Lokale elliptische Regularität in Sobolev-Räumen

Nadescha Grünberg

Diplomarbeit am Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität

18. Februar 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit lokalen Regularitätssätzen in Sobolev-Räumen. Die Einleitung gliedert sich in drei Teile. Der erste Teil beschreibt das Thema lokale Regularität. Der zweite Teil erklärt die Bedeutung elliptischer Operatoren im Zusammenhang mit lokaler Regularität. Die Zielsetzung dieser Arbeit wird im dritten Teil vorgestellt.

lokale Regularität:

Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Bezeichnet $\mathbf{P}_{k,.,D}$ einen Differentialoperator der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten und bezeichnet v eine $\mathbf{D}'(\Omega)$-Distribution, so wird durch

$$\mathbf{P}_{k,.,D} u = v \tag{0.1}$$

eine partielle Differentialgleichung gegeben. Der Lösungsraum U ist dabei als Menge aller Distributionen u definiert, welche (0.1) erfüllen. Dabei ist es natürlich nicht von vornherein klar, ob die vorgegebene Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt. In vielen Fällen kann es sehr schwierig werden zu einer gegebenen Distribution v, explizit eine Lösung u der zugehörigen Differentialgleichung anzugeben. Es kann daher schon hilfreich sein herauszufinden, welche abstrakten Eigenschaften (z.B Glattheit, schwache Differenzierbarkeit) eine Distribution u erfüllen muß, um als mögliche Lösung der Differentialgleichung in Frage zu kommen. Üblicherweise wird man versuchen, direkt aus Eigenschaften der vorgegebenen Distribution v auf entsprechende Eigenschaften der Lösung u zu schließen. Läge z.B die Distribution v für jede kompakte Teilmenge Y von Ω in dem Raum $\mathbf{C}^\infty(Y)$, so sollte es möglich sein zu folgern, daß auch u in $\mathbf{C}^\infty(Y)$ liegt. Noch stärker wäre die Möglichkeit zu zeigen, daß m-fache Differenzierbarkeit der Distribution v in Y bereits um k erhöhte Differenzierbarkeit der Lösung u in Y liefert.
Sei $s \in \mathbf{N}_0$. Jeder Differentialoperator der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten bildet den Sobolevraum $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ stetig in den Sobolevraum $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ ab. Wählt man eine Distribution $v \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ und betrachtet

die durch (0.1) gegebene Differentialgleichung, so stellt sich erneut die Frage nach möglicher lokaler Regularität der Lösung u. (♣): *Folgt aus* $v \in \mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$, *daß die Distribution* u *bereits in dem Raum* $\mathbf{W}_{p,s+k}^{loc}(\Omega)$ *liegt?*

Nicht jeder Differentialoperator wird solche Schlußfolgerungen zulassen. Es zeigt sich, daß gerade **elliptische** Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten geeignet sind, um solche lokalen Regularitätsaussagen zu untersuchen. Dies soll anhand der letzten Fragestellung (♣) erläutert werden.

Elliptizität

Jeder elliptische Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten besitzt eine *Parametrix*. Die Parametrix E ist eine zum Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,.,D}$ gehörende $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$-Distribution, welche folgende Gleichung erfüllt:

$$E * \mathbf{P}_{k,.,D} u = \delta + \omega$$

Dabei ist ω eine Distribution, die durch eine $\mathbf{C}^\infty$-Funktion repräsentiert wird. Mittels dieser Parametrix läßt sich eine Lösung u der Differentialgleichung $\mathbf{P}_{k,.,D} u = v$ lokal (d.h. auf jeder kompakten Teilmenge Y von Ω) durch

$$u = E * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u - \omega * \chi_Y u \tag{0.2}$$

darstellen. Weiter gilt für jeden Multiindex β:

$$\partial^\beta u = \partial^\beta E * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u - \partial^\beta \omega * \chi_Y u \tag{0.3}$$

χ_Y bezeichnet eine beliebige $\mathbf{D}(\Omega)$-Funktion, welche auf der kompakten Menge Y identisch 1 ist. Dabei zeigt sich, daß die Distribution $\partial^\beta \omega * \chi_Y u$ stets durch eine $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$-Funktion repräsentiert wird.
Es ist möglich, zu jedem elliptischen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten eine Parametrix zu konstruieren, die durch eine $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n \backslash 0)$-Funktion erzeugt wird, und deren Ableitungen einer wichtigen Ungleichung genügen. Die Existenz einer solchen Parametrix wird in [Hö, Kapitel 7.1] gezeigt. In dieser Arbeit findet man Satz und Beweis in Kapitel 2.1.
Nach [Hö, Kapitel 7.9] erfüllen die Ableitungen der Ordnung k dieser speziellen $\mathbf{C}^\infty$-Parametrix, die Voraussetzungen eines wichtigen Faltungssatzes (siehe Kapitel 2.2). Der Faltungssatz sagt, daß unter bestimmten Voraussetzungen (siehe 2.1) die Faltung einer temperierten Distribution K (*hier: gegeben durch* $\partial^\beta E$, *mit* $|\beta| = k$) mit einer Distribution $u \in \mathbf{L}_p \cap \mathcal{E}'$ in $\mathbf{L}_p$ liegt. Setzt man nun also $\mathbf{P}_{k,.,D} u \in \mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$ voraus und wendet die Darstellung (0.3) auf die Distribution $\partial^\beta(\partial^\alpha u)$, ($|\beta| = k$,$|\alpha| \leq s$) an, so liegen

daher alle Ableitungen der Ordnung k der Distribution $(\partial^\alpha u)$,$(|\alpha| \leq s)$ in $\mathbf{L}_p(Y)$. Dies gilt auch für alle Ableitungen niedriger Ordnung und gilt für jede kompakte Teilmenge Y von Ω. Daraus wird die die Gültigkeit der Regularitätsaussage (♣) im Fall elliptischer Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten geschlossen. Diese Aussage wird in [Hö, Kapitel 7.9] als Satz formuliert. Er ist Grundlage der vorliegenden Arbeit (siehe Kapitel 2.3).

Satz 2.3.1 *Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Weiter sei $p \in (1,\infty)$,$s \in \mathbf{N}_0$ und es sei mit $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung k mit konstanten Koeffizienten bezeichnet. Liegt $u \in \mathbf{D}'(\Omega)$ und liegt $\mathbf{P}_{k,.,D}u$ in dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$, so folgt sofort, daß u bereits in dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$ liegt.*

Das Ziel dieser Arbeit

Betrachtet man elliptische Differentialoperatoren deren Koeffizienten durch beliebige Funktionen $a_\alpha(x) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ dargestellt werden, so stellt sich die Frage für welche $a_\alpha(x)$ die Regularitätsaussage von Satz 2.3.1 erhalten bleibt. In [Fo, Kapitel 6] wird gezeigt, daß jeder elliptische Differentialoperator der Ordnung k, dessen Koeffizienten $a_\alpha(x)$ sämtlich in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ liegen, im speziellen Fall $p = 2$ die Regularitätsaussage des Satzes 2.3.1 erfüllt. Man hätte nun auch gerne für den Fall $p \neq 2$, $p \in (1,\infty)$ eine Erweiterung des lokalen Regularitätssatzes auf elliptische Differentialoperatoren der Ordnung k, deren Koeffizienten in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ liegen. Das **Ziel** dieser Arbeit ist es, einen analogen lokalen Regularitätssatz für elliptische Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}^\infty$-Koeffizienten für alle p aus $(1,\infty)$ aufzustellen und zu beweisen. Dies gelingt jedoch nur bedingt. Es zeigt sich, daß für jedes p aus $(1,\infty)$ wenigstens unter der zusätzlichen Annahme, daß u bereits in dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{p,k}(\Omega)$ startet, aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ wieder $u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$ gefolgert werden kann. Diese Aussage wird in Kapitel 3.4 gezeigt. Der Beweis dieses lokalen Regularitätssatzes orientiert sich im wesentlichen am Beweis des lokalen Regularitätssatzes aus [Fo] für den Fall $p = 2$. (siehe Kapitel 3.1). Zusätzlich wird auch der Faltungssatz verwendet. Der lokale Regularitätssatz für elliptische Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$-Koeffizienten und $p \in (1,\infty)$ wird durch eine vollständige Induktion bewiesen. Der Beweis findet sich in Kapitel 3.3. Die Induktionsverankerung erfolgt dabei durch die Startvorgabe: $u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,k}(\Omega)$. Der Induktionsschritt wird mit Hilfe eines Satzes aus Kapitel 3.3 durchgeführt.

Satz 3.3.7: *Sei $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung k*

mit $\mathbf{C}_b^{s+j-k+1}(\Omega)$ *Koeffizienten und sei* $p \in (1,\infty)$ *sowie* $j, s \in \mathbf{N}_0$ *mit* $j \geq k$. *Liegt* u *in* $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+j}(\Omega)$ *und gilt* $\mathbf{P}_{k,.,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s+j-k+1}(\Omega)$ *so folgt, daß* u *bereits in* $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+j+1}(\Omega)$ *liegen muß.*
In den Beweis dieses Hilfsatzes 3.3.7 fließen im wesentlichen zwei weiter Hilfssätze (3.2.1 und 3.3.5) ein. Satz 3.3.5 beschreibt, wann genau eine Distribution u aus $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ auch schon in $\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ liegt.
Satz 3.3.5: *Der Raum* $\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ *stimmt mit der Menge derjenigen* $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ *- Funktionen übereinstimmt, deren Differenzenquotient* $(h)^{-1}(u(x+he_j)-u(x))$ *für kleine* h *h-unabhängig in der* $\mathbf{L}_p$*-Norm abgeschätzt werden kann.*
Satz 3.2.1 beschreibt eine wichtige Ungleichung. Diese wird als **Basisungleichung** bezeichnet.
Satz 3.2.1 *Sei* Ω *eine beschränkte und offene Teilmenge von* $\mathbf{R}^n$. *Sei* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *ein auf* $\overline{\Omega}$ *elliptischer Differentialoperator mit* $\mathbf{C}_b^s(\Omega)$*-Koeffizienten. Weiter sei* $s \in \mathbf{N}_0$. *Dann gibt es eine Konstante* C *mit welcher für jedes* u *aus* $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ *welches kompakten Träger in der Menge* Ω *besitzt, folgt:*

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq C(\|\mathbf{P}_{k,.D}u\|_{p,s,\Omega} + \|u\|_{p,s+k-1})$$

Diese Basisungleichung wird in Kapitel 3.2 bewiesen. In den Beweis dieser Basisungleichung fließt wieder der bereits erwähnte Faltungssatz ein.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. J. Weidmann für die freundliche Aufnahme in die Arbeitsgruppe 8.1 danken. Weiter bedanke ich mich bei Herrn Priv.Doz.Dr. Peter Stollmann für die sehr gute Betreuung der Diplomarbeit. Abschließend möchte ich mich noch bei Ralf für die tatkräftige Unterstützung bedanken.

Kapitel 1

Verallgemeinerte-Ableitungen

1.1 Schwache Ableitungen

Im ersten Abschnitt werden einige bekannte Definitionen und Sätze, bezüglich des Begriffs der schwachen Ableitung wiederholt, die in den nächsten Abschnitten benötigt werden. Im allgemeinen werden Sätze und Zusammenhänge aus der Distributionentheorie als bekannt vorausgesetzt. Sätze und Definitionen findet man z.b in $[H\ddot{o}], [So.], [Ma.], [Ru.]$.

Mit Ω sei im folgenden stets eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ bezeichnet. Ist f eine $\mathbf{L}_{1,loc}(\Omega)$- Funktion, so wird durch

$$\Lambda_f(\phi) := \int_\Omega f(\xi)\phi(\xi)d\xi$$

eine lineare Abbildung auf der Menge $\mathbf{D}(\Omega)$ gegeben. Durch diese Abbildung Λ_f ist eine Distribution definiert. Zu einer Distribution v kann es höchstens eine Funktion f aus $\mathbf{L}_1(\Omega)$ geben, so daß v mit der Distribution Λ_f übereinstimmt. Statt mit Λ_f wird die durch f repräsentierte Distribution in der Regel nur mit f bezeichnet. Ist v aus $\mathbf{D}'(\Omega)$, dann findet man für jede kompakte Teilmenge $K \subset \Omega$ eine Konstante C_K und eine Natürliche Zahl k, so daß für jede Testfunktion ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ deren Träger in K liegt und für alle Multiindizies β die folgene Abschätzung gilt:

$$\left|u(\partial^\beta\phi(x))\right| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha(\partial^\beta\phi)\|_\infty \leq C_K \sum_{|\gamma|\leq k+|\beta|} \|\partial^\gamma\phi\|_\infty$$

Daher wird durch $u(\phi) := \langle v, \partial^\alpha\phi\rangle$ eine Distribution definiert. Diese Distribution u wird als α'te Ableitung $\partial^\alpha v$ der Distribution v bezeichnet. Ist v aus

$\mathbf{L}_{1,loc}(\Omega)$, und gibt es ein g aus $\mathbf{L}_{1,loc}(\Omega)$, so daß für jede Testfunktion $\phi(x)$

$$\Lambda_g(\phi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_f \partial^\alpha(\phi)$$

folgt, dann heißt g die α'te schwache Ableitung, von f. Ein f aus $\mathbf{L}_{1,loc}(\Omega)$ besitzt höchstens eine α'te schwache Ableitung. Eine Funktion f aus $C^k(\Omega)$, besitzt jede schwache Ableitung deren Ordnung kleinergleich k ist. Die schwache Ableitung der Funktion f nach dem Multiindex α stimmt fast überall auf Ω mit der klassischen Ableitung nach α überein. Ist das f aus $\mathbf{C}_b^k(\Omega)$ so gilt daher für jedes α mit $|\alpha| \leq k$:

$$\|\partial^\alpha_{\text{schw.}} f\|_{\infty,\Omega} = \|\partial^\alpha_{\text{klass.}} f\|_{\infty,\Omega}$$

Im folgenden wird mit $\partial^\alpha u$ immer die Distributionenableitung bzw die schwache Ableitung von u bezeichnet. Manchmal wird auch anstatt ∂^α, der Ausdruck $D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ benutzt. Für den Umgang mit schwachen Ableitungen sind die folgenden Bemerkungen nützlich:

Bemerkungen:

(a) Hat man zwei Funktionen f und g, welche auf der Menge Ω stetig sind und durch $\partial^{e_j}\Lambda_f{=}\Lambda_g$ miteinander in Beziehung stehen, so folgt nach dem Lemma von du Bois-Reymond, daß f nach j sogar stetig partiell differenzierbar ist, und $\partial^{e_j} f = g$ ist.

(b) Existieren für eine Funktion f alle schwachen Ableitungen der Ordnung kleiner gleich K, so kann für alle Multiindizies γ_i, welche $|\gamma_1 + .. + \gamma_m| \leq k$ erfüllen, die Reihenfolge der Differentationen nach den γ_i, beliebig vertauscht werden. Die schwache Ableitung $\partial^{\gamma_1}(..(\partial^{\gamma_m} u))..)$ wird daher durch $\partial^{\gamma_1+..+\gamma_m} u$ gegeben.

Sei f eine Funktion, für die alle schwachen Ableitungen der Ordnung k existieren. Es stellt sich die Frage, ob die Existenz aller schwachen Ableitungen der Ordnung k, die Existenz der schwachen Ableitungen der Ordnung kleiner k impliziert. In der Regel ist dies nicht der Fall. Es gilt jedoch der folgende Satz, den man in $[H.\ddot{o}]$ Kapitel 5 findet:

Satz: 1.1.1. *Sei p eine beliebige Zahl mit $1 < p < \infty$ und k eine beliebige natürliche-Zahl. Liegt für ein u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ jede Ableitung der Ordnung k in $\mathbf{L}_{p,loc}(\Omega)$, dann exestieren auch alle schwachen Ableitungen niedrigerer Ordnung und diese liegen wieder in $\mathbf{L}_{p,loc}(\Omega)$.*

Ist $q \neq \infty$ und $q > p$, so liegt eine schwache Ableitung $\partial^\alpha u$ der Ordnung kleiner k sogar in $\mathbf{L}_{q,loc}(\Omega)$, wenn die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} + \frac{(k - |\alpha|)}{n} \tag{1.1}$$

1.2 Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt werden Sobolev-Räume mit der Bezeichnung $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ eingeführt, und deren Struktureigenschaften vorgestellt, z.B. Vollständigkeit. s ist dabei eine natürliche Zahl, und p liegt in $[1,\infty]$. Diese Räume bestehen aus allen Funktionen, deren schwache Ableitungen bis einschließlich der Ordnung s existieren und in $\mathbf{L}_p(\Omega)$ liegen. Auf $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ wird eine Norm definiert, welche den Raum zu einen Banachraum macht. Es wird gezeigt, daß für den spezial Fall $p = 2$ und s aus $\mathbf{N}_0$ die sogenannten $\mathbf{H}_s$-Räume mit den $\mathbf{W}_{p,s}(\mathbf{R}^n)$-Räumen übereinstimmen. Schließlich werden die $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$-Räume eingeführt. Die in diesem Abschnitt verwendeten Definitionen und Sätze stammen hauptsächlich aus $[Ad]$, $[Foll]$, $[M.Vo]$ sowie $[Ma]$

Definition: 1.2.1. *Ist Ω eine Teilmenge des $\mathbf{R^n}$ und s eine Zahl aus $\mathbf{N_0}$, so wird für jedes p aus $[1,\infty]$ durch*

$$\mathbf{W}_{p,s}(\Omega) := \{u \in \mathbf{D}'(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in \mathbf{L}_p(\Omega) \textit{ für alle } \quad |\alpha| \leq s\}$$

ein linearer Raum definiert. Für p aus $[1,\infty)$ wird durch

$$\| \bullet \|_{p,s,\Omega} := \{\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\Omega |\partial^\alpha(\bullet)|^p \, d\xi\}^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm auf $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ definiert. Für $p = \infty$ wird durch

$$\| \bullet \|_{\infty,s,\Omega} := \max_{0\leq|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha \bullet \|_{\infty,\Omega}$$

eine Norm auf $\mathbf{W}_{\infty,s}(\Omega)$ gegeben. Die so definierten normierten Räume heißen p-Sobolev Räume der Ordnung s.

Es ist klar, daß $\| \bullet \|_{p,s,\Omega}$ die Normeigenschaften erfüllt, da $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ mit einer Teilmenge der direkten Summe $\bigoplus_{|\alpha|\leq s} \mathbf{L}_p(\Omega)$ identifiziert werden kann. Es ist klar, daß für ein festes p die folgenden Inklusionen erfüllt sind:

$$\mathbf{L}_p(\Omega) = \mathbf{W}_{p,0}(\Omega) \supset \mathbf{W}_{p,1}(\Omega) \cdots \supset \mathbf{W}_{p,m}(\Omega) \supset \mathbf{W}_{p,m+1}(\Omega) \tag{1.2}$$

Eigenschaften wie Separabilität, Vollständigkeit, sowie Reflexivität übertragen sich von $\mathbf{L}_p(\Omega)$ auf $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$. Es wird gezeigt, daß der Raum $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banach-Raum ist, für $1 \leq p < \infty$ seperabel ist und für $1 < p < \infty$ reflexiv ist.
$\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ kann mittels der injektive Abbildung

$$I{:}\mathbf{W}_{p,s}(\Omega) \longrightarrow \bigoplus_{|\alpha|\leq s} \mathbf{L}_p(\Omega)_{(\alpha)} \qquad u \longmapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq s}$$

als linearer Teilraum von $\bigoplus_{|\alpha|\leq s} \mathbf{L}_p(\Omega)_\alpha$ aufgefasst werden. Versehen mit $\|\bullet, \bigoplus\|_{p,s,\Omega} = \begin{cases} \{\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\Omega |\bullet_{(\alpha)}|^p \, d\xi\}^{\frac{1}{p}} & \text{falls } 1 \leq p < \infty \,, \\ \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq s} \| \bullet_{(\alpha)} \|_\infty & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$ wird die direkte Summe der $\mathbf{L}_p(\Omega)$ zu einem **Banach-Raum** . Diese Norm erzeugt gerade die Topologie der direkten Summe. Die direkte Summe von Banach-Räumen ist bekanntlich wieder ein Banach-Raum. Für die entsprechenden p bleibt unter der direkten Summe auch die *Reflexivität* , sowie die *Seperabilität* des Raumes erhalten. Die oben definierte lineare Abbildung I ist injekiv. Sie ist Norm erhaltend und damit auch stetig; sie ist jedoch nicht surjektiv! Daher ist $I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ ein echter Teilraum von $\bigoplus_{|\alpha|\leq s} \mathbf{L}_p(\Omega)$,und es gilt, daß $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega) \simeq I(\mathbf{W}_{p,s,}(\Omega))$ ist. $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ ist genau dann ein Banach-Raum wenn $I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ einer ist. Der Raum $I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ ist genau dann ein Banach-Raum wenn er unter der Norm $\|\bullet, \bigoplus\|_{p,s,\Omega}$ abgeschlossen ist. Um zu zeigen, daß $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ ein Banachraum ist, wird jetzt die Abgeschlossenheit des Bildes von I gezeigt. Sei u_n aus $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$. Die Folge $I(u_n)$ konvergiert genau dann gegen ein $(\lambda)_{|\alpha|\leq s}$ wenn für jedes $|\alpha| \leq s$ die Komponente $\partial^\alpha u_n$ in $\mathbf{L}_p(\Omega)$ gegen $\lambda_{(\alpha)}$ strebt. Nach Voraussetzung, folgen

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - \lambda_{(0)}\|_{p,s,\Omega} \longrightarrow 0 \tag{1.3}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|\partial^\alpha u_n - \lambda_{(\alpha)}\|_{p,s,\Omega} \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

Die Hölder'sche Ungleichung mit (1.3) und mit der Definition der schwachen Ableitung liefert für alle ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$:

$$\lim n \longrightarrow \infty \, \langle \partial^\alpha u_n, \phi\rangle_\Omega \underset{\text{Hö , Def}}{=} (-1)^\alpha \langle \lambda_{(0)}, \partial^\alpha \phi\rangle_\Omega = \partial^\alpha \Lambda_{\lambda_{(0)}}(\phi)$$

Die Höldersche Ungleichung mit (1.4) liefert für alle ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$:

$$\lim n \longrightarrow \infty \, \langle \partial^\alpha u_n, \phi\rangle_\Omega \underset{\text{Hö}}{=} \langle \lambda_{(\alpha)}, \phi\rangle_\Omega = \Lambda_{\lambda_{(\alpha)}}(\phi)$$

Daher ist $\partial^\alpha \Lambda_{\lambda_0}(\phi) = \Lambda_{\lambda_{(\alpha)}}(\phi)$, und es folgt daraus $\partial^\alpha \lambda_{(0)} = \lambda_{(\alpha)}$. Dies bedeutet jedoch gerade $(\lambda)_{|\alpha|\leq s} = I(\lambda_0)$. Damit ist gezeigt, daß $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ ein Banachraum ist.

Da jede Teilmenge eines seperablen Banach- Raumes seperabel ist, ist $I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ seperabel wenn p in $[1, \infty)$ liegt. Da I ein Isomorphismus ist, folgt die Seperabilität von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ für $p \in [1, \infty)$.

Jeder abgeschlossene lineare Teilraum eines reflexiven Banach-Raumes ist reflexiv [Kö.]. Weil $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega) \simeq I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ ist, folgt daher $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)' \simeq I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))'$. Es folgt weiter: $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)'' \simeq I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))''$. Für p aus $(1, \infty)$ folgt wegen der Reflexivität von $I(\mathbf{W}_{p,s}(\Omega))$ die Reflexivität von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$.

$\square$

Lemma: 1.2.2. *Sei* $\mathbf{L}$ *ein partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten gegeben durch* $\mathbf{L}: = \sum_{|\alpha|\leq s} C_\alpha D^\alpha$. *Dann bildet* $\mathbf{L}$ *den Raum* $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ *stetig in den Raum* $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ *ab.*

Beweis: Für jedes u aus $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ folgt mit der Konstanten $G := \max_{|\alpha|\leq k} C_\alpha$ und der Konstanten $C = (G \sum_{i=o}^{k} n^i)$ die folgende Abschätzung:

$$\|\mathbf{L}u\|_{p,s,\Omega}^p \leq G \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{p,s,\Omega}^p \leq G \sum_{|\alpha|\leq k} \sum_{|\beta|\leq s} \|\partial^{\alpha+\beta} u\|_{p,\Omega}^p \leq C \sum_{|\gamma|\leq s+k} \|\partial^\gamma u\|_{p,\Omega}^p$$

$\square$

Um weitere Eigenschaften von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$-Räumen z.B Einbettungssätze beweisen zu können, ist es sicherlich sinnvoll, nach eventueller Approximierbarkeit der Räume durch möglichst glatte Funktionen zu fragen. Für ein $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ nimmt die spezielle Struktur der Menge Einfluss auf die Approximierbarkeit. In [Ad], sowie in [Ma] findet man die folgenden Sätze:

Satz: 1.2.3. (a) *(Meyers; Serrin) Sei* Ω *Teilmenge von* $\mathbf{R}^n$ *und* $1 \leq p < \infty$ *dann gilt:*

$$\overline{\mathbf{W}_{p,s}(\Omega) \bigcap \mathbf{C}^\infty(\Omega)}^{\|\bullet\|_{p,s,\Omega}} = \mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$$

(b) *Ist* Ω *beschränkt, sternförmig bzgl eines Punktes, so gilt bereits:*

$$\overline{\mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\bullet\|_{p,s,\Omega}} = \mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$$

Bemerkungen:

(A) Auf Teil (b) wird später im Beweis von Lemma 3.4.3 zurückgegriffen.

(B) Für $\phi(x)$, $u(x)$ aus $\mathbf{C}^s(\Omega)$ gilt die mehrdimensionale Produktregel für die Differentation, die sogeannte Leibnizregel:

$$D^\alpha(\phi u) = \sum_{\beta\leq\alpha} (D^{\alpha-\beta}\phi)(D^\beta u) \tag{1.5}$$

Mittels einer Approximation zeigt man für das Produkt (ϕu) mit $\phi \in \mathbf{C}^k(\Omega)$ und $u \in \mathbf{W}_{p,k}(\Omega)$, daß alle schwachen Ableitungen der Ordnung kleiner gleich k existieren. für diese Ableitungen $\partial^\alpha(\phi u)$ gilt wie im klassischen Fall die Leibnizregel (1.5). Lemma 1.2.5 wird zeigen, daß dieses Produkt ϕu wieder in $\mathbf{W}_{p,k}(\Omega)$ liegt.

(C) Für eine Funktion ϕ aus $\mathbf{C}^{\infty}(\Omega)$ und eine Distribution u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ wird durch $\phi u(\psi) := \langle u, \psi\phi\rangle$ für alle Testfunktionen ψ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ eine Distribution ϕu definiert. In [*Ru*] Kapitel 5 wird gezeigt, daß alle Distributionen Ableitungen des Produktes ϕu wieder durch die Leibnizregel gegeben werden. Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Ru] im Kapitel 5

Ohne Beweise sollen einige Eigenschaften der $\mathbf{W}_{2,s}(\mathbf{R}^n)$, bzw der $\mathbf{H}_s$-Räume aufgezählt, um später auf die Unterschiede im lokalen Regularitätssatz für elliptische Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}^{\infty}(\Omega)$ -Koeffizienten im Fall $p = 2$ und im Fall $p \neq 2$, $p \in (1, \infty)$ hinzuweisen. Definitionen und Sätze findet man unter anderem in [Hö] [Fol] [Ma,V] [Tr]

Definition: 1.2.4. *Sei p aus $(1, \infty)$ und s aus $\mathbf{R}$, dann werden durch $\mathbf{H}_s^p = \{u \in \mathbf{S}'; \mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}u] \in \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)\}$ lineare Räume gegeben . Durch $\|u\|_{H_s^p} := \|\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}u]\|_p$ werden auf diesen Räumen Normen definiert. Diese normierten- Räume werden als* ***Bessel-Potential-Räume*** *bezeichnet.*

Für $p = 2$ und s aus $\mathbf{R}$ stimmt die Menge aller u aus $\mathbf{H}_s^p$, mit der Menge $\{u \in \mathbf{S}'; (1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u} \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)\}$ überein. Durch $\| \bullet \|_{\mathbf{H}s,\mathbf{R}^n} = (2\pi)^{-n}\|(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F} \bullet \|_{2,\mathbf{R}^n}$ wird eine zu $\| \bullet \|_{\mathbf{H}_s^p}$ äquivalente Norm definiert. Die Fouriertransformation setzt sich nämlich als unitärer Operator von $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ auf ganz $\mathbf{L}_2$ fort. Auf $\mathbf{L}_2$ folgt daher: $\|\mathcal{F}u\|_{\mathbf{L}_2} = \|u\|_{\mathbf{L}_2}$. Und es gilt: $\|\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}[(1+|x|^2)^{\frac{S}{2}}\mathcal{F}u]\|_{\mathbf{L}_2} = (2\pi)^n\|u\|_{\mathbf{H}_s^2}$. Daher folgt die Norm -Äquivalenz und eine Distribution u liegt genau dann in $\mathbf{H}_s^2$, wenn $(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}u$ in $\mathbf{L}_2$ liegt.

Bemerkung: *Ist s eine natürliche Zahl, so so sind die Normen $\| \bullet \|_{\mathbf{H}_s^p}$ und $\| \bullet \|_{s,p,\mathbf{R}^n}$ für jedes $p \in (1, \infty)$ äquivalent. Für jede natürliche Zahl s sind die Räume $\mathbf{W}_{p,s}(\mathbf{R}^n)$ und $\mathbf{H}_s^p$ daher gleich.*

Im folgenden wird $\mathbf{H}_s := \mathbf{H}_s^2$ gesetzt. Nach der obigen Bemerkung gilt für $s \in \mathbf{N}_0$: $\mathbf{W}_{2,s} = \mathbf{H}_s$. Für jedes s aus $[0, \infty)$ folgt:

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n) = \mathbf{H}_0 \supset ...\mathbf{H}_s \supset \mathbf{H}_{s+1}$$

Für s aus $(-\infty, 0)$ ist $\mathbf{H}_s$ die vollständige Hülle von $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n)$ unter der $\mathbf{H}_s$-Norm. Ist s aus $[0, \infty)$ so wird die Norm $\| \bullet \|_{\mathbf{H}_s}$ durch das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbf{R}_n}(1+|x|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)\overline{\mathcal{F}}(g)dx$ erzeugt. Die $\mathbf{H}_s$ Räume sind daher für $s \geq 0$ Hilberträume, und $\mathcal{F}$ ist eine Isometrie von $\mathbf{H}_s$ nach
$\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n, (1+|x|^2)^{\frac{s}{2}})$. Für s aus $(-\infty, t)$ und $t \leq 0$ setzt sich die Einbettung $\mathcal{I} : \mathbf{L}_2 \longrightarrow \mathbf{L}_2$, definiert durch $\mathcal{I}(u) = u$, zu einer stetigen Einbettung $\mathcal{I}_t^s : \mathbf{H}_t \hookrightarrow \mathbf{H}_s$ fort.

Sei $s \geq 0$. Schränkt man das Skalarprodukt $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n)}$ auf die Menge $\mathbf{H}_s \times \mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n)$ ein, so erhält man eine stetige Sesquilinearform. **Begründung:** *Sei $f \in \mathbf{H}_s$ und $g \in \mathbf{L}_2$. Das Skalarprodukt der Fouriertransformierten $\mathcal{F}f$ und $\mathcal{F}g$ ist nach dem Satz von Plancherell, gleich dem Skalarprodukt von f und g. Das Produkt $(\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$ kann als $(\mathcal{F}f)(1+|x|^2)^{\frac{t}{2}}(\mathcal{F}g)(1+|x|^2)^{-\frac{t}{2}}$ geschrieben werden. Aus der Hölderschen Ungleichung für $p=2$, folgt:*

$$|\langle f, g\rangle| = |\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle| \leq D\|f\|_{\mathbf{H}_s}\|g\|_{\mathbf{L}_2}$$

Für jedes f aus $\mathbf{H}_s$ läßt sich die Abbildung $A_f(g) = \langle f, g\rangle$ unter Erhaltung der Stetigkeit auf $\mathbf{H}_{-s}$ fortsetzen. Daraus folgt, daß sich die Sesquilinearform $\langle f, g\rangle|_{\mathbf{H}_2 \times \mathbf{L}_2}$ unter Erhaltung der Stetigkeit auf $\mathbf{H}_s \times \mathbf{H}_{-s}$, fortsetzen läßt.

Jedes g aus $\mathbf{H}_{-t}$ erzeugt durch $f \longrightarrow \langle f, g\rangle_{Ses}$ eine stetige lineare Abbildung auf $\mathbf{H}_t$. Ebenso erzeugt natürlich jedes g aus $\mathbf{H}_t$ durch $f \longrightarrow \langle f, g\rangle_{Ses}$ eine stetige lineare Abbildung auf $\mathbf{H}_{-t}$. Da die Räume $\mathbf{H}_s$ für jedes $s \in \mathbf{R}$, Hilberträume sind, gibt es für jedes stetige lineare Funktional auf $\mathbf{H}_s$ nach dem Riesz'schen Darstellungssatz eine Funktion v_s, mit welcher für alle f aus $\mathbf{H}_s$ gilt: $y(f) = \langle v_s, f\rangle$. y wird also durch v_s dargestellt, und aus dem Riesz'schen Darstellungssatz folgt sogar $\|v_s\|_{\mathbf{H}_s} = \|y\|$. Setzt man $g = \mathcal{F}^{-1}[(1+|x|)^s \mathcal{F}v_s[x]]$, so ist dieses g aus $\mathbf{H}_{-s}$. Mit dem Satz von Plancherell folgt für jede Funktion f aus $\mathbf{H}_s$:

$$y(f) = \langle v_s, f\rangle = \int (\mathcal{F}g)(\mathcal{F}f)dx = \langle g, f\rangle_{Ses}$$

und es folgt weiter: $\|y\| = \|v_s\|_{\mathbf{H}_s} = \|g\|_{\mathbf{H}_{-s}}$. Daher wird jedes stetige lineare Funktional auf $\mathbf{H}_t$ durch ein Element aus $\mathbf{H}_{-t}$ erzeugt, und jedes stetige lineare Funktional auf $\mathbf{H}_{-t}$ durch ein Element aus $\mathbf{H}_t$. Es folgt:

$$(\mathbf{H}_{-t})' \simeq (\mathbf{H}_t) \qquad (\mathbf{H}_t)' \simeq (\mathbf{H}_{-t})$$

und wegen $\|y\| = \|g\|_{\mathbf{H}_{-s}}$ sind die eben genannten Isomorphien sogar isometrisch.
Es ist möglich für $p \neq 2$, $1 < p < \infty$ auch für $s < 0$ $\mathbf{W}_{p,s}(\mathbf{R}^n)$-Räume zu definieren. Man betrachtet die zugehörigen Dualräume und versieht diese mit den üblichen Dualnormen. Diese Räume sind natürlich wieder Banach Räume. Für s aus $\mathbf{Z}_-$ ist $\mathbf{W}_{2,s}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{H}_s$. Ist $s < 0$ und $p \neq 2$ so ist $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ nicht mehr wie im Fall $p = 2$ die abgeschlossene Hülle von $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$. Der Raum $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ ist in $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$, $s \in \mathbf{Z}_-$ nicht einmal enthalten. Es zeigt sich

jedoch, daß $\mathbf{W}_{p,s}(\mathbf{R}^n)$,$s \in \mathbf{Z}_-$ als vollständige Hülle von $\mathbf{L}_{p'}(\mathbf{R}^n)$ unter $\|\bullet\|_{p,s}$ aufgefaßt werden kann.

Zum Abschluss dieses Kapitels wird eine lokale Version von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ gegeben. Im lokalen Regularitätssatz sind es gerade diese Räume in denen die Regularität der Lösung gezeigt wird.

Definition: 1.2.5. *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Mit $\mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$ werde die Menge der Distributionen u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ bezeichnet, welche für alle offenen und beschränkten Teilmengen B von Ω mit Abschluß ganz in Ω, im Raum $\mathbf{W}_{p,s}(B)$ liegen.*

Nach dem Satz 1.1.1 stimmt $\mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ mit der Menge $\{u \in \mathbf{D}'(\Omega) \mid \ \partial^\alpha u \in \mathbf{L}_{p,loc}(\Omega), |\alpha| = s\}$ überein.

Lemma: 1.2.6. (a) *Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Ein u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ liegt genau dann in $\mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$, wenn für jedes ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ das Produkt ϕu in $\mathbf{W}_{p,s}(\mathbf{R}^n) := \mathbf{W}_{p,s}$ liegt. Dabei soll das Produkt $\phi(x)u(x)$ als gewöhnliches Produkt zweier Funktionen aufgefasst werden.*

(b) *$\mathbf{W}_{p,s}$ ist eine Teilmenge von $\mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$.*

Zum **Beweis:** Sei Ω eine beliebige offene Menge von $\mathbf{R}^n$. Ist ϕ aus $\mathbf{C}_b^s(\Omega)$ so überführt die Abbildung $u \longmapsto \phi u$ den Raum $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ stetig in sich selbst. Für jedes u aus $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ folgt nämlich unter Anwendung der Leibnizregel auf das Produkt ϕu:

$$\|\phi u\|_{s,p,\Omega}^p = \sum_{|\gamma| \leq s} \|\sum_{\beta \leq \gamma} c_{\gamma,\beta}(\partial^{\gamma-\beta}\phi)(\partial^\beta u)\|_{p,\Omega}^p$$

$$\leq \sum_{|\gamma| \leq s} \sum_{\beta \leq \gamma} \|(\partial^{\gamma-\beta}\phi)\|_{\infty,\Omega}^p \|\partial^\beta u\|_{p,\Omega}^p \leq K_{\phi,s,\Omega}\|u\|_{p,s,\Omega}$$

Dabei ist $K_{\phi,s,\Omega}$ eine Konstante, welche von der Wahl des u unabhängig ist. Ist Teil (a) bereits gezeigt, so kann hieraus Teil (b) gefolgert werden.
Zu (a): $\{\Longrightarrow\}$ Sei Y eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω. Aus $u \in \mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$ folgt: $u \in \mathbf{W}_{p,s}(Y)$. Ist $\phi(x)$ aus $\mathbf{C}_0^\infty(Y)$ so hat das Produkt ϕu einen kompakten Träger in Y. Es gilt:

$$\|\phi u\|_{p,s,\mathbf{R}^n} = \|\phi u\|_{p,s,Y} \leq K_{\phi,s,Y}\|u\|_{p,s,Y}$$

ϕu liegt daher in $\mathbf{W}_{p,s}$.
Zu (a) : $\{\Longleftarrow\}$ Wählt man ein ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ welches auf einer kompakten Teilmenge Y von Ω identisch 1 ist, dann folgt auf dieser Menge Y, $\phi u = u$. Alle schwachen Ableitungen von ϕu der Ordnung kleiner gleich s, stimmen daher auf Y mit $\phi D^\alpha u$ überein. Dies ist ein direkter Schluß aus der Leibnizregel, da alle Terme mit Ableitungen von ϕ, auf Y verschwinden. Also ist $u \in \mathbf{W}_{p,s}(Y)$. Weil Y beliebig gewählt war liegt u somit in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$.

$\square$

Corolar: 1.2.7. *Liegt $u(x)$ in $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ und liegt $\phi(x)$ in $\mathbf{C}^s_b(\Omega)$ so ist auch das Produkt ϕu aus $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$.*

Beweis: siehe Lemma (1.2.6).

$\square$

Bemerkung: *Sei $u \in \mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ und $\phi \in \mathbf{L}_{1,loc}$. Die Distribution ϕu wird durch $\langle \phi u, \psi \rangle := \int_\Omega (\phi u)\psi dx$ gegeben. Ist ϕ aus $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$, so gilt: $\langle \phi u, \psi \rangle = \langle u, \phi\psi \rangle$. $u\phi$ stimmt in diesem Fall mit der üblichen Definition des Produktes einer Funktion ϕ aus $\mathbf{C}^\infty$ und einer beliebigen Distribution überein.*
Ist Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$, so folgt für $u(x) \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ und $\phi(x) \in \mathbf{D}(\Omega)$ nach Lemma 1.2.6, daß das Produkt ϕu in $\mathbf{W}_{p,s}$ liegt. Das Produkt ϕu hat dabei kompakte Träger in der Menge Ω. Daher wird die folgende Definition verwendet.

Definition: 1.2.8. *Mit $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s}(\Omega)$ wird die Menge $\{u \in \mathbf{W}_{p,s}$ mit $Supp(u) \subset \overline{\Omega}\}$ bezeichnet.*

Kapitel 2

Elliptische $L_{p,loc}(\Omega)$- Regularität

2.1 Elliptizität und die Existenz einer $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ Parametrix

Ziel dieses Kapitels ist es, den lokalen Regularitätssatz für elliptische Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten vorzustellen und zu beweisen. Beweis und Satz wurden aus [Hö] Kapitel 7.9 übernommen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden zunächst die grundlegenden Begriffe erklärt, anschließend wird durch die Einführung einer speziellen zum Differentialoperator gehörenden Distribution, **der Parametrix** E, ein wichtiges Rüstzeug für den Beweis des konstanten Koeffizienten -Satzes geliefert. Eine Parametrix von $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ist eine Distribution E für welche eine $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ Funktion ω existiert, so daß die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\mathbf{P}_{k,.,D}E = \delta + \omega$$

Jede Fundamentallösung ist eine Parametrix, und daher hat jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten nach dem Existenzsatz von Malgrange Ehrenpreis eine Parametrix. Ein Satz aus $[H\ddot{o}]$ zeigt, daß jeder elliptische Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten sogar eine Parametrix besitzt, die in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ liegt und der Ungleichung $\left|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(E)\right| \leq C_{\alpha,\beta}\left|\xi\right|^{|\beta|-k-|\alpha|}$ genügt. Diese Parametrix ist jedoch keine Fundamentallösung mehr.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird ein wichtiger **Faltungssatz** über die Faltung einer $\mathbf{S}'$-Distribution, die bestimmte Voraussetzungen erfüllt, mit $\mathbf{L}_p^0$-Distributionen besprochen. Der Satz besagt, daß die Faltung dieser Distributionen in $\mathbf{L}_p$ liegt. Der Satz wird jedoch aus Gründen der Komplexität

des Beweises erst im Anhang bewiesen.
Es zeigt sich, daß die α'ten Ableitungen der Ordnung k der $\mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R}^n\backslash 0)$-Parametrix eines elliptischen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten die Voraussetzung an die $\mathbf{S}'$-Distribution aus dem Faltungssatz erfüllt.
Im lokalen Regularitätssatz für den elliptischen konstanten Koeffizienten-Operator $\mathbf{P}_{k,.,D}$ soll gezeigt werden, daß für eine Distribution $u \in \mathbf{D}'(\Omega)$ aus $\mathbf{P}_{k,.,D}u \in \mathbf{L}_p^{loc}(\Omega)$, für jedes α der Ordnung k bereits $\partial^\alpha u \in \mathbf{L}_p^{loc}(\Omega)$ folgt. $\partial^\alpha u$ kann auf jeder kompakten Menge Y durch

$$\underbrace{f(x) + \partial^\alpha \mathbf{E} * \chi_Y \mathbf{P}_{k,x,D} u}_{(A)}$$

dargestellt werden. Dabei ist $f(x)$ eine auf $\mathbf{R}^n$ unendlich oft stetig differenzierbare Funktion und χ_Y eine Funktion aus $\mathbf{D}(\Omega)$, welche auf der Menge Y konstant 1 ist. $\partial^\alpha \mathbf{E}$ erfüllt für jedes α der Ordnung k die Voraussetzungen des gezeigten Faltungssatzes. $\chi_Y \mathbf{P}_{k,x,D}u$ liegt nach Voraussetzung in $\mathbf{L}_p^0(\Omega)$. Der Faltungssatz kann daher auf die Faltung $\partial^\alpha \mathbf{E} * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D}u$ angewandt werden und die Faltung liegt daher in $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$. Die Funktion $f(x)$ liegt in $\mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ und daher natürlich auch in $\mathbf{L}_p(Y)$. Da $u(x)$ auf der Menge Y durch (A) dargestellt wird, folgt: $u(x) \in \mathbf{L}_p(Y)$. Da die Wahl der kompakten Menge Y beliebig war, folgt die Behauptung des lokalen Regularitätssatzes.

Es sei $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein Differentialoperator der Ordnung k gegeben durch:

$$\mathbf{P}_{k,x,D} := \sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ seien beliebige Funktionen und für mindesten ein α der Ordnung k sei $a_\alpha(x)$ auf Ω nicht identisch Null. Die Summe der Terme höchster Ordnung

$$\mathbf{P}^h_{k,x,D} = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha$$

soll mit **Hauptteil** des Operators $\mathbf{P}_{k,x,D}$ bezeichnet werden. Das Polynom

$$\mathbf{P}^k(x,\xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \;\; x \in \Omega \;\; \xi \in \mathbf{R}^n$$

wird mit **charakteristisches Polynom** von $\mathbf{P}_{k,x,D}$ bezeichnet .

Definition: 2.1.1. *(a): Ein Differentialoperator* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *heißt* ***elliptisch*** *in* x_0*, wenn sein charakteristisches Polynom in der Menge*

$$\{(x_0, \xi) \mid \xi \in \mathbf{R}^n\}$$

höchstens den Punkt $(x_0, 0)$ *als Nullstelle besitzt. (b): Er heißt für eine Teilmenge* Ω *des* $\mathbf{R}^n$*,* ***elliptisch*** *auf ganz* Ω *, wenn (a) für alle* x_0 *aus* Ω *gilt.*

Lemma: 2.1.2. *Ein Differentialoperator* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *ist genau dann elliptisch in* x_0*, wenn es eine positive Konstante* A_{x_0} *gibt, so daß für alle* ξ *aus* $\mathbf{R}^n$ *die folgende Ungleichung erfüllt ist:*

$$\left|\mathbf{P}^k(x_0, \xi)\right| \geq A_{x_0} \left|\xi\right|^k$$

Beweis $\{\Longleftarrow:\}$ Folgt direkt aus der Definition.
$\{:\Longrightarrow\}$ Das Polynom $\mathbf{P}^k(x_0, \xi)$ ist homogen vom Grad k. Daher folgt, für alle ξ aus $\mathbf{R}^n$, daß $\left|\mathbf{P}^k(x_0, \xi)\right| = \left|\xi\right|^k (\left|\mathbf{P}^k(x_0, \frac{\xi}{|\xi|})\right|)$ ist.
$\left|\mathbf{P}^k(x_0, \hat{\xi})\right|$ ist auf $x_0 \times \mathbf{R}^n$ stetig und nimmt damit auf der kompakten Menge $\{\hat{\xi} \mid \left|\hat{\xi}\right| = 1\} = \mathbf{M}$ ein Minimum an. Dieses muß natürlich größer als 0 sein und soll mit A_{x_0} bezeichnet werden. Mit dieser Konstanten A_{x_0} folgt für alle ξ aus $\mathbf{R}^n$:

$$\left|\xi\right|^k (\left|\mathbf{P}^k(x_0, \frac{\xi}{|\xi|})\right| \geq A_{x_0} \left|\xi\right|^k$$

□

Corolar: 2.1.3. *Sei* Y *eine kompakte Teilmenge des* $\mathbf{R}^n$ *und* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *ein Differentialoperator mit* $\mathbf{C}(Y)$*- Koeffizienten. Ist* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *auf ganz* Y *elliptisch, so folgt die Existenz einer positiven Konstanten* A_Y*, so daß für alle* x *aus* Y *und für alle* ξ *aus* $\mathbf{R}^n$ *die folgende Ungleichung gilt:*

$$\left|\mathbf{P}^k(x, \xi)\right| \geq A_Y \left|\xi\right|^k$$

Beweis: Da alle $a_\alpha(x)$ auf Y stetig sind, ist $\left|\mathbf{P}^k(x, \xi)\right|$ auf $Y \times \mathbf{R}^n$ stetig. Daraus folgt die Existenz von $\min\limits_{x \in Y, \xi \in \mathbf{M}} \left|\mathbf{P}^k(x, \xi)\right|$ welches grösser als 0 sein muß. Dieses Minimum ist die gesuchte Konstante A_Y.

□

Die Menge der Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$-Koeffizienten bildet den Raum $\mathbf{D}'(\Omega)$ stetig in sich selbst ab. Ist v eine $\mathbf{D}'(\Omega)$- Distribution und $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein Differentialoperator mit $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$- Koeffizienten, so wird durch

$$\mathbf{P}_{k,x,D} u = v$$

eine partielle Differentialgleichung gegeben. Der Lösungsraum U besteht dabei aus allen Distributionen u welche die Differentialgleichung lösen. Dabei steht im allgemeinen natürlich nicht fest, daß die Differentialgleichung überhaupt eine Lösung besitzt. Aus der Theorie der partiellen Differential-Operatoren ist bekannt, daß jeder Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,.,D}$ mit konstanten Koeffizienten eine **Fundamentallösung** besitzt. Siehe (2.1.5) Satz von **Malgrange - Ehrenpreis**. Eine Fundamentallösung E von einem $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ist eine $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$-Distribution für welche gilt:

$$\mathbf{P}_{k,.,D}E = \delta \tag{2.1}$$

Sei Ω eine Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und Y eine kompakte Teilmenge von Ω. Weiß man von einer Differentialgleichung $\mathbf{P}_{k,.,D}u = v$, daß eine Lösung u existiert, so kann eine Lösung u lokal, d.h auf jeder kompakten Teilmenge von Ω, durch v und durch die zu $\mathbf{P}_{k,.,D}$ gehörende Fundamentallösung E beschrieben werden. Wählt man nämlich ein beliebiges χ aus $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$, welches auf der Menge Y identisch 1 ist, so lassen sich alle Elemente u von $\mathbf{D}'(\Omega)$ auf der Menge Y durch $\chi u = E * (\mathbf{P}_{k,.,D}\chi u)$ darstellen. $(\mathbf{P}_{k,.,D}\chi u)$ ist eine Distribution mit kompakten Trägern. Die Faltung einer Distribution $E \in \mathbf{D}'$ mit einem Element aus $\mathcal{E}'$ ist definiert, und liegt wieder in $\mathbf{D}'$. Daher folgt:

$$E * (\mathbf{P}_{k,.,D}\chi u) = \delta * \chi u = \chi u$$

Wählt man eine Distribution v mit kompakten Trägern, so ist die Differentialgleichung $\mathbf{P}_{k,.,D}u = v$ stets lösbar. Wendet man $\mathbf{P}_{k,.,D}$ auf die Faltung $E * v$ an, so folgt $\mathbf{P}_{k,.,D}(E * v) = v$. Die Lösung u ist hier also durch den Faltungsterm $E * v$ gegeben.
Bemerkungen: Ist u aus $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ und v aus $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, so gibt es genau eine Distribution $\mathbf{L} \in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$, welche für alle $\phi \in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ die Gleichung $\mathbf{L}(\phi) := u * (v * \phi)$ erfüllt. Diese Distribution $\mathbf{L}$ wird als Faltung $u * v$ der Distribution u mit der Distribution v bezeichnet. Die Reihenfolge beim Falten ist vertauschbar d.h, es gilt $u * v = v * u$. Ist u aus $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ und v ein Element aus $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, so wird durch $u * v[y] := u(v(y - \bullet))$ die Faltung einer Distribution mit einer Schwarz'schen Funktion definiert. Es zeigt sich daß die Faltung $u * v$ in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ liegt.
Betrachtet man die Faltung einer Distribution u aus $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit einer Distribution Λ_v aus $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, welche durch eine Funktion v aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ erzeugt wird, so kann gezeigt werden, daß die Faltung dieser beiden Distributionen $u * \Lambda_v = \Lambda_v * u$ durch die Distribution $\Lambda_{u(v(y-\bullet))}$ gegeben ist. Dabei liegt die Funktion $u(y - \bullet)$ als Faltung eines u aus $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit einem v aus $\mathbf{S}$ in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$

Beispiel: 2.1.4. *Ist u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ und $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein partieller Differentialoperator so, wird für jede kompakte Teilmenge Y von Ω durch $\chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u$ eine Distribution v_Y gegeben. Mit χ_Y soll dabei eine Funktion aus $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ bezeichnet sein, welche auf der kompakten Menge Y identisch 1 ist. Liegt die Distribution v_Y in $\mathbf{C}^\infty(Y)$, so weiß man bereits, daß die Distribution u auch in $\mathbf{C}^\infty(Y)$ liegen muß. Eine Lösung u kann nämlich auf Y durch den Faltungsterm $\mathbf{E}*\chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u$ dargestellt werden. Aus den vorherigen Bemerkungen weiß man, daß dieser Faltungsterm in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ liegt. Damit liegt u in $\mathbf{C}^\infty(Y)$.*

Aus Beispiel 2.1.4 folgt Lemma 2.1.5:

Lemma: 2.1.5. *Sei u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ und Ω eine Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Liegt $\mathbf{P}_{k,.,D} u$ in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$, so folgt bereits, daß u in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ liegt.*

In vielen Fällen kann die Darstellung von u durch $E * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u$ nicht genutzt werden.

Beispiel: 2.1.6. *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten und u eine $\mathbf{D}'(\Omega)$- Distribution. Im lokalen Regularitätssatz* 2.3.1 *soll gezeigt werden, daß bereits alle $D^\alpha u$ mit $|\alpha| = k$ in $\mathbf{L}_p(Y)$ liegen, wenn die Distribution $\mathbf{P}_{k,.,D} u$ für eine kompakte Teilmenge Y von Ω in $\mathbf{L}_p(Y)$ liegt. Ist Y eine kompakte Teilmenge von Ω und χ_Y eine Funktion aus $\mathbf{D}(\Omega)$ welche auf der Menge Ω identisch* 1 *ist, so gilt für alle α wieder:*

$$D^\alpha u = (D^\alpha E) * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u$$

Man findet hier jedoch keinen Faltungssatz der einem sagt, daß für zwei Distributionen E und v mit $E \in \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ und $v \in \mathcal{E}' \cap \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ die Faltung $D^\alpha E * v$ für alle α mit $|\alpha| = k$, stets in $\mathbf{L}_p(Y)$ liegt. Daher kann hier die Darstellung von $D^\alpha u$ durch den Faltungsterm gar nicht genutzt werden. Man weiß zu wenig über die Fundamentallösung E. Weiß man jedoch zum Beispiel über die Fundamentallösung E eines elliptischen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten, daß diese von der Ordnung k ist, also in $\mathbf{D}'^k$ liegt, dann kann gefolgert werden, daß die Faltung $D^\alpha E * \chi \mathbf{P}_{k,.,D} u$ in $\mathbf{C}(\mathbf{R}^n)$ liegt. Siehe [Hö] Kapitel 4.2. *$D^\alpha u$ liegt daher in diesem Fall in $\mathbf{L}_p(Y)$.*

Für den elliptischen Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ist über die Fundamentallösung jedoch nur bekannt was sich aus dem Existenzsatz von Malgrange-Ehrenpreis für einen Differentialoperator mit Koeffizienten in $\mathbf{C}(\mathbf{R}^n)$ ergibt. Dieser Satz soll hier doch einmal zitiert werden.

Satz: 2.1.7. *(Malgrange- Ehrenpreis)*
Jeder partielle Differential-Operator mit konstanten Koeffizienten in $\mathbf{C}$ *hat eine Fundamentallösung E. Für diese gilt*

$$|E(\phi)| \leq \mathcal{A}r^{-N} \int_{\Gamma} d\sigma(\omega) \int_{\mathbf{R}^n} |\phi(t + rw)|\, dt$$

wobei N *der Grad des Operators und* σ *das Oberflächen-Maß auf der Menge*

$$\Gamma = \{w \mid w = (e^{i\phi_1}, .., e^{i\phi_n});\ \phi_j \in \mathbf{R}\ \forall \mathrm{j} \in (1, ., n)\}$$

ist.

Die Information über die Fundamentallösung E, die man aus dem Satz von Malgrange Ehrenpreis erhält, reicht nicht aus um

$$D^\alpha u = (D^\alpha E) * \chi_Y \mathbf{P}_{k,.,D} u \in \mathbf{L}_p(Y)$$

folgern zu können. Fundamentallösungen stellen also nicht immer ein geeignetes Mittel dar, um Regularitätsfragen zu behandeln. Der Begriff der Fundamentallösung wird nun wie folgt abgeschwächt.

Definition: 2.1.8. *Sei* $\mathbf{P}_{k,.,D}$ *Differential-Operator mit konstanten Koeffizienten der Ordnung* k *und* E *aus* $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ *. Gibt es ein* ω *aus* $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$*, so daß* E *die Gleichung*

$$\mathbf{P}_{k,.,D} E = \delta + \omega \tag{2.2}$$

erfüllt, so heißt E *eine* ***Parametrix*** *von* $\mathbf{P}_{k,.,D}$*.*

Ist Ω eine Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, so gilt für jedes u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ und für jedes χ aus $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$, welches auf einer kompakten Teilmenge Y von Ω identisch 1 ist:

$$E * \mathbf{P}_{k,.,D} \chi u = \mathbf{P}_{k,.,D} E * \chi u = \chi u + \omega * \chi u \tag{2.3}$$

Da jede Fundamentallösung auch eine Parametrix (für $\omega \equiv 0$) darstellt, weiß man natürlich, daß jeder Differential-Operator mit konstanten Koeffizienten eine Parametrix besitzt. Ist $\mathbf{P}_{k,.,D}$ jedoch elliptisch, so kann man sogar folgende Aussagen treffen: [$H\ddot{o}$.4]

Satz: 2.1.9. *(Existenzsatz) Jeder* ***elliptische*** *Differential-Operator mit Konstanten Koeffizienten hat eine Parametrix* $E \in \mathbf{S}'$*, und es gilt* $E = \Lambda_g$ *mit* $g \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n \backslash 0)$ *. Zusätzlich erfüllt* E *die folgende Ungleichung:*

$$\left|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(E)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \left|\xi\right|^{|\beta| - k - |\alpha|}$$

Beweis: Es sei $\mathbf{P}_k(.,\xi) := \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}^i(.,\xi)$. Da $\mathbf{P}_{k,.,D}$ elliptisch ist, gibt es eine Konstante A, die grösser als 0 ist, mit der für alle ξ aus $\mathbf{R}^n$ gilt:

$$\left|\mathbf{P}^k(.,\xi)\right| \geq A\,|\xi|^k$$

Mit dieser Konstanten A folgt sofort

$$|-\mathbf{P}_k(.,\xi)| = |\mathbf{P}_k(.,\xi)| \geq A\,|\xi|^k - (\sum_{i=0}^{k-1} \left|\mathbf{P}^i(.,\xi)\right|)$$

Man kann eine Konstante B finden, so daß die obige Ungleichung durch

$$A\,|\xi|^k - (\sum_{i=0}^{k-1} \left|\mathbf{P}^i(.,\xi)\right|) \geq A\,|\xi|^k - B(\{\sum_{i=0}^{k-1} |\xi|^i\} + 1) \tag{2.4}$$

weiter geführt werden kann. Ist R eine Zahl grösser als 1, so ist für alle ξ mit $|\xi| > R$ die Abschätzung $|\xi|^k > R^{k-i}\,|\xi|^i$ zulässig. Es gibt daher ein $R > 1$, so daß (2.3) für alle ξ mit $|\xi| > R$ durch

$$\geq A\,|\xi|^k - \frac{A}{2}\,|\xi|^k = \frac{A}{2}\,|\xi|^k$$

abgeschätzt werden kann. Daher gilt für alle ξ aus $\mathbf{R}^n_R := \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_R(0)$ die folgende Abschätzung:

$$|\mathbf{P}_k(.,\xi)| \geq \frac{A}{2}\,|\xi|^k \tag{2.5}$$

Es ist klar, daß $(\mathbf{P}_k)^{-1}$ in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n_R)$ liegt. Eine Induktion nach $|\alpha|$ zeigt, daß auf dieser Menge $\mathbf{R}^n_R$, $\partial^\alpha(\frac{1}{\mathbf{P}_k(.,\xi)}) = \frac{\mathbf{Q}(\xi)_\alpha}{(\mathbf{P}_k(.,\xi))^{|\alpha|+1}}$ ist, wobei $\mathbf{Q}(\xi)_\alpha$ ein Polynom, dessen Grad kleiner gleich $(k-1)\,|\alpha|$ ist, bezeichnet. Aus (2.5) folgt, daß alle ξ aus $\mathbf{R}^n_R$ die Ungleichung

$$\left|\xi^\beta D^\alpha(\frac{1}{\mathbf{P}_k(.,\xi)})\right| \leq \left|-i^{|\alpha|}\right| \mathbf{C}_{\alpha,\beta}\,|\xi|^{|\beta|-|\alpha|-k} \tag{2.6}$$

erfüllen. Dabei ist die Konstante $\mathbf{C}_{\alpha,\beta}$ vom $\max\limits_{0\leq|\theta|\leq\gamma} |g_\theta|$ abhängig. (Mit g_θ werden die Koeffizienten von $\mathbf{Q}(\xi)_\alpha$ bezeichnet und γ ist der Grad dieses Polynoms.) Weiter ist $\mathbf{C}_{\alpha,\beta}$ von der Konstanten A abhängig und natürlich von den Multiindizies α, β.
Wählt man ein $\chi \in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$, welches auf ganz $\overline{\mathbf{K}}_R(0)$ identisch 1 ist, so folgt auf ganz $\mathbf{R}^n$, daß

$$f := \frac{1-\chi(\xi)}{\mathbf{P}_k(.,\xi)} \in \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{S}'.$$

ist. Alle Polstellen der Funktion $\frac{1}{\mathbf{P}_k(.,\xi)}$ liegen in der Kugel $\mathbf{K}_R(0)$ und treten bei der Funktion f nur noch als hebbare Singularitäten auf . Davon gibt es insgesamt nur abzählbar viele, und deshalb liegt $f(\xi)$ in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.
Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathbf{S}'$. Somit gibt es ein v aus $\mathbf{S}'$, für welches gilt, daß $\mathcal{F}(v) = \Lambda_f$ ist. Dieses v muß mit der temperierten Distribution $\mathcal{F}^3\Lambda_f$ übereinstimmen, denn es gilt:
$\mathcal{F}(\mathcal{F}^3\Lambda_f) = \mathcal{F}^4\Lambda_f \ = \Lambda_f$. Daher ist Λ_f die Fouriertransformation der temperierten Distribution $\mathcal{F}^3\Lambda_f$.
Es wird nun gezeigt, daß die so konstruierte Distribution $\mathcal{F}^3\Lambda_f$ eine Parametrix des Differentialoperators $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ist, daß also $\mathbf{P}_{k,.,D}\mathcal{F}^3\Lambda_f = \delta + \omega$ ist.
Sei $[\mathbf{P}_{k,.,D}]^\dagger$ der zu $\mathbf{P}_{k,.,D}$ duale Operator. Für diesen gilt $[\mathbf{P}_{k,.,D}]^\dagger = \mathbf{P}_{k,.,-D}$, wobei $(-D)^\alpha$ durch $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ definiert wird. Für alle Testfunktionen ϕ aus $\mathbf{S}'$ gilt dann:

$$\mathbf{P}_{k,.,D}\mathcal{F}^3(\Lambda_f)(\phi) = \langle \Lambda_f \ , \ \mathcal{F}^3([\mathbf{P}_{k,.,D}]^\dagger\phi)\rangle$$

$$= \langle \Lambda_f \ , \ \mathcal{F}^2(\mathbf{P}_k(.,-\xi)\mathcal{F}\phi)\rangle = \langle \Lambda_f \ , \ (\mathbf{P}_k(.,\xi)\mathcal{F}^3\phi)\rangle$$

$$= (\mathcal{F}^3\Lambda_{f(\xi)\mathbf{P}_k(.,\xi)})(\phi) = (\mathcal{F}^3\Lambda_{1-\chi})(\phi)$$

Demnach ist also $\mathbf{P}_{k,.D}\mathcal{F}^3\Lambda_f = \mathcal{F}^3(\Lambda_{1-\chi})$. Da $(-\chi)$ in $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ liegt folgt, daß $\mathcal{F}^3(-\chi)$ in $\mathbf{S}$ liegt. Setzt man $\omega \colon = \mathcal{F}^3(-\chi)$, so folgt somit für alle ϕ aus $\mathbf{S}$,

$$(\mathcal{F}^3\Lambda_{1-\chi})(\phi) = \langle 1 \ , \ \mathcal{F}^3\phi\rangle + \langle(-\chi) \ , \ \mathcal{F}^3\phi\rangle$$

und es folgt weiter: $(\mathcal{F}^3\Lambda_{1-\chi})(\phi) = [\mathrm{F}^2\phi](0) + \Lambda_\omega(\phi) = \phi(0) + \Lambda_\omega(\phi)$.
Daher gilt: $\mathcal{F}^3\Lambda_{1-\chi} = \delta + \omega$ und $\mathcal{F}^3\Lambda_f$ ist eine **Parametrix** E des Differentialoperators . Es bleibt nun zu zeigen, daß diese Parametrix E auch in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n\backslash 0)$ liegt. Die noch zu zeigende Abschätzung, ergibt sich direkt aus Abschätzung (2.6). Die $\mathbf{S}'$ Distribution $\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}E$ wird durch $\xi^\beta D^\alpha f$ erzeugt. Mit (2.6) gilt, **wenn** $(\mathbf{B}) : |\beta| - |\alpha| - k < -n$ erfüllt ist:

$$\|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}E\|_{\mathbf{L}_1} \leq \mathbf{C}_{\alpha,\beta}\int_{\mathbf{R}^n_R} |\xi|^{|\beta|-|\alpha|-k}d\xi < \infty$$

Die Bedingung $(\mathbf{B})$ liefert nämlich die Integrierbarkeit der rechten Seite. Es wurde eben gezeigt, daß $\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}E$ in $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$ liegt. Die Fouriertransformation auf $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$ erfüllt folgende Inklusion: $\mathcal{F}(\mathbf{L}_1) \subset \mathbf{C}_0$.
Da f aus $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$ stammt, folgt $\mathcal{F}(\Lambda_f) = \Lambda_{\mathcal{F}f}$. Daher sieht man daß,

$D^\beta \xi^\alpha \mathcal{F}^2 E \underset{\mathbf{S}' \text{ Sinn}}{=} \mathcal{F}(\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F} E) \in \mathbf{C}_0$ ist. Somit ist auch $D^\beta \xi^\alpha E$ in $\mathbf{C}_0$ und Variation von $|\alpha|$ und $|\beta|$ unter der Bedingung ($\mathbf{B}$) liefert $D^\theta E \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^n \backslash 0)$ für alle Multiindizies θ, also auch für $\theta = 0$. Aus $D^\gamma E = D^{e_j}(D^{\gamma - e_j} E) \in \mathbf{C}(\mathbf{R}^n \backslash 0)$ folgt schliesslich $E \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n \backslash 0)$.

□

2.2 Faltungssatz und Anwendbarkeit auf die Parametrix

Den folgenden Satz findet man in [*Hö*] Kapitel 7.9

Satz: 2.2.1. *Sei* $\mathbf{K}$ *eine* $\mathbf{S}'(\mathbf{R}^n)$*-Distribution deren Fouriertransformation* $\mathcal{F}\mathbf{K}$ *in* $\mathbf{L}_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ *liegt. Für eine natürliche Zahl* s *welche* $2s > n$ *erfüllt gebe es eine* R*-unabhängige Schranke* C*, so daß für alle* $R > 0$ *gilt:*

$$\sum_{|\alpha| \le s} \frac{1}{R^n} \int_{\frac{R}{2} < |\xi| < 2R} \left| R^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}(\mathbf{K})(\xi) \right|^2 d\xi \le C < \infty$$

dann gibt es für jedes p *mit* $1 < p < \infty$ *eine nur von* p*,* C *und* s *abhängige Konstante* $C_{(p)}$ *mit welcher für alle* u *aus* $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{E}'$ *gilt:*

$$\|\mathbf{K} * u\|_{\mathbf{L}^p} \le C_{(p)} \|u\|_{\mathbf{L}^p} \tag{2.7}$$

Die Abbildung $A : \mathbf{L}_p^0 \longrightarrow \mathbf{S}'$ *mit* $A(u) = \mathbf{K} * u$ *ist demnach ein stetiger linearer Operator von* $\mathbf{L}_p^0$ *nach* $\mathbf{L}_p$*. Wird mit* λ *das Lebesgue-Maß bezeichnet, so folgt weiter, daß es eine Konstante* G *gibt, die nur von* s *und* C *abhängig ist und mit welcher für alle* u *aus* $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{E}'$ *und für alle* $\tau > 0$ *gilt:*

$$\tau \lambda \{x \mid |\mathbf{K} * u(x)| > \tau\} \le G \|u\|_{\mathbf{L}_1} \tag{2.8}$$

Der Beweis dieses Satzes soll im Anhang der Arbeit gesondert betrachtet werden.

Lemma: 2.2.2. *Sei* E *die Parametrix eines elliptischen* $\mathbf{P}_{k,.,D}$ *aus Satz* (2.1.9)*. Dann erfüllt* $D^\beta E$ *für alle* β *mit* $|\beta| = k$ *die Voraussetzungen des Faltungssatzes* (2.2.1) *als temperierte Distribution* $\mathbf{K}$ *.*

Beweis: Aus dem Existenzsatz (2.1.9) folgt, daß E in $\mathbf{C}^\infty \cap \mathbf{L}_\infty$ liegt. Da E in $\mathbf{L}_\infty$ liegt, representiert E auch ein Element aus $\mathbf{S}'$. Aus dem Beweis von (2.1.9) folgt weiter:

$$\mathcal{F}E = \frac{1-\chi(-\xi)}{\mathbf{P}_k(.,-\xi)} \in \mathbf{L}_{1,loc}(\mathbf{R}^n) \qquad \text{, sowie } (\clubsuit):$$

$$\underbrace{\left|\xi^\theta D^\lambda \mathcal{F}E\right|}_{(A))} \leq \mathbf{C}_{\theta,\lambda} \left|\xi\right|^{|\theta|-|\lambda|-k}.$$

Für $|\theta| - |\lambda| - k < -n$, liegt (A) daher in $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$. Es gilt:

$$D^\alpha \mathcal{F}(\underbrace{D^\beta E}_{\mathbf{K}}) = \overbrace{D^\alpha(\underbrace{\xi^\beta \mathcal{F}E}_{\mathcal{F}\mathbf{K}})}^{(B)}$$

Wendet man die Leibnizregel auf Term (B) an, und setzt man den ganzen Ausdruck als $D^\alpha \mathbf{K}$ in den Summen-Integral Term aus Satz (2.2.1), für irgend ein $s > \frac{n}{2}$, ein, so ergibt sich:

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \int_{\frac{R}{2}<|\xi|<2R} \left| \sum_{\gamma\leq\alpha} \mathbf{C}_{\gamma,\alpha}(D^{\alpha-\gamma}\xi^\beta)(D^\gamma \mathcal{F}E) \right|^2 d\xi \tag{2.9}$$

Der Kreisring $\{\xi \mid \frac{R}{2} < |\xi| < 2R\}$ soll mit $\heartsuit$ bezeichnet werden. Wendet man auf die innere Summe von (2.9) die Dreiecksungleichung an, so folgt mit $|\beta| = k$ aus $\clubsuit$:

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\heartsuit \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \left| D^\alpha \mathcal{F}(D^\beta E)\right|^2 d\xi \leq \underbrace{\sum_{|\alpha|\leq s} \int_\heartsuit G_\alpha \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \{|\xi|^{-|\alpha|}\}^2 d\xi}_{(a)}$$

Im Fall $\{n - 2|\alpha|\} \neq 0$ kann (a) durch

$$(a) \leq G \sum_{|\alpha|\leq s} \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \Big|_{\frac{R}{2}}^{2R} \frac{r^{n-2|\alpha|}}{(n-2|\alpha|)} = C < \infty$$

abgeschätzt werden . Das C ist dabei unabhängig von R. Im Fall $\{n-2|\alpha|\} = 0$ schätzt man (a) durch den Logarithmus ab. Es folgt:

$$(a) \leq G \sum_{|\alpha|\leq s} \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \Big|_{\frac{R}{2}}^{2R} ln(r) \underset{2|\alpha|=n}{\leq} M \frac{R^n}{R^n}\{\ln(R) - \ln(R) + \ln(2) + \ln(2)\} < \infty.$$

Auch in diesem Fall gibt es eine R unabhängige Schranke .

$\square$

Bemerkung: Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Weiter sei $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein Differentialoperator der auf der Menge $\overline{\Omega}$ elliptisch ist und dessen Koeffizienten Funktionen sind welche auf dieser Menge beschränkt sind. Für jeden Punkt x_0 aus Ω hat der Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ nach Satz 2.1.9 eine Parametrix E_{x_0} und diese erfüllt die Ungleichung:

$$\left|\xi^\beta D^\alpha \mathcal{F}(E_{x_0})\right| \leq \mathbf{C}_{\alpha,\beta} \left|\xi\right|^{|\beta|-|\alpha|-k}$$

Aus Satz 2.1.3 und der Beschränktheit der Koeffizienten kann man folgern, daß die Konstante $\mathbf{C}_{\alpha,\beta}$ x_0-unabhängig gewählt werden kann. Daher kann aus dem Beweis von Lemma 2.2.2 gefolgert werden, daß man eine Konstante $Z > 0$ finden kann, so daß für jedes x_0 aus Ω, sowie für jedes $R > 0$ gilt:

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\heartsuit} \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \left|D^\alpha \mathcal{F}(D^\beta E_{x_0})[\xi]\right|^2 d\xi \leq Z$$

Mittels des Faltungssatzes gelingt es jetzt den lokalen Regularitätssatz im Fall konstanter Koeffizienten zu beweisen.

2.3 Beweis des konstanten-Koeffizienten-Satzes

Den folgenden Satz findet man in $[H\ddot{o}]$, Kapitel 7.9

Satz: 2.3.1. *Es sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein **elliptischer** Differentialoperator.*

(a) *Bezeichnet p eine Zahl aus $(1,\infty)$, s eine Zahl aus $\mathbf{N}_0$ und liegt $\mathbf{P}_{k,.,D}u$ in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$, so liegen für $|\alpha| = k$ bereits alle $D^\alpha u$ in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$.*

(b) *Nach Satz (1.1.1) liegen damit auch alle $D^\alpha u$ für $|\alpha| < k$ in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ und u liegt daher in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$.*

Beweis :
Zu (b)**:** Ist (a) bereits gezeigt, so folgt für alle $|\alpha| = k$ und für alle $|\gamma| = s$, daß $D^{\alpha+\beta}u$ in $\mathbf{L}^{loc}_p(\Omega)$ liegt. Also gilt $D^\beta u \in \mathbf{L}^{loc}_p(\Omega)$ für alle $|\beta| = s + k$. Aus (1.1.1) folgt für alle $|\beta| \leq s + k$: $D^\beta u \in \mathbf{L}^{loc}_p(\Omega)$, Daher liegt u in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$.

Zu (a)**:** Sei Y eine kompakte Teilmenge von Ω. Mit ϕ seien die Testfunktionen aus $\mathbf{D}(\Omega)$ bezeichnet. Man wähle ein $\chi \in \mathbf{D}(\Omega)$ so, daß $\chi \equiv 1$ auf Y ist. Mit diesem χ kann $\mathbf{P}_{k,.,D}(\chi u)$ als $f_1 + f_2$ geschrieben werden. Dabei ist $f_1 = \chi \mathbf{P}_{k,.,D} u$, und dieses liegt nach Voraussetzung in $\mathbf{W}^0_{p,s}(\mathbf{R}^n)$. Das f_2 ist damit auf der Menge Y identisch 0 . Wendet man in jedem Summanden von $\mathbf{P}_{k,.,D}(\chi u)$ die Leibnizregel auf $D^\alpha(\chi u)$ an, folgt nämlich, daß f_2 durch

$$f_2(\phi) = \sum_{|\alpha| \leq s} (-1)^{|\alpha|} \langle u, \sum_{\beta < \alpha} \mathbf{C}_{\alpha,\beta} (\partial^{\alpha-\beta}\chi)(\partial^\beta \phi) \rangle .$$

gegeben ist. Da χ auf Y identisch 1 ist, sind alle Ableitungen von χ eingeschränkt auf die Menge Y identisch 0. Es ist somit klar, daß für jede Testfunktionen ϕ, deren Träger in der Menge Y enthalten ist, $f_2(\phi)$ verschwindet. Sei E eine Parametrix die wie im Beweis von Satz (2.1.9) konstruiert wurde. Dann folgt:

$$E * \mathbf{P}_{k,.,D}(\chi u) = \mathbf{P}_{k,.,D} E * \chi u = \chi u + \omega * \chi u$$

und es gilt weiter: $E*(f_1+f_2) - \omega * \chi u = \chi u$. f_2 ist auf der kompakten Menge Y identisch 0 und daher kann χu auf Y durch $\chi u = E * \chi \mathbf{P}_{k,.,D} u - \omega * \chi u$ dargestellt werden. Ist $|\alpha| = k$ und ist $|\beta| = s$ so folgt:

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^\alpha E * D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,.,D} u) - D^\beta(D^\alpha \omega) * \chi u. \qquad (2.10)$$

Nach Voraussetzung liegt $D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,.,D} u)$ in $\mathbf{L}^0_p(\Omega)$ und nach Lemma 2.2.2 erfüllt die Distribution $D^\alpha E$ für $|\alpha| = k$ die Voraussetzungen des Faltungssatzes 2.2.1. Daher kann der **Faltungssatz** (2.2.1) auf die Faltung $D^\alpha E * D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,.,D} u)$ angewandt werden. Aus dem Faltungssatz folgt:

$$D^\alpha E * D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,.,D} u) \in \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n).$$

Faltet man eine Distribution w aus $\mathbf{C}^\infty \cap \mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$ mit einer Distribution v aus $\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, so kann gezeigt werden, daß die durch die Faltung entstandene Distribution $v*w$ durch eine $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ Funktion erzeugt wird. Für den zweiten Faltungsterm aus der Darstellung (2.10) folgt deshalb:

$$\chi u * D^{\alpha+\beta}\omega = \chi u(D^{\alpha+\beta}\omega(y - \bullet)) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n).$$

$\chi u * D^{\alpha+\beta}\omega$ liegt daher in $\mathbf{L}_p(Y)$. Auf der Menge Y stimmen $\chi D^{\alpha+\beta} u$ und $D^{\alpha+\beta} u$ überein. Für jeden Multiindex γ mit $|\gamma| = s+k$ folgt daher aus (2.10): $D^\gamma u \in \mathbf{L}_p(Y)$. Da dies für beliebige kompakte Teilmengen Y von Ω gilt, folgt die Behauptung des lokalen Regularitätssatzes.

$\square$

Kapitel 3

Erweiterung des Regularitätssatzes

3.1 Grundideen

In **Kapitel 2** wurde der folgende lokale Regularitätssatz bewiesen:

Satz: 2.3.1 *Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, p aus $(1,\infty)$ und $\mathbf{P}_{k,.,D}$ ein elliptischer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Ist s eine beliebige Zahl aus $\mathbf{N}_0$ und u eine $\mathbf{D}'(\Omega)$-Distribution, so folgt aus $\mathbf{P}_{k,.,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$, daß u bereits in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$ liegen muß.*

Es wird nun der Fall betrachtet, daß die Koeffizienten des Differentialoperators $\mathbf{P}_{k,x,D}$ durch Funktionen $a_\alpha(x) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ beschrieben werden. Diese Funktionen $a_\alpha(x)$ werden dabei nicht mehr als konstant vorausgesetzt. Ist v aus $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$, so wird durch $\mathbf{P}_{k,x,D}u = v$ wieder eine Differentialgleichung gegeben. Es ist die zentrale Frage dieser Arbeit herauszufinden, für welche Funktionen $a_\alpha(x)$ die Regularitätsaussage aus dem Satz (2.3.1) erhalten bleibt. In dem Buch von G.Folland *Introduction to Partial Differential Equation* wird gezeigt, daß der folgende zu (2.3.1) analoge Regularitätssatz gilt:

Satz: 3.1.1. *Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$, s eine beliebige reelle Zahl, und $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein Differentialoperator, der auf ganz Ω elliptisch ist, und dessen Koeffizienten allesamt $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ -Funktionen sind. Wird mit u eine $\mathbf{D}'(\Omega)$-Distribution bezeichnet, so folgt aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{H}^{loc}_s(\Omega)$, daß u bereits in $\mathbf{H}^{loc}_{s+k}(\Omega)$ liegt.*

Für s aus $\mathbf{N}_0$ stimmt der Raum $\mathbf{H}^{loc}_{s+k}(\Omega)$ mit dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{2,s+k}(\Omega)$ überein. Der lokale Regularitätssatz (2.3.1) bleibt daher für $p = 2$ für alle auf

Ω elliptischen Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$-Koeffizienten erhalten. Die Frage nach der Regularität der Lösung im Fall $p \neq 2$ bleibt jedoch weiter offen. In diesem Kapitel wird versucht für alle p aus $(1,\infty)$ einen lokalen Regularitätsatz der Form (3.1.1), aufzustellen und zu beweisen, indem man sich an den Beweis von Satz (3.1.1) orientiert. Es zeigt sich, daß sich der lokale Regularitätssatz (3.1.1) zumindest unter diesem Verfahren nicht im vollen Umfang auf $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$- Räume verallgemeinern läßt. Man muß eine starke zusätzliche Vorraussetzung an die Lösung u stellen. Über die Lösung u muß bereits bekannt sein, daß diese in dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{p,k}(\Omega)$ liegt. Unter der Annahme, daß u bereits in dem Raum $\mathbf{W}^{loc}_{p,k}(\Omega)$ liegt, kann aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ wieder gefolgert werden, daß u bereits in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$ liegen muß. Die Menge Ω wird wieder als offen und beschränkt vorausgesetzt. Die Zahl s muß hier aus $\mathbf{N}_0$ stammen. Die negativen Sobolev-Räume, die als Dualräume der positiven definiert sind, kommen in diesem lokalen Regularitätssatz nicht vor. Als Koeffizienten des Differentialoperators werden $\mathbf{C}^{s+k}_b(\Omega)$ Funktionen gewählt. In dem Beweis dieses lokalen Regularitätssatzsatzes wird auf den Faltungssatz (2.2.1) zurückgegriffen. Weiter werden die Grundideen des Beweises des Satzes (3.1.1) aus dem Buch von Folland herausgegriffen und benutzt. Deshalb folgt zunächst eine grobe Beschreibung des Beweises von Satz (3.1.1), wie man ihn in $[Fo]$ findet.

Beschreibung:

Der Beweis des lokalen Regularitätssatzes (3.1.1) erfolgt durch eine **vollständige Induktion**. Man benutzt das Lemma (1.2.6), daß auch für $\mathbf{H}^{loc}_s(\Omega)$ Räume gilt und formuliert den lokalen Regularitätssatz wie folgt um:

Ist u eine beliebige Distribution aus $\mathbf{D}'(\Omega)$ so folgt für jedes $\phi \in \mathbf{D}(\Omega)$ aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{H}^{loc}_s$, daß ϕu bereits in $\mathbf{H}_{s+k}$ liegt. Diese Behauptung wird durch eine Induktion bewiesen. Um die Induktion durchführen zu können, muß man natürlich wissen, wodurch die Induktionsverankerung, und der Induktionsschritt gegeben werden.

Es zeigt sich, daß der **Induktionsschritt** unter Verwendung des folgenden Hilfssatzes erfolgt:

Satz: 3.1.2. *Sei Ω eine präkompakte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Weiter sei $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein Differentialoperator welcher auf ganz Ω elliptisch ist und dessen Koeffizienten in $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ liegen. Für jedes s aus $\mathbf{R}$ und jedes j aus $\mathbf{R}$ mit $j \geq 0$ folgt aus $u \in \mathbf{H}^{loc}_{s+j}(\Omega)$ und aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{H}^{loc}_{s+j-k+1}(\Omega)$, daß u bereits in $\mathbf{H}^{loc}_{s+1+j}(\Omega)$ liegen muß.*

Im Beweis dieses Hilfssatzes 3.1.2 werden im wesentlichen zwei weitere Lemmata (3.1.3 und 3.1.4) verwendet. Lemma (3.1.3) liefert ein Kriterium dafür wann genau eine Funktion aus $\mathbf{H}_s$ auch schon in $\mathbf{H}_{s+1}$ liegt:

Lemma: 3.1.3. *Sei s aus $\mathbf{R}$. Eine Distribution u aus $\mathbf{H}_s$ liegt genau dann bereits in $\mathbf{H}_{s+1}$, wenn man eine Konstante $M > 0$ und ein $\delta > 0$ finden kann, so daß für alle h mit $|h| \leq \delta$*

$$\|\frac{1}{h}(u(x + he_j) - u(x))\|_{\mathbf{H}_s} \leq M$$

folgt.

Lemma 3.1.4 beschreibt eine wichtige Ungleichung. Diese soll im weiteren als **Basisungleichung** bezeichnet werden:

Lemma: 3.1.4. *Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Der Operator $\mathbf{P}_{k,x,D}$ sei auf der Menge $\overline{\Omega}$ elliptisch und habe $\mathbf{C}^\infty(\Omega)$ - Koeffizienten. Dann findet man für jedes reelle s eine Konstante C, mit welcher für alle u aus $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\Omega)$ die folgende* ***Basisungleichung*** *erfüllt ist:*

$$\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k}} \leq \mathcal{C}(\|P_{k,x,D}u\|_{\mathbf{H}_s} + \|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}}) \tag{3.1}$$

Der Beweis der Basisungleichung (3.1) soll an dieser Stelle grob skizziert werden:

Bemerkung: *Die Kugel $K_\delta(x_0) := \{x \mid |x| < \delta\}$ ist eine präkompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Setzt man $K^Q_\delta(x_0) := K_\delta(x_0) \cap \Omega$ so erhält man eine präkompakte Teilmenge von Ω . Dieses $\mathbf{K}^Q_\delta(x_0)$ wird im folgenden benutzt werden.*

Beweisskizze zu 3.1.4: Der Beweis der Basisungleichung besteht aus mehreren Teilschritten:

Als erstes wird gezeigt das jeder elliptische Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, der mit seinem Hauptteil zusammenfällt, die Basisungleichung erfüllt. Daraus folgt die Gültigkeit der Basisungleichung für den Differentialoperator $\mathbf{P}^h_{k,x_0,D}$. Dabei zeigt es sich, daß diese Konstante $C := C_{x_0}$ eigentlich nur vom Kehrwert der Konstanten A_{x_0} aus Lemma 2.1.2 abhängt. Da $\mathbf{P}^h_{k,x,D}$ auf $\overline{\Omega}$ elliptisch ist, und diese Menge kompakt ist, kann mit Lemma 2.1.3 die Existenz einer Konstanten M gefolgert werden mit der für jedes x_0 aus Ω und jedes u aus $\mathbf{H}_{s+k}$ dessen Träger in der Menge Ω liegt folgt:

$$\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k}} \leq M(\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}} + \|\mathbf{P}^h_{k,x_0,D}u\|_{\mathbf{H}_s})$$

In diesem ersten Schritt wird also die Elliptizität des Differentialoperators $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ benutzt. Dabei werden die Abschätzungen (2.1.2) und (2.1.3) verwendet.

Die Dreiecksungleichung erlaubt es, jedes u aus $\mathbf{H}_{s+k}$ durch

$$\|\mathbf{P}^h_{k,x_0,D}u\|_{\mathbf{H}_s} \leq \underbrace{\|(\mathbf{P}^h_{k,x_0,D} - \mathbf{P}^h_{k,x,D})u\|_{\mathbf{H}_s}}_{(\clubsuit)} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{\mathbf{H}_s}. \tag{3.2}$$

abzuschätzen. Die Differenz $\mathbf{P}^h_{k,x,D} - \mathbf{P}_{k,x_0,D}$ wird dabei durch den Operator $\sum\limits_{|\alpha|=k} (a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)\partial^\alpha$ beschrieben. Es kann die Existenz einer Konstanten $\delta > 0$ gezeigt werden, mit welcher der Summand ($\clubsuit$) für jedes u aus $\mathbf{H}^{0,tr}_s(K^Q_\delta(x_0))$ und für jedes x_0 aus Ω durch

$$(\clubsuit) \leq \mathcal{C}_{\delta,\Omega}\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}} + \frac{1}{2}\|u\|_{\mathbf{s+k}} \tag{3.3}$$

abgeschätzt werden kann. Wählt man nämlich eine beliebige Funktion $\phi(x)$ aus $\mathbf{D}(\mathbf{K}_{2\delta}(0))$, die auf der Kugel $\overline{\mathbf{K}_\delta(0)}$ identisch 1 ist und deren Funktionswerte in $[0,1]$ liegen und liegt $u(x)$ in $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_0))$, so kann $a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = \phi(x-x_0)a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x)$ gesetzt werden. Die Koeffizienten $a_\alpha(x)$ sind nach Voraussetzung auf der Menge Ω stetig, und dies impliziert die gleichmässige Stetigkeit der Koeffizienten auf jedem Kompaktum. Daher gibt es eine Konstante C mit der gilt:

$$\underbrace{|\phi(x-x_0)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0))|}_{(a)} \leq C\,|x - x_0|$$

Der Ausdruck (a) kann daher durch eine von der speziellen Wahl des x_0 unabhängige Konstante nach oben beschränkt werden. Diese Konstante hängt vom Abstand δ der Punkte x und x_0 ab. Jede Ableitung $\partial^\beta a_\alpha(x)$ ist ebenfalls stetig und daher auf jedem Kompaktum beschränkt. Da $\partial^\beta(a_\alpha(x_0))$ gleich 0 ist, gelingt es mit Hilfe der Leibnizregel den Ausdruck
$\|\phi(x-x_0)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0))\|_{\mathbf{H}_{|s|+n+2}}$ durch eine x_0-unabhängige Konstante nach oben abzuschätzen. Sei γ ein Multiindex der Ordnung k. Für ein beliebiges s aus $\mathbf{R}$ gilt für jedes u aus $\mathbf{H}_{s+k}$ und für jede Funktion $\psi(x)$ aus $\mathbf{S}$ die folgende Abschätzung:

$$\|\psi\partial^\gamma u\|_{\mathbf{H}_s} \leq (\sup|\psi(x)|)\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k}} + C\|\psi\|_{\mathbf{H}_{|s|+n+2}}\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}} \tag{3.4}$$

Wählt man $\psi := \phi(x-x_0)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0))$, und wird der Radius δ der Kugel $\mathbf{K}_\delta(x_0)$ sehr klein gewählt, so folgt Ungleichung (3.3) aus der Abschätzung (3.4) und den x_0-unabhängigen Abschätzungen für die Koeffizienten.
Wendet man jetzt die x_0-unabhängige Abschätzung (3.3) auf den Ausdruck ($\clubsuit$) an, so folgt für jedes x_0 aus Ω mit Hilfe der Ungleichung (3.2) die gewünschte **Basisungleichung** , eingeschränkt auf die Menge $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_0))$ für den Operator $\mathbf{P}^h_{k,x,D}$.
Die kompakte Menge $\overline{\Omega}$ lässt sich durch endlich viele Kugeln $K_\delta(x_0)$ überdecken . Mittels einer Zerlegung der 1 kann die gewünschte **Basisungleichung** für den Hauptteil des Differentialoperators $\mathbf{P}_{k,x,D}$, auf ganz $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\Omega)$

gezeigt werden.
Für jedes u aus $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\Omega)$ gilt:

$$\|\mathbf{P}^h_{k,x,D}u\|_{\mathbf{H}_s} \leq \|\underbrace{(\mathbf{P}_{k,x,D} - \mathbf{P}^h_{k,x,D})}_{(\heartsuit)}u\|_{\mathbf{H}_s} + \mathbf{P}_{k,x,D}$$

Es gibt eine nur von Ω und s abhängige Konstante N, mit welcher für jedes u aus $\mathbf{H}_{s+k}(\Omega)$, dessen Träger in Ω liegt, durch

$$\|(\heartsuit)u\|_{\mathbf{H}_s} \leq N\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}}$$

abgeschätzt werden kann. Daher folgt für alle u aus $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\Omega)$ die Abschätzung:

$$\|(\mathbf{P}^h_{k,x,D}u)\|_{\mathbf{H}_s} \leq N\|u\|_{\mathbf{H}_{s+k-1}} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{\mathbf{H}_s}$$

Durch diese Abschätzung kann die Basisungleichung, die man bereits für den Hauptteil erhalten, hat weiter abgeschätzt werden, und man erhält schließlich die gewünschte **Basisungleichung** für den Operator $\mathbf{P}_{k,x,D}$ auf ganz $\mathbf{H}^{0,tr}_{s+k}(\Omega)$.
Die nächsten Überlegungen werden für die **Induktionsverankerung** benötigt:
Ist u aus $\mathbf{D}'(\Omega)$, so liegt das Produkt $u\phi$ für jede Testfunktion ϕ in $\mathcal{E}'$. Nach einem **Sobolev'schen Einbettungssatz** gibt es für jedes v aus $\mathcal{E}'$ ein r aus $\mathbf{Z}$, so daß dieses v in dem Raum $\mathbf{H}_r$ liegt.
Dies bedeutet gerade, daß $\mathcal{E}' \subset \bigcup_{r\in\mathbf{R}} \mathbf{H}_r$ ist. Das zur Distribution v gehörende r ist kleiner als 0.
Für jedes ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ und jede $\mathbf{D}'(\Omega)$-Distribution u liegt also das Produkt $u\phi$ in einem $\mathbf{H}^{0,tr}_r(\Omega)$.
$\phi u \in \mathbf{H}^{0,tr}_r(\Omega)$ soll als Startbedingung $(\spadesuit)$ bezeichnet werden. Aus dieser Startbedingung $(\spadesuit)$ folgt die Induktionsverankerung im Beweis von Satz (3.1.1).
Bemerkung:
Im Beweis des lokalen Regularitätssatz (3.1.1) wird also die **Induktionsverankerung** durch $(\spadesuit)$ gegeben. Es wird in einem Sobolevraum $\mathbf{H}_r$ mit negativen r gestartet. Der **Induktionsschritt** erfolgt durch den Hilfssatz 3.1.2.
Bemerkungen: Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Man kann zeigen, daß für jeden auf $\overline{\Omega}$ elliptischen Differentialoperator mit $\mathbf{C}^s_b(\Omega)$-Koeffizienten und jedes s aus $\mathbf{N}_0$, die Basisungleichung (3.1) auf $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ erhalten bleibt.

Als erster Teilschritt im Beweis dieser Basisungleichung wird gezeigt, daß der Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ für jedes $x_0 \in \Omega$ die Basisungleichung mit gleichen C erfüllt. Dabei wird unter Berücksichtigung der Bemerkung zu Lemma 2.2.2 der Faltungssatz 2.2.1 auf die Darstellung

$$D^\alpha(D^\beta u) = D^\alpha E_{x_0} * D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u) - D^\beta(D^\alpha \omega) * \chi u$$

angewandt. Diese Darstellung wurde im Beweis des lokalen Regularitätssatzes für elliptische Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten gewonnen. Analog zum Beweis von 3.1.4 wird anschließend gezeigt, daß man einen Radius δ finden kann, so daß der Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x,D}$ die Basisungleichung auf der Menge derjenigen Distributionen erfüllt, deren Träger in einer Kugel $(\mathbf{K}_\delta(x))_{x\in\Omega}$ liegen. Um diesen Zusammenhang zuzeigen, wird wieder eine Ungleichung der Art (3.4) verwendet. Dieses Analogon zu (3.4) ist wesentlich einfacher herzuleiten als die Ungleichung (3.4) selbst. Es wird das Produkt einer $\mathbf{C}_b^{s+k}(\Omega)$-Funktion $\phi(x)$ einer Distribution $\partial^\alpha u$ (wobei: $u \in \mathbf{W}_{s+k}(\Omega)$ und $|\alpha| = k$) abgeschätzt. Die Abschätzung hat die Form:

$$\|\phi \partial^\alpha u\|_s \leq D_1 \|u\|_{p,s+k,\Omega} + D_2 \|u\|_{p,s+k-1,\Omega}$$

Dabei sind D_1 und D_2 nur von $\phi(x)$, Ω und s abhängige Größen. Durch diese Ungleichung kann wie im $\mathbf{H}_s$- Fall gezeigt werden, daß alle u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$, deren Träger in einer Kugel $(\mathbf{K}_\delta(x))_{x\in\Omega}$ liegen, die Ungleichung

$$\|(\mathbf{P}_{k,x_0,D} - \mathbf{P}_{k,x,D})u\|_{p,s,\Omega} \leq \frac{1}{2}\|u\|_{p,s+k,\Omega} + C_{\delta,\Omega}\|u\|_{p,s+k-1,\Omega}$$

erfüllen, wenn der Radius δ sehr klein gewählt wird. Aus dieser letzten Ungleichung kann wie im Beweis von 3.1.4 die Gültigkeit der Basisungleichung auf der Menge $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\mathbf{K}_\delta(x_0))$ gefolgert werden. Analog zum Beweis zu 3.1.4 folgt die Gültigkeit der Basisungleichung auf der Menge der $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$-Distributionen mit beliebigen Trägern durch eine Zerlegung der 1.
Für ein u aus $\mathbf{W}_{p,s}$ mit $1 < p < \infty$ bleibt die Aussage von Satz 3.1.3 für alle s aus $\mathbf{Z}$ erhalten. Man benötigt dieses Analogon zu Satz 3.1.2 jedoch nur für den Fall $s = 0$ und es wird hier auch nur für diesen Fall bewiesen. Alle $\mathbf{L}_p$-Räume sind für $p < 1 < \infty$ reflexiv. Durch Ausnutzung der Reflexivität kann der Beweis des Analogons zu Satz 3.1.3 besonders einfach geführt werden. Die Reflexivität ist jedoch für die Gültigkeit dieses Satzes eigentlich nicht ausschlaggebend.
Mittels der $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$- Versionen der Basisungleichung und des Satzes 3.1.3, kann eine sehr eingeschränkte Verallgemeinerung des Hilfssatzes 3.1.2 auf $\mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ Räume bewiesen werden. Im Kapitel 3 Satz 3.3.7 wird gezeigt, daß die Regularitätssausage des Satzes 3.1.2 zumindest dann für alle $s \in \mathbf{N}_0$

erhalten bleibt, wenn man $j \geq k$ voraussetzt. Im Beweis wendet man die Verallgemeinerte Basisungleichung auf eine Distribution u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+j}(\Omega)$ an. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn $j \geq k$ ist.
Begründung: Sei $s + j = (s + j - k) + k = :t + k$. Wählt man $j < k$, so gilt $t < 0$ für $s < k - j$. Die Basisungleichung wurde jedoch im Fall $p \neq 2$ nur für $t \in \mathbf{N}_0$ gezeigt. Im Fall $j < k$ kann die Basisungleichung daher nicht verwendet werden. Mit Hilfe von 3.3.7 ist man nun in der Lage eine lokale Regularitätsaussage für $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$-Räume zu beweisen. Dieser verallgemeinerte lokale Regularitätssatz wird analog zu Satz 3.1.1 durch eine Induktion bewiesen und der Induktionsschritt wird dabei durch den Hilfssatz 3.3.7 gegeben. Die Regularitätsaussage die so gezeigt werden kann lautet:
Sei $P_{k,x,D}$ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung k mit $\mathbf{C}^{s+k}(\Omega)$-Koeffizienten und s eine beliebige natürliche Zahl. Ist u eine Distribution aus $\mathbf{W}^{loc}_{p,m}(\Omega)$ und m eine natürliche Zahl größergleich k, so folgt aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega)$ stets, daß u bereits in $\mathbf{W}^{loc}_{p,s+k}(\Omega)$ liegen muß.
In diesem Regularitätssatz, muß über die Distribution bereits bekannt sein, daß diese in einem $\mathbf{W}^{loc}_{p,m}(\Omega)$ mit $m \geq k$ liegt. Dies liegt natürlich daran, daß der Hilfssatz 3.3.7 nur auf Distributionen angewandt werden kann die diese Voraussetzung erfüllen.
Trotz der Existenz eines adequaten Sobolev'schen Einbettungssatzes muß daher im Fall $p \neq 2$, eine Startbedingung für u vorgegeben werden. Die Startbedingung muß: $u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s}(\Omega), s \geq k$ heißen.
Wahrscheinlich kann der lokale Regularitätssatz für $p \in (1, \infty)$ gar nicht in solch allgemeiner Form wie für $p = 2$ formuliert werden.

3.2 Die Basisungleichung

Satz: 3.2.1. *Sei $p \in (1, \infty)$, Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$ und mit $\mathbf{P}_{k,x,D}$ sei ein auf Ω elliptischer Differentialoperator mit $\mathbf{C}^s_b(\Omega)$ Koeffizienten bezeichnet. Ist $s \in \mathbf{N}_0$, so gibt es eine Konstante C mit: $C := C(\Omega, p, s)$, mit welcher für alle u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ die folgende Ungleichung gültig ist:*

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq C(\|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega} + \|u\|_{p,s+k-1,\Omega})$$

Die Basisungleichung bleibt dabei erhalten, wenn alle Koeffizienten des Differentialoperators aus $\mathbf{C}(\Omega) \cap \mathbf{W}_{\infty,s}(\Omega)$ gewählt werden.

Beweis:
Erster Teilschritt: Sei $x_0 \in \Omega$. Als erstes wird gezeigt, daß eine Konstante C_0 existiert, so daß für jedes x_0 aus der Menge Ω und für alle u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$

gilt:

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq C_0(\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x_0,D}u\|_{p,s,\Omega})$$

Der Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ ist elliptisch und hat daher eine Parametrix $\mathbf{E}_{x_0}$. Aus Lemma (2.2.2) kann gefolgert werden, daß es eine Konstante $Z > 0$ gibt mit welcher für jedes $x_0 \in \Omega$ und alle $R > 0$ folgt:

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\heartsuit} \frac{R^{2|\alpha|}}{R^n} \left|D^\alpha F(D^\beta E_{x_0})[\xi]\right|^2 d\xi \leq Z$$

Sei u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$, und ein $\chi \in \mathbf{D}(\Omega)$ sei so gewählt, daß χ identisch 1 auf dem kompakten Träger von u ist. Dann folgt aus dem Beweis von Satz 3.2.1 für alle $|\gamma| = k$ die Gleichung: $D^\gamma u = -D^\gamma \omega * \chi u + D^\gamma \mathbf{E}_{x_0} * \chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u$ und es folgt für alle $|\alpha| = s + k$ und für alle $|\gamma| = k$:

$$(\clubsuit): \qquad D^\alpha u = D^{\alpha-\gamma}(D^\gamma \omega * \chi u + D^\gamma \mathbf{E}_{x_0} * \chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u) =$$

$$= D^\alpha \omega * \chi u + D^\gamma \mathbf{E}_{x_0} * D^{\alpha-\gamma}(\chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u)$$

Da für jedes u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|^p_{p,s+k,\Omega} \leq \|u\|^p_{p,s+k-1,\Omega} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=s+k} \|D^\alpha u\|^p_{p,\Omega}}_{(1)}$$

erfüllt ist, folgt für ein festes γ, welches $|\gamma| = k$ erfüllt, mit Hilfe von ($\clubsuit$):

$$\sum_{|\alpha|=s+k} \|D^\alpha u\|^p_{p,\Omega} \leq C_1 \|u\|^p_{p,0,\Omega} + \sum_{|\alpha|=s+k} \|D^\gamma \mathbf{E}_{x_0} * D^{\alpha-\gamma}(\chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u)\|^p_{p,\Omega}$$

$$\leq C_1 \|u\|^p_{0,p,\Omega} + \sum_{|\beta|=s} \|D^\gamma \mathbf{E}_{x_0} * \underbrace{D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u)}_{\in \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)\cap \mathcal{E}'}\|^p_{p,\mathbf{R}^n}$$

Aus dem Faltungssatz (2.2.1), folgt daß die Ungleichung für jedes x_0 aus Ω durch

$$\leq C_1 \|u\|_{p,0,\Omega} + C_0 \sum_{|\beta|=s} \underbrace{\|D^\beta(\chi \mathbf{P}_{k,x_0,D} u)\|^p_{p,\mathbf{R}^n}}_{(\bullet)}$$

weiter geführt werden kann. Wegen der Trägereigenschaft ist $(\bullet) = \|D^\beta(\mathbf{P}_{k,x_0,D}u)\|^p_{p,\Omega}$, und für alle u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ ist die folgende Abschätzung

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq \underbrace{(C_1+1)}_{C_2}\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + C_0\|\mathbf{P}_{k,x_0,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

zulässig. Damit ist die Gültigkeit der Basisungleichung für den Operator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ gezeigt.
Für den zweiten Teilschritt benötigt man folgendes Hilfslemma .

Lemma: 3.2.2. *Sei $Q \in \mathbf{C}^s_b(\Omega)$, und sei $u \in \mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$. Wählt man ein γ mit $|\gamma| = k$, so folgt ,daß $QD^\gamma u$ in $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ liegt. Es folgt auch, daß es eine Konstante B gibt, welche nicht von u abhängt, so daß die folgende Ungleichung auf $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ gilt:*

$$\|QD^\gamma u\|_{p,s,\Omega} \leq \|Q\|_{\infty,\Omega}\|u\|_{p,s+k,\Omega} + B(\max_{o<|\theta|\leq s}\|D^\theta Q\|_{\infty,\Omega})\|u\|_{s+k-1,\Omega}$$

Das Lemma bleibt auch für Q aus $\mathbf{W}_{\infty,s}(\Omega)$ gültig.

Beweis:
Setzt man $V := D^\gamma u$ so gilt natürlich :

$$\|QV\|^p_{p,s,\Omega} \leq \underbrace{\sum_{|\alpha|\leq s}\|QD^\alpha V\|^p_{p,\Omega}}_{(A)} + \underbrace{\|[D^\alpha,Q]V\|^p_{p,s,\Omega}}_{(B)}$$

Man sieht sofort, daß

$$(A):\ \leq (\|Q\|_{\infty,\Omega}\|V\|_{p,s,\Omega})^p \leq (\|Q\|_{\infty,\Omega}\|u\|_{p,s+k,\Omega})^p$$

Durch Anwendung der Leibnizregel erhält man für den zweiten Summanden, die Abschätzung:

$$(B):\ = \sum_{|\alpha|\leq s}\|\sum_{\beta<\alpha}\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(D^{\alpha-\beta}Q)(D^\beta V)\|^p_{p,s+k,\Omega} \leq (\sum_{i=1}^s n^i)\sum_{\substack{\beta<\alpha\\|\alpha|=s}}\|\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(D^{\alpha-\beta}Q)(D^\beta V)\|^p_{p,\Omega}$$

$$\leq \aleph(\sum_{0<|\theta|\leq s}\|\mathcal{C}_\theta D^\theta Q\|^p_{\infty,\Omega})\|u\|^p_{p,s+k-1,\Omega} \leq \mathcal{C}^*\aleph^2(\max_{0<|\theta|\leq s}\|Q\|_{\infty,\Omega}\|u\|_{s+k-1,\Omega})$$

Aus den beiden Abschätzungen für (A) und (B) folgt die Behauptung des Lemmas.

$\square$

Zweiter Teilschritt: Sei $x_0 \in \Omega$. Wendet man den Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ auf ein beliebiges u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ an, so folgt:

$$\|\mathbf{P}_{k,x_0,D}u\|_{p,s,\Omega} = \|(\mathbf{P}_{k,x_0,D} - \mathbf{P}_{k,x,D} + \mathbf{P}_{k,x,D})u\|_{p,s,\Omega}$$

$$\leq \|(\mathbf{P}_{k,x,D} - \mathbf{P}_{k,x_0,D})u\|_{p,s,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt daher natürlich sofort:

$$\|(\mathbf{P}_{k,x,D} - \mathbf{P}_{k,x_0,D})u\|_{p,s,\Omega} \leq \sum_{|\gamma|\leq k} \|(a_\gamma(x) - a_\gamma(x_0))D^\gamma u\|_{p,s,\Omega}$$

Somit gilt also ($\diamond$):

$$\|\mathbf{P}_{k,x_0,D}u\|_{p,s,\Omega} \leq \sum_{|\gamma|\leq k} \|(a_\gamma(x) - a_\gamma(x_0))D^\gamma u\|_{p,s,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

Angenommen die Distribution u liegt in $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ und hat einen kompakten Träger in der Menge $\mathbf{K}^Q_\delta(x_0)$. Ist $\phi(x)$ eine Funktion aus $\mathbf{C}^\infty_0(\mathbf{K}_{2\delta}(0))$, welche auf der Kugel $\mathbf{K}_\delta(0)$ identisch 1 ist und nur Werte in $[0,1]$ annimmt, so folgt:

$$\underbrace{(a_\gamma(x) - a_\gamma(x_o))\phi(x - x_0)}_{Q_\gamma}\underbrace{D^\gamma u}_{V_\gamma} = (a_\gamma(x) - a_\gamma(x_0))D^\gamma u$$

Dabei bezeichnet $a_\gamma(x)$ die Koeffizienten des Differentialoperators. $Q_\gamma(x)$ liegt für jedes γ in $\mathbf{C}^s_0(\mathbf{K}_{2\delta}(x_0))$ und daher liegt es auch in $\mathbf{C}^s_b(\Omega)$. Daher kann kann Lemma (3.2.2) für jedes γ auf das Produkt $Q_\gamma D^\gamma u$ angewandt werden. Aus (3.2.2) folgt:

$$\|Q_\gamma(V_\gamma)\|_{p,s+k,\Omega} \leq [1]_\gamma \|u\|_{s+k,\Omega} + [2]_\gamma \|u\|_{s+k-1,\Omega}$$

Zur Abkürzung wurde $[1]_\gamma := \|Q_\gamma\|_{\infty,\Omega}$ und $[2]_\gamma := B \max_{0<|\theta|\leq s} \|Q_\gamma\|_{\infty,\Omega}$ gesetzt. Da $Q_\gamma(x)$ in $\mathbf{C}^s_b(\Omega)$ liegt, ist $Q_\gamma(x)$ gleichmäßig stetig auf jedem Kompaktum von Ω. Daher findet man eine Konstante H, mit welcher für jedes x_0 aus Ω und jedes γ folgt: ($\spadesuit$)

$$[1]_\gamma \leq \|a_\gamma(x) - a_\gamma(x_0)\|_{\infty,\mathbf{K}^Q_{2\delta}(x_0)} \leq H2\delta$$

Weiter gilt:

$$\max_{x\in\Omega}\left|D^\theta\phi(x-x_0)\right| \leq \max_{\mathbf{K}_{2\delta}(x_0)}\left|D^\theta\phi(x-x_0)\right| = \max_{\mathbf{K}_{2\delta}(0)}\left|D^\theta\phi(x)\right|$$

Für jedes θ mit $|\theta| \leq s$ kann daher $\max\limits_{x\in\Omega}\left|D^\theta\phi(x-x_0)\right|$ durch eine x_0-unabhängige Konstante nach oben beschränkt werden. Da alle $D^\theta a_\gamma(x)$ auf Ω beschränkte Funktionen darstellen, folgt die Existenz einer Konstanten M, welche für jedes $|\theta| \leq s$ und für jedes $|\gamma| \leq k$ den Ausdruck $\sup\limits_{x\in\Omega}\left|D^\theta a_\gamma(x)\right|$ nach oben beschränkt.

$D^\theta(a_\gamma(x_0))$ ist gleich 0. Wird auf $D^\theta(Q_\gamma V_\gamma)$ die Leibniz Regel angewandt, folgt daher:

$$[2]_\gamma = B\max_{0<|\theta|\leq s}\{\|\sum_{\beta\leq\theta} C_{\beta,\theta}(D^{\theta-\beta}\phi(x-x_0))(D^\beta a_\gamma(x))\|_{\infty,\Omega}\}$$

Da $\max\limits_\Omega\left|D^\theta\phi(x-x_0)\right|$ und $\sup\limits_\Omega\left|D^\theta a_\gamma\right|$ x_0-unabhängig abgeschätzt werden können, gibt es eine Konstante N, mit welcher der $[2]_\gamma$-Ausdruck für alle $|\gamma| \leq k$ durch ($\sharp$): $[2]_\gamma \leq N$ unabhängig von der speziellen Wahl des $x_0 \in \Omega$ abgeschätzt werden kann. Aus diesen beiden Abschätzungen ($\spadesuit$) und ($\sharp$) folgt mittels 3.2.2 für alle $u \in \mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_0))$ und für alle x_0 aus Ω die folgende Ungleichung: ($\heartsuit$)

$$\|(\mathbf{P}_{k,x,D} - \mathbf{P}_{k,x_0,D})u\|_{p,s,\Omega} \leq \underbrace{(\sum_{i=0}^k n^i)}_{\aleph_0}(2H\delta\|u\|_{p,s+k,\Omega} + N\|u\|_{p,s+k-1,\Omega})$$

ist. Da die Basisungleichung bereits für den Operator $\mathbf{P}_{k,x_0,D}$ gezeigt wurde, gilt:

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq C_2\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + C_0\|\mathbf{P}_{k,x_0,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

Mit ($\heartsuit$) und mit ($\diamond$) folgt daraus:

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq C_2\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + C_0\aleph_0 2H\delta\|u\|_{p,s+k} + \mathcal{C}_0\aleph_0 N\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

Damit gilt für alle $u \in \mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_0))$:

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq (\mathbf{C}_2 + \mathcal{C}_0\aleph_0 N)\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + C_0\|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega} + C_0\aleph_0 H2\delta\|u\|_{p,s+k,\Omega}$$

Setzt man $\delta = \frac{1}{4C_0\aleph_0 H}$, subtrahiert auf beiden Seiten der Ungleichung $(\frac{1}{2}\|u\|_{p,s+k,\Omega})$ und multipliziert anschliessend die Ungleichung mit 2, so erhält man, daß für alle u aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_0))$ die Ungleichung

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq M\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + C_0\|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega}$$

gültig ist. Man setzt für die weitere Verwendung $C^* := \max(C_0, M)$.
Dritter Teilschritt :
$\overline{\Omega}$ ist eine kompakte Menge. Der Radius δ sei wie im zweiten Schritt gewählt. Jede Kugel $\mathbf{K}_\delta(x_0)$ hat den selben Radius δ. Die Menge $\overline{\Omega}$ kann daher durch solche Kugeln überdeckt werden. Dabei gilt:

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{x\in\Omega} \mathbf{K}_\delta(x)$$

Da $\overline{\Omega}$ kompakt ist reichen schon endlich viele solcher Kugeln für die Überdeckung und, es gibt eine **Zerlegung der 1** aus endlich vielen $\phi_i(x) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{K}_\delta(x_i))$, $i \in [1,..,m]$, mit denen für alle x aus Ω gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i(x) = 1$$

Sei u eine beliebiges Element aus $\mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ dann lässt sich dieses u auf Ω durch $u = \sum_{i=1}^m \phi_i u$ darstellen. Jeder Summand $\phi_i(x)u(x)$ ist in $\mathbf{W}^0_{p,s+k}(\mathbf{K}^Q_\delta(x_i))$. Für solche $\phi_i(x)u(x)$ wurde die Basisungleichung bereits gezeigt. Für alle $u \in \mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ gilt daher

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \underset{\triangle\text{Ungl.}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} \|\phi_i(x)u(x)\|_{p,s+k,\Omega}$$

Mit der Basisungleichung für die $\phi_i u$ folgt für alle $u \in \mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$:

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq \sum_{i=1}^{m} C^*(\|\phi_i(x)u\|_{p,s+k-1,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi_i(x)u(x))\|_{p,s,\Omega}).$$

Betrachtet man nun $\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi_i(x)u(x))$, so ist klar, daß

$$\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi_i u) = \phi_i \mathbf{P}_{k,x,D} u + [\mathbf{P}_{k,x,D}, \phi_i]u$$

ist. Betrachtet man den Kommutator $[\mathbf{P}_{k,x,D}, \phi_i]$ angewandt auf u mit Hilfe der Leibnizregel, so erhält man :

$$[\mathbf{P}_{k,x,D}, \phi_i]u = \sum_{\alpha\leq k} a_\alpha(x) D^\alpha(\phi_i(x)u(x)) - \sum_{|\alpha|\leq k} \phi_i(x) a_\alpha(x) D^\alpha u(x)$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha(x)(\sum_{\beta\leq\alpha}(D^{\alpha-\beta}\phi_i(x))(D^\beta u(x)) - \sum_{\alpha|\leq k} \phi_i(x) a_\alpha(x) D^\alpha u$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha (\sum_{\beta<\alpha} (D^{\alpha-\beta}\phi_i(x))(D^\beta u(x))).$$

Damit ist der Kommutator ein Operator der Ordnung $k-1$
mit $\mathbf{C}_0^s(\Omega)$-Koeffizienten. Da $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega) \subset \mathbf{W}_{p,s+k-1}(\Omega)$ ist, folgt daher, daß es eine Konstante G gibt, mit welcher für alle u aus $\mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$ gilt:

$$\|[\mathbf{P}_{k,x,D},\phi_i(x)]u\|_{p,s,\Omega} \leq \mathcal{G}\|u\|_{p,s+k-1,\Omega}$$

Setzt man $C = (\mathcal{C}^* + \mathcal{G})$ so folgt für alle $u \in \mathbf{W}^{0,tr}_{p,s+k}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{p,s+k,\Omega} \leq \mathcal{C}(\|u\|_{p,s+k-1,\Omega} + \|\mathbf{P}_{k,x,D}u\|_{p,s,\Omega})$$

Damit ist die Gültigkeit der Basisungleichung somit gezeigt.

$\square$

3.3 Ein Hilfssatz

Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$, $p \in (1,\infty)$ und $\mathbf{P}_{k,x,D}$ ein auf ganz Ω elliptischer Differentialoperator mit $\mathbf{C}_b^{s+j-k+1}(\Omega)$-Koeffizienten. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß für $s \in \mathbf{N}_0$ $j \in \mathbf{N}_0$ mit $j > k-1$ aus $u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s+j}(\Omega)$ und $\mathbf{P}_{k,x,D}u \in \mathbf{W}^{loc}_{s+j-k+1}(\Omega)$ bereits $u \in \mathbf{W}^{loc}_{p,s+j+1}(\Omega)$ folgt. Diese Behauptung ist die Verallgemeinerung von Satz (3.1.2) auf $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$- Räume. Diese Behauptung wird also den Induktionsschritt im Beweis des lokalen Regularitätssatzes für elliptische Differentialoperatoren mit $\mathbf{C}_b^{s+k}(\Omega)$-Koeffizienten liefern. Im Beweis dieses Analogons zu (3.1.2) wird die bereits gezeigte Basisungleichung verwendet. Weiter wird folgende Charakterisierung von $\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ benutzt:
$\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ *stimmt mit der Menge aller* $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$*-Funktionen* u *überein, für die man eine Konstante* M *und ein* $\delta > 0$ *finden kann, so daß für jedes* h *aus* $\mathbf{R}$ *mit* $|h| \leq \delta$*, der Differenzenquotient* $\frac{1}{h}(u(x+he_j)-u(x))$ *in der* $\|\bullet\|_p$*-Norm durch* M *nach oben beschränkt wird.* Das nächste Ziel dieses Abschnitts ist es daher, diese Charakterisierung von $\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ zu beweisen.

Definition: 3.3.1. *Ist* $\phi(x)$ *eine Funktion aus* $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ *und* h *aus* $\mathbf{R}^n$*, so wird durch* $\phi(x+h)$ *die Translation* $\tau_h\phi(x)$ *von* $\phi(x)$ *definiert. Liegt* u *in* $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$*, so folgt für festes* h*, daß für alle kompakten Mengen eine Konstante* C_K *existiert, und eine natürliche Zahl* k *so daß für alle Testfunktionen* $\phi(x)$*, deren Träger in* K *liegen, die folgende Abschätzung*

$$|u(\tau_{-h}\phi)| \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha\phi(x-h)\|_\infty \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha\phi(x)\|_\infty$$

erfüllt ist. Daher wird durch $\tau_h u := u(\tau_{-h}\phi)$ eine Distribution definiert, und diese soll als ***Translation*** *der Distribution u bezeichnet werden.*

Definition: 3.3.2. *Für eine Funktion ϕ aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ und ein h aus $\mathbf{R}$, gilt $\|\partial^\alpha(\phi(x-he_i)-\phi(x))\|_\infty \leq 2\|\partial^\alpha\phi(x)\|_\infty$. Daher kann gefolgert werden daß es für alle kompakten Mengen K eine Konstante C_K und eine natürliche Zahl k gibt, so daß für alle Testfunktionen deren Träger in K liegen*

$$(\tau_{he_i}u - u)(\phi) \leq C_K \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha\phi(x)\|_\infty$$

gilt. Daher wird durch $\triangle_h^i u := (h)^{-1}(\tau_{he_i}u - u)$ eine Distribution $\triangle_h^i u \in \mathbf{D}'(\mathbf{R^n})$ definiert. Die so definierte Distribution heißt ***Differenzenquotient*** *der Distribution u.*

Es gilt das folgende Lemma :

Lemma: 3.3.3. *Läßt man h gegen 0 laufen, so konvergiert die eben definierte Distribution $\triangle_h^i u$ im $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$-Sinn gegen die Distribution $\partial_i u$.*

Im Beweis von Lemma 3.3.3 wird das folgende Lemma benutzt.

Lemma: 3.3.4. *Ist ϕ eine Funktion aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ so konvergiert $\triangle_h^i\phi$, für $|h| \longrightarrow 0$ in der $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$-Topologie gegen die Funktion $\partial_i\phi$.*

Beweis 3.3.4: Für jeden Multiindex β und für jedes ϕ aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$, konvergiert $D^\beta(\triangle_h^i\phi)$ für h gegen 0 punktweise gegen $D^\beta(\partial_i\phi)$.
$\partial^\beta\phi(x)$ ist für jeden Multiindex β gleichmäßig stetig und besitzt kompakte Träger. $\frac{1}{h}(\phi(x+he_i)-\phi(x))$ hat ebenfalls kompakte Träger. Für eine beliebige kompakte Umgebung V des Trägers $\mathrm{Supp}(\partial_i\phi) = K$ gibt es eine natürliche Zahl n_0, mit welcher für jedes h mit $|h| \leq n_0^{-1}$ der Träger $\mathrm{Supp}(\triangle_h^i\phi)$ in der Menge V liegt.

Weiter folgt (siehe [Hö, Kapitel 1]):

$$\|(D^\beta\triangle_i^h\phi)(x) - (D^\beta\partial_i\phi)(x)\| = \|h^{-1}(D^\beta\phi(x+he_i) - \phi(x) - hD^\beta\partial_i\phi(x))\|$$

$$\leq \sup_{0\leq t\leq 1} \|(\partial_i D^\beta\phi)[x+the_i] - \partial_i D^\beta\phi[x]\|$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit der $\partial^\theta\phi(x)$, folgt für alle $\epsilon > 0$ die Existenz eines $\delta > 0$, so daß aus $\|he_i\| = |h| < \delta$ folgt: $\sup\limits_{0\leq t\leq 1}\|\partial^\theta\phi[x+the_i] - \partial^\theta\phi[x]\| < \epsilon$.
Daher folgt:

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0}(\sup_{\mathbf{R}^n}\|D^\beta(\triangle_h^i\phi)(x) - (D^\beta\partial_i\phi)(x)\|) = 0$$

Damit konvergiert $\triangle_h^i\phi$ in $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$.

$\square$

Jetzt soll das Lemma 3.3.3 bewiesen werden.
Beweis (3.3.3): Für jede Testfunktion ϕ folgt nach Lemma (3.3.4):

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} \triangle_h^i \phi = \partial_i \phi$$

in der $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$-Topologie. Daraus folgt:

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} u(\triangle_h^i \phi) = u(\partial_i \phi)$$

Da $\langle \triangle_h^i u \ , \phi \rangle = \langle u \ , \triangle_{-h}^i \phi \rangle$ ist, erhält man:

$$\lim_{|h|\longrightarrow 0} \langle \triangle_h^i u, \phi \rangle = \lim_{|h|\longrightarrow 0} \langle u \ , \triangle_{-h}^i \phi \rangle = -\langle u, \partial_i \phi \rangle = \langle \partial_i u, \phi \rangle$$

Dies bedeutet gerade die $\mathbf{D}'(\mathbf{R}^n)$- Konvergenz von $\triangle_h^i u$ gegen $\partial_i u$ für $|h|$ gegen 0.

$\square$

Jetzt soll die angekündigte Charakterisierung von $\mathbf{W}_{p,1}(\mathbf{R}^n)$ gezeigt werden.

Satz: 3.3.5. *Sei $p \in (1, \infty)$ und u aus $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$. Die Ableitung $\partial_i u$ liegt genau dann in $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$, wenn man ein $\delta > 0$ und eine Konstante $C > 0$ finden kann, mit denen für alle h aus $\mathbf{R}^n$, welche $|h| \leq \delta$ erfüllen,*

$$\|\triangle_h^i u\|_{\mathbf{L}_p} \leq C$$

folgt.

Um diesen Satz ohne größere Umstände zu beweisen, greift man auf die Reflexivität der $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$ Räume für $1 < p < \infty$ zurück, und wendet den folgenden bekannten Satz an.

Satz: 3.3.6. *Ein Banach-Raum $\mathbf{E}$ ist genau dann reflexiv, wenn die Einheitskugel $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}')$- kompakt ist.*

Dieser Satz und sein Beweis können unter anderen in [K.ö] oder auch in [M.Vo] nachgelesen werden.
Zum Beweis des Satzes (3.3.5) : ($\Longleftarrow$:) Angenommen Es gibt ein $C > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß für alle $|h| \leq \delta$, $\|\triangle_h^i u\|_{\mathbf{L}_p} \leq C$ gilt.
Ohne Einschränkung sei $C = 1$. Im Beweis spielt es keine Rolle, ob man anstelle von $(\triangle_h^i u)_h$, das Netz $(\frac{1}{C} \triangle_h^i u)_h$ nimmt.

Aus der Reflexivität des Raumes folgt, daß die Einheitskugel schwach kompakt ist. Für $|h| \leq \delta$ liegen alle $\triangle_h^i u$ in der Einheiskugel des $\mathbf{L}_p$. Das gerichtete System $(\triangle_h^i u)_h$ mit $h \in \mathbf{R}$ und $|h| \leq \delta$, besitzt daher einen schwachen Berührungspunkt g, und für diesen gilt natürlich: $\|g\|_{\mathbf{L}_p} \leq 1$. Man wähle ein Teilsystem $(\triangle_w^i u)_w$ aus, welches für $|w|$ gegen 0 in der $\sigma(\mathbf{L}_p, \mathbf{L}_q)$ -Topologie gegen g konvergiert, und lasse $|w|$ gegen 0 laufen. Für alle ϕ aus $\mathbf{L}_q(\mathbf{R}^n)$ folgt

$$\lim_{|w| \longrightarrow 0} \langle \triangle_w^i u, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$$

Dies gilt natürlich auch für alle ϕ aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$, da diese in $\mathbf{L}_q(\mathbf{R}^n)$ liegen. Mit Lemma (3.3.2) folgt für alle ϕ aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$, daß $\langle g, \phi \rangle = -\langle u, \partial_i \phi \rangle =$
$\langle \partial_i u, \phi \rangle$ ist. Aus der Eindeutigkeit der Distributionenableitung folgt:
$\partial_i u = g \in \mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$
$(: \Longrightarrow)$ Angenommen $\partial_i u$ und u liegen in $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$.
Der Mittelwertsatz liefert:

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} (\triangle_h^i u) \phi dx \right| = \left| \int_{\mathbf{R}^n} u \;\; |h| \, h^{-1} \int_0^1 \partial_i \phi(x + th e_i) dt dx \right|$$

Man gewinnt damit:

$$\|(\triangle_h^i u)\phi\|_{\mathbf{L}_p} \leq \frac{|h|}{|h|} \int_{\mathbf{R}^n} \left| (\int_0^1 \partial_i u(x + th e_i) dt) \phi \right| dx$$

Damit gilt weiter: $\|(\triangle_h^i u)\phi\|_{\mathbf{L}_1} \leq \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^1 |\partial_i u(x + the_i)|^p \, dt dx \|\phi\|_{\mathbf{L}_q}$. Die Integrationsreihenfolge kann vertauscht werden. Man gewinnt durch die Vertauschung der Integrale: $\|\triangle_h^i u\|_{\mathbf{L}_p} \leq (1-0)(\|\partial_i u(x + the_i)\|_{\mathbf{L}_p})$. Diese Abschätzung ist unabhängig von h, wegen der Translationsunabhängigkeit des Lebesgueintegrals. Damit erhält man für alle Testfunktionen ϕ, die Abschätzung: $\|(\triangle_h^i u)\phi\|_{\mathbf{L}_1} \leq C\|\phi\|_{\mathbf{L}_q}$. Es kann $\|\triangle_h^i u\|_{\mathbf{L}_p} \leq C$ für alle h gefolgert werden.

$\square$

Man betrachte nun den folgenden Kommutator angewandt auf ein beliebiges $u \in \mathbf{W}_{p,s+k}(\Omega)$:

$$[\triangle_h^i, \mathbf{P}_{k,x,D}]u = \triangle_h^i(\mathbf{P}_{k,x,D} u) - \mathbf{P}_{k,x,D}(\triangle_h^i u)$$

$$= \triangle_h^i(\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u) - \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha (\triangle_h^i u)$$

Es ist klar, daß $[\triangle_h^i, D^\beta]u = 0$ für $|\beta| \le d$ und für $u \in \mathbf{W}_{p,d}(\Omega)$, ist. Daher kann im rechten Summanden D^α mit $\triangle_h^i$ Vertauscht werden. Der Differenzenoperator $\triangle_h^i$ kann im linken Summanden in die Summe gezogen werden. Damit erhält man: (♣)

$$[\triangle_h^i, \mathbf{P}_{k,x,D}]u = \sum_{|\alpha| \le k} [\triangle_h^i, a_\alpha] D^\alpha u$$

Wie bereits angekündigt ist das eigentliche Ziel dieses Abschnitts, der Beweis des folgenden Hilfssatzes:

Satz: 3.3.7. *Der Differentialoperator* $\mathbf{P}_{k,x,D}$ *habe* $\mathbf{C}_b^{s+j-k+1}(\Omega)$ *Koeffizienten, und er sei elliptisch auf einer beschränkten und offenen Teilmenge* Ω *des* $\mathbf{R}^n$. *Dann gilt für alle* $s \in \mathbf{N}_0$ *und alle* $j \ge k$, *daß aus* $u \in \mathbf{W}_{p,s+j}^{loc}(\Omega)$ *mit* $f \in \mathbf{W}_{p,s+j-k+1}^{loc}(\Omega)$ *und* $\mathbf{P}_{k,x,D}u = f$ *bereits* $u \in \mathbf{W}_{p,s+j+1}^{loc}(\Omega)$ *folgt.*

Beweis: Es seien j und s natürliche Zahlen mit $j \ge k$. Zu zeigen ist, daß für alle ϕ aus $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ folgt, ϕu in $\mathbf{W}_{p,s+j+1}$ liegt. Sei $u \in \mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$, dann gilt $\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi u) = \underbrace{\phi \mathbf{P}_{k,x,D} u}_{(\diamondsuit)} + \underbrace{[\mathbf{P}_{k,x,D}, \phi]u}_{(\heartsuit)}$. Dabei liegt $(\diamondsuit)$ nach Voraussetzung in $\mathbf{W}_{p,s+j-k+1}$. Ebenso liegt auch $(\heartsuit)$ in $\mathbf{W}_{p,s+j-k+1}$, denn wie schon einige Male gezeigt ist der Kommutator ein Operator der Ordnung $k-1$ mit $\mathbf{C}_0^{s+j-k+1}(\Omega)$ Koeffizienten. Also liegt $(\diamondsuit)+(\heartsuit)$ in $\mathbf{W}_{p,s+j-k+1}$.

Die Differenzenquotienten $\triangle_h^i(\phi u)$ liegen für alle h in $\mathbf{W}_{p,s+j}(\Omega)$. Es gibt ein $\epsilon > 0$, so daß für alle h, deren Beträge kleiner gleich ϵ sind, die Träger der $\triangle_h^i(\phi u)$ in der Menge Ω liegen. Die Basisungleichung kann somit für kleine h auf $\triangle_h^i(\phi u)$ angewandt werden. h sei im folgenden so gewählt, daß $|h| \le \epsilon$ gilt. Man wendet die Basisungleichung 3.2.1. an. Wegen der kompakten Träger in Ω können die Integrale aus der Basisungleichung über ganz $\mathbf{R}^n$ gestreckt werden. Man erhält daher

$$\|\triangle_h^i(\phi u)\|_{p,s+j,\mathbf{R}^n} \le C(\|\mathbf{P}_{k,x,D}(\triangle_h^i(\phi u))\|_{s+j-k,\mathbf{R}^n} + \|\triangle_h^i(\phi u)\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n})$$

$$\le C(\underbrace{\|\triangle_h^i(\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi u))\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}_n} + \|[\mathbf{P}_{k,x,D}, \triangle_h^i]\phi u\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n}}_{(\bullet)} + \|\triangle_h^i(\phi u)\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n}).$$

Mit der Kommutatorbetrachtung (♣) erhält man

$$\|[\mathbf{P}_{k,x,D}, \triangle_h^i](\phi u)\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n} \underset{(\clubsuit)}{\le}$$

$$\sum_{|\alpha|\le k} \|\frac{1}{|h|}(\tau_h(a_\alpha D^\alpha(\phi u)) - a_\alpha \tau_h(D^\alpha(\phi u)))\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n}.$$

Klammert man $D^\alpha(\phi u)(x+he_i)$ aus und wendet Lemma (3.2.2) an, so folgt weiter

$$= \sum_{|\alpha|\le k} \|(\triangle_h^i a_\alpha)\tau_h(D^\alpha(\phi u))\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n}$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le k} (B \max_{0<|\theta|\le s+j-k}\{\|D^\theta(\triangle_h^i a_\alpha)\|_{\infty,\Omega}\}\|\phi u\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n}$$

$$+\|\triangle_h^i a_\alpha\|_{\infty,\Omega}\|\phi u\|_{p,s+j,\mathbf{R}^n}).$$

Dabei wurde benutzt, daß $[D^\alpha,\tau_h] = 0$ ist. Weiter wurde die Translationsinvariants des Lebesgue Integrals ausgenutzt. Da $a_\alpha(x)$ in $\mathbf{C}_b^{s+j-k+1}(\Omega)$ liegt, folgt sofort, daß es für die Ausdrücke

$$\max_{0<|\theta|\le s+j-k}\|D^\theta(\triangle_h^i a_\alpha)\|_{\infty,\Omega} \quad \text{und} \quad \|\triangle_h^i a_\alpha\|_{\infty,\Omega}$$

ein $\delta_1 > 0$ und ein $M_{1,\alpha} > 0$ gibt, so daß für jedes h, dessen Betrag kleiner gleich δ_1 ist, $\max_{0<|\theta|\le s+j-k}\|D^\theta(\triangle_h^i a_\alpha)\|_{\infty,\Omega} \le M_{1,\alpha}$ und $\|\triangle_h^i a_\alpha\|_{\infty,\Omega} \le M_{1,\alpha}$ gilt. Damit lässt sich $[\mathbf{P}_{k,x,D},\triangle_h^i]\phi u$ in der $\| \bullet \|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n}$-Norm für kleine $|h|$, h-unabhängig abschätzen. Man erhält für $|h| \le \min(\delta_1, \epsilon)$:

$$\|[\mathbf{P}_{k,x,D}, \triangle_h^i]\phi u\|_{p,s+j-k} \le \underbrace{(\sum_{|\alpha|\le k} M_{1,\alpha})}_{D}(\|\phi u\|_{p,s+j,\mathbf{R}^n} + \|\phi u\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n})$$

Man setze die gesamte Abschätzung für den den Kommutator in den Ausdruck ($\bullet$) und fasse zusammen. Man erhält so die folgende Abschätzung :

$$\|\triangle_h^i(\phi u)\|_{p,s+j,\mathbf{R}^n} \le \max(C,D)(\|\underbrace{\triangle_h^i(\mathbf{P}_{k,x,D}(\phi u))}_{(1)}\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n} + \|\phi u\|_{p,s+j,\mathbf{R}^n} \tag{3.5}$$

$$+\|\underbrace{\triangle_h^i(\phi u)}_{(2)}\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n})$$

Es ist klar, daß $\triangle_h^i(D^\beta(\phi u)) = D^\beta(\triangle_h^i(\phi u))$ ist. Da (1) nach Voraussetzung in $\mathbf{W}_{p,s+j-k+1}$ liegt, folgt daher aus Satz (3.3), ($\Longrightarrow$) die Existenz eines $\delta_2 > 0$ und einer Konstanten $M_2 > 0$ mit denen für alle h mit $|h| \leq \delta_2$ gilt:

$$\|(1)\|_{p,s+j-k,\mathbf{R}^n} \leq M_2$$

Da (2) nach Voraussetzung in $\mathbf{W}_{p,s+j}$ liegt, folgt nach Satz (3.3), ($\Longrightarrow$) die Existenz eines $\delta_3 > 0$ und einer Konstanten $M_3 > 0$, mit denen für alle $|h| \leq \delta_3$ gilt:

$$\|(2)\|_{p,s+j-1,\mathbf{R}^n} \leq M_3$$

Aus der Ungleichung (3.6) folgt daher die Existenz einer Konstante M, welche für jedes h mit $|h| \leq \delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \epsilon)$ den Ausdruck $\|\triangle_h^i(\phi u)\|_{p,s+j}$ nach oben beschränkt. Nach Satz (3.3), ($\Longleftarrow$) liegt daher für jedes β mit $|\beta| \leq s+j$ die Ableitung $D^{e_i}(D^\beta(\phi u)) = D^{\beta+e_i}(\phi u)$ in $\mathbf{L}_p(\mathbf{R}^n)$, und somit liegt ϕu in $\mathbf{W}_{p,s+j+1}$. Dies sollte gezeigt werden.

$\square$

Der eben gezeigte Satz soll nun, wie schon erwähnt, den Induktionsschritt im Beweis des lokalen Regularitätssatz, der jetzt endlich bewiesen werden kann, liefern.

3.4 Beweis des lokalen Regularitätsatzes

Satz: 3.4.1. *Sei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{P}_{k,x,D}$ habe $\mathbf{C}_b^{s+k}(\Omega)$ Koeffizienten und sei elliptisch auf der Menge Ω. Ist s aus $\mathbf{N}_0$ und ist $1 < p < \infty$, so folgt aus $u \in \mathbf{W}_{p,k}^{loc}(\Omega)$ und aus $\mathbf{P}_{k,x,D}u = f$ mit $f \in \mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$, daß u bereits in $\mathbf{W}_{p,s+k}^{loc}(\Omega)$ liegen muß.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß für alle $\phi \in \mathbf{D}(\Omega)$ das Produkt ϕu in $\mathbf{W}_{p,s+k}$ liegt. Sei also $\phi(x)$ aus $\mathbf{D}(\Omega)$. Man wähle eine beliebige kompakte Obermenge $\mathcal{V}$ des Trägers von ϕ, die ganz in Ω liegt. Zu dieser Menge $\mathcal{V}$ wähle man sich eine Funktion ψ_0^ϕ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ welche auf $\mathrm{supp}(\phi(x))$ identisch 1 ist.

Nach **Voraussetzung** liegt $\psi_0^\phi u$ in $\mathbf{W}_{p,k}^0(\Omega)$, und $\psi_0^\phi u$ liegt daher erst recht in $\mathbf{W}_{p,k}$. Man definiere induktiv $N-1$ Funktionen $\psi_1^\phi, \ldots \psi_{N-1}^\phi$ aus $\mathbf{D}(\Omega)$ die alle $\mathrm{Supp}\psi_j^\phi \subset \{x{:}\psi_{j-1}^\phi \equiv 1\}$ erfüllen. Dabei soll $\psi_N^\phi = \phi$ gesetzt werden.

Es wird nun durch eine **Induktion** gezeigt, daß $\psi_i^\phi u$ für jedes $0 \leq i \leq N$

in $\mathbf{W}_{p,i}$ liegt.

Verankerung: für $j \leq k$ folgt das Gewünschte aus der Voraussetzung.

Induktionsannahme: Sei $k \leq j \leq N-1$, dann liegt $\psi_j^\phi u$ in $\mathbf{W}_{p,j}$. Dabei soll $N \leq s+k$ gesetzt werden.

Induktionsschritt: Es ist zu zeigen, daß aus $\psi_j^\phi u \in \mathbf{W}_{p,j}$ auch $\psi_{j+1}^\phi u \in \mathbf{W}_{p,j+1}$ folgt. Auf der kompakten Menge $\mathrm{Supp}(\psi_{j+1}^\phi)$ gilt $\mathbf{P}_{k,x,D}(\psi_j^\phi u) = \mathbf{P}_{k,x,D}u = f$. Daher folgt:

$$\mathbf{P}_{k,x,D}(\psi_{j+1}^\phi u) = \mathbf{P}_{k,x,D}(\psi_{j+1}^\phi \psi_j^\phi u)$$

$$= \psi_{j+1}^\phi \mathbf{P}_{k,x,D}(\psi_j^\phi u) + [\mathbf{P}_{k,x,D}, \psi_{j+1}^\phi] u$$

$$= \underbrace{\psi_{j+1}^\phi f}_{\in \mathbf{W}_{p,s} \subset \mathbf{W}_{p,j-k+1}} + \underbrace{[\mathbf{P}_{k,x,D}, \psi_{j+1}^\phi] \psi_j^\phi u}_{\mathbf{W}_{p,j-k+1}}$$

Der Kommutator ist ein Operator der Ordnung $k-1$ mit $\mathbf{C}_0^{s+k}(\Omega)$ Koeffizienten, und die Funktion $\psi_j^\phi u$ liegt in $\mathbf{W}_{p,j}^0$. Man erhält also

$$\psi_{j+1}^\phi u \in \mathbf{W}_{p,j}^0(\Omega) \subset \mathbf{W}_{p,j}^{loc}(\Omega) \qquad \text{und} \qquad \mathbf{P}_{k,x,D}(\psi_{j+1}^\phi u) \in \mathbf{W}_{p,j+1-k}^{loc}(\Omega)$$

Nach dem Hilfssatz 3.3.7 folgt daher, daß ψ_{j+1}^ϕ bereits in $\mathbf{W}_{p,j+1}(\Omega)$ liegt. Setzt man nun $N-1 = s+k-1$, so folgt die Behauptung des lokalen Regularitätssatzes.

□

Corolar: 3.4.2. *Der Differentialoperator $\mathbf{P}_{k,x,D}$ habe $\mathbf{C}_b^{s+k}(\Omega)$ Koeffizienten und sei elliptisch auf der offenen und beschränkten Teilmenge Ω des $\mathbf{R}^n$. Für beliebiges $s > \frac{n}{p}$ und $1 < p < \infty$ folgt aus $u \in \mathbf{W}_{p,k}^{loc}(\Omega)$ und $\mathbf{P}_{k,x,D}u = f$ mit $f \in \mathbf{W}_{p,s}^{loc}(\Omega)$, daß u sogar in $\mathbf{C}^{k,loc}(\Omega)$ liegt .*

Zum Beweis wird das folgende Lemma (**Vereinfachtes Sobolev-Lemma)** benötigt .

Lemma: 3.4.3. *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt und sternförmig. Für $n < p(s-k)$ und $s > 1$ folgt aus $u \in \mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$, daß u sogar in $\mathbf{C}^k(\Omega)$ liegt. Und es gilt die folgende Abschätzung:*

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{\infty,\Omega} \leq \mathcal{C}_{s,p} \|u\|_{p,s,\Omega}$$

Also ist für $n < p(s-k)$ $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ stetig in $\mathbf{C}^k(\Omega)$ eingebettet.

Der **Beweis:** orientiert sich an dem Beweis von Satz 4.5.8. aus [$H\ddot{o}.7$]. Man nutzt die Approximierbarkeit des Raumes $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ durch $\mathbf{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$-Funktionen aus. Da Ω Präkompakt ist, kann man auf $\mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$- Funktionen übergehen. Ist u in $\mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$, so folgt, daß $\triangle u$ in $\mathcal{E}'$ liegt. Sei $\mathbf{E}$ die **Fundamentallösung** des Laplace-Operators $\triangle$, dann gilt für die Fundamentallösung: (siehe [$H\ddot{o}.8$]) $\partial_j \mathbf{E}\colon = x_j\,|x|^{-n}\,\frac{1}{C_n}$. Dabei ist C_n eine Konstante. Für u kann natürlich $E * \triangle u = u$ auf $\overline{\Omega}$ geschrieben werden. Ist $|\alpha| \leq k$ und $s > 1$, so folgt

$$|\partial^{\alpha} u(h)|_{h\in\overline{\Omega}} \leq \sum_{j=1}^{n} |\partial^{\alpha}\mathbf{E} * \partial_{j,j} u[0]| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{\Omega+h} (\partial^{\alpha}\mathbf{E})(\partial_{j,j}(\tau_{-h} u))dx \right| .$$

Die Faltungsdistribution wird durch die Faltung der Funktionen $\partial^k\mathbf{E}$ und $\partial_{j,j}u$ erzeugt. Man wende die Dreiecks-Ungleichung und die Höldersche-Ungleichung an: $\partial^{\alpha}\mathbf{E} = \frac{P(x)}{|x|^n}$, wobei $P(x)$ ein Polynom ist mit $\mathrm{grad}P(x) \leq k$. Es folgt:

$$(\diamondsuit) \leq \|\tfrac{|P(x)|}{|x|^n}\|_{q,\Omega+\Omega} \|\tau_{-h}(\partial_{j,j}u)\|_{p,\Omega+h} \leq \|\underbrace{\frac{D_k(1+|x|)^k}{|x|^n}}_{(a)}\|_{q,\Omega+\Omega}\|\partial_{j,j}u\|_{p,\Omega}$$

Ist $n < p(s-k)$, so ist $s-k > 0$ und somit gilt:

$$(a) \leq \|\tfrac{D_k(1+|x|)^k(1+|x|)^{s-k}}{|x|^n}\|_{q,\Omega+\Omega} \leq \underbrace{\|D_k(1+|x|)^k\|_{\infty,\Omega+\Omega}}_{<\infty} \|\tfrac{(1+|x|)^{s-k}}{|x|^n}\|_{q,\Omega+\Omega} .$$

$n < p(s-k)$ ist genau dann erfüllt, wenn $n - \frac{p}{p-1}(-s+k+n) > 0$ ist. Da $\frac{p}{p-1}$ gerade gleich q ist, folgt daher die Beschränktheit von

$\|((1+|x|)^{-(s+k)}\,|x|^n)^{-1}\|_{q,\Omega+\Omega}$. Demnach gibt es also eine Konstante $D_{p,s,\Omega}$, so daß die folgende Ungleichung für alle u aus $\mathbf{C}_0^{\infty}(\Omega)$ erfüllt ist :

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^{\alpha}u\|_{\infty,\Omega} \leq D_{p,s,\Omega}\|u\|_{p,s,\Omega} \tag{3.6}$$

Es gilt also für $n < p(s-k)$ und $s > 1$, daß die Abbildung $\mathbf{I}$ mit $\mathbf{I} : (\mathbf{C}_0^\infty(\Omega), \|\bullet\|_{\mathbf{L}_p}) \longrightarrow (\mathbf{C}^k(\Omega), \|\bullet\|_{\infty,\Omega})$ gegeben durch $\mathbf{I}(u) := u$ stetig ist. Der Definitionsbereich ist die Menge $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Mit der Norm von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ versehen, ist er ein dichter Teilraum von $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$. Daher kann diese Abbildung $\mathbf{I}$ unter Erhaltung von (3.2) auf ganz $\mathbf{W}_{p,s}(\Omega)$ fortgesetzt werden.

□

Damit kann dann Corollar 3.4.2 gezeigt werden.

Beweis:3.4.2

Sei Q eine beliebige kompakte Teilmenge von Ω und $u \in \mathbf{W}_{p,k}^{loc}(\Omega)$. Ist $\phi(x)$ eine $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$- Funktion deren Träger in einer beliebigen Kugel $\mathbf{K}_{\delta_i}(x_i)$ liegt, welche ganz in Ω enthalten ist, so folgt aus dem lokalen Regularitätssatz: $\phi u \in \mathbf{W}_{p,s+k}$. Ist $s > \frac{n}{p}$ so ist $n < p(s+k-k)$. Kugeln im $\mathbf{R}^n$ sind sternförmig und präkompakt. Aus (3.4.3) folgt daher, daß ϕu sogar schon in $\mathbf{C}^k(\mathbf{K}_{\delta_i}(x_i))$ liegt. Die Kompakte Menge Q läßt sich durch Kugeln überdecken die ganz in Ω liegen. Mittels Zerlegung der 1 folgt: $u \in \mathbf{C}^{k,loc}(Q)$.

□

Anhang A

Faltungssatz

Wie bereits angekündigt wird nun der Beweis des Faltungssatzes 2.2.1 nachgeholt. Beweis und Satz findet man in $[H\ddot{o}]$, Kapitel 7.9.

Bemerkung: Sei K aus $\mathbf{S}'$ und u aus $\mathcal{E}'$, dann gibt es bekanntlich genau eine Distribution L welche für alle ϕ aus $\mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$, die Gleichung $L(\phi) = K * (u * \phi)$ erfüllt. Diese Distribution L wird dabei durch $L(\phi) = K(\mathcal{F}^2 u * \phi)$ gegeben. Man kann zeigen, daß $L(\phi) = K(\mathcal{F}^2 u * \phi)$ auf ganz $\mathbf{S}$ stetig fortsetzbar ist. Daher kann die Faltung einer $\mathbf{S}'$- Distribution und einer $\mathcal{E}'$-Distribution als $\mathbf{S}'$-Distribution aufgefasst werden. Einen Beweis findet man zum Beispiel in $[H\ddot{o}]$, Kapitel 7.1.

Beweis des Faltungssatzes
Sei ψ eine Funktion aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{K}_2(0))$, die auf $\overline{\mathbf{K}_1(0)}$ identisch 1 ist. Für jedes ξ aus $\mathbf{R}^n$ gibt es genau ein i aus $\mathbf{Z}$, so daß $2^{i-1} \leq |\xi| \leq 2^i$ ist. Mittels Bildung von Teleskop-Summen kann gezeigt werden, daß

$$1 = \sum_{-\infty}^{\infty} (\psi(2^{-i}\xi) - \psi(2^{1-i}\xi)) \tag{A.1}$$

gilt. Die Konvergenz der Reihe ist punktweise. Mit $\hat{K}_R(\xi)$ wird die Funktion $\underbrace{(\psi(\xi) - \psi(2\xi))}_{\psi^{(D)}(\xi)}(\mathcal{F}K[R\xi])$ bezeichnet. Es ist natürlich klar, daß die so konstruierte Funktion in $\mathbf{L}_1^0$ liegt. Mittels der **Leibnizregel**, angewandt auf $D^\alpha(\hat{K}_R(\xi))$, und mittels der Substitution $(R\xi = y)$ erhält man:

$$\underbrace{\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbf{R}^n}\left|D^{\alpha}\hat{K}_R(\xi))\right|^2 d\xi}_{(a)}$$

$$\le \underbrace{\sum_{|\alpha|\le s}\sum_{\beta\le\alpha}\int_{\frac{R}{2}\le|y|\le 2R}\left|\mathcal{C}_{\alpha,\beta}(D^{\alpha-\beta}\psi^D(\frac{1}{R}y))R^{|\beta|}D^{\beta}(\mathcal{F}K[y])\right|^2 R^{-n}dy}_{(b)} \qquad (A.2)$$

Integrationsgrenzen: Da $D^{\alpha-\beta}\psi^D(\frac{y}{R}) \equiv 0$ in $|y| < \frac{R}{2}$ ist, und da der Träger von $\psi^D(\frac{y}{R})$ in der Menge $\{y \mid \; y \le 2R\}$ liegt, muß nur über den den Kreisring $\frac{R}{2} \le |y| \le 2R$ integriert werden.

Nach der Voraussetzung für $\mathcal{F}K[y]$ wird der Ausdruck (b) durch eine R-unabhängige Schranke B nach oben beschränkt. (Die Konstante B hängt nur von C und s ab) Aus $(A.2)$ folgt daher für alle R aus $\mathbf{R}^+$:

$$\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbf{R}^n}\left|D^{\alpha}\hat{K}_R(\xi)\right|^2 d\xi \le B. \qquad (A.3)$$

Dies bedeutet gerade, daß die Funktion $\hat{K}_R(\xi)$ in $\mathbf{H}_s^2$ liegt . Nach Voraussetzung ist $s > \frac{n}{2}$. Nach einem der Sobolev'schen Lemmata folgt für $s > \frac{n}{2}$, daß die $\mathbf{H}_s$-Funktion $\hat{K}_R$ beschränkt ist. Es gilt nämlich:

$$\|\hat{K}_R\|_{\infty,\mathbf{R}^n} \le G_s\|\hat{K}_R\|_{\mathbf{H}_s^2} \qquad (A.4)$$

Dabei ist G_s eine nur von s abhängige Konstante. Für alle R aus $\mathbf{R}^+$ ergibt sich daher aus $(A.3)$ und $(A.4)$ die Gültigkeit folgender Abschätzung:

$$\|\hat{K}_R\|_{\infty,\mathbf{R}^n} \le G_sB \qquad (A.5)$$

Auf der Menge $\{\xi \mid |\xi| = 1\}$ gilt: $\left|\hat{K}_R(x)\right| \equiv \mathcal{F}K[R\xi]$. Diese Gleichheit, liefert mit der R-unabhängigen Abschätzung $(A.4)$: $\|\mathcal{F}K\|_{\infty,\mathbf{R}^n} \le G_sB$. Also liegt $\mathcal{F}K$ in $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R}^n)$. Die Meßbarkeit ergibt sich da $\mathcal{F}K$ nach Voraussetzung in $\mathbf{L}_{1,loc}(\mathbf{R}^n)$ liegt.
Jetzt wird die erste Aussage (2.7) des Faltungssatzes für den Fall $p = 2$ gezeigt. Sei $p = 2$ und u eine Distribution, die durch eine $\mathbf{L}_2(\mathbf{R}^n)$ Funktion gegeben ist. Für die Fouriertransformation der Faltung einer $\mathbf{S}'$- Distributionen K und einer $\mathcal{E}'$-Distribution u gilt:

$$\mathcal{F}(K * u) = (\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u)$$

Für jede Testfunktionen ϕ folgt:

$$\langle K * u, \phi\rangle = \langle \mathcal{F}^3((\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u)), \phi\rangle = \langle \mathcal{F}K(\mathcal{F}u), \mathcal{F}^3\phi\rangle$$

$$= \int_{\mathbf{R}^n} (\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u)(\mathcal{F}^3\phi)d\xi$$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}u$ von einem u aus $\mathcal{E}'$ wird dabei durch die Funktion $\mathcal{F}u[\xi] = u(e^{-i\langle x,\xi\rangle})$ gegeben. Die Funktion $\mathcal{F}u[\xi]$ liegt in $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Hier wird u durch eine $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ Funktion repräsentiert, daher fällt $\mathcal{F}u$ mit der gewöhnlichen Fouriertransformation einer $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_2$ Funktion zusammen:

$$\mathcal{F}u = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} u(x)dx$$

Es folgt daher mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung:

$$\|\mathcal{F}^3((\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u))\|_{2,\mathbf{R}^n} = M\|\mathcal{F}^2((\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u))\|_{2,\mathbf{R}^n} = M\|(\mathcal{F}K)(\mathcal{F}u)\|_{2,\mathbf{R}^n}$$

$$\leq \underbrace{(MG_sB)}_{C_1}\|\mathcal{F}u\|_{2,\mathbf{R}^n} = C_1\|u\|_{2,\mathbf{R}^n}$$

Damit ist die erste Aussage des Faltungssatzes für $p = 2$ gezeigt. (Dabei soll $C_1 =: C_{(2)}$ gesetzt werden.)

Aus $(A.3)$ folgte, daß $\hat{K}_R$ in $\mathbf{H}_s$ liegt. In [Hö] Kapitel 7.9 wird gezeigt, daß die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ den Raum $\mathbf{H}_s$ in den Raum $\mathbf{L}_1$ abbildet, wenn $s > \frac{n}{2}$ ist. Also folgt hier aus der Voraussetzung $s > \frac{n}{2}$, daß $\mathcal{F}\hat{K}_R$ eine $\mathbf{L}_1$-Funktion ist. Man weiß also, daß sowohl $\hat{K}_R$ als auch die Fouriertransformation $\mathcal{F}\hat{K}_R$ in $\mathbf{L}_1$ liegen. Damit gilt die **Fourierumkehrformel** , und es kann gefolgert werden, daß es eine Funktion K_R aus $\mathbf{C}_0 \cap \mathbf{L}_1$ gibt welche $\hat{K}_R$ als Fouriertransformierte besitzt. K_R wird dabei durch $\mathcal{F}^3\hat{K}_R$ gegeben. Im folgenden wird $\mathcal{F}K_R$ anstatt $\hat{K}_R$ geschrieben. Aus der Umkehrformel folgt:

$\int |K_R|\, dx = (2\pi)^{-n} \int \left|\int \psi^D(\xi)\mathcal{F}K[R\xi]e^{i\xi x}d\xi\right| dx \leq G_sB \int \left|\mathcal{F}^{-1}\psi^D\right| dx \leq C'$, wobei ψ^D in $\mathbf{S}$ liegt. Für jedes R aus $\mathbf{R}^+$ folgt also: $\|K_R(x)\|_1 \leq C'$. Weil $\mathbf{L}_1 \subset \mathbf{S}'$ ist, ist die Distribution $\hat{K}_R$ aus $\mathbf{S}'$. Da der Träger von $\hat{K}_R$ in der Kugel um 0 mit dem Radius 2 liegt, kann $\hat{K}_R$ für ein ϕ aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{K}_3(0))$ welches auf der Kugel $\mathbf{K}_2(0)$ identisch 1 ist, durch $\phi\hat{K}_R$ ertsetzt werden. Es gilt dann:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}K_R) = \mathcal{F}(\phi\hat{K}_R) = \underbrace{(\mathcal{F}^2K_R)}_{\in\mathbf{L}_1\subset\mathbf{S}'} * \underbrace{(\mathcal{F}\phi)}_{\in\mathbf{S}}$$

Die Faltung einer Temperierten Distribution u mit einer Schwartz'schen Funktion v, gegeben durch $u * v[x] := u(\tau_x \mathcal{F}^2 v[y])$, liegt bekanntlich in $\mathbf{C}^\infty$. Daher liegt $\mathcal{F}^2(K_R(x))[y]$ in $\mathbf{C}^\infty$. Und da diese Funktion mit der Funktion $K_R(-y)$ übereinstimmt folgt damit, daß $K_R(x)$ durch eine $\mathbf{C}^\infty$ Funktion repräsentiert wird. Die Fourierumkehrformel und daraus folgende Eigenschaften wie $(\mathcal{F}^2)[y] = v(-y)$ findet man zum Beispiel bei $[M.Vo]$ in dem entsprechenden Kapitel. Wendet man auf $\mathcal{F}K_R$ die $\mathbf{H}_s$ -Norm an, so erhält man unter Berücksichtigung von $(A.3)$:

$$\|\mathcal{F}K_R\|_{\mathbf{H}_s} = \{\int_{\mathbf{R}^n} |K_R(-\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi\}^{\frac{1}{2}} \leq A_s B = C''$$

Es ist klar, daß

$$\|K_R(\xi)\|_{\mathbf{L}_1} = \int \underbrace{|K_R(-\xi)| (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}}_{(a)} \underbrace{(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}}_{(b)} d\xi$$

ist. Nach Voraussetzung ist: $s > \frac{n}{2}$. Deshalb liegt (b) in $\mathbf{L}_2$. Das Integral $\int_{\mathbf{R}^n}(a)(b)d\xi$ kann daher als Skalarprodukt von $(a),(b)$ aufgefasst werden. Wendet man die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung auf dieses Skalarprodukt an, so erhält man die folgende Abschätzung:

$$\|K_R\|_{\mathbf{L}_1} \leq \|\mathcal{F}K_R\|_{\mathbf{H}_s} \|(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\|_{\mathbf{L}_2} \leq C'' \|(1+|\xi|^2)^{\frac{-s}{2}}\|_{\mathbf{L}_2} \tag{A.6}$$

Mittels dieser Abschätzung $(A.6)$ folgt:

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{K}_\delta(0)} |K_R(x)| \, \mathrm{dx} \leq C'' \{\int_{\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{K}_\delta(0)} (1+|x|^2)^{-s} dx\}^{\frac{1}{2}}$$

Für die $\mathbf{S}'$-Distribution $\xi_j \mathcal{F}K_R$ gilt natürlich: $\mathcal{F}(\xi_j \mathcal{F}K_R) = -D_j \mathcal{F}^2 K_R$. $\xi_j \mathcal{F}K_R$ liegt in $\mathcal{H}_s \cap \mathbf{L}^1$. Weil $s > \frac{n}{2}$ ist, liegt auch $\mathcal{F}(\xi_j \mathcal{F}K_R)$ in $\mathbf{L}_1$. $-D_j \mathcal{F}^2 K_R$ ist eine $\mathbf{C}^\infty$-Funktion und damit ist sie auch in $\mathbf{L}_{1,loc}$. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung einer Distribution durch eine $\mathbf{L}_{1,loc}$ Funktion folgt die $\|\bullet\|_{\mathbf{L}_1}$ Gleichheit von $-D_j \mathcal{F}^2 K_R$ und $\mathcal{F}(\xi \mathcal{F}K_R)$. Daher liegt die Funktion $-D_j K_R$ in $\mathbf{L}_1$ und es gilt: $\|-D_j K_R\|_{\mathbf{L}_1} \leq C_2$. Die Konstante C_2 ist dabei nur von C und s abhängig. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes erhält man:

$$\underbrace{|K_R(x+y) - K_R(x)|}_{(\triangle_{R,y}(x))} \leq |y| \int_0^1 |D_j K_R[x+ty]| \, dt$$

und daraus folgt sofort:

$$\|\triangle_{R,y}(x)\|_{\mathbf{L_1}} \leq C_2\,|y| \tag{A.7}$$

Für eine Funktion f aus $\mathbf{L}_1$ gilt bekanntlich: $\mathcal{F}(f(Rx)) = \mathcal{F}f[\frac{\xi}{R}]\frac{1}{R^n}$. Daher ist $\mathcal{F}(K_R(Rx)R^n) = \mathcal{F}K_R\,[\frac{\xi}{R}]$ und mit $(A.1)$ folgt:

$$\underbrace{\mathcal{F}(\sum_{i=-m}^{m} K_{2^i}(2^i x)2^{ni})}_{u_m} = \sum_{i=-m}^{m}(\psi(2^{-i}) - \psi(2^{1-i}))\mathcal{F}K[\xi\frac{2^i}{2^i}]$$

Die Partial Summe liegt in $\mathbf{L}_\infty \cap \mathbf{L}_1$ und konvergiert punktweise monoton gegen $\mathcal{F}K$. $\mathcal{F}K$ ist aus $\mathbf{L}_\infty$. Für jedes ϕ aus $\mathbf{S}$ folgt daher: $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty} u_m(\phi) = \mathcal{F}(\phi)$. Also konvergiert u_m im $\mathbf{S}'$-Sinn gegen die Distribution $\mathcal{F}K$. Für jedes ϕ aus $\mathbf{S}$ folgt weiter:

$$\mathcal{F}^{-1}u_m(\phi) = u_m(\mathcal{F}^{-1}\phi) \qquad \lim_{m\longrightarrow\infty} u_m(\mathcal{F}^{-1}\phi) = \mathcal{F}K(\mathcal{F}^{-1}\phi) = K(\phi)$$

Somit konvergiert $\sum\limits_{i=-m}^{m} K_{2^i}(2^i\bullet)2^{ni}$ im $\mathbf{S}'$-Sinn gegen die Distribution K.
Mit $\mathbf{I}$ wird der folgende Würfel bezeichnet:

$$\mathbf{I} = \{x \mid \max_{i\in[1,..n]} |x_i| < \delta\}$$

Mit M wird derjenige Teilraum von $\mathcal{E}'$ bezeichnet, dessen Elemente w durch $\mathbf{C}_0^\infty(I)$ Funktionen repräsentiert werden, die $\int_{\mathbf{I}} w(\xi)d\xi = 0$ erfüllen. Man betrachte nun die Abbildung $A : M \longrightarrow \mathbf{S}'$ mit $A(w) = K * w$. Für jedes $\phi(x)$ aus $\mathbf{S}$ gilt:
$A(w)[\phi] = K(\mathcal{F}^2 w * \phi)$. Weiter folgt:

$$\mathcal{F}^{-1}u_m(\mathcal{F}^2 w * \phi) = \int \sum_{i=-m}^{m}(K_{2^i}(2^i x)2^{ni}) \int \mathcal{F}^2 w(x-y)\phi(y)dydx$$

$\mathcal{F}^{-1}u_m(\mathcal{F}^2 w * \phi)$ konvergiert für m gegen unendlich gegen $(K * w)[\phi]$. Die Integrationsreihenfolge kann vertauscht werden.
Daher konvergiert $\mathcal{F}^{-1}u_m(w(y-\bullet))$ für fast alle y gegen $K(w(y-\bullet))$. Die Distribution $K * w$ wird also durch die Funktion $y \longrightarrow K(w(y-x))$ erzeugt.
Es gilt das folgende Hilfslemma:

Lemma: A.0.4. *Es sei mit $\mathbf{I}^*$ derjenige Quader bezeichnet, welcher die doppelte Kantenlänge wie der Quader $\mathbf{I}$ besitzt. M sowie A seien wie eben definiert. Dann gibt es eine Konstante D mit welcher für alle w aus M folgt:*

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} |A(w)|\,dx \leq D\int_{\mathbf{R}^n} |w|\,dx \tag{A.8}$$

Dabei hängt die Konstante D nur von s und C ab.

Beweis des Lemmas: Wendet man den Satz von Fubini auf den Integralausdruck ($\diamondsuit$) an, so folgt:

$$\underbrace{\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} R^n \left|K_R(yR) * w(y)[x]\right| dx}_{\diamondsuit} \leq \underbrace{R^n \int |w(y)|\, dy \int_{|x|>\delta} |K_R(Rx)|\, dx}_{(a)}$$

Unter der Benutzung der Abschätzung $(A.6)$ ergibt sich:

$$(a) \leq \int |w(y)|\, dy \int_{Rx>\delta R} |K_R(Rx)|\, d(Rx) \leq C''(\delta R)^{\frac{n}{2}-s} \int |w(y)|\, dy \quad \text{(A.9)}$$

Der Integralausdruck $\diamondsuit$ kann auch anders abgeschätzt werden, und zwar durch:

$$\diamondsuit \leq \underbrace{R^n \int \left| \int K_R((x-y)R)w(y) - K_R(xR)w(y) + K_R(xR)w(y)dy \right| dx}_{(b)}$$

Nutzt man zuerst die Linearität des inneren Integrals von (b) aus und wendet anschliessend auf das äussere Integral von (b) die Dreiecksungleichung an, so kann man weiter durch

$$(b)\underbrace{\leq R^n(\int \int |K_R((x-y)R) - K_R(xR)|\, |w(y)|\, dydx}_{(c)} + \int \left| \underbrace{\int K_R(xR)w(y)dy}_{\clubsuit} \right| dx$$

abschätzen. Dabei ist $\clubsuit$ nach Voraussetzung gleich 0 und fällt daher weg. Mit einer Substitution $z = Rx$ und der Abschätzung $(A.7)$ erhält man schliesslich:

$$(c) \leq \int_{\mathbf{I}} |w(y)|\, |Ry|\, C_2 dy \leq C_2 R\delta \int_{\mathbf{I}} |w(y)|\, dy \quad \text{(A.10)}$$

Hier wird nur noch über $\mathbf{I}$ integriert, da der Träger von w in dem Quader $\mathbf{I}$ liegt. Es gilt:

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} |A(w)| = \int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} \lim_{m\longrightarrow\infty} \left| \int \sum_{i=-m}^{m} 2^{ni} K_{2^i}(2^i x) w(y-x) dx \right| dy$$

Mit den beiden eben gezeigten Abschätzungen für $\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} R^n\,|K_R(xR)*w|\,dy$, $(A.9)$ und $(A.10)$ ergibt sich:

$$\int_{\mathbf{R}^n\setminus\mathbf{I}^*} \lim_{i\longrightarrow\infty} \sum_{i=-m}^{m} \left|\int 2^{ni} K_{2^i}(2^i x) w(y-x)dx\right| dy$$

$$\leq \max(C_2, C'') \int |w(x)|\,dx \underbrace{(\sum_{2^i\delta\geq 1} (2^i\delta)^{\frac{n}{2}} + \sum_{2^i\delta<1} (2^i\delta))}_{(d)} \leq D \int |w|\,dx$$

(d) besteht aus zwei konvergenten Reihen, daher ist die letzte Abschätzung zulässig.

□

Damit ist das Lemma $A.0.4$ gezeigt. Das nächste Ziel ist es, erst einmal die Aussage (2.8) des Faltungssatzes 2.2.1 zu zeigen. Die Gültigkeit von (2.8) wird im Beweis von (2.7) benötigt. Im Beweis von (2.8) wird ein **Zerlegungslemma** benutzt. Dieses Lemma soll daher vorgestellt werden. Man findet es als *Zerlegungslemma von Calderon und Zygmund* in [$H.\ddot{o}$] Kapitel 4.5.

Lemma: A.0.5. *Für ein u aus $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$ und eine positive reelle Zahl l, gibt es eine Funktion W aus $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$ und eine Folge $w_k(x)$ $(k = 1, 2, ...)$ von $\mathbf{L}_1(\mathbf{R}^n)$-Funktionen, so daß für jedes x aus $\mathbf{R}^n$ die Gleichung $u(x) = W(x) + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x)$ erfüllt ist. Dabei gilt:*

$$\|W\|_{\mathbf{L}_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \|w_k\|_{\mathbf{L}_1} \leq 3\|u\|_{\mathbf{L}_1} \tag{A.11}$$

Die Funktion $W(x)$ wird durch $2^n l$ wesentlich beschränkt. Der Träger jedes $w_k(x)$ liegt in einem Würfel $\mathbf{I}_k$ und das Integral $\int w_k(x)dx$ verschwindet. Für die Würfel $\mathbf{I}_k$ gilt:

$$\mathbf{I}_j \cap \mathbf{I}_m = \emptyset \;\; wenn \;\; j \neq m$$

und die $\mathbf{I}_k$ erfüllen die folgende Abschätzung:

$$l \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\mathbf{I}_k) \leq \|u\|_1 \tag{A.12}$$

Hat u einen kompakten Träger, so gibt es eine kompakte Menge Y, die alle Träger von w_k und den Träger von W enthält.

Es soll nun die Aussage (2.8) gezeigt werden.
Sei u in $\mathbf{L}_2^0$. Liegt ein u in $\mathbf{L}_2^0$ so liegt es auch in $\mathbf{L}_1^0$. Das Lemma von Calderon-Zygmund kann daher auf u angewandt werden. Als l wählt man jetzt τ. Die Zerlegungsfunktionen haben ihre Träger alle in derselben kompakten Obermenge und da W durch $2^n\tau$ wesentlich beschränkt wird, liegt W daher in $\mathbf{L}_2^0$. Es wurde bereits gezeigt, daß die erste Aussage (2.7) des Faltungssatzes für $p = 2$ gilt. Daher weiß man, daß $K * u$ in $\mathbf{L}_2$ liegt und man erhält die Meßbarkeit von $|K * u|$. Mit M_σ sei im Folgendem die Menge $\{x \mid |f| > \sigma\}$ bezeichnet. Es ist klar, daß

$$\int_{M_\sigma} |f|^2 \, dx \geq \int_{M_\sigma} \sigma^2 dx = \sigma^2 \lambda(M_\sigma)$$

gilt. Setzt man $\sigma = \frac{\tau}{2}$ und $f = |K * W|$, so folgt daher:

$$4 \int_{M_{\frac{\tau}{2}}} |K * W|^2 \, dx \geq \tau^2 \lambda(M_{\frac{\tau}{2}})$$

Wendet man (2.7) für $p = 2$ auf W an, und beachtet: $\|W\|_\infty \leq 2^n\tau$, dann folgt:

$$\tau^2 \lambda\{x \mid |K * W| > \frac{\tau}{2}\} \leq 4\|K * W\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leq 4C_1\|W\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leq 4C_1 2^n \tau \|W\|_{\mathbf{L1}} \tag{A.13}$$

Mit $\mathbf{O}$ soll die Vereinigung aller $\mathbf{I}_k^*$ bezeichnet werden. Für das Lebesgue Maß dieser Quader gilt natürlich $\lambda(\mathbf{I}_k^*) = 2^n \lambda(\mathbf{I}_k)$. Mit der Abschätzung $(A.12)$ und der Tatsache, daß alle $\mathbf{I}_k$ untereinander disjunkt sind, folgt:

$$\lambda(\mathbf{O}) \leq \frac{1}{\tau} 2^n \|u\|_{\mathbf{L}_1} \tag{A.14}$$

Mit $C : \mathbf{O}$ soll im folgenden das Komplement von $\mathbf{O}$ bezeichnet werden. Alle $w_k(x)$ erfüllen die Anforderungen an die Funktion $w(x)$ aus dem Lemma $A.0.4$. Daher ist die Folgende Abschätzung zulässig:

$$\frac{\tau}{2}\lambda(\{x \text{ aus } C : \mathbf{O} \cap \{x \mid \sum_k |K * w_k[x]| > \frac{\tau}{2}\}\ \}) \leq 2 \int_{\mathbf{R}^n \setminus \mathbf{O}} \sum_k |K * w_k[x]| \, dx \tag{A.15}$$

$$\leq 2D \int_{\mathbf{R}^n} \sum_k |w_k(y)| \, dx \leq 6D\|u\|_{\mathbf{L}_1}$$

In (2.8) soll gezeigt werden, daß es eine Konstante $G > 0$ gibt mit welcher für jedes $\tau > 0$ die folgende Abschätzung zulässig ist :

$$\tau\lambda(\{x \mid |K * u| > \tau\}) \leq G\|u\|_{\mathbf{L}_1}$$

Dabei soll G nur von s und C abhängig sein. Setzt man für u die Calderon-Zygmund Zerlegung ein, so stellt man fest, daß wegen

$$\tau < |K * u| \leq |K * W[x]| + \sum_k |K * w_k[x]|$$

durch:

$$|W(x)| > \frac{\tau}{2} \text{ oder } \sum_k |w_k(x)| > \frac{\tau}{2}$$

eine notwendige Bedingung für $|K * u[x]| > \tau$ gegeben wird. Ein x aus $\mathbf{R}^n$ liegt entweder in $\mathbf{O}$ oder im Komplement $C : \mathbf{O}$. Die Menge $\mathbf{O}$ enthält die Menge $\{x \text{ aus } \mathbf{O} \mid \sum_k |K * w_k| > \frac{\tau}{2}\}$. Man gelangt mit diesen Überlegungen und den Abschätzungen $(A.13)$, $(A.14)$ $(A.15)$ zu der folgenden Abschätzung:

$$\tau\lambda(x \mid \sum_k |K * w_k| > \tau\}) \leq \tau\lambda(\mathbf{O}) + \tau\lambda(\{x \text{ aus } C : \mathbf{O} \mid \sum_k |K * w_k| > \frac{\tau}{2}\})$$

$$+\tau\lambda(\{x \mid |K * W| > \frac{\tau}{2}\}) \leq \tau(\tau^{-1}2^n + \tau^{-1}6D + 2^n C_1 4\tau^{-1})\|u\|_{\mathbf{L}_1} \leq G\|u\|_{\mathbf{L}_1}$$

Das G ist völlig unabhängig von τ, und die zweite Behauptung (2.8) des Faltungssatzes ist gezeigt.
Nun soll die erste Behauptung (2.7) des Faltungssatzes für p ungleich 2 bewiesen werden. Gilt $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, so folgt $p = \frac{q}{q'-1}$, und aus $q > 2$ folgt daraus $1 < p < 2$. Zuerst wird gezeigt, daß die Gültigkeit von (2.7) für ein p auch die Gültigkeit für das zugehörige q impliziert. Anschliessend wird gezeigt, daß (2.7) für jedes p aus $(1, 2)$ Gültigkeit besitzt.

Sei Ω eine beschränkte Teilmenge von $\mathbf{R}^n$. Die Menge Ω ist präkompakt. Für $1 < p < \infty$ ist die Menge $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$ eine dichte Teilmenge von $\mathbf{L}_p^0(\Omega)$ bezüglich der $\| \bullet \|_{\mathbf{L}_p}$-Norm. Im Faltungssatz wird vorausgesetzt, daß p in $(1, \infty)$ liegt. Angenommen Ungleichung (2.7) gilt für ein p aus $(1, \infty)$. Es wird jetzt gezeigt, daß es unter dieser Annahme eine Konstante $C_{(q)}$ gibt die nur von q und C und s abhängt und mit der für alle $u(x)$ aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ folgt:

$$\|A(u)\|_{\mathbf{L}_q} := \|K * u\|_{\mathbf{L}_q} \leq C_{(q)}\|u\|_{\mathbf{L}_q}$$

Diese Ungleichung gilt dann natürlich auch eingeschränkt auf die Menge $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$. Die Abbildung $(A(u)\mid_{\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)}, \|\bullet\|_{\mathbf{L}_q}) \longrightarrow \mathbf{L}_q$ kann unter Erhaltung der Stetigkeit und der Konstanten $C_{(q)}$ auf $\mathbf{L}_q^0(\Omega)$ fortgesetzt werden. Da dies für jede Präkompakte Teilmenge Ω von $\mathbf{R}^n$ gilt, folgt daraus die Gültigkeit von (2.7) für q.
Seien $u(x)$ und $v(x)$ aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Da $u(x)$ und $v(x)$ kompakte Träger haben gilt für die Faltung:

$$|(K*u)*v[0]| = |(K*v)*u[0]|$$

Von der Distribution $K*v$ ist bereits bekannt, daß sie durch eine $\mathbf{L}_p$ - Funktion repräsentiert wird. Sie liegt in $\mathbf{S}'$ und kann wieder mit der $\mathcal{E}'$ - Distribution u gefaltet werden. Die Distribution, die dabei herauskommt, wird durch $\int (K*v)(x)u(y-x)dx$ gegeben. Ausgewertet an der Stelle $y=0$ folgt mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung für alle v und für alle u aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$|(K*v)*u[0]| = |(K*u)*v[0]| \leq \|K*v\|_{\mathbf{L}_p}\|u\|_{\mathbf{L}_q}$$

Da die Gültigkeit von (2.7) für p vorausgesetzt wurde, folgt weiter:

$$\int (K*u)(x)v(-x)dx \leq C_{(p)}\|u\|_{\mathbf{L}_q}\|v\|_{\mathbf{L}_p}$$

Wegen der Dichtheit von $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ in $\mathbf{L}_p$ folgt für jedes u aus $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$:
$\|K*u\|_{\mathbf{L}_p} \leq C_{(p)}\|u\|_{\mathbf{L}_q}$. Der Faltungssatz (2.7) gilt daher auch für q.
Nun wird gezeigt das 2.2.7 für p aus $(1,2)$ gilt. Dabei wird die sogenannte Interpolationsmethode von Marcinkiewicz benutzt. Für $\tau > 0$ spaltet man die Funktion u aus $\mathbf{L}_p^0$ mit p aus $(1,2)$ in zwei Anteile $u_{\tau,1}$ und $u_{\tau,2}$ auf, so daß $u(x) = u_{\tau,1}(x) + u_{\tau,2}(x)$ gilt. $u_{\tau,1}$ und $u_{\tau,2}$ sollen durch $u_{\tau,1}(x) = \chi_{\{x||u|<\tau\}}u$ und durch $u_{\tau,2}(x) = \chi_{\{x||u(x)|\geq\tau\}}u$ gegeben sein. Mit χ soll dabei die charakteristische Funktion der angegebenen Menge bezeichnet werden. Beide Funktionen $u_{\tau,i}(x)$ liegen in $\mathbf{L}_2^0$ und es gilt: $K*u = K*u_{\tau,1} + K*u_{\tau,2}$.
Weiter ist die folgende Inklusion erfüllt:

$$\{x \mid |K*u| > \tau\} \subset \{x \mid |K*u_{\tau,1}| > \frac{\tau}{2}\} \cup \{x \mid |K*u_{\tau,2}| > \frac{\tau}{2}\}$$

Mit der bereits gezeigten Ungleichung $(A.14)$ und der bereits gezeigten zweiten Aussage (2.8) des Faltungssatzes folgt:

$$\lambda(\{x \mid |K*u| > \tau\}) \leq M(\tau^{-2}\|u_{\tau,1}\|_{\mathbf{L}_2} + \tau^{-1}\|u_{\tau,2}\|_{\mathbf{L}_1}) \tag{A.16}$$

Dabei ist M eine Konstante, welche unabhängig von p und unabhängig von τ ist. Für eine Funktion $f(x)$ gilt:

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p}^p = p\int_0^\infty \tau^{p-1}\lambda(\{x \mid |f(x)| > \tau\}d\tau) \tag{A.17}$$

Wählt man die Faltung $K * u[x]$, als Funktion $f(x)$, so folgt, wenn man für das Maß der Menge $\{x \mid |K * u[x]| > \tau\}$ die Abschätzung $(A.16)$ anwendet, mit der Definition von $u_{\tau,1}$ und $u_{\tau,2}$:

$$\|K * u\|_{\mathbf{L}_p} \leq pM(\underbrace{\int_0^\infty \tau^{p-3}\|u_{\tau,1}\|^2_{\mathbf{L}_2} d\tau}_{(a)} + \underbrace{\int_0^\infty \tau^{p-2}\|u_{\tau,2}\|_{\mathbf{L}_1} d\tau)}_{(b)}$$

$$(a) = \int_0^\infty \tau^{p-3} \int_{\mathbf{R}^n} |u(x)| \, \chi_{\{x||u(x)|<\tau\}} dx d\tau$$

$$(b) = \int_0^\infty \tau^{p-2} \int_{\mathbf{R}^n} |u(x)| \, \chi_{\{x||u(x)|\geq\tau\}} dx d\tau$$

Es gilt:

$$(c)\!:= \int_{\mathbf{R}^n} \int_{|u(x)|}^\infty |u(x)|^2 \, \tau^{p-3} d\tau dx = -(p-2)^{(-1)} \|u\|_p^p$$

$$(d)\!:= \int_{\mathbf{R}^n} \int_0^{|u(x)|} |u(x)| \, \tau^{p-2} d\tau dx = (p-1)^{(-1)} \|u\|_p^p$$

Die Funktionen $|u_{1,\tau}(x)|^2 \, \tau^{p-3}$ und $|u_{2,\tau}(x)| \, \tau^{p-2}$ sind $\lambda(x,\tau)$-meßbar. Daher gilt: $(a) = (c)$ und $(b) = (d)$. Somit ist die erste Behauptung (2.7) des Faltungssatzes gezeigt.

□

Anhang B

Literaturverzeichnis

[Hö] Lars Höermander: The Analysis of Linear Partial Differential Operator .1.
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 256,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1983

[Fo] Gerald B Folland: Introduction to partial Differential Equations
Mathematical Notes 17, Princton University Press 1976

[Ma] Mazja: Einbettungssätze vom Sobolev'schen Typ .1.
Teubner-Texte zur Mathematik, Leibzig 1979

[Kö] G.Köthe: Topologische Lineare Räume 1
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Band 107,
Springer - Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1969

[M.Vo] Meise, Vogt: Einführung in die Funktionalanalysis
Aufbaukurs Mathematik 62, Vieweg-Verlag 1992

[Ad] Robert .A. Adams: Sobolev Spaces
Pure and applied Mathematik v.65, Academic Press New-York San-Francisco London 1975

[Tr] H.Triebel: Spaces of Besov Hardy Sobolev Typ
Teubner-Text zur Mathematik, Leibzig 1978

[Ru] Rudin: Functionalanalysis
TMH Edition 1974, Mc Graw Hill New-Delhi New-York, sixteenth reprint 1992