon-Gleichung. Bei m^* ist zu beachten, daß es sich hierbei um die effektive Nukleonenmasse handelt, welche nur durch Wechselwirkung mit den skalaren Mesonen erzeugt wird. Dieser Term enthält daher zwei Kopplungskonstanten, welche Parameter des Modells sind.

Im Vektormesonenterm tritt ein quartischer Selbstwechselwirkungsterm der nicht-seltensamen Vektormesonen ω auf, welcher später noch ausführlich diskutiert werden soll.

Im Potentialterm \mathcal{L}_0 erkennt man in den ersten beiden Termen eine Struktur, die schon vom Sigma-Modell her vertraut ist. Sie bilden ein Mexican-Hat-artiges Potential, welches die spontane Symmetriebrechung realisiert. Im hier diskutierten Modell kommt außerdem der skaleninvarianz-brechende Term hinzu.

4.2 Pairing

Bei der experimentellen Untersuchung der Bindungsenergien von Kernen beobachtet man, daß Kerne mit gerader Protonen- oder Neutronenzahl immer etwas stärker gebunden sind als ihre Nachbarn in der Nuklidkarte mit ungerader Anzahl. Man führt dies darauf zurück, daß im Kern jeweils zwei Nukleonen besonders stark aneinander gebunden sind. Man spricht bei dieser zusätzlichen Anziehung

von *Paarkraft*.

Im folgenden soll das BCS-Modell der Paarkraft vorgestellt werden. Der Name stammt von der Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie der Supraleitung.

Wir wollen für Kerne die Paarwechselwirkung zweier Zustände mit den Drehimpulsquantenzahlen k und $-k$ betrachten, welche über Zeitumkehr miteinander verbunden sind. Dazu gehen wir von einem Hamiltonoperator aus, welcher einen reinen Einteilchenanteil und eine Restwechselwirkung enthält, die nur auf die Paare wirkt:

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k + \sum_{k,k'>0} \langle k, -k | v | k', -k' \rangle \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} \quad . \quad (4.3)$$

Dabei sind ϵ_k die Einteilchenenergien. Zur Vereinfachung wollen wir das Matrixelement hier als Konstante $-G$ betrachten, so daß wir den Hamiltonoperator schreiben können als:

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k^0 \hat{a}_k^+ \hat{a}_k - G \sum_{k,k'>0} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} \quad . \quad (4.4)$$

Eine analytische Lösung läßt sich in diesem Fall nicht finden, es existiert aber eine Näherungslösung in Form des *BCS-Zustandes* [Gre11]:

$$|\text{BCS}\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+) |0\rangle \quad . \quad (4.5)$$

Hier ist jedes Paar von Niveaus $(k, -k)$ mit der Wahrscheinlichkeit $|v_k|^2$ besetzt und mit der Wahrscheinlichkeit $|u_k|^2$ leer. Zur Normierung des BCS-Zustands sei $u_k^2 + v_k^2 = 1$.

Die Teilchenzahl ist keine gute Quantenzahl des BCS-Zustandes. Deshalb muß man, um den Erwartungswert des Hamiltonoperators zu berechnen, einen Lagrange-Multiplikator einführen, was zu der Variationsbedingung

$$\delta \langle \text{BCS} | \hat{H} - \lambda \hat{N} | \text{BCS} \rangle = 0 \quad (4.6)$$

führt [Gre11]. Hier ist N der Teilchenzahloperator. Wir können jetzt (4.4) einsetzen und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial v_k} \langle \text{BCS} | \sum_k (\epsilon_k^0 - \lambda) \hat{a}_k^+ \hat{a}_k - G \sum_{k,k'>0} \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} | \text{BCS} \rangle = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Hier sind die v_k die freien Parameter. Die u_k hängen mit ihnen über die Normierung zusammen, weshalb die Ableitung in (4.7) wie folgt zu verstehen ist:

$$\frac{\partial}{\partial v_k} = \frac{\partial}{\partial v_k} \Big|_{u_k} - \frac{v_k}{u_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \Big|_{v_k} . \quad (4.8)$$

Für die einzelnen Teile des Matrixelements findet man

$$\begin{aligned} \langle \text{BCS} | \hat{a}_k^+ \hat{a}_k | \text{BCS} \rangle &= v_k^2 \\ \langle \text{BCS} | \hat{a}_k^+ \hat{a}_{-k}^+ \hat{a}_{-k'} \hat{a}_{k'} | \text{BCS} \rangle &= \begin{cases} u_k v_k u_{k'} v_{k'} & \text{für } k \neq k' \\ v_k^2 & \text{für } k = k' \end{cases} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Es ergibt sich dann für den Erwartungswert des Hamiltonoperators

$$\langle \text{BCS} | \hat{H} - \lambda \hat{N} | \text{BCS} \rangle = 2 \sum_{k>0} (\epsilon_k^0 - \lambda) v_k^2 - G \left(\sum_{k>0} u_k v_k \right)^2 - G \sum_{k>0} v_k^4 . \quad (4.10)$$

Der erste Term geht hier auf den ersten Term in (4.7) zurück, die beiden letzten Terme ergeben sich mit (4.9) aus dem zweiten Term in (4.7). Wir müssen jetzt noch die Ableitung gemäß (4.8) ausführen und erhalten schließlich

$$4(\epsilon_k^0 - \lambda) v_k - 2G \left(\sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \right) u_k - 4G v_k^3 - \frac{v_k}{u_k} \left[-2G \left(\sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \right) \right] = 0 . \quad (4.11)$$

Alle Gleichungen für die verschiedenen Werte von k sind über den Term

$$\Delta = G \sum_{k'>0} u_{k'} v_{k'} \quad (4.12)$$

miteinander verknüpft. Um Δ bestimmen zu können, müssen wir aus (4.11) die beiden Parameter u_k und v_k bestimmen. Diese können dann in (4.12) eingesetzt werden. Mit der Abkürzung

$$\epsilon_k = \epsilon_k^0 - \lambda - G v_k^2 \quad (4.13)$$

können wir (4.11) als

$$2\epsilon_k v_k u_k + \Delta(v_k^2 - u_k^2) = 0 \quad (4.14)$$

schreiben. Quadrieren wir diese Gleichung, so läßt sich die Normierungsbedingung für v_k und u_k einsetzen und nach v_k^2 auflösen. Man erhält:

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right) . \quad (4.15)$$

Man entscheidet sich hier für das negative Vorzeichen, damit die Besetzungswahrscheinlichkeiten gegen Null gehen, wenn die Einteilchenenergien ϵ_k gegen unendlich gehen. Den Parameter u_k können wir daraus mit der Normierungsbedingung direkt berechnen:

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right) . \quad (4.16)$$

Setzen wir u_k und v_k nun in Gl.(4.12) ein, so erhalten wir nach kurzer Rechnung die sogenannte *Gap-Gleichung*

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} . \quad (4.17)$$

Für praktische Rechnungen mit Mean-Field-Modellen ist das sogenannte *Constant-Gap-Modell* sehr beliebt. Es wird hier ein konstanter Wert für den Gap Δ vorgegeben. Eine Isospin-unabhängige Möglichkeit ist

$$\Delta = \frac{11.2}{\sqrt{A}} \text{MeV} , \quad (4.18)$$

wobei A die Nukleonenzahl ist. Ist dieser Wert festgelegt, so kann man die Paar-kraft G aus der Gap-Gleichung berechnen. Die Parametrisierung des Gaps kann durchaus auch anders gewählt werden. So ist es zum Beispiel denkbar, für Protonen und Neutronen unterschiedliche Werte zu verwenden.

4.3 Die Lösung der Bewegungsgleichungen

Aus Gl.(4.2) erhält man mit Gl.(2.4) die folgenden Bewegungsgleichungen für normale Kerne:

$$D\omega = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{vec}}}{\partial \omega} + g_{N\omega} \rho_B \quad (4.19)$$

$$D\rho = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{vec}}}{\partial \rho} + g_{N\rho} \rho_3 \quad (4.20)$$

$$DA = e\rho^{(\text{Proton})} \quad (4.21)$$

$$D\chi = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SB}}}{\partial \chi} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{vec}}}{\partial \chi} \quad (4.22)$$

$$D\sigma = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \sigma} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SB}}}{\partial \sigma} + \frac{\partial m_N^*}{\partial \sigma} \rho_s \quad (4.23)$$

$$D\zeta = -\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \zeta} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{SB}}}{\partial \zeta} + \frac{\partial m_N^*}{\partial \zeta} \rho_s \quad (4.24)$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \sigma} &= -k_0 \chi^2 \sigma + k_1 (4\sigma^3 + 4\sigma \zeta^2) + 2k_2 \sigma^3 + 2k_3 \chi \sigma \zeta \\
&\quad + 3k_{3m} \chi \frac{\sigma^2}{\sqrt{2}} - 2 \frac{\delta}{3} \frac{\chi^4}{\sigma} \\
\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \chi} &= -k_0 \chi (\sigma^2 + \zeta^2) + k_3 \sigma^2 \zeta + k_{3m} \left(\frac{\sigma^3}{\sqrt{2}} + \zeta^3 \right) - 4k_4 \chi^3 \\
&\quad - \chi^3 \ln \frac{\chi^4}{\chi_0} + \chi^3 \chi_0^4 + \frac{4}{3} \delta \chi^3 \ln \frac{\sigma^2 \zeta}{\sigma_0^2 \zeta_0} \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{SB}}{\partial \sigma} &= - \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 x \\
\frac{\partial \mathcal{L}_{SB}}{\partial \chi} &= -2 \frac{\chi}{\chi_0^2} [x\sigma + y\zeta]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

und

$$D = -\nabla^2 - \frac{2}{r} \nabla \quad . \tag{4.26}$$

Für die Dichten ρ_i ergibt sich:

$$\rho_s = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_{\alpha} \bar{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha} \tag{4.27}$$

$$\rho_{B\mu} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_{\alpha} \bar{\varphi}_{\alpha} \gamma_{\mu} \varphi_{\alpha} \tag{4.28}$$

$$\rho_{3\mu} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_{\alpha} \bar{\varphi}_{\alpha} \tau \gamma_{\mu} \varphi_{\alpha} \tag{4.29}$$

$$\rho_{\mu}^{(\text{Proton})} = \sum_{\alpha=1}^{\Omega} w_{\alpha} \bar{\varphi}_{\alpha} \frac{1}{2} (1 + \tau_0) \gamma_{\mu} \varphi_{\alpha} \quad . \tag{4.30}$$

Die φ_{α} sind die Dirac-Spinoren. Die Summe läuft über die besetzten Zustände positiver Energie, und w_{α} sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten.

Um die Bewegungsgleichungen numerisch zu lösen, bedient man sich des gedämpften Gradientenschrittverfahrens [Pgr82], welches im folgenden erklärt werden soll: Gesucht sind die Wellenfunktionen ψ_{α} , bei denen die Summe der Einteilchenenergien minimal ist, also die Variation verschwindet:

$$\delta \sum_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \hat{H} | \psi_{\alpha} \rangle = 0 \quad . \tag{4.31}$$

Dabei sollen die Wellenfunktionen während der Variation orthogonal bleiben, weshalb man Lagrange'sche Multiplikatoren $\lambda_{\alpha,\beta}$ einführt:

$$\delta \left(\sum_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \hat{H} | \psi_{\alpha} \rangle - \sum_{\alpha,\beta} \lambda_{\alpha,\beta} \langle \psi_{\alpha} | \psi_{\beta} \rangle \right) = 0 \quad . \quad (4.32)$$

Man kann die Lagrange'schen Multiplikatoren diagonal wählen und erhält dann:

$$\frac{\delta}{\delta | \psi_{\alpha} \rangle} \left(\sum_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \hat{H} | \psi_{\alpha} \rangle - \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \langle \psi_{\alpha} | \psi_{\beta} \rangle \right) = \hat{H} | \psi_{\alpha} \rangle - \lambda_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle = 0 \quad . \quad (4.33)$$

Die λ_{α} entsprechen also gerade den Energieerwartungswerten ϵ_{α} . Man startet die Berechnung mit der Wellenfunktion Ψ_0 eines harmonischen Oszillators und berechnet $\hat{H} | \psi_{\alpha} \rangle$ und $\epsilon_{\alpha} | \psi_{\alpha} \rangle$, deren Differenz angibt, wie weit man noch von der Lösung des Eigenwertproblems entfernt ist. Als Iterationsschritt bewegt man sich dann von einer Näherung $| \psi_{\alpha}^{(n)} \rangle$ entgegengesetzt der Ableitung (deshalb *Gradientenschnittverfahren*) und nähert sich so der gesuchten Lösung:

$$| \psi_{\alpha}^{(n+1)} \rangle = \mathcal{O} \left\{ | \psi_{\alpha}^{(n)} \rangle - \delta (\hat{H}^{(n)} - \epsilon_{\alpha}^{(n)}) | \psi_{\alpha}^{(n)} \rangle \right\} \quad (4.34)$$

Dabei wird mit δ die Geschwindigkeit der Konvergenz des Gradientenschritts reguliert. Da die Orthogonalität der Wellenfunktionen während der Näherung im allgemeinen nicht erhalten bleibt, muß nach jedem Schritt eine Orthonormalisierung durchgeführt werden (angedeutet durch \mathcal{O}). Bei der Wahl der Iterationsgeschwindigkeit δ muß berücksichtigt werden, daß einerseits δ hinreichend klein ist um Konvergenz zu gewährleisten und andererseits das Minimum möglichst schnell gefunden wird. Da die Propagationsgeschwindigkeit jeder Komponente der Wellenfunktion proportional zu ihrer Energie ist, ersetzt man δ durch eine energieabhängige Dämpfung \hat{D} . Die beste Möglichkeit wäre das Inverse des Hamiltonoperators, welches aber numerisch schwer zu berechnen ist, so daß man sich mit der einfacheren Näherung

$$\hat{D} = x_0 (\hat{T} + E_0)^{-1} \quad (4.35)$$

mit der kinetischen Energie \hat{T} und dem numerischen Parameter E_0 als Ersatz für den Potentialanteil begnügen muß. Dabei ist x_0 ein weiterer numerischer Parameter.

Das gedämpfte Gradientenschnittverfahren erfordert ein positiv definites Spektrum des Hamiltonoperators. Deshalb muß eine effektive Schrödingergleichung

aufgestellt werden:

Die Diracgleichung ist eine Eigenwertgleichung für die oberen (φ^+) und unteren (φ^-) Komponenten des Dirac-Spinors φ . In Matrixform kann man schreiben:

$$\mathcal{H}_F \varphi = \begin{pmatrix} h^+ & d \\ d^\dagger & h^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix} = \epsilon \varphi \quad . \quad (4.36)$$

Löst man diese Gleichung explizit nach φ^- auf, so erhält man

$$\varphi^- = (\epsilon - h^-)^{-1} d^\dagger \varphi^+ \quad . \quad (4.37)$$

Man kann jetzt φ^- aus Gl.(4.36) eliminieren und erhält so eine effektive Schrödingergleichung

$$\epsilon \varphi^+ = \left[h^+ + d (\epsilon - h^-)^{-1} d^\dagger \right] \varphi^+ = \mathcal{H}_{\text{eff}} \varphi^+ \quad , \quad (4.38)$$

wobei \mathcal{H}_{eff} der effektive Hamiltonoperator für die obere Komponente des Dirac-Spinors ist.

4.4 Die Observablen

4.4.1 Bindungsenergie und Separationsenergie

Eine wichtige und experimentell sehr gut bekannte Observable ist die Bindungsenergie E_B eines Kernes. Sie ist gegeben durch

$$E_B = E_{\text{ges}} - Am_N \quad . \quad (4.39)$$

Dabei ist A die Nukleonenzahl des Kernes und m_N die Masse der Nukleonen. Besondere Bedeutung kommt der Bindungsenergie dadurch zu, daß sie die einfachste Möglichkeit bildet, sogenannte *magische Kerne* zu erkennen. Magische Kerne zeichnen sich dadurch aus, daß sie, gegenüber den Kernen ihrer Umgebung auf der Nuklidkarte, besonders stark gebunden sind. Diese Stabilität läßt sich auf Schalenabschlüsse im Kern zurückführen, ganz analog zu den Edelgasen in der Atomphysik. Bekannte Schalenabschlüsse sind:

- Für die Protonen:
Z=2, 8, 20, 28, 50, 82

- Für die Neutronen:
N=2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

Die besondere Stabilität magischer Kerne liegt darin begründet, daß das nächste Einteilchenenergieniveau eines Nukleons nach dem Schalenabschluß um eine besonders große Energiedifferenz entfernt ist. Genau daran lassen sich die magischen Kerne dann auch erkennen. Bildet man nämlich die Differenz der Bindungsenergien zweier benachbarter Kerne mit gerader Protonen- bzw. Neutronenzahl, so beobachtet man bei magischen Kernen eine Kante. Diese *Separationsenergie* entspricht gerade der Energie, die notwendig ist, um ein Protonen- bzw. Neutronenpaar vom Kern zu trennen. Sie ist gegeben durch

$$S_{2n}(Z, N) = E_B(Z, N - 2) - E_B(Z, N) \quad (4.40)$$

$$S_{2p}(Z, N) = E_B(Z - 2, N) - E_B(Z, N) \quad , \quad (4.41)$$

Da das Überschreiten eines magischen Kernes die Steigung dieser Separationsenergie verändert, sind Schalenabschlüsse sofort zu erkennen, wenn man die Differenz der Separationsenergien zweier benachbarter gg-Kerne betrachtet. Sie zeigen bei einem magischen Kern einen scharfen Peak. Der sogenannte *Zwei-Nukleonen-Gap* ist definiert als

$$\delta_{2n}(Z, N) = S_{2n}(Z, N) - S_{2n}(Z, N + 2) \quad (4.42)$$

$$\delta_{2p}(Z, N) = S_{2p}(Z, N) - S_{2p}(Z + 2, N) \quad . \quad (4.43)$$

Die Einteilchenenergien in einem Kern geben darüberhinaus Aufschluß über die *Spin-Bahn-Aufspaltung*, welche die Energiedifferenz zwischen zwei Energieniveaus gleichen Drehimpulses aber unterschiedlichen Spins sind. Die Spin-Bahn-Aufspaltung wird durch eine Wechselwirkung zwischen Bahn-Drehimpuls und Spin hervorgerufen. In Kernen ist sie so stark, daß sie die Abfolge der Energieniveaus entscheidend beeinflusst und damit bei der Suche nach magischen Schalen berücksichtigt werden muß.

4.4.2 Observablen der Ladungsverteilung

Aus Streuexperimenten von Elektronen an Kernen läßt sich der Ladungsformfaktor eines Kernes ermitteln. Der Formfaktor F_{ch} ist der Faktor, mit dem man

den Streuquerschnitt eines punktförmigen Kernes (Mott-Streuung) multiplizieren muß, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, d.h.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(q) = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega}(q) \right]_{\text{Mott}} |F_{\text{ch}}(q)|^2 \quad . \quad (4.44)$$

Die Ladungsdichteverteilung läßt sich dann durch Fourier-Transformation des Formfaktors gewinnen:

$$F_{\text{ch}}(q) = \int d^3x \exp[iqx] \rho_{\text{ch}}(x) \quad . \quad (4.45)$$

Die wichtigsten von uns ausgewählten Eigenschaften der Ladungsverteilung in Kernen sind der Diffraktionsradius R_{rms} und die Oberflächendicke σ_{O} .

Der Diffraktionsradius

Zur Berechnung des Diffraktionsradius definiert man eine kastenförmige Ladungsverteilung

$$\begin{aligned} \rho_{\text{K}}(r) &= Q \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{-1} && \text{für } r \leq R \\ \rho_{\text{K}}(r) &= 0 && \text{für } r > R \quad . \end{aligned} \quad (4.46)$$

aus welcher man durch Fourier-Transformation den Formfaktor F_{ch}^{K} berechnet. Der Diffraktionsradius R_{dms} ist nun der Radius R , für den die erste Nullstelle des gemessenen Formfaktors mit der ersten Nullstelle von F_{ch}^{K} übereinstimmt. Alternativ kann man auch den *root mean square Radius* (R_{rms}) angeben, welcher das auf die Teilchenzahl normierte und mit r^2 gewichtete Integral über die Ladungsverteilung $\rho(x)$ ist:

$$R_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\int d^3x r^2 \rho(x)}{\int d^3x \rho(x)}} \quad . \quad (4.47)$$

Die Oberflächendicke

Die Oberflächendicke ist ein Maß dafür, wie stark die Ladungsverteilung eines Kernes um den Rand der kastenförmigen Ladungsverteilung (4.46) ausgeschmiert ist. Um sie zu berechnen, faltet man die kastenförmige Ladungsverteilung mit einer Gaußfunktion

$$\rho_{\text{KG}}(r) = 4\pi \int_0^\infty dr'^2 \rho_{\text{K}}(r') \rho_{\text{G}}(r - r') \quad , \quad (4.48)$$

wobei

$$\rho_G(r - r') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma^3} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{r^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.49)$$

die Ladungsverteilung einer Gauß-Funktion ist. Man bestimmt nun den Impuls $q_m^{(1)}$, bei dem der Formfaktor der kastenförmigen Ladungsverteilung mit dem Radius R_{rms} das erste Maximum hat. Dann wird der Parameter σ so angepaßt, daß der mit ρ_{KG} berechnete Formfaktor $F_C(q_m^{(1)})$ an der Stelle $q_m^{(1)}$ mit dem gemessenen Formfaktor übereinstimmt. Der so ermittelte Parameter σ ist die gesuchte Oberflächendicke σ_O

$$\sigma_O = \frac{1}{q_m^{(1)}} \sqrt{2 \ln \frac{F_K(q_m^{(1)})}{F_C(q_m^{(1)})}} \quad (4.50)$$

KAPITEL 5

DER FIT

Die Parameter des Modells in der Mean-Field-Näherung wurden mit der Methode des kleinsten Fehlerquadrats (*least squares fit*) an verschiedene Kernobservablen angepaßt. Im folgenden wird zunächst die Funktion des mittleren Fehlerquadrats (χ^2) eingeführt und anschließend der Algorithmus der Anpassung erläutert.

5.1 Die χ^2 -Funktion

Das mittlere Fehlerquadrat χ^2 ist definiert als

$$\chi^2 = \sum_n \left(\frac{O_n^{\text{exp}} - O_n^{\text{theo}}}{\Delta O_n} \right)^2, \quad (5.1)$$

wobei hier O^{exp} die experimentell gemessenen Observablen sind und O^{theo} die theoretisch berechneten. Auf ΔO wird später noch eingegangen. Die Kerne, an deren Eigenschaften die Parameter angepaßt wurden, sind

$$^{16}\text{O}, ^{40}\text{Ca}, ^{48}\text{Ca}, ^{58}\text{Ni}, ^{90}\text{Zr}, ^{112}\text{Sn}, ^{124}\text{Sn}, ^{208}\text{Pb} \quad . \quad (5.2)$$

Dies sind doppelt oder einfach magische Kerne, was den Vorteil hat, daß sie in guter Näherung sphärisch sind. Es entstehen also dadurch, daß die Rechnungen in sphärischer Symmetrie durchgeführt werden, nur kleine Fehler. Außerdem liegen angeregte Zustände weiter entfernt vom Grundzustand, so daß ihr Einfluß minimiert wird. Die Observablen, die zum hier verwendeten Fit herangezogen wurden, sind:

- Die Bindungsenergie E_B
- Der Diffraktionsradius R_{diff}
- Die Oberflächendicke σ_O
- Die $p_{3/2} - p_{1/2}$ Spin-Bahn-Aufspaltung in ^{16}O
- Der $1h_{9/2} - 3s_{1/2}$ Gap in ^{208}Pb
- Die Bindungsenergie von ^{264}Hs

Dabei sind die ersten drei Observablen in jedem Fit enthalten, die letzten drei wurden in einige ausgewählte Untersuchungen miteinbezogen. Mit den beiden Einteilchenobservablen sollte untersucht werden, in wie weit die Spin-Bahn-Aufspaltungen unabhängig von den anderen Größen sind. Die Bindungsenergie von Hassium wurde verwendet, um einen für besonders schwere Kerne tauglichen Parametersatz zu generieren.

Im Prinzip könnte man hier beliebig viele Observablen aufführen, die Auswirkungen wären allerdings nicht sehr groß, da ein Kern durch die oben angegebenen Größen sehr gut charakterisiert wird. Die meisten anderen Observablen sind von ihnen abhängig. Folgende experimentellen Werte wurden zur Anpassung verwendet [Fri86]:

	$E_B(\text{MeV})$	$R_{\text{diff}}(\text{fm})$	$\sigma_O(\text{fm})$
^{16}O	-127.6	2.777	0.839
^{40}Ca	-342.1	3.845	0.978
^{48}Ca	-416.0	3.964	0.881
^{58}Ni	-506.5	4.356	0.911
^{90}Zr	-783.9	5.040	0.957
^{112}Sn	-953.5	5.477	0.963
^{124}Sn	-1050.0	5.640	0.908
^{208}Pb	-1636.4	6.806	0.900
$\Delta O_n/O_n$	0.002	0.005	0.015

Im Normalfall ist ΔO_n der statistische Fehler der experimentellen Daten. Dieser ist allerdings so klein, daß er in dem hier untersuchten Modell niemals erreicht

werden könnte. Es wird deshalb ein Fehler angenommen, der es erlaubt, die Ergebnisse mit Rechnungen in anderen Modellen zu vergleichen. Der Wert für χ^2 gibt die Güte einer Parametrisierung wieder. Je kleiner χ^2 ist, desto näher liegen die berechneten Werte an den experimentellen Daten. Für den Fall, daß die angegebenen Fehler wirklich die statistischen Abweichungen des Experiments sind, gibt das χ^2 pro Freiheitsgrad an, wie gut die berechneten Werte innerhalb der Standardabweichung des Experiments liegen. Ein Wert von Eins wäre hier also optimal. Das χ^2 pro Freiheitsgrad ist in unserem Fall nicht so interessant, weil hier die Fehler relativ willkürlich vorgegeben sind.

Möchte man mit einem Modell also die experimentellen Daten möglichst gut reproduzieren, so muß das χ^2 minimiert werden. Dieses ist für diese Arbeit mit dem im folgenden Abschnitt beschriebenen Algorithmus geschehen.

5.2 Powells Methode

Powells Methode ist ein numerisches Verfahren zur Minimierung einer mehrdimensionalen Funktion [Numrec]. Es ist bei diesem Verfahren nicht nötig, die Ableitungen der untersuchten Funktion analytisch zu kennen, was für χ^2 auch nicht möglich wäre. Minimiert man in einem n -dimensionalen Parameterraum, so führt dieser Algorithmus in n Richtungen nacheinander jeweils eindimensionale Minimierungen durch. Nach der Durchführung von n Minimierungen legt Powells Methode eine neue Richtung zur Suche fest. Diese sollte so liegen, daß sie in Richtung des größten Gradienten liegt und die einzelnen Richtungen, in denen linear minimiert wird, so unabhängig voneinander sind wie möglich, so daß in einem linearen Minimierungsschritt das Ergebnis vorheriger Minimierungen nicht zerstört wird. Der Ablauf ist dabei folgender:

- Die Startposition wird als \mathbf{P}_0 gespeichert.
- Für $i = 1, \dots, n$ wird \mathbf{P}_{i-1} entlang der Richtung \mathbf{u}_i bis zum Minimum geschoben und dann mit \mathbf{P}_i bezeichnet.
- Für $i = 1, \dots, n - 1$ wird \mathbf{u}_i zu \mathbf{u}_{i+1}
- \mathbf{u}_n wird $\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0$.
- \mathbf{P}_n wird entlang der Richtung \mathbf{u}_n bis zum Minimum verschoben und dann mit \mathbf{P}_0 bezeichnet.

- Beginn von vorne.

Die eindimensionalen Minimierungen werden nach Brents Methode durchgeführt [Numrec]. Zunächst grenzt man das Minimum durch eine sogenannte *Suche nach dem Goldenen Schnitt* ein. Dazu werden drei Punkte a , b und c gewählt, für die $f(b) < f(a), f(c)$ und

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = W \quad (5.3)$$

gilt. Anschließend

- wählt man im größeren der beiden Teilintervalle den Punkt x , dessen Abstand von b um W in das Intervall hineinreicht und berechnet dann $f(x)$.
- Ist $f(x) > f(b)$, so ersetzt man die äußere Grenze des größeren Teilintervalls durch x .
- andernfalls ersetzt man b durch die andere Grenze.
- Hat man das Minimum eingegrenzt, wird eine Parabel durch die letzten drei gefundenen Punkte gelegt.
- Anschließend wird der Punkt verworfen, dessen Funktionswert am größten ist, und durch den Punkt ersetzt, an dem die Parabel ihr Minimum hat.
- Die Schritte werden solange wiederholt, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht wurde.

KAPITEL 6

ERGEBNISSE

6.1 Kerne

Das chirale $SU(3)$ -Modell hat sich zur Beschreibung von Hadronen im Vakuum und unendlich ausgedehnter Kernmaterie bereits als geeignet erwiesen. Darüber hinaus haben erste Untersuchungen zu endlichen Kernen gezeigt, daß auch diese mit dem Modell zugänglich sind [Pap98]. Hierbei waren aber die Parameter nur an die Vakuumeigenschaften der Hadronen und Grundzustandseigenschaften unendlich ausgedehnter Kernmaterie angepasst worden. In der Vergangenheit wurden ausführliche Untersuchungen zu Kernen vor allem mit RMF-Modellen durchgeführt [Ruf88, Pgr86]. Auch chirale $SU(2)$ -Modelle sind bereits auf Kerne angewandt worden [Hei94]. Furnstahl et al. haben aber gezeigt, daß im $SU(2)$ -Fall chirale Modelle, welche auf dem Mexican-Hat-Potential basieren, zur Beschreibung von endlichen Kernen nicht geeignet sind, wenn das skalare Meson eine Doppelrolle als chiraler Partner des Pions und Austauscheteilchen der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung spielt. Dabei können sie die Eigenschaften unendlicher Kernmaterie durchaus zufriedenstellend reproduzieren [Fur95]. Zur Beurteilung der Qualität eines chiralen Modells ist die Anwendbarkeit auf Kerne deshalb von besonderer Wichtigkeit [Fur93].

Hier sollen die Aussagen des in Kapitel 3 vorgestellten Modells für Kerne untersucht werden. Dabei wird unter anderem darauf eingegangen, welchen Einfluß das Anpassen der Parameter an die Eigenschaften endlicher Kerne auf die Ergebnisse hat.

Ein wichtiger Grund für Untersuchungen zu normalen Kernen ist die Legitima-

	^{16}O			^{40}Ca			^{208}Pb			χ^2
	E/A	R_{diff}	σ_{O}	E/A	R_{diff}	σ_{O}	E/A	R_{diff}	σ_{O}	
Exp.	-7.98	2.78	0.84	-8.55	3.85	0.98	-7.86	6.81	0.90	
C1	-7.30	2.68	0.79	-8.00	3.80	0.92	-7.56	6.79	0.87	7749
C1FIT	-7.95	2.7	0.81	-8.62	3.81	0.94	-7.91	6.86	0.89	361
C2	-7.39	2.70	0.79	-8.08	3.81	0.92	-7.58	6.81	0.88	6721
C2FIT	-7.93	2.72	0.79	-8.64	3.82	0.92	-7.89	6.83	0.88	433

Tabelle 6.1: Die Werte der Fit-Observablen in verschiedenen Parametersätzen

tion des Modells, einerseits für die Anwendung auf Kerne, und andererseits um glaubwürdige Vorhersagen zu superschweren Kernen und Hyperkernen machen zu können.

6.1.1 Die Fit-Observablen

Die Parameter des Fits wurden, wie in Kapitel 5 beschrieben, an die experimentellen Daten angepaßt. Im folgenden soll nun gezeigt werden, inwieweit die Observablen, welche dem Fit unmittelbar zugänglich sind, reproduziert werden können. In Tabelle 6.1 sind die Werte der Bindungsenergie pro Nukleon E/A , des Diffraktionsradius R_{diff} und der Oberflächendicke σ_{O} für drei doppelt magische Kerne aufgeführt. Die letzte Spalte zeigt das χ^2 nach Kapitel 5, also ein Maß für die mittlere Abweichung der Observablen vom Experiment. Die verwendeten Parametersätze sind:

- C1: Chirales Modell mit einer vom ζ -Kondensat abhängigen Nukleonenmasse. Die Parameter wurden an Kernmaterie im Grundzustand und an die Vakuumeigenschaften der Hadronen angepaßt [Pap99].
- C1fit: Wie C1, aber mit an endliche Kerne angepaßten Parametern, wie in Kapitel 5 dieser Arbeit beschrieben.
- C2: Chirales Modell mit einer vom ζ -Kondensat unabhängigen Nukleonenmasse. Die Parameter wurden auch hier an Kernmaterie im Grundzustand

und an die Vakuumeigenschaften der Hadronen angepaßt [Pap99].

- C2fit: Wie C2, aber mit an endliche Kerne angepaßten Parametern wie in Kapitel 5 dieser Arbeit beschrieben.

Der Fit der Parameter an Kerne verbessert die Ergebnisse der Rechnungen in beiden Fällen C1 und C2 um mehr als eine Größenordnung. Für C1 verbessert sich das χ^2 sogar um mehr als einen Faktor 20. Betrachtet man die Veränderung der einzelnen Observablen, so sieht man, daß sich durch die Anpassung an Kerne in allen Fällen die Bindungsenergie am stärksten verändert hat. Der Diffraktionsradius verändert sich relativ wenig, für Blei entfernt man sich sogar ein wenig vom Experiment. Die Oberflächendicke bleibt für C2 gleich. Allerdings wurden diese Observablen auch mit den Kernmaterie-Fits schon recht gut beschrieben. Eine weitere Verbesserung wird auch dadurch erschwert, daß bei allen Veränderungen der Parameter darauf geachtet werden muß, daß die Vakuummassen der Mesonen weiterhin richtig reproduziert werden, was natürlich eine zusätzliche Einschränkung bedeutet.

6.1.2 Die Vakuum- und Kernmaterie-Eigenschaften nach dem Fit an Kerne

Eine besondere Leistung des chiralen Modells war schon für die ursprünglichen Parametersätze, daß es sowohl für die Vakuumeigenschaften der Hadronen, als auch für die Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie weitgehend zufriedenstellende Resultate lieferte und gleichzeitig endliche Kerne und sogar Hyperkerne beschreiben konnte. Nun, da die Parameter direkt an ausgewählte endliche Kerne angepaßt werden, sollten wir uns versichern, daß auch die Hadronenmassen und Kernmaterie noch richtig beschrieben werden. Beim Fit wurden die nicht zur Anpassung verwendeten Parameter bereits so gewählt, daß die Vakuumgleichungen erfüllt bleiben. Tabelle 6.2 zeigt die Massen der Mesonen für die verschiedenen Parametersätze. Man sieht, daß alle Werte auch nach dem Fit an endliche Kerne mit dem Experiment übereinstimmen. Für die skalaren Kondensate erhält man bei Kerndichte $\sigma/\sigma_0 = 0.64$ und $\zeta/\zeta_0 = 0.91$, die effektive Nukleonenmasse ist $m_N^*/m_N = 0.62$.

Darüber hinaus wird die Bindungsenergie in Kernmaterie mit $E = 16.3$ MeV gut beschrieben. Es ist also so, daß die umfassenden Fähigkeiten des Modells beim Fit an Kerne erhalten bleiben.

	$m_\pi(139)$	$m_K(494)$	$m_\eta(547)$	$m_{\eta'}(958)$	$m_{a_0}(980)$	m_σ	$m_{f_0}(980)$
C1	139.0	498.0	574.5	969.2	953.5	473.3	1039.1
C1Fit	139.0	498.0	574.5	997.9	968.6	460.2	1027.4
C2	139.0	498.0	574.5	969.2	953.5	475.6	1039.09
C2fit	139.0	498.0	574.5	975.4	956.9	471.4	1036.9

Tabelle 6.2: Die Mesonenmassen

6.1.3 Die Parameter

Im χ^2 -Fit wurden folgende sieben Parameter variiert:

- Die Kopplungskonstante zwischen den Nukleonen und dem ω -Meson, $g_{N\omega}$.
- Die Kopplungskonstante zwischen den Nukleonen und dem ρ -Meson $g_{N\rho}$, welche im wesentlichen den Einfluß der Differenz zwischen Protonenzahl und Neutronenzahl bestimmt.
- Der Vakuumerwartungswert des Gluonenkondensats, χ_0 .
- Die Zerfallskonstante des Kaons, f_K .
- Die Kopplungskonstante der quartischen Selbstwechselwirkung des ω -Vektormesons g_4 .
- Die Parameter des Potentialterms k_1 und k_3 .

Tabelle 6.3 zeigt die Absolutwerte der Parameter in den Parametersätzen C1 und C1Fit, sowie ihre absoluten und prozentualen Veränderungen. Um verstehen zu können welche Veränderungen signifikant sind, muß man die Sensibilität des χ^2 bezüglich Veränderungen der einzelnen Parameter berücksichtigen. So ist χ^2 auf $g_{N\omega}$ sehr sensitiv: eine Änderung von $g_{N\omega}$ um 0.25% hat eine Variation des χ^2 von 85% zur Folge. Eine Variation von χ_0 um 2% würde das χ^2 sogar um viele Größenordnungen verändern. Ähnliches gilt für g_4 , k_1 und k_3 . f_K dagegen erfährt keine relevante Veränderung. Zusammenfassend kann man also festhalten, daß die Parameter sich durch den Fit deutlich verändern.

	C1	C1Fit	C1 – C1Fit	Δ [%]
$g_{N\omega}$	13.6065	13.5723	0.0342	0.25
χ_0	401.93	409.77	-7.84	-1.95
f_K	122.0	122.143	-0.143	-0.12
g_4	61.47	74.57	-13.1054	-21.32
k_1	1.399	1.354	0.0456	3.256
k_3	-2.6525	-2.773	0.12	-4.542
$g_{N\rho}$	4.5355	5.6579	-1.1224	-24.75

Tabelle 6.3: Die Veränderung der Parameter beim Fit

6.1.4 Ladungsverteilungen

Von besonderem Interesse beim Studium endlicher Kerne sind die Ladungsverteilungen. Sie bestimmen sowohl den Diffraktionsradius als auch die Oberflächendicke. Die Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 zeigen die Ladungsverteilungen von Sauerstoff, Kalzium und Blei. Die experimentellen Daten [Vri87] werden von allen vier Parametersätzen recht gut beschrieben, wenn auch die an Kerne angepaßten Kurven ein bißchen näher am Experiment liegen. Die leichten Fluktuationen der experimentellen Ladungsdichte sind in den Rechnungen wesentlich stärker ausgeprägt, als sie es sein sollten. Bemerkenswert ist, daß alle gerechneten Kurven fast parallel verlaufen, also qualitativ das gleiche Ergebnis liefern, obwohl sich die Parameter durch den Fit deutlich verändert haben. Auch Tabelle 6.1.1 zeigt, daß sich die Observablen der Ladungsverteilung R_{diff} und σ_O kaum verändern. Interessiert man sich für den Einfluß der Ladungsverteilung auf Oberflächendicke und Diffraktionsradius, so betrachtet man am besten den Formfaktor. Die Abbildungen 6.4, 6.5 und 6.6 zeigen die Formfaktoren der Ladungsverteilungen von ^{16}O , ^{40}Ca und ^{208}Pb . Besonderes Augenmerk ist dabei auf die Lage der ersten Nullstelle und des ersten Maximums zu legen, weil diese gerade die oben genannten Observablen bestimmen (Abs. 4.4.2). Auch hier erkennt man, daß die an Kerne und die an Kernmaterie angepaßten Parametersätze fast die gleichen Ergebnisse liefern. Es zeigen sich allerdings leichte Abweichungen aller Rechnungen vom Experiment. So liegt die erste Nullstelle bei Sauerstoff in den Rechnungen bei etwas höheren Impulsen, was einem kleineren Kern entspricht. Außerdem ist durch das zu weit rechts liegende erste Maximum die Oberfläche des Kerns in

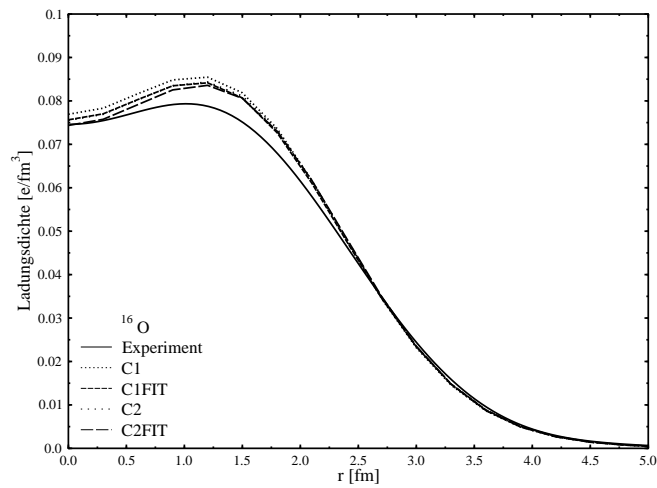


Abbildung 6.1: Ladungsdichteverteilung von Sauerstoff für verschiedene Parametersätze im Vergleich zum Experiment [Vri87].

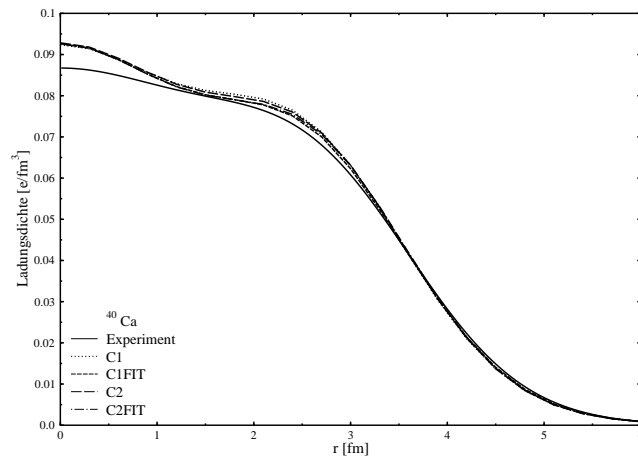


Abbildung 6.2: Ladungsdichteverteilung von Kalzium im Vergleich zum Experiment [Vri87].

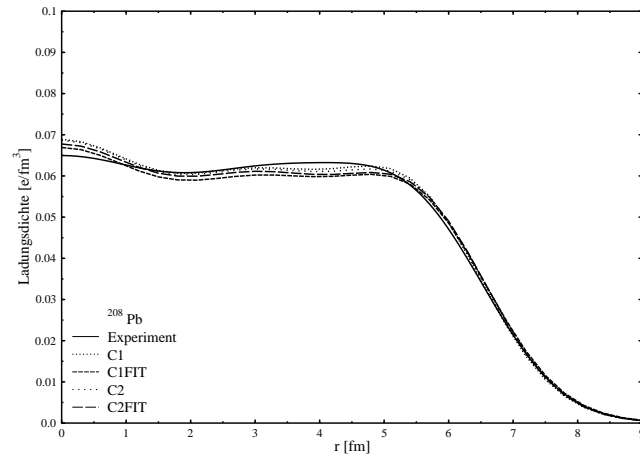


Abbildung 6.3: Ladungsdichteverteilung von Blei im Vergleich zum Experiment [Vri87].

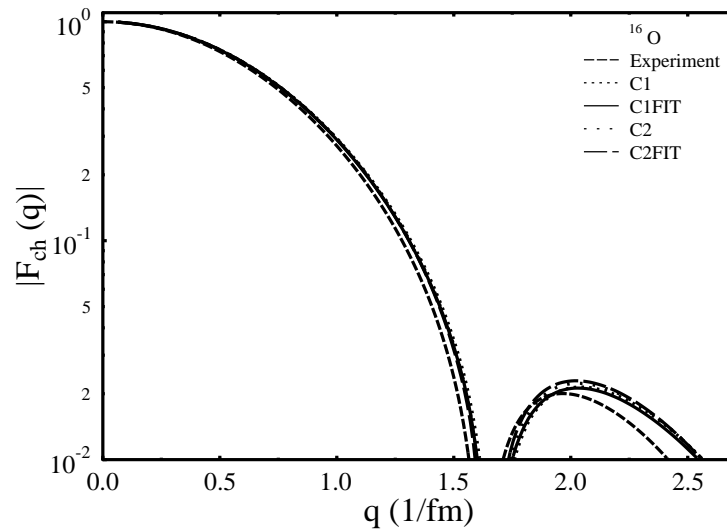


Abbildung 6.4: Formfaktor von Sauerstoff im Vergleich zum Experiment [Vri87].

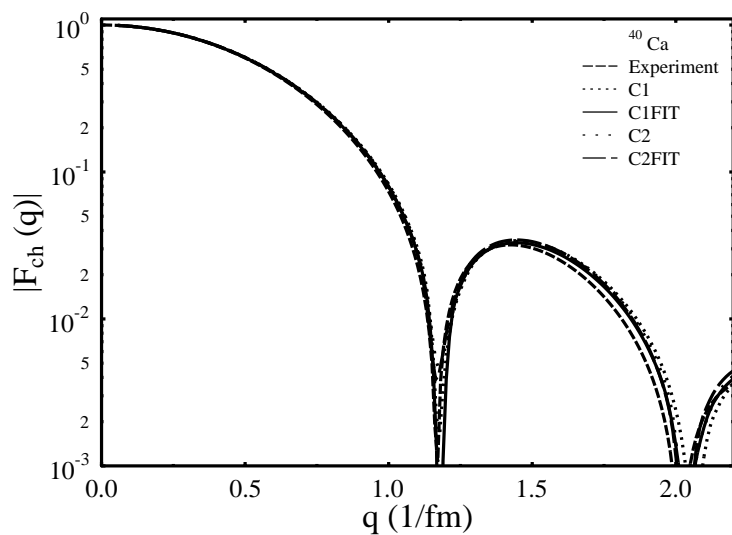


Abbildung 6.5: Formfaktor von Kalzium im Vergleich zum Experiment [Vri87].

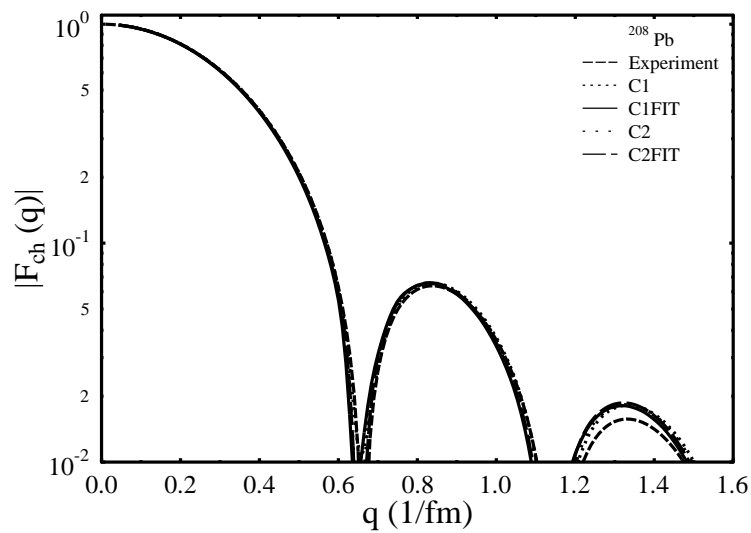


Abbildung 6.6: Formfaktor von Blei im Vergleich zum Experiment [Vri87].

der Rechnung dünner als im Experiment. Kalzium stimmt wesentlich besser mit dem Experiment überein. Für Blei liegt die berechnete erste Nullstelle etwas zu weit links, was den Kern ein bisschen zu groß macht. Insgesamt kann man also am Formfaktor das Verhalten der ladungsbezogenen Observablen direkt ablesen.

6.1.5 Was sagen uns die Einteilchenenergien?

Die Observable *Bindungsenergie* wird letztendlich durch die Summe der Energien der einzelnen Nukleonen bestimmt. Besonders interessant sind im Einteilchenspektrum die Lücken, weil durch sie die Schalenabschlüsse gekennzeichnet sind. Darüber hinaus geben sie Aufschluß über die Spin-Bahn-Aufspaltung. Die Einteilchenenergien sind experimentell nicht direkt beobachtbar und müssen deshalb durch Differenzbildung mit benachbarten Kernen abgeleitet werden. Optimalerweise sollten natürlich in den Rechnungen die Lücken zwischen den gleichen Niveaus liegen wie im Experiment. Wie man in Abbildung 6.7 erkennen kann, ist das auch für alle Parametersätze bis auf C1B recht gut erfüllt. C1B ist eine Rechnung ohne den ω^4 -Term in der Lagrangedichte (siehe Abs. 6.1.7).

Im Falle der Protonen (Abb. 6.8) werden die Abstände nicht richtig reproduziert. So liegen Gaps im Experiment zwischen den Niveaus $1h_{9/2}$ und $3s_{1/2}$ sowie $1g_{7/2}$ und $1g_{9/2}$, in allen Rechnungen (bis auf C1B) aber zwischen $2f_{7/2}$ und $1h_{9/2}$ sowie zwischen $2d_{5/2}$ und $1g_{7/2}$. Die Spin-Bahn-Aufspaltungen hingegen zeigen auch hier gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Wie oben schon angedeutet, sind die Einteilchen-Energien experimentell nicht direkt meßbar, wodurch die Aussagekraft besonders für die tiefer gebundenen Niveaus in größeren Kernen fragwürdig wird. Sowohl in der Rechnung als auch im Experiment verändert nämlich jedes neu zum Kern hinzugefügte Nukleon das Kernpotential, was natürlich auch die Energieniveaus verschiebt. Es ist deshalb nicht möglich, Aussagen über Schalenabschlüsse anhand des Einteilchenspektrums eines großen Kerns zu machen. So gesehen sind die Zwei-Nukleonen-Gaps wesentlich aufschlußreicher, wenn es um das Bestimmen magischer Zahlen geht.

Bemerkenswert ist, daß die relativen Abstände zwischen den einzelnen Energieniveaus durch die Parameter-Anpassungen kaum beeinflusst werden. Die Einteilchen-Energien werden eigentlich nur als Gesamtheit verschoben. Das liegt daran, daß die Bindungsenergie als Observable in den Fit eingeht.

Hier liegt übrigens ein generelles Problem aller χ^2 -Fits, daß nämlich immer nur ein kleiner Teil der Eigenschaften, die für einen Kern bestimmend sind, überhaupt

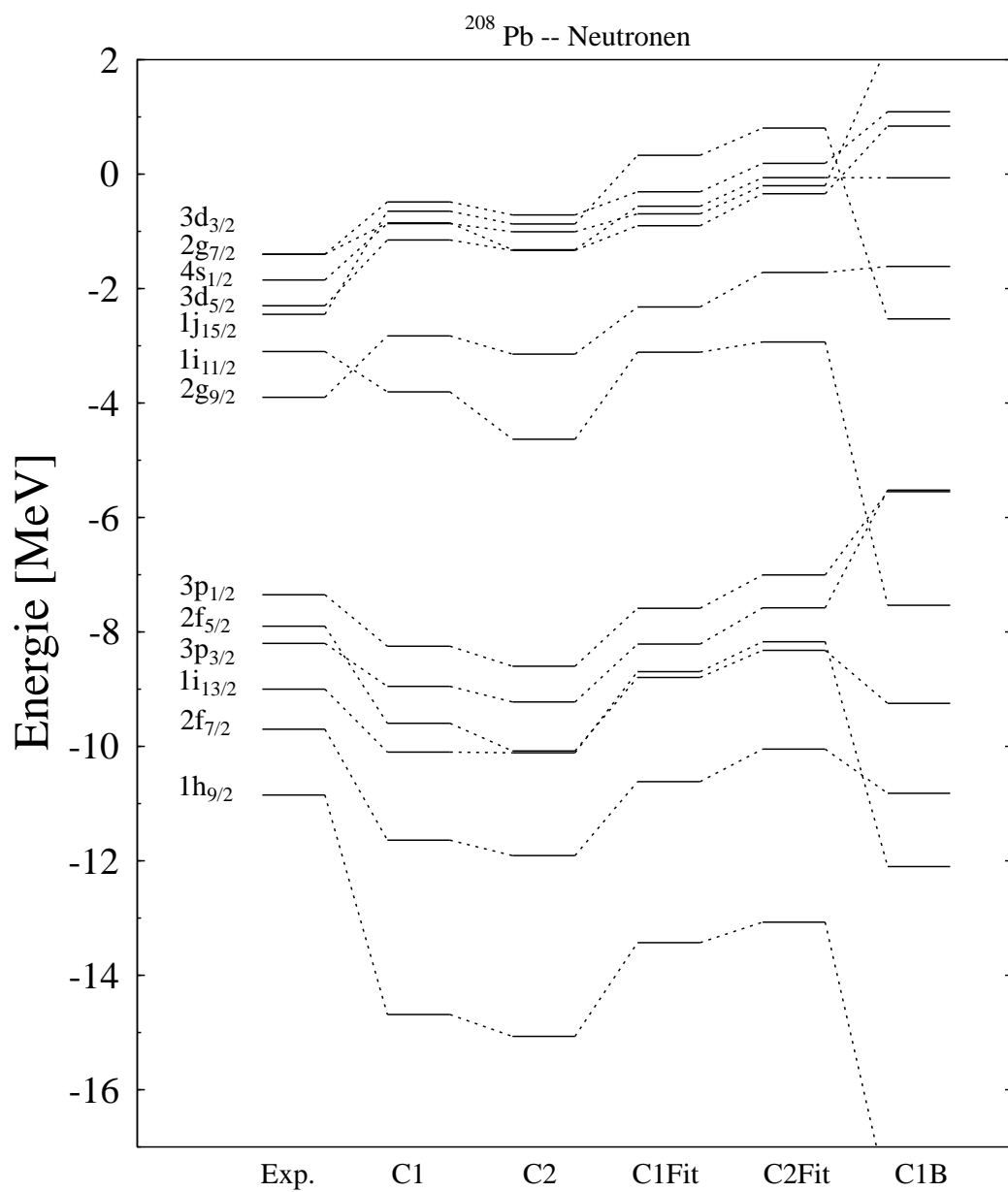


Abbildung 6.7: Einteilchenenergien der Neutronen in Blei

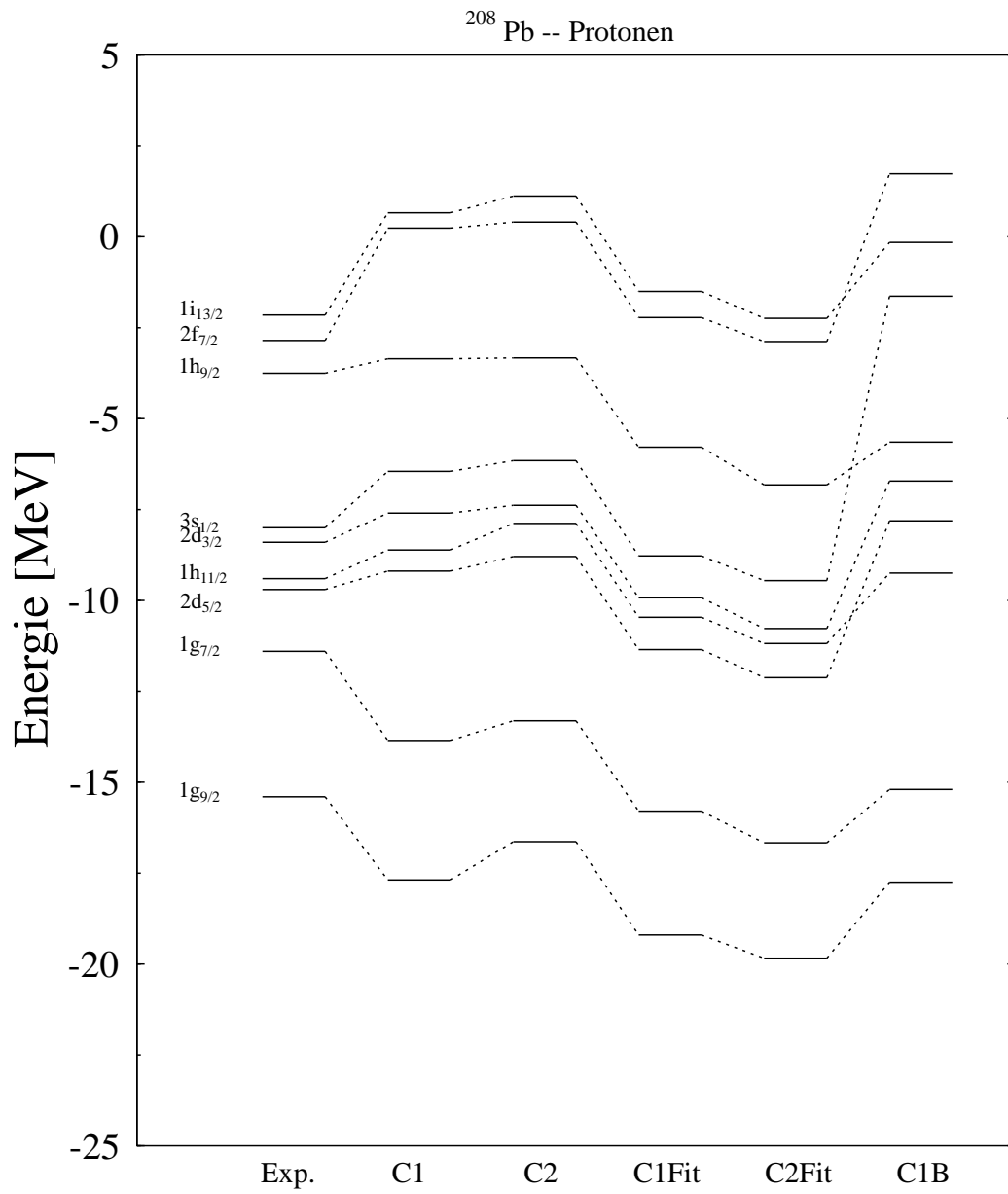


Abbildung 6.8: Einteilchenenergien der Protonen in Blei

berücksichtigt wird. In der Auswahl der in den Fit einbezogenen Observablen liegt eine wesentliche Subjektivität. Diese hat direkten Einfluß auf die Ergebnisse (siehe Abschnitt 6.1.8). Die Abstände im Energiespektrum allerdings sind sehr robust gegen Variation der Parameter. Das oben genannte Problem ließ sich weder durch Variation einzelner Parameter “von Hand”, noch durch einen Fit unter Einbeziehung der Abstände beheben.

6.1.6 Schalenabschlüsse und magische Kerne

Die Vorhersagen des Modells in bisher unbekannte Bereiche des Periodensystems werden zuverlässiger, wenn es die richtige Systematik für Schalenabschlüsse im bekannten Bereich der Nuklidkarte liefert. Das hier untersuchte chirale Modell erfüllt diese Bedingung bemerkenswerterweise schon dann recht gut, wenn die Parameter nur an unendliche Kernmaterie und die Vakuumeigenschaften der Hadronen angepaßt wurden. Das heißt, daß alle magischen Zahlen bis zu ^{208}Pb richtig reproduziert werden.

Exemplarisch zeigt Abb. 6.9 links die Energie pro Teilchen, die Zwei-Nukleonen-Separationsenergie und den Zwei-Nukleonen-Gap für Isotone mit 8 Neutronen und rechts das gleiche für Isotope mit 8 Protonen.

Man erkennt, daß die Bindungsenergie pro Teilchen für C1fit deutlich niedriger liegt als für C1. Der Grund dafür ist natürlich, daß C1fit unter anderem an die Bindungsenergie von ^{16}O angepaßt wurde und diese bei C1 zu groß war. In beiden Fällen hat aber die Bindungsenergie bei acht Protonen ein Minimum und der Zwei-Nukleonen-Gap eine Spitze: Acht ist eine magische Protonenzahl. Der Schalenabschluß ist in C1fit noch stärker ausgeprägt als im Kernmateriefit. Das gleiche gilt für die rechts im Bild zu sehenden Neutronen, so daß man ^{16}O als doppelt magischen Kern erhält, was den Beobachtungen entspricht. Wie Abb. 6.10 zeigt, ist auch die 20 sowohl für Neutronen als auch für Protonen eine magische Zahl. ^{40}Ca ist also, wie experimentell beobachtet, ein doppelt magischer Kern.

Besonders interessant ist das vor wenigen Jahren erstmalig bei der GSI produzierte Isotop ^{100}Sn . Dies ist der schwerste symmetrische, doppelt magische Kern. Er wird vom chiralen Modell richtig beschrieben und ist diesseits der Dripline (Abb. 6.11), wie es dem Experiment entspricht. Die experimentelle Bindungsenergie von ^{100}Sn wird bei C1fit auf $< 1\%$ genau reproduziert. Sie ist im Experiment $E_B = -825.8 \text{ MeV}$ und in der Rechnung mit C1fit $E_B = -829.3 \text{ MeV}$. Für

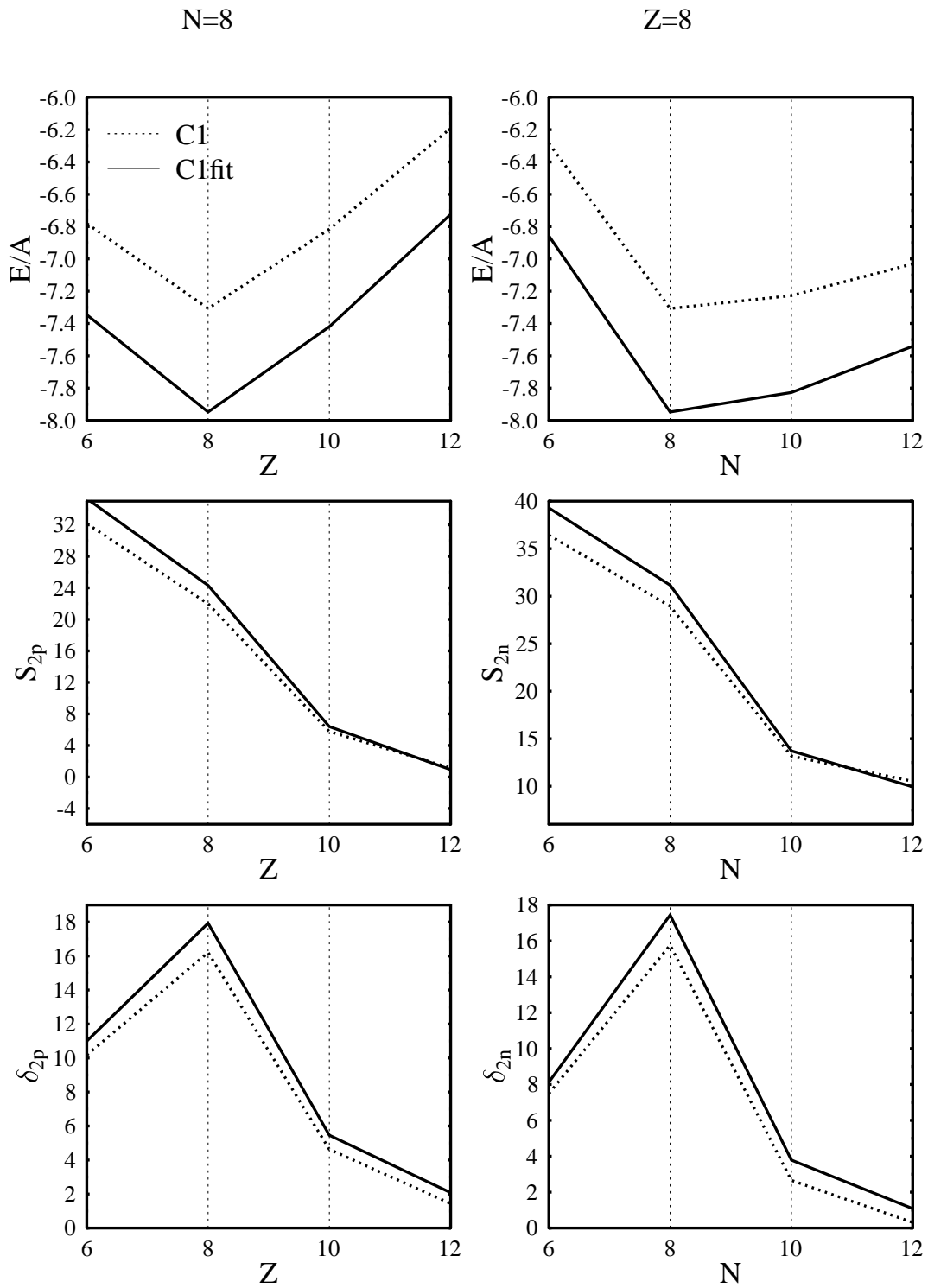


Abbildung 6.9: Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=8$ Neutronen und Isotope mit $Z=8$ Protonen. Es zeigt sich, daß ^{16}O ein doppelmagischer Kern ist.

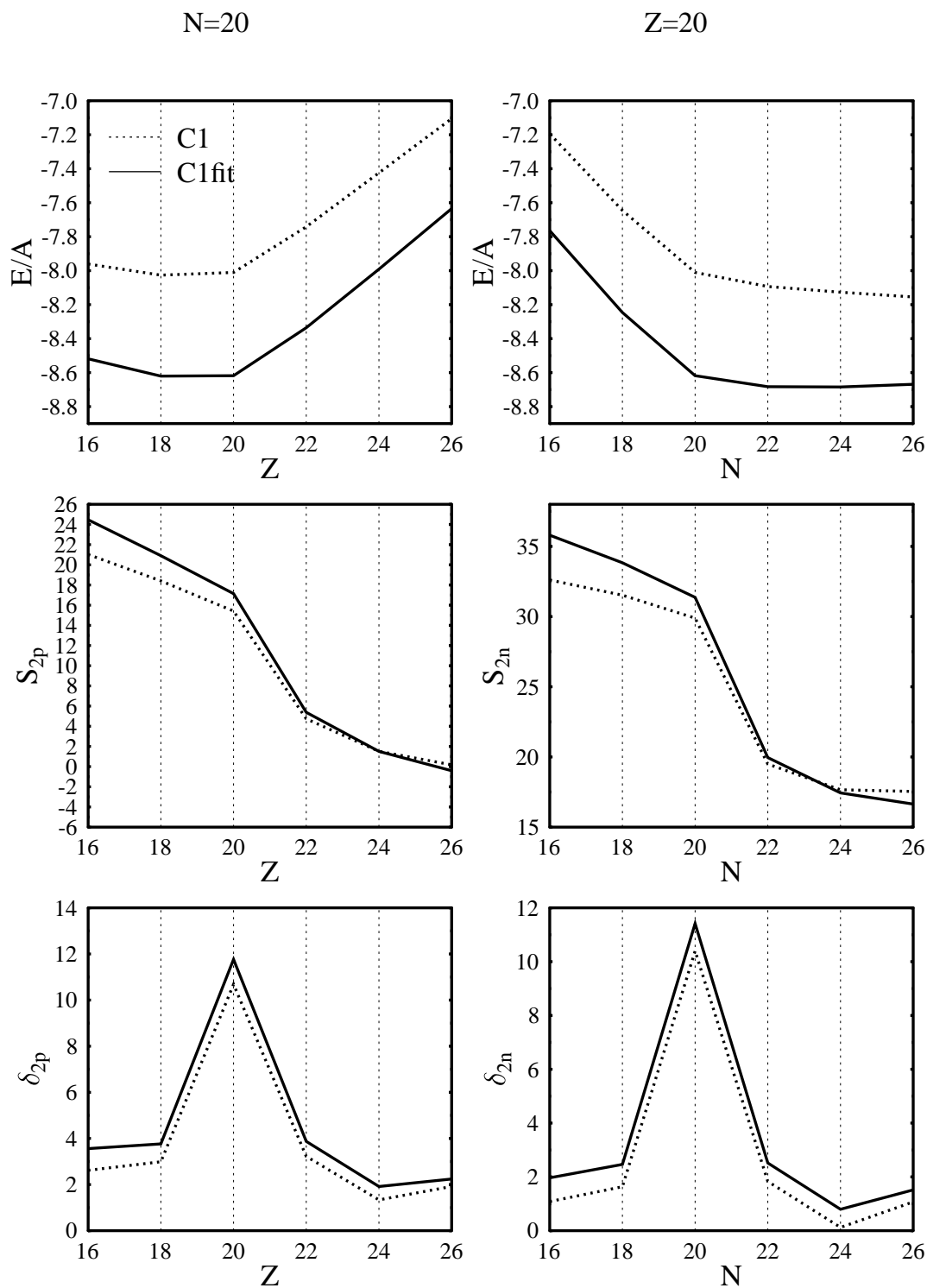


Abbildung 6.10: Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotope mit $N=20$ Neutronen und Isotope mit $Z=20$ Protonen. Offenbar hat man bei 20 Protonen und bei 20 Neutronen einen Schalenabschluß.

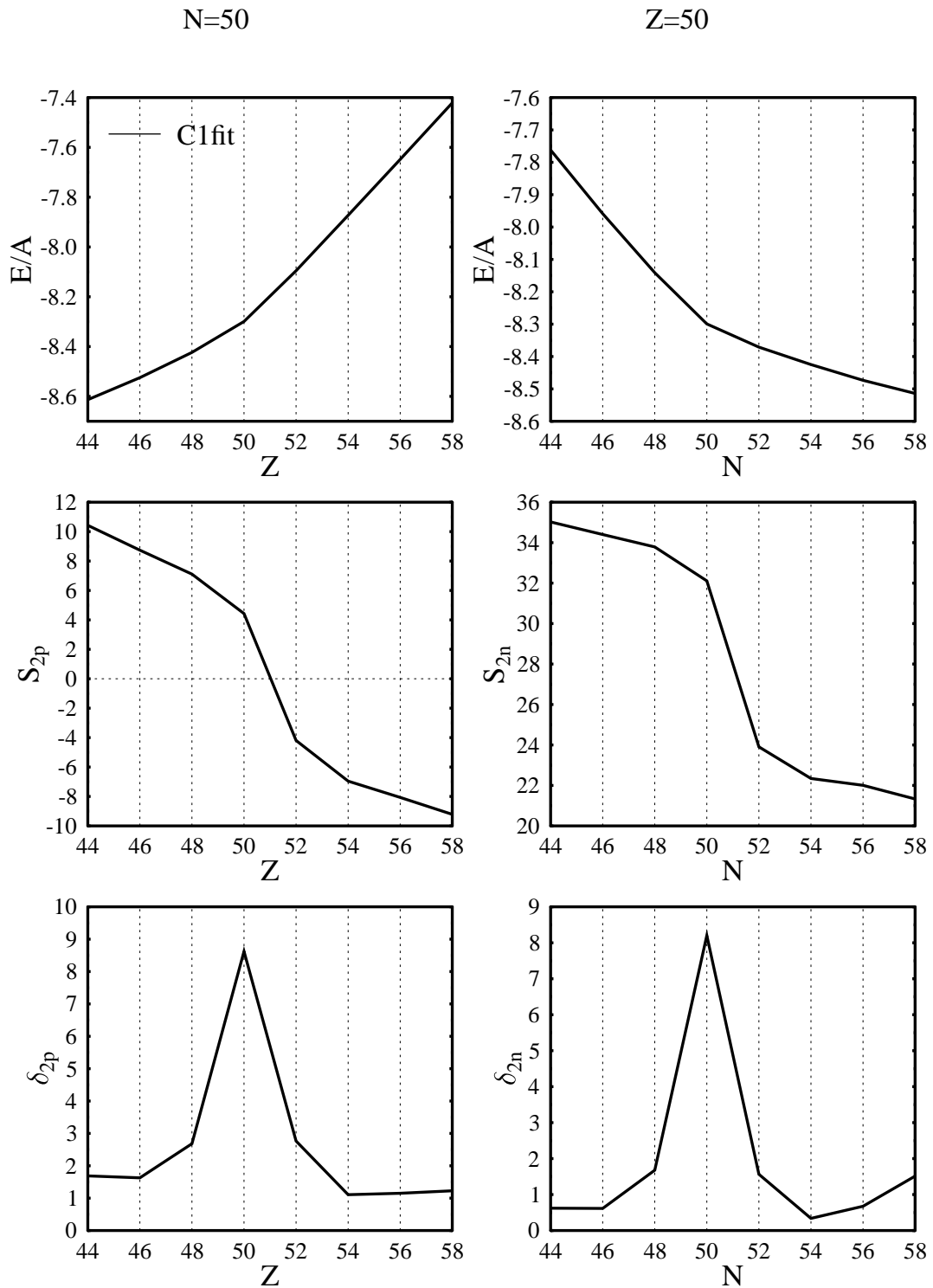


Abbildung 6.11: Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=50$ Neutronen und Isotope mit $Z=50$ Protonen. Man erkennt, daß ^{100}Sn doppelt magisch und stabil ist.

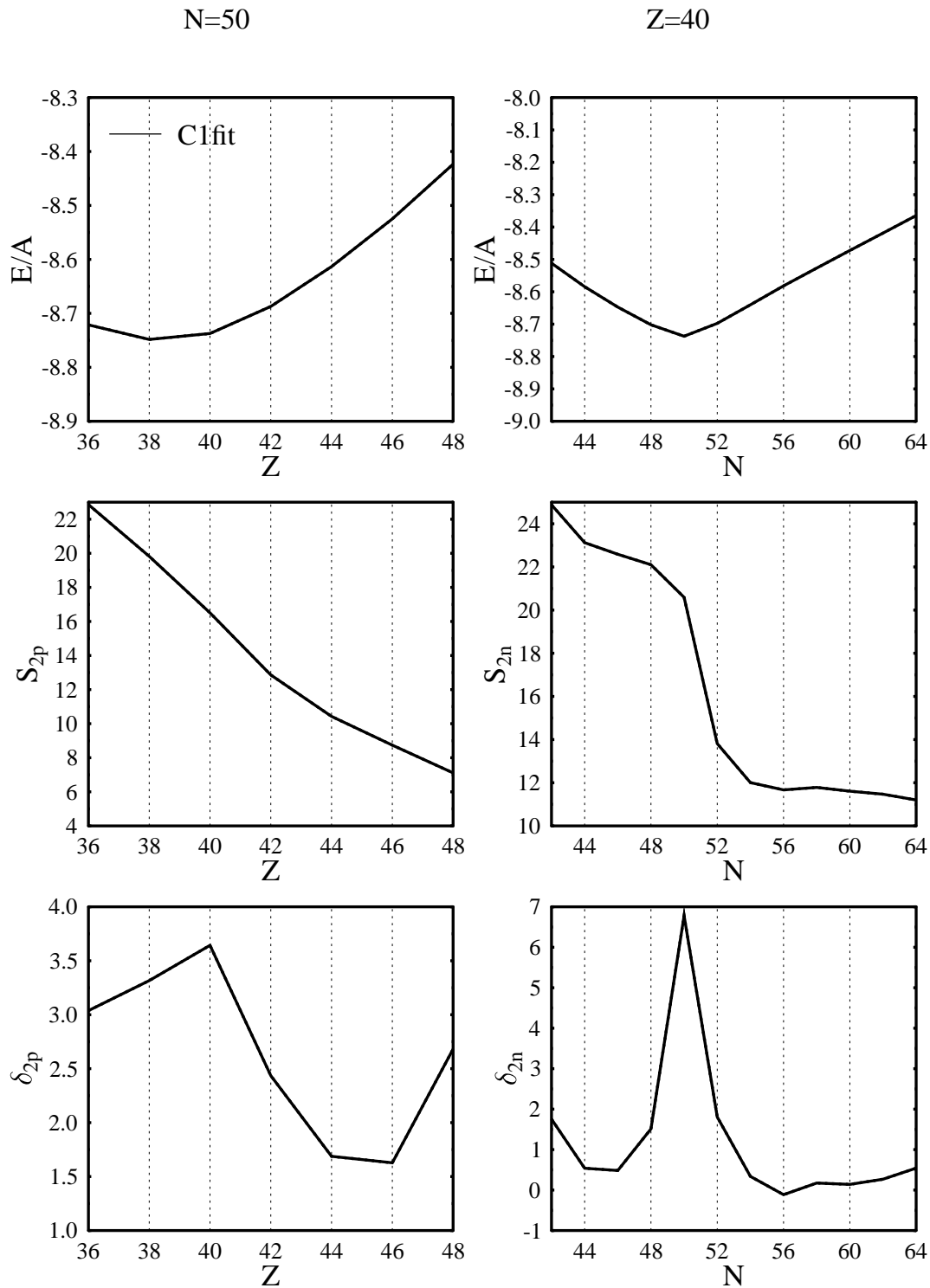


Abbildung 6.12: Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=50$ Neutronen und Isotope mit $Z=40$ Protonen. Der Kern ^{90}Zr ist interessant als Edukt bei der Produktion von superschweren Kernen mit $Z = 120$.

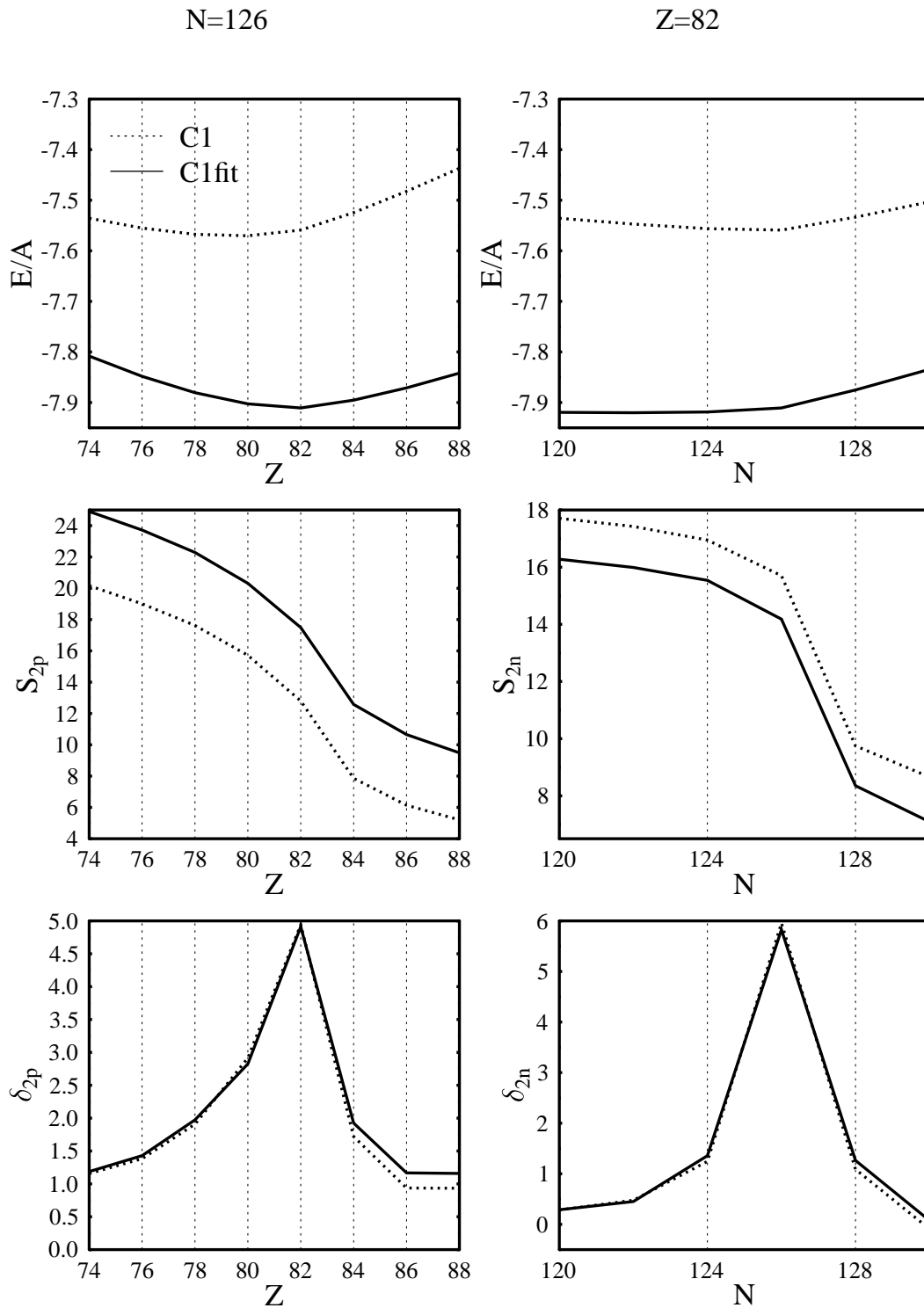


Abbildung 6.13: Energie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für verschiedene Isotone mit $N=82$ Neutronen und Isotope mit $Z=126$ Protonen. ^{208}Pb ergibt sich also als doppelt magisch.

C1 liegt der Wert bei $E_B = -847.5$ MeV.

In Kapitel 6.2 sollen superschwere Kerne untersucht werden, wobei vor allem die Frage nach eventuellen Schalenabschlüssen von großer Wichtigkeit ist. Um in diesem Bereich die Vorhersagekraft des Modells abschätzen zu können, sollte man unter anderem untersuchen, was sich für den schwersten doppelt magischen Kern ^{208}Pb ergibt. Abbildung 6.13 zeigt Kerne mit 126 Neutronen oder 82 Protonen. Es ist deutlich zu erkennen, daß sich ^{208}Pb als doppelt magischer Kern ergibt. Für den Fall, daß die Parameter nicht an Kerne angepaßt wurden, liegt das Minimum der Bindungsenergie pro Teilchen allerdings nicht bei 82 Protonen, wie es sich aus den Experimenten ergibt. Erst bei einem Fit an Kerne ergibt sich hier das richtige Verhalten. Der Zwei-Nukleonen-Gap stimmt in beiden Rechnungen aber fast exakt überein, so daß man schon für C1 Blei als doppelt magischen Kern erhält.

Es wird später noch gezeigt werden, daß im Bereich der superschweren Kerne bei $Z = 120$ ein Schalenabschluß zu erwarten ist. In diesem Zusammenhang sollten auch Möglichkeiten aufgezeigt werden, wie sich ein solcher Kern herstellen läßt. Abb. 6.12 zeigt Kerne mit 40 Protonen oder 50 Neutronen und man sieht, daß ^{90}Zr ein doppelt magischer Kern ist. Würde man ihn mit dem ebenfalls doppelt magischen Kern ^{208}Pb fusionieren, so bekäme man einen Kern mit 122 Protonen und 176 Neutronen. Wir wollen darauf im Abschnitt 6.2 näher eingehen.

6.1.7 Braucht man den ω^4 -Term wirklich?

In [Pap98] wurde gezeigt, daß der ω^4 -Term im chiralen $SU(3)$ -Modell notwendig ist, um die effektive Nukleonenmasse auf unter $m_N^* = 0.65 m_N$ und gleichzeitig die Kompressibilität in dem für Kerne akzeptablen Bereich von $K = 180 - 360$ MeV zu halten. Eine direkte Folge davon ist, daß die Energie des Antinukleons erst bei sehr hohen Baryondichten überkritisch wird, wie man in Abb. 6.14 erkennen kann. Das heißt also, der ω^4 -Term macht die Zustandsgleichung weicher.

Hier soll nun kurz gezeigt werden, daß das Modell ohne den quartischen Wechselwirkungsterm des ω -Mesons nicht in der Lage ist, Kerne richtig zu beschreiben. In Abb. 6.7 und 6.8 sind in der rechten Spalte (C1B) die Einteilchen-Energie für Protonen und Neutronen aufgetragen. Man sieht sofort, daß die Energielücken und die Spin-Bahn-Aufspaltungen nirgendwo auch nur annähernd richtig wiedergegeben werden. Auch die Verteilung der Ladungsdichte zeigt in diesem Modell eine extreme Abweichung vom Experiment (Fig. 6.15). Besonders gravierend ist

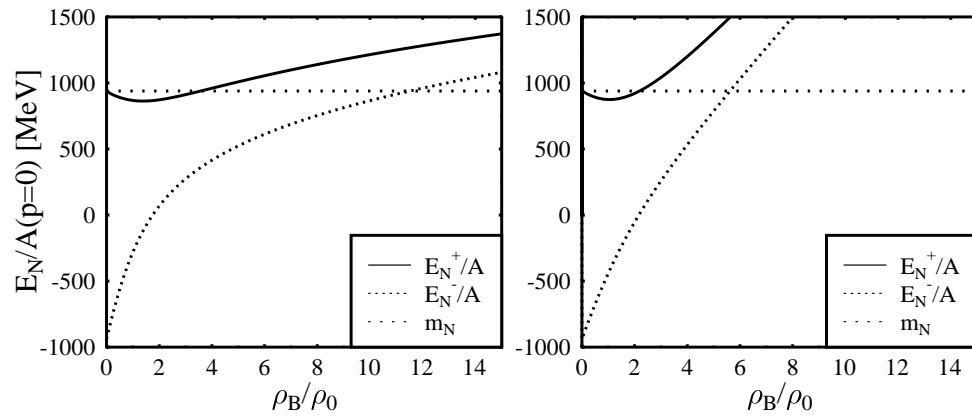


Abbildung 6.14: Energie von Nukleonen und Antinukleonen. Links mit ω^4 -Term, rechts ohne ω^4 -Term

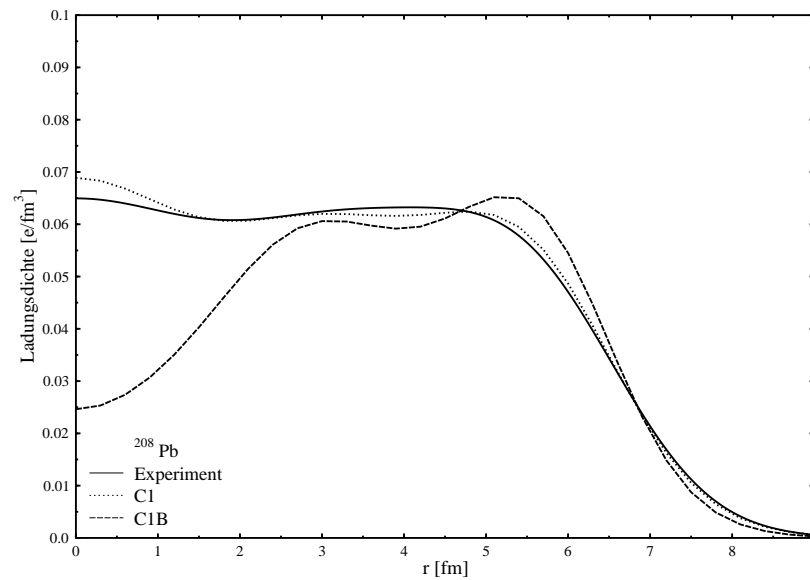


Abbildung 6.15: Ladungsdichteverteilung in ^{208}Pb in einem Modell mit (C1) und ohne (C1B) ω^4 -Term.

die Änderung des Radius und der Oberflächendicke des Kernes durch die starke Abweichung der Flanke der Ladungsverteilung vom Experiment. Darüber hinaus ergibt sich der Kern ohne ω^4 -Term in der Mitte als quasi hohl. Ähnliche Effekte werden wir später noch bei den superschweren Kernen finden. Man erhält diesen Effekt übrigens nur beim Bleikern derartig ausgeprägt. In ^{16}O und ^{40}Ca ist der Einfluß des ω^4 -Terms auf Radius und die Oberflächendicke zwar ähnlich stark, eine Absenkung der Ladungsdichte im Zentrum des Kernes beobachtet man aber bei Kalzium überhaupt nicht und bei Sauerstoff nur um knapp 10 % gegenüber den anderen Rechnungen. Zusammenfassend kann man also festhalten, daß der quartische Wechselwirkungsterm der Vektormesonen im chiralen Modell unbedingt erforderlich ist, insbesondere um die Diffraktionsradien und Oberflächendicken der Kerne richtig reproduzieren zu können. Im nichtlinearen RMF-Modell ist dies nicht der Fall.

6.1.8 Wie glaubwürdig ist ein Multiparameterfit?

Nachdem in den vorausgegangenen Abschnitten die Resultate eines Multiparameter-Fits gezeigt wurden, stellt sich natürlich die Frage nach der Eindeutigkeit einer solchen Bestimmung der Parameter. Diese hängt eng mit der Glaubwürdigkeit der Ergebnisse zusammen. Sind nämlich die Aussagen eines Modells sehr stark von der Wahl der Parameter abhängig, so sind sie auch direkt von der Wahl der Observablen, der Fit-Kerne und davon, in welchem lokalen Minimum ein Fit endet, abhängig. Die wesentliche Eigenschaft einer χ^2 -Funktion, welche von vielen Parametern abhängt, ist nämlich, daß die Zahl der lokalen Minima mit der Zahl der Parametern stark zunimmt. Abb. 6.16 zeigt die χ^2 -Funktion in Abhängigkeit von zwei Parametern des Modells. Die Werte der Minima sind in der Abbildung nicht genau, weil die Daten extrapoliert wurden. Man findet eine Kette von Minima, die alle ungefähr die gleiche Tiefe haben. In welchem Minimum der Fit endet, hängt von der Wahl der Startwerte ab, wobei aber bei Kenntnis der Minima nicht vorhergesagt werden kann, welcher Startpunkt zu welchem Minimum führt. Letzten Endes hat man also die Wahl zwischen einer sehr großen Zahl von völlig verschiedenen Parametersätzen, die alle ein ähnliches χ^2 liefern und damit die Observablen, welche in den Fit einbezogen wurden, ähnlich gut reproduzieren. Wichtig ist, daß das χ^2 über alle anderen Observablen nur in so fern eine Aussage macht, als diese mit den Fit-Observablen verknüpft sind.

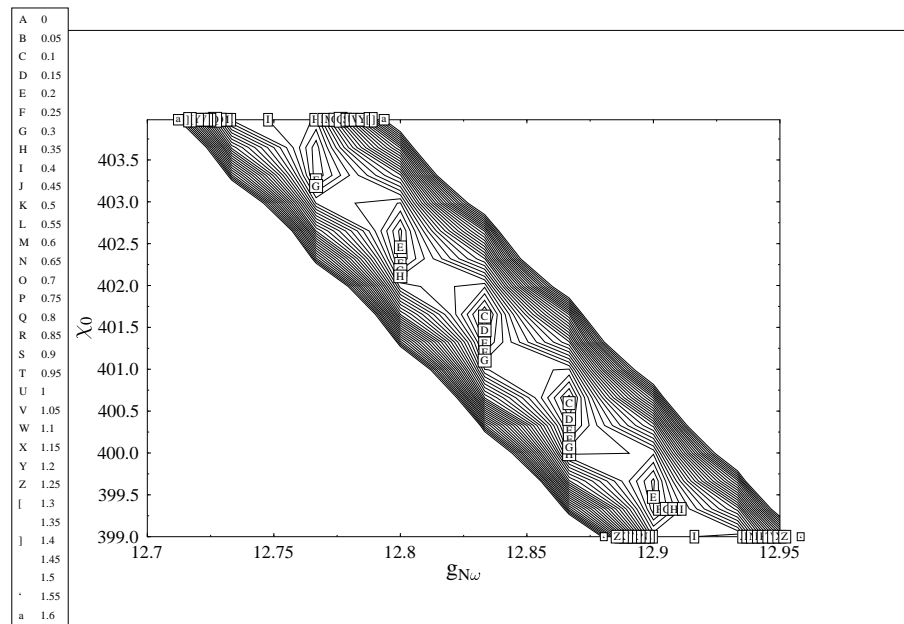


Abbildung 6.16: χ^2 -Landschaft für ein von zwei Parametern abhängiges χ^2 .

Möchte man also einem Modell Glaubwürdigkeit im Bezug auf Vorhersagen verleihen, so muß man untersuchen, ob alle Observablen richtig beschrieben werden. Dabei spielt es keine wesentliche Rolle, ob der absolute Wert des χ^2 etwas größer oder kleiner ist. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, zu betrachten, in wie weit qualitative Aussagen des Modells, wie zum Beispiel Schalenabschlüsse, von der Wahl der Parameter abhängig sind. Eine möglichst robuste Unabhängigkeit ist hier natürlich wünschenswert.

Im hier untersuchten chiralen $SU(3)$ -Modell beobachtet man tatsächlich, daß die qualitativen Aussagen weitgehend parameterunabhängig sind und man für den Fit an Kernmaterie qualitativ fast überall die gleichen Ergebnisse erhält wie beim Fit an endliche Kerne, wie in den letzten Abschnitten ja deutlich gezeigt wurde. Bei den quantitativen Resultaten hat es natürlich eine deutliche Verbesserung gegeben, das χ^2 hat sich ja um mehr als einen Faktor zwanzig verbessert. So werden auch Kerne, die nicht in den Fit eingehen, wie zum Beispiel ^{100}Sn , deutlich besser beschrieben. Darüber hinaus war die Bindungsenergie für 126 Neutronen erst nach dem Fit bei 82 Protonen, also Blei, minimal, wie es das Experiment fordert. Seine Glaubwürdigkeit für Vorhersagen in den Bereich der superschweren Elemente erhält das Modell aber vor allem dadurch, daß es sehr robust gegen

Variationen der Parameter ist.

6.2 Superschwere Elemente

Die Suche nach Elementen mit Ordnungszahlen größer als 110 ist derzeit eine der aktuellsten Herausforderungen der experimentellen Kernphysik. Nachdem die an der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt gefundenen Elemente 110 und 112 ([Hof95, Hof96]) für einige Jahre die schwersten waren, wurden möglicherweise im Laufe dieses Jahres Kerne mit Protonenzahlen von 114 [Oga99] und 118 [Nin99] entdeckt, welche durch einen Beschuß von ^{208}Pb mit ^{86}Zr unter Verlust eines Neutrons entstanden sein sollen.

Motiviert wird diese Suche vor allem dadurch, daß die Theorie schon seit längerem Vorhersagen zu weiteren Schalenabschlüssen jenseits von $Z = 110$ macht. In der Vergangenheit wurden solche Rechnungen in RMF-Modellen unter anderem in Frankfurt durchgeführt [Rut97, Ben99].

Im folgenden sollen nun die Vorhersagen des chiralen $SU(3)$ -Modells vorgestellt werden.

6.2.1 Schalenabschlüsse

Wie schon erwähnt, ist eine der wichtigsten Fragen im Bereich der superschweren Kerne diejenige nach den Schalenabschlüssen. Gängige Vorhersagen waren in RMF-Modellen $Z = 114$, $Z = 120$ und auch $Z = 126$, abhängig von der Wahl der Parametrisierung [Rut97, Ben99, Bur98]. Im chiralen Modell erhält man eindeutig $Z = 120$ als magische Zahl, während $Z = 114$ nur schwach ausgeprägt ist. Abb. 6.17 zeigt die Bindungsenergie E/A , Separationsenergie $S_{2p/n}$ und den Zwei-Nukleonen-Gap $\delta_{2p/n}$ für 172 Neutronen bzw. 120 Protonen für drei verschiedene Parametersätze. C1 und C1fit sind bereits bekannt. Für den Parametersatz C1hs wurde Sauerstoff nicht in den Fit mit einbezogen, dafür aber die Bindungsenergie von ^{264}Hs . Es ist zu erwarten, daß ein solcher Parametersatz die zuverlässigsten Vorhersagen für superschwere Kerne liefert. Der Zwei-Nukleonen-Gap zeigt deutlich, daß im chiralen Modell $Z = 120$ als magische Zahl vorhergesagt wird. Dabei ist allerdings zu beachten, daß für den an unendliche Kernmaterie angepaßten Parametersatz C1 dieser Kern nicht stabil ist, weil er jenseits der Dripline liegt (Seine Separationsenergie ist negativ). Interessant ist, daß für den Fit mit Hassium (C1hs) der Gap bei $Z = 120$ noch deutlicher ausgeprägt ist als für die anderen Sätze. Das von anderen Modellen als magisch vorausgesagte $Z = 114$ ist um so weniger ausgeprägt, als die Parameter den superschweren Kernen Rechnung

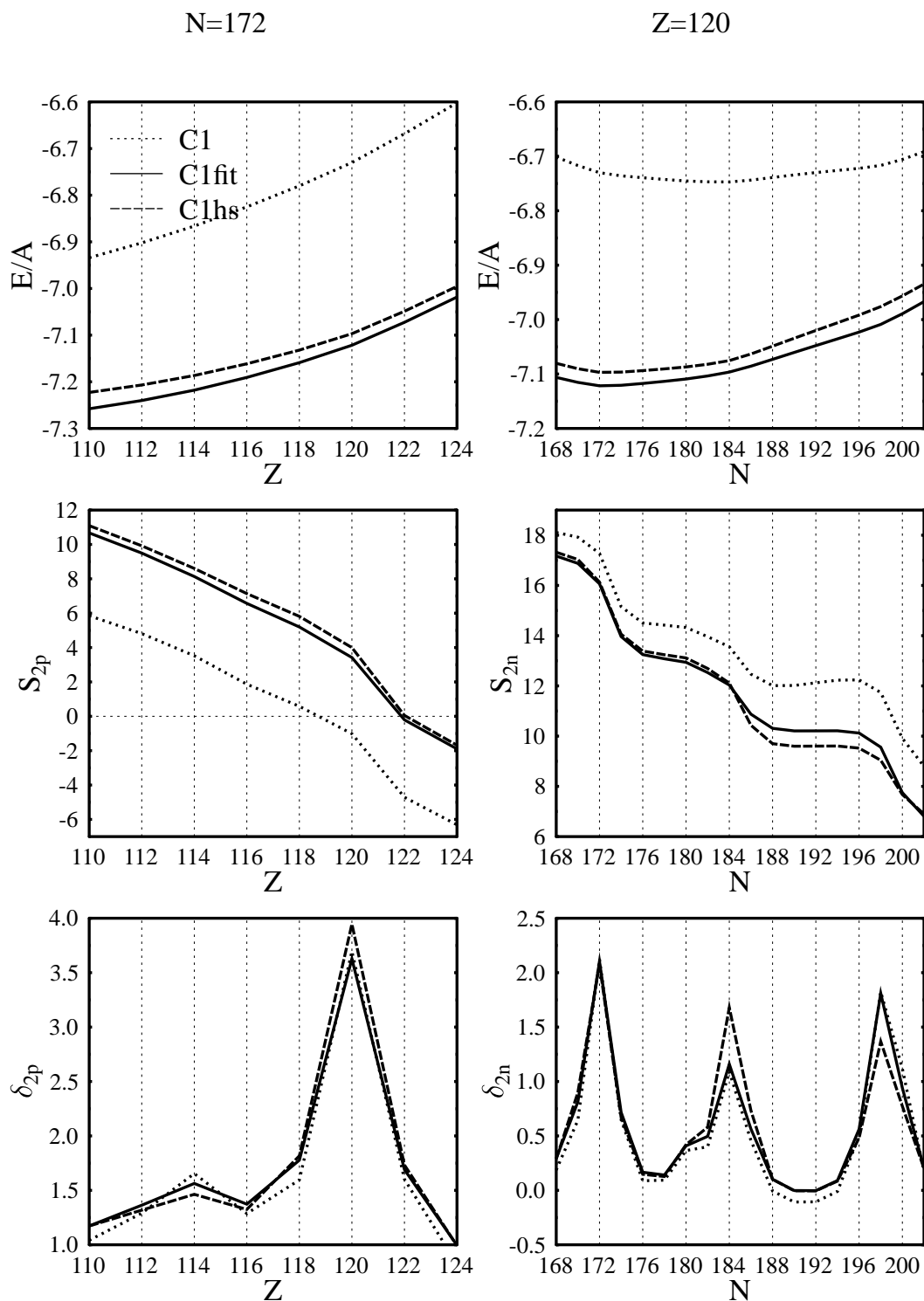


Abbildung 6.17: Bindungsenergie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für 172 Neutronen bzw. 120 Protonen. Magische Protonenzahl ist hier 120. 114 ist nur sehr schwach ausgeprägt und allenfalls eine Unterschale. Für die Neutronen hat man 172, 184 und 198 als Schalenabschlüsse.

tragen. Im großen und ganzen ist aber die qualitative Vorhersage unabhängig von den Parametern.

Wie man rechts in Abb. 6.17 sehen kann, ergeben sich als magische Neutronenzahlen $N = 172$, $N = 184$ und $N = 198$, wobei aber der Fit an Hassium eine deutliche Veränderung der Ausprägung der Gaps zu Gunsten von $N = 184$ vor $N = 198$ bringt. $^{292}120$ ist auch deshalb besonders interessant, weil er in unmittelbarer Nähe des kürzlich gefundenen Kerns $^{293}118$ liegt [Nin99]. Erstens könnte eine Herstellung dieses Kerns in absehbarer Zeit möglich sein und zweitens sind Extrapolationen zu $Z = 120$ möglich. Abbildung 6.18 zeigt Bindungsenergie pro Teilchen E/A , Separationsenergie $S_{2p/n}$ und Zwei-Nukleonen-Gap $\delta_{2p/n}$ für 184 Neutronen bzw. 120 Protonen. Bei dieser Neutronenzahl ist jetzt auch für C1 das Element $Z = 120$ diesseits der Dripline, wobei hier für alle Parametersätze der Zwei-Nukleonen-Gap gleich stark ausgeprägt ist. Bei $Z = 114$ ist jetzt besonders deutlich zu sehen, daß hier kein Schalenabschluß vorliegt, allenfalls eine Unterschale.

6.2.2 Ladungsverteilung und α -Zerfall

Eine Besonderheit der Superschweren Kerne scheint in der Verteilung ihrer Ladung zu liegen, wie sie für das chirale Modell in Abb. 6.20 zu sehen ist. Man erkennt, daß die Ladungsdichte in der Mitte des Kerns drastisch abnimmt. Diese Beobachtung wurde auch in Rechnungen mit dem Walecka-Modell gemacht [Ben99]. Ist diese Ladungsverteilung auf einen Aufbau des Kerns zurückzuführen, der an die Fullerene (*Bucky-Balls*) aus der organischen Chemie erinnert? Der besagte superschwere Kern hat gerade 120 Protonen, was 60 α -Teilchen entspricht. Diese könnten sich, durch Valenzneutronen zusammengehalten, zu einer Fußballstruktur, wie in Abb. 6.19 gezeigt, zusammensetzen [GreP]. Diese Möglichkeit wird in Zukunft noch eingehend untersucht werden müssen. Leichtere derartige Cluster wurden bereits von W. von Oertzen untersucht [Oer95].

Hat man experimentell einen neuen Kern hergestellt, kann man ihn identifizieren, indem man seine α -Zerfallsreihe beobachtet. Hier sind die kinetischen Energien der ausgesandten α -Teilchen die charakteristischen Größen. In Abbildung 6.21 sind die Energien der Alphateilchen der Zerfallskette von $^{292}120$ aufgetragen, wie sie sich aus dem chiralen Modell ergeben. Man beobachtet, daß diese für die ganze Reihe zwischen 118 und 108 ungefähr gleich groß sind, was qualitativ den neusten Experimenten zu $Z = 118$ zu entsprechen scheint. Man muß

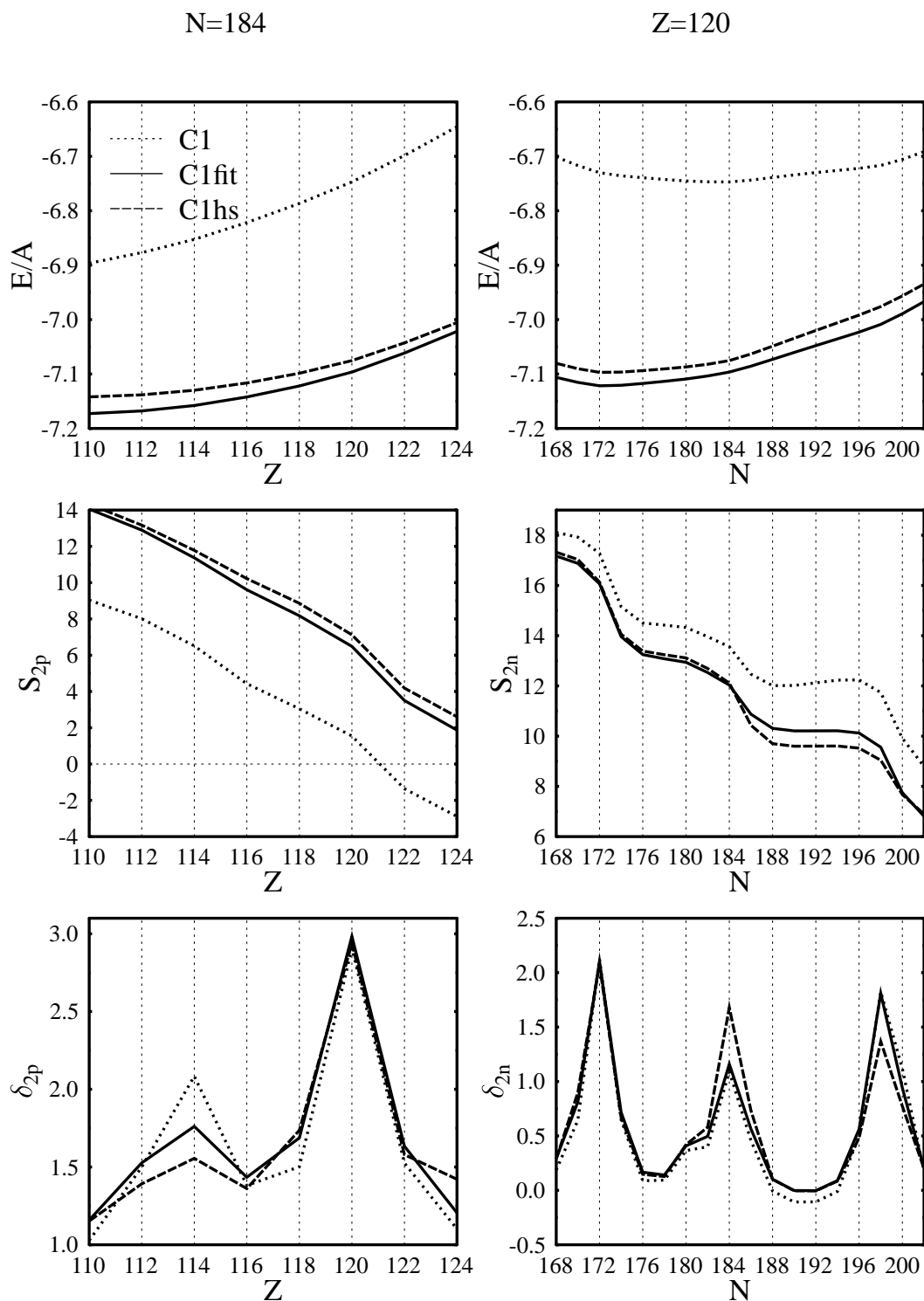


Abbildung 6.18: Bindungsenergie pro Teilchen, Separationsenergie und Zwei-Nukleonen-Gap für 184 Neutronen bzw. 120 Protonen. Man erhält im Bereich der Protonen 120 als magische Schale, während 114 weniger ausgeprägt ist. Für die Neutronen sind 172, 184 und 198 magische Schalen.

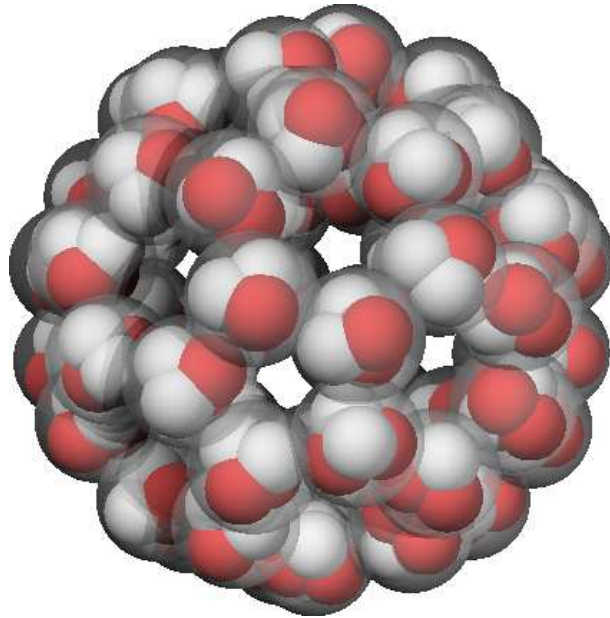


Abbildung 6.19: Struktur eines Bucky-Balls mit 60 α -Teilchen

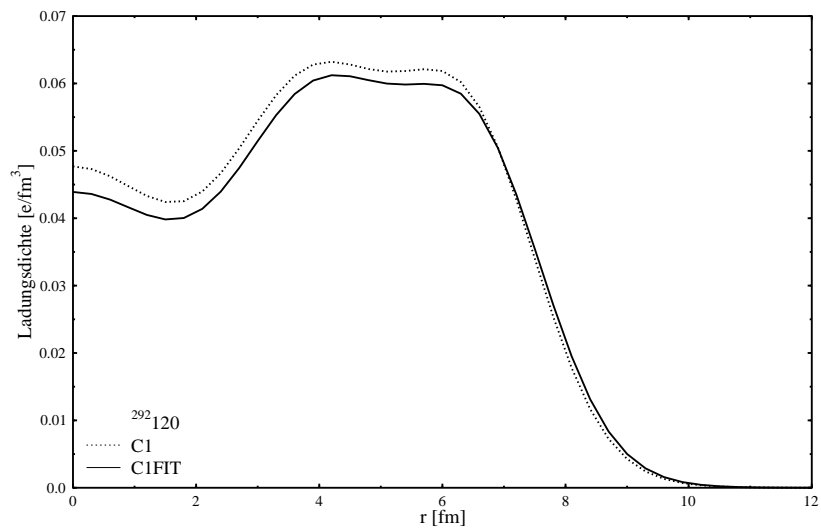


Abbildung 6.20: Ladungsdichteverteilung in $^{292}_{120}$. Auffällig ist die geringe Ladungsdichte im Innern des Kerns.

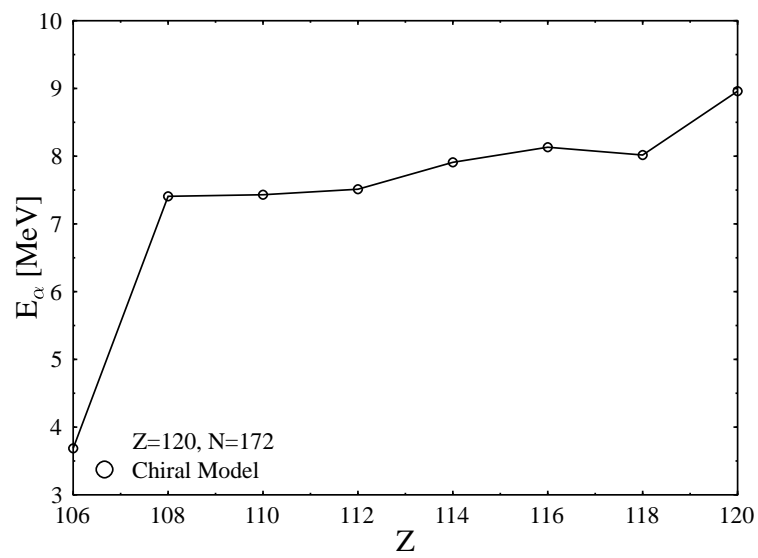


Abbildung 6.21: *Energien des α -Zerfalls von $^{292}120$*

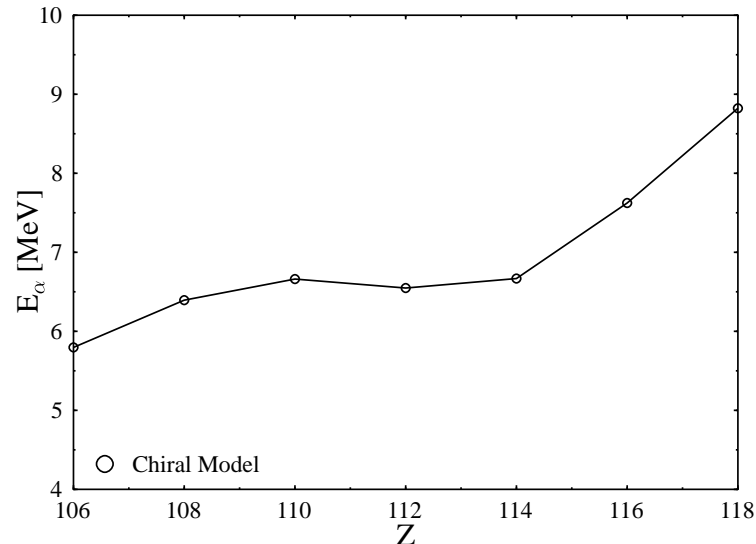


Abbildung 6.22: *Energien des α -Zerfalls von $^{293}118_{175}$*

hier allerdings berücksichtigen, daß die Rechnungen in der Näherung sphärischer Symmetrie durchgeführt wurden, was man bestenfalls für den doppelt magischen Kern bei $Z=120$ als gegeben annehmen kann. Für alle anderen Schritte der Kette muß man mit Abweichungen rechnen. Interessant ist natürlich auch die Zerfallsreihe des kürzlich gemessenen Kerns $^{293}118_{175}$ (Abb. 6.22). Hier findet man ein etwas stärkeres Abfallen der α -Energien im Verlauf der Zerfallskette. Qualitativ entspricht auch das dem Experiment, wobei dort aber insgesamt höhere Energien gemessen wurden [Nin99]. Zusammenfassend kann man also sagen, daß nach dem chiralen Modell $Z = 120$ als nächster Schalenabschluß zu erwarten ist. Dieses Ergebnis ist weitgehend unabhängig von der Wahl der Parameter. Die früher häufig vorhergesagte $Z = 114$ wird vom chiralen Modell nicht bestätigt. Die weitgehende Konstanz der α -Energien kann als ein weiterer Hinweis auf die Fußballstruktur von $Z=120$ gewertet werden.

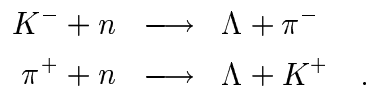
6.2.3 Möglichkeiten der Herstellung eines doppelmagischen, superschweren Kerns

Offenbar könnte es im Bereich der superschweren Kerne interessante Phänomene geben, wie sie bisher nicht beobachtet wurden. Man sollte sich also auch Gedanken darüber machen, wie man solche Kerne experimentell herstellen kann. Aus den Ergebnissen in Abschnitt 6.1 kann man zwei vielversprechende Möglichkeiten der Produktion ableiten. Interessant sind hier die doppelmagischen Einschußkanäle mit ^{90}Zr und ^{208}Pb einerseits, sowie ^{122}Zr und ^{208}Pb andererseits. Die erste Möglichkeit ergäbe einen Kern mit 122 Protonen und 176 Neutronen, aus welchem durch α -Zerfall und Abdampfen zweier Neutronen der doppelmagische Kern $^{292}120$ entstehen könnte [StoeP]. Die zweite Kombination ergäbe einen Kern mit 122 Protonen und 208 Neutronen, welcher auf ähnliche Weise einen noch Neutronenreicheren Kern mit 120 Protonen ergeben könnte.

Diese Vorschläge sind hier natürlich noch sehr spekulativ und müssen erst in zukünftigen Untersuchungen verifiziert werden.

6.3 Hyperkerne

Nicht nur in den Bereich der sehr schweren neuen Kerne läßt sich das Periodensystem der Elemente erweitern. Durch Einbeziehung neuartiger Baryonen, die neben den üblichen up- und down-Quarks auch seltsame (*strange*) Quarks enthalten, entstehen sogenannte Hyperkerne. Das erste Mal wurde ein Hyperkern experimentell 1953 von Danysz und Paiewski beobachtet [Dan53]. Hyperkerne haben eine Lebensdauer von ungefähr 10^{-10} s und legen daher im Experiment bis zu ihrem Zerfall eine Strecke von einigen Zentimetern zurück. In Messungen konnten einige Zeit später Hyperkerne mit Massenzahlen bis zu $A = 15$ hergestellt werden [Jur73, Can74]. Die Beobachtung größerer Kerne scheiterte daran, daß deren Spuren in der Emulsion zu kurz wurden, weil die Reichweite der Kerne mit der Massenzahl abfällt. Mitte der siebziger Jahre wurden am CERN in Genf [Bru76, Bru78, Ber79, Ber80, Ber81] und am AGS in Brookhaven [Bon74, Chr79, May81, Chr88] dann auch schwerere Hyperkerne und auch angeregte Zustände gemessen. Um die Hyperkerne herzustellen machte man sich folgende Reaktion zunutze:



Eine theoretische Beschreibung von Hyperkernen wurde u.a. in Skyrme-Hartree-Fock-Modellen (z.B. [Mil88, Ine96]) und relativistischen Mean-Field-Modellen (z.B. [Mar89, Ruf88]) versucht. Im folgenden sollen nun einige Rechnungen zu Hyperkernen im chiralen Modell vorgestellt werden. Abbildung 6.23 zeigt die Einteilchenenergien der Λ -Teilchen in einigen Kernen. Dabei ist die Bindungsenergie der Λ -Teilchen gegen $A^{-2/3}$ aufgetragen, was in etwa antiproportional zur Oberfläche des Kerns ist. Die Parameter wurden an endliche Kerne angepaßt (C1Fit). Alle Einteilchen-Niveaus laufen beim Wert des Potentials eines Λ in Kernmaterie zusammen, wie es sein soll. Man muß jedoch bedenken, daß es im chiralen Modell möglich ist, die Tiefe des Λ -Potentials in Kernmaterie mit Hilfe der expliziten Symmetriebrechung einzustellen, ohne dabei die Ergebnisse für normale Kerne zu beeinflussen. Das Kernmateriepotential ist also eigentlich nur eine weitere in den Fit eingehende Observable. Die Leistung des Modells liegt in der richtigen Beschreibung der Niveaus in endlichen Kernen, also in der Reproduktion der gezeigten Einteilchenenergien, welche vor allem für die tiefer gebundenen Niveaus recht gut gelingt. Eine Ausnahme bildet hier allerdings das $1s$ -Niveau

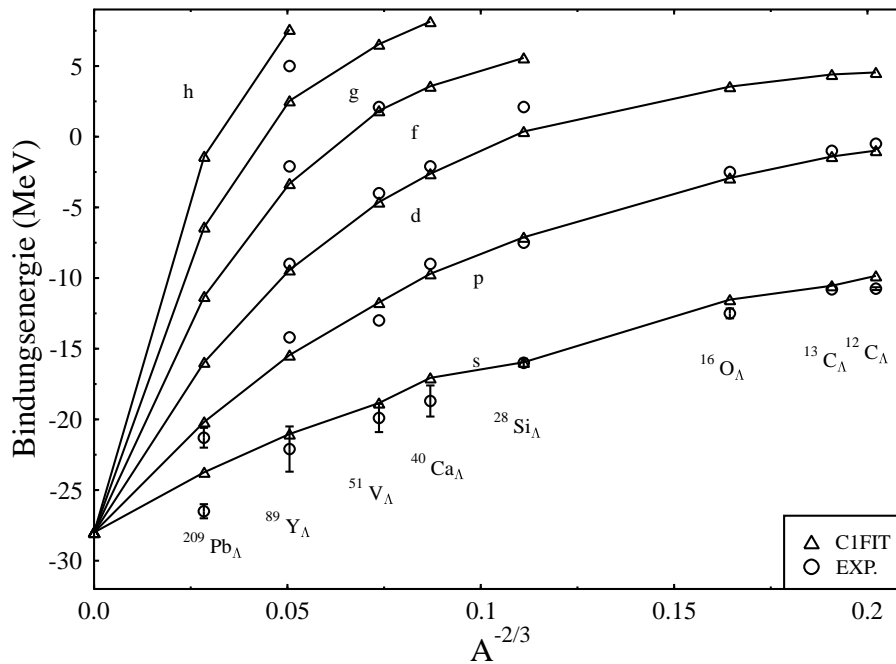
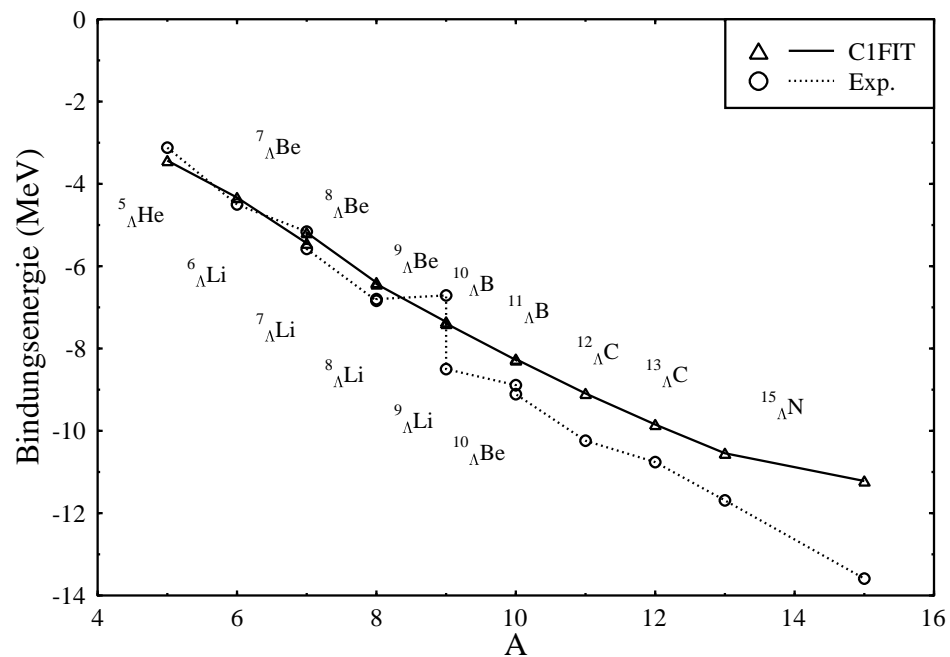


Abbildung 6.23: Einteilchen-Niveaus von Λ -Teilchen in verschiedenen Kernen. (Experimentelle Daten: [Aji95, Has96].)

in ^{208}Pb . Es ist wesentlich stärker gebunden als in der Rechnung. Man müsste allerdings einwenden, daß dieses experimentelle Resultat sogar einem Kernmateriepotential von -28 MeV widerspricht, weil das Λ -Niveau selbst schon bei -26.5 MeV liegt. Die Bestimmung des Kernmaterie-Werts erfolgt ja gerade über die Extrapolation der endlichen Kerne.

Ähnlich sieht es bei älteren Rechnungen mit relativistischen Mean-Field-Modellen aus [Sch92, Ruf90], wo man teilweise zu noch etwas weniger tiefen Kernmaterie-Potentialen kommt. In Abbildung 6.24 ist die Bindungsenergie von Λ -Baryonen in leichten Kernen aufgetragen (gerechnet wurde das 1-s-Niveau in einem Kern ohne Λ). Für die leichten Kerne ist die Übereinstimmung mit dem Experiment sehr gut, für die schwereren wird die Abweichung größer. Das ist vor allem deshalb erstaunlich, weil man von einer Mean-Field-Rechnung bei kleineren Kernen größere Fehler erwarten sollte. Unter diesem Gesichtspunkt sollte man übrigens auch die gute Übereinstimmung bei den leichten Kernen bewerten. Wesentlich ist hier, daß die Rechnungen einen etwas anderen Trend aufweisen als das Experiment (die Experimentkurve verläuft etwas steiler). Außerdem werden die teilweise zwischen Kernen gleicher Masse auftretenden Energieunterschiede vom Modell nicht reproduziert. Trotzdem ist das Ergebnis zufriedenstellend, wenn man bedenkt, daß in

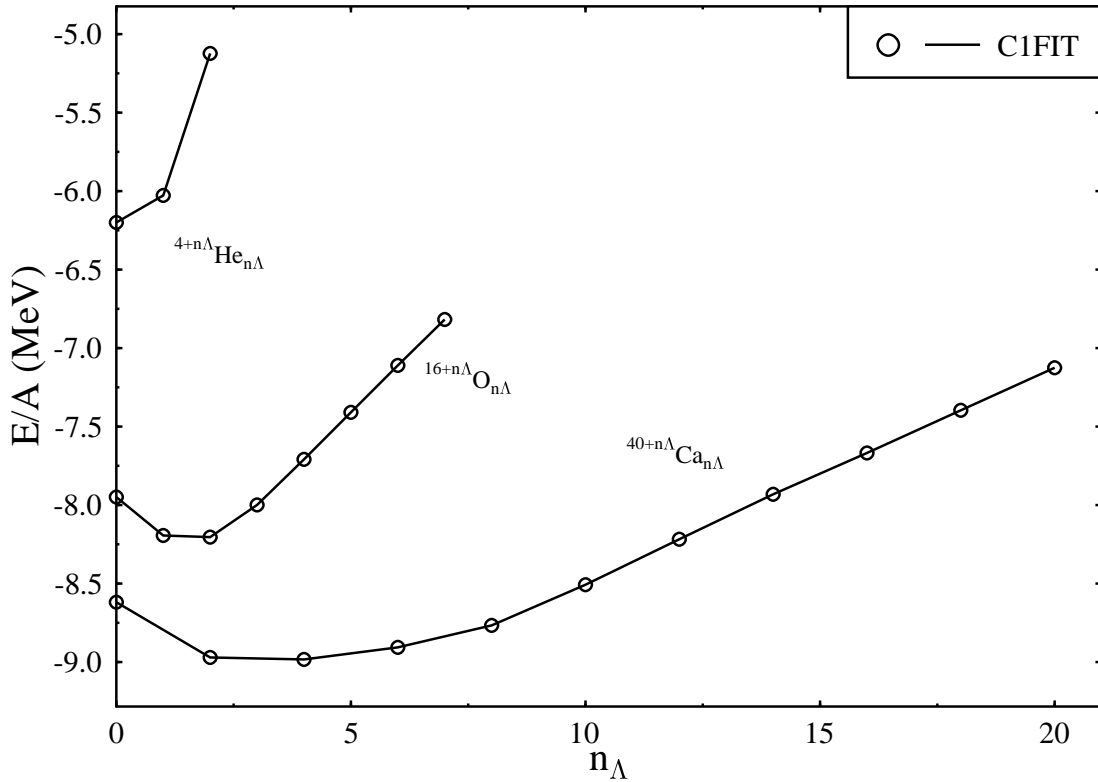
Abbildung 6.24: Bindungsenergie von Λ -Baryonen in leichten Kernen

die Parameter nur das Λ -Kernmaterie-Potential als Hyperkern-Observable eingegangen ist.

Da das Modell für Hyperkerne mit nur einem Λ offensichtlich sinnvolle Ergebnisse liefert, ist es durchaus interessant, auch nach Kernen mit mehreren Λ -Teilchen zu fragen.

Experimentell ist dieses Gebiet allerdings noch weitgehend unerforscht. Die einzigen jemals beobachteten Kerne mit mehr als einem Λ sind $^6_{\Lambda\Lambda}\text{He}$, $^{10}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ und $^{13}_{\Lambda\Lambda}\text{Be}$ [Dan63, Pro66, Aok91], wobei das Ergebnis von Prowse [Pro66] unsicher ist, weil die Aufzeichnungen dieses Experiments verschwunden sind.

Abbildung 6.25 zeigt errechnete Bindungsenergien für Helium, Sauerstoff und Kalzium mit einer unterschiedlichen Anzahl von zugefügten Λ -Teilchen. Die Ergebnisse unterscheiden sich hier deutlich von den in [Pap98] für den Fit an Kernmaterie vorgestellten, weil die Bindungsenergie der Kerne ohne Λ -Teilchen direkt in den Fit an Kerne einging und dieser Wert die Lage der Kurven festlegt. Am qualitativen Verlauf hat sich dagegen nichts geändert. Für Sauerstoff und Kalzium zeigen die Kurven ein Minimum bei einer von Null verschiedenen Anzahl von zugefügten Λ , was nicht verwunderlich ist, da ja mit den Λ -Teilchen ein neuer Freiheitsgrad eröffnet wird. Die Λ -Teilchen sitzen in einem von dem

Abbildung 6.25: Kerne mit unterschiedlich vielen Λ

der normalen Nukleonen verschiedenen Potentialtopf, der tiefer als der höchste besetzte Nukleonenzustand ist. Wichtig ist hier, daß alle gezeigten Kerne stabil sind, weil die Zielzustände der Zerfälle im Bereich der Nukleonen besetzt sind (Pauli-Blocking).

Die gute Beschreibung von Λ -Hyperkernen steht in Zusammenhang mit der Tatsache, daß das Kernmateriepotential der Λ -Teilchen vom Modell richtig beschrieben werden kann. Wir werden später sehen, daß dieses für die anderen Hyperonen nicht gilt und man dadurch auf Probleme bei der Untersuchung von zum Beispiel Ξ -Materie stößt.

6.4 MEMOs

Im Bereich hyperonischer Kernmaterie kann man über die im letzten Kapitel vorgestellten Hyperkerne noch hinausgehen und die Einbeziehung von Ξ -Hyperonen untersuchen. Es sind Kerne denkbar, die elektrisch neutral sind oder sogar negativ geladen. Dadurch wäre es möglich, Kerne aufzubauen, die wesentlich schwerer sind, als die bekannten normalen Kerne. Voraussetzung für die Existenz solcher *metastabiler, exotischer multiseltamer Objekte* (MEMOs) ist allerdings, daß die Hyperonen in diesen Objekten stabil gegen starken Zerfall sind und darüber hinaus natürlich im Kern gebunden sind, also negative Bindungsenergie haben. Experimentell sind keine seltsamen Objekte bekannt, die über die im letzten Kapitel vorgestellten Hyperkerne hinausgehen.

Theoretisch wurden solche MEMOs schon eingehend in einem Walecka-artigen Mean-Field-Modell untersucht [Sch92, Sch93, Sch94a, Sch94b]. Es ergeben sich dort tatsächlich Kombinationsmöglichkeiten von Hyperonen, die zu metastabilen Objekten führen.

Im chiralen Modell gibt es bei der Berechnung von MEMOs erhebliche Schwierigkeiten, die dadurch entstehen, daß die meisten Hyperonenpotentiale nicht richtig beschrieben werden können. Zur korrekten Beschreibung des Λ -Potentials in Kernmaterie von -28 MeV wurde ein explizit symmetriebrechender Term eingeführt, der die PCAC-Relationen und Niedrigenergie-Theoreme nicht verletzt [Pap98]:

$$\mathcal{L}_{\text{hyp}} = m_3 \text{Sp} \left(\overline{B}B + \overline{B}[B, S] \right) \text{Sp}(X - X_0) \quad (6.1)$$

mit $S_b^a = -\frac{1}{3}[\sqrt{3}(\lambda_8)_b^a - \delta_b^a]$. Der Parameter m_3 wird verwendet, um das Λ -Potential auf -28 MeV einzustellen. Die anderen Hyperonen-Potentiale sind dadurch festgelegt. Man erhält dann in Kernmaterie ein repulsives Ξ -Potential von 30.3 MeV. Das Potential von Ξ -Teilchen in Ξ -Materie beträgt bei Kerndichte ca. 126 MeV, ist also stark repulsiv wie in Abb. 6.26 und Tab. 6.4 zu sehen ist. In Abb. 6.26 ist der Verlauf der Potentiale von Hyperonen in gleichartiger Hyperonenmaterie in Abhängigkeit von der Dichte aufgetragen. Der oben vorgestellte Symmetriebrechende Term 6.1 ist hier mit $\text{esb3}=2$ gekennzeichnet. Die Baryonenpotentiale in Nukleon-, Lambda- und Xi-Materie bei Kerndichte sind in Tabelle 6.4 aufgelistet. Man sieht, wie auch in Abb. 6.26, daß das Λ - Λ -Potential abstoßend ist.

Die Probleme des chiralen Modells mit MEMOs sind damit offensichtlich.

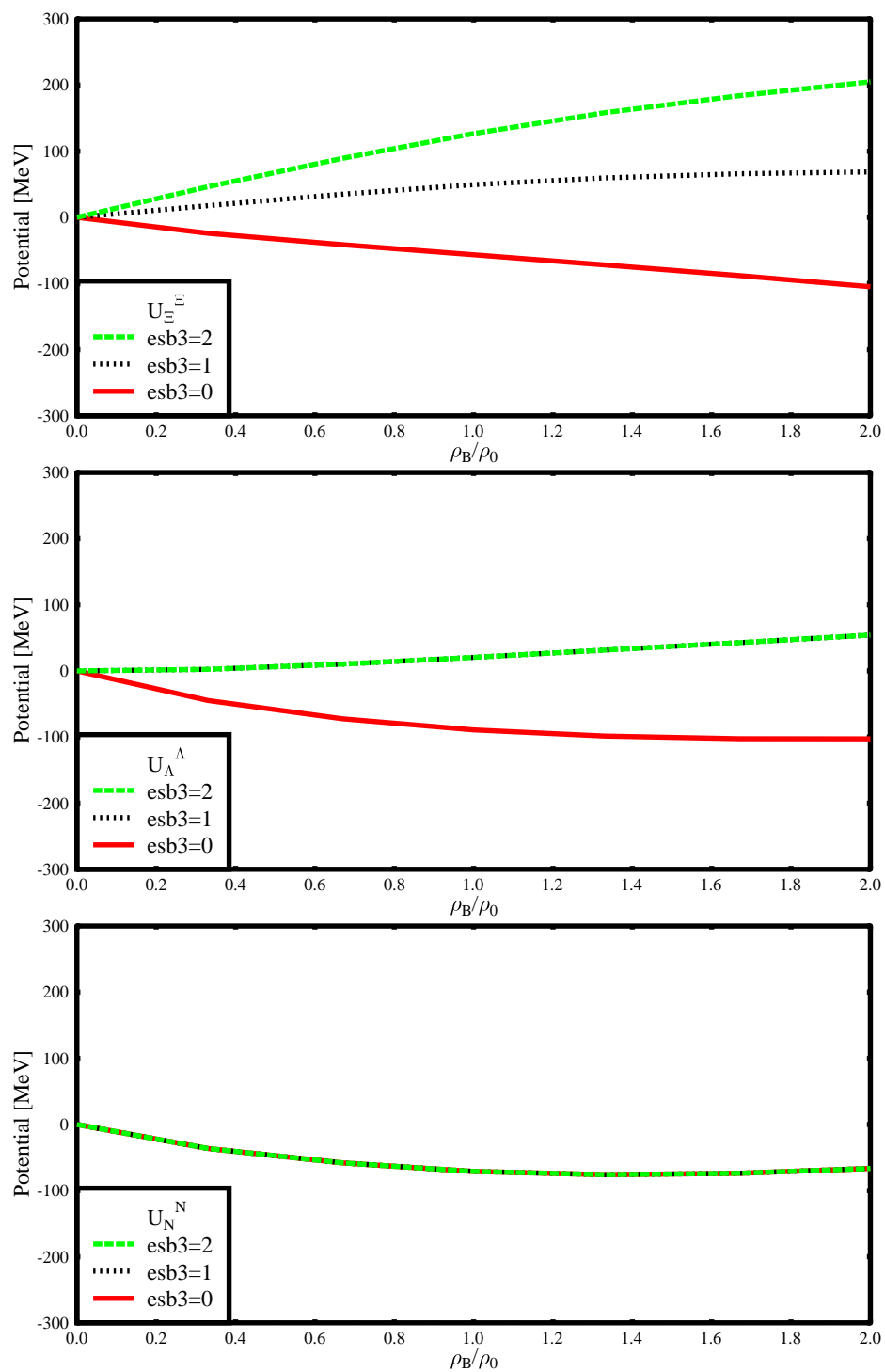


Abbildung 6.26: Hyperonen-Potentiale in Hyperonmaterie. Oben: Ξ -Teilchen in Ξ -Materie, Mitte: Λ -Teilchen in Λ -Materie, Unten: Nukleonen in Nukleon-Materie.

	N	Λ	Ξ
N-Materie	-71.04	-28.23	+30.27
Λ -Materie	-38.13	+20.45	+85.78
Ξ -Materie	+16.17	+73.83	+126.75

Tabelle 6.4: *Baryonenpotentiale in verschiedenen Umgebungen bei $esb3=2$*

	N	Λ	Ξ
N-Materie	-71.04	-100.6	-114.46
Λ -Materie	-97.31	-89.2	-73.27
Ξ -Materie	-126.94	-90.57	-56.59

Tabelle 6.5: *Baryonenpotentiale in verschiedenen Umgebungen bei $esb3=0$*

Keine Kombination von Λ -Teilchen und/oder Ξ -Teilchen würde zu gebundenen Zuständen führen. Allenfalls Λ -Kerne mit einer hinreichend großen Zahl von Nukleonen können stabil sein, wie ja auch in Kapitel 6.3 gezeigt wurde. Das heißt, wenn das Modell das Potential der Λ -Hyperonen richtig reproduzieren soll, dann ist die Bildung von MEMOs unmöglich. Darüber hinaus existieren nach diesem Modell auch keine Hyperkerne mit Ξ -Hyperonen, weil, wie wir gesehen haben, das Nukleon- Ξ -Potential ebenfalls repulsiv ist und folglich kein Ξ in einem Kern gebunden sein kann.

Verzichtet man ganz auf den symmetriebrechenden Term für die Hyperonen ($esb3=0$), ergeben sich zwar attraktive Potentiale zwischen allen gleichartigen Hyperonen (Abb. 6.26 und Tab. 6.5), dafür erhält man aber völlig unrealistische Werte in Kernmaterie: Das Potential der Λ -Teilchen ist hier mit $U_\Lambda = -100$ MeV viel zu tief, genauso wie das Potential der Ξ -Hyperonen mit $U_\Xi = -115$ MeV. Es ist in diesem Fall also denkbar, daß MEMOs existieren, wobei diese Aussage aber vollkommen wertlos ist, weil das Modell hier keine einzige bekannte Hyperon-Observable auch nur näherungsweise richtig reproduzieren kann.

Eine weitere Möglichkeit, dem Problem beizukommen, besteht darin, den symmetriebrechenden Term um einen freien Parameter zu erweitern ($esb3=1$). In diesem Fall kann man die Hyperonenpotentiale etwas weniger repulsiv machen, letztenendes bleiben sie aber positiv, so daß MEMOs nicht existieren können. In

	N	Λ	Ξ
N-Materie	-71.04	-28.23	-42.09
Λ -Materie	-38.13	+20.45	+30.68
Ξ -Materie	-60.16	+21.06	+49.43

Tabelle 6.6: *Baryonenpotentiale in verschiedenen Umgebungen bei $esb3=1$*

diesem Fall sind allerdings Kerne mit Nukleonen und Ξ -Hyperonen denkbar, da die Potentiale der Hyperonen in Kernmaterie attraktiv sind (Tab. 6.6). So können zum Beispiel in ${}^4\text{He}$ maximal zwei gebundene Ξ -Teilchen existieren, in ${}^{16}\text{O}$ gibt es sogar vier gebundene Ξ -Zustände, wenn man die Veränderung des Potentials durch die hinzugefügten Hyperonen berücksichtigt. Bei mehr Ξ -Hyperonen wird der Einfluß der Abstoßung zu groß. Es muß bei den hier untersuchten Kernen allerdings bemerkt werden, daß sie nicht gegen starken Zerfall stabil sind, da die Nukleonenzustände, in welche die Hyperonen zerfallen, nicht besetzt sind.

KAPITEL 7

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit wurde ein chirales $SU(3)$ -Modell auf verschiedene Erscheinungsformen endlicher Kernmaterie angewendet. Das Modell basiert auf chiraler Symmetrie in nichtlinearer Realisierung. Die Symmetrie muß spontan gebrochen werden um die beobachtete Massendifferenz zwischen skalaren und pseudoskalaren Mesonen reproduzieren zu können. Um den pseudoskalaren Mesonen eine endliche Masse zu geben ist eine explizite Brechung der chiralen Symmetrie nötig.

Alle Berechnungen wurden in der Mean-Field-Näherung und in sphärischer Symmetrie durchgeführt. Die Parameter des Modells wurden, soweit sie nicht durch Symmetrierelationen und Vakuumeigenschaften von Mesonen festgelegt sind, in einem χ^2 -Fit an die Eigenschaften endlicher Kerne angepasst. Dabei wurde ein Teil der Parameter verwendet um die richtige Beschreibung der Mesonenmassen zu gewährleisten. Die Observablen des Fits wurden so ausgewählt, daß sie einen möglichst großen Einfluß auf die wichtigen Kerneigenschaften Bindungsenergie und Ladungsverteilung haben. Die zur Anpassung verwendeten Kerne sind sphärisch symmetrisch und möglichst schwer deformierbar, um Fehler durch die Berechnung in sphärischer Symmetrie klein zu halten. Einzige Ausnahme stellt hier das nicht sphärische Hassium dar, welches für die Rechnungen zu superschweren Elementen mit in den Fit einbezogen wurde.

Die Ergebnisse wurden mit jenen verglichen, welche sich bei einer Anpassung der Parameter an die Eigenschaften unendlicher Kernmaterie ergaben. Um die Glaubwürdigkeit des Modells bei Vorhersagen zu gewährleisten, wurde es zunächst auf bekannte Kerne angewendet. Gegenüber dem Fit an unendliche

Kernmaterie zeigte sich hier eine deutliche Verbesserung der Beschreibung aller Observablen, was sich in einer Verkleinerung des χ^2 um mehr als einen Faktor 20 niederschlug. Die Verläufe aller Ladungsverteilungen können zufriedenstellend beschrieben werden. Darüber hinaus werden alle bekannten Schalenabschlüsse vom Modell reproduziert.

Erfreulich ist, daß die qualitativen Ergebnisse sehr robust gegen Veränderungen der Parameter sind. Dadurch wird die Glaubwürdigkeit des Modells entscheidend gestärkt.

Besondere Bedeutung für die Beschreibung von Kernen kommt dem ω^4 -Term zu, ohne den sich keine einzige Kerneigenschaft richtig ergibt. Das heißt aber auch, daß man in Kauf nehmen muß, daß das untere Kontinuum der Baryonen erst bei sehr hohen Dichten überkritisch wird.

Im Bereich der superschweren Kerne ist vor allem die Frage nach weiteren Schalenabschlüssen interessant. Das chirale Modell zeigt hier deutlich 120 als magische Zahlen der Protonen. Das früher häufig in nichtrelativistischen Modelle vorhergesagte $Z = 114$ wird vom chiralen Modell nicht bestätigt. Bei den Neutronen erhält man $N = 172$, $N = 184$ und $N = 198$ als magische Zahlen. Auch diese Ergebnisse sind qualitativ vom spezifischen Parametersatz weitgehend unabhängig. Besonders bemerkenswert ist die Ladungsverteilung der superschweren Kerne. Sie zeigt eine sehr starke Abnahme der Ladungsdichte im Zentrum des Korns. Ob dieses Phänomen auf eine Fulleren-artige Anordnung der Nukleonen zu 60 α -Teilchen zurückführbar ist, müssen weitere Untersuchungen zeigen. Die Konstanz, die man in den Energien der beim Zerfall freiwerdenden α -Teilchen beobachtet, unterstützt diese Vermutung.

Hyperkerne waren ebenfalls Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit. Mit Hilfe eines Symmetriebrechenden Terms kann das Potential der Λ -Teilchen in Kernmaterie eingestellt werden. Man beobachtet dann eine sehr gute Beschreibung der experimentell bekannten Daten. Insbesondere sind einige Kerne mit einem und mehreren Λ -Teilchen stabil gegen starken Zerfall.

Große Probleme ergeben sich bei Objekten mit Ξ -Hyperonen oder ohne normale Nukleonen (MEMOs). Da alle Hyperon-Hyperon-Potentiale repulsiv sind, findet man keinen einzigen gebundenen, rein hyperonischen Kern. Hinzu kommt, daß das Potential der Ξ -Teilchen in Kernmaterie positiv ist. Einzig bei Veränderung der expliziten Symmetriebrechung ergibt sich die Möglichkeit von Ξ -Hyperonen in einer Umgebung von Nukleonen. Durch das repulsive Ξ - Ξ -Potential ist ihre

Zahl allerdings begrenzt.

Da bisher alle Rechnungen in sphärischer Symmetrie durchgeführt wurden, ist es vor allem für die superschweren Elemente interessant, in Zukunft auch Untersuchungen zum Einfluß von Deformationen zu machen. Eine weitere Untersuchung der Dichteabsenkung im Zentrum der superschweren Kerne ist wünschenswert, insbesondere unter dem Aspekt der Cluster-Bildung.

Im Bereich der Hyperkerne und MEMOs ist es notwendig, sich weitere Gedanken über die explizite Symmetriebrechung zu machen. Es wäre dabei schön, wenn man einen Term finden könnte, der ohne weitere freie Parameter alle Hyperonenpotentiale richtig beschreibt, weil neue Parameter immer eine zusätzliche Willkür bedeuten und die physikalische Begründbarkeit der Ergebnisse einschränken. Möglicherweise wird man auch weiter in das Modell eingreifen und neue Felder, wie zum Beispiel ein skalares Kondensat, welches nicht gleichzeitig chiraler Partner des Pinons ist, einführen müssen.

ANHANG A

DAS NOETHER-THEOREM

Eine äußerst nützliche Eigenschaft von Symmetrien ist die Tatsache, daß mit einer Symmetrie immer die Existenz einer Erhaltungsgröße verbunden ist.

Ein einfaches Beispiel dafür liefert schon die klassische Mechanik, wo zum Beispiel die Translationsinvarianz eine Impulserhaltung zur Folge hat. Das allgemeine Theorem, welches Symmetrien mit Erhaltungsgrößen verbindet, heißt *Noether-Theorem* und soll im folgenden bewiesen werden.

Es sei

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) \quad (\text{A.1})$$

die Lagrangefunktion eines physikalischen Prozesses. Dann besagt das Noether-Theorem, daß jedes System, dessen Wirkung $S = \int L dt$ invariant unter kontinuierlichen Symmetrietransformationen ist, die Existenz eines erhaltenen Stromes

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0 \quad (\text{A.2})$$

impliziert.

Beweis:

Die Lagrangedichte \mathcal{L} sei invariant unter der (globalen) infinitesimalen inneren Transformation

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x) \equiv \phi_i(x) - i \epsilon_a t_{ij}^a \phi_j(x) \quad , \quad (\text{A.3})$$

wobei ϵ^a ortsunabhängige Parameter sind. Die t^a sind Matrizen wie zum Beispiel die Gell-Mann-Matrizen der $SU(3)$, welche die Lie-Algebra einer Gruppe G

$$[t^a, t^b] = i C^{abc} t^c \quad (\text{A.4})$$

erfüllen. Die C^{abc} sind Strukturkonstanten der Gruppe G . Die Änderung der Lagrangedichte beträgt

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta(\partial_\mu\phi_i) \quad . \quad (\text{A.5})$$

Unter Benutzung der Lagrangegleichung

$$\partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi_i} - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} = 0 \quad (\text{A.6})$$

und der Tatsache, daß

$$\delta(\partial^\mu\phi_i) \equiv \partial_\mu\phi'_i - \partial_\mu\phi_i = \partial_\mu(\delta\phi_i) \quad (\text{A.7})$$

gilt, läßt sich die Variation $\delta\mathcal{L}$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu(\delta\phi_i) \\ &= \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i \right] \\ &= -\epsilon^a \partial_\mu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} t^a_{ij}\phi_j \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Wenn nun die Lagrangedichte invariant unter der Transformation (A.3) ist, d.h. wenn $\delta\mathcal{L} = 0$ gilt, dann impliziert Gleichung (A.8) den erhaltenen Strom

$$\partial^\mu j_\mu^a = 0 \quad . \quad (\text{A.9})$$

Dabei wurde die eckige Klammer in (A.8) mit dem Strom j_μ^a identifiziert:

$$j_\mu^a = -i \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\phi_i)} t^a_{ij}\phi_j \quad . \quad (\text{A.10})$$

Die erhaltenen Ladungen werden definiert durch

$$Q^a = \int d^3x j_0^a(x) \quad (\text{A.11})$$

und sind die Generatoren der Symmetriegruppe.

Damit ist das Noether-Theorem für *globale* Transformationen bewiesen. Es wurde angenommen, daß sich alle Felder $\phi_i(x)$ in jedem Raum-Zeit-Punkt x auf exakt die gleiche Art und Weise nach (A.3) transformieren. Die Lagrangedichte, die in dieser Arbeit vorgestellt wird, ist invariant unter globalen chiralen Transformationen, so daß wir uns um die speziellen Anforderungen einer *lokalen* Symmetrie nicht zu kümmern brauchen.

ANHANG B

DAS GOLDSTONE-THEOREM

Das Goldstone-Theorem besagt, daß mit der spontanen Brechung einer kontinuierlichen Symmetrie massen- und spinlose Bosonen auftreten, die Goldstone-Bosonen genannt werden. Der Beweis wird modellunabhängig mit Hilfe der Stromalgebra geführt.

Nach dem Noether-Theorem resultiert aus jeder kontinuierlichen Symmetrie eine entsprechende Stromerhaltung:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad . \quad (\text{B.1})$$

Folglich verschwindet auch das Integral über den Kommutator von (B.1) mit einem Feld $\phi(0)$ am Orte Null:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3x [\partial^\mu j_\mu(\vec{x}, t), \phi(0)] \\ &= \partial^0 \int d^3x [j^0(\vec{x}, t), \phi(0)] + \int d\vec{F} \cdot [\vec{j}(\vec{x}, t), \phi(0)] \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Der Oberflächenterm liefert keinen Beitrag, und man sieht, daß die zeitliche Ableitung des Kommutators der Ladung mit dem skalaren Feld $\phi(0)$ verschwindet:

$$\frac{d}{dt} [Q(t), \phi(0)] = 0 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Das bedeutet, daß der Vakuumerwartungswert eine endliche Konstante ist:

$$\langle 0 | [Q(t), \phi(0)] | 0 \rangle \equiv v \neq 0 \quad . \quad (\text{B.4})$$

Diese Aussage impliziert die spontane Symmetriebrechung. Nun kann man den Kommutator ausschreiben und einen kompletten Satz von Energieeigenzuständen einfügen, so daß man erhält:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | [\int d^3x j_0(x), \phi(0)] | 0 \rangle = & (B.5) \\
& = \sum_n \int d^3x \{ \langle 0 | e^{i\hat{p}x} j_0(0) e^{-i\hat{p}x} | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | e^{i\hat{p}x} j_0(0) e^{-i\hat{p}x} | 0 \rangle \} \\
& = \sum_n \int d^3x \{ e^{-ip_n x} \langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle - e^{ip_n x} \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle \} \\
& = \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_n) \{ \langle 0 | j_0(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | j_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t} \} \\
& = v \neq 0 \quad .
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Translationsinvarianz des Vakuumzustandes benutzt,

$$\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{i\hat{p}x} \phi(0) e^{-i\hat{p}x} | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(0) | 0 \rangle \quad (B.6)$$

und die Wirkung des Impulsoperators auf den Vakuumzustand bzw. auf den Energie-Eigenzustand verwendet:

$$\langle n | e^{i\hat{p}x} = (e^{-i\hat{p}x} | n \rangle)^\dagger = \langle n | e^{ip_n x} \quad . \quad (B.7)$$

Die δ -Funktion ergibt sich aus der Integration über die komplexe Exponentialfunktion, wobei nur über die drei Raumrichtungen integriert wird, so daß die Zeitkomponenten übrig bleiben.

Da der Vakuumwert v nach (B.3) zeitunabhängig ist, kann die Gleichung (B.5) nur erfüllt werden, wenn

$$E_n = 0 \quad \text{für} \quad \vec{p}_n = 0 \quad (B.8)$$

gefordert wird. Dies aber bedeutet, daß masselose Bosonen existieren¹. Gleichzeitig erfüllt dieses Teilchen die Relationen

$$\langle n | \phi(0) | 0 \rangle \neq 0, \quad \langle 0 | j_0(0) | n \rangle \neq 0 \quad . \quad (B.9)$$

Dieser Beweis ist unabhängig von der Störungstheorie und muß also für alle Ordnungen gelten. In der physikalischen Anwendung werden immer pseudoskalare

¹Man vergegenwärtige sich die Energie-Impuls-Formel $E_n = \sqrt{m^2 + p_n^2}$.

Teilchen als Goldstone-Bosonen identifiziert. Dies hängt mit der Forderung zusammen, daß der Vakuumzustand parität invariant sein soll:

$$\langle 0|P\phi(x)P^{-1}|0\rangle = -\langle 0|\phi(0)|0\rangle \neq \langle 0|\phi(0)|0\rangle \quad . \quad (\text{B.10})$$

Ein massives, pseudoskalares Teilchen im Vakuum würde dessen Paritätsinvarianz verletzen. Deshalb haben alle pseudoskalaren Teilchen einen verschwindenden Vakuumerwartungswert, $v_{\text{pseudo}} = 0$, und das Argument für die Existenz von Goldstone-Bosonen ist nicht anwendbar.

ANHANG C

DIE PCAC-RELATION

Die PCAC-Relation (*partially conserved axial-vector current*) stellt einen Zusammenhang zwischen den schwachen axialen Strömen und den stark wechselwirkenden Pionenfeldern her. Um diese Beziehung herzuleiten, betrachten wir den schwachen Zerfall der Pionen. Er wird durch das Matrixelement des axialen Stroms zwischen dem Vakuum und dem Pion bestimmt:

$$\langle 0|A_\mu|\pi\rangle \quad . \quad (C.1)$$

Aus dem Goldstone-Theorem kann man folgern, daß dieses Matrixelement proportional zum Impuls des Pions ist [Che94]. Wir können also schreiben:

$$\langle 0|\partial^\mu A_\mu^a(x)|\pi^b(x)\rangle = if_\pi q_\mu \delta^{ab} e^{-iqx} \quad . \quad (C.2)$$

Der Proportionalitätsfaktor f_π ist die Zerfallskonstante des Pions und wurde experimentell zu $f_\pi = 93$ MeV bestimmt. Bilden wir jetzt die Divergenz von (C.2), so erhalten wir

$$\langle 0|\partial^\mu A_\mu^a(x)|\pi^b(q)\rangle = f_\pi q^2 \delta^{ab} e^{-iqx} = f_\pi m_\pi^2 \delta^{ab} e^{-iqx} \quad . \quad (C.3)$$

Wir sehen sofort, daß der axiale Strom für kleine Pionen-Massen näherungsweise erhalten ist und zwar um so besser, je kleiner m_π ist. Es besteht also ein direkter Zusammenhang zwischen der Brechung der chiralen Symmetrie und der Masse der Pionen. Dies bestätigt auch die Behauptung, welche wir in Kapitel 2.2 aufgestellt hatten, daß die axiale Symmetrie eine näherungsweise Eigenschaft der QCD ist. Aus den obigen Beziehungen folgt außerdem, daß der axiale Strom des Pions durch

$$a_\mu^\pi = f_\pi \partial_\mu \pi(x) \quad (C.4)$$

gegeben ist. Dabei ist $\pi(x)$ das Pion-Feld. Gleichung (C.4) wird häufig als PCAC-Relation bezeichnet.

ANHANG D

DIE GOLDBERGER-TREIMAN-RELATION

Die Goldberger-Treiman-Relation liefert einen Zusammenhang zwischen der Nukleonenmasse, der Zerfallskonstante des Pions und der Kopplung der Pionen an die Nukleonen. Um sie herzuleiten, betrachten wir den axialen Strom der Nukleonen

$$A_\mu^N = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N \quad , \quad (\text{D.1})$$

wobei ψ_N der Nukleonen-Isospinor und $g_a=1.25$ ist. Da die Nukleonen eine nicht zu vernachlässigende Masse haben, ist dieser Strom keine Erhaltungsgröße. Man kann dies auch durch Verwendung der Dirac-Gleichung direkt zeigen. Es ergibt sich dann

$$\partial^\mu A_\mu^N = i g_a M_N \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N \neq 0 \quad . \quad (\text{D.2})$$

Das Nukleon wechselwirkt über die starke Wechselwirkung mit dem Pion, so daß man den gesamten axialen Strom als Summe des Pion- und des Nukleonbeitrags betrachten kann. Mit dem in Anhang C vorgestellten Pionenstrom erhält man also:

$$A_\mu = g_a \bar{\psi}_N \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau}{2} \psi_N + f_\pi \partial_\mu \pi(x) \quad . \quad (\text{D.3})$$

Nehmen wir an, daß der Gesamtstrom erhalten sei, $\partial^\mu A_\mu = 0$, dann erhalten wir

$$\partial^\mu \partial_\mu \pi(x) = -g_a i \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N \quad . \quad (\text{D.4})$$

Dies ist nichts anderes als die Klein-Gordon-Gleichung für masselose Pionen, die an das Nukleon koppeln. Nimmt man also an, daß der gesamte axiale Strom

eine Erhaltungsgröße ist, so ergibt sich sofort die Aussage, daß das Pion masselos sein muß. Wir erhalten hier also genau die gleiche Aussage wie schon bei der PCAC-Relation. Erlauben wir nun doch eine endliche Pion-Masse, dann erhalten wir in der Klein-Gordon-Gleichung einen zusätzlichen Massenterm:

$$\partial^\mu \partial_\mu \pi(x) = -g_a i \frac{M_N}{f_\pi} \bar{\psi}_N \gamma_5 \tau \psi_N \quad . \quad (\text{D.5})$$

Die Pion-Nukleon-Kopplungskonstante kann man hier ablesen als

$$g_{\pi NN} = g_a \frac{M_N}{f_\pi} \quad . \quad (\text{D.6})$$

Experimentell findet man für sie den Wert $g_{\pi NN}^{\text{exp}} = 13.4$. Aus der oben angegebenen Formel folgt ein Wert von ca. 12.5 für $g_{\pi NN}$. Gleichung (D.6) wird im allgemeinen als *Goldberger-Treiman-Relation* bezeichnet.

ANHANG E

DIE VERWENDETEN MATRIZEN

Die verschiedenen hadronischen Matrizen, die im Modell verwendet wurden, sind im folgenden aufgelistet.

Die skalaren Mesonen

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^a\lambda_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0^0 + \sigma) & a_0^+ & \kappa^+ \\ a_0^- & \frac{1}{\sqrt{2}}(-a_0^0 + \sigma) & \kappa^0 \\ \kappa^- & \frac{\kappa^0}{\sqrt{2}} & \zeta \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Die pseudoskalaren Mesonen

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi^0 + \frac{\eta^8}{\sqrt{3}}\right) & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\pi^0 + \frac{\eta^8}{\sqrt{3}}\right) & K^0 \\ K^- & \frac{\overline{K}^0}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{2}{3}}\eta^8 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Die Vektormesonen

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_0^0 + \omega) & \rho_0^+ & K^{*+} \\ \rho_0^- & \frac{1}{\sqrt{2}}(-\rho_0^0 + \omega) & K^{*0} \\ K^{*-} & \frac{\overline{K}^{*0}}{\sqrt{2}} & \phi \end{pmatrix} \quad (\text{E.3})$$

Die Baryonen

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\frac{\Lambda^0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad (\text{E.4})$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [Aji95] S. Ajimuetra et al., *Nucl. Phys.* **A585** (1995) 173c
- [Aok91] S. Aoki et al., *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 1287
- [Ben97] M. Bender, Dissertation, Universität Frankfurt am Main, 1997
- [Ben99] M. Bender, K. Rutz, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, to be published in *Phys. Rev. C*
- [Ber79] R. Bertini et al., *Phys. Lett.* **B83** (1979) 306
- [Ber80] R. Bertini et al., *Phys. Lett.* **B90** (1980) 375
- [Ber81] R. Bertini et al., *Nucl. Phys.* **A360** (1981) 315
- [Bog77] J. Boguta, A. R. Bodmer, *Nucl. Phys.* **A292** (1977) 414
- [Bon74] G. C. Bonnazzola, T. Bressani, R. Cester, E. Chiavassa, G. Dellacasa, A. Fainberg, N. Mirfakhrai, A. Musso, G. Rinaudo, *Phys. Lett.* **B53** (1974) 297
- [Bru76] W. Brückner et al., *Phys. Lett.* **B62** (1976) 481
- [Bru78] W. Brückner et al., *Phys. Lett.* **B79** (1978) 157
- [Bur98] T. Bürvenich, K. Rutz, M. Bender, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner *European Physical Journal* **A3** (1998) 139
- [Can74] T. Cantwell et al., *Nucl. Phys.* **A236** (1974) 445
- [Che94] Ta-Pai Cheng, Ling-Fong Li, „*Gauge theory of elementary particle physics*“, Oxford Science Publications, 1994

- [Cho61] K. C. Chou, *Soviet Phys. JETP*. **12** (1961) 492
- [Chr79] R. E. Chrien et al., *Phys. Lett.* **B89** (1979) 31
- [Chr87] G. A. Christos, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 330
- [Chr88] R. E. Chrien et al., *Nucl. Phys.* **A478** (1988) 705c
- [Col69] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239
- [Dan53] M. Danysz, J. Pniewski, *Phil. Mag.* **44**, (1953) 348
- [Dan63] M. Danysz et al., *Phys. Rev. Lett.* **11** (1963) 20
- [Fri86] J. Friedrich, P.-G. Reinhard, *Phys. Rev.* **C33** (1986) 335
- [Fur93] R. J. Furnstahl, B. D. Serot, *Phys. Lett.* **B316** (1993) 12
- [Fur95] R. J. Furnstahl, H.-B. Tang, B. D. Serot, *Phys. Rev.* **C52** (1995) 1368
- [Gel60] M. Gell-Mann, M. Levy, *Nouvo Cimento* **16** (1960) 705
- [Gre5] W. Greiner, B. Müller, „*Quantenmechanik II: Symmetrien*“, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990
- [Gre11] W. Greiner and J. A. Maruhn, „*Kernmodelle*“, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1995
- [GreP] W. Greiner, Private Mitteilung
- [Has96] T. Hasegawa et al., *Phys. Rev.* **C53** (1996) 1210
- [Hei94] E. K. Heide, S. Rudaz, P. J. Ellis, *Nucl. Phys.* **A571** (1994) 713
- [Hof95] S. Hofmann, V. Ninov, F. P. Hessberger, P. Armbruster, H. Folger, G. Münzenberg, H. J. Schött, A. G. Popeko, A. V. Yeremin, A. N. Andreyev, S. Saro, R. Janik, M. Leino, *Z. Phys.* **A350** (1995) 277 und *Z. Phys.* **A350** (1995) 281
- [Hof96] S. Hofmann, V. Ninov, F. P. Hessberger, P. Armbruster, H. Folger, G. Münzenberg, H. J. Schött, A. G. Popeko, A. V. Yeremin, S. Saro, R. Janik, M. Leino, *Z. Phys.* **A354** (1996) 229

-
-
- [Ine96] F. Ineichen, D. Von-Eiff, M. K. Weigel, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **22** (1996) 1421
- [Iof81] B. L. Ioffe, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 317
- [Jur73] M. Juric et al., *Nucl. Phys.* **B52** (1973) 1
- [Koc95] V. Koch, nucl-th/9512029 (1995)
- [Mar89] J. Mares, J. Zofka, *Z. Phys.* **A333** (1989) 209
- [May81] M. May et al., *Phys. Rev. Lett.* **47** (1981) 1106
- [Mil88] D. J. Millner, C. B. Dover, A. Gal, *Phys. Rev.* **C38** (1988) 2700
- [Nam60] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380
- [Nin99] V. Ninov et al., to be published
- [Numrec] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling: "Numerical Recipes", Cambridge University Press, 1996
- [Oer95] W. von Oertzen, *Z. Phys.* **A354** (1995) 37
- [Oga99] Y. Oganessian et al., to be published
- [Pap95] P. Papazoglou, Diplomarbeit, Universität Frankfurt am Main, 1995
- [Pap98] P. Papazoglou, Dissertation, Universität Frankfurt am Main, 1998
- [Pap99] P. Papazoglou, D. Zschesche, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, W. Greiner, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 411
- [Pgr82] P.-G. Reinhard, R. Y. Cusson, *Nucl. Phys.* **A378** (1982) 418
- [Pgr86] P.-G. Reinhard, M. Rufa, J. A. Maruhn, W. Greiner, J. Friedrich, *Z. Phys.* **A323** (1986) 13
- [Pro66] D. J. Prowse, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 782
- [Ruf88] M. Rufa, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, M. R. Strayer, *Phys. Rev.* **C38** (1988) 390

- [Ruf90] M. Rufa, J. Schaffner, J. A. Maruhn, H. Stöcker, W. Greiner, P. G. Reinhard, *Phys. Rev.* **C42** (1990) 2469
- [Rut97] K. Rutz, M. Bender, T. Bürvenich, T. Schilling, P.-G. Reinhard, J. A. Maruhn, W. Greiner, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 238
- [Sch92] J. Schaffner, C. Greiner, H. Stöcker, *Phys. Rev.* **C46** (1992) 322
- [Sch93] J. Schaffner, C. B. Dover, A. Gal, C. Greiner, H. Stöcker, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 1328
- [Sch94a] J. Schaffner, Dissertation, Universität Frankfurt am Main, 1994
- [Sch94b] J. Schaffner, C. B. Dover, A. Gal, C. Greiner, D. J. Millener, H. Stöcker, *Ann. Phys.* **235** (1994) 35
- [StoeP] H. Stöcker, Private Mitteilung
- [Vri87] H. de Vries, C. W. de Jager, C. de Vries, *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **26** (1987) 495
- [Wei96] S. Weinberg, „*The Quantum Theory of Fields*“, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge 1996

DANKSAGUNG

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner für die freundliche Aufnahme in das Institut für Theoretische Physik und sein reges Interesse an meiner Arbeit. Vor allem die superschweren Kerne lagen ihm stets am Herzen. Ihm sind auch die hervorragenden Arbeitsbedingungen zu verdanken, unter denen ich forschen konnte.

Herrn Prof. Dr. Stöcker möchte ich für seine umfangreiche wissenschaftliche und moralische Unterstützung danken. Von ihm kamen viele gute Ideen, die meine Arbeit bereichert haben und immer eine große Motivation waren.

Ganz besonders großer Dank gilt den Herren Dr. Panajotis Papazoglou und PD. Dr. Stefan Schramm für die Betreuung meiner Arbeit. Sie brachten stets eine unerschöpfliche Geduld auf, meine mehr oder minder intelligenten Fragen zu beantworten. Ihre Ideen und ihr Sachverstand waren eine unermessliche Hilfe.

Herrn Dr. Jürgen Schaffner möchte ich für sein großes Interesse und seine zahlreichen Ideen danken, die trotz der großen Entfernung von ihm ausgingen. Er hat ein umwerfendes Motivationstalent, und so bedeutete sein Erscheinen immer einen großen Schub für meine Arbeit.

Den Herren Dipl. Phys. Detlef Zschesche, Dr. Klemens Rutz, Kristof Balazs und Dr. Guangjun Mao danke ich für die erfolgreiche und angenehme Zusammenarbeit.

Meine Zimmergenossen Sabine Hossenfelder, Dirk Seidel, Tanja Schilling und Holger Hehl haben stets für eine lustige Stimmung in Zimmer 514 gesorgt.

Stefan Schramm, Panajotis Papazoglou, Jürgen Schaffner, Gebhard Zeeb und Detlef Zschiesche sei für die Korrekturvorschläge gedankt.

Lars Gerland, Jörg Brachmann und Detlef Zschiesche möchte ich dafür danken, daß sie mich vor dem finanziellen Ruin bewahrt haben, der durch zu häufiges Essen beim Italiener schon unmittelbar bevorstand. (An dieser Stelle sollte ich auch Pano noch einmal dafür danken, daß er es doch ab und zu ermöglicht hat.)

Dr. Markus Hofmann und Dr. Klaus Jürgen Lutz seien hier lobend dafür erwähnt, daß sie Loriots Gesamtwerk nicht in Vergessenheit geraten ließen.

Frau Ruppel, Palade, Radulescu, Steidl und Buscher-Bouffier möchte ich für die Hilfe bei der Bewältigung vieler organisatorischer Aufgaben danken.

Mein Dank gilt auch dem Computer-Team für seine Hilfsbereitschaft in Computerfragen.

Der herzlichste Dank gebührt meiner Familie, allen voran meinen Eltern, die mein Studium ermöglichten und stets zu mir standen.