Endlichkeitseigenschaften auflösbarer arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Kai-Uwe Bux
aus Wilhelmshaven

Frankfurt am Main
1997

(D F 1)

vom Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. R. Kulze
Gutachter: Prof. Dr. R. Bieri,
Prof. Dr. H. Behr
Datum der Disputation: 19. Februar 1998

Zusammenfassung

Eine Chevalleygruppe $\mathcal{G}$ ist ein halbeinfaches Gruppenschema über $\mathbb{Z}$ – z.B. die SL_n. Eine Boreluntergruppe von $\mathcal{G}$ ist ein maximales auflösbares Untergruppenschema $\mathcal{B} \leq \mathcal{G}$ – z.B. die Gruppe B_n^0 aller oberen Dreiecksmatrizen in SL_n. Man kann immer eine über $\mathbb{Z}$ definierte Boreluntergruppe finden. In diesem Fall existiert für jede kommutative $\mathbb{Z}$-Algebra, was nichts anderes ist als ein kommutativer Ring R mit 1, die Gruppe $\mathcal{B}(R)$ der R-Punkte.

Sei K ein globaler Funktionenkörper, z.B. der Körpers $k(t)$ von rationalen Funktionen über einem endlichen Körper. Sei S eine endliche, nicht leere Menge von Primstellen über K und $\mathcal{O}_S$ der zugehörige S-arithmetische Ring – also z.B. der Polynomring $k[t]$ oder der Laurentpolynomring $k[t, t^{-1}]$.

Die Gruppen $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ und einige ihrer Untergruppen werden in dieser Arbeit auf ihre Endlichkeitseigenschaften hin untersucht. Ein Gruppe G heißt vom Typ F_m, wenn es einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(G,1)$ mit endlichem m-Gerüst gibt. Sie ist vom Typ FP_m, wenn $\mathbb{Z}$ als trivialer G-Modul eine projektive Auflösung besitzt, die in den Dimensionen bis m endlich erzeugt ist. F_1 und FP_1 sind äquivalent dazu, daß G endlich erzeugt ist. Endliche Präsentiertheit ist äquivalent zu F_2 und impliziert FP_2. Die Umkehrung gilt nicht. Hauptresultat dieser Arbeit ist das folgende

Theorem. *Mit den gewählten Bezeichnungen ist die Gruppe $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ vom Typ $F_{|S|-1}$ aber nicht vom Typ $FP_{|S|}$.*

Für eine Gruppe G vom Typ F_n haben Bieri, Neumann, Strebel und Renz die geometrischen Invarianten $\Sigma^m(G) \subseteq \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ für jedes $m \leq n$ erklärt. Sie enthalten die vollständige Information über Endlichkeitseigenschaften von Normalteilern der Gruppe G oberhalb ihrer Kommutatoruntergruppe. Wir leiten eine obere und eine untere Abschätzung für $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))$ her, die im Rang-1-Fall scharf werden, sonst aber beide nicht exakt sind. Für höhere Ränge ergibt sich aus den Abschätzungen, daß „hinreichend große Normalteiler von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ in allgemeiner Lage“ hohe Endlichkeitseigenschaften haben.

Endlichkeitseigenschaften auflösbarer arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern

Kai-Uwe Bux

Oktober 1998

Es gab eine Zeit, da alle endlich erzeugten Gruppen auch endlich präsentiert waren. Sie waren diskontinuierliche Untergruppen von Liegruppen oder operierten schön auf guten Geometrien und hatten alle positiven Eigenschaften – man denke zum Beispiel an endlich erzeugte Fuchssche Gruppen. Dann gab B.H. Neumann in [Neum37] das erste Beispiel einer endlich erzeugten, nicht endlich präsentierten Gruppe und zeigte überdies, daß es überabzählbar viele 2-Generator-Gruppen gibt, von denen natürlich nur abzählbar viele endlich präsentiert sind. Damit war klar, daß endliche Präsentiertheit eine viel stärkere Eigenschaft als endliche Erzeugtheit ist. Über zwanzig Jahre später zeigten G. Baumslag, W.W. Boone und B.H. Neumann in [BBN59] im Zusammenhang mit Entscheidungsproblemen, daß sich endliche Präsentiertheit nicht einmal auf endlich erzeugte Untergruppen einer endlich präsentierten Gruppe vererben muß.

Es dauerte allerdings noch einige Zeit, bis unendlich relierte, endlich erzeugte Gruppen in natürlichen Zusammenhängen beobachtet wurden – hier sind vor allem die Gruppen $\mathrm{SL}_2(k[t, t^{-1}])$ mit einem endlichen Körper k zu nennen, deren unendliche Reliertheit U. Stuhler in [Stuh76] bewies, was er in [Stuh80] zu einer Serie von Gruppen mit wachsenden Endlichkeitseigenschaften ausbaute. In [Stre84] gibt R. Strebel eine geschichtliche und systematische Übersicht, die auflösbare Gruppen in den Vordergrund stellt.

Beachtet man den geometrischen Hintergrund der endlichen Erzeugt- bzw. Präsentiertheit, so liegen zwei Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen nahe: Man nennt eine Gruppe G <u>vom Typ F_m</u>, wenn es einen $K(G,1)$-Komplex mit endlichem m-Gerüst gibt. Sie heißt <u>vom Typ FP_m</u>, wenn der triviale $\mathbb{Z}G$-Modul $\mathbb{Z}$ eine projektive Auflösung besitzt, die bis zur Dimension m endlich erzeugt ist. Das ist eine homologische Version der topologischen Endlichkeitseigenschaft F_m. Übrigens, was es für einen CW-Komplex bedeutet, endliches m-Gerüst zu besitzen, hat C.T.C. Wall in [Wall65] untersucht.

Endlichkeitseigenschaften haben etwas Mysteriöses. Niemand kann sagen, was wir eigentlich über eine Gruppe mehr wissen, wenn wir erfahren, daß sie vom Typ F_{18} aber nicht vom Typ FP_{23} ist. Für metabelsche Gruppen liefert die Bieri-Strebel-Theorie der „geometrischen Invarianten“ schöne Vermutungen, die durch zahlreiche Einzel- und Teilresultate erhärtet sind. Die endliche Präsentiertheit (F_2) ist hier gut verstanden. Für diese Gruppen fällt sie mit der Eigenschaft FP_2 zusammen, was im allgemeinen falsch ist, wie man aber erst durch [BeBr97] weiß.

In einer Situation wie dieser kann man nur hoffen, bei speziellen Klassen von Gruppen ein Gefühl dafür zu bekommen, wie die Endlichkeitseigenschaften mit der Gruppenstruktur verknüpft sind. Wir untersuchen S-arithmetische Gruppen. Diese Matrizengruppen sind gegeben durch zwei Parameter, ein algebraisches Gruppenschema $\mathcal{G}$ und eine Primstellenmenge S über einem globalen Körper K zur Festlegung eines S-arithmetischen Ringes $\mathcal{O}_S \subseteq K$. Sie eignen sich von daher gut für das beschriebene Programm, da sich die Parameter unabhängig variieren lassen. Außerdem bilden diese Gruppen eine natürliche Verallgemeinerung von Gittern in Liegruppen, für welche Endlichkeitseigenschaften von Natur aus eine geometrische Bedeutung haben.

Die Theorie der S-arithmetischen Gruppen ist geprägt von zwei fundamentalen Unterscheidungen. Auf Seiten des Körpers K ist zwischen globalen Zahlkörpern und globalen Funktionenkörpern zu unterscheiden. Für das Gruppenschema gibt es die beiden Extremfälle einer reduktiven Gruppe (z.B. SL_n, was sogar eine Chevalleygruppe ist, und GL_n) einerseits und einer auflösbaren Gruppe (z.B. einer Gruppe oberer Dreiecksmatrizen) andererseits. Wir stellen kurz die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

$\mathcal{G}$: reduktiv.

- K: **Zahlkörper.** $\mathcal{G}(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ F_∞ (d.h. vom Typ F_m für alle $m \in \mathbb{N}$). [BoSe76]
- K: **Funktionenkörper.** Die ersten beiden Endlichkeitseigenschaften sind vollständig behandelt, endliche Präsentiertheit in [Behr92].

  In höheren Dimensionen gibt es Beispielserien, die andeuten, daß mit $|S|$ und dem Rang der Gruppe zunehmend Endlichkeitseigenschaften erfüllt werden. Die wichtigsten Resultate sind:

  - $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ $\mathrm{F}_{|S|-1}$ aber nicht vom Typ $\mathrm{FP}_{|S|}$. [Stuh80]
  - Ist $\mathcal{G}$ eine Chevalleygruppe vom Rang n, die keinem Ausnahmetyp angehört, so ist $\mathcal{G}(k[t])$ vom Typ F_{n-1} aber nicht vom Typ FP_n, vorausgesetzt der endliche Körper k hat hinreichend viele Elemente. [Abra96, Corollary 20, Seite 113]

$\mathcal{B}$: auflösbar.

- K: **Zahlkörper.** Die ersten beiden Endlichkeitseigenschaften sind vollständig behandelt, endliche Präsentiertheit in [Abel87].

  In [Tiem97, Theorem 3.1] wird allgemein ein Hasse-Prinzip hergeleitet: $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ FP_m genau dann, wenn für jede Stelle $p \in S$ die Gruppe $\mathcal{B}(\mathcal{O}_p)$ die Kompaktheitseigenschaft CP_m hat, die in [AbTi97] definiert wird. Ist $\mathcal{B}$ speziell eine Borelgruppe in einer Chevalleygruppe, so ist $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ vom Typ F_∞, was ebenfalls in [Tiem97, Corollary 4.5] enthalten ist.

  Darüber hinaus gibt es nur einzelne Beispielserien, z.B. in [AbBr87].
- K: **Funktionenkörper.** Hier gilt kein Hasse-Prinzip. Das zeigt sich schon in [Bux97], wo eine Serie metabelscher Gruppen unter Verwendung der Bieri-Strebel-Theorie diskutiert wird. Die vorliegende Arbeit verallgemeinert die dort gewonnenen Ergebnisse auf höhere Ränge.

Unser Hauptergebnis ist das folgende

Theorem. *Sei $\mathcal{G}$ eine Chevalleygruppe, $\mathcal{B} \leq \mathcal{G}$ eine Boreluntergruppe, K ein globaler Funktionenkörper, S eine endliche, nicht leere Menge von Stellen über K und $\mathcal{O}_S$ der zugehörige S-arithmetische Ring. Dann ist $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ vom Typ $F_{|S|-1}$, aber nicht vom Typ $FP_{|S|}$.*

In den ersten beiden Abschnitten werden wir im wesentlichen begriffliche Vorarbeit zu leisten haben. Danach wenden wir uns dem Rang-1-Fall zu. In den Abschnitten 4 bis 7 wird dann das Theorem bewiesen: in Satz 5.1 zuerst die obere und dann die untere Abschätzung der Endlichkeitslänge in Satz 7.5. Zum Schluß wenden wir die entwickelten Techniken an, um in Satz 8.4 die „geometrischen Invarianten" der Gruppen $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ abzuschätzen. Wir geben die Definition dieser Invarianten am Anfang von Abschnitt 8.

1 Vorbemerkungen über Adele und unipotente Gruppen

Zur Theorie globaler Körper und Adele konsultiere man [CaFr67] oder [Weil73]. In dieser Arbeit ist

- K ein globaler Funktionenkörper, dessen Elemente wir Funktionen nennen. Die Konstanten von K bilden den endlichen Konstantenkörper
- k. Ferner ist
- P die Menge aller Stellen von K. Wir fassen eine Stelle als normierte diskrete Bewertung $p : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ auf. Für jede Stelle p bezeichnet
- K_p die Vervollständigung von K an der Stelle p. Durch stetige Fortsetzung von p erhalten wir eine normierte diskrete Bewertung auf dem lokalen Funktionenkörper K_p, die wir wieder mit p bezeichnen.
- $\mathcal{O}_p := \{f \in K_p \mid p(f) \geq 0\}$ bezeichnet den Ring der in p ganzen Funktionen. Das ist ein lokaler Ring mit maximalem Ideal
- $\mathfrak{m}_p = \{f \in K_p \mid p(f) > 0\}$. Der Restklassenkörper
- $k_p := \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ ist eine endliche Körpererweiterung von k vom Grade
- $d_p := [k_p : k]$. Durch
- $|f|_p := e^{d_p p(f)}$ ist eine Norm auf K_p gegeben, die proportional zum Modulus von K_p ist.

Adele bieten einen Formalismus, mit dem sich alle Stellen zugleich behandeln lassen. Für eine endliche, nicht-leere Stellenmenge $S \subseteq P$ bezeichnet

- $\mathcal{O}_S := \{f \in K \mid p(f) \geq 0 \;\; \forall p \in P \setminus S\}$ den Ring der Funktionen, die außerhalb von S ganz sind.
- $\boldsymbol{A}_S := \times_{p \in S} K_p \times \times_{p \notin S} \mathcal{O}_p$ ist der Ring der S-Adele.

Der Adelering von K ist der direkte Limes

- $\boldsymbol{A} := \varinjlim_S \boldsymbol{A}_S$. Für ein Adel $\boldsymbol{a} = (f_p)_{p \in P} \in \boldsymbol{A}$ ist
- $|\boldsymbol{a}| := \prod_p |f_p|_p$ die Idelenorm.

Da jede Funktion aus K an fast allen Stellen ganz ist, haben wir eine diagonale Inklusion $K \subseteq \boldsymbol{A}$. K wird auf diese Weise zu einem diskreten Unterring von $\boldsymbol{A}$. In diesem Sinne ist

$$\mathcal{O}_S = \boldsymbol{A}_S \cap K.$$

Ein grundlegendes Theorem (vergleiche [Weil73, Theorem 2, Seite 64]) besagt, daß der Quotient $\boldsymbol{A}/K$ kompakt ist. Wir benötigen eine leichte Verschärfung.

Im folgenden fassen wir eine über dem kommutativen Ring R definierte lineare algebraische Gruppe $\mathcal{G}$ als einen Funktor von der Kategorie der kommutativen (topologischen) R-Algebren in die Kategorie der (topologischen) Gruppen auf.

Lemma 1.1. *Sei U eine unipotente lineare algebraische Gruppe definiert über K. Dann ist $U(K)$ eine diskrete Untergruppe von $U(\boldsymbol{A})$, und die Quotienten $U(\boldsymbol{A})/U(K)$ und $U(K)\backslash U(\boldsymbol{A})$ sind kompakt.*

Beweis. Mit $\widehat{U}$ bezeichnen wir die <u>Charaktergruppe</u> von U. Das ist die lineare algebraische Gruppe der K-Morphismen von U nach $\mathfrak{Mult} = \mathrm{GL}_1$. Es sei $U(\boldsymbol{A})^\circ := \left\{ g \in U(\boldsymbol{A}) \mid |\chi(g)| = 1 \ \forall \chi \in \widehat{U}(K) \right\}$.

Nach [Bore91, Theorem 4.8] ist U über K trigonalisierbar. Daher ist mit [Behr62, Satz 3] der Quotient $U(\boldsymbol{A})^\circ/U(K)$ kompakt. Es reicht also, zu zeigen, daß $U(\boldsymbol{A})^\circ = U(\boldsymbol{A})$ ist.

Dazu beachte man, daß ein über K definierter Charakter $\chi : U \to \mathfrak{Mult}$ eine Operation von U auf der affinen Geraden K induziert. Nach [Bore91, Proposition 4.10] ist der Orbit der $1 \in K$ unter dieser Operation abgeschlossen in der Zarisky-Topologie. Er enthält aber offenbar nicht die $0 \in K$ – kann daher nicht die ganze Gerade sein und ist damit 0-dimensional. Also ist die Bahn der 1 und damit das Bild von χ endlich. Es besteht somit aus Einheitswurzeln. Auf diesen aber verschwinden alle Bewertungen, so daß die Idelenorm 1 ist. **q.e.d.**

2 Chevalleygruppen und ihre Gebäude

Wir fixieren eine <u>Chevalleygruppe</u>

- $\mathcal{G}$. Wie man sowas baut, wird zum Beispiel in [Chev60], [Stei67] oder [Abra94] beschrieben. Eine Chevalleygruppe ist eine über $\mathbb{Z}$ definierte, halbeinfache lineare algebraische Gruppe, und
- $\mathcal{G}(K)$ bezeichnet die Gruppe ihrer K-Punkte. Zu einer Chevalleygruppe gehört ein Wurzelsystem
- Φ und zur Gruppe $\mathcal{G}(K)$ ein sphärisches Gebäude
- Δ vom Typ Φ, auf dem sie stark transitiv operiert. Ist p eine diskrete Bewertung auf K, so gehört zu $\mathcal{G}(K)$ auch ein affines Gebäude
- $X := X_p(K)$, dem Δ in natürlicher Weise als Gebäude im Unendlichen zugeordnet ist. $\mathcal{G}(K)$ operiert auf X stark transitiv, wenn K bezüglich p vollständig ist. Denn dann induziert das System der Apartments von Δ das vollständige Apartmentsystem auf X, und wir haben eine $1-1$-Entsprechung affiner und

sphärischer Apartments. In diesem Fall sagen wir, ein affines Apartment enthalte eine Kammer, einen Punkt oder ein Halbapartment im Unendlichen, wenn dies für das induzierte Apartment gilt. Mit

- $X_p := X_p(K_p)$ notieren wir das affine Gebäude zu $\mathcal{G}(K_p)$ über dem lokalen Körper K_p und mit
- Δ_p das zugehörige sphärische Gebäude.

Der Wahl eines Apartments in Δ entspricht ein Torus in $\mathcal{G}$, welcher als Stabilisator des Apartments auftritt. Der Stabilisator einer Kammer in Δ ist eine Boreluntergruppe, d.h. eine maximale zusammenhängende auflösbare Untergruppe von $\mathcal{G}$. Beides sind über K definierte und zerfallende lineare algebraische Untergruppen von $\mathcal{G}$. Alle Paare von Boreluntergruppen und darin enthaltenem maximalem Torus sind in $\mathcal{G}$ untereinander konjugiert. Wir fixieren jetzt ein solches Paar

- $\mathcal{T} \leq \mathcal{B} \leq \mathcal{G}$, was wir so tun können und tun, daß beide Gruppen über $\mathbb{Z}$ definiert sind. Damit ist zugleich in jedem Gebäude X_p ein Standardapartment
- Σ_p gegeben, auf dem $\mathcal{T}(K_p)$ durch Translationen operiert. Es sei
- n die Dimension des Torus über K. Dies ist der Rang von $\mathcal{G}$. Das Gebäude X_p ist ein stückweise Euklidischer Komplex der Dimension n, auf dem $\mathcal{G}(K_p)$ durch zellenpermutierende Isometrien operiert.
  Durch die Wahl von $\mathcal{B}$ ist in jedem sphärischen Gebäude Δ_p eine Fundamentalkammer
- C_p vorgegeben. $\mathcal{B}(K_p)$ ist ihr Stabilisator. Sie wird in X_p durch eine Paralellitätsklasse von Sektoren bestimmt. Auf den Sektoren in dieser Klasse operiert $\mathcal{T}(K_p)$ einfach transitiv. Es notiert
- $\mathcal{U}$ den unipotenten Anteil von $\mathcal{B}$. Das ist der Kern der kanonischen Projektion $\mathcal{B} \to \mathcal{T}$.

Die Gruppe $\mathcal{U}(K_p)$ fixiert die Fundamentalkammer in dem Sinne, daß es zu jedem Element in $\mathcal{U}(K_p)$ einen C_p repräsentierenden Sektor gibt, der von diesem Element punktweise festgehalten wird. Daraus folgt: $\mathcal{U}(K_p)$ operiert auf dem Gebäude X_p mit Σ_p als Fundamentalbereich. So erhalten wir eine Projektion

- $\pi_p : X_p \to \Sigma_p$.

Wir wollen die Endlichkeitseigenschaften von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ bestimmen. Dazu studieren wir die Operation von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ auf dem Produkt der affinen Gebäude

- $\boldsymbol{X} := \times_{p\in S} X_p$. Die Projektionen π_p induzieren eine Abbildung
- $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\Sigma} := \times_{p\in S} \Sigma_p$ auf das Produkt der Standardapartments.

Lemma 2.1. *Die Abbildung $\boldsymbol{\pi}$ induziert eine eigentliche Abbildung $\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)\backslash\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\Sigma}$.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{\sigma} := \times_{p\in S} \sigma_p$ ein Polysimplex in $\boldsymbol{X}$. Für jede Stelle p ist der Stabilisator von σ_p in $\mathcal{U}(K_p)$ eine offene, kompakte Untergruppe G_p. Für jede Stelle p außerhalb von S sei $G_p := \mathcal{U}(\mathcal{O}_p)$. Dann ist $\boldsymbol{G} := \times_p G_p$ eine offene Untergruppe von $\mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)$.

$\mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)$ operiert auf $\boldsymbol{X}$, wobei die p-Komponente auf X_p operiert. Dadurch ist

$$\boldsymbol{X} = \mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)\boldsymbol{\Sigma}.$$

Der Stabilisator von $\boldsymbol{\sigma}$ ist offenbar $\boldsymbol{G}$. Die Faser von $\boldsymbol{\pi}$ über $\boldsymbol{\sigma}$ ist also isomorph zu

$$\mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)/\boldsymbol{G},$$

was eine diskrete Menge ist.

Auf dieser Menge operiert $\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)$ über die diagonale Einbettung in $\mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)$. Wegen $\mathcal{O}_S = K \cap \boldsymbol{A}_S$ ist nach Lemma 1.1 der Doppelquotient

$$\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)\backslash\mathcal{U}(\boldsymbol{A}_S)/\boldsymbol{G}$$

nicht nur diskret, sondern auch kompakt, mithin endlich.

Das aber bedeutet, daß die $\boldsymbol{\pi}$-Faser über einem jeden Polysimplex $\boldsymbol{\sigma}$ aus $\boldsymbol{X}$ in endlich viele $\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)$-Bahnen zerfällt. Daraus folgt die Behauptung. **q.e.d.**

Lemma 2.2. *Die Gruppe $\mathcal{G}(\mathcal{O}_S)$ operiert auf $\boldsymbol{X}$ mit endlichen Stabilisatoren.*

Beweis. Man sieht leicht, daß der Stabilisator eines Polysimplex in $\mathcal{G}(\boldsymbol{A}_S)$ kompakt ist. Die Endlichkeit folgt dann daraus, daß $\mathcal{G}(\mathcal{O}_S)$ diskret in $\mathcal{G}(\boldsymbol{A}_S)$ ist. **q.e.d.**

Jedes Standardapartment Σ_p ist ein affiner Euklidischer Raum der Dimension n. Darin wählen wir einen Sektor

- S_p, der die mit der Wahl der Borelgruppe gegebene Fundamentalkammer C_p in Δ_p repräsentiert. Wir wählen seine Spitze als Nullpunkt in Σ_p, das dadurch zu einem Euklidischen Vektorraum wird. Wir repräsentieren alle Wurzeln in Φ als Linearformen auf Σ_p. Der üblichen Konvention folgend, nennen wir diejenigen <u>negativ</u>, die im Inneren von S_p negativ sind. Somit ist ein System
- Φ_p^- negativer Wurzeln in Σ_p gegeben. Als Teilmenge von Φ ist es unabhängig von der Stelle p, da C_p einfach auf die Borelgruppe $\mathcal{B}$ zurückgeht. Einem System negativer Wurzeln korrespondiert stets eine Basis
- $\varphi_p := \left(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}\right)$. Die Basiswurzeln sind repräsentiert durch Linearformen auf Σ_p, so daß

  $$S_p = \left\{x_p \in \Sigma_p \mid \alpha_i^{(p)}(x_p) \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\right\}$$

  gilt. Mit

  $$\boldsymbol{x} = (x_p)_{p\in S} \mapsto \left(\left(\alpha_1^{(p)}(x_p), \dots, \alpha_n^{(p)}(x_p)\right)\right)_{p\in S}$$

  sind dann Koordinaten auf $\boldsymbol{\Sigma}$ gegeben. Durch Normierung der φ_p erreichen wir, daß die Operation von $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$ die Abbildung
- $\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{x} = (x_p)_{p\in S} \mapsto \left(\sum_{p\in S} \alpha_1^{(p)}(x_p), \dots, \sum_{p\in S} \alpha_n^{(p)}(x_p)\right)$ invariant läßt. Das ist möglich auf Grund der Produktformel [CaFr67, Seite 60], der zu Folge die Idele-Norm auf K^* konstant 1 ist: Die Koordinaten entsprechen Basiswurzeln und damit Charakteren $\chi_i : \mathcal{T} \to \mathfrak{Mult}$. Ein Element $\tau_p \in \mathcal{T}(K_p)$ operiert auf dem Apartment Σ_p durch eine Translation, deren i-Koordinate durch $d_p p(\chi_i(\tau_p))$ gegeben ist.

Wir lassen $\mathcal{B}(\boldsymbol{A}_S)$ vermöge der Projektion $\mathcal{B} \to \mathcal{T}$ auf $\boldsymbol{\Sigma}$ operieren. Dadurch wird $\boldsymbol{\pi}$ zu einer $\mathcal{B}(\boldsymbol{A}_S)$- und damit auch zu einer $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-Abbildung. Da wir über den Torus operieren, läßt die Operation von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ die Abbildung

- $\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\varphi} \circ \boldsymbol{\pi}$ invariant.

Lemma 2.3. *Der $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-Bahnenraum des Urbildes $\boldsymbol{\xi}^{-1}(\mathsf{K})$ eines Kompaktums $\mathsf{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt.*

Beweis. Nach Dirichlets Einheitensatz [CaFr67, Seite 72] operiert $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$ kokompakt auf dem Kern von $\boldsymbol{\varphi}$ und somit auch auf dem Urbild $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathsf{K})$. Sei also $\mathsf{K}' \subseteq \boldsymbol{\Sigma}$ ein Kompaktum, dessen $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$-Translate das Urbild $\boldsymbol{\varphi}^{-1}(\mathsf{K})$ überdecken.

Der unipotente Teil $\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)$ ist normal in $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$. Daher überdecken die $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-Translate des Urbildes $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathsf{K}')$ ganz $\boldsymbol{X}$. Somit folgt die Behauptung aus Lemma 2.1. **q.e.d.**

3 Beispiel: Rang-1-Gruppen und Bäume

Es ist sowohl instruktiv als auch nützlich, sich den einfachsten Fall zuerst vorzunehmen – den der Chevalleygruppe SL_2. Die Gruppe der speziellen Diagonalmatrizen D_2^0 ist ein Torus, und die Gruppe der speziellen oberen Dreiecksmatrizen B_2^0 ist eine Boreluntergruppe. Ihr unipotenter Anteil ist die Gruppe der strikten oberen Dreiecksmatrizen U_2. Das affine Gebäude zur Stelle p ist hier ein regulärer Baum X_p der Verzweigungsordnung $|k_p| + 1$ – die Links entsprechen den Punkten im projektiven Raum über k_p. Das Standardapartment Σ_p ist eine Gerade und die Projektion π_p kann als Höhenfunktion auf X_p angesehen werden, wenn wir das Apartment vermittels der negativen Basiswurzel $\alpha^{(p)} : \Sigma_p \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren. Wie im allgemeinen Fall sorgen wir durch Normierung dafür, daß die Operation des Torus $D_2^0(\mathcal{O}_S)$ auf dem Produkt $\boldsymbol{X} := \times_{p\in S} X_p$ die Höhenfunktion $\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ respektiert. Diese Situation wurde schon in [Bux97] diskutiert. Hier wollen wir eine Behandlung zeigen, die ohne Sigma-theoretische Anleihen auskommt.

Bäume sind für alles weitere grundlegend. Wir benötigen daher ein etwas technisch klingendes Lemma, das in Wirklichkeit eine übersichtliche geometrische Situation beschreibt.

Lemma 3.1. *Sei $h_i : T_i \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1, \dots, n\})$ eine Familie lokal-endlicher simplizialer Bäume mit Höhenfunktion. Es gelte:*

1. *Das Bild der Ecken von T_i in $\mathbb{R}$ liegt diskret.*
2. *T_i hat genau ein absteigendes Ende.*
3. *Jede Ecke in T_i ist ein Verzweigungspunkt.*

Jede Ecke hat also genau einen tieferen und mindestens zwei höhere Nachbarn.

Sei $\boldsymbol{T}$ das kartesische Produkt der Bäume T_i und $\boldsymbol{h} : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{h} : \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau_i).$$

Für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sei $\boldsymbol{T}[I] := \boldsymbol{h}^{-1}(I)$.

Die Räume $\boldsymbol{T}[I]$ sind <u>$(n-2)$-zusammenhängend</u>, was heißt: In den Dimensionen $\leq n-2$ verschwinden die Homotopiegruppen von $\boldsymbol{T}[I]$.

Ferner ist natürlich für zwei Intervalle $I \subseteq J$ auch $\boldsymbol{T}[I] \subseteq \boldsymbol{T}[J]$. Die Inklusion induziert dann eine nicht-triviale Abbildung der reduzierten Homologiegruppen $\widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\boldsymbol{T}[I]) \to \widetilde{\mathrm{H}}_{n-1}(\boldsymbol{T}[J])$.

Beweis. Die Abbildung $\boldsymbol{h}$ ist eine Morse-Funktion im Sinne von [BeBr97]. Die absteigenden und aufsteigenden Links sind Joins der ab- bzw. aufsteigenden Links in den Bäumen T_i bezüglich der Morse-Funktion h_i. Daher sind sie $(n-2)$-zusammenhängend. Aus [BeBr97, Corollary 2.6] folgt dann, daß der Raum $\boldsymbol{T}$ nicht zusammenziehbar wäre, wenn die Teilräume $\boldsymbol{T}[I]$ nicht $(n-2)$-zusammenhängend wären.

Wenden wir uns der zweiten Aussage zu. Zunächst bemerken wir, daß $\boldsymbol{T}[\{\min(I)\}]$ ein starker Deformationsretrakt von $\boldsymbol{T}[I]$ ist. Eine Retraktion ist zum Beispiel dadurch gegeben, daß wir die Koordinaten in allen Bäume T_i »mit gleicher Geschwindigkeit nach unten fallen lassen«, was eine Bewegung auf $\boldsymbol{T}[I]$ induziert, bei der sich die Höhe verringert. Wir halten einen Punkt in $\boldsymbol{T}[I]$ an, sobald seine Höhe auf $\min(I)$ gesunken ist.

Wir werden sogleich eine Sphäre in $\boldsymbol{T}[\{\min(I)\}]$ konstruieren, die unter der beschriebenen Retraktion auf eine injektiv eingebettete $(n-1)$-Sphäre in $\boldsymbol{T}[\{\min(J)\}]$ herabsinkt. Damit ist dann die zweite Aussage bewiesen, weil diese Sphäre offenkundig einen nicht-trivialen Zykel definiert, der kein Rand sein kann, weil $\boldsymbol{T}[\{\min(J)\}]$ einfach kein n-Gerüst hat.

Zur Konstruktion der Sphäre wählen wir uns einen Punkt $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ in $\boldsymbol{T}$, dessen Höhe unterhalb von $\min(J)$ liegt und dessen Koordinaten Vertices in den Bäumen T_i sind. Ferner wählen wir in jedem T_i zwei aufsteigende Äste L_i^+ und L_i^-, die von τ_i ausgehen und kein Wegstück gemeinsam zurücklegen. Ihre Vereinigung ist dann eine Line L_i in T_i. Für einen Punkt $t'_i \in L_i$ ist sein Abstand vom Verzweigungspunkt τ_i durch $h_i(t'_i) - h_i(\tau_i)$ gegeben. Auf dem Produkt $\boldsymbol{L} := \times_{i=1}^{n} L_i$ definiert somit die Abbildung $\boldsymbol{t'} \mapsto \boldsymbol{h}(\boldsymbol{t'}) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\tau})$ eine Norm.

Die Sphäre, die wir zu konstruieren haben, ist einfach eine Sphäre in dieser Norm, nämlich die Sphäre aller Punkte in $\boldsymbol{L}$, die vom Verzweigungspunkt $\boldsymbol{\tau}$ den Abstand $\min(I) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\tau})$ haben. Unter der Retraktion schrumpft dies auf die Sphäre mit Radius $\min(J) - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\tau}) > 0$. **q.e.d.**

Bemerkung 3.2. Obwohl logisch unabhängig von der Sigma-Theorie, entsprechen die vorangehenden Überlegungen durchaus ihrem Geist. Das Problem, das eben zu lösen war, ist eines, das dort zentral ist: Gegeben ist ein Komplex mit Höhenfunktion und eine Sphäre, die in ihm eine offensichtliche Zusammenziehung besitzt. Man zeige, daß jede Zusammenziehung dieser Sphäre bezüglich der Höhe mindestens ebensoweit »durchhängt« wie die offensichtliche Zusammenziehung. Dieses Problem ist selbst in anscheinend einfachen Fällen kniffliger, als man vermuten mag.

Wir sind an einer Aussage dieses Typs interessiert, weil wir Browns Kriterium anwenden wollen:

Zitat 3.3 ([Brow87, Bemerkung (2) zu Theorem 2.2 und Theorem 3.2]). *Sei G eine Gruppe, D eine gerichtete Menge und $(X_\alpha)_{\alpha\in D}$ ein gerichtetes System von CW-Komplexen, auf denen G durch zellenpermutierende Homöomorphismen operiert, so daß gilt:*

1. *Für jedes $\alpha \in D$ ist der Bahnenraum G/X_α kompakt.*
2. *G operiert auf X_α, so daß der Stabilisator einer i-Zelle vom Typ FP_{m-i} ist.*
3. *Die zu $\alpha \leq \beta$ gehörige stetige Abbildung $X_\alpha \to X_\beta$ ist G-equivariant.*
4. *Das gerichtete System der reduzierten Homologiegruppen $\left(\widetilde{\mathrm{H}}_i(X_\alpha)\right)_{\alpha\in D}$ hat trivialen Limes für $i < m$.*

Dann ist G vom Typ FP_m genau dann, wenn für alle $i < m$ das gerichtete System der reduzierten Homologiegruppen $\left(\widetilde{\mathrm{H}}_i(X_\alpha)\right)_{\alpha\in D}$ im wesentlichen trivial ist, das heißt, wenn zu jedem $\alpha \in D$ ein $\beta \geq \alpha$ existiert, so daß die Abbildung $\widetilde{\mathrm{H}}_i(X_\alpha) \to \widetilde{\mathrm{H}}_i(X_\beta)$ induziert von $X_\alpha \to X_\beta$ trivial ist.

G ist genau dann endlich präsentiert, wenn das entsprechende System von Homotopiegruppen im wesentlichen trivial ist.

Korollar 3.4. *Die Gruppe $B_2^0(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ $F_{|S|-1}$ aber nicht vom Typ $FP_{|S|}$.*

Beweis. Wir wenden Browns Kriterium an. Als gerichtete Menge nehmen wir die durch Inklusion partiell geordnete Menge der kompakten Intervalle. Wir müssen uns noch eine Familie von $B_2^0(\mathcal{O}_S)$-CW-Komplexen besorgen. Nun operiert $B_2^0(\mathcal{O}_S)$ auf $\boldsymbol{X}$, was ein Produkt von Bäumen ist, unter Wahrung der Höhenfunktion $\boldsymbol{\xi}$, die aus den einzelnen Höhen auf den Bäumen X_p wie in Lemma 3.1 gebildet ist. Für jedes kompakte Intervall I ist das Urbild $\boldsymbol{X}[I] := \boldsymbol{\xi}^{-1}(I)$ ein $B_2^0(\mathcal{O}_S)$-Komplex. Damit haben wir unsere Familie, wobei wir als stetige, equivariante Abbildungen einfach die Inklusionen wählen. Sie erfüllt die Voraussetzungen von Browns Kriterium, denn die Operation ist kokompakt wegen Lemma 2.3, die Zell-Stabilisatoren haben die erforderlichen Endlichkeitseigenschaften, weil sie nach Lemma 2.2 sogar endlich sind. Die Bedingung 4 ist erfüllt, weil der Limes $\boldsymbol{X}$ der $\boldsymbol{X}[I]$ zusammenziehbar ist.

Die Endlichkeitseigenschaften ergeben sich dann mit Browns Kriterium aus Lemma 3.1. **q.e.d.**

Wie steht es mit der GL_2? Die kurze exakte Sequenz $\mathrm{SL}_2 \hookrightarrow \mathrm{GL}_2 \twoheadrightarrow \mathfrak{Mult}$ mit der Determinante als Projektion schränkt sich ein zu einer kurzen exakten Sequenz

$$B_2^0(\mathcal{O}_S) \hookrightarrow B_2(\mathcal{O}_S) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_S^*,$$

woraus folgt, daß die Endlichkeitseigenschaften von $B_2^0(\mathcal{O}_S)$ sich auf $B_2(\mathcal{O}_S)$ vererben. Doch damit ist noch nicht ausgeschlossen, daß die größere Gruppe noch weitergehende Endlichkeitseigenschaften aufweist.

Bemerkung 3.5. Die Gruppe $B_2(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ $\mathrm{F}_{|S|-1}$, aber nicht vom Typ $\mathrm{FP}_{|S|}$.

Beweis. Wir gehen über zu den projektiven Gruppen und erhalten das folgende kommutative Diagramm, in dem Zeilen und Spalten kurze exakte Folgen sind:

$$\begin{array}{ccccc}
\{-1,1\} & \hookrightarrow & \mathcal{O}_S^* & \overset{(\cdot)^2}{\twoheadrightarrow} & \mathcal{O}_S^{*\,2} := \{f^2 \mid f \in \mathcal{O}_S^*\} \\
\downarrow \cdot\mathbb{1}_2 & & \downarrow \cdot\mathbb{1}_2 & & \downarrow \\
B_2^0(\mathcal{O}_S) & \hookrightarrow & B_2(\mathcal{O}_S) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_S^* \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{P}B_2^0(\mathcal{O}_S) & \hookrightarrow & \mathbb{P}B_2(\mathcal{O}_S) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_S^*/\mathcal{O}_S^{*\,2}
\end{array}$$

Betrachten wir zunächst die untere Zeile. Der Faktor rechts ist nach Dirichlets Einheitensatz eine endlich erzeugte abelsche Torsionsgruppe und daher endlich. Also haben die beiden Gruppen links dieselben Endlichkeitseigenschaften. Das gilt dann aber auch für deren Erweiterungen in der mittleren Zeile, denn die Kerne ganz oben sind vom Typ F_∞. **q.e.d.**

Bemerkung 3.6. Mit analoger Argumentation sieht man natürlich, daß $B_n^0(\mathcal{O}_S)$ und $B_n(\mathcal{O}_S)$ dieselben Endlichkeitseigenschaften haben.

4 Höhere Ränge – algebraische Vorbetrachtung

Das zunächst Unerwartete an unserem Ergebnis ist, daß die Endlichkeitseigenschaften von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ nicht mit dem Rang der Chevalleygruppe wachsen. Dieses Faktum soll hier eine erste Erklärung finden, indem wir den Fall der $B_n^0 \subseteq \mathrm{SL}_n$ betrachten.

Beobachtung 4.1. *Sei $G \rightleftarrows H$ ein* <u>*Retraktdiagramm*</u>*, was heißt, daß die Hintereinanderausführung beider Pfeile die Identität auf H induziert. Dann hat H alle Endlichkeitseigenschaften, die G hat.*

Beweis. Endliche Erzeugtheit ist trivial, endliche Präsentiertheit ist leicht und findet sich im übrigen schon bei [Wall65, Lemma 1.3], wo diese Aussage J.R. Stallings zugeschrieben wird. Wir behandeln daher nur die homologischen Endlichkeitseigenschaften ab FP_2. Hier könnte man auf [Åber86, (ζ), Seite 280] verweisen, dort ist das Argument aber nur angedeutet.

Der Witz ist, daß Retraktdiagramme unter Anwendung von Funktoren und Kofunktoren erhalten bleiben. So betrachte man zu jeder Indexmenge J den Funktor, der einer Gruppe G das Paar $(G, \times_J \mathbb{Z}G)$ zuordnet, worin $\times_J \mathbb{Z}G$ als $\mathbb{Z}G$-Modul aufzufassen ist. Darauf wendet man den Homologiefunktor $\mathrm{H}_i(-,-)$ an und erhält das Retraktdiagramm:

$$\mathrm{H}_i(G, \bigtimes_J \mathbb{Z}G) \rightleftarrows \mathrm{H}_i(H, \bigtimes_J \mathbb{Z}H)$$

Also verschwindet mit $\mathrm{H}_i(G, \times_J \mathbb{Z}G)$ auch $\mathrm{H}_i(H, \times_J \mathbb{Z}H)$.

Die Behauptung folgt dann sofort durch Anwendung des Bieri-Eckmann-Kriteriums. Denn in der üblichen Form, die wir hier benötigen, besagt es, daß eine endlich erzeugte Gruppe G genau dann vom Typ FP_m ist, wenn $\mathrm{H}_i(G, \times_J \mathbb{Z}G) = 0$ ist für alle Indexmengen J und alle $i \in \{1, \ldots, m-1\}$. Vergleiche [BiEc74, Proposition 1.2 und die Gleichung über Theorem 2.3]. **q.e.d.**

Korollar 4.2. *Die Gruppen $B_n(\mathcal{O}_S)$ und $B_n^0(\mathcal{O}_S)$ sind nicht vom Typ $FP_{|S|}$.*

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $n = 3$. Die weiteren Fälle sind analog. Wir benutzen die Beobachtung 4.1. Mit

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong B_2$$

ist nämlich in offensichtlicher Weise die B_2 als Retrakt der B_3 erkannt. Daher folgt die Behauptung aus den Bemerkungen 3.5 und 3.6. **q.e.d.**

5 Eine geometrische Version des Arguments

Satz 5.1. *Die Gruppe $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ ist nicht vom Typ $FP_{|S|}$.*

Der Beweis, welcher den Rest dieses Abschnittes ausmacht, kann als eine geometrische Interpretation des eben gegebenen Argumentes betrachtet werden. Seine Grundidee besteht darin, in den affinen Gebäuden X_p Bäume T_p als Retrakte ausfindig zu machen. Deren Produkt $\boldsymbol{T}$ ist dann Retrakt des Produktes $\boldsymbol{X}$. Wir geben dann ein gerichtetes System von Teilräumen von $\boldsymbol{X}$ an, die den Voraussetzungen von Browns Kriterium genügt. Es bleibt sodann nur noch zu zeigen, daß das entsprechende System der reduzierten Homologiegruppen nicht im wesentlichen trivial ist. Dieses Problem läßt sich mit Hilfe des Retraktes $\boldsymbol{T}$ auf die Aussage von Lemma 3.1 zurückführen.

Wir nennen ein Apartment, das die Fundamentalkammer C_p enthält, eine Schicht. Die Basiswurzel $\alpha^{(p)} := \alpha_1^{(p)}$ definiert Halbapartments von Σ_p durch Bedingungen der Form

$$\alpha^{(p)}(x_p) \leq t \tag{$*$}$$

Wir nennen ein Apartment von X_p speziell, wenn es ein so definiertes Halbapartment enthält. Man kann das auch etwas anders sagen: Durch die Basiswurzel ist ein Halbapartment α_p^∞ im sphärischen Gebäude Δ_p gegeben, in dem auch die Fundamentalkammer C_p liegt. Ein Apartment von Σ_p ist genau dann speziell, wenn es α_p^∞ enthält. Offenbar ist jedes spezielle Apartment eine Schicht.

Auf jeder Schicht und somit auf jedem speziellen Apartment ist die Abbildung $h_p := \alpha^{(p)} \circ \pi_p$ affin. Der Schnitt zweier verschiedener spezieller Apartments Σ_p^1 und Σ_p^2 ist konvex und enthält einen Teil der Form ($*$). Daher ist der Schnitt von der Form

$$\Sigma_p^1 \cap \Sigma_p^2 = \left\{x \in \Sigma_p^1 \mid h_p(x) \leq t\right\} = \left\{x \in \Sigma_p^2 \mid h_p(x) \leq t\right\}$$

worin $t = \max h_p(\Sigma_p^1 \cap \Sigma_p^2)$ ist. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar die folgende

Beobachtung 5.2. *Die Vereinigung aller speziellen Apartments ist als Unterkomplex von X_p isometrisch zu einem Produkt $T_p \times \mathbb{R}^{n-1}$ eines Baumes und einen Vektorraumes. Die Projektion auf den zweiten Faktor ist dabei durch die Funktionen $\left(\alpha_2^{(p)} \circ \pi_p, \ldots, \alpha_n^{(p)} \circ \pi_p\right)$ gegeben. Insbesondere ist die Faser über jedem Tupel $(t_2, \ldots, t_n)$ ein Baum, und h_p induziert eine Höhenfunktion $h_p^* : T_p \to \mathbb{R}$.* **q.e.d.**

Bemerkung 5.3. Für diesen Baum findet man in [Rona89, Kapitel 10.2] zwei Konstruktionen. Daß sie zu identischen Bäumen führen, ist der Hintergrund der folgenden Argumentation.

Jetzt beschreiben wir die Projektion von X_p auf den Baum T_p.

Lemma 5.4. *Zu jeder Schicht Σ_p' gibt es ein spezielles Apartment Σ_p^{s}, so daß $h_p(\Sigma_p' \cap \Sigma_p^{\mathrm{s}})$ nicht beschränkt ist.*

Beweis. Wir argumentieren im sphärischen Gebäude Δ_p. Das Apartment, das zu Σ_p' gehört, enthält C_p. Die Wurzel α_p^∞ gehört zu einer Seite der Fundamentalkammer. Sei C_p' die angrenzende Kammer. Dann gibt es genau ein Apartment, das diese Kammer und das Halbapartment α_p^∞ enthält. Das diesem zugehörige affine Apartment Σ_p^{s} entspricht unseren Wünschen. **q.e.d.**

Lemma 5.5. *Seien Σ_p^1 und Σ_p^2 spezielle Schichten und Σ_p' eine Schicht. Seien ferner $x_p^i \in \Sigma_p^i \cap \Sigma_p'$ Punkte mit $t = h_p(x_p^i)$. Dann ist $t \in h_p(\Sigma_p^1 \cap \Sigma_p^2)$.*

Beweis. Die beiden Durchschnitte $\Sigma_p^i \cap \Sigma_p'$ sind konvex und enthalten als Schnitt von Schichten je einen Sektor, der C_p repräsentiert. Daher sind auch die entsprechenden Sektoren mit Spitze x_p^i in diesen Schnitten enthalten. Jeder dieser Sektoren ist ein simplizialer Kegel, der eine Seite hat, auf der h_p konstant t ist. Daher scheiden sich diese Seiten in Σ_p' in einem simplizialen Kegel der Kodimension 1. Der ist dann im Durchschnitt $\Sigma_p^1 \cap \Sigma_p^2$ enthalten. **q.e.d.**

Die beiden Lemmata 5.4 und 5.5 implizieren:

Lemma 5.6. *Es gibt eine stetige Projektion $\rho_p : X_p \to T_p$, die mit h_p verträglich ist in dem Sinne, daß das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X_p & \to & T_p \\ \downarrow {\scriptstyle h_p} & & \downarrow {\scriptstyle h_p^*} \\ \mathbb{R} & = & \mathbb{R} \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Die Linien von T_p bezüglich h_p^* entsprechen den speziellen Apartments. Lemma 5.4 garantiert, daß zu jeder Schicht eine Linie existiert, auf welche sie sich verträglich mit h_p projizieren läßt. Das Lemma 5.5 wiederum zeigt, daß die so auf einzelnen Schichten erklärten Projektionen kompatibel sind und eine wohldefinierte Abbildung auf X_p definieren, denn das ganze Gebäude ist die Vereinigung der Schichten.

Bleibt noch die Stetigkeit zu klären. Auf einer einzelnen Schicht ist die Abbildung stetig, weil der Baum T_p die schwache Topologie bezüglich seiner Linien trägt. Diese vielen stetigen Abbildungen fügen sich zu einer global stetigen Abbildung zusammen, weil das Gebäude X_p die schwache Topologie bezüglich der Schichten trägt. **q.e.d.**

Eine Projektion auf T_p haben wir jetzt. Zum Retrakt fehlt uns noch ein Schnitt derselben. Die gibt es jedoch nach Beobachtung 5.2 haufenweise. Wir bilden das Produkt

- $\boldsymbol{T} := \times_{p\in S} T_p$ zusammen mit der Höhenfunktion
- $\boldsymbol{h}^* : \boldsymbol{T} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_p)_{p\in S} \mapsto \sum_{p\in S} h_p^*(\tau_p).$$

Ferner haben wir die Projektion

- $\boldsymbol{\rho} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{T}$, zu der es wieder haufenweise Schnitte gibt, die durch die Tupel $(t_{p,i} \mid p \in S,\ i \in \{2, \dots , n\})$ parametrisiert sind, so daß $\boldsymbol{T}$ eine Retrakt von $\boldsymbol{X}$ ist.

Beobachtung 5.7. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X} & \rightleftarrows & \boldsymbol{T} \\ \downarrow \boldsymbol{\xi} & & \downarrow \boldsymbol{h}^* \\ \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \end{array}$$

mit der Projektion auf die erste Koordinate als unterem Pfeil kommutiert. **q.e.d.**

Wir wollen selbstverständlich wieder Browns Kriterium anwenden. Dazu benötigen wir ein gerichtetes System von kokompakten $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-Komplexen. Die Produkte von kompakten Intervallen $\boldsymbol{I} := I_1 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ bilden eine durch Inklusion gerichtete Menge. Als gerichtetes System von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-Komplexen über der Menge dieser Quader verwenden wir die Urbilder $\boldsymbol{X}[\boldsymbol{I}] := \boldsymbol{\xi}^{-1}(\boldsymbol{I})$. Dieses System hat dieselben Eigenschaften wie das in Abschnitt 3 verwendete. Daher ist die letzte Hürde das folgende

Lemma 5.8. *Das zugehörige System der reduzierten Homologiegruppen* $\widetilde{\mathrm{H}}_{|S|-1}(\boldsymbol{X}[\boldsymbol{I}])$ *ist nicht im wesentlichen trivial.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{J} := J_1 \times \cdots \times J_n$ ein Quader mit $I_i \subseteq J_i$. Wir wählen uns ein Tupel $(t_{p,i} \mid p \in S,\ i \in \{2, \dots , n\})$ mit $\sum_{p\in S} t_{p,i} \in I_i$, wodurch uns zugleich ein Schnitt zu $\boldsymbol{\rho}$ gegeben ist. Was wir in 5.7 beobachtet haben, impliziert, daß das Urbild $\boldsymbol{T}[I_1] := \boldsymbol{h}^{*-1}(I_1)$ auf diese Weise zum Retrakt von $\boldsymbol{X}[\boldsymbol{I}]$ wird und daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{X}[\boldsymbol{I}] & \rightleftarrows & \boldsymbol{T}[I_1] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \boldsymbol{X}[\boldsymbol{J}] & \rightleftarrows & \boldsymbol{T}[J_1] \end{array}$$

kommutiert. Wir nehmen die reduzierte Homologie und erhalten

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathrm{H}}_{|S|-1}(\boldsymbol{X}[\boldsymbol{I}]) & \rightleftarrows & \widetilde{\mathrm{H}}_{|S|-1}(\boldsymbol{T}[I_1]) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathrm{H}}_{|S|-1}(\boldsymbol{X}[\boldsymbol{J}]) & \rightleftarrows & \widetilde{\mathrm{H}}_{|S|-1}(\boldsymbol{T}[J_1]) \end{array}$$

Nach Lemma 3.1 ist der rechte Pfeil nicht trivial. Daher kann auch der linke nicht verschwinden, weil sich dies auf Retrakte vererben würde. **q.e.d.**

Damit ist Satz 5.1 bewiesen. **q.e.d.**

6 Die Moufang-Eigenschaft

Sei X ein Gebäude und Σ ein Apartment in X. Zwei Halbapartments α und β in Σ heißen <u>pränilpotent</u>, wenn die Schnitte $\alpha \cap \beta$ und $-\alpha \cap -\beta$ jeweils mindestens eine Kammer enthalten. In diesem Fall sei $[\alpha, \beta] := \{\gamma \mid \alpha \cap \beta \subseteq \gamma, -\alpha \cap -\beta \subseteq -\gamma\}$ und $(\alpha, \beta) := [\alpha, \beta] \setminus \{\alpha, \beta\}$.

X heißt <u>Moufangsch</u>, wenn sich den Halbapartments $\alpha \subseteq \Sigma$ <u>Wurzelgruppen</u> U_α von Gebäudeautomorphismen zuordnen lassen, so daß folgende Axiome erfüllt sind:

(M.1) U_α fixiert jede Kammer in α und operiert für jedes <u>Panel</u> (i.e. die Kodimension-1-Seite einer Kammer) $\pi \in \partial\alpha$ einfach transitiv auf den Kammern in $\mathrm{St}(\pi)$, die nicht in α liegen.

(M.2) Für jedes pränilpotente Paar $\{\alpha, \beta\}$ ist $[\mathrm{U}_\alpha, \mathrm{U}_\beta] \leq \mathrm{U}_{(\alpha,\beta)}$. Dabei ist $\mathrm{U}_{(\alpha,\beta)}$ die von den U_γ mit $\gamma \in (\alpha, \beta)$ erzeugte Gruppe.

(M.3) Für jedes $u \in \mathrm{U}_\alpha \setminus \{1\}$ existiert ein $m(u) \in \mathrm{U}_{-\alpha}\, u\, \mathrm{U}_{-\alpha}$, das Σ stabilisiert.

(M.4) Für $n = m(u)$ wie in M.3 ist $n\, \mathrm{U}_\beta\, n^{-1} = \mathrm{U}_{n\beta}$ für jede Wurzel β.

Fakt 6.1. *Das affine Gebäude zu einer Chevalleygruppe $\mathcal{G}$ über einem lokalen Funktionenkörper ist Moufangsch. Insbesondere gilt dies also für die Gebäude X_p.*

Das ist Folklore. Da sich hierfür jedoch kein glatter Literaturhinweis geben läßt, sollen hier wenigstens ein paar Hinweise für Nichteingeweihte gegeben werden.

Beweisskizze. Zunächst folgt aus Hensels Lemma oder [Weil73, Theorem 8, Seite 20], daß ein lokaler Funktionenkörper als bewerteter Körper isomorph ist zu einem Laurentreihenkörper über einem endlichen Körper. Der aber ist nur die Vervollständigung des rationalen Funktionenkörpers. Daher dürfen wir uns auf diesen Fall zurückziehen. Hier ist das zugehörige affine Gebäude, wie P. Abramenko in [Abra96, Seite 19] bemerkt, isomorph zum positiven Partner im Zwillingsgebäude von $\mathcal{G}$ über dem zugehörigen Laurentpolynomring. Für diese Gruppe wird dort nachgewiesen, daß sie ein RGD-System (vergleiche [Abra96, Definition 2, Seite 14f]) besitzt.

Schließlich folgert man die Moufangaxiome aus der RGD-Axiomatik. Das ist nicht sonderlich schwer, da sich die letzten drei Moufangaxiome ohnehin als geometrische Interpretation entsprechender RGD-Axiome lesen lassen. Das Axiom M.1 hingegen erfordert etwas mehr Mühe. Hier folgt die Transitivität erst mit [Tits87, 5.6 Proposition 3, Seite 564]. Daß die Operation schließlich einfach transitiv ist, folgt wieder unmittelbar aus (RGD 3). **q.e.d.**

Das folgende Lemma ist die zentrale Beobachtung, der Schlüssel zur geometrischen Behandlung des Problems.

Lemma 6.2. *Sei X ein affines Gebäude und C eine Kammer im Unendlichen. Eine nicht notwendig unendliche Folge von Apartments $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ heiße <u>geschichtet</u>, wenn für jeden Folgenindex die Menge*

$$\overline{\Sigma_j \setminus \bigcup_{i<j} \Sigma_i}$$

ein Durchschnitt von Halbapartments in Σ_j ist, die C nicht enthalten.

Ist X lokal-endlich und Moufangsch, so gibt es eine unendliche geschichtete Folge $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Apartments, die X überdecken.

Der Rest des Abschnitts ist dem Beweis dieses Lemmas gewidmet. Seien also X und C wie im Lemma und $g := (\ldots, C_i, C_{i+1}, \ldots)$ eine unverkürzbare Galerie in einem gewählten Standardapartment Σ. Sei β_i die Wurzel in Σ, die C_{i-1}, nicht aber C_i enthält. Wir setzen zur Abkürzung $\mathrm{U}_i := \mathrm{U}_{\beta_i}$. Die folgenden Aussagen finden sich in [Rona89, Seite 74ff] oder ergeben sich ohne Schwierigkeit mit ähnlichen Argumenten:

1. U_α fixiert den ganzen Stern eines jeden Panels in $\alpha \setminus \partial\alpha$.
2. $\mathrm{U}^{(r,s)} := \langle \mathrm{U}_i \mid i \in \{r, \ldots, s\} \rangle = \mathrm{U}_r \cdots \mathrm{U}_s$. Ferner ist die zugehörige Zerlegung $u = u_r \cdots u_s$ für jedes $u \in \mathrm{U}^{(r,s)}$ eindeutig.
3. U_{r-1} und U_{s+1} normalisieren $\mathrm{U}^{(r,s)}$.
4. $\mathrm{U}^{(r,s)}$ ist endlich, weil das Gebäude X_p lokal endlich ist.

Lemma 6.3. *Ein Element $u = u_r \cdots u_s \in \mathrm{U}^{(r,s)}$ fixiert genau diejenigen Kammern in Σ, die im Durchschnitt derjenigen β_i mit $u_i \neq 1$ liegen. Dies ist zugleich der Durchschnitt $u\Sigma \cap \Sigma$.*

Beweis. Sei $u^{(i)} := u_r \cdots u_i$. Wir machen eine Induktion nach i. Für $i = r$ ist $u^{(i)} \in \mathrm{U}_r$. Ist dieses Element trivial, so fixiert es ganz Σ als Durchschnitt der leeren Menge von Halbapartments. Ist aber $u_r \neq 1$ und C eine Kammer in $\Sigma \setminus \beta_r$, so würde $u^{(r)}$ mit C auch jede minimale Galerie von C zu einer Kammer aus β_r fixieren, so daß es ein Panel $\pi \in \partial\beta_r$ gäbe, in dessen Stern $u^{(r)}$ mindestens zwei Kammer festhielte. Das geht nicht.

Sei jetzt $i > r$. Die Aussage gelte für $u^{(i-1)}$. Sei $D := u^{(i-1)}\Sigma \cap \Sigma$. Wir haben zu zeigen, daß für $u_i \neq 1$

$$L := D \cap \beta_i = u^{(i)}\Sigma \cap \Sigma =: R$$

ist. Nach Induktionsannahme ist $C_r \in \beta_r \cap \cdots \cap \beta_i \subseteq L \subseteq R$, weil u_i das Halbapartment β_i fixiert.

Nehmen wir nun an, es gäbe eine Kammer $C \in R \setminus L$. Dann wäre $u^{(i)}C = C$, denn $u^{(i)}$ stabilisert C_r und erhält den Typ von unverkürzbaren Galerien. Nun ist aber C durch den Typ einer unverkürzbaren Galerie zu C_r in Σ eindeutig bestimmt. Also fixierte $u^{(i)}$ auch C und damit die ganze Galerie von dort nach C_r. Wir betrachten das Panel $\pi \in \partial L$ dieser Galerie. Wäre $\pi \in \partial\beta_i$, so lägen beide Σ-Nachbarkammern in D, und u_i müßte beide fixieren, was nicht geht. Somit müßte π im Innern von β_i liegen. Dann aber fixierte u_i den ganzen Stern um π, und schon $u^{(i-1)}$ müßte beide Nachbarkammern festhalten, was nicht der Fall ist, da eine von ihnen nach Wahl von π nicht in D liegt. **q.e.d.**

Wir werden die Apartments Σ_j als $\gamma_j(\Sigma)$ gewinnen, wobei $\gamma_j \in \langle \mathrm{U}_i \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ eine Folge von Gebäudeautomorphismen ist. Eine nicht notwendig unendliche Folge $\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots$ heiße <u>gerichtet</u>, wenn für jeden Folgenindex j die Menge

$$\bigcup_{i<j} \gamma_j^{-1}\gamma_i(\Sigma) \cap \Sigma$$

<u>kokonvex</u>, also Komplement einer konvexen Menge in Σ ist. Ist $(\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine gerichtete Folge von Automorphismen, so ist die Folge $(\gamma_i(\Sigma))_{i\in\mathbb{N}}$ eine geschichtete Folge von Apartments, vorausgesetzt die Galerie g hat die Eigenschaft, daß jedes der Halbapartments β_i die Kammer C enthält. Darum ist es naheliegend, gerichtete Folgen zu suchen.

Lemma 6.4. *Jede gerichtete Aufzählung von* $\mathrm{U}^{(r,s)}$ *läßt sich zu einer gerichteten Aufzählung von* $\mathrm{U}^{(r-1,s+1)}$ *fortsetzen.*

Beweis. Wir zeigen nur die Fortsetzbarkeit auf $\mathrm{U}^{(r,s+1)}$. Die Argumentation für den unteren Index ist ähnlich.

Sei $\mathrm{U}^{(r,s)} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_q\}$ eine gerichtete Aufzählung. Wir wählen eine Aufzählung $\mathrm{U}_{s+1} = \{u_1, \ldots, u_k\}$, die mit dem trivialen Element beginnt. Dann ist

$$\{u_1\gamma_1, \ldots, u_1\gamma_q, \ldots, u_2\gamma_1, \ldots, u_2\gamma_q, \ldots, u_k\gamma_1, \ldots, u_k\gamma_q\}$$

eine Aufzählung von $\mathrm{U}^{(r,s+1)}$. Sie zerfällt offenkundig in Blöcke der Länge q, deren erster gerade die gegebene Aufzählung von $\mathrm{U}^{(r,s)}$ ist. Bleibt nachzuweisen, daß diese Aufzählung gerichtet ist. Da die Quotienten von Gliedern innerhalb eines Blockes mit denen der ursprünglichen Aufzählung übereinstimmen, haben wir somit nur zu zeigen, daß jede Menge der Form

$$\left(\bigcup_{\substack{\mu<\nu\\ i\leq q}} \gamma_j^{-1} u_\nu^{-1} u_\mu \gamma_i\,(\Sigma) \cap \Sigma\right) \cup \left(\bigcup_{i<j} \gamma_j^{-1}\gamma_i\,(\Sigma) \cap \Sigma\right)$$

kokonvex ist. Dabei ist der zweite Term kokonvex, weil wir mit einer gerichteten Aufzählung begonnen haben. Der erste Teil jedoch ist, sofern er überhaupt vorkommt, nichts anderes als das Halbapartment β_{s+1}. Es ist nämlich

$$\gamma_j^{-1} u_\nu^{-1} u_\mu \gamma_i = (\gamma_j^{-1} u_\nu^{-1} u_\mu \gamma_i u_\mu^{-1} u_\nu)(u_\nu^{-1} u_\mu),$$

worin der erste Faktor mit $i \in \{1, \ldots, q\}$ die ganze Gruppe $\mathrm{U}^{(r,s)}$ durchläuft und der zweite ein nicht-triviales Element von U_{s+1} ist. Also sind nach Lemma 6.3 alle Glieder der Vereinigung $\bigcup_{\substack{\mu<\nu\\ i\leq q}} \gamma_j^{-1} u_\nu^{-1} u_\mu \gamma_i\,(\Sigma) \cap \Sigma$ im Halbapartment β_{s+1} enthalten, und mindestens eines ist das ganze Halbapartment. **q.e.d.**

Wir wählen jetzt g als eine unendliche unverkürzbare Galerie so, daß alle β_i die Kammer C enthalten und daß Σ die konvexe Hülle der Galerie g ist. So eine Galerie gibt es. Wir können nämlich aus maßtheoretischen Gründen – abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen – eine Gerade in Σ finden, die das Codimension-2-Gerüst der Zellzerlegung von Σ nicht trifft und einen Punkt in C mit einem Punkt in der entgegengesetzten Kammer verbindet. Eine solche Gerade durchsetzt eine Folge von Kammern, die eine Galerie der beschriebenen Art bilden. Mit Lemma 6.4 finden wir also eine gerichtete Aufzählung der Gruppe $\mathrm{U}^{(-\infty,\infty)} := \langle \mathrm{U}_i \rangle = \{\gamma_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{r,s,r\leq s} \mathrm{U}_r \cdots \mathrm{U}_s$ und damit eine geschichtete Folge von Apartments $\Sigma_i := \gamma_i\,(\Sigma)$. Da die konvexe Hülle von g ganz Σ ist, überdeckt diese Folge ganz X. Damit ist Lemma 6.2 bewiesen. **q.e.d.**

7 Zahmheit, Zusammenhang und Endlichkeitseigenschaften

Sei X ein metrischer CW-Komplex, π eine Projektion von X auf einen Euklidischen Raum $\mathbb{E}$ und Ψ eine Menge von Linearformen auf $\mathbb{E}$. Ein <u>Blatt</u> ist ein Unterkomplex von X, der durch π isometrisch auf $\mathbb{E}$ abgebildet wird. Der Terminologie aus [Bux97] folgend, nennen wir das Tripel $(X, \mathbb{E}, \pi)$ einen $\underline{\Psi\text{-Komplex}}$, wenn X von Blättern überdeckt wird und wenn jedes Kompaktum in X in einer aufsteigenden Folge von Blättern enthalten ist. Das sind Folgen $(B_i)_i$, bei denen jedes neue Stück $\overline{B_s \setminus \bigcup_{r<s} B_r}$ über π mit einer konvexen Teilmenge von $\mathbb{E}$ identifiziert wird, die Ψ untergeordnet ist. Damit ist gemeint, daß sie Durchschnitt abgeschlossener Halbräume der Form $\{e \in \mathbb{E} \mid \lambda(e) \geq c_\lambda\}$ mit $\lambda \in \Psi$ ist.

Wählen wir in Lemma 6.2 X_p als Gebäude und C_p als Kammer so folgt:

Folgerung 7.1. *(X_p, Σ_p, π_p) ist ein Φ_p^--Komplex.* **q.e.d.**

Mit [Bux97, Example 7.2] erhalten wir ferner:

Folgerung 7.2. *Durch Verkettung mit der Projektion $\boldsymbol{\Sigma} \to \Sigma_p$ induziert jede Linearform in Φ_p^- eine Linearform auf $\boldsymbol{\Sigma}$. Sei in diesem Sinne*

- $\boldsymbol{\Phi}^- := \dot{\bigcup}_{p \in S} \Phi_p^-$.

Dann ist $\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\Sigma}$ ein $\boldsymbol{\Phi}^-$-Komplex. **q.e.d.**

Wir betrachten die Operation von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ auf dem CW-Komplex

- $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{\xi}^{-1}(0) = \boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{H})$, worin
- $\boldsymbol{H} := \ker \boldsymbol{\varphi}$ ist. Offenbar schränkt sich $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{\Sigma}$ zu einer Projektion $\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{H}$ ein, die wir ebenfalls mit $\boldsymbol{\pi}$ bezeichnen.
  Die Linearformen in $\boldsymbol{\Phi}^-$ auf $\boldsymbol{\Sigma}$ schränken sich zu Linearformen auf $\boldsymbol{H}$ ein. Das so entstehende System von Linearformen bezeichnen wir mit
- $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-} := \boldsymbol{\Phi}^-|_{\boldsymbol{H}}$.

Beobachtung 7.3. *Sei $(X, \mathbb{E}, \pi)$ ein Ψ-Komplex und $\mathbb{E}'$ ein Unterraum von $\mathbb{E}$. Dann ist $(\pi^{-1}(\mathbb{E}'), \mathbb{E}', \pi|_{\mathbb{E}'})$ ein $\Psi|_{\mathbb{E}'}$-Komplex, wobei $\Psi|_{\mathbb{E}'}$ die Menge derjenigen Linearformen auf $\mathbb{E}'$ bezeichnet, die Einschränkungen von solchen aus Ψ sind. Man beachte, daß die Metrik auf $\pi^{-1}(\mathbb{E}')$ nicht die Pfadmetrik, sondern die durch Einschränkung induzierte ist und daß im Unterschied zu [Bux97] Elemente von Ψ verschwinden dürfen.*

Insbesondere ist $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{\pi})$ ein $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-}$-Komplex. **q.e.d.**

Folgerung 7.4. *$\boldsymbol{Y}$ ist $(|S| - 2)$-zusammenhängend.*

Beweis. Mit [Bux97, Lemma 7.3] folgt, daß $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\xi}^{-1}(0) = \boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{H})$ ein $(|S| - 2)$-zusammenhängender Raum ist, sofern $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-}$ eine $\underline{(|S| - 1)\text{-zahme}}$ Menge ist. Das heißt, keine positive Linearkombination von bis zu $|S| - 1$ Elementen aus $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-}$ verschwindet.

Es reicht somit, zu zeigen, daß eine positive Kombination von Linearformen aus $\boldsymbol{\Phi}^- = \dot{\bigcup}_{p \in S} \Phi_p^-$ nur dann auf $\boldsymbol{H}$ verschwindet, wenn aus jeder der $|S|$ verschiedenen Mengen Φ_p^- mindestens ein Element vorkommt. Für Kombinationen $\sum_{i,p} \mu_{i,p} \alpha_i^{(p)}$ von Basiswurzeln $\alpha_i^{(p)} \in \boldsymbol{\Phi}^-$ folgt dies aus der Definition von $\boldsymbol{H}$, da hier für jedes feste i die Koeffizienten $\mu_{i,p}$ von $p \in S$ unabhängig sind, falls die Kombination auf $\boldsymbol{H}$ verschwindet.

Mit dieser Beobachtung folgt die Behauptung jedoch für jede positive Kombination von Elementen aus $\mathbf{\Phi^-}$, da ein Element von Φ_p^- stets eine positive Kombination der Basiswurzeln $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}$ ist, so daß wir uns auf positive Kombinationen von Basiswurzeln zurückziehen können. **q.e.d.**

Damit sind wird vorbereitet für das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 7.5. *Die Gruppe $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ ist vom Typ $F_{|S|-1}$.*

Beweis. Nach Lemma 2.3 ist die Operation von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ auf $\boldsymbol{Y}$ kokompakt. Die Stabilisatoren sind nach Lemma 2.2 endlich. Also folgt die Behauptung aus Lemma 7.4 mit Browns Kriterium [Brow87, Proposition 1.1] oder Zitat 3.3 – hier mit einer einelementigen gerichteten Menge. **q.e.d.**

Bemerkung 7.6. Die Argumentation für die Abschätzung 7.5 ist dem Gedankengang in [Bux97] nachempfunden und rekurriert darum auf globale Eigenschaften der Gebäude X_p – die Moufang-Eigenschaft. Damit ist dieses Verfahren auf den Funktionenkörperfall beschränkt. Die Diskussion in Abschnitt 3 legt nahe, daß es eine Argumentation im Stil von [BeBr97], die nur lokale Eigenschaften der Gebäude X_p ausnützt, für Satz 7.5 geben müßte.

Mit den Sätzen 5.1 und 7.5 ist das Theorem, welches wir uns zu Beginn vorgenommen haben, bewiesen. **q.e.d.**

8 Die Invarianten von Bieri, Neumann, Strebel und Renz

Die in [BiSt80] geborenen „geometrischen Invarianten“ haben sich inzwischen mit vier Namen verknüpft, und es würde zu lange dauern, alle Entwicklungen und Varianten nachzuzeichnen. Wir verweisen daher auf [Renz88], wo der Weg in höhere Dimensionen erstmalig beschritten wurde, und eine junge Quelle [Bier97].

Für eine Gruppe vom Typ F_m ist die Invariante $\Sigma^m(G)$ definiert. Sie ist ein offener Kegel in $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$. Es ist stets $\Sigma^1(G) \supseteq \Sigma^2(G) \supseteq \cdots \supseteq \Sigma^m(G)$.

Behauptung und Definition 8.1. Sei G eine Gruppe vom Typ F_m und Y ein $(m-1)$-zusammenhängender CW-Komplex, auf dem G durch zellenpermutierende Homöomorphismen operiert, so daß der Stabilisator einer jeden i-Zelle vom Typ F_{m-i} und das m-Gerüst von Y endlich modulo der Operation von G ist. Zu jedem nicht-trivialen Homomorphismus $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{R})$ existiert eine G-equivariante <u>Höhenfunktion</u> auf Y. Das ist eine stetige Abbildung $h_\chi : Y \to \mathbb{R}$ mit $h_\chi(gy) = \chi(g) + h_\chi(y)$ für alle Punkte $y \in Y$ und alle $g \in G$.

Sei h_χ eine Höhenfunktion zu χ. Dann ist per definitionem $\chi \in \Sigma^m(G)$ genau dann, wenn Y <u>im wesentlichen $(m-1)$-zusammenhängend bezüglich h_χ</u> ist, d.h. wenn die Systeme der Fundamentalgruppen $\left(\pi_i(h_\chi^{-1}([t,\infty)))\right)_{t\in\mathbb{R}}$ im wesentlichen trivial sind für alle $i \leq m-1$ – vergleiche dazu Zitat 3.3.

Bemerkung 8.2. Wir weichen hier in zwei Punkten von der üblichen Definition ab. Der erste Punkt ist, daß wir nur fordern, daß es zu jedem $b \in \mathbb{R}$ ein $a \leq b$ geben soll, so daß $\pi_i(h_\chi^{-1}([b,\infty))) \to \pi_i(h_\chi^{-1}([a,\infty)))$ trivial ist. Normalerweise wird auch noch gefordert, daß die Differenz $b-a$ global beschränkt werden kann. Doch beides ist ohnehin äquivalent zu der schwächeren Forderung, daß es überhaupt ein Paar $a \leq b$ gebe, so daß die Abbildung verschwindet.

Der zweite und kniffligere Punkt, in dem wir abweichen, ist, daß wir keine freie Operation von G auf Y fordern. Daß diese Abschwächung möglich ist, hat zuerst H. Meinert in seiner Dissertation bewiesen. Aus ihr sind die beiden Arbeiten [Mein96] und [Mein97] hervorgegangen. Hier aber ist der Verweis auf [BiGe98, Theorem 12.1] einfacher, weil das einen Umweg über die homologischen Invarianten zu vermeiden gestattet.

Die geometrischen Invarianten einer Gruppe G sind im allgemeinen sehr schwer zu berechnen, weil sie viel Information beinhalten. Kennt man $\Sigma^m(G)$, so kann man z.B. für alle Normalteiler oberhalb der Kommutatorgruppe von G entscheiden, ob sie vom Typ F_m sind:

Zitat 8.3 (vergleiche [Renz88, Satz C, Seite 17]). *Sei G eine Gruppe vom Typ F_m und $N \leq G$ ein Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe, dann ist N vom Typ F_m genau dann, wenn alle nicht-trivialen, auf N verschwindenden Homomorphismen in* $\mathrm{Hom}(G,\mathbb{R})$ *zu* $\Sigma^m(G)$ *gehören.*

Da wir wissen, daß $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ vom Typ $\mathrm{F}_{|S|-1}$ ist, macht es Sinn, nach den geometrischen Invarianten $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))$ für $m < |S|$ zu fragen. Jeder Homomorphismus von $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ nach $\mathbb{R}$ faktorisiert über $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$, und $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$ spannt ein maximales Gitter im Vektorraum $\boldsymbol{H}$ auf, der darum als $\boldsymbol{H} \cong \mathcal{T}(\mathcal{O}_S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ beschrieben werden kann. Daher ist

- $\boldsymbol{H}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{H},\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{T}(\mathcal{O}_S),\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{B}(S),\mathbb{R}) \supseteq \Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))$. Wir werden aus Gründen notationeller Bequemlichkeit mit dem Komplement
- $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^{\mathrm{c}} := \boldsymbol{H}^* \setminus \Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))$ arbeiten.

Für die Gruppe $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$ haben wir in $\boldsymbol{Y}$ bereits einen geeigneten Komplex gefunden. Ein Homomorphismus von $\mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$ nach $\mathbb{R}$ ist repräsentiert durch eine Linearform auf $\boldsymbol{H}$. Durch Verkettung mit $\boldsymbol{\pi} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{H}$ erhalten wir eine $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$-equivariante Höhenfunktion auf $\boldsymbol{Y}$.

Wir werden eine untere und eine obere Abschätzung für $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^{\mathrm{c}}$ herleiten, die leider nur im Rang-1-Fall übereinstimmen. Für eine griffige Formulierung des Resultats brauchen wir ein paar Notationen. Es bezeichnet

- $\boldsymbol{\Delta}^- :=\subseteq \boldsymbol{\Phi}^-$ die Menge all der Linearformen auf $\boldsymbol{\Sigma}$, die von Basiswurzeln induziert sind, und
- $\widetilde{\boldsymbol{\Delta}^-} := \boldsymbol{\Delta}^-|_{\boldsymbol{H}} \subseteq \widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-}$ die Einschränkung von $\boldsymbol{\Delta}^-$ auf $\boldsymbol{H}$.
- $\mathrm{conv}_{m,S}(\widetilde{\boldsymbol{\Delta}^-})$ ist die Menge all derjenigen Linearformen auf $\boldsymbol{H}$, die sich als eine positive Kombination $\sum_{p\in S}\mu_p\alpha_{i_p}^{(p)}$ schreiben lassen, worin nicht mehr als m Koeffizienten von 0 verschieden sind. Der Punkt hier ist, daß alle Basiswurzeln in der Kombination zu verschiedenen Stellen gehören.

  Für eine beliebige Menge Ψ von Linearformen ist

- $\mathrm{conv}_m(\Psi)$ die Menge aller Linearformen, die sich als positive Kombination von nicht mehr als m Elementen aus Ψ darstellen lassen.

Satz 8.4. *Für $m < |S|$ ist $\mathrm{conv}_{m,S}(\widetilde{\boldsymbol{\Delta}^-}) \subseteq \Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c \subseteq \mathrm{conv}_m(\widetilde{\boldsymbol{\Phi}^-})$.*

Beweis. Wir beweisen beide Inklusionen getrennt. Die erste in Lemma 8.5 und die zweite in Folgerung 8.8. **q.e.d.**

Lemma 8.5. *Für $m < |S|$ ist $\mathrm{conv}_{m,S}(\widetilde{\boldsymbol{\Delta}^-}) \subseteq \Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c$.*

Beweis. Sei $\lambda = \sum_{p\in S} \mu_p \alpha_p^{(i_p)}$ eine Linearform auf $\boldsymbol{H}$. Es seien m Koeffizienten größer als 0 – alle anderen mögen verschwinden. Wir werden zeigen, daß das System von Homotopiegruppen $(\pi_{m-1}((\lambda \circ \boldsymbol{\pi}|_{\boldsymbol{Y}})^{-1}[t,\infty)))_{t\in\mathbb{R}}$ nicht im wesentlichen trivial ist. Dazu wenden wir die Technik aus Abschnitt 5 an.

Dort hatten wir gesehen, wie zu einer Basiswurzel $\alpha_p^{(i_p)}$ zum Gebäude X_p ein Baum T_p konstruiert werden kann, der ein Retrakt von X_p ist, so daß die Basiswurzel $\alpha_p^{(i_p)}$ Anlaß gibt zu einer Höhe $h_p^* : T_p \to \mathbb{R}$, die, vermittelt durch die Retraktion, verträglich ist mit der Höhenfunktion $h_p = \alpha_p^{(i_p)} \circ \pi_p : X_p \to \mathbb{R}$ – vergleiche Lemma 5.6 und Beobachtung 5.2.

Wir setzen $\boldsymbol{T} := \times_{\mu_p\neq 0} T_p$. Zur induzierten Retraktion $\times_{\mu_p\neq 0} X_p \to \boldsymbol{T}$ wählen wir einen Schnitt $\sigma : \boldsymbol{T} \to \times_{\mu_p\neq 0} X_p$. Da es wegen $m < |S|$ mindestens eine Stelle $p \in S$ mit $\mu_p = 0$ gibt, können wir eine stetige Abbildung $\rho : \boldsymbol{T} \to \times_{\mu_p=0} \Sigma_p$ finden, so daß für jeden Punkt $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{T}$ das Tupel $(\rho(\boldsymbol{t}), \sigma(\boldsymbol{t})) \in \times_{\mu_p=0} \Sigma_p \times \times_{\mu_p\neq 0} X_p \subseteq \boldsymbol{X}$ schon in $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\pi}^{-1}(\boldsymbol{H})$ liegt. Auf diese Weise erkennen wir $\boldsymbol{T}$ als Retrakt von $\boldsymbol{Y}$.

Durch $\sum_{p\in S} \mu_p h_p^*$ ist dann eine Höhenfunktion auf $\boldsymbol{T}$ gegeben, die mit der Höhenfunktion auf $\boldsymbol{Y}$, die von λ induziert wird, verträglich ist:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{Y} & \rightleftarrows & \boldsymbol{T} \\ \downarrow {\scriptstyle \lambda\circ\boldsymbol{\pi}|_{\boldsymbol{Y}}} & & \downarrow {\scriptstyle \sum_{p\in S}\mu_p h_p^*} \\ \mathbb{R} & = & \mathbb{R} \end{array}$$

Also können wir schließen, daß das System der Homotopiegruppen $(\pi_{m-1}((\lambda \circ \boldsymbol{\pi}|_{\boldsymbol{Y}})^{-1}[t,\infty)))_{t\in\mathbb{R}}$ nicht im wesentlichen trivial sein kann, weil das Vergleichssystem auf dem Retrakt $\boldsymbol{T}$ wegen Lemma 3.1 nicht im wesentlichen trivial ist. **q.e.d.**

Beobachtung 8.6. *Sei Ψ eine m-zahme Menge von Linearformen auf $\boldsymbol{H}$ und λ eine Linearform auf $\boldsymbol{H}$. Ψ schränkt sich genau dann zu einem m-zahmen System von Linearformen auf $\ker\lambda$ ein, wenn $\lambda \notin \mathrm{conv}_m(\Psi)$ und $-\lambda \notin \mathrm{conv}_m(\Psi)$ – schließlich verschwindet eine positive Kombination von Elementen aus Ψ auf $\ker\lambda$ genau dann, wenn sie im Erzeugnis von λ in $\boldsymbol{H}^*$ liegt.* **q.e.d.**

Das folgende Lemma ist der Schlüssel zur oberen Abschätzung von $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c$. Sein Beweis gibt einen Eindruck von den geometrischen Argumenten aus [Bux97]. Es ist eine Modifikation von [Bux97, Lemma 7.3].

Lemma 8.7. *Sei $(X, \mathbb{E}, \pi)$ ein Ψ-Komplex und λ eine Linearform auf $\mathbb{E}$. Ist Ψ eine m-zahme Menge und $\lambda \notin \operatorname{conv}_m(\Psi)$, so ist das Urbild $X' := (\lambda \circ \pi)^{-1}[0, \infty)$ ein $(m-1)$-zusammenhängender Raum.*

Beweis. Sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in X. Wir haben zu zeigen, daß für jedes $r \in \mathbb{N}$ der Raum

$$W^r := \bigcup_{i \leq r} X' \cap B_i$$

$(m-1)$-zusammenhängend ist.

Für $r = 1$ ist alles klar. Für $r > 1$ nehmen wir induktiv an, W^{r-1} sei $(m-1)$-zusammenhängend. Nun entsteht W^r aus W^{r-1} dadurch, daß ein abgeschlossenes konvexes Gebiet $V' \subseteq B_r$ an W^{r-1} angeklebt wird.

Wir setzen $\mathbb{A} := \lambda^{-1}[0, \infty)$, $\mathbb{E}' := \ker \lambda = \partial \mathbb{A}$ und identifizieren mit Hilfe der Projektion π das Blatt B_r mit $\mathbb{E}$. Somit ist $V' = \mathbb{A} \cap V$, worin $V \subseteq \mathbb{E}$ ein der Menge Ψ untergeordnetes konvexes Gebiet ist. Das Stück V' wird entlang der Menge $\mathbb{A} \cap \partial V$ angeklebt.

Bei diesem Prozeß kommt ohnehin nur dann etwas hinzu, wenn $\mathbb{E}'$ einen inneren Punkt von V enthält, was wir demnach annehmen wollen. Das ist opportun, weil dann $\mathbb{E}' \cap \partial V = \partial(\mathbb{A} \cap V)$ ist.

Wir unterscheiden gemäß [Bux97, Theorem 6.4] die beiden folgenden Fälle:

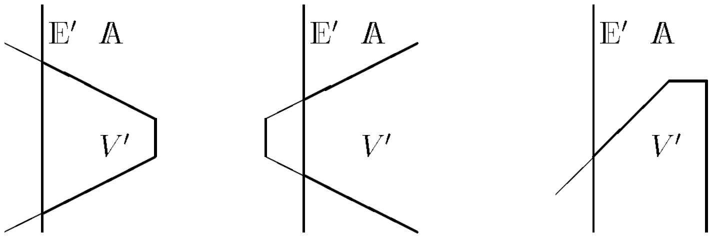
<u>V' ist zerlegbar</u>: $V' = V \cap \mathbb{A}$ is also Produkt eines konvexen Kompaktums und eines Euklidischen Raumes, und so kann dieser Euklidische Faktor auch von $\mathbb{A}$ abgespalten werden. Nehmen wir also einmal an, V' sei von vornherein kompakt. Dann ist sein Anteil in $\mathbb{E}'$ eine „freie Seite", die man eindrücken kann. Mit anderen Worten, man findet eine Retraktion von V' auf $\partial V \cap \mathbb{A}$, was der Teil ist, entlang dessen V' ohnehin angeklebt werden soll, so daß sich in diesem Fall der Homotopietyp gar nicht ändert.

Ist der Euklidische Faktor nicht trivial, so retrahiert man in allen kompakten Fasern des Produktes simultan.

<u>V' ist retrahierbar</u>: Hier ist das Ankleben von V' äquivalent dazu, einfach $\partial V'$ längs $\mathbb{A} \cap \partial V$ anzukleben. Dabei wiederum spielt sich alles Interessante schon in $\mathbb{E}'$ ab, so daß eigentlich nur $\partial V' \cap \mathbb{E}' = V \cap \mathbb{E}'$ entlang $\partial V \cap \mathbb{E}' = \partial(\mathbb{E}' \cap V)$ einzukleben ist.

Hier gibt es wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Sei $\Psi' \subseteq \Psi$ die Menge aller Linearformen aus Ψ, die Stützebenen von V entsprechen.

<u>$-\lambda \notin \operatorname{conv}_m(\Psi')$</u>: Wir hatten in Beobachtung 8.6 festgestellt, daß in diesem Fall das System Ψ' auf $\mathbb{E}'$ eine m-zahme Menge induziert. Daher ist $V \cap \mathbb{E}'$ entwe-



V' zerlegbar $\quad$ V' retrahierbar $\quad$ $-\lambda \in \operatorname{conv}_m(\Psi')$

der retrahierbar oder zerlegbar mit einem kompakten Anteil der Dimension $\geq m$ – dies folgt aus [Bux97, Corollary 6.7] –, so daß die Anklebung die die Homotopiegruppen in kleineren Dimensionen nicht ändert.

$-\lambda \in \mathrm{conv}_m(\Psi')$: Da die Menge V' retrahierbar ist, enthält sie einen unendlichen Strahl ohne seinen Antipoden. Dieser kann sich aber nicht von $\mathbb{E}'$ entfernen, da sonst λ auf V' beliebig groß werden müßte. Also verläuft er parallel zu $\mathbb{E}'$. Dann ist die Menge $V \cap \mathbb{E}'$ als Teilmenge von $\mathbb{E}'$ retrahierbar, denn sie enthält einen parallelen Strahl. Diese Menge einzukleben kann daher den Homotopietyp nicht ändern. **q.e.d.**

Als unmittelbare Konsequenz aus Beobachtung 7.3 und Lemma 8.7 erhalten wir:

Folgerung 8.8. *Für $m < |S|$ ist $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c \subseteq \mathrm{conv}_m(\widetilde{\mathbf{\Phi}^-})$.* **q.e.d.**

Bemerkung 8.9. Für den Rang-1-Fall fallen obere und untere Schranke für $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c$ zusammen, die zugehörige Gruppe ist metabelsch, und die Σ^m-Vermutung bestätigt sich für diese Gruppen. Das ist allerdings seit [Koch97] nicht mehr so richtig neu.

Bemerkung 8.10. Es ist ein leichtes, gemäß Zitat 8.3 die Konsequenzen der Inklusion $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c \subseteq \mathrm{conv}_m(\widetilde{\mathbf{\Phi}^-})$ für Endlichkeitseigenschaften von Normalteilern in $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$, die $\mathcal{U}(\mathcal{O}_S)$ enthalten, auszubuchstabieren. Eine solche Untergruppe A ist stets Urbild einer Untergruppe $T' \leq \mathcal{T}(\mathcal{O}_S)$ in $\mathcal{B}(\mathcal{O}_S)$. Ein Homomorphismus in $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S), \mathbb{R})$ verschwindet auf A genau dann, wenn die ihm korrespondierende Linearform in $\boldsymbol{H}^*$ auf $\boldsymbol{H}_{T'} := T' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \leq \boldsymbol{H} \cong \mathcal{T}(\mathcal{O}_S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ verschwindet. Sei also $\boldsymbol{H}^*_{T'} := \{\lambda \in \boldsymbol{H}^* \mid \lambda(\boldsymbol{H}_{T'}) = 0\} \leq \boldsymbol{H}^*$ das Komplement von $\boldsymbol{H}_{T'}$. Seine Kodimension ist der $\mathbb{Z}$-Rang von T'. Nach Zitat 8.3 ist A vom Typ F_m, wenn der Schnitt von $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c$ mit $\boldsymbol{H}^*_{T'}$ trivial ist. Nun ist $\Sigma^m(\mathcal{B}(\mathcal{O}_S))^c \subseteq \mathrm{conv}_m(\widetilde{\mathbf{\Phi}^-})$ enthalten in einer endlichen Vereinigung m-dimensionaler Unterräume von $\boldsymbol{H}^*$, so daß diese Menge mit $\boldsymbol{H}^*_{T'}$ trivialen Schnitt haben wird, wenn der $\mathbb{Z}$-Rang von T' mindestens m ist und wenn sich $\boldsymbol{H}_{T'}$ und damit $\boldsymbol{H}^*_{T'}$ „in allgemeiner Lage“ befindet.

Aus der unteren Abschätzung in Lemma 8.5 folgt analog, daß die Gruppe A nur dann vom Typ F_m sein kann, wenn der $\mathbb{Z}$-Rang von T' mindestens m ist. Im „generischen Fall“ gibt das Minimum von $|S| - 1$ und dem $\mathbb{Z}$-Rang der Gruppe T' also genau die Endlichkeitseigenschaften von A an.

Dieses Verhalten ist nicht nur für arithmetische Gruppen typisch. Es ist in bezug auf die bekannten Beispiele eine verblüffende Regularität, auf die N. Brady hingewiesen hat, daß Gruppen beschränkter Endlichkeitslänge stets frei abelsche Untergruppen entsprechend großen Ranges enthalten. Verblüffend ist dies deshalb, weil bei Gruppen vom Typ F_∞ keine derartigen Beschränkungen existieren.

Bemerkung 8.11. Andererseits ist es nicht schwer, Untergruppen anzugeben, für deren Endlichkeitseigenschaften die Ergebnisse nichts hergeben. Man betrachte die Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & * & * \\ & t^{-2} & * \\ & & t \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_3(\mathcal{O}_S) \mid t \in \mathcal{O}_S^* \right\}.$$

Eine verwandte Gruppe wird für den Zahlkörperfall in [AbBr87] diskutiert.

Diese Gruppe ist für $|S| \geq 2$ endlich erzeugt – die Elemente rechts oben erhält man über Kommutatoren. Damit läßt sich zeigen, daß die obere Abschätzung 8.8 nicht scharf ist.

Die Gruppe ist aber nicht endlich präsentiert, sei $|S|$ auch noch so groß. Da sie Schritt-2-nilpotent-durch-abelsch ist, können wir mit [BiSt80, Corollary 5.8] schließen, daß die „Eckengruppe“ oben rechts endlich erzeugt als Normalteiler sein müßte. Das geht aber nicht, weil der Torus trivial auf ihr operiert. Und mit diesem Ergebnis läßt sich zeigen, daß auch die untere Abschätzung 8.5 nicht scharf sein kann.

Literatur

[Abel87] *H. Abels:* Finite presentability of S-arithmetic groups – Compact presentability of solvable groups. Springer LNM 1261 (1987)

[AbBr87] *H. Abels, K.S. Brown:* Finiteness Properties of Solvable S-Arithmetic Groups: An Example. Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987) p. 77 – 83

[AbTi97] *H. Abels, A. Tiemeier:* Compactness Properties of Locally Compact Groups. Transformation Groups 2 (1997) p. 119 - 135 (Vergleiche auch [Tiem97].)

[Åber86] *H. Åberg:* Bieri-Strebel Valuations (of Finite Rank). Proceedings of the London Mathematical Society 52 (1986) p. 269 – 304

[Abra94] *P. Abramenko:* Chevalleygruppen. Vorlesung (Frankfurt, WS 1994/95)

[Abra96] *P. Abramenko:* Twin Buildings and Applications to S-Arithmetic Groups. Springer LNM 1641 (1996)

[BBN59] *G. Baumslag, W.W. Boone, B.H. Neumann:* Some Unsolvable Problems About Elements and Subgroups of Groups. Mathematica Scandinavica 7 (1959) p. 191 – 201

[Behr62] *H. Behr:* Über die endliche Definierbarkeit von Gruppen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 211 (1962) p. 116 – 122

[Behr92] *H. Behr:* Arithmetic groups over function fields; A complete characterization of finitely generated and finitely presented arithmetic subgroups of reductive algebraic groups. Preprintreihe 92 – 033, SFB 343; Bielefeld (1992)

[BeBr97] *M. Bestvina, N. Brady:* Morse theory and finiteness properties of groups. Inventiones mathematicae 129 (1997) p. 445 – 470

[Bier97] *R. Bieri:* Finiteness length and connectivity length for groups. Erscheint voraussichtlich bei de Gruyter unter dem Titel: *J. Cossey, C.F. Miller, W. Neumann, M. Shapiro:* Geometric Group Theory down under. Proceedings of the special year on geometric group theory, Australia National University Canbera (1997)

[BiEc74] *R. Bieri, B. Eckmann:* Finiteness Properties of Duality Groups. Commentarii Mathematici Helvetici 49 (1974) p. 74 – 83

[BiGe98] *R. Bieri, R. Geoghegan:* Connectivity properties of group actions on non-positively curved spaces II: The geometric invariants. Preprint (Frankfurt, Oktober 1998)

[BiSt80] *R. Bieri, R. Strebel:* Valuations and Finitely Presented Metabelian Groups. Proceedings of the London Mathematical Society 41 (1980) p. 439 – 464

[Bore91] *A. Borel:* Linear Algebraic Groups. Second Enlarged Edition; Springer GTM 126, New York (1991)

[BoSe76] *A. Borel, J.-P. Serre:* Cohomologie d'immeubles et de groupes S-arithmétiques. Topology 15 (1976) p. 211 – 232

[Brow82] *K.S. Brown:* Cohomology of Groups. Springer GTM 87, New York (1982)

[Brow87] *K.S. Brown:* Finiteness Properties of Groups. Journal of Pure and Applied Algebra 44 (1987) p. 45 – 75

[BrTi72] *F. Bruhat, J. Tits:* Groupes Réductives sur un Corps Local I. Publications Mathématiques IHES 41 (1972) p. 5 – 252

[Bux97] *K.-U. Bux:* Finiteness Properties of some Metabelian S-Arithmetic Groups. Proceedings of the London Mathematical Society 75 (1997) p. 308 – 322

[CaFr67] *J.W.S. Cassels, A. Fröhlich:* Algebraic Number Theory. Proceedings of an Instructional Conference organized by the London Mathematical Society (A Nato Advanced Study Institute) with Support of the International Mathematical Union. Academic Press, London (1967)

[Chev60] *C. Chevalley:* Certain Schémas de Groupes Semi-Simples. Séminaire Bourbaki 13e année (1960/61) no 219 p. 1 – 16

[GrRo84] *K.W. Gruenberg, J.E. Roseblade:* Group Theory: Essays for Philip Hall. Academic Press (1984)

[Koch97] *D. Kochloukova:* The FP^m-Conjecture for a class of metabelian groups. PhD Thesis (Cambridge 1997)

[Mein96] *H. Meinert:* The homological invariants for metabelian groups of finite Prüfer rank: a proof of the Σ^m-conjecture. Proceedings of the London Mathematical Society 72 (1996) p. 385 – 424

[Mein97] *H. Meinert:* Actions on 2-complexes and the homotopical invariant Σ^2 of a group. Journal of Pure and Applied Algebra 119 (1997) p. 297 – 317

[Neum37] *B.H. Neumann:* Some remarks on infinite groups. Journal of the London Mathematical Society 12 (1937) p. 120 – 127

[Renz88] *B. Renz:* Geometrische Invarianten und Endlichkeitseigenschaften von Gruppen. Doktorarbeit (Frankfurt, 1988)

[Rona89] *M. Ronan:* Lectures on Buildings. Perspectives in Mathematics, Academic Press, San Diego, London (1989)

[Stei67] *R. Steinberg:* Lectures on Chevalley Groups. Mimeographed Notes, Yale University (1967)

[Stre84] *R. Strebel:* Finitely Presented Solvable Groups. In: [GrRo84] p. 257 – 314

[Stuh76] *U. Stuhler:* Zur Frage der endlichen Präsentiertheit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall. Mathematische Annalen 224 (1976) p. 217 – 232

[Stuh80] *U. Stuhler:* Homological properties of certain arithmetic groups in the function field case. Inventiones mathatematicae 57 (1980) p. 263 – 281

[Tiem97] *A. Tiemeier:* A Local-Global Principle for Finiteness Properties of S-Artihmetic Groups over Number Fields. Transformation Groups 2 (1997) p. 215 – 223 (Vergleiche auch [AbTi97].)

[Tits87] *J. Tits:* Uniqueness and Presentations of Kac-Moody Groups over Fields. Journal of Algebra 105 (1987) p. 542 – 573

[Wall65] *C.T.C. Wall:* Finiteness Conditions for CW-Complexes. Annals of Mathematics 81 (1965) p. 56 – 69

[Wall79] *C.T.C. Wall:* Homological Group Theory. LMS Lecture Notes 35, Cambridge University Press (Cambridge 1979)

[Weil73] *A. Weil:* Basic Number Theory. Reprint of the Second Edition (1973); Springer Classics in Mathematics, Berlin Heildelberg (1995)

* * *

Ulrike Weil danke ich für die Durchsicht des Manuskripts. Schlußendlich danke ich Herrn Prof.Dr. R. Bieri. Den Gesprächen mit ihm, insbesondere seinen antreibenden Fragen danach, wie weit die entwickelten Methoden reichen, verdankt die Arbeit sehr viel.