

# Experimentelle Konsequenzen einer Minimalen Länge

DISSERTATION  
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES  
DER NATURWISSENSCHAFTEN

VORGELEGT BEIM FACHBEREICH PHYSIK  
DER JOHANN WOLFGANG GOETHE - UNIVERSITÄT  
IN FRANKFURT AM MAIN

VON  
ULRICH HARBACH  
AUS DARMSTADT

FRANKFURT 2007  
(D 30)

VOM FACHBEREICH PHYSIK DER  
JOHANN WOLFGANG GOETHE - UNIVERSITÄT ALS DISSERTATION ANGE-  
NOMMEN.

DEKAN: .....

GUTACHTER: .....

DATUM DER DISPUTATION: .....

# Abstract

Das heutige Standardmodell der Teilchenphysik ist das bislang erfolgreichste Modell zur Erklärung von Phänomenen des Mikrokosmos. Dennoch wirft es noch immer eine Vielzahl von Fragen auf: Wie sind die verschiedenen Massen der Elementarteilchen und die Kopplungskonstanten bestimmt? Warum gibt es drei Teilchenfamilien? Wie ist der Zusammenhang des Standardmodells mit der Gravitation, die (noch) nicht als Quanteneffekt erklärt werden kann?

Heute existieren Theorien, die auf unterschiedlichem Niveau versuchen, diese Fragen zu lösen:

- Die Stringtheorie versucht, die bekannten Teilchen und Wechselwirkungen als unterschiedliche Schwingungszustände von kleinen ausgedehnten Objekten, den Strings, zu erklären. Einer dieser Zustände hat die Eigenschaften des Gravitons, des Quants der Gravitationswelle, so daß nicht nur die Möglichkeit der Erklärung der Elementarteilcheneigenschaften besteht, sondern auch die Vereinigung mit der Gravitation.
- Die Loop-Quantengravitation versucht, durch eine Umformulierung der Gravitation eine Quantisierung zu ermöglichen, die nicht auf deren linearisierter Form beruht. Sie beantwortet damit keine der Fragen zur Struktur des Standardmodells, stellt aber die Gravitation auf die gleiche Grundlage.
- Darüber hinaus existieren weitere, speziellere Theorien, die auf theoretischen Überlegungen beruhen wie z.B. die Nichtkommutative Geo-

---

metrie, oder die spezifische existierende Diskrepanzen zwischen experimenteller Beobachtung und Theorie zu erklären versuchen, wie z.B. die Deformierte Relativitätstheorie.

Alle diese Theorien teilen die Vorhersage einer universellen, minimalen Längeneinheit, einem generellen Limit an das räumliche Auflösungsvermögen.

Da die oben genannten Theorien keine expliziten experimentell nachweisbaren Vorhersagen machen, wird ein effektives Modell vorgestellt, das ihre gemeinsame Vorhersage, eine Minimale Länge, in die Quantentheorie integriert. Im Falle der Existenz Großer Extradimensionen, die die beobachtete Schwäche der Gravitation geometrisch erklären und ihre fundamentale Massenskala in den Bereich des Standardmodells bewegen, könnte diese Minimale Länge in einer durch terrestrische Experimente erreichbaren Größenordnung liegen.

Auf Basis dieses Modells werden die Konsequenzen der Existenz einer Minimalen Länge für die unterschiedlichsten Experimente ermittelt. Darunter sind z.B. Hochpräzisionsexperimente wie die Messung des gyromagnetischen Moments des Myons, Teilchenbeschleunigerexperimente sowie Experimente zur Messung der kosmischen Strahlung. Es werden sowohl Modifikationen an Standardmodell-Größen ermittelt, als auch an Vorhersagen des Modells der Großen Extradimensionen, so daß unabhängig voneinander beide Effekte betrachtet werden können.

Der Vergleich der Vorhersagen mit den experimentellen Daten liefert bereits jetzt Limits an die Größe der fundamentalen Skala. Zukünftige experimentelle Ergebnisse werden zeigen, ob tatsächlich Große Extradimensionen existieren, und wenn ja, ob eine Minimale Längenskala existiert, d.h. ob die derzeitigen Theorien, die über das Standardmodell hinausgehen, auf dem richtigen Weg sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Theorien einer Minimalen Länge</b>	<b>18</b>
2.1	Die Physik zur Jahrtausendwende . . . . .	18
2.1.1	Eichfeldtheorie . . . . .	19
2.1.1.1	Das Prinzip der stationären Wirkung . . . . .	19
2.1.1.2	Eichinvarianz . . . . .	21
2.1.2	Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . . .	21
2.1.3	Die Gravitation . . . . .	23
2.1.3.1	Die Schwarzschild-Lösung . . . . .	24
2.1.3.2	Schwarze Löcher . . . . .	25
2.1.4	Hinweise auf eine Minimale Länge durch die Verbindung von Standardmodell und Gravitation . . . . .	26
2.2	Stringtheorie . . . . .	30
2.2.1	Quantisierte Gravitation . . . . .	31
2.2.2	Der relativistische quantisierte geschlossene String . . . . .	35
2.2.3	Stringtheorie und die Minimale Länge . . . . .	38
2.3	Loop-Quantengravitation . . . . .	39
2.3.1	Neue Variablen der Allgemeinen Relativitätstheorie und Quantisierung . . . . .	40
2.3.2	Eigenwerte für Längen, Flächen und Volumen . . . . .	41
2.4	Weitere Theorien einer Minimalen Länge . . . . .	42
2.4.1	Nichtkommutative Geometrie . . . . .	42
2.4.2	Deformierte Spezielle Relativitätstheorie . . . . .	44

<b>3</b>	<b>Große Extradimensionen und die modifizierte de Broglie-Relation</b>	<b>46</b>
3.1	Extradimensionen . . . . .	47
3.1.1	Das Hierarchieproblem . . . . .	47
3.1.2	Das Randall-Sundrum-Modell . . . . .	48
3.1.3	Das Arkani-Hamed-Dvali-Dimopoulos-Modell . . . . .	51
3.1.3.1	Kompaktifizierung . . . . .	51
3.1.3.2	Experimentelle Konsequenzen . . . . .	55
3.1.4	Die Minimale Länge in Modellen mit Extradimensionen	59
3.2	Die modifizierte de Broglie-Relation . . . . .	60
3.2.1	Grundlagen . . . . .	61
3.2.2	Implikationen für die Quantentheorie . . . . .	64
3.2.2.1	Kommutatoren, Unschärfe, Impulsmaß . . . . .	64
3.2.2.2	Schrödinger-, Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung . . . . .	66
3.2.2.3	Quantenfeldtheorie . . . . .	68
3.2.3	Lorentz-Invarianz und das Verhältnis zwischen modifizierter de Broglie-Relation und DSR . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Physikalische Anwendungen</b>	<b>71</b>
4.1	Einfache Probleme der Quantenmechanik . . . . .	71
4.1.1	Der harmonische Oszillator . . . . .	72
4.1.2	Das Wasserstoffatom . . . . .	74
4.2	Das gyromagnetische Moment . . . . .	76
4.2.1	Korrekturen durch die modifizierte de Broglie-Relation	78
4.2.2	Experimentelle Daten . . . . .	80
4.3	Vier-Teilchen-Prozesse der Quantenelektrodynamik . . . . .	83
4.4	Der Casimir-Effekt . . . . .	85
4.4.1	Der Casimir-Effekt in der aktuellen Forschung . . . . .	90
4.4.2	Herleitung im Modell der modifizierten de Broglie-Relation . . . . .	91
4.4.3	Interpretation . . . . .	94
4.5	Unterdrückung der Produktion Schwarzer Löcher . . . . .	95

4.5.1	Schwarze Löcher in Modellen mit Großen Extradimen- sionen . . . . .	96
4.5.2	Wirkungsquerschnitt . . . . .	98
4.5.3	Evaporation . . . . .	99
4.5.4	Einfluß der Minimalen Länge . . . . .	102
4.5.5	Kosmische Neutrinos . . . . .	104
4.5.5.1	Klassischer Wirkungsquerschnitt und Schwarze Löcher . . . . .	104
4.5.5.2	IceCube . . . . .	108
4.5.5.3	Ergebnisse . . . . .	109
4.6	Neutrinooszillationen . . . . .	117
4.6.1	Prinzip . . . . .	118
4.6.2	Nachweis . . . . .	123
4.6.2.1	SNO . . . . .	123
4.6.2.2	MINOS . . . . .	126
4.6.3	Die Neutrinomasse im Standardmodell . . . . .	130
4.6.4	Einfluß der Minimalen Länge . . . . .	132
4.7	Ausblick: Statistische Mechanik mit einer Minimalen Länge . .	140
4.7.1	Das modifizierte Impulsmaß . . . . .	142
4.7.2	Mögliche Anwendungen . . . . .	145
<b>5</b>	<b>Schlußbetrachtungen</b>	<b>146</b>

# Abbildungsverzeichnis

3.1	Das von der Eöt-Wash-Gruppe benutzte Torsionspendel zur Messung des Gravitationsgesetzes. Der untere, rot dargestellt Körper besteht aus zwei mit Löchern versehenen Scheiben, wobei die Löcher der beiden Scheiben um 18 Grad gegeneinander gedreht sind. Bei einer Drehung gegenüber dem aufgehängten Pendel heben sich die Kräfte der beiden Scheiben auf das Pendel gegenseitig auf, sofern das Newtonsche Gravitationspotential $V \sim 1/R$ gilt, und es sollte keine Bewegung des Pendels erfolgen. Quelle: <a href="http://www.npl.washington.edu/eotwash/experiments/shortRange/srtpend.jpg">http://www.npl.washington.edu/eotwash/experiments/shortRange/srtpend.jpg</a> . . . . .	56
3.2	Die funktionale Abhängigkeit von Wellenzahl und Impuls (3.10) für die Parameter $\gamma = 1$ (durchgezogene Linie), $\gamma = 10$ (gestrichelte Linie) und $\gamma = 1/2$ (gepunktete Linie). . . . .	63
3.3	Die Unschärferelation bei veränderter de Broglie-Relation (3.10) für die Parameter $\gamma = 1$ (durchgezogene Linie), $\gamma = 10$ (gestrichelte Linie) und $\gamma = 1/2$ (gepunktete Linie). Die Linien zeigen jeweils das Minimum der Unschärfe. . . . .	65
4.1	Die Energieniveaus des harmonischen Oszillators im Modell der modifizierten de Broglie-Relation (durchgezogene Linie) im Vergleich mit den klassischen Werten (gepunktete Linie). Als Parameter wurden $\omega = m = M_f$ gewählt. . . . .	73



4.2	Die relative Abweichung $\Delta E = (E_{2S-1S,ML} - E_{2S-1S})/E_{2S-1S}$ der 2S-1S-Übergangsenergie des Wasserstoffatoms durch die Minimale Länge in Abhängigkeit von der fundamentalen Skala $M_f$ . Die gestrichelte Linie zeigt das observierbare Limit von $1,38 \cdot 10^{-14}$ [F <sup>+</sup> 04]. . . . .	75
4.3	Die relative Abweichung des Wirkungsquerschnitt $e^+e^- \rightarrow f^+f^-$ durch das Modell der modifizierten de Broglie-Relation für verschiedene fundamentale Skalen $M_f$ . Die experimentellen Werte für $\mu$ und $\tau$ wurden am LEP gemessen.[LEP03] . . . . .	86
4.4	Die Casimir-Energiedifferenz für zwei Platten im Falle der Existenz einer Minimalen Länge. Die durchgezogene Linie zeigt das reine Ergebnis aus den Gleichungen (4.11) und (4.12), die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für eine Gaußsche Ortsunschärfe der beiden Platten mit der Varianz $L_f$ . Die beiden Kurven sind numerisch ermittelt. . . . .	93
4.5	Theoretisch ermittelte Energiespektren $I(E)$ kosmischer Neutrinos: Die durchgezogene Linie zeigt das im Kaskadenmodell ermittelte realistische Spektrum[PJ96], die gestrichelte Linie zeigt das aus dem experimentell bekannten kosmischen Protonenspektrum ermittelte obere Limit[MPR01]. . . . .	105
4.6	Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $\nu + N \rightarrow \nu + X$ bzw. $\nu + N \rightarrow SL$ , aufgetragen gegen die Neutrinoenergie $E_\nu$ im Ruhesystem des Nukleons. Die durchgezogene Linie zeigt den Anteil bei Austausch eines $W$ -Bosons (charged current), die gepunktete Linie den Anteil bei Austausch eines $Z$ -Bosons (neutral current); die gestrichelte Linie zeigt die Summe der beiden Anteile. Die gestrichelt-gepunktete Linie zeigt den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Schwarzen Lochs für $M_{min} = M_f = 1 \text{ TeV}$ , $D = 6$ . . . . .	107

- 4.7 Der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dM_{SL}$  für die Reaktion  $\nu + N \rightarrow SL$ . Die durchgezogene Linie zeigt das Standardresultat, die gestrichelte Linie zeigt das Resultat mit der modifizierten de Broglie-Relation. Die Parameter sind  $M_{min} = M_f = 1$  TeV,  $D = 6$  und  $E_\nu = 10^8$  GeV. . . . . 110
- 4.8 Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\nu + N \rightarrow \nu + X$  bzw.  $\nu + N \rightarrow SL$ , aufgetragen gegen die Neutrinoenergie  $E_\nu$  im Ruhesystem des Nukleons, hier unter Berücksichtigung des Einflusses der Minimalen Länge, d.h. der modifizierten de Broglie-Relation. Die durchgezogene Linie zeigt wiederum den charged current-Anteil, die gepunktete Linie den neutral current-Anteil; die gestrichelte Linie zeigt ihre Summe. Die gestrichelt-gepunktete Linie zeigt den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Schwarzen Lochs für  $M_{min} = M_f = 1$  TeV,  $D = 6$ . . . . . 111
- 4.9 Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von 2 km als Funktion der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  und der fundamentalen Skala  $M_f$ . Die schattierte Fläche ist physikalisch ausgeschlossen ( $M_{min} < M_f$ ), es gilt  $D = 6$ . Es wurde der aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell errechnete Neutrinofluß angenommen[PJ96]. Die gestrichelte Linie zeigt das reine Resultat mit Großen Extradimensionen, die durchgezogene Linie zeigt die Daten bei Inklusion der Minimalen Länge durch die modifizierte de Broglie-Relation. . . . . 113

4.10 Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von 2 km als Funktion der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  und der fundamentalen Skala  $M_f$ . Die schattierte Fläche ist physikalisch ausgeschlossen ( $M_{min} < M_f$ ), es gilt  $D = 6$ . Es wurde das obere Limit für den Neutrinofluß von etwa  $I(E) \leq 2 \cdot 10^{-5} / E^{-2} \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$  angenommen[MPR01]. Die gestrichelte Linie zeigt das reine Resultat mit Großen Extradimensionen, die durchgezogene Linie zeigt die Daten bei Inklusion der Minimalen Länge durch die modifizierte de Broglie-Relation. . . . . 115

4.11 Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von 2 km als Funktion der fundamentalen Skala  $M_f$  für verschiedene Anzahlen von Extradimensionen  $D$ . Es gilt  $M_{min} = M_f = 1 \text{ TeV}$  Es wurde der aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell errechnete Neutrinofluß angenommen[PJ96]. Die gestrichelte Linie zeigt  $D = 2$ , die gepunktete  $D = 4$  und die durchgezogene  $D = 6$ . . . . . 116

4.12 Oszillationswahrscheinlichkeit im 2-Flavor-Modell für Neutrinos verschiedener Energien nach 735 km Propagationsweite. Als Geschwindigkeit wurde  $v \approx c$  angenommen, und als Neutrinomassendifferenz  $\Delta m^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ . Der Mischungswinkel ist  $\theta = \pi/8$ . . . . . 121

4.13 Simulierte Distributionen für die charged current-, Elektronstreuung- und neutral current-Prozesse (von links nach rechts) in SNO.  $T$  bezeichnet entweder die kinetische Energie des Photons aus dem Neutroneneinfang nach der neutral current-Reaktion, oder die des Elektrons nach der charged current- oder Elektronstreuung-Reaktion.  $R$  bezeichnet den relativen Abstand vom Mittelpunkt des Detektors, d.h. 0 ist seine Mitte, 1 sein Rand.  $\theta_{\odot}$  ist der Zenithwinkel zur Sonne[A<sup>+</sup>07a]. . . . . 125

4.14	Geographische Lage des Neutrinostrahls des MINOS Experiments. Quelle: MINOS Experiment Design Summary, <a href="http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/mintdr_3.pdf">http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/mintdr_3.pdf</a> . . . . .	127
4.15	Messungen des fernen Detektorspektrums von MINOS (Datenpunkte). Die graue und die gepunktete Linie zeigen die erwartete Anzahl von Neutrinos unter der Annahme keiner Oszillationen auf Basis des nahen Detektorspektrums mit zwei verschiedenen Extrapolierungsmethoden (Beam Matrix bzw. Monte-Carlo Best Fit), die schwarze Linie zeigt den mit der Beam Matrix-Methode ermittelten besten Fit anhand der nahen und fernen Detektordaten[M <sup>+</sup> 06]. . . . .	129
4.16	Die Oszillationswellenlänge $\lambda$ für Neutrinos der Energie $E$ im klassischen Fall (gestrichelte Linie) und im unter Berücksichtigung der Minimalen Länge (durchgezogene Linie). Es wurde $M_f = 1$ TeV gewählt. . . . .	135
4.17	Erwartete Anzahl $N$ von Neutrinos verschiedener Energien $E$ im fernen Detektor von MINOS für die klassische Neutrinoszillation sowie im Falle einer Minimalen Länge für verschiedene Werte der fundamentalen Skala $M_f$ (siehe Legende). Die Punkte zeigen die gemessenen Daten im fernen Detektor[M <sup>+</sup> 06].	137
4.18	Die Energiedichte, der Druck und die Teilchendichte (von oben nach unten) in Abhängigkeit von der Temperatur mit Minimaler Länge (durchgezogene Linie) und klassisch (gestrichelte Linie) im großkanonischen Ensemble. Alle Größen sind in entsprechenden Potenzen der fundamentalen Skala $M_f$ angegeben.	143

# Tabellenverzeichnis

3.1	Radii $R$ der Extradimensionen im ADD-Modell für verschiedene Anzahlen von Dimensionen $D$ . Die fundamentale Massenskala ist festgelegt auf $M_f = 1$ TeV. . . . .	55
-----	---	----

—*Wir wissen nichts - das ist das Erste. Deshalb sollen wir sehr bescheiden sein - das ist das Zweite. Daß wir nicht behaupten zu wissen, wenn wir nicht wissen - das ist das Dritte.*

Karl Popper, Alles Leben ist Problemlösen

# 1

## Einleitung

Die Frage, ob eine Minimale Länge existiert, d.h. ob das räumliche Auflösungsvermögen nach unten beschränkt ist, ist so alt wie die Physik selbst. Grundsätzlich existieren eine schwache und eine starke Form einer solchen Idee: Die erste, bekanntere Form bezieht sich auf die Quantisierung der Materie selbst, d.h. daß ein Körper aus endlich vielen Teilen zusammengesetzt ist, und man ihn folglich auch nicht weiter zerlegen kann als in diese kleinsten Teile. Die zweite, stärkere Form behauptet, daß die Struktur der Raumzeit selbst auf kleinen Größenordnungen diskret ist, unabhängig von der Struktur der physikalischen Objekte, die auf ihr existieren[Whi92]. Mit der Stringtheorie und der Loop-Quantengravitation sind beide Formen Gegenstand der aktuellen Forschung.

Sowohl unter den Verfechtern der Idee einer Minimalen Länge, als auch unter ihren Gegnern finden sich seit der Antike prominente Namen: Aristot-

---

teles beispielsweise war der festen Überzeugung, daß räumliche Ausdehnung eine kontinuierliche Größe ist. Cicero erachtete es sogar „eines Physikers nicht würdig zu glauben, es existiere irgendeine minimale Einheit“[Cic00]. Epikur hingegen war der Meinung, es sei unmöglich, räumliche Distanzen beliebig oft aufzuteilen. Ein frühes Argument, daß auf Zenon von Elea zurückgeht, lautet wie folgt:

„Angenommen, ein Liniensegment sei zusammengesetzt aus einer unendlichen Anzahl von Teilen. Zenon behauptet, daß dies in folgender Weise zu einem Widerspruch führt:

1. Entweder die Teile haben die Ausdehnung 0 oder sie haben eine positive Ausdehnung.
2. Wenn sie die Ausdehnung 0 haben, wird das Liniensegment die Ausdehnung 0 haben, denn die Ausdehnung des Ganzen ist die Summe der Ausdehnungen seiner Teile.
3. Wenn sie eine positive Ausdehnung haben, wird das Liniensegment eine unendliche Ausdehnung haben, aus dem gleichen Grund“[Sky83].

Man beachte, daß dieses Argument lange vor der Entdeckung der Infinitesimalrechnung entstand: Die moderne Antwort ist die Widerlegung von Punkt 3; es ist sehr wohl möglich, eine unendliche Summe endlicher Teile zu bilden, und dennoch ein endliches Ergebnis zu erhalten. Nichtsdestotrotz zeigt dieses Argument, daß schon früh die Idee einer minimalen Einheit nicht nur philosophisch, sondern auch mathematisch diskutiert wurde.

Unabhängig von den konzeptionellen Fragen besitzen Physiker seit der Zeit von Newton und Leibniz die Methoden, um eine kontinuierliche Raumzeit mathematisch zu beschreiben, und sicherlich trat auch deshalb die stärkere Form der Idee einer Minimalen Länge zugunsten der schwächeren Form, die eine diskretisierte Materie auf einer kontinuierlichen Raumzeit propagiert, bis ins 20. Jahrhundert hinein in den Hintergrund. Dennoch fanden sich immer wieder Argumente, die Physiker dazu veranlaßten, Überlegungen

hinlänglich einer fundamentalen Konstante von der Dimension einer Länge anzustellen: Heisenberg stellte 1938 fest, daß aus den Konstanten  $c$  (die Lichtgeschwindigkeit) und  $\hbar$  (das Plancksche Wirkungsquantum), die die relativistische Quantentheorie und damit die Mikrophysik bestimmen, keine Größe von der Dimension einer Masse kombiniert werden kann. Damit müsse in einer fundamentaleren Theorie, die auch die Massen der Elementarteilchen erklären soll, eine Konstante von der Dimension einer Masse oder Länge<sup>1</sup> hinzukommen[Hei38]. Auch das Problem der Divergenzen in der relativistischen Quantentheorie schien auf eine fundamentalere Theorie unterhalb einer bestimmten Längenskala hinzudeuten.

Durch die Theorie der Renormierung ist heute das Problem die Divergenzen in den Quantenfeldtheorien der elektromagnetischen, schwachen und starken Kräfte gelöst: Zwar treten unendliche Ausdrücke noch immer auf, werden aber so regularisiert, daß die physikalischen Observablen endlich bleiben. Das Problem der Divergenzen besteht jedoch fort in allen Versuchen der Vereinigung von Quantentheorie und Gravitation. Da die Gravitationskonstante  $G$  zudem eine fundamentale Länge auszeichnet ( $\sqrt{G} \sim \text{Länge}$ ), ist sie nach Heisenbergs Betrachtungen geeignet, als dritte Konstante neben  $c$  und  $\hbar$  einer fundamentalen Theorie zu fungieren. Und in der Tat sagen alle modernen Theorien, die den Versuch unternehmen, Quantentheorie und Gravitation in einer neuen Beschreibung zu vereinigen, wie z.B. Stringtheorie und Loop-Quantengravitation, eine Minimale Länge von der Größenordnung  $\sqrt{G}$  voraus.

Ziel dieser Dissertation ist es, experimentell nachweisbare Konsequenzen der Existenz einer Minimalen Länge zu analysieren. Dazu soll zunächst ein Überblick über verschiedene aktuelle Theorien mit einer Minimalen Länge gegeben werden. Dies geschieht in Kapitel 2. In Kapitel 3 werden Betrachtungen über die universelle Gültigkeit einer Minimalen Länge sowie ihrer Größenordnung angestellt. Außerdem wird eine Modifikation der bekannten Quantentheorie vorgestellt, die es ermöglicht, die Existenz einer Minimalen

---

<sup>1</sup>In natürlichen Einheiten ( $\hbar = c = 1$ ) gilt  $[\text{Masse}] = 1/[\text{Länge}]$ , d.h. aus der Definition einer fundamentalen Masse folgt unmittelbar eine fundamentale Länge und umgekehrt.



---

Länge unabhängig von der zugrundeliegenden fundamentalen Theorie experimentell zu überprüfen. Kapitel 4 widmet sich experimentellen Vorhersagen der zuvor erläuterten Theorie aus den verschiedensten Bereichen der modernen Physik wie z.B. der Hochenergiephysik, Präzisionsmessungen oder Kosmischer Strahlung. In Kapitel 5 werden schließlich Schlußbetrachtungen angestellt und ein Ausblick auf die Zukunft der hier erläuterten Forschung gegeben.

*—Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns nicht näher.*

Albert Einstein, Brief an Max Born

# 2

## Theorien einer Minimalen Länge

Im folgenden werden die prominentesten modernen Theorien erläutert, die über das gegenwärtig gesicherte Bild der Physik hinausgehen. Um die jeweiligen Motivationen und Aussagen dieser Theorien in Kontext setzen zu können, soll jedoch zunächst der gegenwärtige Stand der Theoretischen Physik kurz dargestellt werden.

### **2.1 Die Physik zur Jahrtausendwende**

Die mathematische Beschreibung der Physik geschieht abhängig von der Größenordnung der betrachteten Objekte durch unterschiedliche Theorien: Für die Beschreibung der kleinsten Objekte, der Elementarteilchen, finden die Quantentheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik ihre Anwen-

dung; makroskopische Objekte wie Planeten und Sterne werden durch die Gravitation beschrieben. Eine solche Aufteilung ist möglich durch die speziellen Eigenschaften dieser beiden Theorien: die Existenz von entgegengesetzten Ladungen im Standardmodell und die Schwäche<sup>1</sup> und Nichtabschirmbarkeit der Gravitation. Auf mikroskopischen Größenordnungen sind die Kräfte der Gravitation gegenüber denen des Standardmodells vernachlässigbar, daher können z.B. Experimente in Teilchenbeschleunigern nur mit Hilfe des letzteren beschrieben werden. Auf makroskopischen Distanzen werden die Kräfte des Standardmodells durch die Aufhebung der unterschiedlichen Ladungen neutralisiert, die der Gravitation wird jedoch weiter verstärkt, da keine negativen Massen existieren. So wird die Entwicklung z.B. unseres Planetensystems rein von der Gravitation bestimmt.

Schnittpunkte zwischen beiden Theorien kann es nur dort geben, wo genügend Masse bzw. Energie auf kleinstem Raum gebündelt werden, so daß sowohl Gravitationseffekte als auch Quanteneffekte des Standardmodells gleichermaßen wichtig werden. Die einzig bekannten Objekte, bei denen dieser Fall eintritt, sind der Urknall, der Beginn unseres Universums, und Schwarze Löcher (siehe dazu Kap. 2.1.3).

### 2.1.1 Eichfeldtheorie

Trotz der Unterschiede zwischen Gravitation und Standardmodell gibt es einige fundamentale Prinzipien, die beiden Theorien gemein sind.

#### 2.1.1.1 Das Prinzip der stationären Wirkung

Durch Beobachtung fand Pierre de Fermat bereits im 17. Jahrhundert heraus, daß in der geometrischen Optik für einen Lichtstrahl gelten muß, daß die Länge des Lichtweges gegenüber seiner Variation extremal ist, d.h. der Lichtstrahl entweder den längsten oder den kürzesten möglichen Weg von

---

<sup>1</sup>Siehe dazu das *Hierarchieproblem* in Kapitel 3.

einem Punkt A zu einem Punkt B nimmt. Dieses *Fermatsche Prinzip* wurde später auf die Mechanik verallgemeinert: Das *Hamiltonsche Prinzip* besagt, daß die Bewegung eines Systems so abläuft, daß die Wirkung

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.1)$$

extremal wird, d.h. die ihre Variation verschwindet:

$$\delta S = 0 \quad . \quad (2.2)$$

Hierbei sind  $t_1$  und  $t_2$  die Anfangs- und Endzeit des betrachteten Zeitraums,  $q$  die generalisierten Koordinaten, und  $L$  die *Lagrangefunktion* des Systems. Die Lagrangefunktion ist über eine *Legendretransformation* mit der *Hamiltonfunktion* verknüpft, die wiederum mit der Gesamtenergie des Systems verknüpft ist.

Mit den Methoden der Variationsrechnung lassen sich aus diesem Prinzip bei gegebener Lagrangefunktion Bewegungsgleichung für die generalisierten Koordinaten ermitteln, die *Euler-Lagrange-Gleichungen*:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad .$$

In der Klassischen Mechanik produzieren diese die Newtonsche Bewegungsgleichung  $F = \dot{p}$ .

Das Prinzip der stationären Wirkung ist nun die Verallgemeinerung von Gleichung (2.2) (zusammen mit Gleichung (2.1)) auf alle physikalischen Theorien. Da sowohl Gravitation als auch die Theorien des Standardmodells keine Teilchen-, sondern Feldtheorien sind, tritt an die Stelle der Lagrangefunktion  $L$  die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$ ,

$$L = \int \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi', \phi, t) d^3x \quad ,$$

wobei  $\phi$  die Felder der Theorie bezeichnet. Damit läßt sich gemäß Gleichung (2.1) die Wirkung als

$$S = \int \mathcal{L}(\dot{\phi}, \phi', \phi, t) d^4x \quad (2.3)$$

definieren.

Aus dem Prinzip der stationären Wirkung  $\delta S = 0$  lassen sich die Bewegungsgleichungen aller bekannten Kräfte herleiten.

### 2.1.1.2 Eichinvarianz

Das zweite fundamentale Konzept, daß für alle bekannten Theorien gilt, ist die Existenz von *Symmetrien*. In der Theoretischen Physik bedeutet Symmetrie eine Invarianz unter Transformationen einer bestimmten Gruppe. Konkret lassen sich aus der Invarianz der Lagrangefunktion mit Hilfe des *Noether-Theorems* Erhaltungsgrößen der Theorie herleiten[Noe18].

Mit der Entwicklung des Standardmodells wurde jedoch klar, daß den Symmetriegruppen noch eine wesentlich größere Bedeutung zukommt, nämlich die Beschreibung der existierenden Naturkräfte an sich: Zu jeder Wechselwirkung existiert nämlich eine Lagrangedichte, die unter einer ihr eigenen Gruppe invariant ist. Durch Anwendung des Prinzips der stationären Wirkung auf diese Lagrangedichte lassen sich dann die Theorien für die fundamentalen Naturkräfte herleiten.

## 2.1.2 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik umfaßt drei Wechselwirkungen: die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Die Symmetriegruppen der Lagrangedichten dieser Wechselwirkungen sind  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(3)$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> $\mathbf{SU}(n)$  bezeichnet die Gruppe der unitären Matrizen der Dimension  $n$  mit der Determinante 1.

Die Gruppe  $\mathbf{SU}(3)$  beschreibt die starke Kernkraft, die zugehörige Theorie wird als *Quantenchromodynamik* bezeichnet. Da die Quantenchromodynamik eine *Yang-Mills-Theorie* ist, also eine nicht-abelsche Eichfeldtheorie, ist ihre quantitative Beschreibung höchst komplex und daher seit ihrer Entdeckung ein hochaktuelles Forschungsgebiet der Physik.

Die Gruppe  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$  beschreibt im Rahmen einer vereinheitlichten Theorie, der *elektroschwachen Wechselwirkung*, die elektromagnetische und die schwache Kraft. Auch diese Theorie ist eine Yang-Mills-Theorie.

Einige bekannte Diskrepanzen zwischen der naiven Anwendung der obigen Prinzipien und der experimentellen Realität konnten innerhalb des Standardmodells gelöst werden. Dazu gehören:

- die *Quarkmischung*, d.h. das Phänomen, daß Masseneigenzustände des Quarks keine Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung sind, sondern über eine unitäre Matrix, die sogenannte Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) verknüpft sind[KM73].
- die Massen der Eichbosonen  $W^\pm$  und  $Z$  der schwachen Kraft, die scheinbar der Symmetrie  $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{SU}(2)$  widersprechen, aber durch die *spontane Symmetriebrechung* erklärt werden: Der *Higgs-Mechanismus* zeigt auf, daß trotz der Symmetrie der Lagrangedichte die Symmetrie des eingenommenen Grundzustands des physikalischen Systems gebrochen sein kann, wodurch die Eichbosonen eine Masse erhalten[Hig64].<sup>3</sup>

Trotz des hohen Grades an Symmetrie hat das Standardmodell noch einige freie Parameter: Dies sind die Kopplungskonstanten der Wechselwirkungen, die Massen der Elementarteilchen, die Anzahl der Teilchenfamilien, die CKM-Matrix und die Naturkonstanten  $\hbar$  und  $c$ .

Der Erfolg des Standardmodells der Teilchenphysik ist ungebrochen. Mit ihm läßt sich die überwältigende Mehrheit der heutigen Teilchenexperimen-

---

<sup>3</sup>Die Gültigkeit des Higgs-Mechanismus setzt jedoch ein weiteres Teilchen voraus, das *Higgs-Boson*, dessen experimenteller Nachweis bislang noch aussteht.

te insbesondere in Teilchenbeschleunigern erklären. Dennoch gibt es einige grundlegende Probleme, so z.B. die Frage, wie sich die verschiedenen Konstanten im Standardmodell erklären bzw. herleiten lassen. Besonders unklar ist der Zusammenhang mit der Gravitation, die im Standardmodell nicht beschrieben wird.

### 2.1.3 Die Gravitation

Die Gravitation wird beschrieben durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie[Ein16]. Im Gegensatz zum Standardmodell beschreibt die Allgemeine Relativitätstheorie die Gravitation nicht als Wechselwirkung zwischen Massen, sondern zwischen der Materie und der Geometrie der Raumzeit. Die dynamische Variable, das Feld der Gravitation ist der metrische Tensor  $g_{\mu\nu}$ . Er beschreibt die Geometrie der Raumzeit. Hier liegt bereits ein fundamentaler Unterschied zwischen Gravitation und dem Standardmodell: Das Standardmodell beschreibt (Quanten-)Felder, die auf einer Hintergrundraumzeit definiert sind, während in der Gravitation diese Raumzeit selbst die dynamische Variable ist. Auch ist die Allgemeine Relativitätstheorie keine Quanten- sondern eine klassische Feldtheorie.

Aus der Wirkung der Gravitation

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g} R d^4x \quad (2.4)$$

ergeben sich die Einstein-Gleichungen im Vakuum

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R = 0 \quad .$$

Hierbei bezeichnet  $R^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} R_{\alpha\gamma\beta}^{\gamma}$  den Ricci-Tensor, wobei

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad , \quad (2.5)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (2.6)$$

den Ricci-Christoffel-Krümmungstensor bzw. die Christoffel-Symbole bezeichnen.  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  ist der Ricci-Skalar. Diese Wirkung ist eine skalare Größe, ist also invariant unter dem Wechsel des Bezugssystems, d.h. unter der *eigentlichen Lorentzgruppe*  $\mathbf{SO}(3, 1)$ .

Kombiniert man die obige Wirkung mit einem Materieteil, beschrieben durch den kanonischen *Energie-Impuls-Tensor*  $T^{\mu\nu}$ , ergeben sich die Einstein-Gleichungen in der Anwesenheit von Materie

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + 8\pi GT^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.7)$$

Die Gravitationskonstante  $G$  ist der einzige freie Parameter dieser Theorie.<sup>4</sup> Aus Gleichung (2.7) läßt sich bei gegebener Materieverteilung  $T^{\mu\nu}$  die Metrik  $g_{\mu\nu}$  und damit die Geometrie der Raumzeit bestimmen.

### 2.1.3.1 Die Schwarzschild-Lösung

In den Jahrzehnten seit der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde eine große Anzahl von Lösungen der Einstein-Gleichungen (2.7) gefunden; die wichtigsten und einfachsten unter ihnen sind die Lösungen, die eine bestimmte Symmetrie der Materieverteilung annehmen, dies sind die *Schwarzschild-Metrik*[Sch16] und die *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik*[Fri24].

Die Schwarzschild-Metrik hat die Form

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left( 1 - \frac{2MG}{r}, - \left[ 1 - \frac{2MG}{r} \right]^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta \right) \quad , \quad (2.8)$$

wobei  $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$  die üblichen Kugelkoordinaten sind. Obwohl sie als Parameter eine Masse  $M$  enthält, ist sie eine Lösung der *freien* Einsteinglei-

---

<sup>4</sup>Es ist allerdings möglich, ohne Verletzung der Symmetriebedingungen einen Term  $\Lambda g^{\mu\nu}$  mit dem freien Parameter  $\Lambda$ , der *Kosmologischen Konstante* zu addieren. Diese Konstante und ihre Größenordnung sind ebenfalls ein hochaktuelles Thema der modernen Physik, eine ausführliche Diskussion ginge jedoch weit über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinaus.



chungen, d.h.  $T^{\mu\nu} = 0$ ; die Masse  $M$  wurde aus dem Grenzfall zur klassischen Newtonschen Gravitation bestimmt. Diese Metrik hat zwei Singularitäten, eine bei  $r = 0$  und eine beim sogenannten *Schwarzschildradius*

$$r_S(M) = 2MG \quad , \quad (2.9)$$

man kann allerdings zeigen, daß nur die Singularität bei  $r = 0$  eine wirkliche, physikalische Singularität ist, während die Singularität am Schwarzschildradius ein Effekt der benutzten Koordinaten ist und durch einen Wechsel des Koordinatensystems eliminiert werden kann.

Betrachtet man die Größenordnung des Schwarzschildradius für einige bekannte Objekte wie z.B. der Sonne, für die  $r_S \approx 3$  km weit innerhalb ihres tatsächlichen Radius liegt, so wird klar, daß diese Lösung für sie nicht anwendbar ist, da ja  $T_{\mu\nu} = 0$  angenommen wurde. Die Lösung der vollen Einsteingleichungen (2.7) mit endlicher Materieverteilung zeigt, daß in diesem Fall überhaupt keine Singularitäten mehr auftreten.

Bedingt durch die Benutzung der Vakuum-Einsteingleichungen ist die Schwarzschildlösung also nur exakt gültig, wenn sich keine Materie auf Ihrem Definitionsbereich befindet, d.h. alle Materie auf die Singularität bei  $r = 0$  konzentriert ist.<sup>5</sup> Eine solche Konfiguration bezeichnet man als Schwarzes Loch.

### 2.1.3.2 Schwarze Löcher

Die Bedeutung des Schwarzschildradius erschließt sich erst, wenn man die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in einem Schwarzschild-Hintergrund betrachtet. Es stellt sich nämlich heraus, daß der Raum innerhalb des Schwarzschildradius kausal vom Außenbereich getrennt ist; es können nur Teilchen in das Gebiet innerhalb des Ereignishorizonts gelangen, nicht aber hinaus; selbst

---

<sup>5</sup>Nichtsdestotrotz ist die Schwarzschildlösung in großer Entfernung von einer gegebenen Materieverteilung näherungsweise gültig, vergleichbar etwa der Monopolnäherung einer elektrischen Ladungsverteilung.

die mit Lichtgeschwindigkeit fliegenden Photonen können den Horizont nicht verlassen.

Es ist heute bekannt, daß nach der Allgemeinen Relativitätstheorie beim Kollaps eines ausreichend großen Sterns zwangsweise ein Schwarzes Loch entsteht[OS39]. Zudem strahlen Schwarze Löcher bei ihrer Entstehung alle höheren Momente ab, so daß sie nur durch ihre Masse, ihre Ladung und ihren Drehimpuls vollständig charakterisiert sind[Isr67].

Die Tatsache, daß bei einem klassischen Schwarzen Loch die gesamte Masse auf einen Punkt konzentriert ist, und damit die Quanteneffekte des Standardmodells gleichermaßen wie die Gravitation zum Tragen kommen müssen, zeigt, daß zur vollständigen Beschreibung eines Schwarzen Loches eine vereinheitlichende Theorie nötig ist, die beide Phänomene vereint. Bis eine solche Theorie der Quantengravitation verfügbar ist, können nur näherungsweise Betrachtungen angestellt werden, wie z.B. die von Stephen Hawking, der 1975 zeigte, daß im Grenzfall schwacher Krümmung am Schwarzschildradius, also für hinreichend große Schwarze Löcher, tatsächlich thermische Strahlung vom Schwarzen Loch emittiert wird[Haw75]. Die Temperatur dieser Strahlung ist invers proportional zur Masse  $M_{SL}$  des Schwarzen Lochs:

$$T = \frac{\hbar c^3}{16\pi G M_{SL} k} \quad (2.10)$$

Hawking ermittelte dieses Resultat, indem er Quantenfeldtheorie auf einer gekrümmten Raumzeit betrachtete.

### 2.1.4 Hinweise auf eine Minimale Länge durch die Verbindung von Standardmodell und Gravitation

Bevor im folgenden näher auf verschiedene Theorien eingegangen werden soll, die bestimmte Probleme der heutigen Physik zu lösen versuchen und außerdem eine Minimale Länge vorhersagen, soll kurz gezeigt werden, daß auch die

Verbindung von Gravitation und Quantentheorie schon eine Minimale Länge für jeden Meßprozeß vorhersagt[Mea64].

Zur Messung der Position eines Teilchens muß ein Streuprozeß mit einem Testteilchen durchgeführt werden. Dieses habe die Ruhemasse  $m$  und den Impuls  $p$ . Energie und Geschwindigkeit sind dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m^2 + p^2} \quad , \\ v &= \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}} \quad . \end{aligned}$$

In der Quantentheorie ist ein solcher Streuprozeß eindeutig zu berechnen und resultiert nicht in einer Minimalen Länge. Erst die Kombination mit der Gravitation, d.h. die Störung in Form der Raumzeitkrümmung, die das Testteilchen im Laborsystem hervorruft, resultiert in einer Minimalen Länge:

Zunächst gilt natürlich mit der de Broglieschen Relation  $E = 1/\lambda$ , daß man eine Mindestunschärfe von

$$\Delta x \gtrsim \lambda = \frac{1}{E} \tag{2.11}$$

bedingt durch die endliche Energie des Testteilchens hat. Rein quantenmechanisch könnte man die Energie des Testteilchens immer weiter erhöhen, um eine immer bessere Ortsauflösung zu erreichen. Durch seine gravitative Wechselwirkung erzeugt das Testteilchen aber eine zusätzliche Störung am System. Die Größe dieser Störung soll nun abgeschätzt werden.

Dazu wird ein Koordinatensystem mit der  $x^1$ -Achse in Bewegungsrichtung des Testteilchens nach dem Streuprozeß gewählt; zu diesem Zeitpunkt ist die Weltlinie des Testteilchens also  $x^1 = vx^0$ . Das gemessene Teilchen sei ein Stück „hinter“ dem Testteilchen, es gilt also für seine Koordinate  $x^1 < vx^0$ .

Nun transformiert man in das Ruhesystem des Testteilchens (im Folgenden mit gestrichenen Koordinaten bezeichnet): Dort bewegt sich das gemess-

sene Teilchen entlang der negativen  $x^1$ -Achse; es erfährt dabei eine durch die Energiedichte des Testteilchens hervorgerufene Raumzeitkrümmung, die man - da das Testteilchen in diesem System ruht - durch die Schwarzschildmetrik (2.8) beschreiben kann:

$$g' = \begin{pmatrix} 1 + 2\phi' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{1+2\phi'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi' = -\frac{Gm}{|x^1|} = \frac{Gm}{x^1} \quad . \quad (2.12)$$

Die ungestrichenen und die gestrichenen Koordinaten sind verknüpft durch die Lorentztransformation

$$\begin{aligned} x'^0 &= \frac{x^0 - vx^1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \\ x'^1 &= \frac{x^1 - vx^0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \\ x'^2 &= x^2 \quad , \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit der Inversen

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{x'^0 + vx'^1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \\ x^1 &= \frac{x'^1 + vx'^0}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \\ x^2 &= x'^2 \quad , \\ x^3 &= x'^3 \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Um nun die Form des metrischen Tensors (2.12) im ungestrichenen System zu erhalten, benutzt man die allgemeine Transformationsregel für kovariante Tensoren zweiter Stufe:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma} \quad .$$

Aus (2.12), (2.13) und (2.14) folgt dann:

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1+2\phi}{1+2\phi(1-v^2)} + 2\phi & \frac{-2\phi v}{1+2\phi(1-v^2)} - 2v\phi & 0 & 0 \\ \frac{-2\phi v}{1+2\phi(1-v^2)} - 2v\phi & \frac{-1+2\phi v^2}{1+2\phi(1-v^2)} + 2v^2\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi = \frac{\phi'}{1-v^2} = -\frac{Gm}{vx^0 - x^1} = -\frac{Gm}{r}. \quad (2.15)$$

Hier ist  $r = vx^0 - x^1$  Abstand der beiden Teilchen während des Streuprozesses. Für ein hochenergetisches Testteilchen, das hier betrachtet werden soll, kann man diese Metrik noch weiter vereinfachen, da dann  $v \rightarrow 1$  und  $E \approx m$ , d.h.

$$g = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4GE}{r} & \frac{4GE}{r} & 0 & 0 \\ \frac{4GE}{r} & -1 - \frac{4GE}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Dies ist die Metrik, in der sich das gemessene Teilchen während des Streuprozesses befindet. Seine Weltlinie muß stets zeitartig sein, das bedeutet

$$ds^2 = (g_{00} + 2g_{10}u + g_{11}u^2)(dx^0)^2 \geq 0, \quad ,$$

wobei  $u = dx^1/dx^0$  die Geschwindigkeit des gemessenen Teilchens in  $x^1$ -Richtung ist und man die Geschwindigkeiten in  $x^2$ - und  $x^3$ -Richtung vernachlässigt. Einsetzen der Metrik (2.16) ergibt dann:

$$u \geq \frac{\frac{4GE}{r} - 1}{\frac{4GE}{r} + 1}. \quad (2.17)$$

Die gravitative Wechselwirkung zwischen beiden Teilchen ist groß, solange

$$\frac{4GE}{r} \gg 1 \quad (2.18)$$

gilt. Da die exakte Bewegung des Teilchens nicht interessiert, genügt es, einen mittleren Abstand  $r$  zu betrachten, innerhalb dessen die Wechselwirkung stark ist. Da die Geschwindigkeit des Testteilchens sicher nicht größer sein kann als 1, gilt für die Zeit  $t$ , die es benötigt, um diesen Bereich der Wechselwirkung innerhalb  $r$  zu durchmessen  $t \gtrsim r/(1-u)$ . Die Strecke, die sich das gemessene Teilchen in dieser Zeit bewegt, und damit die Unschärfe der Messung, ergibt sich damit zu:

$$\Delta x = ut \gtrsim \frac{ru}{1-u} \stackrel{(2.17)}{\cong} r\left(\frac{GE}{r} - 1\right) \stackrel{(2.18)}{\gtrsim} GE$$

Dieses Ergebnis kombiniert mit (2.11) liefert

$$\Delta x \gtrsim GE = \frac{G}{\Delta x}$$

und damit

$$\Delta x \gtrsim \sqrt{G} = l_{Pl} \quad .$$

Die durch die Gravitation des Testteilchens hervorgerufene Gravitation erzeugt also eine Unschärfe, die bei höherer Energie des Testteilchens stärker wird, und damit eine minimale Längenunschärfe verursacht. Dieselbe Vorhersage machen heutige Theorien, die sich jenseits des Standardmodells bewegen.

## 2.2 Stringtheorie

Die Stringtheorie wird von vielen Physikern als der beste Kandidat für eine Große Vereinheitlichende Theorie gesehen, also eine Theorie, die alle bekannten Kräfte im Universum erklärt. Die Stringtheorie geht dabei davon aus, daß die fundamentalen Konstituenten der Materie ebenso wie die Überträger der Wechselwirkungen keine Punktteilchen, sondern Strings sind, also ein-dimensional ausgedehnte Objekte. Die Quantisierung dieser Strings bringt

eine Fülle von Schwingungszuständen hervor, die sowohl den verschiedenen Teilchen des Standardmodells entsprechen, als auch als Überträger der Gravitation fungieren.

Bemerkenswert ist, daß die Stringtheorie einer der fundamentalen Behauptungen Einsteins widerspricht: Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Gravitation keine klassische Kraft, sondern Ausdruck der Tatsache, daß unsere Raumzeit nicht flach, sondern intrinsisch gekrümmt ist. Strings hingegen existieren auf einer flachen Hintergrundraumzeit, d.h. die Gravitation wird wie die anderen Kräfte in der Stringtheorie zu einer durch Quanten vermittelten Wechselwirkung. Um zu verstehen, wie es möglich wird, die Gravitation als Wechselwirkung von Strings zu interpretieren, soll zunächst die kanonische Quantisierung der Gravitation erläutert werden.

### 2.2.1 Quantisierte Gravitation

Die Einsteingleichungen (2.7) sind, wie die Betrachtung von Gleichung (2.5) und (2.6) lehrt, nichtlinear in ihrer dynamischen Variable, der Metrik  $g_{\mu\nu}$ . Um eine perturbative Beschreibung im Rahmen einer Quantenfeldtheorie zu erreichen, geht man daher davon aus, daß die Raumzeit „fast“ flach ist, d.h.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad ,$$

wobei  $h_{\mu\nu}$  eine schwache Störung der flachen Raumzeit ist,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ . In erster Ordnung in  $h$  lauten die Christoffel-Symbole dann<sup>6</sup>

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \approx \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} h_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} h_{\kappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} h_{\mu\nu} \right)$$

---

<sup>6</sup>Weitere Berechnungen vereinfachen sich insbesondere dadurch, daß das Hoch- und Herunterstellen von Indizes von  $h_{\mu\nu}$  mit der flachen Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  geschehen kann, da alle weiteren Terme von höherer als linearer Ordnung in  $h_{\mu\nu}$  sind.

und damit der Ricci-Tensor:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\approx \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \\ &= \frac{1}{2} \left( \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} h_\nu^\lambda - \frac{\partial^2}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} h_\mu^\lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda \right) . \end{aligned}$$

Im quellenfreien Fall  $T_{\mu\nu} = 0$  lauten die Einsteingleichungen (2.7) dann[Wei72]

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} h_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} h_\nu^\lambda + \frac{\partial}{\partial x^\nu} h_\mu^\lambda \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} h_\lambda^\lambda = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Dies ist die linearisierte Ortsraum-Bewegungsgleichung für die Störung der Metrik  $h_{\mu\nu}$ .

Vor der Quantisierung dieser Gleichung bietet es sich an, zunächst ihre Eichsymmetrien betrachten und die tatsächlichen physikalischen Freiheitsgrade zu ermitteln, und dann die Quantisierung in einer möglichst praktischen Eichung durchzuführen.

Im Impulsraum lautet Gleichung (2.19)

$$p^2 h^{\mu\nu} - p_\lambda (p^\mu h^{\nu\lambda} + p^\nu h^{\mu\lambda}) + p^\mu p^\nu h_\lambda^\lambda = 0 \quad . \quad (2.20)$$

Es kann gezeigt werden, daß sie invariant unter der Eichtransformation

$$\delta h^{\mu\nu} = i p^\mu \epsilon^\nu + i p^\nu \epsilon^\mu$$

ist, wobei  $\epsilon^\mu(p)$  ein infinitesimaler Eichvektor ist. Um eine geeignete Eichung zu finden, betrachtet man die Variationen der Objekte<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \delta h^{++} &= 2i p^+ \epsilon^+ \quad , \\ \delta h^{+-} &= i p^+ \epsilon^- + i p^- \epsilon^+ \quad , \\ \delta h^{+I} &= i p^+ \epsilon^I + i p^I \epsilon^+ \quad . \end{aligned}$$

---

<sup>7</sup>Es werden Lichtkegelkoordinaten benutzt, d.h.  $x^\pm = 1/\sqrt{2}(x^0 \pm x^1)$ , und  $x^I$  bezeichnet die restlichen Koordinaten.



Dies bedeutet, daß man durch geeignete Eichung von  $\epsilon^+$  den Eintrag  $h^{++} = 0$  setzen kann, und ebenso durch Wahl von  $\epsilon^-$  und  $\epsilon^I$  die Einträge  $h^{+-}$  und  $h^{+I}$ . Diese Eichung, in der

$$h^{++} = h^{+-} = h^{+I} = 0 \quad (2.21)$$

ist, wird als *Lichtkegeleleichung* bezeichnet. In dieser Eichung vereinfacht sich die linearisierte Einsteingleichung im Impulsraum (2.20). Betrachtet man nämlich die ++-Komponente dieser Gleichung, ergibt sich

$$(p^+)^2 h_\lambda^\lambda = 0 \quad ,$$

woraus folgt, daß  $h_\lambda^\lambda = 0$  bzw. da

$$h_\lambda^\lambda = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -2h^{+-} + h^{II}$$

ist, folgt aus  $h_\lambda^\lambda = 0$  in der Lichtkegeleleichung (2.21) direkt  $h^{II} = 0$ , d.h. die Spur der Matrix  $h^{IJ}$  verschwindet.

Mit  $h_\lambda^\lambda = 0$  vereinfacht sich aber auch Gleichung (2.20) zu

$$\begin{aligned} p^2 h^{\mu\nu} - p_\lambda (p^\mu h^{\nu\lambda} + p^\nu h^{\mu\lambda}) &= \\ p^2 h^{\mu\nu} - p^\mu (p_\lambda h^{\nu\lambda}) + p^\nu (p_\lambda h^{\mu\lambda}) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Setzt man  $\mu = +$  folgt in der Lichtkegeleleichung (2.21) unmittelbar  $p^+(p_\lambda h^{\nu\lambda}) = 0$  und damit

$$p_\lambda h^{\nu\lambda} = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Betrachtet man die verschiedenen Komponenten, ergibt sich

$$-p^+ h^{I-} - p^- h^{I+} + p_J h^{IJ} = 0 \rightarrow h^{I-} = \frac{1}{p^+} p_J h^{IJ}$$

und

$$-p^+ h^{--} - p^- h^{-+} + p_I h^{-I} = 0 \rightarrow h^{--} = \frac{1}{p^+} p_I h^{-I} \quad .$$

Damit lassen sich alle --Komponenten von  $h^{\mu\nu}$  aus den Elementen  $h^{IJ}$  bestimmen. Da die +-Komponenten in der Lichtkegelequation (2.21) verschwinden, sind die einzigen physikalischen Freiheitsgrade die  $h^{IJ}$ .

Durch Gleichung (2.22) vereinfacht sich Gleichung (2.20) schließlich zu

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

wobei die nicht trivial erfüllten Komponenten lediglich

$$p^2 h^{IJ} = 0$$

sind. Es handelt sich hierbei um eine Wellengleichung, die analog zur Elektrodynamik quantisiert werden kann.<sup>8</sup> Dazu muß man das Feld  $h^{IJ}$  in Erzeuger- und Vernichteroperatoren entwickeln und ein Vakuum  $|0\rangle$  definieren. Damit lautet ein Ein-Graviton-Zustand dann

$$\sum_{I,J} \zeta_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |0\rangle \quad , \quad \zeta_{II} = 0 \quad , \quad (2.23)$$

wobei  $\zeta_{IJ}$  der symmetrische, spurfreie Polarisationsensor ist. Diese Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften von  $h^{IJ}$  [Zwi04].

Verfolgt man nun den Weg der Quantenfeldtheorie weiter und versucht, eine Störungstheorie der Gravitonen zu entwickeln, stellt man fest, daß diese Theorie nicht renormierbar ist. Da Strings jedoch ausgedehnte Objekte sind und keine Punktteilchen, besteht in der Stringtheorie die Hoffnung, die Probleme der Renormierung lösen zu können. Dazu muß jedoch das Graviton einer der Anregungszustände eines Strings sein.

---

<sup>8</sup>Für eine ausführliche Einführung in die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes siehe z.B. [Mes79].

## 2.2.2 Der relativistische quantisierte geschlossene String

Als Stringkoordinaten eines Strings bezeichnet man die Zuordnung des intrinsischen 2-dimensionalen Raums des Strings in die reale Raumzeit, also

$$\tau, \sigma \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma) \quad .$$

Man kann zeigen, daß diese Stringkoordinaten die Wellengleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0$$

erfüllen müssen, deren generelle Lösung bekanntlich

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) \quad (2.24)$$

ist.<sup>9</sup> Weiterhin muß für einen geschlossenen String die Periodizitätsbedingung

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$$

gelten. Diese Bedingung führt dazu, daß die links- und rechtslaufenden Komponenten der Lösung (2.24) nicht unabhängig sind. Definiert man nämlich

$$\begin{aligned} u &= \tau + \sigma \quad , \\ v &= \tau - \sigma \end{aligned}$$

lautet die Periodizitätsbedingung in die links- und rechtslaufenden Komponenten aufgespalten

$$X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi)$$

---

<sup>9</sup>Für eine detaillierte Ableitung der Stringquantisierung siehe z.B. [Zwi04].

oder, dazu äquivalent,

$$X_L^\mu(u) - X_L^\mu(u + 2\pi) = X_R^\mu(v - 2\pi) - X_R^\mu(v) \quad .$$

Diese Gleichung zeigt, daß die beiden Komponenten abhängig voneinander sind. Quantisiert man nun die Moden des Strings, ergeben sich entsprechend separate links- und rechtslaufende Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $\alpha_n^I, \alpha_n^{I\dagger}, \bar{\alpha}_n^I, \bar{\alpha}_n^{I\dagger}$ . Der allgemeine Stringbasisvektor ist dann

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (\alpha_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[ \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{\alpha}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, p_T\rangle \quad ,$$

$|p^+, p_T\rangle$  ist der Grundzustand des Strings.<sup>10</sup>

Die Abhängigkeit der beiden Komponenten in der Lösung (2.24) übersetzt sich nach der Quantisierung in die Bedingung, daß die Anzahl der links- und rechtslaufenden Moden im physikalischen Zustandsraum des quantisierten Strings gleich sein müssen, d.h. wenn

$$\begin{aligned} N^\perp &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad , \\ \bar{N}^\perp &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J} \quad , \end{aligned}$$

dann muß für die wirklichen Zustände

$$N^\perp = \bar{N}^\perp$$

gelten. Weiterhin lassen sich die Massen der Zustände bestimmen durch

$$\frac{1}{2} \alpha' M^2 = N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \quad ,$$

wobei  $\alpha'$  der freie Parameter der Stringtheorie, die Stringspannung ist.

---

<sup>10</sup>Der Index der Nicht-Lichtkegel-Koordinaten läuft hier nun von 2 bis 25, da die Lorentzinvarianz im Laufe der Quantisierung die Anzahl der Raumzeitdimensionen auf 26 festlegt.

Der Grundzustand des geschlossenen Strings  $|p^+, p_T\rangle$  mit  $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$  hat ein negatives Massenquadrat  $M^2 = -4/\alpha'$  und repräsentiert damit ein *Tachyon*. Die Implikationen dieses Tachyons des geschlossenen Strings sind noch nicht vollständig verstanden[HMT04].

Die ersten angeregten Zustände  $\alpha_1^{I\dagger}\bar{\alpha}_1^{J\dagger}|p^+, p_T\rangle$  mit  $N^\perp = \bar{N}^\perp = 1$  haben die Masse  $M = 0$ . Der allgemeine Zustand lautet

$$\sum_{I,J} R_{IJ} \alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{J\dagger} |p^+, p_T\rangle \quad ,$$

wobei  $R_{IJ}$  zunächst eine beliebige quadratische Matrix ist. Jede Matrix lässt sich in drei linear unabhängige Teile spalten,

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ} \quad ,$$

einen symmetrischen spurlosen Teil, einen antisymmetrischen Teil und einen diagonalen Spurteil. Damit lassen sich aber auch die Zustände in diese drei Gruppen einteilen:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} \alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{J\dagger} |p^+, p_T\rangle \quad , \quad (2.25)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} \alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{J\dagger} |p^+, p_T\rangle \quad , \quad (2.26)$$

$$S' \alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{I\dagger} |p^+, p_T\rangle \quad . \quad (2.27)$$

Die Zustände (2.26) sind Ein-Teilchen-Zustände des *Kalb-Ramond-Felds*, es ist eine Generalisierung des Maxwell-Feldes für gewöhnliche Teilchen und koppelt auch in ähnlicher Weise an die Strings. Der Zustand (2.27) ist ein masseloses, skalares Feld, das *Dilaton*.

Von größtem Interesse sind die Zustände (2.25):  $\hat{S}_{IJ}$  ist eine symmetrische, spurlose Matrix, hat also die gleichen Eigenschaften wie der Polarisationsensor der Gravitonen in (2.23). Identifiziert man nun auch noch die Basiszustände

$$\alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{I\dagger} |p^+, p_T\rangle \leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |0\rangle \quad ,$$

so lassen sich die Zustände (2.25) als Ein-Graviton-Zustände interpretieren:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} \alpha_1^{I\dagger} \bar{\alpha}_1^{J\dagger} |p^+, p_T\rangle \leftrightarrow \sum_{I,J} \zeta_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |0\rangle \quad .$$

Diese Identifizierung erlaubt somit die Vermutung, daß die Stringtheorie auch eine quantisierte Theorie der Gravitation enthalten kann und macht sie damit zu einem der vielversprechendsten Kandidaten für eine Große Vereinheitlichende Theorie.

### 2.2.3 Stringtheorie und die Minimale Länge

Strings sind keine Punktteilchen, sondern räumlich ausgedehnte Objekte. Da jede räumliche Auflösung durch einen Streuprozeß geschehen muß, ist klar, daß die maximal mögliche Auflösung mit der Länge des Strings zusammenhängen muß.

Eine Untersuchung der String-Streuung bei hohen Energien zeigt, daß die Oberfläche der streuenden Strings sich verhält wie

$$O \approx \frac{\sqrt{s}}{N} \quad ,$$

wobei  $\sqrt{s}$  die Schwerpunktsenergie und  $N$  die betrachtete Ordnung der Störungsreihe ist[GM88]. Dies bedeutet, daß der Versuch, eine bessere Ortsauflösung durch eine höhere Energie zu erreichen, nur dazu führt, daß sich die effektive Größe des Strings erhöht und damit eine zusätzliche Unschärfe erzeugt; ein Effekt, der bei gewöhnlichen Punktteilchen nicht existiert.

Eine alternative Betrachtungsweise ermöglicht die Untersuchung der Übergangsamplitude eines Strings auf einem Gitter:

$$Z = \lim_{M,N \rightarrow \infty} \prod_{i,j} \int^{D} dx_{i,j} \exp \left( - \frac{1}{2\lambda^2} \sum (\sigma(x_{i+1,j}; x_{i,j}) + \sigma(x_{i,j+1}; x_{i,j})) \right) \quad ,$$

wobei

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\alpha'\hbar}{c^2}}$$

die mit der Stringsannung  $\alpha'$  verknüpfte charakteristische Länge der Stringtheorie ist,  $\sigma(x, y)$  das Abstandsqadrat zweier Gitterpunkte und  $(M, N)$  die Größe des betrachteten Gitters. Man kann zeigen, daß unabhängig von der Gittergröße der mittlere Abstand zwischen den Gitterpunkten konstant bleibt, d.h.

$$\langle \sigma(x_{i+1,j}; x_{i,j}) \rangle \approx \langle \sigma(x_{i+2,j}; x_{i,j}) \rangle \approx \lambda^2 \quad ,$$

was wiederum zeigt, daß eine invariante minimale observierbare Länge  $\lambda$  in der Stringtheorie existiert[KPP90]. Eine weitere Untersuchung verschiedener Konfigurationen von  $(M, N)$ -Gittern und ihre Interpolation zeigt, daß die Effekte dieser Minimalen Länge sich qualitativ in der veränderten Unschärferelation

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \text{const.} \cdot \alpha' \Delta p \tag{2.28}$$

zusammenfassen lassen[KPP90, Wit96].

## 2.3 Loop-Quantengravitation

Im Gegensatz zur Stringtheorie erhebt die Loop-Quantengravitation (LQG) nicht den Anspruch, eine Große Vereinheitlichende Theorie zu sein, sondern bietet eine Möglichkeit der Quantisierung der Gravitation. Dabei versucht die Loop-Quantengravitation nicht wie die Stringtheorie die Gravitation als Eichfeld auf einer Hintergrundraumzeit zu erklären, sondern nimmt Einsteins Prinzip einer hintergrundunabhängigen Theorie ernst: Da die Allgemeine Relativitätstheorie eine Theorie ist, die keine vorgegebene Hintergrundmannigfaltigkeit voraussetzt, sondern deren dynamische Variable  $g_{\mu\nu}$  die Raumzeit selbst beschreibt, muß dasselbe auch für eine quantisierte Theorie der Gravitation gelten.

### 2.3.1 Neue Variablen der Allgemeinen Relativitätstheorie und Quantisierung

Die Grundlage der Loop-Quantengravitation ist die Reformulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie in den *Ashtekar-Variablen*[Ash86]. Hierbei wird zunächst die vierdimensionale Raumzeit  $\mathcal{M}$  zerlegt in eine Zeitachse und eine 3-dimensionale raumartige Untermannigfaltigkeit  $\Sigma$ ,

$$\mathcal{M} = \mathbb{R} \otimes \Sigma$$

und die auf der Untermannigfaltigkeit  $\Sigma$  induzierte Metrik  $q_{ab}$  wird analog dem Vierbein-Formalismus in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch eine Dreibein-Dichte  $E_i^a$  dargestellt[GR00]:

$$qq^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij} \quad .$$

Dieses Feld ist eine Vektordichte  $E_i^a$  auf  $\Sigma$ , es repräsentiert also konjugierte Impulse zu einem Eichfeld  $A_a^i$  mit den entsprechenden Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} \{E_j^a(x), A_b^i(y)\} &= \delta_b^a \delta_j^i \delta(x-y) \quad , \\ \{E_j^a(x), E_i^b(y)\} = \{A_j^a(x), A_i^b(y)\} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

In diesen Variablen läßt sich die relativistische Hamilton-Funktion als

$$H = F_{ab}^{ij} E_i^a E_j^b$$

schreiben, wobei  $F_{ab}^{ij}$  die Krümmung der  $A_i^a$  ist[Per04]. Diese Funktion wird im Rahmen einer kanonischen Quantisierung zum Operator, dessen Hilbertraum analysiert wird.

Als Basiszustände des Hilbertraums eignen sich die von Roger Penrose entwickelten *Spin-Netzwerk-Zustände*[Pen71]. Dies sind im Fall der Loop-Quantengravitation gerichtete Graphen, deren Kanten mit irreduziblen Repräsentationen der  $\mathbf{SU}(2)$  bewertet werden. Die Gesamtheit aller Gra-



phen ist abzählbar und bildet eine vollständige Basis des Hilbertraums. Die Zeitentwicklung der Spin-Netzwerke läßt sich dann als *Spin-Schaum* visualisieren[Bae98].

### 2.3.2 Eigenwerte für Längen, Flächen und Volumen

Ein erstes fundamentales Ergebnis der Loop-Quantengravitation war die Quantisierung des Flächenoperators. In den oben angeführten Variablen ist die Größe  $A_S$  einer Fläche  $S$  gegeben durch ein explizites Funktional von  $E_i^a$ :

$$A_S[E_i^a] = \int_S \sqrt{E_i^a E_j^b \delta^{ij} n_a n_b} dA \quad ,$$

wobei  $n_a$  der Normalenvektor auf der Fläche ist. Nach der Quantisierung wird dieser Ausdruck zum Operator und in der Tat sind die Spin-Netzwerk-Zustände Eigenzustände dieses Flächenoperators mit den Eigenwerten[Per04]

$$\hat{A}_S |\psi\rangle = 8\pi G \gamma \sqrt{j(j+1)} |\psi\rangle \quad ,$$

$\gamma$  ist der *Immirzi-Parameter*, ein nicht näher bestimmter Parameter, der im Verlauf der Umformulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie in die neuen Variablen auftritt. Seine Bedeutung erschließt sich aus obiger Formel, er ist mit der Größe des Quantums der Fläche verknüpft.

Auch für die Messung einer Länge wurde in der Loop-Quantengravitation ein Operator konstruiert[Thi98]. Die Analyse seines Spektrums zeigt, daß seine Eigenwerte diskret sind und daß es einen kleinsten Eigenwert von der Größenordnung

$$l \gtrsim \sqrt{G}$$

gibt. Damit ist in der Loop-Quantengravitation die Länge explizit quantisiert und es gibt ein kleinstes Längenquantum.

## 2.4 Weitere Theorien einer Minimalen Länge

Neben den beiden fundamentalen Theorien, die heute eine Möglichkeit der Quantisierung der Gravitation versprechen, der Stringtheorie und der Loop-Quantengravitation, gibt es noch weitere Theorien, die andere, speziellere Probleme des Standardmodells betrachten. Auch unter diesen Theorien finden sich zahlreiche Beispiele, die die Bedeutung einer Minimalen Länge unterstreichen.

### 2.4.1 Nichtkommutative Geometrie

Betrachtet man ein Teilchen in der Ebene  $(x^1, x^2)$  in einem dazu senkrechten, konstanten magnetischen Feld, so lautet die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \dot{x} \cdot \vec{A}$$

mit dem Potential

$$\vec{A} = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} x^j \quad .$$

Die Vertauschungsrelationen für den kanonischen Impuls  $\vec{\pi} = \vec{p} + \vec{A}$  als quantenmechanischer Operator folgen direkt aus der klassischen Poisson-Klammer

$$\{a, b\} = \sum_i \left( \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} \right)$$

mit

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

und lauten dann

$$[\hat{\pi}^i, \hat{\pi}^j] = i B \epsilon^{ij} \quad .$$

Die einzelnen Komponenten des Impulsraums kommutieren also nicht. Im Falle eines sehr starken Magnetfelds, also  $m \rightarrow 0$  lautet die Lagrangefunktion

$$\lim_{m \rightarrow 0} \mathcal{L} = -\frac{B}{2} \dot{x}^i \epsilon_{ij} x^j \quad ,$$

und die Koordinaten  $x^1, x^2$  werden zueinander konjugierte Variablen mit dem Kommutator

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = \frac{i}{B} \epsilon^{ij} \quad .$$

Nichtkommutativität des Raumes ist also ein Konzept, das schon in der Quantenmechanik bekannt ist.

In den Anfangszeiten der Quantenfeldtheorie, als man die auftretenden Unendlichkeiten noch nicht mit Hilfe der Renormierungstheorie beseitigen konnte, entstand die Idee, die Nichtkommutativität der Raumzeitkomponenten zum Prinzip zu erheben, um einen natürlichen Regulator zu erhalten[Sny47]. In diesem Fall existieren nämlich keine Punktteilchen mehr, da zwischen den entsprechenden Komponenten der Raumzeit eine Unschärferelation

$$\Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{1}{2} |\theta^{ij}|$$

gilt, die aus dem veränderten Kommutator der Form

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i \theta^{ij}$$

folgt. In den 1980er Jahren wurde diese Theorie von Alain Connes aufgegriffen und weiterentwickelt[Con85]. Motivation war unter anderem auch die bereits erwähnte Vermutung, daß das Konzept der differenzierbaren glatten Mannigfaltigkeit auf sehr kleinen Größenordnungen, auf denen Gravitation und Quantentheorie gleichermaßen wichtig sind, zusammenbricht. Später zeigten sich enge Zusammenhänge der Stringtheorie mit der nichtkommutativen Geometrie[Wit86, LS99].

Die nichtkommutative Geometrie negiert das Konzept des Punktteilchens, indem sie eine fundamentale Unschärfe für die Ortsauflösung formuliert. Damit realisiert sie explizit die Idee einer Minimalen Länge.

## 2.4.2 Deformierte Spezielle Relativitätstheorie

Neben der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung existiert im Universum auch eine Infrarothintergrundstrahlung, die von der Sternbildung im frühen Universum stammt. Ihr Spektrum ist gut bekannt[MS98]. Diese Infrarotstrahlung absorbiert hochenergetische Photonen bei Ihrer Bewegung durch das Universum durch *Photon-Photon-Paarproduktion*. Bei der Analyse der Gammastrahlung von den Galaxien *Markarian 501* und *421* stellte man jedoch fest, daß der Fluß und die beobachteten Energien der Photonen gemessen an der erwarteten Absorptionsrate zu hoch waren[PM00].

Eine Lösung dieses Problems verspricht die Einführung einer veränderten Energie-Impuls-Relation der Form[AC02]

$$E^2 - p^2 - m^2 + f(E, p, m, L_p) = 0 \quad .$$

$L_p$  ist hierbei die Planck-Länge. Da eine solche Relation die gewöhnliche Lorentzsymmetrie verletzt, muß die Deformierte Spezielle Relativitätstheorie einen Weg finden, Beobachterunabhängigkeit und damit das Relativitätsprinzip mit Hilfe eines veränderten Transformationsverhaltens zwischen Bezugssystemen herzustellen. Insbesondere eine neu eingeführte invariante Längenskala  $L_p$  muß in allen Bezugssystemen gleich sein.

Es ist in der Tat möglich, solche deformierten Lorentztransformationen zu finden. Für die Dispersionsrelation[AC02]

$$E^2 - p^2 - m^2 - L_p p^2 E = 0 \tag{2.29}$$

lautet der Generator für einen Lorentz-Boost in die  $z$ -Richtung beispielsweise

$$B_z = i p_z \frac{\partial}{\partial E} + i \left( E + L_p E^2 + \frac{L_p p_z^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial p_z} \quad .$$

Natürlich hat eine modifizierte Dispersionsrelation weitreichende phänomenologische Konsequenzen. Eine Relation der Form (2.29) führt zu einer

Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Wellenlänge des betrachteten Lichtes:

$$v_{Licht} = 1 - \frac{L_p E}{2} \quad .$$

Da alle möglichen Beobachter dieselbe Längenskala  $L_p$  messen, da diese eine Invariante unter den deformierten Transformationen ist, zeichnet eine solche Abhängigkeit kein Bezugssystem aus. Eine solche energieabhängige Lichtgeschwindigkeit ließe sich beispielsweise durch eventuelle Laufzeitunterschiede von Photonen unterschiedlicher Energie aus Gamma-Ray-Bursts nachweisen[A<sup>+</sup>07b].

Auch in der Deformierten Speziellen Relativitätstheorie spielt die Einführung einer invarianten, kleinen Längenskala (oder, äquivalent, einer invarianten großen Energieskala) eine zentrale Rolle.

*—This is Major Tom to Ground Control / I'm stepping through  
the door / And I'm floating in a most peculiar way / And the  
stars look very different today.*

David Bowie, Space Oddity

# 3

## Große Extradimensionen und die modifizierte de Broglie-Relation

Wie in Kapitel 2 gezeigt, deuten eine Fülle von Theorien und Argumenten auf eine universelle Minimale Längenskala hin. Um die Möglichkeiten einer experimentellen Überprüfung ihrer Existenz einschätzen zu können, muß zunächst die Frage nach ihrer Größenordnung gestellt werden. Da noch keine vollständige Theorie der Quantengravitation existiert, die hinreichend spezifische experimentelle Vorhersagen ermöglicht, benötigt man zudem eine phänomenologische Modifikation der Quantentheorie, um entsprechende Aussagen zu treffen.

## 3.1 Extradimensionen

Sollte die Größe der Minimalen Längenskala in etwa der Planck-Länge  $L_p \approx 1,62 \cdot 10^{-35}$  m entsprechen, schränkt dies die Möglichkeiten einer experimentellen Überprüfung stark ein. Die Energieskala der Experimente, die dazu durchgeführt werden müßten, läge bei der Planck-Masse, etwa  $M_p = 1/L_p \approx 1,22 \cdot 10^{19}$  GeV.<sup>1</sup> Diese immense Größe resultiert aus der Schwäche der Gravitationskraft bzw. der geringen Größe der Newtonschen Gravitationskonstante, mit der sie über

$$M_p = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

verknüpft ist.

### 3.1.1 Das Hierarchieproblem

Das Hierarchieproblem ist die Bezeichnung für die Unerklärlichkeit der Schwäche der Gravitation im Vergleich mit den anderen fundamentalen Kräften, der starken, schwachen und elektromagnetischen Kraft. Wenn man die Idee einer Großen Vereinheitlichenden Theorie verfolgt, muß eine Lösung für dieses Problem gefunden werden: Die drei Kräfte des Standardmodells manifestieren sich auf Größenordnungen unter  $10^3$  GeV, beispielsweise ist die Konstante der Fermi-Theorie, mit der sich die schwache Kraft in erster Ordnung beschreiben läßt

$$G_F \approx 1.17 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad ,$$

während die Newtonsche Gravitationskonstante

$$G \approx 6,7 \cdot 10^{-39} \text{ GeV}^{-2}$$

---

<sup>1</sup>Die maximal erreichbare Schwerpunktsenergie des zurzeit am CERN in Genf gebauten Teilchenbeschleunigers LHC liegt bei  $\sqrt{s} \approx 1,4 \cdot 10^4$  GeV. Die Energie kosmischer Strahlung ist durch den *GZK-cutoff* bei etwa  $10^{10}$  GeV beschränkt.

ist. Das Hierarchieproblem wurde erstmals von P.A.M. Dirac erwähnt, der die elektrische Kraft und die Gravitation zwischen zwei Elektronen verglich[Dir38].

Ende der 90er Jahre wurden Theorien vorgeschlagen, die das Hierarchieproblem auf elegante Weise zu lösen vermögen. Dies geschieht durch Berücksichtigung einer der Vorhersagen der Stringtheorie, der Existenz von zusätzlichen Dimensionen der Raumzeit, einer Idee, die schon zu Anfang des letzten Jahrhunderts von Hermann Weyl[Wey18], Theodor Kaluza[Kal21] und Oskar Klein[Kle26] diskutiert wurde, die versuchten, in einer höherdimensionalen Theorie Elektromagnetismus und Gravitation zu vereinigen.

### 3.1.2 Das Randall-Sundrum-Modell

Das Randall-Sundrum-(RS-)Modell löst das Hierarchieproblem durch die Einführung eines *Warp-Faktors* in der Koordinate einer raumartigen Dimension[RS99]. Es wird lediglich eine einzige zusätzliche Dimension angenommen; ihre Koordinate ist  $x^4 = \phi \in [-\pi, \pi]$ , wobei periodische Randbedingungen gelten,  $(x, \phi)$  also mit  $(x, -\phi)$  identifiziert ist. Bei  $\phi = 0, \pi$  existieren  $3 + 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten, eine davon ist unser Universum, die andere ein für uns unsichtbares Paralleluniversum. Die Wirkung, die eine solche Anordnung beschreibt, ist:

$$\begin{aligned} S &= S_{grav} + S_{vis} + S_{hid} \quad , \\ S_{grav} &= \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-g} (-\Lambda + 2M_f^3 R) \quad , \\ S_{vis} &= \int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (\mathcal{L}_{vis} - V_{vis}) \quad , \\ S_{hid} &= \int d^4x \sqrt{-g_{hid}} (\mathcal{L}_{hid} - V_{hid}) \quad . \end{aligned}$$

$S_{grav}$  ist die fünfdimensionale Verallgemeinerung der Wirkung der Gravitation (2.4), die in allen Dimensionen wirkt;  $V_{vis}$  und  $V_{hid}$  sind von den jeweiligen  $3 + 1$ -dimensionalen Langrangedichten  $\mathcal{L}_{vis}$  und  $\mathcal{L}_{hid}$  abseparierte konstante



Vakuumergieterme, die auch in Abwesenheit von Materie als gravitative Quellen fungieren können. Der Index *vis* bezeichnet unser sichtbares Universum, *hid* das entfernte, versteckte Paralleluniversum.  $R$  ist der Ricci-Skalar,  $\Lambda$  die kosmologische Konstante und  $g$  die Determinante des metrischen Tensors, jeweils in der fünfdimensionalen Raumzeit.  $g_{vis}$  und  $g_{hid}$  sind die dementsprechenden Größen auf den Untermannigfaltigkeiten, definiert durch:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,vis} &= g_{\mu\nu}(x^\alpha, \phi = \pi) \quad , \\ g_{\mu\nu,hid} &= g_{\mu\nu}(x^\alpha, \phi = 0) \quad . \end{aligned}$$

Aus dimensionalen Gründen ist die Gravitationskonstante in 5 Dimensionen nicht mehr über  $G = 1/M_p^2$  mit einer Massenskala verknüpft, sondern über  $G = 1/M_f$ , wobei  $M_f$  die neue, fundamentale Massenskala in der 5-dimensionalen Raumzeit ist.

Die Erweiterung der Einstein-Gleichungen (2.7) auf 5 Dimensionen liefert für das RS-Modell, d.h. die obige Wirkung:

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \left( R_{\mathbb{R}^3} - \frac{1}{2} g_{\mathbb{R}^3} R \right) &= -\frac{1}{4M_f^3} \left[ \Lambda \sqrt{-g} g_{\mathbb{R}^3} \right. \\ &+ V_{vis} \sqrt{-g_{vis}} g_{\mu\nu,vis} \delta_{\mathbb{R}^3}^\mu \delta_{\mathbb{R}^3}^\nu \delta(\phi - \pi) \\ &\left. + V_{hid} \sqrt{-g_{hid}} g_{\mu\nu,hid} \delta_{\mathbb{R}^3}^\mu \delta_{\mathbb{R}^3}^\nu \delta(\phi) \right] . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen werden durch die Metrik

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2$$

mit  $V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k$ ,  $\Lambda = 24M^3k^2$  erfüllt.  $k$  ist eine freie Energieskala, die die Stärke der Krümmung in der zusätzlichen Raumkoordinate bestimmt,  $r_c$  skaliert die Koordinate der Extradimension, damit ist  $\pi r_c$  ihre Größe.  $\exp(-2kr_c|\phi|)$  ist der oben erwähnte Warp-Faktor. Im folgenden wird  $k < M_f$  angenommen, so daß die Krümmung zwischen den Untermannigfaltigkeiten schwach gegenüber der fundamentalen Skala ist.

Um nun auf die 3 + 1-dimensionale effektive Theorie im sichtbaren Universum schließen zu können, wird die erhaltene Metrik in die Wirkung dieses Universums eingesetzt. Der Gravitationsteil lautet dann

$$\int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M_f^3 r_c e^{-2kr_c|\phi|} \sqrt{-g_{vis}} R_{vis} \quad .$$

Durch Ausintegrieren über die vierte Koordinate  $\phi$ ,

$$r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{1}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}) \quad ,$$

ergibt sich durch Vergleich mit der gewöhnlichen vierdimensionalen Wirkung (2.4) die Relation

$$M_p^2 \sim \frac{M_f^3}{k} (1 - e^{-2kr_c\pi}) \quad .$$

Die Größe der Planck-Skala  $M_p$  wird also aus einer fundamentalen Skala der fünfdimensionalen Raumzeit abgeleitet. Ihr Verhältnis wird bestimmt durch die Krümmung  $k$  in der Extradimension und durch die Größe der Extradimension, letztere allerdings in geringerem Maße, da das Exponential nur einen geringen Beitrag liefert. Die beobachtete Größe der Planck-Skala wird damit insofern entproblematisiert, da sie nurmehr eine abgeleitete, keine fundamentale Größe mehr ist.

Die Schwäche der Gravitation wird noch durch einen weiteren Mechanismus erklärt: Betrachtet man ein fünfdimensionales Higgs-Feld[Hig64] auf der sichtbaren Untermannigfaltigkeit ( $\phi = \pi$ )

$$\int d^4x \sqrt{-g_{vis}} (g_{\mu\nu,vis} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - v_0^2)^2)$$

mit einer Masse  $v_0$ , setzt die Metrik ein und renormiert die Higgs-Wellenfunktion entsprechend, erhält man:

$$\int d^4x \sqrt{-g} (g_{\mu\nu} D_\mu H^\dagger D_\nu H - \lambda (H^\dagger H - e^{-2kr_c\pi} v_0^2)^2) \quad .$$

Alle physikalischen Massen werden also durch den Warp-Faktor reduziert

$$v = e^{-kr_c\pi} v_0 \quad ,$$

und damit die Schwäche der Gravitation auf geometrischem Wege erklärt. Schon für  $kr_c \approx 50$  ergibt sich auf diese Weise die beobachtete Diskrepanz zwischen den Kräften des Standardmodells und der Gravitation.

### 3.1.3 Das Arkani-Hamed-Dvali-Dimopoulos-Modell

#### 3.1.3.1 Kompaktifizierung

Ein weiteres, intuitiveres Modell, das das Hierarchieproblem auf geometrischem Wege löst, ist das Arkani-Hamed-Dvali-Dimopoulos-(ADD-)Modell[AHDD98]. Es geht von der Annahme  $d$  zusätzlicher, raumartiger Dimensionen aus, die zu einem Radius  $R$  kompaktifiziert sind. Die Teilchen des Standardmodells existieren nur auf einer  $3 + 1$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit und wechselwirken nicht in den Extradimensionen. Nur die Gravitation wirkt in der gesamten Raumzeit.<sup>2</sup>

Das Newtonsche Gravitationspotential  $V_D$  eines Massenpunktes in einer  $3 + 1 + D$ -dimensionalen Raumzeit ergibt sich aus der Poisson-Gleichung

$$-\vec{\nabla} \vec{F}_D = \Delta V_D = -4\pi G_D \rho_m \quad (3.1)$$

und dem Gaußschen Satz

$$\int_V \vec{\nabla} \vec{F}_D = \int_{\partial V} \vec{F}_D d\vec{S} \quad , \quad (3.2)$$

---

<sup>2</sup>Diese Annahme wird durch die Theorie der *Dirichlet-p-branes* motiviert, die in der Stringtheorie  $p + 1$ -dimensionale Untermannigfaltigkeiten der höherdimensionalen Raumzeit darstellen. Offene Strings, die den Standardmodell-Teilchen entsprechen, enden auf ihnen. Geschlossene Strings, die wie in Abschnitt 2.2.2 gezeigt die Gravitonenzustände enthalten, haben keine fixierten Endpunkte und können frei durch die gesamte Raumzeit propagieren.

$\rho_m = M\delta(\vec{r})$  beschreibt den Massenpunkt,  $G_D$  analog zum RS-Modell die höherdimensionale Gravitationskonstante, die mit einer fundamentalen Massenskala  $M_f$  aus Dimensionsgründen über

$$G_D = \frac{1}{M_f^{2+D}}$$

verknüpft ist. Einsetzen von Gleichung (3.1) in (3.2) liefert

$$\int_{\partial V} \vec{\nabla} V_D d\vec{S} = 4\pi G_D M \quad .$$

Durch Benutzung von  $3 + D$ -dimensionalen Kugelkoordinaten ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \frac{\partial}{\partial r} V_D(r) r^{2+D} d\Omega_D &= 4\pi G_D M \\ \frac{\partial}{\partial r} V_D(r) r^{2+D} S_{2+D} &= 4\pi G_D M \\ \frac{\partial}{\partial r} V_D(r) &= \frac{4\pi G_D M}{r^{2+D} S_{2+D}} \\ V_D(r) &= -\frac{4\pi}{(1+D)S_{2+D}} \frac{G_D M}{r^{1+D}} \quad . \end{aligned}$$

Dabei ist

$$S_{2+D} = \frac{2\pi^{\frac{2+D}{2}}}{\Gamma(\frac{2+D}{2})}$$

die  $2 + D$ -dimensionale Oberfläche der Hyperkugel. Damit lautet das Gravitationspotential mit  $D$  Extradimensionen

$$V_D(r) = -\frac{2\Gamma(\frac{2+D}{2})}{(1+D)\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{G_D M}{r^{1+D}} \quad . \quad (3.3)$$

Im folgenden wird nun das Gravitationspotential eines Massenpunktes im ADD-Modell berechnet, d.h. das Potential auf der  $3 + 1$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit unter der Annahme, daß die  $D$  zusätzlichen Dimen-

sionen kompaktifiziert sind. Der Einfachheit halber nehmen wir eine Kompaktifizierung auf einem Hypertorus mit für alle Extradimensionen gleichem Kompaktifizierungsradius  $R$  an, d.h. für die Koordinaten gelten periodische Anschlußbedingungen:

$$f(x^\mu) = f(x^\mu + 2\pi R) \quad , \quad \mu \geq 4 \quad .$$

Entsprechend setzt sich auch die Verteilung eines Massenpunktes im Ursprung periodisch fort:

$$\rho_M(x^\mu) = \sum_{a_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{a_D=-\infty}^{\infty} \delta^{3+D}(x^1, x^2, x^3, x^4 - 2\pi R a_1, \dots, x^{3+D} - 2\pi R a_D) \quad .$$

Das resultierende Potential auf der 3+1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit lautet dann dementsprechend (mit der Abkürzung  $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$  für den Abstand zum Ursprung auf der Untermannigfaltigkeit)

$$\begin{aligned} V_D(r) &= -\frac{2\Gamma\left(\frac{2+D}{2}\right)}{(1+D)\pi^{\frac{D}{2}}} \sum_{a_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{a_D=-\infty}^{\infty} \times \\ &\times \frac{G_D M}{(r^2 + (2\pi R a_1)^2 + \cdots + (2\pi R a_D)^2)^{\frac{1+D}{2}}} \quad . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Am Beispiel nur einer einzigen Extradimension  $D = 1$  soll gezeigt werden, was dies für das Potential auf der Untermannigfaltigkeit bedeutet. Mit nur einer Extradimension lautet das Potential (3.4):

$$\begin{aligned} V_1(r) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{a_1=-\infty}^{\infty} \frac{G_1 M}{r^2 + (2\pi R a_1)^2} \\ &= -\frac{G_1 M}{\pi R^2} \sum_{a_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\pi a_1 \frac{R}{2r}\right)^2} \\ &= -\frac{G_1 M}{\pi R^2} \frac{R}{2r} \coth\left(\frac{R}{2r}\right) \\ &= -\frac{G_1 M}{2\pi r R} \coth\left(\frac{R}{2r}\right) \end{aligned}$$

Interessant sind nun die asymptotischen Ausdrücke für dieses Potential für solche Abstände  $r$  auf der Untermannigfaltigkeit, die klein bzw. groß gegen den Kompaktifizierungsradius  $R$  sind. In diesem Fall gilt nämlich

$$V_1(r) \approx \begin{cases} -\frac{G_1 M}{\pi r^2} + \dots & , \quad r \ll R \\ -\frac{G_1 M}{2\pi r R} \left( 1 + 2 \exp\left(-\frac{R}{r}\right) + \dots \right) & , \quad r \gg R \end{cases} . \quad (3.5)$$

Für kleine Abstände  $r \ll R$  gilt also das Potential des unkompaktifizierten höherdimensionalen Raumes (3.3). Für makroskopische Abstände  $r \gg R$  hingegen gilt das übliche  $1/R$ -Potential des  $3+1$ -dimensionalen Raumes, der erste Korrekturfaktor ist exponentiell unterdrückt. Ein Vergleich von (3.5) mit dem üblichen Gravitationspotential

$$V(r) = -\frac{GM}{r}$$

zeigt außerdem die Verbindung zwischen der höherdimensionalen Gravitationskonstante  $G_1$  und der Gravitationskonstante der  $3+1$ -dimensionalen Untermannigfaltigkeit auf:

$$\begin{aligned} \lim_{r \gg R} V_1(r) &\stackrel{!}{=} V(r) \\ -\frac{G_1 M}{2\pi r R} &= -\frac{GM}{r} \\ G_1 \frac{1}{2\pi R} &= G \quad . \end{aligned}$$

Verallgemeinert man den obigen Ansatz auf eine beliebige Anzahl von Extradimensionen, so gilt allgemein

$$G_D \frac{1}{(2\pi R)^D} \sim G$$

bzw. entsprechend für das Verhältnis der fundamentalen Massenskala  $M_f$  zur Planck-Skala  $M_p$ :

$$M_f^{2+D} (2\pi R)^D \sim M_p^2 \quad . \quad (3.6)$$

$D = 1$	$R \approx 10^{12} \text{ m}$
$D = 2$	$R \approx 10^{-4} \text{ m}$
$D = 3$	$R \approx 10^{-6} \text{ m}$
$D = 4$	$R \approx 10^{-9} \text{ m}$

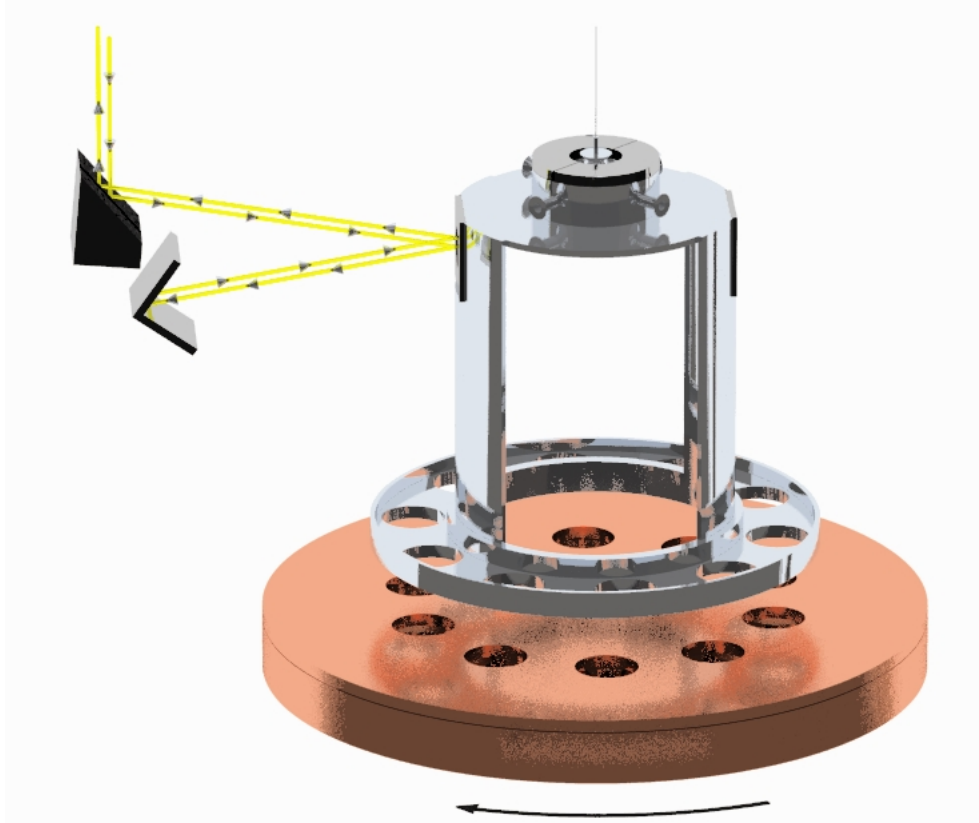
**Tabelle 3.1:** Radii  $R$  der Extradimensionen im ADD-Modell für verschiedene Anzahlen von Dimensionen  $D$ . Die fundamentale Massenskala ist festgelegt auf  $M_f = 1 \text{ TeV}$ .

Das ADD-Modell erklärt die beobachtete enorme Größe der Planck-Skala also geometrisch: Durch geeignete Wahl des Kompaktifizierungsradius kann die fundamentale Skala der Gravitation  $M_f$  durchaus im Bereich der anderen Kräfte des Standardmodells liegen. Tabelle 3.1 zeigt die Größen der Extradimensionen für verschiedene Anzahlen von Extradimensionen. Hier erschließt sich auch die Namensgebung *Große Extradimensionen*: Ihr Radius im ADD-Modell ist wesentlich größer als die Planck-Länge  $L_p \approx 10^{-35} \text{ m}$ .

### 3.1.3.2 Experimentelle Konsequenzen

Im Gegensatz zum RS-Modell löst das ADD-Modell das Hierarchieproblem direkt durch eine Erniedrigung der fundamentalen Skala  $M_f$  der Gravitation auf das Niveau der Standardmodellkräfte. Wie oben gezeigt bedeutet dies, daß die Gravitation auf Skalen, die kleiner sind als die Größe der Extradimensionen, meßbar stärker werden müßte bzw. laut Gleichung (3.5) eine Abweichung vom  $\sim 1/R$ -Verhalten des Potentials zeigen müßte.

Tabelle 3.1 zeigt, daß solche Abweichungen sich im Falle nur einer einzigen Extradimension bereits bei Abständen kleiner als  $10^{12} \text{ m}$  zeigen sollten, will man die fundamentale Skala im Bereich der Standardmodellkräfte, d.h. bei  $M_f \approx 1 \text{ TeV}$  ansiedeln. Dies entspricht etwa der Größe unseres Sonnensystems und ist daher ausgeschlossen. Bei zwei Extradimensionen liegen die Abweichungen allerdings bereits im Bereich unterhalb eines Millimeters. Eine



**Abbildung 3.1:** Das von der Eöt-Wash-Gruppe benutzte Torsionspendel zur Messung des Gravitationsgesetzes. Der untere, rot dargestellte Körper besteht aus zwei mit Löchern versehenen Scheiben, wobei die Löcher der beiden Scheiben um 18 Grad gegeneinander gedreht sind. Bei einer Drehung gegenüber dem aufgehängten Pendel heben sich die Kräfte der beiden Scheiben auf das Pendel gegenseitig auf, sofern das Newtonsche Gravitationspotential  $V \sim 1/R$  gilt, und es sollte keine Bewegung des Pendels erfolgen. Quelle: <http://www.npl.washington.edu/eotwash/experiments/shortRange/srtpend.jpg>



Bestimmung des Gravitationspotentials auf diesen Größenordnungen erfordert Präzisionsmessungen. Diese wurden von der Eöt-Wash-Gruppe an der University of Washington in Seattle durchgeführt; Abbildung 3.1 zeigt die benutzte experimentelle Anordnung. Die Ergebnisse konnten den Radius der Extradimension auf

$$R \leq 160 \mu\text{m}$$

beschränken. Für  $M_f = 1 \text{ TeV}$  ist also auch  $D = 2$  ausgeschlossen, in der Tat müßte für 2 Extradimensionen  $M_f \geq 1,7 \text{ TeV}$  sein[H<sup>+</sup>04].

Die Existenz von Extradimensionen wirkt sich auch in Modellen zur Evolution des Universums aus; sie führt zu einer starken Erhöhung der Entropie im frühen Universum[SST01], was das kosmologische Entropieproblem[Lin90], d.h. die heute beobachtete enorm große Entropie des Universums erklären würde.

Die in Abschnitt 2.2.1 dargestellte kanonische Quantisierung der Gravitation liefert analog zu den Eichtheorien des Standardmodells Feynman-Diagramme für ihre Austauschteilchen, die Gravitonen, und ermöglicht damit die Berechnung von Wirkungsquerschnitten für Teilchenwechselwirkungsprozesse[Vel76].<sup>3</sup> Mit der Reduzierung der fundamentalen Skala der Energie sind Gravitonenprozesse in Beschleunigerexperimenten und astrophysikalischen Phänomenen realisierbar.

In Supernovae führt der Energieverlust durch die Emission von Gravitonen zu einer stärkeren Abkühlung. Durch Untersuchungen der Supernova SN1987A, die im Februar 1987 in der nahegelegenen Großen Magellanschen Wolke beobachtet wurde, konnten untere Grenzen für die fundamentale Skala  $M_f$  von 50 TeV ( $D = 2$ ), 4 TeV ( $D = 3$ ) bzw. 1 TeV ( $D = 4$ ) ermittelt werden[CP99]. Allerdings sind diese Werte mit einem hohen Fehler versehen, da große Unsicherheiten bezüglich der Eigenschaften des Kerns der Supernova

---

<sup>3</sup>Wie bereits erläutert, ist diese kanonisch quantisierte Gravitation jedoch nicht renormierbar und bedarf daher der Einführung einer zusätzlichen Energieskala  $\Lambda$ , die als Cut-off fungiert und eine freie Variable dieser Theorie darstellt.

bestehen. Für  $D = 2$  schließen die Beobachtungen eine Skala von  $M_f = 1$  TeV aber fast sicher aus.

Die Erzeugung von Gravitonen in Prozessen in Teilchenbeschleunigern führt ebenfalls zu einem Energieverlust, da die geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Gravitonen mit normaler Materie sie praktisch undetektierbar macht[Rah04]. Die theoretische Untersuchung von Elektron-Positron- und Proton-Antiproton-Kollisionen in Verbindung mit Daten des Tevatron (Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, IL, USA) und des LEP-2 (CERN, Genf, Schweiz) ergab eine untere Grenze für die fundamentale Skala  $M_f$  in der Größenordnung von 1 TeV, abhängig von der Anzahl der Extradimensionen[MPP99].

Prozesse mit virtuellen Gravitonen können zu Korrekturen sowohl an Wirkungsquerschnitte als auch an in Hochpräzisionsexperimenten gemessene Größen führen. Für das gyromagnetische Moment von Leptonen erwiesen sich allerdings definitive Vorhersagen durch die Nicht-Renormierbarkeit der kanonisch quantisierten Gravitation als praktisch unmöglich, da die Ergebnisse stark von der Cut-off-Skala  $\Lambda$  abhängen[CPRS01]. Die Berechnung von Korrekturen an die Prozesse  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ ,  $q\bar{q} \rightarrow l^+l^-$  und  $gg \rightarrow l^+l^-$  führten im Vergleich mit Daten des Tevatrons zu einem Limit von  $M_f \gtrsim 1$  TeV, unabhängig von der Anzahl der Extradimensionen[Hew99].

Die Verstärkung der Gravitation auf kleinen Skalen führt zur Bildung von mikroskopischen Schwarzen Löchern[HHBS02, DL01, GT02]. Auf Größenordnungen unterhalb des Radius der Extradimensionen gilt das Gravitationsgesetz in  $3 + D$  räumlichen Dimensionen, in dem der Schwarzschildradius aus Gleichung (2.9) erheblich größer wird[MP86]. Es wird dadurch wesentlich wahrscheinlicher, daß kollidierende Teilchen z.B. in einem Teilchenbeschleuniger zu einem Schwarzen Loch kollabieren.<sup>4</sup> Die gebildeten Schwarzen Löcher emittieren Hawking-Strahlung[Haw75]; der Massenverlust durch diese Strahlung tritt sehr schnell ein, da die Schwarzen Löcher nur geringe

---

<sup>4</sup>Der Mechanismus der Erzeugung und weiteren Entwicklung von mikroskopischen Schwarzen Löchern wird noch ausführlich in Abschnitt 4.5.1 beschrieben.

Massen haben und die Hawking-Temperatur invers proportional zur Masse des Schwarzen Loches ist. Es ist unklar, ob das gebildete Schwarze Loch vollständig zerstrahlt oder ein *Black Hole Remnant* (BHR) zurückbleibt.<sup>5</sup> Beide Szenarien ließen sich jedoch am derzeit in Konstruktion befindlichen LHC überprüfen[HKS07].

Falls die Erzeugung von Schwarzen Löchern zur Bildung von BHRs führt, könnten diese bereits im frühen Universum entstanden sein und seitdem unverändert vorhanden sein. Diese BHRs wären dann Kandidaten für Dunkle Materie[BCL92, LG98, BKP02].

### 3.1.4 Die Minimale Länge in Modellen mit Extradimensionen

Wie oben erläutert reduzieren Modelle mit Extradimensionen die fundamentale Skala der Gravitation. Unabhängig vom benutzten Modell ist eine solche Reduktion der Planck-Skala in den Bereich der übrigen Kräfte des Standardmodells wünschenswert im Sinne einer Lösung des Hierarchieproblems.

Wenn die Existenz einer Minimalen Länge jedoch in Zusammenhang mit Verbindung der Gravitation mit der Quantentheorie steht wie in Kapitel 2 diskutiert, so wird die Größe der Minimalen Länge auch von der Skala der Gravitation bestimmt sein. Wenn also die neue fundamentale Massenskala nicht die Planck-Skala  $M_p$  ist, sondern eine wesentlich niedrigere Skala  $M_f$ , dann ist die Minimale Längenskala nicht mehr die Planck-Länge, sondern  $L_f = 1/M_f$ . Eine fundamentale Skala im Bereich von  $M_f = 1 \text{ TeV}$  würde dann also eine Minimale Länge von  $L_f = 1/\text{TeV} \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ fm}$  implizieren. Eine solche Länge könnte in derzeit oder in naher Zukunft durchgeführten Experimenten nachweisbar sein. Um entsprechende Vorhersagen treffen zu können, benötigt man jedoch in Ermangelung einer vollständigen Theorie

---

<sup>5</sup>Da die Herleitung der Hawking-Strahlung nur in der Näherung geringer Krümmung des Schwarzschildradius gilt, erfordert die Beantwortung dieser Frage eine vollständige Quantentheorie der Gravitation.

der Quantengravitation ein Modell, das diese Minimale Länge in die bekannte Quantentheorie integriert.

## 3.2 Die modifizierte de Broglie-Relation

Eine einfache Möglichkeit der Berücksichtigung einer Minimalen Länge in der Quantentheorie ergibt sich durch die von der Stringtheorie motivierte Modifikation der Unschärferelation zwischen Ort und Impuls, Gleichung (2.28):

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \text{const.} \cdot \alpha' \Delta p \quad .$$

Eine Quantentheorie mit dieser veränderten Unschärferelation wurde von Kempf et al. konstruiert [KMM95]. In der klassischen Quantenmechanik ist die Unschärferelation jedoch kein fundamentales Axiom, sondern folgt aus der Nichtkommutativität der Operatoren:

$$\Delta a \Delta b \geq \frac{1}{2i} [a, b] \quad . \quad (3.7)$$

Eine veränderte Unschärferelation zwischen Ort und Impuls bedarf also einer Modifikation der Kommutatoren. Der Kommutator zwischen dem klassischen Impuls- und Ortsoperator in der Ortsdarstellung lautet

$$\langle x | [\hat{x}, \hat{p}] | x \rangle = \left[ x, -i \frac{\partial}{\partial x} \right] = i \quad .$$

Wenn nun der Kommutator höhere Potenzen des Impulsoperators enthält, muß der Impulsoperator durch Addition von höheren Ableitungen modifiziert sein; dies folgt aus

$$\left[ x, \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \right] = i n \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{n-1} = i n (\langle x | \hat{p} | x \rangle)^{n-1}$$

mit der einfachen Regel für Kommutatoren:

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}] \quad .$$

Der Impulsoperator ist also allgemein von der Form

$$\langle x | \hat{p} | x \rangle = -i \frac{\partial}{\partial x} + a_1 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + a_2 \left( -i \frac{\partial}{\partial x} \right)^3 + \dots \quad . \quad (3.8)$$

Betrachtet man nun eine ebene Welle  $\exp(ikx)$ , und will die Eigenwerte ihres Impulses bestimmen, so ergibt sich in der Ortsdarstellung im Gegensatz zum klassischen Fall

$$\hat{p}e^{ikx} = -i \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = ke^{ikx}$$

durch die Existenz höherer Ableitungen im modifizierten Impulsoperator (3.8)

$$\hat{p}e^{ikx} = (k + a_1 k^2 + a_2 k^3 + \dots) e^{ikx} \quad ,$$

d.h. der Eigenwert des Impulsoperators ist nicht mehr proportional zur Wellenzahl, sondern stattdessen über eine Funktion

$$p = f(k)$$

mit dieser verknüpft. Dies ist eine Änderung eines der fundamentalen Prinzipien der Quantenmechanik, der de Broglie-Relation.

### 3.2.1 Grundlagen

Wenn wie oben gezeigt eine Modifikation der Vertauschungsrelation zwischen Impuls- und Ortsoperator eine Modifikation der de Broglie-Relation bedingt, so liegt es nahe, eine solche Relation zum Prinzip zu erheben und ihre physikalische Bedeutung zu erforschen.

Bekanntlich benötigt man ein Teilchen mit der de Broglie-Wellenlänge  $d$ , um eine räumliche Distanz der Größenordnung  $\Delta x \gtrsim d$  aufzulösen. Um

eine minimale Längenauflösung zu erreichen, bietet es sich daher an, die physikalisch realisierbaren Wellenlängen durch  $L_f$  nach unten zu beschränken, d.h. eine obere Schranke  $\max(k) = M_f$  für die Wellenzahl einzuführen. Die oben angesprochene Modifikation des Verhältnisses zwischen Wellenzahl  $k$  und Impuls  $p$  ermöglicht eine solche Beschränkung, ohne gleichzeitig ein Limit an die Energie oder den Impuls des Teilchens zu setzen, was Probleme mit grundlegenden Prinzipien wie z.B. der Energieerhaltung bedingen könnte.

Im vorliegenden Modell wird die Minimale Länge somit in die Quantentheorie integriert durch Einführung einer modifizierten de Broglie-Relation[H<sup>+</sup>03]

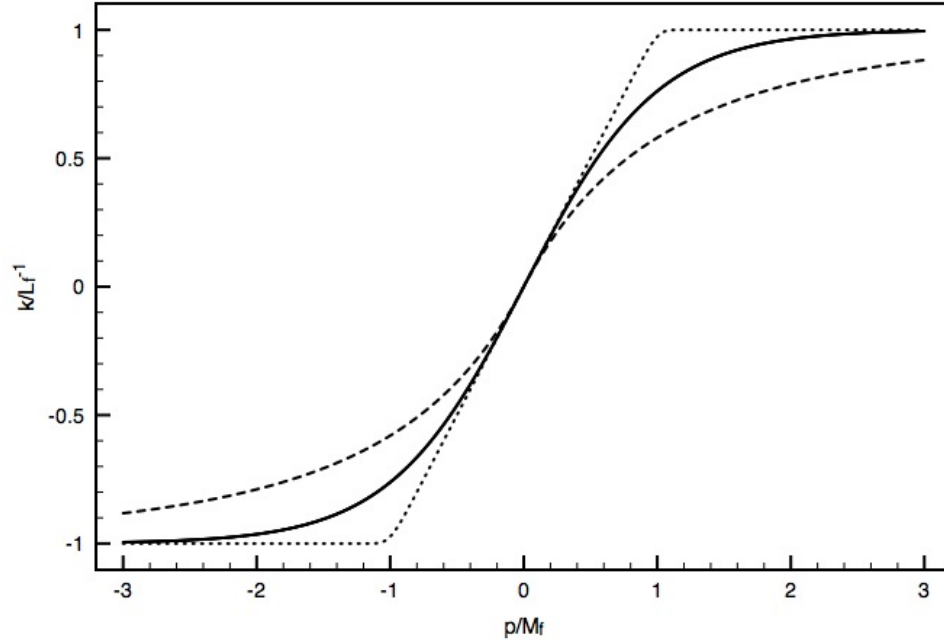
$$k = k(p) \quad . \quad (3.9)$$

Aufgrund ihrer physikalischen Interpretation muß diese Relation gewissen Voraussetzungen genügen:

- *Maximum bei  $k = M_f$* : Dies sichert die Unmöglichkeit einer räumlichen Auflösung unterhalb der Minimalen Länge  $L_f$ .
- *Punktsymmetrie,  $k(p) = -k(-p)$* : Dies ist aufgrund der räumlichen Parität erforderlich.
- *Linearität für  $k \rightarrow 0$* : Hierdurch wird der Übergang zur klassischen Relation  $k = p$  für kleine Energien gesichert.

Die Relation  $k(p)$  wird nicht durch ein fundamentales Prinzip bestimmt, wie beispielsweise die Lorentztransformation durch das Relativitätsprinzip in der speziellen Relativitätstheorie, sondern wird vielmehr postuliert und ist daher im Rahmen der obigen Eigenschaften relativ frei wählbar. Eine mögliche Realisierung einer solchen Relation wäre

$$L_f k^\mu(p^\mu) = \tanh^{\frac{1}{\gamma}} \left[ \left( \frac{p^\mu}{M_f} \right)^\gamma \right] \quad . \quad (3.10)$$



**Abbildung 3.2:** Die funktionale Abhängigkeit von Wellenzahl und Impuls (3.10) für die Parameter  $\gamma = 1$  (durchgezogene Linie),  $\gamma = 10$  (gestrichelte Linie) und  $\gamma = 1/2$  (gepunktete Linie).

Die entsprechende Umkehrfunktion lautet:

$$\frac{p^\mu(k^\mu)}{M_f} = \operatorname{arctanh}^{\frac{1}{\gamma}} [(L_f k^\mu)^\gamma] \quad . \quad (3.11)$$

Der Parameter  $\gamma$  beeinflusst die Form der Relation (siehe Abbildung 3.2).

Eine weitere Funktion, die die oben genannten Eigenschaften erfüllt, ist das Gaußsche Fehlerintegral[Hos04a]:

$$k^\mu(p^\mu) = \hat{e}^\mu \int_0^p e^{-\epsilon p'^2} dp' \quad , \quad (3.12)$$

wobei  $\hat{e}_\mu$  der Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung ist,  $p^2 = \vec{p} \cdot \vec{p}$  und  $\epsilon = L_f^2 \pi/4$ .

Um die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit  $c = \omega/k$  zu garantieren, muß dieselbe Relation  $k(p)$  auch für  $\omega(E)$  gelten[Hos06b], was die obige relativ-

stische Schreibweise andeuten soll. Dies wird im vorliegenden Modell vorausgesetzt. Der Fall einer variablen Lichtgeschwindigkeit wird in Abschnitt 3.2.3 diskutiert.

### 3.2.2 Implikationen für die Quantentheorie

Wie oben erläutert bewirkt eine veränderte Unschärferelation eine Modifikation der de Broglie-Relation. Umgekehrt wird daher auch eine postulierte neue Relation wie in Gleichung (3.9) abhängig von ihrer Form eine neue Unschärferelation mit sich bringen.

#### 3.2.2.1 Kommutatoren, Unschärfe, Impulsmaß

Der Wellenzahloperator muß natürlich die Wellenzahl einer ebenen Welle wiedergeben:

$$\hat{k}e^{ikx} = ke^{ikx}$$

Dementsprechend kann der Wellenzahloperator in der Ortsdarstellung nur durch

$$\langle x|\hat{k}^\mu|x\rangle = -i \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

gegeben sein. Der veränderte Impulsoperator ist dann durch die Funktion  $p(k)$  gegeben,

$$\langle x|\hat{p}^\mu|x\rangle = p\left(-i \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) . \quad (3.13)$$

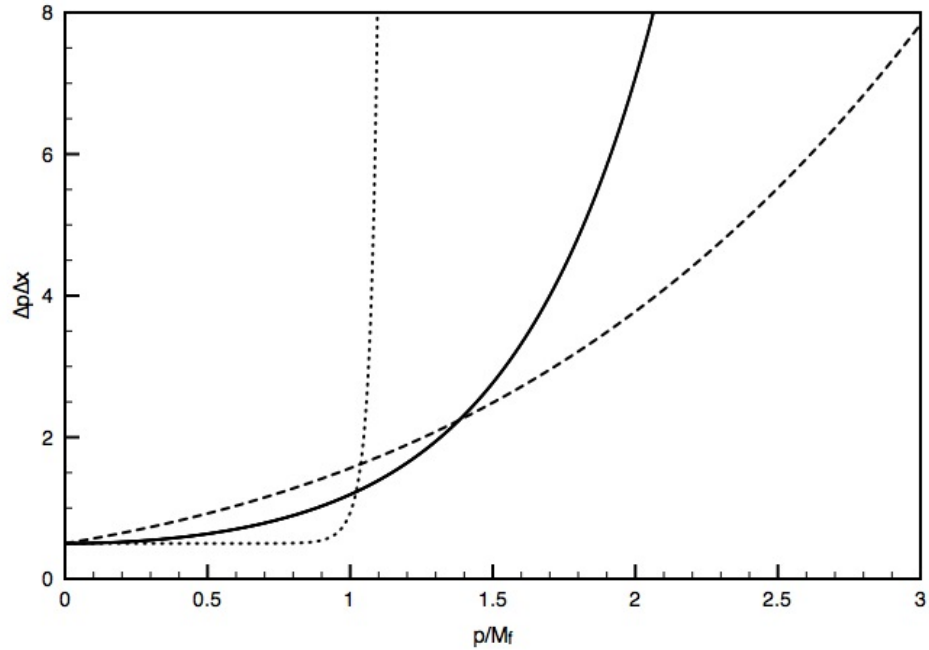
Da der Wellenzahloperator die klassische Form behält, bleibt auch der Kommutator erhalten:

$$\langle x|[\hat{x}^\mu, \hat{k}^\nu]|x\rangle = i \delta^{\mu\nu} .$$

Der Kommutator zwischen Ort  $x$  und Impuls  $p$  ergibt sich dann aus der Relation

$$\langle x|[\hat{x}, \hat{A}(\hat{k})]|x\rangle = i \frac{\partial A(k)}{\partial k}$$





**Abbildung 3.3:** Die Unschärferelation bei veränderter de Broglie-Relation (3.10) für die Parameter  $\gamma = 1$  (durchgezogene Linie),  $\gamma = 10$  (gestrichelte Linie) und  $\gamma = 1/2$  (gepunktete Linie). Die Linien zeigen jeweils das Minimum der Unschärfe.

zu

$$\langle x | [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] | x \rangle = i \delta^{\mu\nu} \frac{\partial p^\mu}{\partial k^\mu} . \quad (3.14)$$

Über Gleichung (3.7) ist der Kommutator unmittelbar mit der Unschärferelation verknüpft. Die neue Unschärferelation zwischen  $x$  und  $p$  folgt damit unmittelbar aus (3.14) und lautet

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{1}{2} \left| \frac{\partial p}{\partial k} \right| . \quad (3.15)$$

In Abbildung 3.3 ist diese Unschärferelation dargestellt. In der Tat wächst die Unschärfe mit steigendem Impuls und bedingt dadurch eine Minimale Unschärfe im Ort.

Eine weitere wichtige Konsequenz aus der veränderten de Broglie-Relation ist die Modifikation des Maßes im Impulsraum. Wie sich herausstellen wird, ist dies die wichtigste Implikation für die Quantenfeldtheorie: Die erlaubten Quanten können maximal eine Wellenzahl  $k = M_f$  haben. Entsprechend sind alle Integrale im Wellenraum bei  $M_f$  beschränkt:

$$\int_0^{M_f} dk \quad .$$

Die Variablentransformation in den Impulsraum erzeugt nun eine Jacobi-Determinante

$$\int_0^{M_f} dk = \int_0^\infty \left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| dp \quad , \quad (3.16)$$

d.h. das Maß im Impulsraum verändert sich. Da eine der Bedingungen der Funktion  $k(p)$  die Annäherung an ein Limit  $M_f$  für  $p \rightarrow \infty$  ist, gilt für die Ableitung  $\partial k / \partial p \rightarrow 0$ , der Impulsraum wird also für große Impulse kleiner.

Dieses neue Maß hat natürlich Auswirkungen auf die Normierung der Impulseigenzustände. Es muß gelten:

$$1 = \int_0^{M_f} \delta(k - k') dk = \int_0^\infty \delta(p - p') \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial p} dp$$

bzw. [KMM95]

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k - k') = \delta(p - p') \frac{\partial p}{\partial k} = \langle p | p' \rangle \quad . \quad (3.17)$$

Auf diese Weise sind die Impulszustände  $|p\rangle$  weiterhin orthonormiert.

### 3.2.2.2 Schrödinger-, Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung, mit der sich Energiezustände für stationäre Probleme berechnen lassen, ist bestimmt durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad .$$

Der Hamiltonoperator lautet für ein Teilchen in einem Potential  $V(x)$ :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad .$$

In der Ortsdarstellung ergibt sich das Potential unmittelbar, da  $\langle x|\hat{x}|x\rangle = x$ ; für die Bewegungsenergie muß der veränderte Impulsoperator aus Gleichung (3.13) verwendet werden, dementsprechend ergeben sich höhere Ortsableitungen.

In der Impulsdarstellung wird die Bewegungsenergie trivial, jedoch muß im Potential der Ortsoperator in der Impulsdarstellung

$$\langle p|\hat{x}|p\rangle = -i \frac{\partial}{\partial k(p)} = -i \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial}{\partial p} \quad (3.18)$$

benutzt werden.

Will man zeitabhängige Probleme betrachten, so folgt, da der Generator der Zeitentwicklung  $\partial/\partial t$  nunmehr mit der Frequenz  $\omega$  und nicht mit der Energie  $E$  identifiziert ist, der modifizierte Zeitentwicklungsoperator

$$\hat{U}(t - t_0) = \exp \left( -i \hat{\omega}(\hat{E})(t - t_0) \right) \quad ,$$

und daher

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{\omega}(\hat{E}) |\psi\rangle \quad . \quad (3.19)$$

Die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung ergeben sich auf gleichem Wege wie die Schrödingergleichung. In der Ortsdarstellung benutzt man entsprechend die neuen Impuls- und Energieoperatoren, und die Gleichungen lauten dann:

$$\left[ E(\omega)^2 - p(k)^2 - m^2 \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (3.20)$$

$$\left[ \vec{\alpha} \cdot p(k) + \beta m - E(\omega) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad , \quad (3.21)$$

wobei hier

$$\begin{aligned} k^i &= -i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \\ \omega &= -i \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

gilt;  $\vec{\alpha}$  und  $\beta$  sind die vierdimensionalen Dirac-Matrizen. Für die Dirac-Gleichung ergibt sich dabei scheinbar ein konzeptionelles Problem: Motivation für ihre Konstruktion war ursprünglich die Existenz höherer Zeitableitungen in der Klein-Gordon-Gleichung, die damit mehr Anfangsbedingungen erforderten. Die klassische Dirac-Gleichung ist erster Ordnung in der Zeit, durch den nun modifizierten Energieoperator treten aber wiederum höhere Zeitableitungen auf. Dieses Problem läßt sich aber durch die relativistische Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = p^2 + m^2$$

beheben, die aufgrund der gleichen Relation für  $k(p)$  und  $\omega(E)$  auch im Wellenraum gilt:

$$\omega^2 = k^2 + m^2$$

Da die Wellenzahl Ortsableitungen entspricht und die Frequenz Zeitableitungen, lassen sich effektiv mit ihrer Hilfe höhere Zeitableitungen durch Ortsableitungen gemäß

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 = \vec{\nabla}^2 + m^2$$

ersetzen und somit die Zeitabhängigkeit erster Ordnung der Dirac-Gleichung restaurieren.

### 3.2.2.3 Quantenfeldtheorie

Die Änderungen in der Quantenfeldtheorie ergeben sich durch zwei unterschiedliche Effekte. Zunächst sind wie oben erwähnt die Hamiltonoperatoren der Klein-Gordon- und Diracgleichung durch den neuen Impulsoperator

verändert und es ergeben sich neue Propagatoren für Photonen und Fermionen in z.B. der Quantenelektrodynamik:

$$\begin{aligned} {}^{Ph}\Delta_{\mu\nu} &= -\frac{1}{p^2(k) + i\epsilon} \quad , \\ {}^f\Delta_{\mu\nu} &= \frac{1}{\beta(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}(k) - E) - m + i\epsilon} \quad . \end{aligned}$$

Die Korrekturen durch diese veränderten Propagatoren sind äußerst gering: Die Forderung nach der Punktsymmetrie der Relation  $k(p)$  verbietet Korrekturen erster Ordnung, die kleinsten Korrekturen skalieren also mit  $1/M_f^2$ . Bei der Berechnung von Wechselwirkungen z.B. der Quantenelektrodynamik sind also die ersten Korrekturen von der Ordnung  $e/M_f^2$ .

Wesentlich größer, und daher dominierend sind hingegen die Korrekturen durch das veränderte Maß im Impulsraum (3.16), das auch bei niedrigen Energien bei allen Integralen in Wechselwirkungen eingeht. Wie bereits erwähnt verschwindet die Jacobideterminante für hohe Impulse, sie zeigt sogar für die oben erwähnten Relationen einen exponentiellen Abfall, so zum Beispiel für die Relation (3.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial p} &= \frac{1}{L_f} \frac{1}{\cosh^2(\frac{p}{M_f})} = \frac{4}{L_f} \frac{1}{\left(\exp(\frac{p}{M_f}) + \exp(-\frac{p}{M_f})\right)^2} \\ &\xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{4}{L_f} \frac{1}{\exp^2(\frac{p}{M_f})} \quad . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein natürlicher Cutoff für alle Impulsintegrale. Im vorliegenden Modell sind also z.B. alle Integrale über virtuelle Teilchen in Feynman-Diagrammen automatisch endlich.

### 3.2.3 Lorentz-Invarianz und das Verhältnis zwischen modifizierter de Broglie-Relation und DSR

Ein gemeinsames Problem von Modellen einer Minimalen Länge ist die Einführung einer invarianten Längenskala für alle Beobachter. In der Speziellen Relativitätstheorie erfahren Längen aber eine Kontraktion, daher muß auch die Form der Lorentztransformation verändert werden.

Solche Transformationen mit einer invarianten Längenskala wurden z.B. von F. Schuller[Sch02] auf der Basis der Born-Infeld-Kinematik[BI34] entwickelt. Auch in der Deformierten Speziellen Relativitätstheorie (siehe Abschnitt 2.4.2) werden solche Transformationen benutzt[MS02]; wie bereits erwähnt führen sie dort zu einer modifizierten Dispersionsrelation und damit zu einer expliziten Brechung der Lorentzsymmetrie.

Der Vorteil des vorliegenden Modells liegt nun in der Möglichkeit, durch die Relationen  $k(p)$  und  $\omega(E)$  die Dispersionsrelation intakt zu lassen und damit die Lorentzsymmetrie im  $(E, p)$ -Raum zu erhalten, lediglich die Transformationen für  $k$  und  $\omega$  müssen so verändert werden, daß ihre jeweiligen Maxima invariant bleiben. In der Tat ist es möglich, entsprechende Transformationen bei gegebenen Relationen  $k(p)$  und  $\omega(E)$  explizit zu berechnen, wenn man die klassische Dispersionsrelation für  $E$  und  $p$  erhält[Hos07].

Das Modell der modifizierten de Broglie-Relation ermöglicht aber auch die Inklusion einer variablen Lichtgeschwindigkeit[Mof93, AM99] durch unterschiedliche Wahl der Relationen  $k(p)$  und  $\omega(E)$ . Diese wurde vorgeschlagen, um das Horizontproblem des Universums zu lösen, d.h. das Problem, daß kausal voneinander getrennte Bereiche unseres Universums eine extrem große Ähnlichkeit aufweisen. Eine höhere Lichtgeschwindigkeit im frühen Universum bei einer höheren Energiedichte könnte diese Bereiche kausal verbinden und würde dieses Problem lösen.

*—Geheimnisvoll am lichten Tag / Läßt sich Natur des Schleiers  
nicht berauben / Und was sie deinem Geist nicht offenbaren mag,  
/ Das zwingst du ihr nicht ab mit Hebeln und mit Schrauben.*

Johann Wolfgang Goethe, Faust I

# 4

## Physikalische Anwendungen

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Grundlagen des Modells der modifizierten de Broglie-Relation erläutert und die dadurch modifizierte Quantentheorie diskutiert wurden, soll nun ein Blick auf die Implikationen für experimentell meßbare Phänomene aus den unterschiedlichsten Bereichen der modernen Physik geworfen werden.

### **4.1 Einfache Probleme der Quantenmechanik**

Da die Einführung einer Minimalen Länge nicht nur die Quantenfeldtheorie, sondern bereits die Quantenmechanik modifiziert, liegt es nahe, zunächst deren elementare Anwendungen zu untersuchen.

### 4.1.1 Der harmonische Oszillator

Die Schrödingergleichung für den Harmonischen Oszillator lautet

$$\left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \right) |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad .$$

Diese Gleichung soll in der Impulsdarstellung gelöst werden, dazu benötigen wir den Ortsoperator in der Impulsdarstellung aus Gleichung (3.18):

$$\langle p | \hat{x} | p \rangle = -i \frac{\partial}{\partial k(p)} = -i \frac{\partial p}{\partial k} \frac{\partial}{\partial p} \quad .$$

Zur Berechnung der Korrekturen an die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators wird die funktionale Abhängigkeit (3.11) mit  $\gamma = 1$  benutzt und bis zur ersten nichtlinearen, nichtverschwindenden Ordnung entwickelt:

$$p^\mu(k^\mu) = \left( 1 + \frac{1}{3} L_f^2 |k^\mu|^2 \right) k^\mu \quad .$$

Daraus ergibt sich der Korrekturfaktor im Ortsoperator zu

$$\frac{\partial p}{\partial k} \approx 1 + L_f^2 k^2 \approx 1 + \frac{p^2}{M_f^2}$$

und die zu lösende Schrödingergleichung lautet dann:

$$E\psi(p) = \left( \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} \left( 1 + \frac{p^2}{M_f^2} \right) \frac{p}{M_f^2} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{m\omega^2}{2} \left( 1 + \frac{p^2}{M_f^2} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \psi(p) \quad .$$

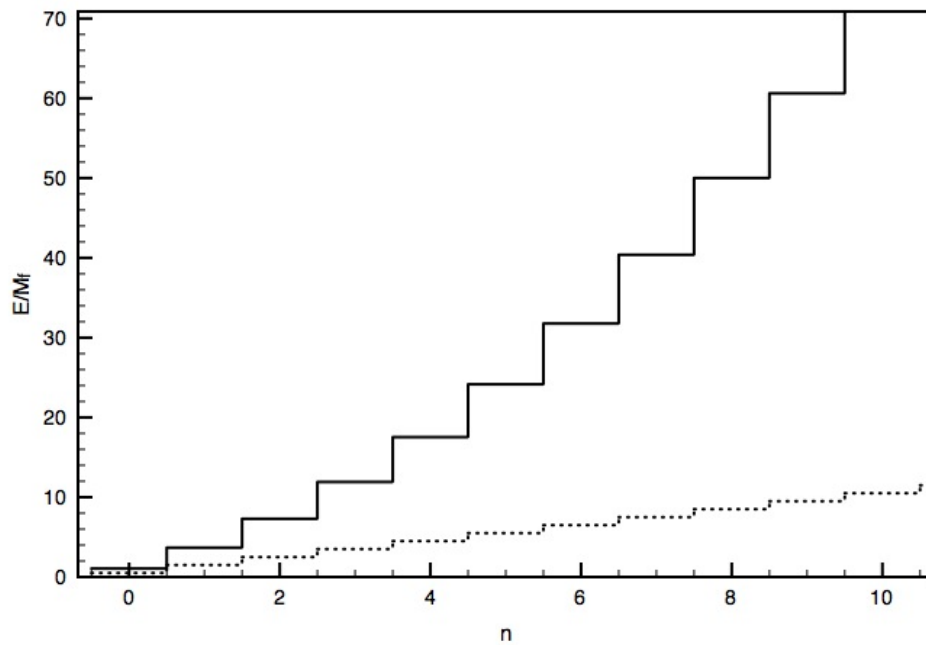
Diese Gleichung läßt sich analytisch lösen und es ergeben sich die Energieniveaus [KMM95, H<sup>+</sup>03]:

$$E_n = \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{4\sqrt{r}} + \sqrt{1 + \frac{1}{16r}} \right) + \omega \frac{1}{4\sqrt{r}} n^2$$

mit

$$r = \frac{M_f^4}{4m^2\omega^2} \quad .$$





**Abbildung 4.1:** Die Energieniveaus des harmonischen Oszillators im Modell der modifizierten de Broglie-Relation (durchgezogene Linie) im Vergleich mit den klassischen Werten (gepunktete Linie). Als Parameter wurden  $\omega = m = M_f$  gewählt.

Die Energieniveaus sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Es zeigt sich, daß die Energieniveaus für höhere Moden des Harmonischen Oszillators immer größer gegenüber den klassischen Niveaus werden, analog dem Verhalten der Funktionen  $p(k)$  bzw.  $E(\omega)$ : Da die Frequenz der erlaubten Moden nach oben durch  $M_f$  beschränkt ist, ist ein solcher Anstieg erforderlich, um den gesamten Energiebereich abzudecken.

### 4.1.2 Das Wasserstoffatom

Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms lassen sich sehr einfach mit dem Virialtheorem und der Bohrschen Quantisierungsbedingung  $n\lambda = 2\pi r_n$  bestimmen. Dies ist zwar eine semiklassische Rechnung, sie liefert jedoch dasselbe Resultat wie die Schrödingergleichung. Aus der Quantisierungsbedingung folgt für die Wellenzahl

$$k = 2\pi/\lambda = n/r_n$$

und damit mit dem Virialtheorem:

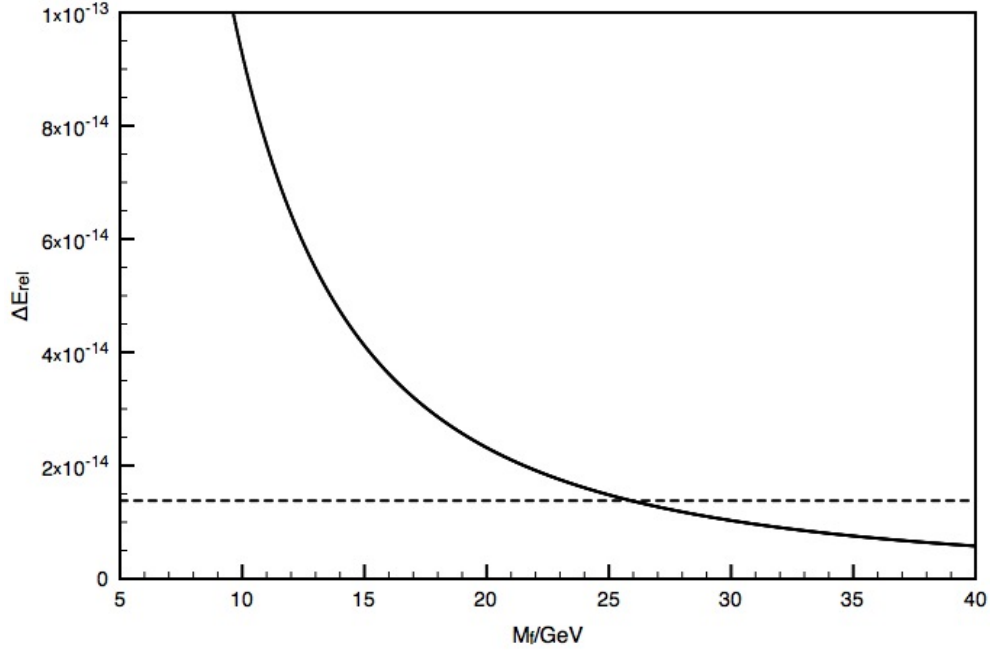
$$E_n = \frac{1}{2}E_{pot} = \frac{e^2}{2} \frac{1}{r_n} = \frac{e^2}{2} \frac{k(p)}{n} \quad .$$

Da die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms weit unterhalb der fundamentalen Skala  $M_f$  liegt, benutzt man wiederum die erste nichtlineare, nichtverschwindende Ordnung der Funktion  $k(p)$  aus (3.10) mit  $\gamma = 1$ :

$$k^\mu(p^\mu) = \left(1 - \frac{1}{3} \frac{|p^\mu|^2}{M_f^2}\right) p^\mu \quad .$$

Damit folgt für die Energieniveaus:

$$E_n = \frac{e^2}{2n} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{p^2}{M_f^2}\right) p \quad .$$



**Abbildung 4.2:** Die relative Abweichung  $\Delta E = (E_{2S-1S,ML} - E_{2S-1S})/E_{2S-1S}$  der 2S-1S-Übergangsenergie des Wasserstoffatoms durch die minimale Länge in Abhängigkeit von der fundamentalen Skala  $M_f$ . Die gestrichelte Linie zeigt das observierbare Limit von  $1,38 \cdot 10^{-14}$  [F<sup>+</sup>04].

Das Virialtheorem besagt weiterhin, daß  $E = -E_{kin} = -p^2/2m$ , daher kann man in obiger Gleichung  $p$  durch  $E_n$  ausdrücken und erhält:

$$E_n^2 = \frac{e^4}{4n^2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{p^2}{M_f^2}\right)^2 p^2 = -\frac{me^4}{2n^2} \left(1 + \frac{2m}{3} \frac{E_n}{M_f^2}\right)^2 E_n \quad .$$

Dies ist eine kubische Gleichung für  $E_n$ . Die korrekte Lösung ergibt sich durch den Übergang  $M_f \rightarrow \infty$ , mit dem das klassische Resultat reproduziert werden muß. Die Energieeigenwerte lauten

$$E_n = \frac{9n^2 M_f^4}{4e^4 m^3} \left( \sqrt{\frac{4e^4 m^2}{3n^2 M_f^2} + 1} - \frac{2e^4 m^2}{3n^2 M_f^2} - 1 \right) \quad .$$

Die Übergangsenergie für die ersten zwei Energieniveaus des Wasserstoffatoms, also des 2S-1S-Übergangs ist experimentell sehr genau bekannt. Die Abweichungen von der klassischen Lösung sind geringer als  $1,38 \cdot 10^{-14}$  [F+04]. Die relative Abweichung durch die minimale Länge ist in Abbildung 4.2 aufgetragen. Es ergibt sich ein unteres Limit an  $M_f$  von etwa 25 GeV, abhängig von der benutzten Relation  $k(p)$ .

## 4.2 Das gyromagnetische Moment

Die Entwicklung der Dirac-Gleichung als quantenmechanische Bewegungsgleichung des Elektrons hatte zwei Ziele: Erstens sollte sie im relativistischen Sinne invariant sein, d.h. die Lorentzsymmetrie wahren, zweitens - im Gegensatz zur Klein-Gordon-Gleichung - von maximal erster Ordnung in der Zeit sein, damit eine bekannte Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt auch die Wellenfunktionen aller anderen Zeitpunkte vollständig determiniert [Dir28]. Als Ansatz bot sich daher eine Linearisierung der relativistischen Energie-Impuls-Relation der Form

$$(E - \sum_i \alpha_i p_i - \beta m)(E + \sum_i \alpha_i p_i + \beta m) = 0$$

an. Es zeigte sich, daß diese Linearisierung nur gelingen konnte, wenn die Faktoren  $\alpha_i$  und  $\beta$  matrixwertig waren, und zwar mindestens von der Dimension 4. Dies bedeutete im Zuge der Quantisierung die Einführung zusätzlicher diskreter Freiheitsgrade für die Wellenfunktion. Diese Freiheitsgrade konnten aufgrund ihrer algebraischen Eigenschaften als Eigendrehimpuls bzw. *Spin* des Elektrons interpretiert werden, jedoch folgt aus der Dirac-Gleichung, daß das durch diesen Spin induzierte magnetische Moment doppelt so groß ist, wie klassisch erwartet. Man führt daher den *Landé-g-Faktor* ein,

$$\vec{m} = g \frac{q}{2m} \vec{s} \quad ,$$

den die Dirac-Gleichung entsprechend zu  $g = 2$  determiniert. Es ist heute üblich, die Größe

$$a = \frac{g - 2}{2}$$

anzugeben; für die Dirac-Gleichung ist daher  $a = 0$ .

In der Quantenfeldtheorie ergeben sich weitere für den g-Faktor relevante Terme, die durch Selbstenergiekorrekturen hervorgerufen werden [Dav03]. Den weitaus größten Teil dieser Korrekturen macht die Quantenelektrodynamik aus, kleinere Korrekturen ergeben sich durch die schwache und die starke Wechselwirkung. Während jedoch die elektroschwachen Terme theoretisch quasi beliebig genau bestimmt werden können, benötigt die Berechnung der quantenchromodynamischen Terme experimentelle Daten, nämlich die Spektralfunktionen der Mesonen. Dies hat zwei Auswirkungen:

- Die QCD-Beiträge sorgen zwar nur für kleine Korrekturen an  $g$  bzw.  $a$ , jedoch verantworten sie den größten Teil des Fehlers.
- Die Spektralfunktionen werden experimentell aus dem Wirkungsquerschnitt  $e^+e^- \rightarrow$  Hadronen oder aus dem  $\tau$ -Zerfall gewonnen. Die Ergebnisse beider Experimente sind jedoch so unterschiedlich, daß je nach benutzter Spektralfunktion die Beträge der Korrekturen differieren.

Aufgrund der letzteren Tatsache werden zwei theoretisch ermittelte Werte für das gyromagnetische Moment im Standardmodell angegeben, je nach benutzter Quelle für die Spektralfunktionen lauten sie:

$$a_\mu^{SM, e^+e^-} = (11659180,9 \pm 11,1) \cdot 10^{-10} \quad , \quad (4.1)$$

$$a_\mu^{SM, \tau} = (11659195,6 \pm 9,7) \cdot 10^{-10} \quad . \quad (4.2)$$

Es handelt sich hier um die Werte für das Myon. Durch die Kombination aus höherer Masse (verglichen mit dem Elektron) und dennoch ausreichender Lebensdauer, die genaue Messungen ermöglicht, liefert es die besten Resultate für ein Limit an die fundamentale Skala  $M_f$ .

### 4.2.1 Korrekturen durch die modifizierte de Broglie-Relation

Die Korrekturen an das gyromagnetische Moment lassen sich mit der modifizierten Dirac-Gleichung (3.21) berechnen [Har04]. Es handelt sich hier um ein Niederenergiephänomen, dementsprechend wird wieder die erste nichtlineare, nichtverschwindende Ordnung der Funktion  $p(k)$  aus (3.11) benutzt; es sei  $\gamma = 1$ :

$$p^\mu(k^\mu) = \left(1 + \frac{1}{3}L_f^2|k^\mu|^2\right)k^\mu \quad .$$

Die modifizierte Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines äußeren Felds lautet dann:

$$\omega\psi(\vec{r}) \approx \left(-i\left(1 - \frac{1}{3}L_f^2m^2\right)\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{mag} + \left(1 + \frac{1}{3}L_f^2\left(\Delta_{mag} - m^2\right)\right)\beta m\right)\psi(\vec{r}) \quad .$$

$\vec{\nabla}_{mag} = \vec{\nabla} + ie\vec{A}$  und  $\Delta_{mag} = \vec{\nabla}_{mag}^2$  sind die an das Magnetfeld gekoppelten Operatoren. Dies ist die Eigenwertgleichung für die Frequenz, die über die Funktion  $E(\omega)$  mit der Energie verknüpft ist. In Abschnitt 4.2.2 wird deutlich, daß experimentell in der Tat die Frequenz die für die Messung relevante Größe ist.

In der nichtrelativistischen Näherung  $p \ll m$  gilt entsprechend  $\Delta_{mag}\psi(\vec{r}) \ll m^2\psi(\vec{r})$  und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\omega\psi(\vec{r}) \approx \left(-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{mag} + \beta m\right)\left(1 - \frac{1}{3}L_f^2m^2\right)\psi(\vec{r}) \quad .$$

Im folgenden gilt die Abkürzung:

$$f = 1 - \frac{1}{3}L_f^2m^2 \quad .$$

Man spaltet nun die 4 Spinorkomponenten der Wellenfunktion in zwei 2-komponentige Spinoren auf, die sogenannten großen und kleinen Komponenten:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}(\omega - mf)|\chi\rangle &= -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag} f \xi(\vec{r}) \quad , \\(\omega + mf)|\xi\rangle &= -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag} f \chi(\vec{r}) \quad .\end{aligned}$$

Die nichtrelativistische Näherung  $E \approx m$  ergibt, da  $\omega \approx Ef$  in der Näherung der Funktion  $\omega(E)$  nach Gleichung (3.10) gilt:

$$\omega \approx mf \quad , \quad \omega + mf \approx 2mf$$

Es folgt daher:

$$\xi(\vec{r}) \approx -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag} f}{2mf} \chi(\vec{r}) \approx -i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag}}{2m} \chi(\vec{r}) \quad .$$

Die Eigenwertgleichung für die im nichtrelativistischen Bereich relevanten großen Komponenten lautet somit:

$$-\frac{1}{2m} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag}) (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}_{mag}) f \chi(\vec{r}) = (\omega - mf) \chi(\vec{r}) \quad .$$

Das doppelte Skalarprodukt läßt sich mit Hilfe der Relation

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \mathbb{1} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad .$$

auswerten und es folgt schließlich:

$$\left( -\frac{f}{2m} \Delta_{mag} \mathbb{1} + \frac{ef}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \chi(\vec{r}) = (\omega - mf) \chi(\vec{r}) \quad .$$

---

<sup>1</sup>Der Name rührt vom Beitrag der beiden Komponenten zum Betrag des gesamten Vektors her; bei nichtrelativistischen Systemen ist der der kleinen Komponenten verschwindend klein gegenüber dem der großen Komponenten.

Die Modifikation des gyromagnetischen Moments läßt sich direkt aus der Kopplung an das Magnetfeld ablesen:

$$g \approx g_{SM} f = g_{SM} \left( 1 - \frac{1}{3} L_f^2 m^2 \right) = g_{SM} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{m^2}{M_f^2} \right) . \quad (4.3)$$

Die Modifikation skaliert offenbar mit dem Quadrat der Teilchenmasse, was den Vergleich mit den experimentellen Daten des Myons anstatt des Elektrons begründet.

## 4.2.2 Experimentelle Daten

Die bislang exaktesten Experimente zur Messung des gyromagnetischen Moments des Myons wurden am Brookhaven National Laboratory (BNL) in Upton, NY, USA durchgeführt. Dort werden Protonen im Alternating Gradient Synchrotron (AGS) beschleunigt, durch Kollision mit einem Zielobjekt entstehen geladene Pionen  $\pi^\pm$ , die fast alle in Myonen  $\mu^\pm$  zerfallen[Y+06]. Diese Myonen werden in einen Speicherring injiziert, in dem sie bis zu ihrem Zerfall zirkulieren. Der Zerfallsprozeß ist

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm \bar{\nu}_e \nu_\mu .$$

Die Richtung des so entstandenen Elektrons ist verknüpft mit der Richtung des Spins der Ursprungsmyons, da dieses im magnetischen Feld des Speicherrings präzessiert, oszilliert auch die zeitliche Verteilung des Elektronenstroms im Detektor, abhängig von der Präzessionsfrequenz  $\omega$  des Myons[Muo95]:

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\gamma\tau) (1 - A \cos(\omega t + \phi)) . \quad (4.4)$$

$N_0$  ist hier ein Normierungsfaktor,  $\gamma = \sqrt{1 - v^2}$  der relativistische  $\gamma$ -Faktor,  $\tau = (2,19703 \pm 0,00004) \cdot 10^{-6} s$  die mittlere Lebensdauer des Myons im Laborsystem und  $A$  ein bekannter Faktor, der von der Breite der Energie- und Winkelverteilung der gemessenen Elektronen und ihrer durchschnittlichen



Polarisierung abhängt. Die Präzessionsfrequenz der Myonen läßt sich somit genau messen.

Diese Präzessionsfrequenz besteht aus zwei Teilen  $\omega = \omega_s + \omega_z$ , nämlich der Präzession des Spins (die die gesuchte Größe ist)

$$\omega_s = \frac{g_\mu e B}{2m} + (1 - \gamma) \frac{e B}{m\gamma}$$

und der orbitalen Präzession des Myons im Magnetfeld (Zyklotronfrequenz)

$$\omega_z = -\frac{e B}{m\gamma} .$$

Damit ergibt sich mit der bereits eingeführten Definition  $a_\mu = (g - 2)/2$ :

$$\omega = \frac{e}{m} a_\mu B . \quad (4.5)$$

Zur Präzession des Myons trägt nicht nur das magnetische, sondern auch das elektrische Feld im Beschleuniger bei. Der Einfluß des elektrischen Feldes läßt sich jedoch durch geschickte Wahl der Beschleunigerparameter aufheben: Insgesamt lautet die Präzessionsfrequenz[BMT59]:

$$\vec{\omega} = \frac{e}{m} \left( a_\mu \vec{B} - \left( a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \vec{v} \times \vec{E} \right) .$$

Wählt man die Beschleunigerparameter so, daß die Geschwindigkeit (d.h. der  $\gamma$ -Faktor) der Myonen den Faktor

$$a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1}$$

verschwinden läßt, wird der Einfluß des elektrischen Feldes gerade aufgehoben. Dies ist der Fall bei  $\gamma = 29,3$ ,  $p = 3,094$  GeV. Die nun ausschließlich durch das magnetische Feld hervorgerufene Präzession wird mittels (4.4) gemessen und mit genauer Kenntnis des herrschenden magnetischen Feldes  $\vec{B}$  läßt sich aus (4.5) das gyromagnetische Moment des Myons  $a_\mu$  bestimmen.

Die Messung am BNL lieferte den folgenden Wert für  $a_\mu$ [B<sup>+</sup>04]:

$$a_\mu = (11659214 \pm 8) \cdot 10^{-10}$$

Zusammen mit den bisher gemachten Messungen anderer Gruppen ergibt sich damit der experimentelle Weltdurchschnitt zu

$$a_\mu = (11659208 \pm 6) \cdot 10^{-10} \quad .$$

Der Vergleich mit den im Standardmodell theoretisch ermittelten Werten (4.1) und (4.2) zeigt eine Übereinstimmung von Theorie und Experiment von der Größenordnung  $10^{-8}$ . Der im vorangegangenen Abschnitt ermittelte Korrekturfaktor 4.3 durch die Berücksichtigung einer Minimalen Länge muß daher kleiner sein, was zu einem Limit an die fundamentale Skala  $M_f$  führt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{m_\mu^2}{M_f^2} &\lesssim 10^{-8} \\ M_f &\gtrsim \frac{1}{\sqrt{3}} 10^4 m_\mu \quad . \end{aligned}$$

Die Masse des Myons ist  $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}$ . Damit erhält man schließlich[HHBS04, HKB<sup>+</sup>05]:

$$M_f \gtrsim 577 \text{ GeV} \quad .$$

Dieses Ergebnis ist jedoch kritisch zu bewerten: Wie erwähnt, wurden in der Herleitung die Entwicklungen der Funktionen (3.10) bzw. (3.12) für die modifizierte de Broglie-Relation benutzt und dabei willkürlich der Parameter  $\gamma = 1$  gesetzt. Dieser Parameter hat jedoch direkten Einfluß auf die Vorfaktoren der Terme in der Entwicklung. Da von der Funktion  $k(p)$  nur generelle Eigenschaften und nicht die tatsächliche Form bekannt sind, und das obige Ergebnis maßgeblich vom Vorfaktor der dritten Ordnung der Entwicklung abhängt, kann dieses Limit auch nur mit Einschränkung gelten.

Das Problem der starken Abhängigkeit von der spezifischen Form der de Broglie-Relation erfahren alle bislang besprochenen Anwendungen. In der Tat betrifft es jedes Experiment auf Energieskalen weit unterhalb der fundamentalen Skala  $M_f$ , da hier nur ein kleiner Teil (nämlich die erste nichtlineare, nichtverschwindende Ordnung) der modifizierten de Broglie-Relation eingeht. Es stellt sich daher die Frage, ob nicht Hochenergieexperimente bessere Resultate liefern, insbesondere solche, bei denen eher das asymptotische Verhalten der Relation  $k(p)$  zum Tragen kommt, das eine generelle Eigenschaft aller in Frage kommenden Funktionen ist.

### 4.3 Vier-Teilchen-Prozesse der Quantenelektrodynamik

Die in Abschnitt 3.2.2.3 erläuterte Veränderung von Wirkungsquerschnitten in der Quantenfeldtheorie läßt sich aufgrund der vorhandenen experimentellen Daten relativ einfach überprüfen. In der Tat läßt sich eine allgemeine Formel für Streuprozesse mit z.B. je zwei ein- und auslaufenden Teilchen angeben.

Der allgemeine differentielle Wirkungsquerschnitt läßt sich mit Hilfe der Feynman-Amplitude  $M$  wie folgt schreiben[Wei95]:

$$d\sigma = (2\pi)^4 u^{-1} |M|^2 \delta^4(p_{tot,aus} - p_{tot,ein}) d^3 p_{tot,aus} d^3 p_{tot,ein} \quad .$$

Hier sind  $p_{tot,ein}$  und  $p_{tot,aus}$  die Summen der ein- bzw. ausgehenden Impulse,  $u$  die Relativgeschwindigkeit der beiden einlaufenden Teilchen. Die Modifikationen gehen nun einerseits durch die neue Normierung der Impulszustände (3.17) ein, als auch durch die Veränderung des Maßes der Impulsintegrale (3.16). Im obenstehenden Ausdruck fällt eines der beiden Integrale durch die  $\delta$ -Funktion weg (und damit durch die Wahl unserer Normierung auch

die Korrekturen) und es bleibt ein durch die Minimale Länge entstehender Faktor

$$\prod_{\mu} \frac{\partial k^{\mu}}{\partial p^{\mu}} \Big|_{p_{ein}=p_{aus}} .$$

Die zweite Änderung betrifft die Propagatoren der ein- bzw. auslaufenden Teilchen. Für jedes solche Teilchen sehen die Feynman-Regeln einen effektiven Faktor von  $\sim 1/\sqrt{E}$  vor.<sup>2</sup> Für die mikroskopische Berechnung der Feynman-Amplitude ist jedoch  $\omega(E)$  als Lösung der Wellengleichung unter Randbedingungen die relevante Größe[Hos06a]. Um die Amplitude für eine gegebene Energie anzugeben, ergibt sich dadurch für  $|M|^2$  für jedes ein- bzw. auslaufende Teilchen ein Faktor

$$\prod_n \frac{E_n}{\omega_n} .$$

Die obige Diskussion gilt natürlich für alle Stufen der Störungstheorie, allerdings muß man oberhalb der ersten Ordnung auch die erwähnten Modifikationen der Propagatoren berücksichtigen. Wenn man - im Falle der Quantenelektrodynamik - nur die erste Ordnung berücksichtigt und Korrekturen der Ordnung  $e/M_f^2$  vernachlässigt, läßt sich die relative Veränderung des Wirkungsquerschnitts bei Berücksichtigung der Minimalen Länge gegenüber dem Standardmodell als

$$\frac{d\sigma_{ML}}{d\sigma_{SM}} = \prod_n \frac{E_n}{\omega_n} \prod_{\mu} \frac{\partial k^{\mu}}{\partial p^{\mu}} \Big|_{p_{ein}=p_{aus}} \quad (4.6)$$

schreiben[H<sup>+</sup>03]. Überraschend ist hier, daß das Modell der modifizierten de Broglie-Relation sinkende Wirkungsquerschnitte vorhersagt, während Modelle mit Extradimension für gewöhnlich steigende Wirkungsquerschnitte durch die Produktion von Gravitonen, Schwarzen Löchern oder Kaluza-

---

<sup>2</sup>Für Photonen ist dies direkt aus den Feynman-Regeln ersichtlich, für Fermionen folgt es aus der Betrachtung von  $|\bar{u}(p_{aus})\hat{A}u(p_{ein})|^2$ , wobei  $u$ ,  $\bar{u}$  die ein- bzw. auslaufenden Propagatoren sind und  $A$  eine beliebige  $4 \times 4$ -Matrix (siehe [Wei95]).

Klein-Moden prognostizieren. Die Abwägung beider Effekte erfordert weitere Untersuchungen, siehe dazu Abschnitt 4.5.

Die eben errechnete Abweichung läßt sich mit experimentellen Daten vergleichen. Es wird wieder die funktionale Abhängigkeit 3.10 mit  $\gamma = 1$  benutzt und in Gleichung (4.6) eingesetzt:

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_{SM}} = \frac{s^2}{(2M_f)^4} \tanh^{-4} \left( \frac{\sqrt{s}}{2M_f} \right) \cosh^{-2} \left( \frac{\sqrt{s}}{M_f} \right) .$$

Ein experimentell gut vermessener Wirkungsquerschnitt ist der der Fermion-Fermion-Streuung  $e^+e^- \rightarrow f^+f^-$ . Die experimentellen Daten vom Large Electron-Positron-Beschleuniger (LEP) am CERN in Genf, Schweiz sind in Abbildung 4.3 zusammen mit der Abweichung durch die Minimale Längenskala dargestellt[LEP03]. Trotz des hohen Meßfehlers liegt das Limit an  $M_f$  in der Größenordnung von etwa 500 GeV.

## 4.4 Der Casimir-Effekt

In der zweiten Quantisierung, die den Übergang von der Quantenmechanik zur Quantenfeldtheorie darstellt, tritt zum ersten Mal der Begriff der Vakuumenergie auf: Dazu entwickelt man das freie elektrische Feld als Lösung der freien Maxwellgleichung in der Coulombbeichung

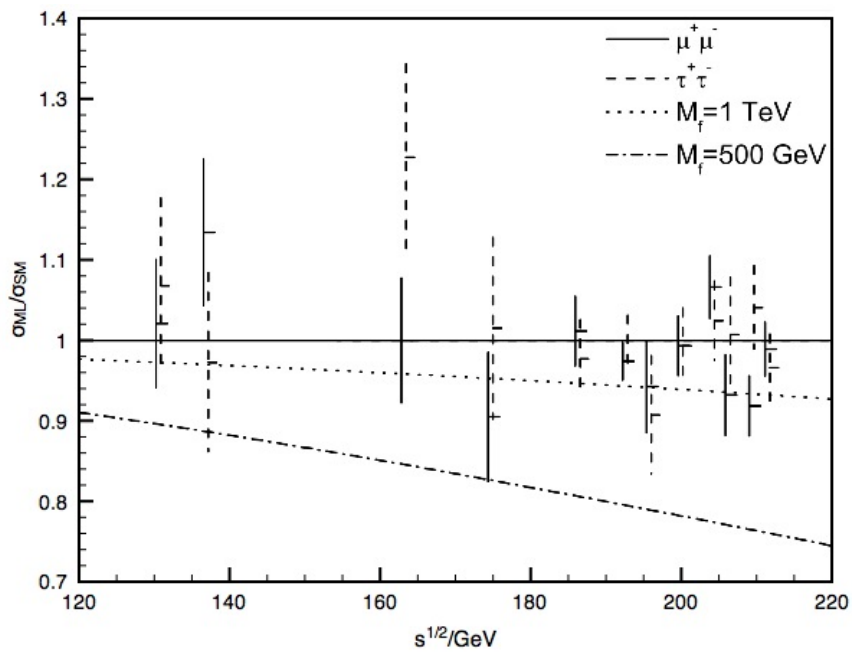
$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

in Partialwellen,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} \int d^3k \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (a(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} + a^*(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}}) \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) ,$$

wobei  $\lambda$  die Polarisationen bezeichnet und  $\vec{u}_{\lambda}(\vec{k})$  mit

$$\vec{k} \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) = 0 \quad , \quad \vec{u}_{\lambda}(\vec{k}) \vec{u}_{\mu}(\vec{k}) = \delta_{\lambda\mu}$$



**Abbildung 4.3:** Die relative Abweichung des Wirkungsquerschnitt  $e^+e^- \rightarrow f^+f^-$  durch das Modell der modifizierten de Broglie-Relation für verschiedene fundamentale Skalen  $M_f$ . Die experimentellen Werte für  $\mu$  und  $\tau$  wurden am LEP gemessen. [LEP03]

die Richtung des Feldes. Diesen Ansatz setzt man in die klassische Formel für die Energie des elektromagnetischen Feldes ein:

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int d^3r (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \left( \left( \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} \right)^2 + (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t))^2 \right)$$

und erhält

$$H_{EM} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3k (a(\vec{k}, t) a^*(\vec{k}, t) + a^*(\vec{k}, t) a(\vec{k}, t)) \omega_k \quad .$$

mit  $\omega_k^2 = \vec{k}^2$ . Die Form unter dem Integral ist exakt die des quantisierten harmonischen Oszillators, interpretiert man die Fouriermoden als Erzeuger- und Vernichteroperatoren. Und in der Tat, setzt man die Entwicklung des Feldes in die Maxwellgleichung

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

ein, ergibt sich für die Koeffizienten die Bewegungsgleichung des Harmonischen Oszillators:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(\vec{k}, t) = -\vec{k}^2 a(\vec{k}, t) \quad .$$

Dies erlaubt schließlich die Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Überlagerung unendlich vieler Oszillatoren mit verschiedenen Moden. Die Quantisierung erfolgt also durch den Übergang

$$a(\vec{k}, t) \rightarrow \hat{a}_k \quad .$$

Der Hamiltonoperator des elektromagnetischen Feldes lautet damit:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{EM} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3k (\hat{a}_k \hat{a}_k^{\dagger} + \hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k) \omega_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3k (\hat{a}_k^{\dagger} \hat{a}_k + \hat{a}_k \hat{a}_k^{\dagger} + [\hat{a}_k, \hat{a}_k^{\dagger}]) \omega_k \\ &= \sum_{\lambda} \int d^3k (\hat{N}_k + \frac{1}{2} [\hat{a}_k, \hat{a}_k^{\dagger}]) \omega_k \quad , \end{aligned}$$

wobei  $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$  analog zum harmonischen Oszillator den Operator der Anregungsstufe eines jeden Oszillators darstellt. Im elektromagnetischen Feld entspricht er der Anzahl der Photonen mit der Wellenzahl  $k$ .

Interessant ist nun, daß selbst im Falle des Vakuums, also wenn keine Photonen existieren bzw. der Eigenwert aller  $\hat{N}_k$  gleich 0 ist, der Eigenwert des Hamiltonoperators nicht verschwindet. Der Vakuumerwartungswert der Energie lautet dann nämlich:

$$\langle 0 | \hat{H}_{EM} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3 k \langle 0 | [\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger] | 0 \rangle \omega_k \quad .$$

Dabei ergibt sich der Kommutator analog zum harmonischen Oszillator aus der Definition der Erzeuger- und Vernichteroperatoren:

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{k}), \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{k}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{k}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{k}) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{k}) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{k}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{x}\hat{x} - i\hat{x}\hat{k} + i\hat{k}\hat{x} - i^2 \hat{k}\hat{k} - (\hat{x}\hat{x} + i\hat{x}\hat{k} - i\hat{k}\hat{x} - i^2 \hat{k}\hat{k}) \right) \\ &= \frac{1}{2} 2i(\hat{k}\hat{x} - \hat{x}\hat{k}) \\ &= -i[\hat{x}, \hat{k}] \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit dem Kommutator

$$[\hat{x}, \hat{k}] = i$$

folgt daher

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad .$$

Der Vakuumerwartungswert lautet also:

$$\langle 0 | \hat{H}_{EM} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \int d^3 k \omega_k \quad .$$



Im Teilchenbild und - der Einfachheit halber - unter Vernachlässigung der Polarisation bedeutet dies schließlich, da  $E^2 = p^2$ ,  $E = |p|$ :

$$\begin{aligned}\langle 0|\hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{2} \int d^3p E_p \\ &= \frac{1}{2} \int d^3p |p| \\ &= \infty .\end{aligned}\tag{4.8}$$

Der Vakuumerwartungswert der Energie ist also unendlich.

In der Berechnung bzw. Messung der meisten physikalischen Phänomene muß der unendlichen Vakuumenergie keine Rechnung getragen werden, da physikalische Experimente ja ohnehin keine absoluten Energiewerte messen sondern nur Energiedifferenzen. Dies ändert sich jedoch, wenn Randbedingungen beachtet werden müssen: In diesem Fall sind nicht mehr alle Moden erlaubt, sondern nur noch solche, die eben diese Randbedingungen erfüllen. Dadurch kann sich innerhalb eines begrenzten Raumes die überabzählbar unendliche Menge der Moden zu einer abzählbar unendlichen Menge reduzieren, was zwar immer noch eine unendliche Vakuumenergie zur Folge hätte, aber eine endliche Differenz gegenüber der Energie des randbedingungsfreien Vakuums. Gemäß  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$  führt eine Änderung der Energie bzw. eine Energiedifferenz zu einer Kraft.

Für zwei unendlich ausgedehnte parallele Platten wurde diese Energiedifferenz zuerst durch H. B. Casimir berechnet. Mit Hilfe der Erweiterung der Riemannsches  $\zeta$ -Funktion gelang es, die Differenz der Vakuumerwartungswerte zwischen und außerhalb der Platten zu berechnen und es ergab sich eine Kraft pro Fläche  $A$  der Platte beim Abstand  $a$  von[Cas48]

$$\frac{F_C}{A} = -\frac{\hbar c\pi^2}{240a^4} ,\tag{4.9}$$

die auch experimentell bestätigt ist[CMKM02].

#### 4.4.1 Der Casimir-Effekt in der aktuellen Forschung

Vor dem Hintergrund der modernen Nanotechnologie hat ein grundlegendes Verständnis des Casimir-Effekts eine praktische Bedeutung: Auf den Größenordnungen, in die diese Technologie heute vorgedrungen ist, ist die Casimir-Kraft die stärkste Kraft zwischen ungeladenen Objekten.

Theoretische Bedeutung hat der Casimir-Effekt insbesondere dadurch, daß sich in ihm die Nullpunktsenergie des Vakuums manifestiert. Als fundamentaler Aspekt der Quantenfeldtheorie ist er daher insbesondere Gegenstand von Theorien, die sich mit den grundlegenden Fragen des Standardmodells beschäftigen bzw. eine Erweiterung desselben versuchen. So konnte z.B. die in Abschnitt 2.1.3.2 erläuterte Hawking-Strahlung durch einen Casimir-Effekt am Schwarzschildradius des Schwarzen Loches erklärt werden[NB79].

In der Kosmologie wurde versucht, die Kosmologische Konstante als Manifestation des Casimir-Effektes zu interpretieren[Eli01]. Weiterhin wurde sein Einfluß auf die Entwicklung des frühen Universums, insbesondere im Hinblick auf die Inflation betrachtet[CLOP96].

Der Einfluß des Casimir-Effektes in der Stringtheorie wurde in verschiedenen Bereichen untersucht: Zum einen kann er einen Einfluß auf die Entwicklung der bereits erwähnten Untermannigfaltigkeiten, den Branes ausüben[FH00], zum anderen gibt es einen Casimir-Effekt auf dem String selbst, was zu einer Renormierung der String-Spannung führt[HLN00].

In Modellen mit Extradimensionen ist insbesondere die Frage nach der Stabilisierung der kompaktifizierten Extradimensionen vor dem Hintergrund des Casimir-Effektes interessant: Es zeigte sich, daß der Casimir-Effekt in einer solchen Konfiguration abstoßend wirkt und tatsächlich zur Stabilisierung des Kompaktifizierungsradius beitragen kann[PP01].

Schließlich sollte in Modellen mit einer Minimalen Länge die Regularisierung der Impulsintegrale einen Einfluß auf die auftretenden Unendlichkeiten haben. Erste Korrekturen an den Casimir-Effekt wurden im

Rahmen der Pfad-Integral-Dualität (Modifikationen an den Propagator) berechnet [SSP97].

#### 4.4.2 Herleitung im Modell der modifizierten de Broglie-Relation

Der Einfluß der modifizierten de Broglie-Relation auf den Vakuumerwartungswert läßt sich auf das modifizierte Maß im Impulsraum zurückführen: Es sind nur noch Moden mit einer Wellenzahl  $k < M_f$  erlaubt, durch die Funktion  $k(p)$  ändert sich der Vakuumerwartungswert (4.8) und lautet nun mit dem neuen Impulsmaß (3.16):

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3p \left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| E_p \quad .$$

Wie in Abschnitt 3.2.3 erläutert, bleibt im vorliegenden Modell die Lorentzinvarianz im  $(E, p)$ -Raum erhalten und daher gilt weiterhin  $E^2 = p^2$ ,  $E = |p|$ . Aufgrund ihrer für die folgende Rechnung vorteilhaften Eigenschaften wird das Gaußsche Fehlerintegral (3.12) für  $k(p)$  benutzt. Mit  $\epsilon = L_f^2 \pi / 4$  gilt dann für die Jacobi-Determinante:

$$\left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| \approx e^{-\epsilon p^2}$$

Damit lautet der Vakuumerwartungswert der Energie schließlich:

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3p e^{-\epsilon p^2} |p| \quad . \quad (4.10)$$

Eine erste Konsequenz dieses Erwartungswerts ist die veränderte Energiedichte für den freien Raum ohne Randbedingungen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
 E_{0,f} = \langle 0|\hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{2} \int d^3p e^{-\epsilon p^2} |p| \\
 &= \frac{4\pi}{2} \int_0^\infty dp e^{-\epsilon p^2} p^3 \\
 &= 2\pi \frac{1}{2\epsilon^2} \\
 &= \frac{16}{\pi} \frac{1}{L_f^2} = \frac{16}{\pi} \frac{M_f}{L_f^3} .
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Minimale Länge sorgt also in der Tat für eine Regularisierung.

Zur Berechnung des Casimir-Effekts benötigt man nun noch den Vakuum-erwartungswert innerhalb einer Grenzfläche. Für den einfachsten Fall zweier unendlich ausgedehnter paralleler Platten in der  $x - y$ -Ebene mit dem Abstand  $a$  ergibt sich folgendes Bild: In  $x - y$ -Richtung sind noch immer alle Moden erlaubt, d.h. das Integral über diese Moden lautet analog:

$$\int d^2p e^{-\epsilon p_{\parallel}^2} = 2\pi \int_0^\infty dp_{\parallel} e^{-\epsilon p_{\parallel}^2} p_{\parallel} ,$$

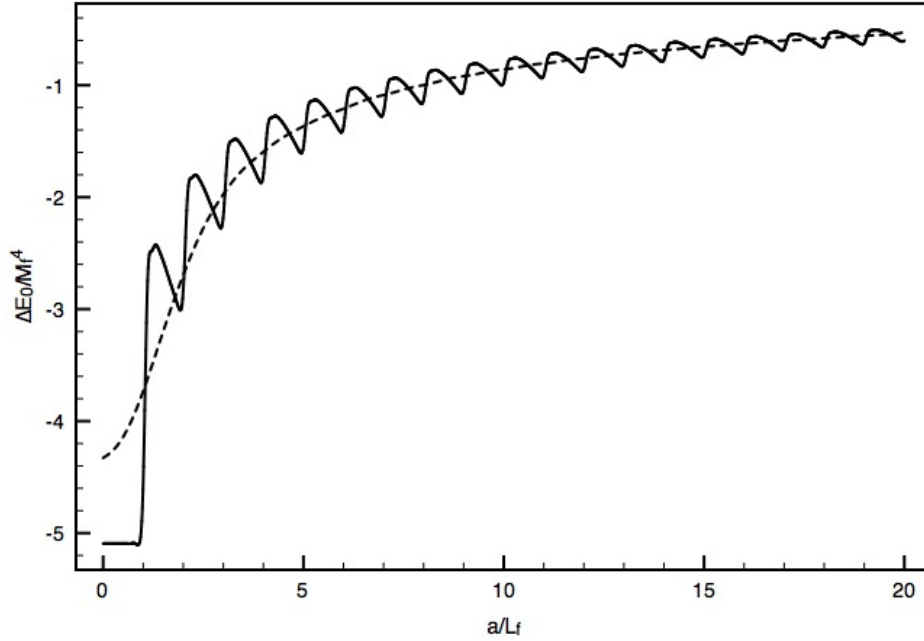
wobei  $p_{\parallel}^2 = p_x^2 + p_y^2$ . Als Moden in  $z$ -Richtung kommen aufgrund der Randbedingungen nur noch solche in Frage, deren Vielfache der Wellenlänge dem Plattenabstand  $a$  entsprechen, d.h.  $k_l = l/a$ . Die maximale erlaubte Wellenlänge ist  $L_f$ , damit gilt für die maximale Anzahl der Moden  $l_{max} = \lfloor a/L_f \rfloor$ ; hierbei ist

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$

die nächstkleinere ganze Zahl. Die Summe über die Moden lautet also

$$\sum_{l=-l_{max}}^{l_{max}} \Delta p_l e^{-\epsilon p_l^2} .$$

Die erlaubten Impulse  $p_l = p(k_l)$  sind dabei aufgrund der Nichtlinearität der Funktion  $p(k)$  nicht mehr äquidistant, es gilt  $\Delta p_l = p_l - p_{l-1}$ . Zusammen-



**Abbildung 4.4:** Die Casimir-Energiedifferenz für zwei Platten im Falle der Existenz einer Minimalen Länge. Die durchgezogene Linie zeigt das reine Ergebnis aus den Gleichungen (4.11) und (4.12), die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für eine Gaußsche Ortsunschärfe der beiden Platten mit der Varianz  $L_f$ . Die beiden Kurven sind numerisch ermittelt.

gefaßt lautet der Vakuumerwartungswert der Energie innerhalb der Platten damit[HH06]:

$$E_{0,P} = \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \pi \sum_{l=-l_{max}}^{l_{max}} \Delta p_l \int_0^\infty dp_{\parallel} e^{-\epsilon p_{\parallel}^2} e^{-\epsilon p_l^2} p_{\parallel} \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_l^2} \quad . \quad (4.12)$$

Die Casimir-Kraft entsteht nun aus der Energiedifferenz innerhalb und außerhalb der Platten, die relevante Größe ist also  $\Delta E_0 = E_{0,P} - E_{0,f}$ . Sie ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

Der klassische Grenzfall stellt sich wie folgt dar: Im Limit  $M_f \rightarrow \infty$ , d.h.  $L_f \rightarrow 0$  gehen die Ausdrücke (4.11) und (4.12) in die klassische Form über:

Durch die Exponentialfunktion sind die Integrale uniform konvergent und man kann Limit und Integration vertauschen, wodurch dann

$$\epsilon \xrightarrow{L_f \rightarrow 0} 0 \quad , \quad e^{-\epsilon p^2} \xrightarrow{L_f \rightarrow 0} 1 \quad .$$

Der Vakuumerwartungswert des freien Raums (4.11) geht damit unmittelbar in den klassischen Ausdruck über; für den Vakuumerwartungswert mit Randbedingungen gilt zudem

$$l_{max} = \lfloor a/L_f \rfloor \xrightarrow{L_f \rightarrow 0} \infty \quad ,$$

und wegen dem Limit  $p = k$  außerdem

$$\Delta p \xrightarrow{L_f \rightarrow 0} \frac{1}{a} \quad .$$

Die Energiedifferenz geht somit über in

$$\Delta E_0 \xrightarrow{L_f \rightarrow 0} 2\pi \int_0^\infty dp_{\parallel} \left( \frac{1}{a} \sum_{l=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \right) p_{\parallel} \sqrt{p_{\parallel}^2 + p_z^2} \quad ,$$

was exakt dem klassischen Ausdruck entspricht.

### 4.4.3 Interpretation

Die Energiedifferenz zwischen dem Vakuum außerhalb und innerhalb der Platten, d.h. (4.12)–(4.11) ist als durchgezogene Linie in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Steigung der Kurve springt immer dann, wenn eine neue Mode zwischen die Platten paßt. Zwar ist die Casimir-Kraft

$$F_C = -\frac{\partial E}{\partial a}$$

an diesen Stellen singulär, die Abbildung zeigt aber deutlich, daß eine endliche Energie ausreichend ist, um diese Singularitäten zu überwinden.

Der Grund für die Singularitäten ist sicherlich die Annahme zweier scharf lokalisierter Platten. In einem Modell einer Minimalen Länge, d.h. einer minimalen Ortsunschärfe ist dies natürlich nicht realisierbar. Nimmt man eine Gauß'sche Unschärfe für jede Platte mit der Varianz  $L_f$

$$\rho(z) = \frac{1}{L_f\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4L_f^2}}$$

an, so ergibt sich für die Casimir-Energie die gestrichelte Linie in Abbildung 4.4. Die Singularitäten durch die periodische Erhöhung der Anzahl der Moden sind verschwunden, die endliche Energie des Vakuums bleibt erhalten. Beide Kurven zeigen, daß die Minimale Länge in der Tat die Singularität der Casimirkraft (4.9) für  $a \rightarrow 0$  eliminiert.

Auch wenn sich die hier diskutierte Größenordnung weit außerhalb des direkt experimentell erschließbaren Bereiches befindet, lassen sich doch über die Analogie zur Hawking-Strahlung Schwarzer Löcher Rückschlüsse auf deren Evaporation ziehen: Die hier dargestellte Untersuchung deutet an, daß die Hawking-Temperatur (2.10) im Limit für kleine Schwarze Löcher nicht mehr divergiert, sondern sich einem endlichen Wert annähert. Dies rechtfertigt die häufig vernachlässigte Zeitentwicklung der Temperatur in der Berechnung und Simulation von Zerfällen mikroskopischer Schwarzer Löcher (siehe z.B. [TYAK05]).

## 4.5 Unterdrückung der Produktion Schwarzer Löcher

Nicht nur auf die Evaporation Schwarzer Löcher, sondern auch auf ihre Entstehung hat die Minimale Länge entscheidenden Einfluß. Dies wird besonders relevant vor dem Hintergrund des in Abschnitt 3.1.3 besprochenen Modells der Großen Extradimensionen, das die Bildung von Schwarzen Löchern in

Teilchenbeschleunigern und anderen hochenergetischen Phänomenen wie z.B. kosmischer Strahlung vorhersagt.

### 4.5.1 Schwarze Löcher in Modellen mit Großen Extra- dimensionen

Schwarze Löcher in einer Raumzeit mit  $D$  zusätzlichen räumlichen Dimensionen lassen sich mit Hilfe der höherdimensionalen Form der Einsteingleichungen (2.7) berechnen. Die allgemeine statische, hyperkugelsymmetrische Lösung lautet analog zur Schwarzschildlösung:

$$ds^2 = -f^2 dt^2 + g^2 dr^2 + r^2 d\Omega_{D+2}^2 \quad , \quad (4.13)$$

wobei  $d\Omega_{D+2}$  das  $2 + D$ -dimensionale infinitesimale Oberflächenelement der  $3 + D$ -Hyperkugel ist,  $r$  ihr Radius und  $t$  die Zeit. Dabei muß

$$f = g^{-1} = \sqrt{1 - \frac{C}{r^{D+1}}}$$

gelten;  $C$  ist eine mit der Masse  $M_{SL}$  des Schwarzen Lochs verknüpfte Integrationskonstante, die abhängig vom benutzten Einheitensystem und den benutzten Konventionen für die Konstanten ist. Die Metrik (4.13) ist singulär bei

$$r = C^{\frac{1}{D+1}} \quad ,$$

analog zur Schwarzschildlösung stellt dieser Radius jedoch keine physikalische Singularität dar, sondern markiert den Ereignishorizont des Schwarzen Lochs. Mit den bisher benutzten Konventionen lautet dieser höherdimensionale Schwarzschildradius[MP86]

$$r_{S,D}(M_{SL}) = \left( \frac{8\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(D+3)} \frac{M_{SL}}{M_f} \right)^{\frac{1}{D+1}} \frac{1}{M_f} \quad . \quad (4.14)$$



#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER

Hierbei ist

$$M_f = \frac{1}{G^{\frac{1}{D+2}}}$$

die fundamentale Skala der Gravitation der höherdimensionalen Raumzeit.

In Modellen mit Großen Extradimensionen, in denen die  $D$  zusätzlichen Dimensionen kompaktifiziert sind, gilt Gleichung für den Schwarzschildradius (4.14) nur dann, wenn er wesentlich kleiner als der Kompaktifizierungsradius ist und die Raumzeit auf der Größenordnung des Schwarzen Loches praktisch flach ist.

Aufgrund der weit unterhalb der Planck-Masse liegenden fundamentalen Skala der Gravitation im ADD-Modell,

$$M_f \ll M_p \quad ,$$

gilt für den Kompaktifizierungsradius nach Gleichung (3.6):

$$\begin{aligned} M_f^{2+D} (2\pi r)^D &\sim M_p^2 \\ M_f^D (2\pi r)^D &\sim \frac{M_p^2}{M_f^2} \\ r &\sim \left( \frac{M_p}{M_f} \right)^{\frac{2}{D}} \frac{1}{2\pi M_f} \end{aligned}$$

Die Größenordnung des Schwarzschildradius (4.14) eines kleinen Schwarzen Loches der Masse  $M_f$  lautet hingegen

$$r \approx \frac{1}{M_f} \quad .$$

Der Schwarzschildradius eines kleinen Schwarzen Loches ist also wesentlich kleiner als der Kompaktifizierungsradius, d.h. die Bildung eines Schwarzen Loches findet tatsächlich auf dem Hintergrund einer flachen,  $3 + 1 + D$ -dimensionalen Raumzeit statt und es gilt die Formel für den höherdimensionalen Schwarzschildradius (4.14).

Ein schwarzes Loch entsteht, wenn eine Masse innerhalb einer (Hyper-)Kugel ihres Schwarzschildradius komprimiert wird. Da dieser Radius im Modell der Großen Extradimensionen stark vergrößert wird ( $r \approx 1/M_f$  verglichen mit  $r \approx 1/M_p$ ), ist die Bildung eines Schwarzen Loches sehr viel wahrscheinlicher und damit auch in auf der Erde durchführbaren Experimenten nachweisbar (natürlich abhängig von der Größe der fundamentalen Skala  $M_f$ ).

### 4.5.2 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Schwarzen Löchern ist viel diskutiert. Eine erste, einfache Annahme ist der geometrische Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_{ij \rightarrow SL} = \pi r_S(\sqrt{s}) \quad ,$$

wobei  $\sqrt{s} = M_{SL}$  die Schwerpunktsenergie der kollidierenden Teilchen und damit die Masse des entstehenden Schwarzen Loches ist. Dieser Wirkungsquerschnitt sollte im semiklassischen Bereich weit überhalb der fundamentalen Skala  $M_f$ , in dem die Gravitation dominant ist, nahezu exakt sein, im Bereich um  $M_f$  könnten aber eventuelle Übergangseffekte durch andere Quantenphänomene auftreten. Als Parametrisierung dieser Unsicherheit durch Quanteneffekte beschränkt man den Wirkungsquerschnitt daher nach unten durch eine Skala  $M_{min} \geq M_f$ , überhalb derer man der semiklassischen Approximation hinreichend vertraut. Der Wirkungsquerschnitt lautet damit vollständig:

$$\sigma_{ij \rightarrow SL} = \pi r_S(\sqrt{s}) \theta(\sqrt{s} - M_{min}) \quad . \quad (4.15)$$

Dieser Wirkungsquerschnitt hat sich in verschiedenen Untersuchungen als robust erwiesen[GT02, DL01]. Die bereits angesprochenen Quanteneffekte im Regime zwischen  $M_f$  und  $M_{min}$  sind stark abhängig von der angenommenen Form der Theorie der Quantengravitation und wurden im Rahmen der Stringtheorie untersucht; hier entstehen Phänomene wie z.B. *Stringballs*[CIM01]. Es zeigt sich aber, daß eine Kontinuität des

Wirkungsquerschnittes aus dem perturbativen zum semiklassischen Regime besteht[DE02] und daher die Validität der Approximation (4.15) gewahrt bleibt.

### 4.5.3 Evaporation

Die Lebensdauer eines Schwarzen Lochs gliedert sich in 3 Phasen[GT02]:

1. Balding-Phase
2. Hawking-Phase
3. Planck-Phase

In der Balding-Phase strahlt das Schwarze Loch alle bei seiner Entstehung involvierten höheren Momente ab, so daß es schließlich nur noch durch Masse, Ladung und Drehimpuls charakterisiert ist[Isr67].

In der Hawking Phase emittiert das Schwarze Loch Hawking-Strahlung[Haw75]. Die Strahlung entspricht dabei der eines perfekten Schwarzen Körpers der Temperatur (Gleichung (2.10)):

$$T = \frac{1}{16\pi^2 GM_{SL}} = \frac{M_f^2}{16\pi^2 M_{SL}} \quad .$$

Anhand dieser Temperatur läßt sich die Lebensdauer des Schwarzen Loches abschätzen: Als Schwarzer Körper läßt sich seine Strahlungsleistung durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz berechnen:<sup>3</sup>

$$P = \frac{2\pi^2}{15} 4\pi r^2 T^4 \quad .$$

---

<sup>3</sup>Die in der Hawking-Strahlung vorhandenen Teilchen sind zufällig über das gesamte energetisch mögliche Spektrum verteilt und bestehen daher weitgehend aus Standardmodellteilchen, für die nur die 3+1-dimensionale Untermannigfaltigkeit als Ausbreitungsraum in Frage kommt. Daher gilt als strahlende Fläche die Oberfläche der gewöhnlichen Kugel  $4\pi r^2$ .

Der Radius des Schwarzen Loches ist natürlich der Schwarzschildradius (4.14). Einsetzen und Vernachlässigen aller Konstanten der Ordnung 1 ergibt:

$$P \sim \left( \frac{M_{SL}}{M_f} \right)^{\frac{2}{D+1}} \frac{1}{M_f^2} \frac{M_f^8}{M_{SL}^4} = M_f^{\frac{6D+4}{D+1}} M_{SL}^{-\frac{4D+2}{D+1}} \quad .$$

Die Strahlungsleistung führt wegen  $E_{SL} = M_{SL}$  direkt zu einem Massenverlust:

$$P = -\frac{\partial M_{SL}}{\partial t} \quad ,$$

durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} M_f^{\frac{6D+4}{D+1}} dt &= -M_{SL}^{\frac{4D+2}{D+1}} dM_{SL} \\ \longrightarrow t_{M_{SL}=0} &\approx M_f^{\frac{2D+4}{D+1}} M_{SL}^{\frac{5D+3}{D+1}} \\ &= \left( \frac{M_{SL}}{M_f} \right)^{\frac{5D+3}{D+1}} M_f \end{aligned}$$

Für ein in einer Teilchenkollision entstehendes relativ schweres Schwarzes Loch der Masse  $M_{SL} = 10 M_f$  bei einer fundamentalen Skala  $M_f = 1 \text{ TeV}$  und  $D = 6$  Extradimensionen ergäbe sich eine Zeit von etwa

$$t_{M_{SL}=0} = \left( \frac{10M_f}{M_f} \right)^{\frac{5 \cdot 6 + 3}{6+1}} M_f \approx 10^6 \text{ TeV} \approx 10^{-22} \text{ s} \quad .$$

Aufgrund der gewählten Parameter ist diese Zerfallszeit als oberes Limit zu verstehen. Das Schwarze Loch zerfällt nach einer Teilchenkollision also praktisch instantan.

Nach dem Strahlungsprozeß tritt das Schwarze Loch in die Planck Phase ein, d.h. seine Masse nähert sich der fundamentalen Skala  $M_f$  an. Wie bereits in Abschnitt 3.1.3.2 erwähnt gelten für ein derart kleines Schwarzes Loch die semiklassischen Randbedingungen, die Hawking bei der Berechnung der nach ihm benannten Strahlung benutzte, nicht mehr, und das finale Schicksal des Schwarzen Lochs ist unklar; es könnte entweder vollständig zerstrahlen oder ein Black Hole Remnant bilden.

#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER

Der Verlauf des Strahlungsprozesses ist verknüpft mit dem *Informationsverlust-Paradoxon*. Die Hawking-Strahlung ist perfekt thermisch, und enthält daher keine Information über die in das Schwarze Loch kollabierte Materie. In der Tat folgt dies direkt aus der Kausalität: Sobald ein Körper innerhalb des Schwarzschildradius ist, besteht für ihn keine Möglichkeit mehr, die Strahlung außerhalb des Radius zu beeinflussen. Sollte aber das Schwarze Loch vollständig zerstrahlen, bleibt nur noch thermische Strahlung übrig. Die komplette Information über die Materie, die in das Schwarze Loch kollabierte, ist verloren.

Quantenmechanisch stellt sich dieses Paradox dar als eine Transformation von einem reinen Zustand (vorausgesetzt, der Zustand der Materie vor der Entstehung war vollständig bekannt) zu einem gemischten Zustand durch das Schwarze Loch. Dies kann nur durch eine nicht-unitäre Transformation geschehen, die in der Quantenmechanik nicht erlaubt ist, da sie die Wahrscheinlichkeitsmaße nicht erhält[Pre92].

Es gibt verschiedene Lösungsansätze für dieses Paradoxon, die alle eine Modifikation der semiklassischen Formulierung verlangen und daher erst durch eine vollständige Theorie der Quantengravitation zufriedenstellend beschrieben werden könnten:

- Die Hawking-Strahlung könnte Quantenfluktuationen enthalten, in denen die Information enthalten ist.
- Es könnte in der Tat ein Black Hole Remnant entstehen, in dem die Information gespeichert, aber nicht erreichbar ist.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Das BHR-Szenario ist auch vor dem Hintergrund der Erhaltung globaler Symmetrien interessant: Angenommen,  $Q$  sei eine erhaltene Ladung und  $m > 0$  die Masse des Teilchens mit dem kleinsten Masse/Ladungsverhältnis und der Ladung  $Q = 1$ . Ein Schwarzes Loch aus  $N$  dieser Teilchen hätte die Ladung  $Q = N$  und die Masse  $M = Nm$ . Wird  $N$  groß genug, so gilt die semiklassische Approximation und das Schwarze Loch strahlt den größten Teil seiner Masse als leichte, ungeladene Teilchen ab und verliert dabei keine Ladung. Ab einem bestimmten Punkt gibt es dann aber keine Möglichkeit mehr, die Restladung zu verlieren, da es keinen Zerfallskanal mit  $Q \approx N$  und ausreichend kleiner Masse gibt. Die einzige Möglichkeit,  $Q$  zu erhalten, ist dann das Ende der Evaporation und die Bildung eines BHRs.

- Die Information könnte am Ende der Evaporation bei  $M_{SL} \approx M_f$  in der Emission nicht-thermischer, mit zuvor emittierten Quanten korrelierter Strahlung wiederhergestellt werden.
- Das Theorem, daß Schwarze Löcher nur durch ihre Masse, ihre Ladung und ihren Drehimpuls vollständig charakterisiert sind [Isr67], ist klassisch hergeleitet. In einer Theorie der Quantengravitation könnte sich herausstellen, daß es doch durch weitere Quantenparameter beschrieben wird, in denen die Information codiert ist.
- Schließlich könnte die Bildung einer Singularität durch einen Quantengravitationseffekt verhindert werden und stattdessen die kollabierende Materie in einem sich bildenden „Babyuniversum“ enden [Haw88]. Dort wäre sie zwar noch immer vorhanden, aber aus unserem Universum nicht-observierbar.

#### 4.5.4 Einfluß der Minimalen Länge

Die Entstehung eines Schwarzen Lochs in einer Teilchenkollision basiert im wesentlichen auf einer Fokussierung ihrer Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$  innerhalb ihres Schwarzschildradius  $r_S(\sqrt{s})$ . Durch die modifizierte Unschärferelation (3.15) wird die Lokalisierung der Teilchen für  $\sqrt{s} \gtrsim M_f$  erschwert und führt daher zu einer effektiven Unterdrückung der Produktion Schwarzer Löcher.

Im hier dargestellten Formalismus wirkt sich dies auf den Wirkungsquerschnitt wie folgt aus: Angenommen, die gesamte Energie der Teilchenkollision wandelt sich in die Masse des Schwarzen Loches um, so daß das Schwarze Loch im Laborsystem ruht, so lautet der differentielle Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \sigma_{ij \rightarrow SL}(\sqrt{s}) \delta(M_{SL} - \sqrt{s}) d^3p \quad . \quad (4.16)$$

#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER

Die modifizierte de Broglie-Relation verändert dann das Impulsmaß gemäß (3.16) und man erhält

$$d\sigma_{ML} = \sigma_{ij \rightarrow SL}(\sqrt{s})\delta(M_{SL} - \sqrt{s}) \left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| d^3p \quad .$$

Wie in Abschnitt 4.4 wird auch hier wieder das Gaußsche Fehlerintegral (3.12) als Funktion  $k(p)$  benutzt. Es gilt dann für die Jacobi-Determinante mit  $\epsilon = L_f^2 \pi / 4$ :

$$\left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| \approx e^{-\epsilon p^2} \quad .$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines Schwarzen Loches lautet damit, da für relativistische Teilchen  $p^2 \approx E^2 = s$  gilt [Hos04b]:

$$d\sigma_{ML} = \sigma_{ij \rightarrow SL}(\sqrt{s})\delta(M_{SL} - \sqrt{s})e^{-\epsilon s} d^3p \quad . \quad (4.17)$$

Der Einfluß der Minimalen Länge auf die Evaporation Schwarzer Löcher zeigt sich insbesondere bei der Annäherung an die Planck-Phase: Da die Energie kürzerer Moden schneller ansteigt, erhöht sich die charakteristische Temperatur eines Schwarzen Lochs, was zu einer schnelleren Zerstrahlung führt. Weiterhin zeigt sich, daß die spezifische Wärme des Schwarzen Lochs zum Ende des Evaporationsprozesses hin gegen 0 geht, d.h. das Schwarze Loch kann keine Wärme mehr mit der Umgebung austauschen.<sup>5</sup> Dies, zusammen mit der Tatsache, daß der minimale Schwarzschildradius  $r_S \geq L_f$  sein sollte, favorisiert stark das Szenario der Bildung eines Black Hole Remnants [CDM03, CD04].

---

<sup>5</sup>Dieses Resultat geht analog zur Analyse des Casimir-Effektes: Auch dort wird die Energie für  $a \rightarrow 0$  konstant, d.h. die Casimir-Kraft geht gegen 0. Dies sollte demnach auch für die Hawking-Strahlung gelten, die als Casimir-Effekt am Schwarzschildradius des Schwarzen Lochs interpretiert werden kann.

### 4.5.5 Kosmische Neutrinos

Die hochenergetischsten Teilchen, die auf der Erde beobachtet werden, sind die der kosmischen Strahlung. Sie besteht aus den verschiedensten Teilchenarten, insbesondere Neutrinos als Punktteilchen bieten aber eine ausgezeichnete Möglichkeit, Theorien jenseits des Standardmodells zu überprüfen.

Mögliche Quellen hochenergetischer kosmischer Strahlung sind Supernovae oder kosmische Jets (Gasströme) aus Schwarzen Löchern oder Pulsaren. Letztere entstehen, wenn Teilchen in einer Scheibe auf ein gravitierendes Objekt einstürzen, dieses jedoch nicht erreichen, sondern geometrisch oder magnetisch fokussiert senkrecht zu dieser Scheibe vom Objekt wegströmen. Dabei handelt es sich um geladene Teilchen, hauptsächlich Protonen, die durch eine Vielzahl von Prozessen mit der galaktischen Hintergrundstrahlung wie z.B. Photopion-Produktion oder Paarproduktion interagieren. In Folgeprozessen entstehen hierbei auch hochenergetische Neutrinos.

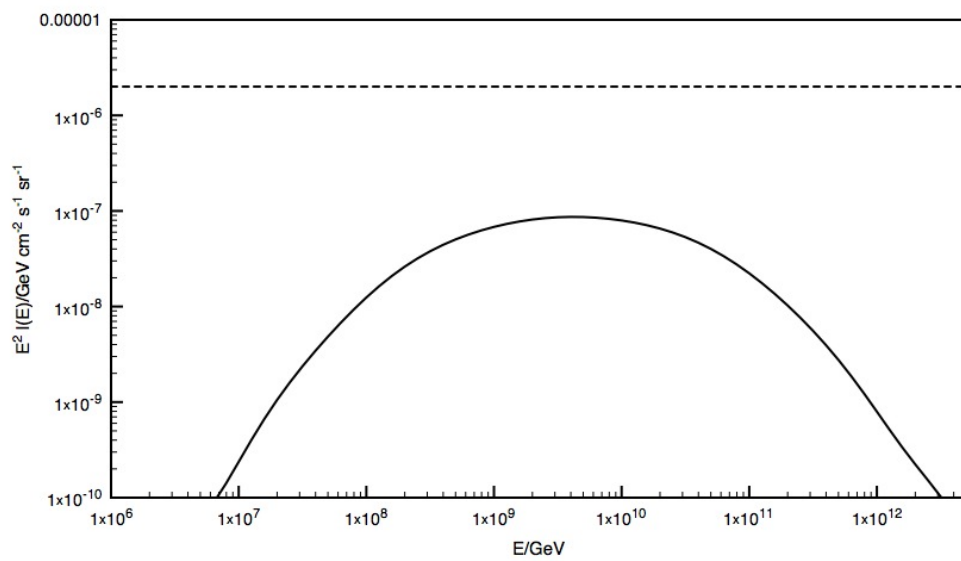
Um Vorhersagen über den Wirkungsquerschnitt kosmischer Neutrinos bei den Kollision mit Hadronen in der Erde und der Atmosphäre überprüfen zu können, benötigt man das Energiespektrum der einfallenden Neutrinos. In einer Matrix-Monte-Carlo-Simulation von ultrahochenergetischen kosmischen Strahlen, die in der kosmischen Hintergrundstrahlung kaskadieren, konnte eine realistische Energieverteilung der Neutrinos ermittelt werden[PJ96]. Eine weniger durch spezielle Annahmen des Simulationsmodells bestimmte Untersuchung der verschiedenen Quellen ultrahochenergetischer Strahlung ergab ein theoretisches oberes Limit von etwa  $I(E) \leq 2 \cdot 10^{-5} / E^{-2} \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ [MPR01]. Beide Spektren sind in Abbildung 4.5 dargestellt.

#### 4.5.5.1 Klassischer Wirkungsquerschnitt und Schwarze Löcher

Im Standardmodell wirkt auf die Neutrinos lediglich die Schwache Wechselwirkung. Diese Kraft wird durch den Austausch eines  $W$ - oder  $Z$ -Bosons



#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER



**Abbildung 4.5:** Theoretisch ermittelte Energiespektren  $I(E)$  kosmischer Neutrinos: Die durchgezogene Linie zeigt das im Kaskadenmodell ermittelte realistische Spektrum [PJ96], die gestrichelte Linie zeigt das aus dem experimentell bekannten kosmischen Protonenspektrum ermittelte obere Limit [MPR01].

übertragen. Im elektroschwachen Modell ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Neutrinos mit einem isoskalaren Nukleon  $N = (p + n)/2$  zu[GQRS98]:

$$\frac{d^2\sigma}{dx dy} = \frac{2G_F^2 M_N E_\nu}{\pi} \left( \frac{M_{W,Z}^2}{Q^2 + M_{W,Z}^2} \right)^2 (xq(x, Q^2) + x\bar{q}(x, Q^2)(1 - y)^2) \quad . \quad (4.18)$$

Hierbei ist  $E_\nu$  die Energie des Neutrinos im Ruhesystem,  $Q^2$  und  $\nu$  der transferierte Impuls bzw. die transferierte Energie,  $x = Q^2/2M\nu$  und  $y = \nu/E_\nu$  die Björken-Skalierungsvariablen, die deren relative Anteile am gesamten Impuls bzw. der gesamten Energie des Stoßes bezeichnen,  $M_W \approx 80,425$  GeV,  $M_Z \approx 91,188$  GeV und  $M_N \approx 0,938$  GeV die Massen des  $W$ - bzw.  $Z$ - Bosons und des Nukleons und  $G_F = 1.16632 \cdot 10^{-5}$  GeV<sup>-2</sup> die Fermikonstante.  $q(x, Q^2)$  und  $\bar{q}(x, Q^2)$  sind die Quark- und Antiquark-Verteilungsfunktionen innerhalb eines Nukleons. Für die folgenden numerischen Berechnungen wurden die CTEQ6-Verteilungsfunktionen benutzt[P<sup>+</sup>02].

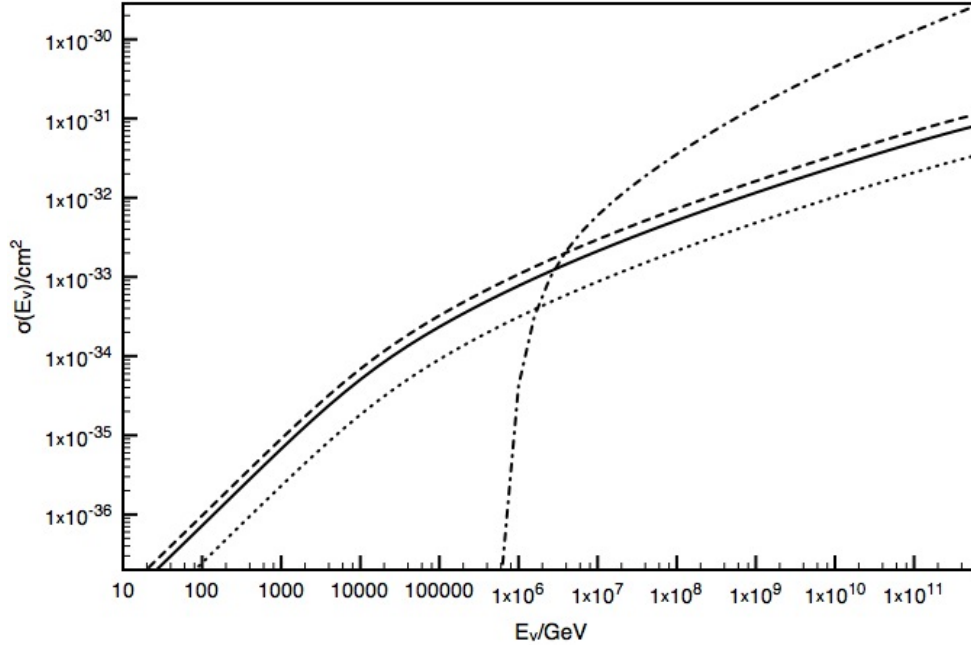
Im Modell der Großen Extradimensionen tritt nun der Wirkungsquerschnitt zur Produktion Schwarzer Löcher hinzu. Da das Nukleon ein zusammengesetztes Objekt ist, muß der Wirkungsquerschnitt (4.16) mit den Quark- und Antiquark-Verteilungsfunktionen gefaltet werden, es ergibt sich entsprechend:

$$\sigma_{\nu N \rightarrow SL}(\sqrt{s}) = \int_0^1 dx \pi r_S^2(\sqrt{xs}) \theta(\sqrt{xs} - M_{min}) [q(x, \mu) + \bar{q}(x, \mu)] \quad . \quad (4.19)$$

Es gibt hier keine Integration über den Energieanteil  $y$  des Neutrinos am Stoß, da - wie oben erwähnt - davon auszugehen ist, daß die gesamte Energie des Neutrinos in die Masse des Schwarzen Loches übergeht.

Die Energieskala  $\mu$  der Quark- und Antiquark-Verteilungsfunktionen beschreibt die mit dem Streuprozess assoziierte typische inverse Längenskala. Für gewöhnliche Quantenfeldtheorieprozesse ist sie gegeben durch das Inverse des übertragenen Impulses, für den Fall der Bildung eines Schwarzen Lochs

#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER



**Abbildung 4.6:** Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\nu + N \rightarrow \nu + X$  bzw.  $\nu + N \rightarrow SL$ , aufgetragen gegen die Neutrinoenergie  $E_\nu$  im Ruhesystem des Nukleons. Die durchgezogene Linie zeigt den Anteil bei Austausch eines  $W$ -Bosons (charged current), die gepunktete Linie den Anteil bei Austausch eines  $Z$ -Bosons (neutral current); die gestrichelte Linie zeigt die Summe der beiden Anteile. Die gestrichelt-gepunktete Linie zeigt den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Schwarzen Lochs für  $M_{min} = M_f = 1 \text{ TeV}$ ,  $D = 6$ .

ist die typische Längenskala jedoch der Schwarzschildradius. Wir wählen im Folgenden daher  $\mu = 1/r_S$ .

Die Wirkungsquerschnitte (4.18) und (4.19) sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Der klassische Wirkungsquerschnitt zeigt bei etwa  $E_\nu = 5000 \text{ GeV}$  einen beginnenden Knick. Dieser entspricht einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = \sqrt{2M_N E_\nu} \approx 100 \text{ GeV}$ , d.h. etwa der Masse des  $W$ - bzw.  $Z$ -Bosons. Damit resultiert dieser Knick aus der beginnenden Unterdrückung des Wirkungsquerschnittes durch den Bosonpropagator, repräsentiert durch den Term  $(M_{W,Z}^2/(Q^2 + M_{W,Z}^2))^2$ .

Abbildung 4.6 zeigt weiterhin einen extremen Anstieg des Wirkungsquerschnittes für die Erzeugung Schwarzer Löcher, sobald die Schwerpunktsenergie die minimale Masse  $M_{min}$  überschreitet. Ab geringfügig höheren Energien wird sie sogar zum dominanten Kanal für die Neutrino-Nukleon-Streuung. Diese Tatsache macht es möglich, Schwarze Löcher in Neutrinooteleskopen zu beobachten[Ueh02] und in realistischen Vorhersagen wurden in der Tat substantielle Produktionsraten für heutige und zukünftige Neutrinoexperimente berechnet.

#### 4.5.5.2 IceCube

Das IceCube-Experiment ist das sensitivste bislang existierende Neutrinoexperiment. Es befindet sich am Südpol und nutzt die dort vorhandene Eisdecke als Kollisionsmedium für Neutrinos. Auf einer Fläche von etwa einem Quadratkilometer werden 70 Ketten von jeweils 60 optischen Detektoren in eine Tiefe von 1450 bis 2450 Meter gebracht, wodurch sich eine Anzahl von 4200 Detektoren ergibt, die insgesamt ein Volumen von etwa einem Kubikkilometer abdecken[A+03]. Die Eisschicht über dem Detektor garantiert dabei eine sehr gute Abschirmung anderer Komponenten der kosmischen Strahlung, so daß quasi nur Neutrinos den Detektor erreichen.

Die Detektion einer Neutrino-Nukleon-Reaktion geschieht durch die von ihr erzeugten *Tscherenkow-Strahlung*. Geladene Teilchen aus der Reaktion, die sich nahe der Lichtgeschwindigkeit bewegen, ionisieren die Atome des Eises, durch die Polarisation senden diese Gammastrahlung aus. Da die Lichtgeschwindigkeit im Medium niedriger ist, als die Geschwindigkeit des geladenen Teilchens, löscht sich die entstandene Strahlung durch Interferenz nicht aus, sondern breitet sich im Medium aus.<sup>6</sup>

Die Identifikation der Tscherenkow-Strahlung geschieht durch *Photomultiplier*: Hier schlagen die Photonen der Strahlung Elektronen aus einer Kathode, diese werden beschleunigt und schlagen wiederum aus einer weiteren

---

<sup>6</sup>Dieser Effekt ist analog zum Überschallknall eines sich schneller als die Schallgeschwindigkeit bewegenden Objektes in der Luft.

Elektrode Sekundärelektronen. Dieser Prozess wird mehrfach wiederholt und verstärkt sich dadurch in einer Kaskade zu einem substantiellen Strom, der gemessen werden kann.

Die Frage nach der Unterscheidbarkeit von Standardmodell- und Schwarze-Löcher-Prozessen im Detektor ist nur sekundär: Wie Abbildung 4.6 zeigt, sind insbesondere im Bereich hoher Energien die Standardmodellprozesse vernachlässigbar, d.h. fast alle Kollisionen erzeugen Schwarze Löcher. Das Hauptsignal der Großen Extradimensionen in IceCube ist damit ein sprunghafter Anstieg der Anzahl der Kollisionen überhalb der fundamentalen Energieskala.

### 4.5.5.3 Ergebnisse

Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung Schwarzer Löcher wird im Modell der Minimalen Länge gemäß Gleichung (4.17) modifiziert. Für den Fall der Neutrino-Nukleon-Streuung lautet er dann mit Gleichung (4.19):

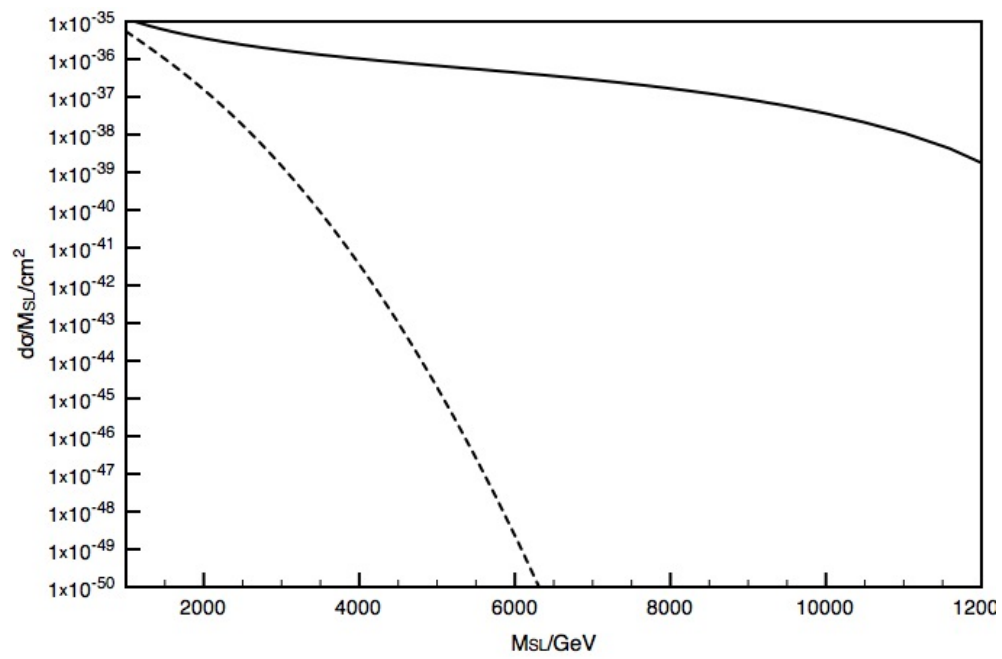
$$\sigma_{\nu N \rightarrow SL, ML}(\sqrt{s}) = \int_0^1 dx \pi r_S^2(\sqrt{xs}) \theta(\sqrt{xs} - M_{min}) [q(x, \mu) + \bar{q}(x, \mu)] e^{-\epsilon xs} .$$

Es gilt wiederum  $\epsilon = L_f^2 \pi / 4$ . Das entstehende Schwarze Loch hat hier die Masse  $M_{SL} = \sqrt{xs}$ , dementsprechend läßt sich der oben direkt ablesbare differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dx$  direkt umschreiben in:

$$\frac{d\sigma}{dM_{SL}} = \frac{2\pi M_{SL}}{s} r_S^2(M_{SL}) \theta(M_{SL} - M_{min}) \left[ q\left(\frac{M_{SL}^2}{s}, \mu\right) + \bar{q}\left(\frac{M_{SL}^2}{s}, \mu\right) \right] e^{-\epsilon M_{SL}^2} .$$

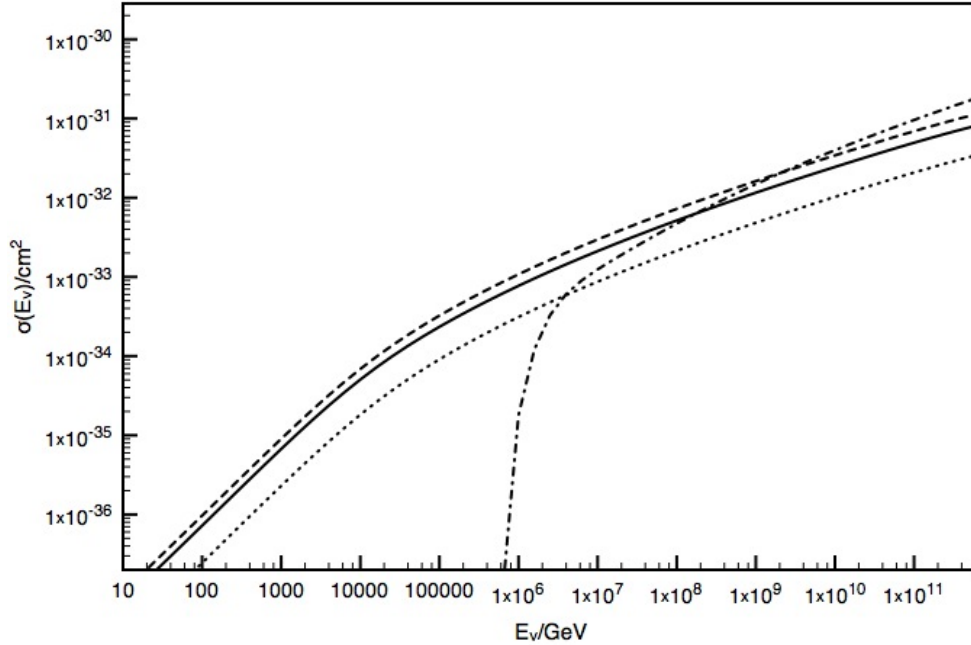
Dieser Wirkungsquerschnitt ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Insbesondere die Erzeugung schwerer Schwarzer Löcher mit  $M_{SL} \gg M_f$  wird stark reduziert.

Entsprechend der Diskussion in Abschnitt 3.2.2.3 wird natürlich auch der Wirkungsquerschnitt der Standardmodellreaktionen verändert. Der relevante



**Abbildung 4.7:** Der differentielle Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/dM_{SL}$  für die Reaktion  $\nu + N \rightarrow SL$ . Die durchgezogene Linie zeigt das Standardresultat, die gestrichelte Linie zeigt das Resultat mit der modifizierten de Broglie-Relation. Die Parameter sind  $M_{min} = M_f = 1$  TeV,  $D = 6$  und  $E_\nu = 10^8$  GeV.

#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER



**Abbildung 4.8:** Der totale Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $\nu + N \rightarrow \nu + X$  bzw.  $\nu + N \rightarrow SL$ , aufgetragen gegen die Neutrinoenergie  $E_\nu$  im Ruhesystem des Nukleons, hier unter Berücksichtigung des Einflusses der Minimalen Länge, d.h. der modifizierten de Broglie-Relation. Die durchgezogene Linie zeigt wiederum den charged current-Anteil, die gepunktete Linie den neutral current-Anteil; die gestrichelte Linie zeigt ihre Summe. Die gestrichelt-gepunktete Linie zeigt den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Schwarzen Lochs für  $M_{min} = M_f = 1 \text{ TeV}$ ,  $D = 6$ .

Faktor durch das veränderte Impulsmaß lautet, für den Wirkungsquerschnitt (4.18):

$$\left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| = e^{-\epsilon p^2} = e^{-\epsilon Q^2} \quad .$$

Der sich ergebende totale Wirkungsquerschnitt ist zusammen mit dem der Reaktion  $\nu + N \rightarrow SL$  in Abbildung 4.8 dargestellt. Der Vergleich mit Abbildung 4.6 zeigt zwei Ergebnisse:

- Die Wirkungsquerschnitte der Standardmodellreaktionen sind praktisch unbeeinflusst von der modifizierten de Broglie-Relation. Dies steht

in Kontrast zur generellen Feststellung, daß die Minimale Länge hochenergetische Teilchenreaktionen unterdrücken sollte. Dies resultiert daraus, daß der Neutrino-Nukleon-Wirkungsquerschnitt (4.18) ohnehin durch den Bosonpropagator oberhalb von  $Q^2 \geq M_{W,Z} \approx 100$  GeV stark unterdrückt ist. Der totale Wirkungsquerschnitt wird also praktisch nur durch Neutrino-Parton-Reaktionen unterhalb dieser Skala getragen, auf die eine Minimale Länge von  $L_f = 1/\text{TeV}$  keinen Einfluß hat.

- Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Schwarzen Loches wird extrem reduziert und geht kaum noch über die Größenordnung des Standardmodell-Wirkungsquerschnittes hinaus.

Die Identifikation Schwarzer Löcher in einem Neutrinodetektor wird damit ungleich schwerer: Das primäre Signal, der sprunghafte Anstieg der Anzahl der Kollisionen überhalb der fundamentalen Energieskala, ist bei Berücksichtigung der Minimalen Länge nicht mehr gegeben. Es stellt sich die Frage, ob die Produktionsrate von Schwarzen Löchern in einem Detektor wie IceCube überhaupt noch statistisch signifikant ist.

Der IceCube Detektor befindet sich auf 1450 bis 2450 Metern Tiefe. Die Dichte des abschirmenden Erdmaterials zwischen Weltraum und Detektor läßt sich durch

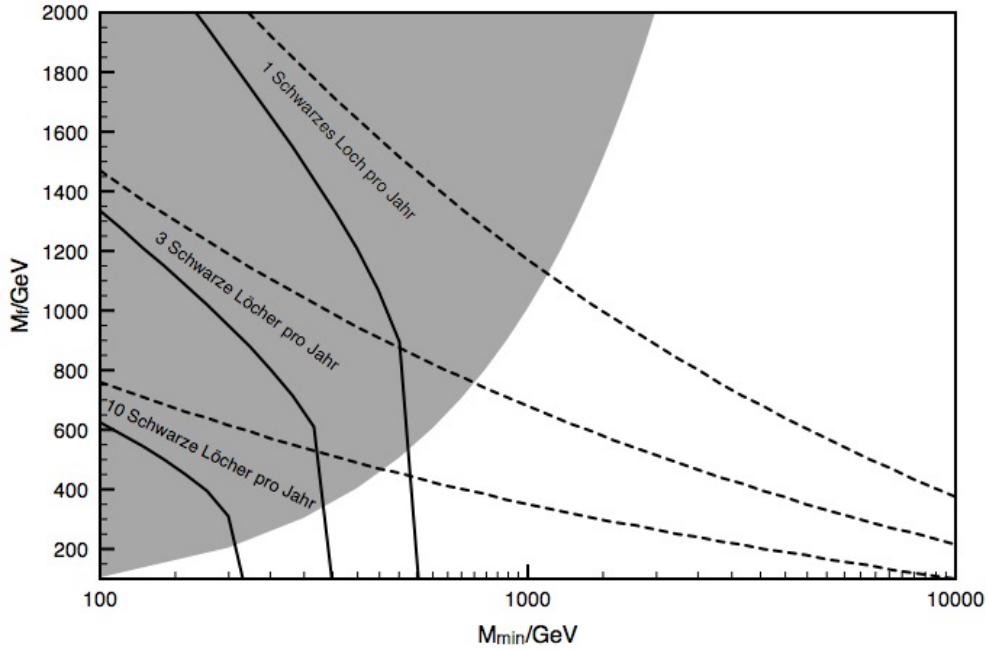
$$X(\theta) = \rho \left( \sqrt{(R_{\oplus} - T)^2 \cos^2 \theta + 2TR_{\oplus} - T^2} - (R_{\oplus} - T) \cos \theta \right)$$

annähern[MR91].  $\theta$  ist hier der Zenithwinkel,  $\rho \approx 2,6 \cdot 10^3$  kg/m<sup>3</sup> die mittlere Erddichte,  $R_{\oplus} \approx 6,37 \cdot 10^6$  m der Erdradius und  $T \approx 2 \cdot 10^3$  m die mittlere Tiefe des Detektors. Der Neutrinofluß  $I(E)$  wird durch dieses Material abgeschirmt und es ergibt innerhalb des Detektors ein Fluß von

$$I_{det}(E, \theta) = I(E) \exp \left( - \sigma_{\nu N \rightarrow X} X(\theta) / M_N \right) \quad ,$$



#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER



**Abbildung 4.9:** Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von  $2 \text{ km}$  als Funktion der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  und der fundamentalen Skala  $M_f$ . Die schattierte Fläche ist physikalisch ausgeschlossen ( $M_{min} < M_f$ ), es gilt  $D = 6$ . Es wurde der aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell errechnete Neutrino-fluß angenommen [PJ96]. Die gestrichelte Linie zeigt das reine Resultat mit Großen Extradimensionen, die durchgezogene Linie zeigt die Daten bei Inklusion der Minimalen Länge durch die modifizierte de Broglie-Relation.

wobei  $\sigma_{\nu N \rightarrow X}$  der totale Wirkungsquerschnitt für alle Neutrino-Nukleon-Reaktionen ist, also inklusive des Wirkungsquerschnitts für Schwarze Löcher;  $M_N$  ist die Nukleonmasse. Die Anzahl der produzierten Schwarzen Löcher pro Zeit  $t$  pro Raumwinkel  $\Omega$  in einem Detektor mit dem Volumen  $V$  und der Dichte  $\rho_{det}$  ist damit gegeben durch:

$$\frac{dN}{dt d\Omega} = \frac{\rho_{det} V}{M_N} \int_{E_{th}}^{\infty} dE I(E) \sigma_{\nu N \rightarrow BH}(E) \exp\left(-\sigma_{\nu N \rightarrow X} X(\theta) / M_N\right) .$$

Die Anzahl der erzeugten Schwarzen Löcher pro Jahr für die Parameter des IceCube-Detektors (Volumen  $V = 1 \text{ km}^3$ , Tiefe  $T = 2 \text{ km}$ ) ist in Abhängigkeit von der fundamentalen Skala  $M_f$  und der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  in Abbildung 4.9 dargestellt. Setzt man den Neutrinofluß aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell[PJ96] an, so zeigt sich, daß selbst für den optimistischsten Fall  $M_f = M_{min}$  (d.h. im Falle eines frühen semi-klassischen Regimes) die Minimale Länge die Produktion Schwarzer Löcher nahezu komplett unterdrückt[HB06b, HB06a].

Im optimistischsten Fall, d.h. für den maximal möglichen Neutrinofluß[MPR01], ergibt sich Abbildung 4.10. Nur in diesem Fall könnte eine substantielle Produktionsrate für Schwarze Löcher trotz der Unterdrückung durch die Minimale Länge erhalten werden.

Beide Abbildungen zeigen deutlich, daß bei Berücksichtigung der Minimalen Länge die Produktionsrate für Schwarze Löcher fast ausschließlich von der minimalen Masse für Schwarze Löcher bestimmt wird, und kaum mehr direkt von der minimalen Skala  $M_f$  beeinflusst wird.<sup>7</sup> Dies liegt an der in Abbildung 4.7 gezeigten Unterdrückung der Produktion insbesondere schwerer Schwarzen Löcher. Der Wirkungsquerschnitt ist daher dominiert von Schwarzen Löchern einer Masse nahe der fundamentalen Skala  $M_f$ , daher ist ein wesentlich größerer Anteil durch die Anhebung der minimalen Masse  $M_{min}$  beeinflusst.

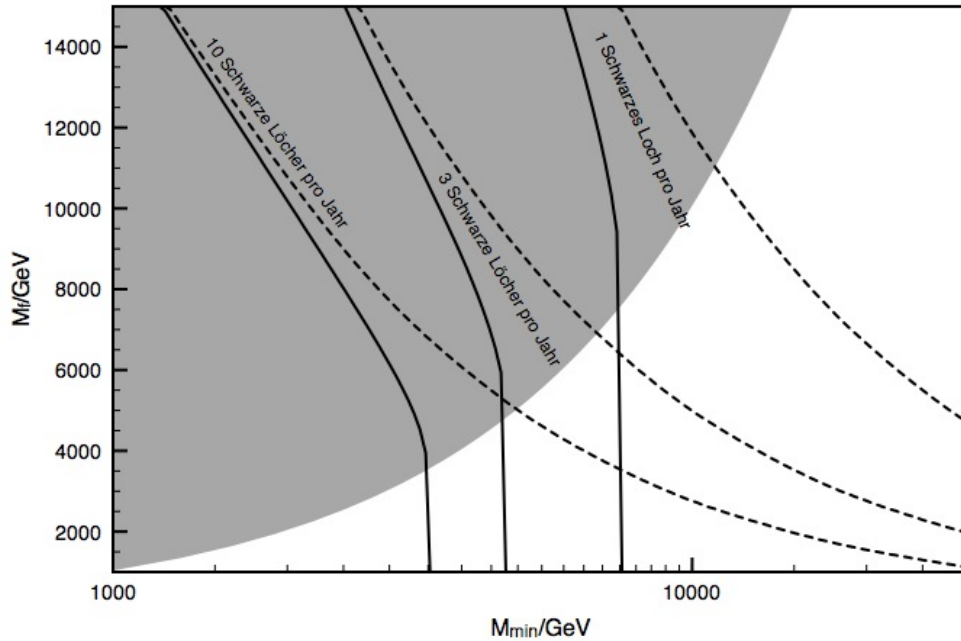
Abschließend soll noch ein Blick auf die Abhängigkeit der hier dargestellten Ergebnisse von der Anzahl der Extradimensionen  $D$  geworfen werden: Als Beispiel zeigt Abbildung 4.11 die Produktionsrate Schwarzer Löcher für IceCube im Fall  $M_{min} = M_f$  für den Neutrinofluß aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell[PJ96]. Sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der Minimalen Länge ergibt sich kein nennenswerter Unterschied.

Die Ergebnisse für die Produktion und Detektion von Schwarzen Löchern am IceCube-Detektor bei Berücksichtigung der Minimalen Länge lassen sich wie folgt zusammenfassen:

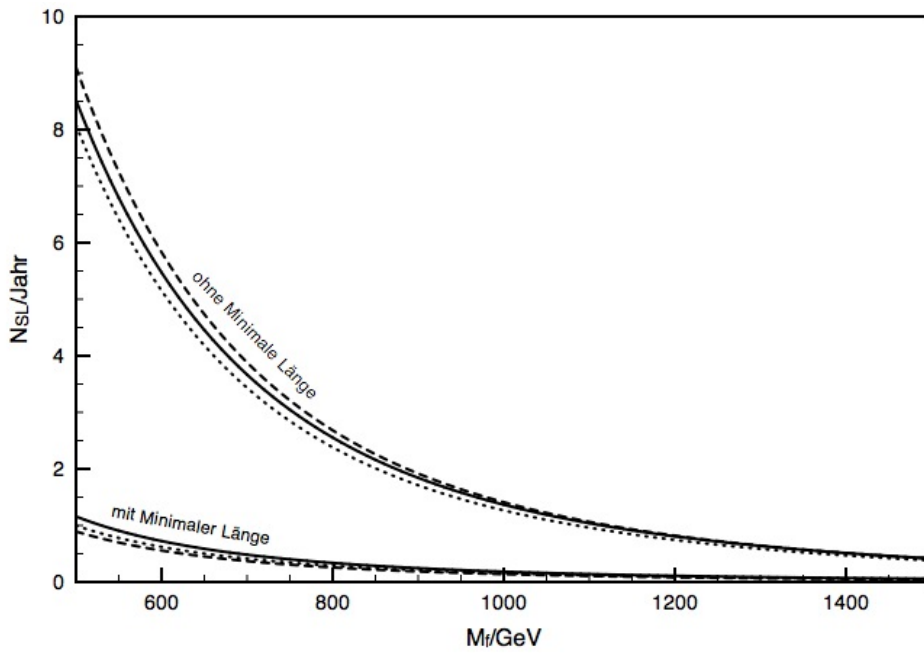
---

<sup>7</sup>Natürlich gilt immer noch eine indirekte Abhängigkeit, da  $M_{min} \geq M_f$ .

#### 4.5. UNTERDRÜCKUNG DER PRODUKTION SCHWARZER LÖCHER



**Abbildung 4.10:** Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von  $2 \text{ km}$  als Funktion der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  und der fundamentalen Skala  $M_f$ . Die schattierte Fläche ist physikalisch ausgeschlossen ( $M_{min} < M_f$ ), es gilt  $D = 6$ . Es wurde das obere Limit für den Neutrinofluß von etwa  $I(E) \leq 2 \cdot 10^{-5} / E^{-2} \text{ GeV cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sr}^{-1}$  angenommen [MPR01]. Die gestrichelte Linie zeigt das reine Resultat mit Großen Extradimensionen, die durchgezogene Linie zeigt die Daten bei Inklusion der Minimalen Länge durch die modifizierte de Broglie-Relation.



**Abbildung 4.11:** Die Produktionsrate für Schwarze Löcher in einem Volumen von  $1 \text{ km}^3$  Eis in einer mittleren Tiefe von  $2 \text{ km}$  als Funktion der fundamentalen Skala  $M_f$  für verschiedene Anzahlen von Extradimensionen  $D$ . Es gilt  $M_{min} = M_f = 1 \text{ TeV}$ . Es wurde der aus dem Monte-Carlo-Matrix-Modell errechnete Neutrino-fluß angenommen [PJ96]. Die gestrichelte Linie zeigt  $D = 2$ , die gepunktete  $D = 4$  und die durchgezogene  $D = 6$ .

- Der differentielle Wirkungsquerschnitt für schwere Schwarze Löcher  $M_{SL} \gg M_f$  wird exponentiell unterdrückt und damit der totale Wirkungsquerschnitt signifikant reduziert, unabhängig von der Anzahl der Extradimensionen. Insbesondere ist die Produktion Schwarzer Löcher nicht mehr der dominante Kanal in hochenergetischen  $\nu - N$ -Reaktionen.
- Die Produktionsrate Schwarzer Löcher hängt fast ausschließlich von der minimalen Masse für Schwarze Löcher  $M_{min}$  ab.
- Eine statistisch signifikante Produktionsrate in IceCube ist nur für einen kleinen Parameterraum gegeben, d.h.  $M_{min} \approx M_f \approx 1$  TeV, Neutrinofluß nahe am oberen möglichen Limit.

## 4.6 Neutrinooszillationen

Das Neutrino im heutigen Standardmodell der Teilchenphysik ist ein ungeladenes Lepton. Es wechselwirkt daher nur über die schwache Kraft mit den anderen Teilchen des Standardmodells, was die niedrigen, in Abschnitt 4.5.5.1 diskutierten Wirkungsquerschnitte erklärt. Wie die übrigen Leptonen existiert es in drei Generationen oder Flavours:  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ .

Eine charakteristische Eigenschaft der Schwachen Wechselwirkung ist, daß sie die Paritätssymmetrie verletzt. Diese Tatsache wurde erstmals 1957 experimentell nachgewiesen: Beim  $\beta$ -Zerfall von Cobalt-60-Kernen, deren Spin durch ein Magnetfeld ausgerichtet wurde, stellte man fest, daß entgegen der Paritätssymmetrie fast alle Elektronen entgegen der Richtung der Kernspins emittiert wurden [WAH<sup>+</sup>57]. Im Standardmodell der Teilchenphysik wird diese Tatsache dadurch erklärt, daß die Schwache Kernkraft nur an linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen koppelt.<sup>8</sup>

<sup>8</sup>Die Händigkeit oder Helizität eines Teilchens bezeichnet die Projektion seines Spins auf seinen Impuls:  $H = \vec{s} \cdot \vec{p} / |\vec{s}| \cdot |\vec{p}|$ . Positive Helizität bedeutet also einen Spin parallel zum Impuls, negative einen Spin antiparallel zum Impuls.

Dies bedeutet, daß rechtshändige Neutrinos bzw. linkshändige Antineutrinos im Standardmodell nicht detektierbar sind, da sie mit keiner der bekannten Kräfte wechselwirken. Anstatt also ein steriles Feld im Standardmodell zu postulieren, liegt es viel näher anzunehmen, daß rechtshändige Neutrinos überhaupt nicht existieren. In diesem Fall kann das Neutrino aber keinen einfachen Dirac-Massenterm

$$\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi = -m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$$

erhalten, da dieser rechts- und linkshändige Neutrinos koppeln würde. Diese Tatsache, zusammen mit dem extrem niedrigen Limit an die Neutrinomasse von 2,3 eV, das durch Messung des Betaspektrums von Tritium gewonnen wurde [W<sup>+</sup>99], macht es plausibel, das Neutrino im Standardmodell als masselos anzunehmen.

Diese Vermutung stellte sich 2002 als falsch heraus: Am Sudbury Neutrino Observatory (SNO), einem mit Schwerem Wasser gefüllten Tscherenkow-Licht-Detektor in einer Mine in Sudbury, Ontario, Kanada wurden solare Neutrinos gemessen, und es konnte erstmals die Oszillation von Neutrinos nachgewiesen werden [A<sup>+</sup>02]. Neutrinooszillation ist ein Phänomen, das nur bei nichtverschwindenden Neutrinoruhemassedifferenzen auftreten kann, das Neutrino muß also eine Masse besitzen.

### 4.6.1 Prinzip

Wenn Neutrinos eine Masse haben, sind die Masseneigenzustände nicht mehr entartet und müssen nicht mehr mit den Flavoreigenzuständen zusammenfallen.<sup>9</sup> In jedem Fall gibt es dann aber eine unitäre Transformation  $\hat{U}$ , die die Masseneigenzustände  $|\psi_M\rangle$  und die Flavoreigenzustände  $|\psi_F\rangle$  in Relation setzt:

$$|\psi_M\rangle = \hat{U}|\psi_F\rangle \quad .$$

---

<sup>9</sup>Dies ist bei den Quarks, den Konstituenten der Mesonen und Hadronen ein bekanntes Phänomen, das als *Quark Mixing* bezeichnet wird.

Die Oszillation geschieht nun durch Zeittransport dieses Zustands. Für einen freien Zustand, d.h. eine ebene Welle als Lösung der freien Schrödingergleichung ergibt sich der Zeitentwicklungsoperator  $\hat{T}$  offensichtlich aus

$$\begin{aligned} \hat{T}(t_1 \rightarrow t_2)e^{i(kx-\omega t_1)} &\stackrel{!}{=} e^{i(kx-\omega t_2)} \\ e^{i\omega(t_1-t_2)}e^{i(kx-\omega t_1)} &= e^{i(kx-\omega t_2)} \quad . \end{aligned}$$

$\hat{T}$  ist unitär (auch wegen der Erhaltung der Norm des Zustandes) und formt eine Liegruppe mit dem Parameter  $t$ . Der Generator dieser Gruppe folgt aus der infinitesimalen Translation

$$\hat{T}(t \rightarrow t + dt) = \mathbf{1} + \left( \frac{\partial}{\partial t'} \hat{T}(t \rightarrow t') \right)_{t=t'} dt + \mathcal{O}(dt^2)$$

und lautet damit

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} \hat{T}(t \rightarrow t') \right)_{t=t'} = (-i\omega)e^{i\omega(t-t')}_{t=t'} = -i\omega \quad . \quad (4.20)$$

In einem schwachen Wechselwirkungsprozeß produzierte Neutrinos sind in einem reinen Flavoreigenzustand  $|\psi_F\rangle$  präpariert, d.h. als  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  oder  $\nu_\tau$ . Um ihren Zeittransport nach dem obigen Schema zu berechnen, müssen sie zunächst mit Hilfe der Matrix  $\hat{U}$  in die Masseneigenzustände gedreht werden, die Eigenzustände des freien Hamiltonoperators sind. Die Zeitentwicklung eines Zustandes in der Flavorbasis ergibt sich also durch:

$$|\psi_F\rangle(t_2) = \hat{U}^\dagger \hat{T}(t_1 \rightarrow t_2) \hat{U} |\psi_F\rangle(t_1) \quad .$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit von einem Flavoreigenzustand  $|\psi_{F_1}\rangle$  in einen anderen  $|\psi_{F_2}\rangle$  ist dann gegeben durch das Betragsquadrat des nicht-diagonalen Matrixelements:

$$P(F_1 \rightarrow F_2) = |\langle \psi_{F_2} | \hat{U}^\dagger \hat{T} \hat{U} | \psi_{F_1} \rangle|^2 \quad .$$

In einem einfachen 2-Flavor-Modell läßt sich die Matrix  $\hat{U}$  durch einen einzigen Winkel  $\theta$  parametrisieren,

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix},$$

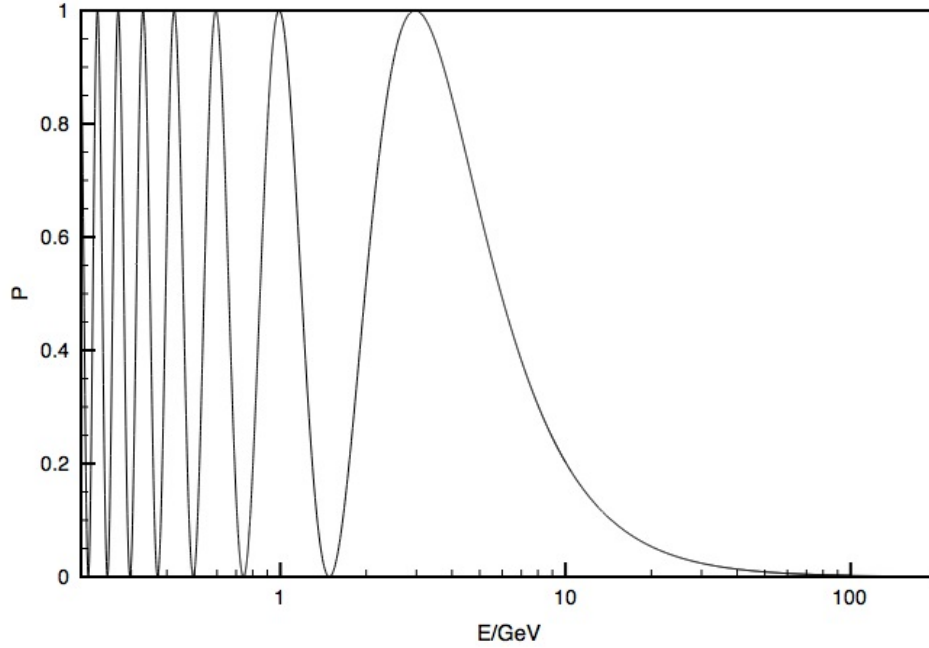
und es ergibt sich für das Matrixelement:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{F_2} | \hat{U}^\dagger \hat{T} \hat{U} | \psi_{F_1} \rangle &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_{M_1}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_{M_2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\omega_{M_1}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_{M_2}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \sin(\theta) \cos(\theta) (e^{-i\omega_{M_1}t} - e^{-i\omega_{M_2}t}) \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) (e^{-i\omega_{M_1}t} - e^{-i\omega_{M_2}t}) . \end{aligned}$$

Das Betragsquadrat, d.h. die Oszillationswahrscheinlichkeit lautet dann:

$$\begin{aligned} P(F_1 \rightarrow F_2) &= |\langle \psi_{F_2} | \hat{U}^\dagger \hat{T} \hat{U} | \psi_{F_1} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) (e^{-i\omega_{M_1}t} - e^{-i\omega_{M_2}t}) (e^{i\omega_{M_1}t} - e^{i\omega_{M_2}t}) \\ &= \frac{1}{4} \sin^2(2\theta) (2 - e^{-i(\omega_{M_1}-\omega_{M_2})t} + e^{-i(\omega_{M_1}-\omega_{M_2})t}) \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) (1 - \cos((\omega_{M_1} - \omega_{M_2})t)) \\ &= \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{(\omega_{M_1} - \omega_{M_2})t}{2}\right) . \end{aligned} \tag{4.21}$$





**Abbildung 4.12:** Oszillationswahrscheinlichkeit im 2-Flavor-Modell für Neutrinos verschiedener Energien nach 735 km Propagationsweite. Als Geschwindigkeit wurde  $v \approx c$  angenommen, und als Neutrinomassendifferenz  $\Delta m^2 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ . Der Mischungswinkel ist  $\theta = \pi/8$ .

In der klassischen Quantenmechanik gilt  $\omega = E$  und für die Neutrinos aufgrund ihrer geringen Masse  $E = \sqrt{p^2 + m^2} \approx p + m^2/2p$ . Wiederum wegen der geringen Masse gilt  $p_{M_1} \approx p_{M_2} \approx E$  und damit

$$\omega_{M_1} - \omega_{M_2} = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} \quad . \quad (4.22)$$

Die Oszillationsfrequenz ist also direkt mit der Massendifferenz der Masseneigenzustände verknüpft. Sofern die Zustände gemischt ( $\theta \neq 0$ ) und die Massen nicht 0 oder degeneriert sind (was aufgrund der Massenhierarchie zwischen den Leptongenerationen  $e$ ,  $\mu$  und  $\tau$  unwahrscheinlich ist), sollten Neutrinooszillationen zu beobachten sein.

Abbildung 4.12 zeigt beispielhaft die Oszillationswahrscheinlichkeit für Neutrinos verschiedener Energien. Für Experimente mit fester Entfernung  $a$  von der Neutrinoquelle lassen sich allgemein drei Bereiche einteilen:

- Für Neutrinos mit Energien, deren Oszillationswellenlänge

$$\lambda \approx \frac{4\pi E}{m_1^2 - m_2^2} \quad (4.23)$$

etwa im Bereich der Entfernung  $a$  liegt,

$$E \approx \frac{a(m_1^2 - m_2^2)}{4\pi} \quad ,$$

lassen sich explizite Verlustaten angeben, insbesondere lassen sich auch nur hier exakte Messungen der Massendifferenz durchführen.

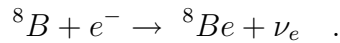
- Für Neutrinos weit überhalb dieser Energie läßt sich keine Oszillation nachweisen, da der Abstand  $a$  zu kurz ist.
- Neutrinos weit unterhalb dieser Energie sollten in etwa über alle Flavours gleich häufig nachweisbar sein, da sie auf der Strecke zum Detektor mehrfach oszillieren; die Oszillationswahrscheinlichkeit im Detektor schwankt dementsprechend stark mit der Energie.

Im folgenden sollen Beispiele beider möglichen Detektorkonfigurationen beschrieben werden, SNO und MINOS.

## 4.6.2 Nachweis

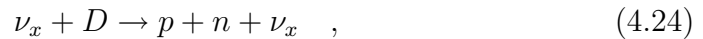
### 4.6.2.1 SNO

Einer der Gründe den Bau von SNO war das *solare Neutrinoproblem*. Die hochenergetischsten Neutrinos aus der Sonne stammen aus dem Zerfall von Bor-8 durch Elektroneneinfang:

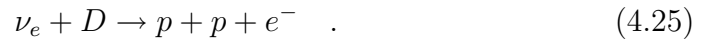


Dabei entstehen nur Elektron-Neutrinos  $\nu_e$ . Frühe Experimente zeigten aber einen um etwa zwei Drittel zu niedrigen Elektron-Neutrinofluß von der Sonne als in Modellrechnungen zu den Kernprozessen im Inneren der Sonne erwartet[BD76]. Die Sonnenmodelle wurden weiter verfeinert, doch der beobachtete niedrige Elektron-Neutrinofluß konnte nicht gedeutet werden, lediglich die Hypothese der Neutrinooszillationen lieferte eine Erklärung: Die Elektronneutrinos oszillieren auf dem Weg von der Sonne in die anderen Neutrino flavors  $\nu_\mu$  und  $\nu_\tau$ . Um Neutrinooszillationen zweifelsfrei nachzuweisen, mußte jedoch auch der Fluß von Myon- und Tau-Neutrinos gemessen werden.

Ein Neutrinodetektor mit schwerem Wasser ( $D_2O$ ) hat die gewünschten Eigenschaften[Che85]: Alle Neutrinos können das Deuteron in seine Bestandteile Proton und Neutron aufspalten (neutral current,  $Z$ -Boson-Austausch),



während nur Elektronneutrinos ein Proton in ein Neutron umwandeln können (charged current,  $W$ -Boson-Austausch):



Weiterhin (mit einem etwa um den Faktor 10 niedrigeren Wirkungsquerschnitt) kann einfache Neutrino-Elektron-Streuung beobachtet werden,

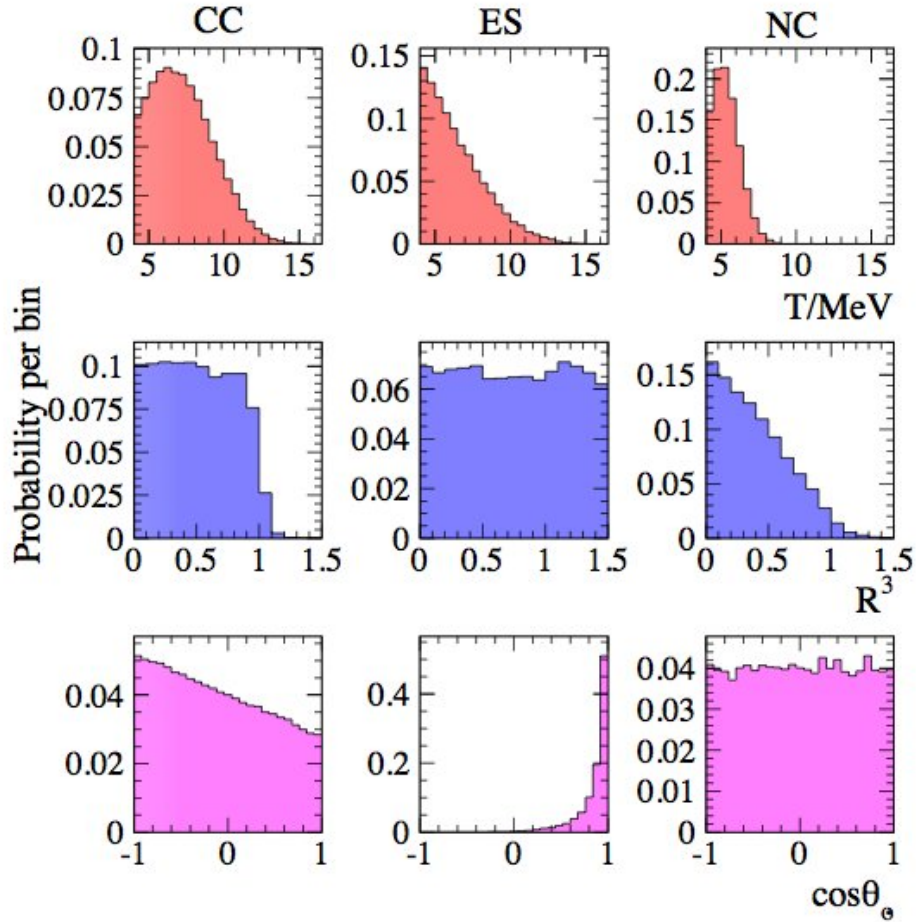


die ebenfalls mit allen Neutrino flavors möglich ist. Damit ist SNO sowohl auf den totalen Neutrino fluß, als auch den Elektron-Neutrino fluß sensitiv und ermöglicht so einen direkten Vergleich.

Wie IceCube benutzt auch SNO Photomultiplier zur Detektion des Tscherenkow-Lichts der Reaktionsprodukte (siehe Kapitel 4.5.5.2). Das bedeutet aber, daß nicht direkt die Zerfallsprodukte pro Prozeß identifiziert werden können, sondern stattdessen Signalsimulationen der drei oben genannten Prozesse durchgeführt werden müssen, deren Kombination statistisch an das gemessene Signal gefittet werden muß.

Eine solche statistische Unterscheidung ist möglich, da die drei Reaktionen sehr unterschiedliche Verteilungen haben, wie Abbildung 4.13 deutlich zeigt:

- Die charged current-Reaktion (4.25) zeigt ein Energiespektrum ähnlich dem Neutrinospektrum des Bor-8-Zerfalls, da die Elektronenergie quasi direkt mit der einfallenden Neutrinoenergie korreliert ist. Da diese Reaktion nur im Schweren Wasser stattfindet, zeigt die räumliche Verteilung eine scharfe Kante am Rand des Detektors. Zudem zeigt sich eine charakteristische Winkelkorrelation zur Sonne.
- Die Elektron-Neutrino-Streuung (4.26) zeigt ein weiches Rückstoß-Energiespektrum und ist, da sie an jedem Elektron stattfinden kann, sowohl innerhalb als auch außerhalb des Schweren Wassers uniform verteilt. Die Winkelverteilung zeigt einen klaren, von der Sonne abgewandten Peak.
- Bei der neutral current-Reaktion (4.24) wird ein Deuteron in ein Nukleon und ein Proton aufgespalten. Das Neutron wird wiederum von einem Deuteriumkern eingefangen, der anschließend in seinen Grundzustand zerfällt. Die Messung bezieht sich auf Energie, Ort und Richtung des dabei ausgesandten Photons. Da die Zerfallsenergie immer 6,25 MeV beträgt, ist die Energieverteilung um diesen Wert gepeakt. Der Grund für den Abfall der Verteilung zum Rand des Detektors ist die hohe



**Abbildung 4.13:** Simulierte Distributionen für die charged current-, Elektronstreuung- und neutral current-Prozesse (von links nach rechts) in SNO.  $T$  bezeichnet entweder die kinetische Energie des Photons aus dem Neutroneneinfang nach der neutral current-Reaktion, oder die des Elektrons nach der charged current- oder Elektronstreuung-Reaktion.  $R$  bezeichnet den relativen Abstand vom Mittelpunkt des Detektors, d.h. 0 ist seine Mitte, 1 sein Rand.  $\theta_{\odot}$  ist der Zenithwinkel zur Sonne[A<sup>+</sup>07a].

mittlere freie Weglänge der Neutronen, solche aus Reaktionen am Rand haben eine hohe Wahrscheinlichkeit, aus dem Detektor zu diffundieren. Die Winkelverteilung ist uniform, da der Zerfall nicht mehr mit dem ursprünglichen Neutrino korreliert ist.

Diese Simulationen wurden an die tatsächlich gemessenen Daten gefittet und nach Berücksichtigung der jeweiligen Wirkungsquerschnitte und Abzug des diffusen Untergrunds ergaben sich die folgenden Neutrinoflüsse von der Sonne[A<sup>+</sup>07a]:

$$\begin{aligned}\phi(\nu_e) &= 1,76 \pm 0,10 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ \phi(\nu_{\mu,\tau}) &= 3,41 \pm 0,66 \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}\end{aligned}$$

Die Daten sind damit um die fünffache Standardabweichung von der Nullhypothese (Nichtexistenz von Neutrinooszillationen) entfernt. Der totale Fluß liegt zudem in der Größenordnung heutiger Standardsonnenmodelle[BTCZ99, BPB01] und bestätigt diese.

Die typische Oszillationswellenlänge (4.23) der solaren Neutrinos (Energie  $E \approx 10 \text{ MeV}$ ) liegt bei etwa  $\lambda_{\odot} \approx 1 \text{ km}$ . Angesichts des mittleren Abstands Erde-Sonne von  $\approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$  sind die Neutrino flavors bei Ankunft auf der Erde daher vollständig durchmischt, bei drei Neutrino flavors sollten daher die Elektronneutrinos ein Drittel des gesamten Flusses ausmachen. Auch diese Vorhersage wird durch die Messungen bestätigt.

#### 4.6.2.2 MINOS

Um explizite Messungen der Neutrinomassendifferenz durchzuführen, benötigt man ein Experiment, das eine Neutrino propagationslänge in der Größenordnung der Oszillationswellenlänge ermöglicht, genauer, dessen Messung im ersten Maximum der Oszillationswahrscheinlichkeit, also bei 1/4 der Oszillationswellenlänge geschieht. Ein solches Experiment ist MINOS.



**Abbildung 4.14:** Geographische Lage des Neutrinostrahls des MINOS Experiments. Quelle: MINOS Experiment Design Summary, [http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/mintdr\\_3.pdf](http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/mintdr_3.pdf)

Die von MINOS gemessenen Neutrinos werden am Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) in Batavia, Illinois, USA erzeugt. Beschleunigte Protonen werden auf ein fixiertes Target gelenkt, wobei bei der Kollision hauptsächlich Mesonen entstehen ( $\pi^+$  und  $K^+$ ), die anschließend zum überwiegenden Teil in ein Myon  $\mu^+$  und ein Myonneutrino  $\nu_\mu$  zerfallen[Y<sup>+</sup>06]. Die Vorhersagen über die Neutrinoraten gehen daher von einem Anteil von  $\approx 93\%$   $\nu_\mu$  an der gesamten Neutrinanzahl aus[M<sup>+</sup>06].

Der Geometrie ist so gewählt, daß der Protonenstrahl aus dem Fermilab vor seiner Kollision mit dem Target bereits in Richtung einer Eisenmine in Soudan, Minnesota, USA zeigt. Dadurch wird ein gerichteter Neutrinostrahl erzeugt, der zum Vergleich der Neutrinoraten zwei Detektoren durchläuft, zuerst noch am Fermilab, 1 km hinter dem Target (naher Detektor), und schließlich in der Eisenmine in Soudan, 735 km hinter dem Target (ferner Detektor). Abbildung 4.14 zeigt die geographische Lage der Detektoren und des Neutrinostrahls.

Beide Detektoren sind weitgehend gleich aufgebaut, um Unsicherheiten durch unterschiedliche Mechanismen in der Detektion zu minimieren.<sup>10</sup> Sie bestehen aus einem Stahlblock als Target, der mit Schichten von Szintillatoren durchsetzt ist. Das Szintillatormaterial wird beim Durchgang geladener Teilchen oder Photonen angeregt und gibt diese Anregungsenergie in Form von Photonen ab. Diese Photonen werden in Photomultipliern (siehe Abschnitt 4.5.5.2) gemessen. Dadurch ist eine Lokalisierung und Energiemessung der Ereignisse im Detektor möglich.

Nach der Identifikation der Signale im nahen und fernen Detektor werden die Daten des nahen Detektors benutzt, um eine Neutrinorate am fernen Detektor zu extrapolieren. Eine Möglichkeit ist ein Fit einer Monte-Carlo-Simulation an die Daten und anschließende Benutzung ihrer Parameter für eine Simulation der Rate am fernen Detektor (siehe gepunktete Linie in Abbildung 4.15). Bei MINOS wurde jedoch die *Beam Matrix*-Methode benutzt: Hier wird eine Matrix ermittelt, die Neutrinoevents im nahen und fernen Detektor direkt über ihre Ursprungshadronen in Verbindung setzt.

Die Ergebnisse durch die Beam Matrix-Methode sind in Abbildung 4.15 gezeigt. Der beste Fit an die Daten des fernen Detektors ergab unter Annahme der Oszillation  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  die folgenden Parameter[M<sup>+</sup>06]:

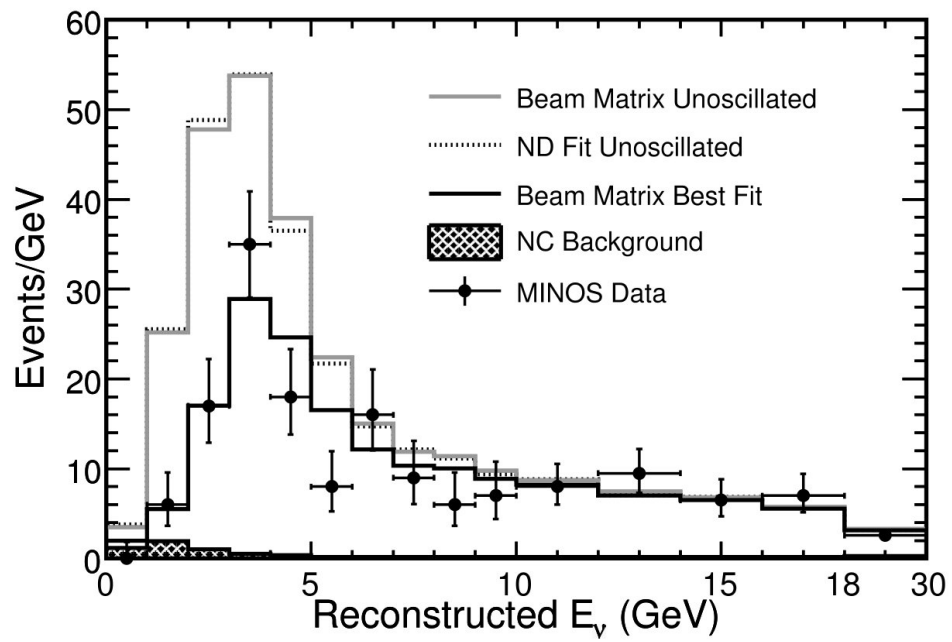
$$\sin^2(2\theta) > 0.87 \quad , \quad |\Delta m^2| = (2,74_{-0,26}^{+0,44}) \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$$

Diese Ergebnisse liegen innerhalb eines 68%-Konfidenzintervalls. Sie zeigen, daß die beiden Neutrino flavors praktisch vollständig gemischt sind, d.h. das Maximum der Oszillationswahrscheinlichkeit liegt bei nahezu 100%. Die Massendifferenz liegt bei  $\Delta m \approx 0,05 \text{ eV}$ ; ein Vergleich mit den Leptonen  $\mu$  und  $\tau$  mit  $\Delta m = m_\tau - m_\mu \approx 1,8 \text{ MeV} - 0,1 \text{ MeV} \approx m_\tau$  legt nahe, daß auch die absolute Masse der Neutrinos in etwa dieser Größenordnung liegt und damit

---

<sup>10</sup>Natürlich gibt es einige zu berücksichtigende Unterschiede: Durch den größeren Raumwinkel des Targets, den der nahe Detektor abdeckt, ergibt sich hier bedingt durch die Kinematik des  $\pi^+$ - und  $K^+$ -Zerfalls ein etwas anderes Energiespektrum. Weiterhin ist die Neutrinorate im nahen Detektor wesentlich höher und enthält mehr Hintergrund durch kosmische Strahlung, da der nahe Detektor weniger tief unter der Erdoberfläche liegt.





**Abbildung 4.15:** Messungen des fernen Detektorspektrums von MINOS (Datenpunkte). Die graue und die gepunktete Linie zeigen die erwartete Anzahl von Neutrinos unter der Annahme keiner Oszillationen auf Basis des nahen Detektorspektrums mit zwei verschiedenen Extrapolierungsmethoden (Beam Matrix bzw. Monte-Carlo Best Fit), die schwarze Linie zeigt den mit der Beam Matrix-Methode ermittelten besten Fit anhand der nahen und fernen Detektordaten[M<sup>+</sup>06].

noch um einen Faktor 100 außerhalb des Bereiches bisheriger Experimente zur Messung der absoluten Neutrinomasse.

### 4.6.3 Die Neutrinomasse im Standardmodell

Bevor der Einfluß der Minimalen Länge auf die Neutrinooszillationen erläutert wird, soll noch kurz auf die Möglichkeiten der Inklusion einer endlichen Neutrinomasse in das Standardmodell eingegangen werden. Der einfachste Weg wäre sicher die Addition eines einfachen Dirac-Massenterms  $-m\bar{\psi}\psi$  zur Lagrangedichte. Wie am Anfang von Abschnitt 4.6 gezeigt, erfordert dies aber die Einführung eines sterilen, d.h. nicht-wechselwirkenden rechtshändigen Neutrinozustands. Zudem entstünde hier ein neues Hierarchieproblem zwischen den Massen der Neutrinos und den anderen Leptonen  $e$ ,  $\mu$  und  $\tau$ .

Ein anderer möglicher Weg wäre die Identifikation des rechtshändigen Neutrinos mit dem Antineutrino,  $\nu_R = C\nu_L$ , so daß ein sogenannter *Majorana*-Massenterm der Form  $-m\bar{\psi}_L\psi_R = -m\bar{\psi}_L C\psi_L$  denkbar wäre.<sup>11</sup> Eine direkte Kopplung eines Teilchens an sein eigenes Antiteilchen verletzt aber offensichtlich die Erhaltung aller Ladungen um den Faktor 2, weshalb dieser Term im Standardmodell verboten ist. Zwar ist das Neutrino elektrisch neutral, womit keine Verletzung der elektrischen Ladungserhaltung gegeben wäre, doch auch die im Standardmodell exakt erhaltene Größe  $B-L$  (Baryon minus Leptonzahl) wäre durch einen solchen Term verletzt.

Die Addition eines zusätzlichen, nicht vom linkshändigen Neutrino abhängigen rechtshändigen Feldes  $\nu_R$  liefert jedoch eine interessante Alternative: Wenn es keine Ladung trägt, kann es einen Majorana-Massenterm

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2}m_R\bar{\nu}_R C\nu_R$$

---

<sup>11</sup> $C$  bezeichnet hier den Operator der Teilchen-Antiteilchen-Konjugation.

erhalten, ohne eine Eichsymmetrie zu verletzen. Gleichzeitig kann es eine Dirac-Masse mit dem Neutrino bilden:

$$\mathcal{L}_D = -m_D \bar{\nu}_L \nu_R \quad .$$

Der Faktor  $1/2$  skaliert lediglich die Masse und wurde aufgrund der folgenden möglichen Umformung eingefügt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= -m_D \bar{\nu}_L \nu_R - \frac{1}{2} m_R \bar{\nu}_R C \nu_R \\ &= -\frac{1}{2} (\nu_L, \nu_R) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Diese Form der Lagrangedichte ist nicht diagonal; um die physikalischen Massenzustände zu erhalten, muß die Matrix diagonalisiert werden. Die Eigenwerte lauten:

$$m_{\pm} = \frac{m_R \pm \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2}}{2} \quad .$$

Nimmt man die Majoranamasse  $m_R$  des neu eingeführten rechtshändigen Feldes  $\nu_R$  als sehr groß gegenüber der Diracmasse  $m_D$  an, so gilt für die Eigenwerte und damit die physikalischen Massen[Akh99, Ose06]:

$$m_+ \approx m_R \quad , \quad m_- \approx \frac{m_D^2}{m_R} \quad .$$

Die Form des Ausdrucks für die Masse  $m_-$  erlaubt es, aus zwei Massen, zwischen denen bereits eine Hierarchie existiert, eine Hierarchie der Neutrinomassen gegenüber den übrigen Leptonen zu generieren. Dies nennt man den *Seesaw*-Mechanismus.<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup>Die größere Masse  $m_R$  ist das negative geometrische Mittel der beiden Massen  $m_+$  und  $m_-$ ; die Determinante der Matrix ist  $m_+ m_- = -m_R^2$ . Bei gegebenem  $m_R$  verhalten sich die Eigenwerte also reziprok, eine Erhöhung des einen hat eine Erniedrigung des anderen zur Folge und umgekehrt. Daher rührt der Name *Seesaw* (engl.: Wippe).

Wählt man beispielsweise  $m_R \approx 10^{15}$  GeV und  $m_D = m_t \approx 200$  GeV als Masse des schwersten Fermions, so folgt eine Neutrinomasse von etwa

$$m_- \approx \frac{m_D^2}{m_R} \approx \frac{(200 \text{ GeV})^2}{10^{15} \text{ GeV}} = 0,04 \text{ eV} \quad .$$

Diese Neutrinomasse liegt in der Tat im Bereich der ermittelten Massendifferenz  $\Delta m \approx 0,5$  eV.

Im Fall der Existenz von Großen Extradimensionen, in denen eine hohe fundamentale Skala nicht mehr existiert, scheint der Seesaw-Mechanismus zunächst keinen Sinn zu machen. Untersucht man aber die Kaluza-Klein-Anregungen eines neu eingeführten rechtshändigen Neutrinos  $\nu_R$ , das in diesem Fall in alle Dimensionen propagieren können muß, so ergibt sich die gesuchte Hierarchie aus der Hierarchie zwischen dem Vakuumerwartungswerts des Higgs-Felds  $v$  und dem Volumenfaktor der Kaluza-Klein-Entwicklung:

$$m_\nu = \kappa \frac{v}{\sqrt{(2\pi r)^d M_f^d}} \quad .$$

$\kappa$  ist hier eine dimensionslose Konstante und  $d$  die Anzahl der Extradimensionen. Mit dem Verhältnis der fundamentalen Skala zur Planck-Masse (3.6) folgt dann[AHDDMR02]:

$$m_\nu = \kappa \frac{v M_f}{M_p} \sim 10^{-4} \text{ eV} \cdot \frac{\kappa M_f}{1 \text{ TeV}} \quad .$$

Somit kann der Seesaw-Mechanismus in abgewandelter Form auch im Modell der Großen Extradimensionen für die Generierung kleiner Neutrinomassen sorgen.

#### 4.6.4 Einfluß der Minimalen Länge

Als relativ neu entdecktes Phänomen haben die Neutrinooszillationen insbesondere im Rahmen von Theorien, die über das Standardmodell hinausgehen,

Beachtung erfahren. So wurde zum Beispiel der Einfluß der modifizierten Dispersionsrelation (siehe Abschnitt 2.4.2)

$$p^2 + m^2 = E^2 \left( 1 - \frac{(E - m)^2}{M_p} \right) \quad (4.27)$$

untersucht. Es konnten folgende Ergebnisse gewonnen werden:

- Falls für verschiedene Neutrino flavors unterschiedliche Dispersionsrelationen gelten, ergibt sich eine neuartige Oszillation, die unabhängig von den Massenunterschieden  $\Delta m$  ist.
- Im Falle einer für alle Flavors gleichen Dispersionsrelation ergibt sich eine Modifikation der Oszillation. Die Oszillationswellenlänge ist gegeben durch:

$$\lambda_{DSR} = \frac{2\pi}{\frac{\Delta m^2}{2E} - \frac{E^2 \Delta m}{M_p}} \quad .$$

Die Grenzfälle für sehr langsame bzw. sehr schnelle Neutrinos sind dann:

$$\begin{aligned} \lim_{E_\nu \rightarrow 0} \lambda_{DSR} &= \frac{4\pi E}{\Delta m^2} \\ \lim_{E_\nu \rightarrow M_p} \lambda_{DSR} &= -\frac{2\pi M_p^2}{\Delta m E^2} \end{aligned}$$

Das Ergebnis reproduziert also das klassische Limit (4.23); für sehr schnelle Neutrinos sinkt die Oszillationslänge jedoch, die Oszillationen werden also beschleunigt [Chr05].

Der Anstieg der Oszillationsfrequenz für hochenergetische Neutrinos ist eine direkte Konsequenz der benutzten Dispersionsrelation (4.27), die lediglich eine negative quadratische Korrektur enthält, die für hohe Energien dominant wird.

Das Ergebnis steht jedoch in Kontrast zu den Erwartungen an den Einfluß der Minimalen Länge im Rahmen der hier diskutierten Theorie einer modifizierten de Broglie-Relation: Wie aus der Formel für die Oszillations-

wahrscheinlichkeit (4.21) hervorgeht, ist diese direkt durch den unterschiedlichen de Broglie-Wellenlängen der verschiedenen Flavours verursacht. Wenn aber die de Broglie-Wellenlänge durch eine universelle Minimale Länge  $L_f$  beschränkt ist und damit für hohe Energien saturiert, sollte die Differenz der de Broglie-Wellenlängen im Limes verschwinden. Die Neutrinooszillationen sollten also für hohe Energien „einfrieren“ [Ahl00]. Diese Vermutung soll im Folgenden quantitativ untersucht werden.

Der Generator der Zeittranslation  $\hat{\omega}$  skaliert durch die modifizierte de Broglie-Relation nicht mehr linear mit der Energie. Im folgenden wird die Relation (3.10) benutzt, d.h.

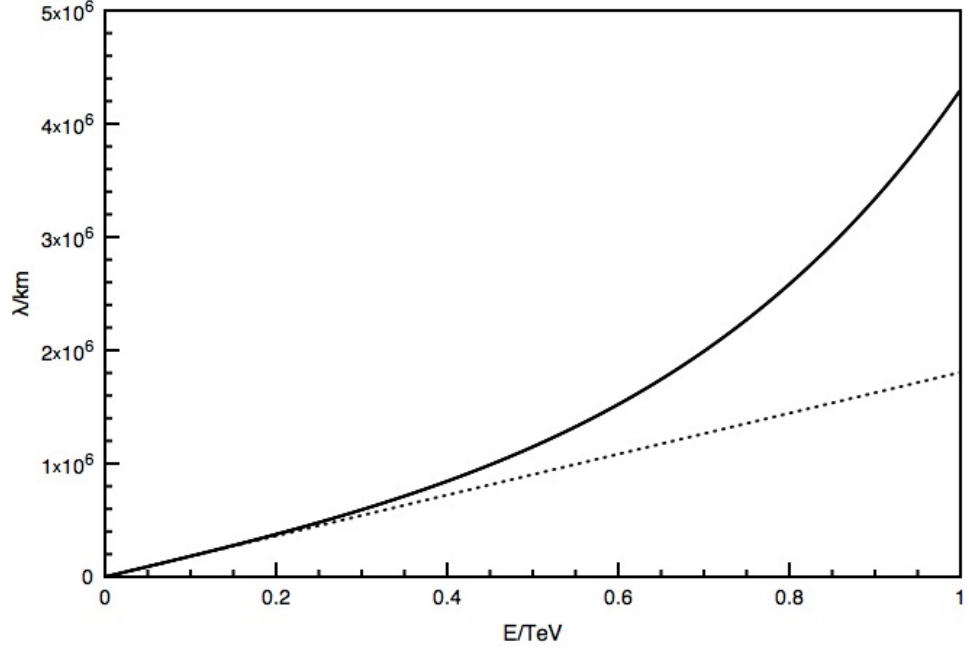
$$\omega(E) = M_f \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) .$$

Diese läßt sich für sehr leichte Teilchen wie Neutrinos ( $m \ll E$ ,  $m \ll M_f$ ) umschreiben als:<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \omega(E) &= M_f \tanh\left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{M_f}\right) \\ &\stackrel{m \ll p \approx E}{\approx} M_f \tanh\left(\frac{E}{M_f} + \frac{m^2}{2EM_f}\right) \\ &= M_f \frac{\tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) + \tanh\left(\frac{m^2}{2EM_f}\right)}{1 + \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) \tanh\left(\frac{m^2}{2EM_f}\right)} \\ &\stackrel{m \ll E, m \ll M_f}{\approx} M_f \frac{\tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) + \frac{m^2}{2EM_f}}{1 + \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) \frac{m^2}{2EM_f}} . \end{aligned}$$

---

<sup>13</sup>Es sei daran erinnert, daß die modifizierte de Broglie-Relation im Fall gleicher Relationen für  $k(p)$  und  $\omega(E)$  keine modifizierte Dispersionsrelation bedingt, es gilt weiterhin  $E^2 = p^2 + m^2$ .



**Abbildung 4.16:** Die Oszillationswellenlänge  $\lambda$  für Neutrinos der Energie  $E$  im klassischen Fall (gestrichelte Linie) und im unter Berücksichtigung der Minimalen Länge (durchgezogene Linie). Es wurde  $M_f = 1 \text{ TeV}$  gewählt.

Zur Bestimmung der Oszillationswahrscheinlichkeit (4.21) muß die Differenz der Frequenzen zweier verschiedener Flavors ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
 \omega_{F_1}(E) - \omega_{F_2}(E) &= \\
 &= M_f \frac{\tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) + \frac{m_1^2}{2EM_f}}{1 + \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) \frac{m_1^2}{2EM_f}} - M_f \frac{\tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) + \frac{m_2^2}{2EM_f}}{1 + \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) \frac{m_2^2}{2EM_f}} \\
 &= M_f \frac{\frac{\Delta m^2}{EM_f} (1 - \tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right))}{1 + \tanh\left(\frac{E}{M_f}\right) \frac{\sum m^2}{EM_f} + \tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right) \frac{m_1^2 m_2^2}{E^2 M_f^2}} \\
 &\stackrel{m \ll E, m \ll M_f}{\approx} \frac{\Delta m^2}{E} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right)\right) \quad .
 \end{aligned}$$

Die Oszillationswellenlänge (4.23) lautet im vorliegenden Modell also:

$$\lambda = \frac{4\pi}{\Delta\omega} = \frac{4\pi E}{\Delta m^2 \left(1 - \tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right)\right)} .$$

Sie ist in Abbildung 4.16 dargestellt. Deutlich ist der erwartete Anstieg und damit die Unterdrückung der Oszillation für höhere Energien zu erkennen, im Kontrast zum Ergebnis mit der modifizierten Dispersionsrelation (4.27).

Aus der Oszillationswellenlänge folgt unmittelbar die Oszillationswahrscheinlichkeit:

$$P(F_1 \rightarrow F_2) = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2E} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right)L\right)\right) . \quad (4.28)$$

Im Falle der Existenz Großer Extradimensionen und einer fundamentalen Skala  $M_f$  im Bereich  $\sim$  TeV könnte eine solche Modifikation observierbar sein.

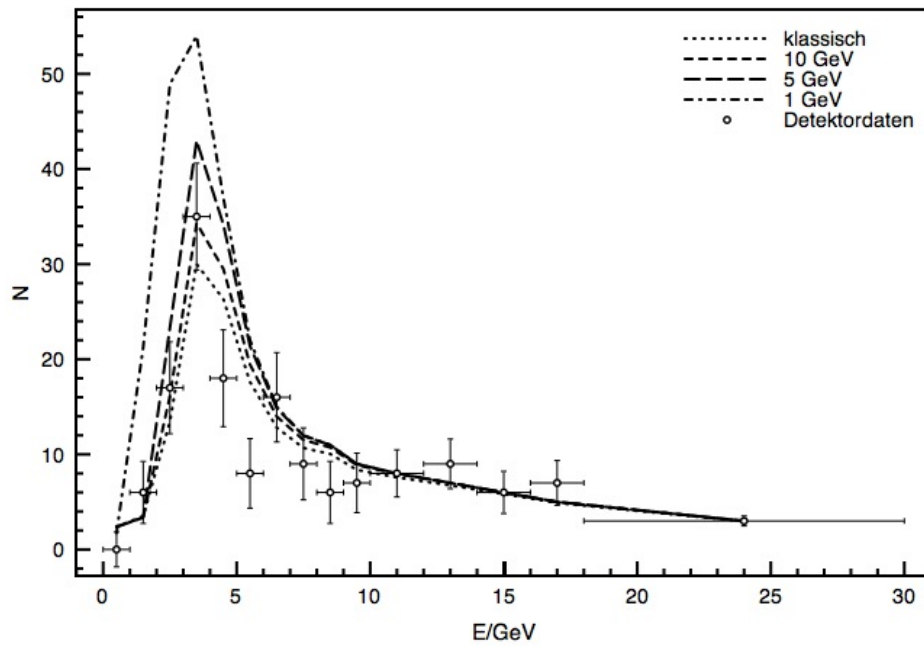
Abbildung 4.17 zeigt die Resultate für das in Abschnitt 4.6.2.2 beschriebene MINOS-Experiment. Die erwarteten Neutrinoraten im fernen Detektor wurden durch Inklusion des aus Gleichung (4.28) ersichtlichen Reduktionsfaktors durch die Minimale Länge in die mit der Beam Matrix-Methode gewonnene Rate ermittelt. Die geringe Statistik erlaubt lediglich ein Limit von etwa  $M_f \geq 1$  GeV an die fundamentale Skala.

Ein Problem hierbei ist auch die geringe Energie der betrachteten Neutrinos: Für  $x \rightarrow 0$  gilt  $\tanh(x) \approx x$ , d.h. für eine fundamentale Skala von  $M_f = 1$  TeV liegt die Korrektur für 10 GeV-Neutrinos lediglich bei

$$\tanh^2\left(\frac{E}{M_f}\right) \approx \left(\frac{E}{M_f}\right)^2 = \left(\frac{10 \text{ GeV}}{1 \text{ TeV}}\right)^2 = 10^{-4} .$$

Eine Erhöhung der Energie der Neutrinos bietet aber keine Lösung: Die Oszillationslänge steigt schon klassisch linear mit der Energie an, mit Inklusion der Minimalen Länge noch stärker (siehe Abbildung 4.16); Oszillationen von





**Abbildung 4.17:** Erwartete Anzahl  $N$  von Neutrinos verschiedener Energien  $E$  im fernen Detektor von MINOS für die klassische Neutrinooszillation sowie im Falle einer Minimalen Länge für verschiedene Werte der fundamentalen Skala  $M_f$  (siehe Legende). Die Punkte zeigen die gemessenen Daten im fernen Detektor [M<sup>+</sup>06].

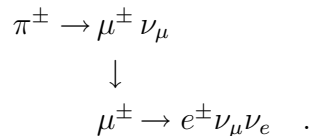
Neutrinos wesentlich höherer Energien lassen sich auf der Strecke von 735 km des MINOS-Experiments nicht mehr beobachten.

Eine andere Möglichkeit der Überprüfung des Einflusses der Minimalen Länge auf Neutrinooszillationen wäre die Beobachtung des bereits beschriebenen „Einfrierens“ derselben bei ultrahochenergetischen Neutrinos:

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow \infty} \lambda &= \lim_{E \rightarrow \infty} \frac{4\pi E}{m_{F_1}^2 - m_{F_2}^2} \left( 1 - \tanh^2 \left( \frac{E}{M_f} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{8\pi E \exp \left( \frac{2E}{M_f} \right)}{m_{F_1}^2 - m_{F_2}^2} . \end{aligned}$$

Die Oszillationslänge steigt mit der modifizierten de Broglie-Relation exponentiell statt klassisch linear an und unterdrückt Oszillationen nahezu vollständig.

Der Ursprung der hochenergetischsten kosmischen Neutrinos ist die Photopionen-Produktion (vgl. Abschnitt 4.5.5)[DMSS06]. Ultrahochenergetische Protonen wechselwirken mit der kosmischen Hintergrundstrahlung und erzeugen dabei Pionen. In der Zerfallskette dieser Pionen entstehen Neutrinos:



Dies legt ein ungefähres Neutrinoflußverhältnis  $I_{\nu_\tau} : I_{\nu_\mu} : I_{\nu_e}$  von  $0 : 2 : 1$  nahe. Durch multiple Oszillation sollten sich ohne Minimale Länge diese Verhältnisse rasch ausgleichen, selbst für hochenergetische Neutrinos von  $10^{12}$  GeV (siehe Abbildung 4.5) läge die Oszillationslänge (4.23) bei lediglich etwa 100 pc.<sup>14</sup> Durch die Existenz einer Minimalen Länge bleiben diese Verhältnisse jedoch erhalten: Setzt man z.B. eine maximal einprozentige Oszillationswahrscheinlichkeit für alle Neutrinos des beobachtbaren Universums an (Größe etwa 46,5 Lichtjahre), so ergibt sich ein Limit von etwa  $20M_f$  für

---

<sup>14</sup>Zum Vergleich: Der der Sonne nächstgelegene Stern, Proxima Centauri, ist etwa 1,3 pc entfernt.

die Energie, ab der Neutrinos mit 99-prozentiger Wahrscheinlichkeit in ihrem Ursprungsflavor die Erde erreichen.

Diese Untersuchung lässt sich natürlich verfeinern: Dazu müsste eine etwaige Redshift-Verteilung  $f_\nu(z)$  der Neutrinoquellen bekannt sein, mit dem die Oszillationswahrscheinlichkeit zu gewichten wäre:

$$P_{F_1 \rightarrow F_2}(E) = \frac{\int_0^{z_{max}} P_{F_1 \rightarrow F_2}(E, z) f_\nu(z) dz}{\int_0^{z_{max}} f_\nu(z) dz} ,$$

wobei  $P_{F_1 \rightarrow F_2}(E, z)$  im wesentlichen durch Ersetzung von  $E$  durch  $E(1+z)$  in Gleichung (4.28) gewonnen werden könnte[Chr05]. Erforderlich ist aber auch die genaue Kenntnis der Oszillationsstrecke, und damit - aufgrund der hohen mittleren freien Weglänge der Neutrinos - eine genaue Kenntnis der Abhängigkeit des Redshifts von der Entfernung bis in das Regime der höchsten Redshifts  $z > 1$ . Diese ist jedoch abhängig vom benutzten kosmologischen Modell[Wei72].

Die Detektion von Modifikationen an Neutrinooszillationen kann also auf zwei Wegen geschehen:

- Für terrestrische Experimente müsste entweder die Statistik signifikant erhöht werden, oder die Energie der beobachteten Neutrinos erhöht werden, was wiederum eine längere Beobachtungsstrecke nötig machen würde.
- Ein einfacher „Fingerabdruck“, nämlich die Unterdrückung der Oszillation für sehr hochenergetische Neutrinos wäre durch die Messung der totalen kosmischen Neutrinoflüsse der verschiedenen Flavors möglich, wie sie in zukünftigen Radio- und akustischen Neutrinodetektoren erwartet wird. Eine genaue quantitative Analyse erfordert aber eine bessere Kenntnis der Entfernungsverteilung der Neutrinoquellen im Universum oder eine singuläre Quelle für hochenergetische Neutrinos mit bekannter Entfernung und bekanntem Neutrinospektrum.

## 4.7 Ausblick: Statistische Mechanik mit einer Minimalen Länge

Eine der entscheidenden Auswirkungen einer modifizierten de Broglie-Relation ist die Beschränkung des Wellenzahlzustandsraumes durch  $1/L_f = M_f$  bzw. die dadurch induzierte Modifikation des Impulszustandsraumes (3.16):

$$\int_0^{M_f} dk = \int_0^\infty \frac{\partial k}{\partial p} dp \quad .$$

Die Theorie, die die mikroskopisch möglichen Teilchenzustände mit den makroskopischen Eigenschaften der Materie verbindet, ist die Statistische Mechanik. Diese Verbindung ist manifestiert in der Gleichung für die Entropie eines abgeschlossenen Systems (mikrokanonisches Ensemble):

$$S = \ln(\Omega(E)) \quad ,$$

wobei  $\Omega(E)$  die Anzahl der möglichen erreichbaren Mikrozustände des Systems der Gesamtenergie  $E$  bezeichnet. Ausgehend von der Entropie lassen sich alle makroskopischen Eigenschaften wie z.B. die Temperatur des Systems bestimmen.

Für die Berechnung des Einflusses der Minimalen Länge ist das mikrokanonische Ensemble jedoch sehr unhandlich, da die Festlegung der Energie durch  $E^2 = p^2 + m^2$  nur Zustände auf einer Untermannigfaltigkeit des Impulsraumes erlaubt. Für diesen Zweck eignet sich das großkanonische Ensemble, das sowohl Energie- als auch Teilchenaustausch mit der Umgebung erlaubt.

Für ein quantenmechanisches System stellt sich der großkanonische Formalismus wie folgt dar: Das großkanonische Potential ist

$$\Omega = -T \ln(Z) \quad ,$$

wobei  $T$  die Temperatur des Systems und  $Z$  die großkanonische Zustandssumme ist:

$$Z = \text{Tr} e^{-\frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{T}} \quad .$$

$\hat{H}$  ist der Hamiltonoperator,  $\hat{N}$  ist der Teilchenzahloperator,  $\mu$  ist das chemische Potential, das als Änderung der Inneren Energie eines Systems bei Zugabe von Teilchen definiert ist,

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N} \quad ,$$

und somit die möglichen Wechselwirkungen verschiedener Teilchenarten charakterisiert. Für Bosonen ergibt die Auswertung der Zustandssumme für das Potential:

$$\Omega = T \sum_n \ln \left( 1 - e^{-\frac{E_n - \mu}{T}} \right) \quad .$$

Hier ist  $E_n^2 = p_n^2 + m^2$  die Energie des  $n$ -ten Zustands.

Für ein ausreichend großes betrachtetes Volumen sind die Energiezustände praktisch kontinuierlich und die Summe läßt sich in ein Integral umschreiben; es ergibt sich:

$$\Omega = \frac{VT}{(2\pi)^3} \int d^3p \ln \left( 1 - e^{-\frac{E(p) - \mu}{T}} \right) \quad . \quad (4.29)$$

Aus diesem großkanonischen Potential lassen sich dann die thermodynamischen Größen Energiedichte  $\rho(T)$ , Druck  $p(T)$  und Teilchendichte  $N(T)$  bestimmen:

$$\rho(T) = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} \left( \frac{1}{T} \Omega \right) \quad , \quad (4.30)$$

$$p(T) = -\frac{\partial}{\partial V} \Omega \quad , \quad (4.31)$$

$$N(T) = -\frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \mu} \Omega \quad . \quad (4.32)$$

### 4.7.1 Das modifizierte Impulsmaß

Analog zum Casimireffekt, zu dessen Herleitung die Anzahl der Mikrozustände in einem bestimmten Raumgebiet benötigt wird (siehe Abschnitt 4.4), läßt sich auch die Modifikation des großkanonischen Potentials (4.29) herleiten. Im Ortsraum gelten entsprechende Randbedingungen an die ebenen Wellen, die maximal die Wellenzahl  $k = L_f$  haben dürfen, im Impulsraum transformiert sich diese Forderung gemäß Gleichung (3.16)[Nie02].

Im Folgenden soll die funktionale Abhängigkeit  $k(p)$  aus Gleichung (3.12) benutzt werden, das Impulsmaß lautet dann entsprechend:

$$\int_0^{M_f} dk = \int_0^\infty \left| \frac{\partial k}{\partial p} \right| dp \approx \int_0^\infty e^{-\epsilon p^2} dp$$

mit  $\epsilon = L_f^2 \pi / 4$ .

Für den interessierenden Energiebereich der fundamentalen Skala  $M_f$  sind Teilchen ultrarelativistisch,  $E = |p|$ . Umgeschrieben auf Kugelkoordinaten und versehen mit dem modifizierten Impulsmaß lautet das großkanonische Potential dann:

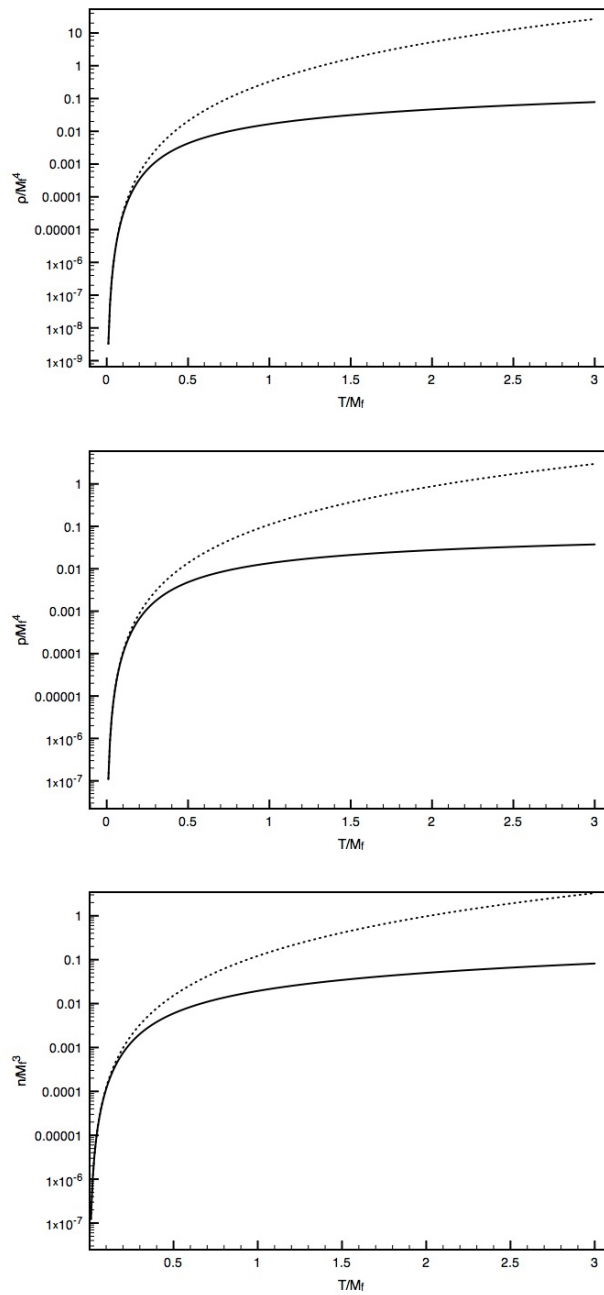
$$\Omega_{ML} = \frac{4\pi VT}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \ln(1 - e^{-\frac{p-\mu}{T}}) p^2 e^{-\epsilon p^2} \quad .$$

Durch die exponentielle Unterdrückung ist das Integral absolut konvergent, so daß die Ableitungen, die zur Bestimmung der Größen (4.30), (4.31) und (4.32) notwendig sind, vor dem Integral ausgeführt werden können. Schließlich kann  $\mu = 0$  für ultrarelativistische Teilchen gesetzt werden und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho_{ML}(T) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{e^{\frac{p}{T}} - 1} e^{-\epsilon p^2} \quad , \\ p_{ML}(T) &= -\frac{4\pi T}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \ln(1 - e^{-\frac{p}{T}}) p^2 e^{-\epsilon p^2} \quad , \\ N_{ML}(T) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{e^{\frac{p}{T}} - 1} e^{-\epsilon p^2} \quad . \end{aligned}$$

#### 4.7. AUSBLICK: STATISTISCHE MECHANIK MIT EINER MINIMALEN LÄNGE

---



**Abbildung 4.18:** Die Energiedichte, der Druck und die Teilchendichte (von oben nach unten) in Abhängigkeit von der Temperatur mit Minimaler Länge (durchgezogene Linie) und klassisch (gestrichelte Linie) im großkanonischen Ensemble. Alle Größen sind in entsprechenden Potenzen der fundamentalen Skala  $M_f$  angegeben.

Die Integrale wurden numerisch ausgeführt und sind in Abbildung 4.18 gezeigt. Bei allen Größen zeigt sich deutlich die die Unterdrückung durch die Minimale Länge im Bereich hoher Temperaturen und der Übergang in den klassischen Grenzfall für kleine Temperaturen.

Interessant ist die Entwicklung für  $T \rightarrow \infty$ . In diesem Fall gilt

$$e^{\pm \frac{p}{T}} \approx 1 \pm \frac{p}{T}$$

und die obigen Ausdrücke vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{ML}(T) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp T p^2 e^{-\epsilon p^2} \quad , \\ \lim_{T \rightarrow \infty} p_{ML}(T) &= -\frac{4\pi T}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \ln\left(\frac{p}{T}\right) p^2 e^{-\epsilon p^2} \quad , \\ \lim_{T \rightarrow \infty} N_{ML}(T) &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp T p e^{-\epsilon p^2} \quad . \end{aligned}$$

Für hohe Temperaturen gilt also (mit  $\ln(p/T) = \ln(p) - \ln(T)$  in  $p_{ML}(T)$ ):

$$\begin{aligned} \rho_{ML}(T) &\sim T \quad , \\ p_{ML}(T) &\sim T(1 + c \ln(T)) \quad , \\ N_{ML}(T) &\sim T \quad . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis führt zu einer modifizierten Zustandsgleichung: Für den klassischen Fall folgt aus (4.30) und (4.31)  $\rho(T) \sim T$  und  $p(T) \sim T$ . Insbesondere gilt dann:

$$p = \frac{1}{3}\rho \quad .$$

Im Fall der Minimalen Länge gilt dagegen für hohe Temperaturen die geänderte Zustandsgleichung:

$$p \sim \rho(1 + c \ln(\rho)) \quad . \quad (4.33)$$



## 4.7.2 Mögliche Anwendungen

Aus Abbildung 4.18 geht hervor, daß die Modifikationen durch die modifizierte de Broglie-Relation für Temperaturen von etwa  $0,3M_f$  signifikant werden.<sup>15</sup> Selbst für eine fundamentale Skala in der Größenordnung von 1 TeV handelt es sich dabei um Temperaturen, die von keinem terrestrischen Experiment erzeugt werden können. Die in Teilchenbeschleunigern derzeit erreichbaren Temperaturen liegen im Bereich von  $10^2 - 10^3$  MeV und damit viele Größenordnungen unterhalb der fundamentalen Skala.

Eine modifizierte Thermodynamik könnte sich allerdings in Supernovae auswirken; die Kerntemperaturen können hier bis zu  $1 - 10$  GeV erreichen. Dennoch bleibt fraglich, ob die Meßgenauigkeit zur Detektion der immer noch kleinen Modifikationen durch die geänderte de Broglie-Relation ausreicht.

Die mit Abstand höchsten Temperaturen herrschten zu Beginn des Universums: Untersuchungen mit einer modifizierten Dispersionsrelation (siehe Abschnitt 2.4.2) zeigen, daß eine modifizierte Thermodynamik die Entwicklung des frühen Universums maßgeblich beeinflusst[BM01]. Auch wurde das Horizontproblem (siehe Abschnitt 3.2.3) mit einer Zustandsgleichung der Form (4.33) untersucht[AM01, Nie02]. Eine modifizierte Thermodynamik hätte möglicherweise auch Auswirkungen auf die Strukturformation im frühen Universum.

---

<sup>15</sup>Die genaue Stärke der Modifikation erster Ordnung hängt dabei allerdings von der gewählten Relation  $k(p)$  ab, insbesondere ihres ersten Koeffizienten der Entwicklung über die lineare Ordnung hinaus.

*—It is my opinion that our present picture of physical reality, particularly in relation to the nature of time, is due for a grand shake up - even greater, perhaps, than that which has already been provided by present-day relativity and quantum mechanics.*

Roger Penrose, *The Emperor's New Mind*

# 5

## Schlußbetrachtungen

In der vorliegenden Arbeit wurde das Konzept einer Minimalen Länge unter verschiedenen Aspekten diskutiert: In Kapitel 2 wurden die theoretischen Grundlagen erläutert, die zu einer solchen Annahme führen, in Kapitel 3 wurde eine effektive Theorie vorgestellt, die konkrete Vorhersagen für physikalisch meßbare Größen ermöglicht, und in Kapitel 4 wurden Experimente aus den unterschiedlichsten Bereichen der modernen Physik diskutiert, anhand derer eine Überprüfung der Theorie möglich ist. Es ergeben sich zwei wesentliche Schlußfolgerungen:

- Vom theoretischen Standpunkt her besteht heute kaum ein Zweifel, daß die Vorstellung von einer bis in kleinste Größenordnungen kontinuierlichen Raumzeit einer Revision bedarf: Die Probleme mit Unendlichkeiten, die beim Versuch der Quantisierung der linearisierten Gravitation

---

nach dem Schema der anderen Naturkräfte entstehen, sind hier symptomatisch.

Alle bisher vorgeschlagenen Theorien einer Quantengravitation, die diese Probleme zu lösen versuchen, führen eine Minimale Länge ein, entweder bedingt durch die Eigenschaften der Felder auf der Raumzeit wie in der Stringtheorie, oder durch die Quantisierung der Raumzeit selbst wie in der Loop-Quantengravitation. Dabei ist diese Minimale Länge prinzipiell und nicht durch äußere Faktoren bestimmt.<sup>1</sup>

- Auch ohne eine vollständig verstandene Theorie der Quantengravitation bietet die effektive Beschreibung der Minimalen Länge mit Hilfe des hier vorgestellten Modells der modifizierten de Broglie-Relation die Möglichkeit der Abschätzung ihrer experimentell meßbaren Einflüsse. Im Falle der Existenz Großer Extradimensionen oder eines anderen die fundamentale Skala der Gravitation reduzierenden Effekts wird es möglich, in einem breiten Spektrum physikalischer Experimente entsprechende Beobachtungen zu machen.

In Kapitel 4 wurden Vorhersagen zum Einfluß der Minimalen Länge auf verschiedenste Experimente gemacht. Darunter waren einerseits Effekte auf „klassische“ Phänomene wie das gyromagnetische Moment oder die Neutrinooszillationen, andererseits auch auf Effekte wie die Produktion von Schwarzen Löchern, die eine spezifische Vorhersage des Modells der Großen Extradimensionen sind. Dies ermöglicht einen unabhängigen Vergleich beider Szenarien und damit verschiedene Schlußfolgerungen:

- Wenn in zukünftigen Experimenten keine Abweichung vom bisherigen Standardmodell festgestellt würde, werden Modelle wie die Großen Extradimensionen, die das Hierarchieproblem etwa durch geometrische Effekte erklären und die tatsächliche fundamentale Skala der Gravitation auf der Massenskala des Standardmodells positionieren, deutlich

---

<sup>1</sup>Ebenso folgt z.B. die Heisenbergsche Unschärferelation aus den Prinzipien der Quantenmechanik und resultiert nicht etwa aus einer mangelnden Meßgenauigkeit.

an Attraktivität verlieren. In diesem Fall bleibt der Einfluß quanten-gravitativer Effekte auf der Erde unobservierbar und kann sich nur in astrophysikalischen Experimenten bzw. in Modellen zur Evolution des Universums manifestieren.

- Sollten sowohl Schwarze Löcher und Gravitonenproduktion, als auch die hier beschriebenen Einflüsse der Minimalen Länge in Experimenten sichtbar werden, bedeutete dies einerseits ungeahnte Möglichkeiten für die Experimentalphysik, da Quantengravitation im Labor observierbar wäre, andererseits eine Bestätigung für die Theoretische Physik, die mit den bisherigen Vorstellungen über die Theorie der Quantengravitation auf dem richtigen Weg wäre.
- Herausforderungen insbesondere an die Theoretische Physik ergäben sich dann, wenn nur eines der beiden Phänomene - Minimale Länge oder Große Extradimensionen - in Experimenten nachgewiesen werden könnte. Im ersten Fall hieße das, daß zwar die Skala der Quantengravitation tatsächlich auf experimentell erreichbaren Niveau läge, aber ein anderer, noch zu erklärender Mechanismus dafür verantwortlich wäre. Der zweite Fall, also die Existenz Großer Extradimensionen ohne Nachweisbarkeit einer Minimalen Länge, bedeutete hingegen zumindest ein Problem für die heutigen Theorien der Quantengravitation, da eine ihrer Kernaussagen experimentell nicht bestätigt worden wäre.

Der große Vorteil der hier vorgestellten Theorie liegt also in der Möglichkeit der Überprüfung der fundamentalen Skala der Gravitation unabhängig vom benutzten Modell zur Generierung der Größe dieser Skala.

Da die Vorhersagen der verschiedenen Theorien, die über das Standardmodell hinausgehen, bezüglich der Minimalen Länge übereinstimmen, bietet das Modell der modifizierten de Broglie-Relation als effektive Theorie jedoch keine Anhaltspunkte, die „richtige“ Theorie unter ihnen zu ermitteln. Dies kann nur durch spezifische Vorhersagen und Experimente geschehen, die auf den jeweiligen Theorien eigenen Phänomenen beruhen.

---

Lee Smolin hat die fünf größten Aufgaben der heutigen Theoretischen Physik wie folgt formuliert [Smo06]:

1. Kombiniere Allgemeine Relativitätstheorie und Quantentheorie in einer einzigen Theorie, die von sich behaupten kann, eine vollständige Theorie der Natur zu sein.
2. Löse die Probleme in den Grundlagen der Quantenmechanik, entweder durch Sinngebung der existierenden Theorie oder Erfindung einer neuen Theorie, die Sinn macht.
3. Ermittle, ob die verschiedenen Teilchen und Kräfte in einer Theorie vereinigt werden können, die sie alle als Manifestation einer einzigen, fundamentalen Einheit erklärt, oder nicht.
4. Erkläre, wie die Werte der freien Konstanten im Standardmodell der Teilchenphysik in der Natur gewählt werden.
5. Erkläre Dunkle Materie und Dunkle Energie. Oder, falls sie nicht existieren, erkläre wie und warum die Gravitation auf großen Skalen modifiziert wird. Genereller, erkläre, warum die Konstanten des Standardmodells der Kosmologie, einschließlich der Dunklen Energie, die Werte haben, die sie haben.

Der Autor der vorliegenden Dissertation hofft, zumindest einen kleinen Beitrag dazu geliefert zu haben, die experimentelle Überprüfung der Grundaussagen der derzeit existierenden Lösungsansätze zu Fragestellung 1. möglich zu machen.

# Literaturverzeichnis

- [A<sup>+</sup>02] AHMAD, Q. R. et al.: *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory.* Phys. Rev. Lett., 89:011301, 2002.
- [A<sup>+</sup>03] AHRENS, J. et al.: *IceCube: The next generation neutrino telescope at the south pole.* Nucl. Phys. Proc. Suppl., 118:388–395, 2003.
- [A<sup>+</sup>07a] AHARMIM, B. et al.: *Measurement of the  $\nu/e$  and total B-8 solar neutrino fluxes with the Sudbury Neutrino Observatory phase I data set.* Phys. Rev., C75:045502, 2007.
- [A<sup>+</sup>07b] ALBERT, J. et al.: *Probing Quantum Gravity using Photons from a Mkn 501 Flare Observed by MAGIC.* arXiv:0708.2889 [astro-ph], 2007.
- [AC02] AMELINO-CAMELIA, G.: *Relativity in space-times with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale.* Int. J. Mod. Phys., D11:35–60, 2002.
- [AHDD98] ARKANI-HAMED, N., S. DIMOPOULOS und G. R. DVALI: *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter.* Phys. Lett., B429:263–272, 1998.

- [AHDDMR02] ARKANI-HAMED, N., S. DIMOPOULOS, G. R. DVALI und J. MARCH-RUSSELL: *Neutrino masses from large extra dimensions*. Phys. Rev., D65:024032, 2002.
- [Ahl00] AHLUWALIA, D. V.: *Quantum violation of the equivalence principle and gravitationally modified de Broglie relation*. Phys. Lett., A275:31–35, 2000.
- [Akh99] AKHMEDOV, E. K.: *Neutrino physics*. In: *Trieste 1999, Particle physics*, 1999.
- [AM99] ALBRECHT, A. und J. MAGUEIJO: *A time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles*. Phys. Rev., D59:043516, 1999.
- [AM01] ALEXANDER, S. und J. MAGUEIJO: *Non-commutative geometry as a realization of varying speed of light cosmology*. hep-th/0104093, 2001.
- [Ash86] ASHTEKAR, A.: *New variables for classical and quantum gravity*. Phys. Rev. Lett., 57:2244–2247, 1986.
- [B<sup>+</sup>04] BENNETT, G. W. et al.: *Measurement of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7-ppm*. hep-ex/0401008, 2004.
- [Bae98] BAEZ, JOHN C.: *Spin foam models*. Class. Quant. Grav., 15:1827–1858, 1998.
- [BCL92] BARROW, J. D., E. J. COPELAND und A. R. LIDDLE: *The Cosmology of black hole relics*. Phys. Rev., D46:645–657, 1992.
- [BD76] BAHCALL, J. N. und R. DAVIS: *Solar neutrinos: A scientific puzzle*. Science, 191:264–267, 1976.
- [BI34] BORN, M. und L. INFELD: *Foundations of the new field theory*. Proc. Roy. Soc. Lond., A144:425–451, 1934.

- [BKP02] BLAIS, D., C. KIEFER und D. POLARSKI: *Can primordial black holes be a significant part of dark matter?* Phys. Lett., B535:11–16, 2002.
- [BM01] BRANDENBERGER, R. H. und J. MARTIN: *The robustness of inflation to changes in super-Planck- scale physics.* Mod. Phys. Lett., A16:999–1006, 2001.
- [BMT59] BARGMANN, V., L. MICHEL und V. L. TELEGDI: *Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field.* Phys. Rev. Lett., 2:435, 1959.
- [BPB01] BAHCALL, J. N., M. H. PINSONNEAULT und S. BASU: *Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties.* Astrophys. J., 555:990–1012, 2001.
- [BTCZ99] BRUN, A. S., S. TURCK-CHIEZE und J. P. ZAHN: *Standard solar models in the light of new helioseismic constraints II. Mixing below the convective zone.* Astrophys. J., 525:1032–1041, 1999.
- [Cas48] CASIMIR, H. B. G.: *On the attraction between two perfectly conducting plates.* Indag. Math., 10:261–263, 1948.
- [CD04] CAVAGLIA, M. und S. DAS: *How classical are TeV-scale black holes?* Class. Quant. Grav., 21:4511–4522, 2004.
- [CDM03] CAVAGLIA, M., S. DAS und R. MAARTENS: *Will we observe black holes at LHC?* Class. Quant. Grav., 20:L205–L212, 2003.
- [Che85] CHEN, H. H.: *Direct approach to resolve the solar-neutrino problem.* Phys. Rev. Lett., 55:1534–1536, 1985.
- [Chr05] CHRISTIAN, J.: *Testing quantum gravity via cosmogenic neutrino oscillations.* Phys. Rev., D71:024012, 2005.



- [Cic00] CICERO, M. T.: *De finibus bonorum et malorum*. Reclam, Stuttgart, 2000.
- [CIM01] CORNET, F., J. I. ILLANA und M. MASIP: *TeV strings and the neutrino nucleon cross section at ultra-high energies*. Phys. Rev. Lett., 86:4235–4238, 2001.
- [CLOP96] CARUGNO, E., M. LITTERIO, F. OCCHIONERO und G. POLLIFRONE: *Inflation in multidimensional quantum cosmology*. Phys. Rev., D53:6863–6874, 1996.
- [CMKM02] CHEN, F., U. MOHIDEEN, G. L. KLIMCHITSKAYA und V. M. MOSTEPANENKO: *Demonstration of the lateral Casimir force*. Phys. Rev. Lett., 88:101801, 2002.
- [Con85] CONNES, A.: *Noncommutative differential geometry*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 62:257, 1985.
- [CP99] CULLEN, S. und M. PERELSTEIN: *SN1987A constraints on large compact dimensions*. Phys. Rev. Lett., 83:268–271, 1999.
- [CPRS01] CONTINO, R., L. PILO, R. RATAZZI und A. STRUMIA: *Graviton loops and brane observables*. JHEP, 06:005, 2001.
- [Dav03] DAVIER, M.: *Updated estimate of the muon magnetic moment using revised results from  $e^+ e^-$  annihilation*. hep-ex/0312065, 2003.
- [DE02] DIMOPOULOS, S. und R. EMPARAN: *String balls at the LHC and beyond*. Phys. Lett., B526:393–398, 2002.
- [Dir28] DIRAC, P. A. M.: *The quantum theory of electron*. Proc. Roy. Soc. Lond., A117:610–624, 1928.
- [Dir38] DIRAC, P. A. M.: *New basis for cosmology*. Proc. Roy. Soc. Lond., 165A:199–208, 1938.

- [DL01] DIMOPOULOS, S. und G. LANDSBERG: *Black holes at the LHC*. Phys. Rev. Lett., 87:161602, 2001.
- [DMSS06] DE MARCO, D., T. STANEV und F. W. STECKER: *Cosmogenic neutrinos from cosmic ray interactions with extragalactic infrared photons*. Phys. Rev., D73:043003, 2006.
- [Ein16] EINSTEIN, A.: *Die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie*. Ann. Phys., 49:769–822, 1916.
- [Eli01] ELIZALDE, E.: *Matching the observational value of the cosmological constant*. Phys. Lett., B516:143–150, 2001.
- [F<sup>+</sup>04] FISCHER, M. et al.: *New limits on the drift of fundamental constants from laboratory measurements*. Phys. Rev. Lett., 92:230802, 2004.
- [FH00] FABINGER, M. und P. HORAVA: *Casimir effect between world-branes in heterotic M-theory*. Nucl. Phys., B580:243–263, 2000.
- [Fri24] FRIEDMANN, A.: *On the possibility of a world with constant negative curvature of space*. Z. Phys., 21:326–332, 1924.
- [GM88] GROSS, D. J. und P. F. MENDE: *String theory beyond the Planck scale*. Nucl. Phys., B303:407, 1988.
- [GQRS98] GANDHI, R., C. QUIGG, M. H. RENO und I. SARCEVIC: *Neutrino interactions at ultrahigh energies*. Phys. Rev., D58:093009, 1998.
- [GR00] GAUL, M. und C. ROVELLI: *Loop quantum gravity and the meaning of diffeomorphism invariance*. Lect. Notes Phys., 541:277–324, 2000.
- [GT02] GIDDINGS, S. B. und S. D. THOMAS: *High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics*. Phys. Rev., D65:056010, 2002.

- [H<sup>+</sup>03] HOSSENFELDER, S. et al.: *Collider signatures in the Planck regime*. Phys. Lett., B575:85–99, 2003.
- [H<sup>+</sup>04] HOYLE, C. D. et al.: *Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law*. Phys. Rev., D70:042004, 2004.
- [Har04] HARBACH, U.: *Große Extradimensionen und die Minimale Längenskala*. Diplomarbeit, Johann-Wolfgang-Goethe Universität, 2004.
- [Haw75] HAWKING, S. W.: *Particle creation by black holes*. Commun. Math. Phys., 43:199–220, 1975.
- [Haw88] HAWKING, S. W.: *Wormholes in space-time*. Phys. Rev., D37:904–910, 1988.
- [HB06a] HARBACH, U. und M. BLEICHER: *Cosmic neutrinos beyond the standard model*. In: *Fundamental interactions: Proceedings of the 21st Lake Louise Winter Institute*, 2006.
- [HB06b] HARBACH, U. und M. BLEICHER: *No black holes at IceCube*. hep-ph/0601121, 2006.
- [Hei38] HEISENBERG, W.: *Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge*. Ann. Phys., 32:20–33, 1938.
- [Hew99] HEWETT, J. L.: *Indirect collider signals for extra dimensions*. Phys. Rev. Lett., 82:4765–4768, 1999.
- [HH06] HARBACH, U. und S. HOSSENFELDER: *The Casimir effect in the presence of a minimal length*. Phys. Lett., B632:379–383, 2006.
- [HHBS02] HOSSENFELDER, S., S. HOFMANN, M. BLEICHER und H. STÖCKER: *Quasi-stable black holes at LHC*. Phys. Rev., D66:101502, 2002.

- [HHBS04] HARBACH, U., S. HOSSENFELDER, M. BLEICHER und H. STÖCKER: *Probing the minimal length scale by precision tests of the muon  $g-2$* . Phys. Lett., B584:109–113, 2004.
- [Hig64] HIGGS, P. W.: *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*. Phys. Lett., 12:132–133, 1964.
- [HKB<sup>+</sup>05] HARBACH, U., B. KOCH, M. BLEICHER, H. STÖCKER und S. HOSSENFELDER: *Large extra dimensions and the minimal scale - constraints through high precision experiments*. Int. J. Mod. Phys., A20:3334–3336, 2005.
- [HKS07] HUMANIC, T. J., B. KOCH und H. STÖCKER: *Signatures for black hole production from hadronic observables at the Large Hadron Collider*. Int. J. Mod. Phys., E16:841–852, 2007.
- [HLN00] HADASZ, L., G. LAMBIASE und V. V. NESTERENKO: *Casimir energy of a non-uniform string*. Phys. Rev., D62:025011, 2000.
- [HMT04] HEADRICK, M., S. MINWALLA und T. TAKAYANAGI: *Closed string tachyon condensation: An overview*. Class. Quant. Grav., 21:S1539–S1565, 2004.
- [Hos04a] HOSSENFELDER, S.: *Running coupling with minimal length*. Phys. Rev., D70:105003, 2004.
- [Hos04b] HOSSENFELDER, S.: *Suppressed black hole production from minimal length*. Phys. Lett., B598:92–98, 2004.
- [Hos06a] HOSSENFELDER, S.: *Interpretation of quantum field theories with a minimal length scale*. Phys. Rev., D73:105013, 2006.
- [Hos06b] HOSSENFELDER, S.: *Self-consistency in theories with a minimal length*. Class. Quant. Grav., 23:1815–1821, 2006.
- [Hos07] HOSSENFELDER, S.: *Deformed special relativity in position space*. Phys. Lett., B649:310–316, 2007.

- [Isr67] ISRAEL, W.: *Event horizons in static vacuum space-times*. Phys. Rev., 164:1776–1779, 1967.
- [Kal21] KALUZA, T.: *Zum Unitätsproblem der Physik*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ), Seiten 966–972, 1921.
- [Kle26] KLEIN, O.: *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*. Z. Phys., 37:895–906, 1926.
- [KM73] KOBAYASHI, M. und T. MASKAWA: *CP violation in the renormalizable theory of weak interaction*. Prog. Theor. Phys., 49:652–657, 1973.
- [KMM95] KEMPF, A., G. MANGANO und R. B. MANN: *Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation*. Phys. Rev., D52:1108–1118, 1995.
- [KPP90] KONISHI, K., G. PAFFUTI und P. PROVERO: *Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory*. Phys. Lett., B234:276, 1990.
- [LEP03] LEP COLLABORATION (HRSG.): *A combination of preliminary electroweak measurements and constraints on the standard model*. hep-ex/0312023, 2003.
- [LG98] LIDDLE, A. R. und A. M. GREEN: *Cosmological constraints from primordial black holes*. Phys. Rept., 307:125–131, 1998.
- [Lin90] LINDE, A.: *Particle physics and inflationary cosmology*. CRC Press, Boca Raton, 1990.
- [LS99] LIZZI, F. und R. J. SZABO: *Noncommutative geometry and string duality*. In: *JHEP Conf.Proc. corfu98/073*, 1999.
- [M<sup>+</sup>06] MICHAEL, D. G. et al.: *Observation of muon neutrino disappearance with the MINOS detectors and the NuMI neutrino beam*. Phys. Rev. Lett., 97:191801, 2006.

- [Mea64] MEAD, C. A.: *Possible connection between gravitation and fundamental length*. Phys. Rev., 135:B849–B862, 1964.
- [Mes79] MESSIAH, A.: *Quantenmechanik*, Band 2. deGruyter, Berlin, 1979.
- [Mof93] MOFFAT, J. W.: *Superluminary universe: A possible solution to the initial value problem in cosmology*. Int. J. Mod. Phys., D2:351–366, 1993.
- [MP86] MYERS, R. C. und M. J. PERRY: *Black holes in higher dimensional space-times*. Ann. Phys., 172:304, 1986.
- [MPP99] MIRABELLI, E. A., M. PERELSTEIN und M. E. PESKIN: *Collider signatures of new large space dimensions*. Phys. Rev. Lett., 82:2236–2239, 1999.
- [MPR01] MANNHEIM, K., R. J. PROTHEROE und J. P. RACHEN: *On the cosmic ray bound for models of extragalactic neutrino production*. Phys. Rev., D63:023003, 2001.
- [MR91] MORRIS, D. A. und R. ROSENFELD: *Muon bundles from cosmic ray multi - W phenomena*. Phys. Rev., D44:3530–3542, 1991.
- [MS98] MALKAN, M. A. und F. W. STECKER: *An empirically based calculation of the extragalactic infrared background*. Astrophys. J., 496:13–16, 1998.
- [MS02] MAGUEIJO, J. und L. SMOLIN: *Lorentz invariance with an invariant energy scale*. Phys. Rev. Lett., 88:190403, 2002.
- [Muo95] MUON G-2 COLLABORATION (HRSG.): *E-821 Technical Design Report*. 3. Auflage, 1995.
- [NB79] NUGAEV, R. M. und V. I. BASHKOV: *Particle creation by a black hole as a consequence of the Casimir effect*. Phys. Lett., A69:385–386, 1979.

- [Nie02] NIEMEYER, J. C.: *Varying speed of light cosmology from a stringy short distance cutoff*. Phys. Rev., D65:083505, 2002.
- [Noe18] NOETHER, E.: *Invariante Variationsprobleme*. Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse, Seiten 183–207, 1918.
- [OS39] OPPENHEIMER, J. R. und H. SNYDER: *On continued gravitational contraction*. Phys. Rev., 56:455–459, 1939.
- [Ose06] OSER, S. M.: *Neutrino physics: A selective overview*. In: *Fundamental interactions: Proceedings of the 21st Lake Louise Winter Institute*, 2006.
- [P<sup>+</sup>02] PUMPLIN, J. et al.: *New generation of parton distributions with uncertainties from global QCD analysis*. JHEP, 07:012, 2002.
- [Pen71] PENROSE, R.: *Angular momentum: An approach to combinatorial spacetime*. Quantum Theory and Beyond, Seiten 151–180, 1971.
- [Per04] PEREZ, A.: *Introduction to loop quantum gravity and spin foams*. gr-qc/0409061, 2004.
- [PJ96] PROTHEROE, R. J. und P. A. JOHNSON: *Propagation of ultrahigh-energy protons over cosmological distances and implications for topological defect models*. Astropart. Phys., 4:253, 1996.
- [PM00] PROTHEROE, R. J. und H. MEYER: *An infrared background TeV gamma ray crisis?* Phys. Lett., B493:1–6, 2000.
- [PP01] PONTON, E. und E. POPPITZ: *Casimir energy and radius stabilization in five and six dimensional orbifolds*. JHEP, 06:019, 2001.

- [Pre92] PRESKILL, J.: *Do black holes destroy information?* In: *Houston 1992, Proceedings, Black holes, membranes, wormholes and superstrings*, 1992.
- [Rah04] RAHMEDE, C.: *Gravitonenproduktion in Großen Extradimensionen*. Diplomarbeit, Johann-Wolfgang-Goethe Universität, 2004.
- [RS99] RANDALL, L. und R. SUNDRUM: *A large mass hierarchy from a small extra dimension*. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3370–3373, 1999.
- [Sch16] SCHWARZSCHILD, K.: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, Seiten 189–196, 1916.
- [Sch02] SCHULLER, F. P.: *Born-Infeld kinematics*. *Annals Phys.*, 299:174–207, 2002.
- [Sky83] SKYRMS, B.: *Zeno's paradox of measure*. *Boston Studies in the Philosophy of Science*, 76:223–254, 1983.
- [Smo06] SMOLIN, L.: *The trouble with physics*. Houghton Mifflin Company, New York, 2006.
- [Sny47] SNYDER, H. S.: *Quantized space-time*. *Phys. Rev.*, 71:38–41, 1947.
- [SSP97] SRINIVASAN, K., L. SRIRAMKUMAR und T. PADMANABHAN: *Plane waves viewed from an accelerated frame: Quantum physics in classical setting*. *Phys. Rev.*, D56:6692–6694, 1997.
- [SST01] STARKMAN, G. D., D. STOJKOVIC und M. TRODDEN: *Large extra dimensions and cosmological problems*. *Phys. Rev.*, D63:103511, 2001.



- [Thi98] THIEMANN, T.: *A length operator for canonical quantum gravity*. J. Math. Phys., 39:3372–3392, 1998.
- [TYAK05] TANAKA, J., T. YAMAMURA, S. ASAI und J. KANZAKI: *Study of black holes with the ATLAS detector at the LHC*. Eur. Phys. J., C41:19–33, 2005.
- [Ueh02] UEHARA, Y.: *Production and detection of black holes at neutrino array*. Prog. Theor. Phys., 107:621–624, 2002.
- [Vel76] VELTMAN, M.J.G.: *Quantum theory of Gravitation*. In: BALIAN, R. und J. ZINN-JUSTIN (Herausgeber): *Methods in field theory (Méthodes en théorie des champs)*, Seiten 265–327, Amsterdam, Netherlands; New York, U.S.A., 1976. North-Holland; American Elsevier.
- [W<sup>+</sup>99] WEINHEIMER, C. et al.: *High precision measurement of the tritium beta spectrum near its endpoint and upper limit on the neutrino mass*. Phys. Lett., B460:219–226, 1999.
- [WAH<sup>+</sup>57] WU, C. S., E. AMBLER, R. W. HAYWARD, D. D. HOPPE und R. P. HUDSON: *Experimental test of parity conservation in beta decay*. Phys. Rev., 105:1413–1414, 1957.
- [Wei72] WEINBERG, S.: *Gravitation and cosmology*. John Wiley & Sons, New York, 1972.
- [Wei95] WEINBERG, S.: *The quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [Wey18] WEYL, H.: *Gravitation und Elektrizität*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. ), Seiten 465–480, 1918.
- [Whi92] WHITE, M. J.: *The continuous and the discrete*. Oxford University Press, New York, 1992.
- [Wit86] WITTEN, E.: *Noncommutative geometry and string field theory*. Nucl. Phys., B268:253, 1986.

- [Wit96] WITTEN, E.: *Reflections on the fate of space-time*. Phys. Today, 49N4:24–30, 1996.
- [Y<sup>+</sup>06] YAO, W. M. et al.: *Review of particle physics*. J. Phys., G33:1–1232, 2006.
- [Zwi04] ZWIEBACH, B.: *A first course in string theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

# Nomenklatur und Konventionen

- Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Über gleichlautende ko- und kontravariante Indizes innerhalb einer Gleichung wird summiert.
- $\eta_{\mu\nu}$  bezeichnet die flache Metrik und hat die Diagonaleinträge -1, 1, 1, 1.
- Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, hebräische von 0 bis 4; dabei stellt  $x^0 = t$  die Zeitkoordinate dar,  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$  die drei üblichen räumlichen Dimensionen und  $x^4$  eine zusätzliche Dimension.
- Wenn nicht anders angegeben gilt das natürliche Einheitensystem, d.h.  $\hbar = c = k = 1$ .
- Für die Dirac- und Pauli-Spin-Matrizen gelten die folgenden Konventionen:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Horst Stöcker für seine Unterstützung und die Aufnahme am Institut für Theoretische Physik und dem Frankfurt Institute of Advanced Studies, das mir diese Promotion nicht zuletzt auch finanziell ermöglicht hat. Ich danke JProf. Dr. Marcus Bleicher für die Betreuung und stetige Motivation während meiner Arbeit und Dr. Sabine Hossenfelder für die Hilfe und vor allem die Idee, die dieser Arbeit zugrunde liegt.

Ich danke Dr. Benjamin Koch für die Vielzahl von Diskussionen über die Physik, die dieser Dissertation zugrunde liegt und - zusammen mit Jorge Noronha und Prof. Dr. Miklos Gyulassy für die stets erhellenden „string roasts“.

Ich danke Sascha Vogel und noch einmal Dr. Sabine Hossenfelder für das Korrekturlesen und die Vorschläge zur Verbesserung dieser Arbeit.

Schließlich danke ich meinen Eltern, daß sie mir dieses Studium und diese Promotion ermöglicht haben und meiner Freundin für die Geduld und Unterstützung während der Zeit des Schreibens.

Weiterhin möchte ich allen anderen danken, die mich ideell oder finanziell unterstützt haben.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Ulrich Harbach  
Adresse: Allmendstr. 17  
Wohnort: 61169 Friedberg  
Telefon: 06031/62361  
eMail: [harbach@th.physik.uni-frankfurt.de](mailto:harbach@th.physik.uni-frankfurt.de)  
Geburtsdatum: 19.04.1979  
Geburtsort: Darmstadt  
Nationalität: deutsch  
Familienstand: ledig

## Ausbildung

1985-1989	Grundschule Ockstadt, Wetteraukreis
1989-1998	Augustinergymnasium Friedberg/Hessen
1998	Abitur (Note: 1,6)
1998-1999	Wehrdienst
1999-2001	Studium der Physik an der Justus Liebig-Universität Gießen (Vorlesungen bei Prof. Dr. Bartsch, Prof. Dr. Bolterauer, Prof. Dr. Bunde, Prof. Dr. Grün und Prof. Dr. Meyer)
2001	Vordiplom (Note: „sehr gut“)
2001-2004	Studium der Physik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt (Vorlesungen bei Prof. Dr. Jelitto, Prof. Dr. Kersting)
2004	Diplom (Note: „sehr gut“) bei Prof. Dr. Stöcker, ausgezeichnet mit dem Philipp Siedler-Preis des Physikalischen Vereins
seit 2004	Promotionsstudium an der Graduate School des Frankfurt Institute of Advanced Studies und dem Institut für Theoretische Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

## Sonstiges

- Refereetätigkeit für Journal of Physics A
- Lehrtätigkeit: Tutorien im Fachbereich Theoretische Physik und Mathematik für Prof. Dr. Dinges, Prof. Dr. h.c. mult. Greiner, Prof. Dr. Stöcker, Prof. Dr. Valenti
- Sprachkenntnisse: Englisch, Französisch, Norwegisch, Latein

## Veröffentlichungen:

- U. H., S. Hossenfelder, M. Bleicher, H. Stöcker: Probing the minimal length scale by precision tests of the muon  $g-2$ . *Phys.Lett.B584:109-113,2004*.

- U. H., S. Hossenfelder, M. Bleicher, H. Stöcker: Signatures of a minimal length scale in high precision experiments. *Proceedings of 42nd International Winter Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Italy*
- U. H., B. Koch, M. Bleicher, H. Stöcker: Large extra dimensions and the minimal scale - constraints through high precision experiments. *Int.J.Mod.Phys.A20:3334-3336,2005.*
- U. H., S. Hossenfelder: The Casimir effect in the presence of a minimal length. *Phys.Lett.B632:379-383,2006.*
- U. H., S. Hossenfelder: Modification of the Casimir effect due to a minimal length scale. *Lake Louise 2005, Fundamental interactions, 164-168*
- U. H., M. Bleicher: No black holes at IceCube. *hep-ph/060112*
- B. Betz, M. Bleicher, U. H., T. Humanic, B. Koch, H. Stöcker: Mini black holes at the LHC: Discovery through di-jet suppression, mono-jet emission and a supersonic boom in the quark-gluon plasma in ALICE, ATLAS and CMS. *Proceedings of 22nd Winter Workshop on Nuclear Dynamics, La Jolla, California.*

### Vorträge

- Forschungsaufenthalt an der Universität Bergen, Norwegen, Oktober 2003
- „Large eXtra Dimensions and the Minimal Scale“, 42nd International Winter Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Italien, 25. Januar - 1. Februar 2004
- „Large eXtra Dimensions and the Minimal Scale“, Seminar des Instituts für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt, 28. Mai 2004

- „High precision measurements and the Minimal Scale“, String Phenomenology 2004, University of Michigan, Ann Arbor, USA, 1.-6. August 2004
- „High precision measurements and the Minimal Scale“, Meeting of The Division of Particles and Fields of The American Physical Society, University of California, Riverside, USA, 26. August - 1. September 2004
- „The Casimir effect and the Minimal Scale“, Lake Louise Winter Institute: Fundamental Interactions, Lake Louise, Alberta, Kanada, 20. - 26. Februar 2005
- „A small scale in large dimensions“, Seminar des Instituts für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt, 1. Juli 2005
- „The Generalised Uncertainty Principle and Neutrino Physics“, Seminar des Instituts für Theoretische Physik, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt, 2. Februar 2006
- „Cosmic neutrinos beyond the Standard Model“, Lake Louise Winter Institute: Fundamental Interactions, Lake Louise, Alberta, Kanada, 17. - 23. Februar 2006
- „Observables of a Minimal Length Scale“, Seminar der Frankfurt International Graduate School for Science, Frankfurt, 15. Mai 2006
- „Experimental implications of a Minimal Length Scale“, Natural Ultraviolet Cutoffs In Expanding Space-Times, Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Kanada, 5. - 8. September 2006
- Forschungsaufenthalt am Perimeter Institute for Theoretical Physics, Waterloo, Ontario, Kanada, Oktober 2006