Vertex–Operatoren, Darstellungen der Virasoro–Algebra und konforme Quantenfeldtheorie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
in Frankfurt am Main

von
Wolfram Boenkost
aus Frankfurt

Frankfurt 1994
(D F 1)

vom Fachbereich Mathematik der
Johann Wolfgang Goethe–Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. W. Schwarz

Gutachter: Prof. F. Constantinescu und Prof. H. F. de Groote

Datum der Disputation: 11.7.1994

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die mathematischen Grundlagen zur Konstruktion der primären Felder der minimalen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie beschrieben. Wir untersuchen Verma– und Fock–Moduln der Virasoro–Algebra und klassifizieren diese Moduln bezüglich der Struktur der (ko–) singulären Vektoren. Wir definieren die Vertex–Operatoren zwischen gewissen Fock–Moduln (die eine kanonische Hilbertraumstruktur besitzen) und beweisen verschiedene Eigenschaften dieser Operatoren: Unter bestimmten Voraussetzungen sind Vertex–Operatoren dicht definierte, nicht abschließbare Operatoren zwischen den Fock–Moduln. Radialgeordnete Produkte von Vertex–Operatoren existieren auf einem dichten Teilraum. Wir beweisen Kommutatorrelationen zwischen Vertex–Operatoren und den Generatoren der Virasoro–Algebra. Dann definieren wir die integrierten Vertex–Operatoren und zeigen, daß diese Operatoren im wesentlichen wieder die Eigenschaften der nichtintegrierten Vertex–Operatoren haben. Gewisse integrierte Vertex–Operatoren können mit konformen Felder identifiziert werden. Ein unter den Vertex–Operatoren invarianter Unterraum der Fock–Moduln kann mit dem physikalischen Zustandsraum identifiziert werden.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Physikalischer Hintergrund

Systeme der klassischen statistischen Mechanik am kritischen Punkt besitzen keine natürliche Längenskala, sie sind skaleninvariant. Nach der Wilson'schen Idee der Renormierungsgruppe wird das Verhalten des Systems am kritischen Punkt durch einen Fixpunkt der Renormierungsgruppe beschrieben.

Man kennt verschiedene Beispiele, in denen Modelle der klassischen statistischen Mechanik im Kontinuumlimes euklidischen Quantenfeldtheorien entsprechen. Falls das System an einem kritischen Punkt ist, so entspricht der Renormierungsgruppenfixpunkt nach einer Vermutung von Polyakov einer nicht nur skaleninvarianten, sondern sogar konform invarianten euklidischen Quantenfeldtheorie. Von dieser konformen Quantenfeldtheorie kann man Osterwalder–Schrader–Positivität annehmen, falls das statistische System eine lokale Wechselwirkung hat (z. B. nächste Nachbarn) und eine selbstadjungierte Transfermatrix besitzt.

Eine weitere Hypothese in der Theorie der kritischen Phänomene besagt, daß die "kritischen Exponenten", die das Verhalten der sogenannten Ordnungsparameter in der Nähe des kritischen Punktes beschreiben, nicht mehr von speziellen Eigenschaften des Systems wie z. B. der genauen Form der Wechselwirkung abhängen, vielmehr haben ganze Klassen von Modellen die gleichen kritischen Exponenten und damit das gleiche Verhalten am kritischen Punkt. Dies wird mit der Universalität der kritischen Exponenten bezeichnet.

Der springende Punkt ist nun, daß der Formalismus der konformen Quantenfeldtheorie in zwei Dimensionen es erlaubt, die kritischen Exponenten zu berechnen, man kann auf diese Weise bestimmte konforme Theorien mit Modellen der statistischen Mechanik, deren kritische Exponenten bekannt sind, identifizieren. Hier seien dabei das Isingmodell, das trikritische Isingmodell und das 3—state Potts–Modell genannt [Car, ZZ]. Aus diesem Grund gab (und gibt) es ein großes Interesse an der Klassifikation aller konformen Theorien, auf diesem Wege ließen sich dann auch alle kritischen Punkte klassifizieren. Diese Klassifikation aller konformen Quantenfeldtheorien ist bis heute nicht vollendet, es wurden aber eine ganze Reihe von Serien konformer Theorien gefunden, siehe z. B. [BG]. Die erste Serie von konformen Modellen, die von A. Belavin, A. Polyakov und A. B. Zamolodchikov [BPZ] entdeckte Serie der minimalen Modelle, ist der Gegenstand dieser Arbeit.

Einen weiteren Grund für das Interesse an konformer Quantenfeldtheorie in zwei Dimensionen ist die Stringtheorie. Man erhofft sich, durch die

Untersuchung von konformen Quantenfeldtheorien einen Überblick über mögliche Stringmodelle zu verschaffen. Jede konforme Quantenfeldtheorie liefert einen möglichen Grundzustand für ein Stringmodell. Bemerkenswerterweise spielen auch hier die zweidimensionalen Theorien eine entscheidende Rolle; die Weltfläche eines Strings ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Struktur, d. h. eine Riemannsche Fläche. Auch die Feynman–Graphen werden in der String–Theorie durch Riemannsche Flächen ersetzt. Deshalb interessiert man sich in diesem Rahmen insbesondere für konforme Theorien auf Riemannschen Flächen von beliebigem Geschlecht. Wir werden aber nur Theorien in der komplexen Ebene bzw. auf $\mathbb{P}^1$ betrachten.

Wir wollen nun etwas genauer auf die konforme Invarianz einer Theorie eingehen, vgl. hierzu [SA, Car, Gin]. Ein Diffeomorphismus einer (Pseudo–) Riemannschen Mannigfaltigkeit M heißt konform, wenn er die Metrik nur um einen $C^\infty(M)$–Faktor ändert. Deshalb enthalten die konformen Transformationen auch die Poincarè–Transformationen, da diese die Metrik invariant lassen. Für $M = \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ mit kanonischer Metrik g der Signatur (p, q) hat die Gruppe der (globalen) konformen Transformationen die Dimension $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$, ist also insbesondere endlichdimensional. $M = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ist von besonderer Bedeutung, die konformen Transformationen entsprechenden dann den holomorphen und antiholomorphen Funktionen, die Symmetriegruppe ist also unendlichdimensional. Nur die Moebius–Transformationen (und ihre antiholomorphen Partner) erzeugen globale konforme Transformationen, jede (anti–)holomorphe Funktion erzeugt aber eine lokale konforme Transformation.

Um den Unterschied zwischen lokalen und globalen Transformationen zu eliminieren, geht man zu den infinitesimalen Generatoren konformer Transformationen über, die durch $l_n = -z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$ für $n \in \mathbb{Z}$ gegeben sind. l_n definieren meromorphe Vektorfelder auf $\mathbb{P}^1$ und erfüllen die Witt–Algebra

$$[l_n, l_m] = (n-m)l_{n+m}. \tag{1}$$

l_{-1}, l_0, l_1 sind die infinitesimalen Generatoren der Moebius–Transformationen, sie bilden eine $sl(2, \mathbb{C})$–Unteralgebra. Analog erzeugen die antiholomorphen Funktionen eine Witt-Algebra, deren Generatoren wir mit $\bar{l}_n$ bezeichnen.

Auf dem Quantenlevel erhält man als Symmetriealgebra die Virasoro–Algebra, die die eindimensionale zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ist. Die zentrale Erweiterung kann man als Schwinger–Term oder Anomalie interpretieren, bei der

Quantisierung wird die klassische Symmetrie zerstört. Die Relationen der Virasoro–Algebra sind

$$[e_n, e_m] = (n-m)e_{n+m} + \frac{n(n^2-1)}{12} z\delta_{n,-m}. \tag{2}$$

Die komplexe Lie–Algebra, erzeugt durch e_n, $(n \in \mathbb{Z})$ und z bezeichnen wir mit Vir. Bemerkenswerterweise bilden e_{-1}, e_0, e_1 wieder eine $sl(2,\mathbb{C})$–Unteralgebra, die globale konforme Symmetrie wird also durch den Schwinger–Term nicht beeinflußt. Die volle Symmetrie–Algebra ist (bei den von uns untersuchten Modellen) die direkte Summe $\mathrm{Vir} \oplus \overline{\mathrm{Vir}}$.

Konforme Quantenfeldtheorie ∩ Mathematik

Der Zustandsraum $\mathbb{H}$ der konformen Quantenfeldtheorie ist ein Virasoro–Modul.
Aus physikalischen Gründen untersucht man graduierte Höchstgewichtsmoduln von Vir, denn es soll im Zustandsraum einen zyklischen Vektor (den Vakuumvektor) minimaler Energie geben. Die Graduierung wird von e_0–Eigenräumen erzeugt.

Die geeignete Klasse von Darstellungen von Vir liefern die Verma–Moduln $V(h,c) = \bigoplus_{n\geq 0} V(h,c)_n$ für $(h,c) \in \mathbb{C}^2$, wobei z durch $c\,\mathrm{Id}$ dargestellt wird und für $x \in V(h,c)_n$ $e_0 x = (h+n)x$ gilt. Moduln mit diesen Eigenschaften heißen Moduln vom Typ (h,c). $V(h,c)_n$ haben die Dimension $p(n)$, wobei $p(n)$ die Partitionsfunktion ist. Die Bausteine des Zustandraumes sind die irreduziblen Quotienten von Verma–Moduln, diese Moduln bezeichnen wir mit $L(h,c)$. c ist durch das Modell festgelegt, der Zustandsraum hat also die Form

$$\mathbb{H} = \bigoplus_{i\in I} L(h_i, c) \otimes L(\bar{h}_i, c). \tag{3}$$

Für Modelle ohne Spin (wie wir sie hier ausschließlich betrachten) gilt $h_i = \bar{h}_i$. Eine der Eigenschaften der konformen Quantenfeldtheorie ist es, daß zu jedem Summand in (3) ein spezielles "primäres" Feld assoziert ist. Ein primäres Feld ist dabei über eine spezielle Form des Kommutators mit den Elementen von Vir charakterisiert. Die primären Felder kann man analog zu (3) zerlegen, die Faktoren, die man dabei erhält, nennt man konforme Felder. A. Belavin, A. Polyakov und A. B. Zamolodchikov lösten in der bahnbrechenden Arbeit [BPZ] das Problem, für bestimmte Werte von c endliche Indexmengen I zu finden, so daß die von den primären Feldern erzeugte Operatoralgebra schließt. Diese so erhaltenen Modelle sind genau die minimalen Modelle.

Aus der vorhergegangenen Diskussion ergeben sich zwei Aufgaben für die mathematische Behandlung der konformen Quantenfeldtheorie:
Man muß die Darstellungstheorie der Symmetrie–Algebra, in diesem Fall der Virasoro–Algebra untersuchen, und danach muß man die konformen Felder zwischen bestimmten Moduln der Virasoro–Algebra konstruieren.

Zunächst zur Darstellungstheorie von Vir:

Auf den Verma–Moduln gibt es eine kanonische kontravariante Form, die Shapovalov–Form. Diese Form zerfällt in eine direkte Summe von Formen auf $V(h,c)_n$. Aussagen über die Irreduzibilität der Verma–Moduln lassen sich auf Aussagen über die Shapovalov–Form zurückführen. Diese Form induziert eine Form auf $L(h,c)$ und somit auch auf $\mathbb{H}$. Eine Frage, die in [BPZ] nicht beantwortet wurde war die, ob diese Form positiv definit ist und man damit $\mathbb{H}$ zu einem Hilbertraum machen kann. In diesem Fall wäre die konforme Quantenfeldtheorie auch positiv im Sinne von Osterwalder–Schrader.

Gerade diese Bedingung der Unitarität hat die Entwicklung der konformen Quantenfeldtheorie im Sinne der axiomatischen Feldtheorie verzögert [Mack], es ist ein hochgradig nichttriviales Problem, unitäre Darstellungen der Virasoro–Algebra zu finden. Dieses Problem wurde erst von [GKO, FQS] gelöst. Es zeigte sich, daß die unitären Modelle eine Teilmenge der minimalen Modelle sind. Die erwähnten Modelle der statistischen Mechanik lassen sich mit bestimmten unitären Modellen identifizieren.

V. Kac stellte in [Kac1] eine Vermutung über die Determinanten der Shapovalov–Form als Funktion von (h,c) auf. Aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit von n im Kommutator (2) treten in dieser Determinante kompliziertere Terme auf als in vergleichbaren Determinantenformeln für Kac–Moody–Algebren [Kac2].

B. Feigin und D. Fuks gelang in [FF] ein Beweis dieser Determinantenformel. Inzwischen gibt es eine ganze Reihe von Beweisen für diese Formel [KR, TK]. Wir geben einen von [TK, RC1, Th] motivierten Beweis unter Verwendung von Ergebnissen aus Kapitel 4. (Die Ergebnisse dieses Kapitels sind selbstverständlich unabhängig von der Kac–Formel.)

Zur Konstruktion der konformen Felder:

V. Dotsenko und V. Fateev gelang es in [DF1], die konformen Felder zu realisieren. Dabei gingen sie vom freien bosonischen Feld Φ aus und fanden, daß die Korrelationen von $:e^{\Phi}:$ denen der konformen Theorie mit $c=1$ entsprechen. ($: \, :$ bezeichnet die Wick–Ordnung, ohne die das Exponential nicht existiert.) $:e^{\Phi}:$ bezeichnet man als (freien) Vertex–Operator. Durch geeignete Abschirmungen der Vertex–Operatoren konnten sie Realisierungen der Korrelationen konformer Felder für alle minimalen Modelle finden. In [DF2] verwendeten sie diese Realisierung, um Integraldarstellungen für die Vierpunktfunktionen der minimalen Modelle anzugeben.

G. Felder ging in [Fe1] weiter und realisierte die Vertex–Operatoren im bosonischen Fock–Raum, wie es üblicherweise in der Stringtheorie gemacht wird. Auch die Virasoro–Algebra läßt sich im Fock–Raum über Erzeuger– und Vernichter–Operatoren realisieren, man kann auf diese Weise Fock–Moduln vom Typ (h, c) definieren. Es liegt nun nahe, die Fock–Moduln als Ersatz von $L(h, c)$ zu verwenden.

Der Vorteil dieser Moduln ist, daß man eine kanonische Hilbertraumstruktur geschenkt bekommt und deshalb die Frage der Unitarität von Darstellungen zunächst keine Rolle spielt. Andererseits sind die Fock–Moduln komplizierter als die Verma–Moduln, sie sind i. A. auch keine Höchstgewichtsmoduln.

Bestimmte abgeschirmte Vertexoperatoren erfüllen dieselben Kommutatoren mit den Elementen von Vir wie die konformen Felder. Der entscheidende Fortschritt von G. Felder war nun, daß er die Beziehung zwischen den Verma–Moduln (oder den Moduln $L(h, c)$) und den Fock–Moduln der minimalen Modelle auf elegante Weise klären konnte: Er konnte zeigen, daß ein Ko–Rand–Operator Q zwischen bestimmten Fock–Moduln existiert, so daß $L(h, c)$ eine Kohomologiegruppe einer Sequenz von Fock–Moduln ist. Q wird auch als BRST–Operator bezeichnet (BRST steht für Becchi, Rouet, Stora und Tyupin), in der Stringtheorie werden BRST–Operatoren verwendet um den Zustandsraum frei von "Ghost–Zuständen" zu machen [Kaku]. Formal hat Q auch hier genau diese Funktion, aber nicht die physikalische Interpretation aus der Stringtheorie.

Weiter konnte G. Felder zeigen, daß die abgeschirmten Vertex–Operatoren Ketten–Abbildungen sind und sie damit Abbildungen auf $L(h, c)$ induzieren, die mit den konformen Feldern identifiziert werden können.

Zur mathematischen Genauigkeit der Arbeiten von V. Dotsenko, V. Fateev und G. Felder ist folgendes zu sagen: Die Arbeiten [DF1, DF2] sind physikalischer Natur, die erwähnte Identifizierung verwendet zur Berechung von Korrelationen von Vertex–Operatoren das Funktionalintegral. In der Arbeit [Fe1] wird auf das Funktionalintegral zugunsten der Realisierung der Vertex–Operatoren auf Fock–Moduln verzichtet. Die Vertex–Operatoren selber werden aber nur auf formale Weise behandelt.

Dies war der Ansatzpunkt und die Motivation dazu, die Vertex–Operatoren als Operatoren im Hilbertraum zu untersuchen und allgemeine Eigenschaften dieser Operatoren zu beweisen, die es unter anderem erlauben, die von G. Felder angegebene Konstruktion auf mathematisch korrekte Weise durchzuführen.

Wir beschreiben nun kurz den Inhalt der einzelnen Kapitel.

In Kapitel 1 führen wir die Verma– und Fock–Moduln ein. Wir definieren die Shapovalov–Form und geben Determinantenformeln an und geben einen Beweis, der Ergebnisse aus Kapitel 4 verwendet. Außerdem behandeln wir kurz die Ergebnisse über die Unitarität von Vir–Moduln.

In Kapitel 2 verwenden wir die Kac–Determinantenformel, um die Verma– und Fock–Moduln genauer zu analysieren. Es gibt in diesen Moduln eine ausgezeichnete Menge von Vektoren, die (ko–)singulären Vektoren. Im Falle der Verma–Moduln, die nur singuläre Vektoren enthalten, erzeugt jeder singuläre Vektor einen Untermodul, der wieder isomorph zu einem Verma–Modul ist. Mit Hilfe der Jantzen–Filtration klassifizieren wir die Verma–Moduln nach der Struktur der singulären Vektoren, gleichzeitig erhält man die Charakterisierung aller Untermoduln von und Homomorphismen zwischen Verma–Moduln.
Danach untersuchen wir die Fock–Moduln. Hier ist die Situation komplizierter, da die Fock–Moduln auch ko–singuläre Vektoren enthalten können und i. allg. auch keinen zyklischen Vektor besitzen. Auch die Fock–Moduln können wir nach der Struktur der (ko–)singulären Vektoren klassifizieren.
Die Ergebnisse von Kapitel 2 sind bis auf einen Fehler in der Klassifikation der Fock–Moduln in [FF] enthalten. Der Beweis der Klassifikation der Verma–Moduln verwendet aber andere (elementare) Methoden, die von [RCW] motiviert sind. Bei der Klassifikation der Fock–Moduln verwenden wir die Ideen aus [FF]. Diesen Teil kann man als Ausarbeitung von [FF] sehen.

In Kapitel 3 definieren wir die Vertex–Operatoren als unbeschränkte Operatoren im Fock–Raum. Wir zeigen, daß diese Operatoren unter gewissen Voraussetzungen dicht definiert sind und Produkte dieser Operatoren auf dichten Teilmengen existieren. Die Beziehung zur Virasoro–Algebra entsteht, wenn wir Kommutatoren zwischen (Produkten von) Vertex–Operatoren und Elementen der Virasoro–Algebra beweisen. Dann zeigen wir eine nützliche Faktorisierung der Vertex–Operatoren in einen Hilbert–Schmidt–Operator und einen diagonalen, selbstadjungierten Operator. Damit können wir die Vertex–Operatoren auf einen einfach zu charakterisierenden Definitionsbereich fortsetzen. Wir beenden dieses Kapitel mit einem Beweis, daß die Vertex–Operatoren nicht abschließbar sind.
Die Ergebnisse von Kapitel 3 sind teilweise veröffentlicht in [BC, Boe].

In Kapitel 4 führen wir die integrierten Vertex–Operatoren ein, die auch als abgeschirmt bezeichnet werden. Zunächst konstruieren wir so einen nichttrivialen Intertwiner zwischen gewissen Fock–Moduln; die Existenz dieses Intertwiners erlaubt den Beweis der Kac–Determinantenformel. Dann führen wir allgemeinere integrierte Vertex–Operatoren ein und zeigen, daß das Produkt von abgeschirmten Vertex–Operatoren unter bestimmten Voraussetzungen existiert.

In Kapitel 5 kommen wir zur Anwendung unserer Ergebnisse auf die minimalen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie. Nach einer kurzen Einleitung über die konforme Quantenfeldtheorie und die minimalen Modelle definieren wir die konformen Felder zwischen den Fock–Moduln. Dann definieren wir den Ko–Rand–Operator Q, der im wesentlichen der Intertwiner aus Kapitel 4 ist. Wir zeigen, daß eine Sequenz von Fock–Moduln existiert, deren Kohomologiegruppe der entsprechende irreduzible Vir–Modul ist. Wir definieren eine Hilbertraumstruktur auf der Kohomologiegruppe und zeigen, daß die konformen Felder mit Q kommutieren und dicht definierte Operatoren in den Kohomologiegruppen induzieren. Diese können wir mit den physikalischen konformen Feldern identifizieren, wir haben somit die primären Felder konstruiert.

Kapitel 1

Die Virasoro–Algebra

1.1 Definitionen

Die Virasoro–Algebra wurde von Physikern in der String–Theorie als die Moden–Algebra des Energie–Impuls Tensors entdeckt, vgl. S. Mandelstam, [Man]. Genau diese Rolle spielt sie auch in der konformen Quantenfeldtheorie. Konkret ist die Virasoro–Algebra die (eindimensionale) zentrale Erweiterung der Witt–Algebra, der Lie–Algebra der polynominalen Vektorfelder auf S^1. Die Virasoro–Algebra ist die komplexe Lie–Algebra gegeben durch

$$\mathrm{Vir} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}\, e_n \oplus \mathbb{C}\, z, \qquad [e_n, e_m] = (n-m)e_{n+m} + \frac{n^3-n}{12} z\delta_{n,-m}. \tag{1.1}$$

Mit $\mathrm{Vir}_\pm = \bigoplus_{n \gtrless 0} \mathbb{C}\, e_n$ und $H = \mathbb{C}\, z \oplus \mathbb{C}\, e_0$ haben wir eine Cartan–Zerlegung $\mathrm{Vir} = \mathrm{Vir}_- \oplus H \oplus \mathrm{Vir}_+$. Vir wird eine ($\mathbb{Z}$–)graduierte Lie–Algebra, wenn wir $\deg e_n = -n$ und $\deg z = 0$ setzen.

Wir wiederholen nun einige Begriffe der Darstellungstheorie.
Sei M ein Vir–Modul. M heißt graduiert, wenn $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} M_k$ mit $e_n(M_k) \subset M_{k-n}$ gilt. Ein graduierter Modul M heißt von endlichem Typ, falls $\dim M_k < \infty$ für alle k gilt. Zu jedem Modul M von endlichem Typ definieren wir den dualen Modul M' durch $e_n' = (e_n : M_k \longrightarrow M_{k-n})'$ und den kontragredienten Modul $\overline{M}$ durch $\bar{e}_n : (e_{-n} : M_k \longrightarrow M_{k+n})'$.

Sei $\mathfrak{U}(\mathrm{Vir})$ die universelle einhüllende Algebra von Vir. M heißt ein Höchstgewichtsmodul, wenn ein Vektor $v \in M_0$ mit $\mathfrak{U}(\mathrm{Vir})v = M$ und $\mathrm{Vir}_+ v = 0$ existiert. v wird als Höchstgewichtsvektor oder Vakuumvektor bezeichnet.

Seien $h, c \in \mathbb{C}$. Ein graduierter Vir–Modul M heißt vom Typ (h, c), wenn $zm = cm$ für alle $m \in M$ und $e_0 m = (h + j)m$ für $m \in M_j$ gilt. Jeder irreduzible graduierte Vir–Modul von endlichem Typ ist ein Modul vom Typ (h, c) für geeignete $h, c \in \mathbb{C}$. Ein von Null verschiedener Vektor $w \in M$ heißt singulärer Vektor (vom Typ (h, c)), falls $\mathrm{Vir}_+ \, w = 0$, $e_0 w = hw$ und $zw = cw$ gilt. Dual dazu heißt ein Vektor $w \in M$ vom Grad n kosingulärer Vektor, falls $w \notin \mathrm{Vir}_-(\bigoplus\limits_{k<n} M_k)$ gilt.

1.2 Die Verma–Moduln und die Kac–Formel

Wir definieren nun Verma–Moduln: Für $h, c \in \mathbb{C}$ ist $V(h, c)$ der Modul vom Typ (h, c), der als Vir_-–Modul ein freier Modul mit einem erzeugendem Element $v_{h,c} \in V(h, c)_0$ ist. Die Vektoren $e_{-j_1} \cdots e_{-j_s} v_{h,c}$, $j_1 \geq \cdots \geq j_s > 0$, $s \geq 0$ bilden dann eine Basis von $V(h, c)$. Es gilt $\dim V(h, c)_n = p(n)$, wobei $p(n)$ die Partitionsfunktion ist. Die Verma–Moduln haben die bemerkenswerte Eigenschaft der Ko–Universalität, d.h zu jedem Modul M mit einem singulären Vektor v vom Typ (h, c) gibt es genau einen Vir–Homomorphismus $V(h, c) \longrightarrow M$, der $v_{h,c}$ auf v abbildet. Dual dazu sind die kontragredienten Verma–Moduln universell, d.h. zu jedem Modul M mit einem singulären Vektor v vom Typ (h, c) gibt es genau einen Homomorphismus $M \longrightarrow \overline{V}(h, c)$, der v auf $\bar{v}_{h,c}$ abbildet.

Es gibt genau einen irreduziblen Höchstgewichtsmodul vom Typ (h, c), diesen Modul bezeichnen wir mit $L(h, c)$. Mit Hilfe der Verma–Moduln können wir diesen Modul konstruieren: Die Verma–Moduln sind, da sie von einem zyklischen Vektor erzeugt werden, unzerlegbar. Man überlegt sich leicht, daß $V(h, c)$ einen größten echten Untermodul $M(h, c)$ enthält, der durch

$$M(h, c) = \left\{ x \in V(h, c) : \mathfrak{U}(\mathrm{Vir})x \subset \bigoplus_{n>0} V(h, c)_n \right\}$$

gegeben ist. Es gilt dann $L(h, c) = V(h, c)/M(h, c)$.

Das wichtigste Hilfsmittel zur Untersuchung der Verma–Moduln ist die Shapovalov–Form bzw. die Shapovalov–Abbildung. Letztere ist einfach die kanonische Abbildung $S(h, c) : V(h, c) \longrightarrow \overline{V}(h, c)$. Setzen wir diese Abbildung in die (bilineare) duale Paarung $\overline{V}(h, c) \times V(h, c) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein, erhalten wir eine symmetrische Bilinearform $V(h, c) \times V(h, c) \longrightarrow \mathbb{C}$, die Shapovalov–Form, die wir ebenfalls mit $S(h, c)$ bezeichnen. Die fundamentale Eigenschaft der Shapovalov–Form ist

$$\mathrm{Rad}\, S(h, c) = M(h, c). \tag{1.2}$$

$S(h,c)$ zerfällt in eine direkte Summe von Bilinearformen auf $V(h,c)_n$, die wir mit $S_n(h,c)$ bezeichnen. Wegen (1.2) ist es äußerst interessant, genaue Information über $S(h,c)$ zu bekommen. Kac gelang es in [Kac1], die Determinante der Shapovalov–Formen $S_n(h,c)$ als Funktion von h und c anzugeben, der erste Beweis der Formel stammt von [FF]. Im Gegensatz zu dem “fermionischen” Beweis von [FF] werden wir einen “bosonischen” Beweis der Kac–Formel führen, der von [TK], [RC2] und [Th] motiviert ist. Es gibt zwei Varianten dieses Theorems.

Satz 1.2.1 *Es gilt mit Konstanten* $K_n \neq 0$

$$\det S_n(h,c)^2 = K_n^2 \prod_{r,s>0,\, rs\leq n} \Phi_{r,s}(h,c)^{p(n-rs)} \tag{1.3}$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi_{r,s}(h,c) \quad = \quad & \Big(h + \frac{1}{24}(r^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(rs-1)\Big) \times \\ & \Big(h + \frac{1}{24}(s^2-1)(c-13) + \frac{1}{2}(rs-1)\Big) + \frac{1}{16}(r^2-s^2)^2.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Die Variante ist:

Satz 1.2.2 *Es gilt mit* K_n *aus Satz 1.2.1*

$$\det S_n(h,c) = K_n \prod_{r,s>0,\, rs\leq n} (h-h_{r,s})^{p(n-rs)} \tag{1.5}$$

mit

$$\begin{aligned}h_{r,s} &= \frac{1}{4a}\Big((a+1)^2 - (ar+s)^2\Big) \\ &= \frac{1}{48}\Big((13-c)(r^2+s^2) + \sqrt{(c-1)(c-25)}(r^2-s^2) - 24rs + 2c - 2\Big)\end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei $a = 1/12(c-13) - 1/12\sqrt{(c-1)(c-25)}$ *gesetzt wurde.*

Die gemeinsame Idee der Beweise zu Satz 1.2.1 bzw. 1.2.2 ist die Konstruktion von Intertwinern zwischen gewissen Vir–Moduln. Der Beweis, den wir angeben werden, fällt mehr oder weniger aus den Resultaten aus Kapitel 3 und 4 ab. Insbesondere die Frage nach der Nichttrivialität der konstruierten Intertwiner ist im Vergleich zu [TK] einfacher beantwortet. Wir werden eine weitere Klasse von Vir–Moduln benötigen, die wir nun einführen.

1.3 Fock–Darstellungen der Virasoro–Algebra

Sei

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}a_n \oplus \mathbb{C}b \text{ mit } [a_n, a_m] = n\delta_{n,-m} \text{ und } [a_n, b] = 0$$

die Heisenbergalgebra. $\mathfrak{A}$ hat irreduzible, unitäre Darstellungen auf Hilberträumen $(\mathcal{H}(\alpha,\beta), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit folgenden Eigenschaften ([Put]):

(i) Alle a_n $(n \neq 0)$ werden dargestellt durch unbeschränkte, abgeschlossene, dicht definierte Operatoren, die wir wieder mit a_n bezeichnen. Es gibt einen dichten Teilraum $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \subset \cap_{n\in\mathbb{Z}} D(a_n)$, der invariant unter allen Elementen von $\mathfrak{A}$ ist.

(ii) Es existiert ein zyklischer Vektor $v_{\alpha,\beta} \in \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ mit $a_0 v_{\alpha,\beta} = \alpha v_{\alpha,\beta}$ und $b v_{\alpha,\beta} = \beta v_{\alpha,\beta}$.

(iii) Die Vektoren

$$\Phi_\eta := (\eta! I^\eta)^{-1/2} a_{-k}^{\eta_k} \cdots a_{-1}^{\eta_1} v_{\alpha,\beta}$$

für die Multiindizes $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ mit $\eta_i \geq 0$ und $\|\eta\| := \sum_{i=1}^{\infty} i\eta_i < \infty$ bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$. Dabei haben wir $\eta! = \prod \eta_i!$ und $I^\eta = \prod i^{\eta_i}$ gesetzt.

(iv) Es gilt für $k > 0$ und $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$

$$a_k \Phi_\eta = \sqrt{k\eta_k}\,\Phi_{\eta-e_k} \text{ und } a_{-k}\Phi_\eta = \sqrt{k(\eta_k+1)}\,\Phi_{\eta+e_k}$$

(v) $$D(a_{\pm k}) = \{\Phi = \sum_\eta c_\eta \Phi_\eta \ : \ \sum_\eta |c_\eta|^2(\eta_k+1) < \infty\}. \tag{1.7}$$

Als Hilberträume unterscheiden sich die $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ nicht, der einzige Unterschied liegt in der Darstellung von a_0 und b auf $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$, die durch Multiplikation mit α bzw. β gegeben ist. Das ist auch der Grund, weshalb das Skalarprodukt in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ nicht mit α und β indiziert ist.

Wir setzten $\mathcal{F}(\alpha,\beta) = \mathrm{Lin}\{\Phi_\eta : \|\eta\| < \infty\}$. $\mathfrak{A}$ besitzt eine kanonische Graduierung und durch $\deg \Phi_\eta := \|\eta\|$ wird $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ zu einem graduierten $\mathfrak{A}$–Modul. Es gilt $\mathcal{H}(\alpha,\beta)_n = \mathcal{F}(\alpha,\beta)_n = \mathrm{Lin}\{\Phi_\eta : \|\eta\| = n\}$ und $a_k : \mathcal{F}(\alpha,\beta)_n \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha,\beta)_{n-k}$. $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ wird als Fockraum bezeichnet. Wir definieren nun auf jedem $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ eine Darstellung der Virasoro–Algebra (damit wird die Bedeutung der bis jetzt unwichtigen Parameter α und β klar). Wir setzen $D(L_n(\alpha,\beta)) = \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ und

$$\begin{aligned} L_n(\alpha,\beta) &:= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{-k}a_{n+k} + n\beta a_n \qquad (n\neq 0) \\ L_0(\alpha,\beta) &:= \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)\,\mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}a_k, \qquad z(\beta) := (1-12\beta^2)\,\mathrm{Id}\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

$\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ ist invariant unter allen Operatoren $L_n(\alpha,\beta)$. Die Abbildung $e_n \mapsto L_n(\alpha,\beta)$, $z \mapsto z(\beta)$ liefert eine graduierte Darstellung von Vir vom Typ

$$(h,c) = (\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2), 1-12\beta^2), \tag{1.9}$$

was zum Beispiel in [KR] nachgerechnet wird. Der nichttriviale Anteil von $L_0(\alpha,\beta)$, $N = \sum_{k>0} a_{-k}a_k$, ist nichts anderes als der Teilchenzahloperator in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$, es gilt $N\Phi = n\Phi$ für $\Phi \in \mathcal{H}(\alpha,\beta)_n$ und $\bar{N}$ ist selbstadjungiert [Put], wobei $\bar{N}$ den Abschluß von N als Operator in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ bezeichnet. Wir werden im folgenden kurz L_n für $L_n(\alpha,\beta)$ schreiben, wenn klar ist, in welchem der Räume $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ sie operieren.

Bei den folgenden darstellungstheoretischen Untersuchungen der Vir–Moduln $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ werden wir uns meist auf den dichten Teilraum $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ einschränken. Es gilt wie bei den Verma–Moduln $\dim \mathcal{F}(\alpha,\beta)_n = p(n)$, trotzdem besteht ein wesentlicher Unterschied zu den Verma–Moduln: Es ist nicht klar (und im allgemeinen auch falsch), daß $v_{\alpha,\beta}$ ein Höchstgewichtsvektor für Vir ist, d.h daß $\mathfrak{U}(\mathrm{Vir})v_{\alpha,\beta} = \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ gilt. Wir werden diese Fragen noch im Detail untersuchen. Obwohl diese Moduln also i. allg. keine Höchstgewichtsmoduln für Vir sind, haben wir, falls (h,c) und (α,β) durch (1.9) verknüpft sind, auf Grund der Ko–Universalität der Verma–Moduln kanonische Homomorphismen $S'(\alpha,\beta) : V(h,c) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha,\beta)$, die durch $Xv_{h,c} \mapsto Xv_{\alpha,\beta}$ für $X \in \mathfrak{U}(\mathrm{Vir})$ gegeben sind. Aus der Universalität von $\overline{V}(h,c)$ erhalten wir Homomorphismen $S''(\alpha,\beta) : \mathcal{F}(\alpha,\beta) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$. Die Komposition $S''(\alpha,\beta)\circ S'(\alpha,\beta) : V(h,c) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$ ist ein Homomorphismus mit der Eigenschaft $v_{h,c} \mapsto \bar{v}_{h,c}$, es gilt folglich die Faktorisierung der Shapovalov–Abbildung

$$S(h,c) = S''(\alpha,\beta)\circ S'(\alpha,\beta) \text{ mit } h = \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) \text{ und } c = 1-12\beta^2. \tag{1.10}$$

Wenn wir im folgenden von $\det S'_n$ sprechen, meinen wir dabei die Determinante der Matrix, der S'_n bezüglich der Basen $\{L_{-n_k}\cdots L_{-1}v_{h,c}\}$ von $V(h,c)$ und $\{\Phi_\eta\}$ von $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ entspricht. Es gelten die folgenden Determinantenformeln.

Satz 1.3.1 *Es gilt mit Konstanten $K'_n, K''_n \neq 0$*

$$\begin{aligned}
\det S'_n(\alpha,\beta) &= K'_n \prod_{r,s\geq 0, rs\leq n} \Phi'_{r,s}(\alpha,\beta)^{p(n-rs)} && (1.11)\\
\det S''_n(\alpha,\beta) &= K''_n \prod_{r,s\geq 0, rs\leq n} \Phi''_{r,s}(\alpha,\beta)^{p(n-rs)} && (1.12)\\
\textit{mit } \Phi'_{r,s}(\alpha,\beta) &= \alpha + \frac{r}{2}\gamma_+ + \frac{s}{2}\gamma_- && (1.13)\\
\textit{und } \Phi''_{r,s}(\alpha,\beta) &= \alpha - \frac{r}{2}\gamma_+ - \frac{s}{2}\gamma_- && (1.14)
\end{aligned}$$

wobei $\gamma_\pm$ die Lösungen der Gleichung $\beta = \frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{1}$ sind.

Es ist klar, daß wegen (1.10) die Determinantenformeln eng zusammenhängen, denn es gilt natürlich auch $\det S_n(h,c) = \det S'_n(\alpha,\beta) \det S''(\alpha,\beta)$, falls (h,c) und (α,β) wie in (1.10) zusammenhängen. Satz 1.3.1 wurde zuerst von [TK] in dieser Form bewiesen, implizit ist er schon in [FF] enthalten.

1.4 Unitäre Darstellungen

Aus physikalischen Gründen ist man an unitären Darstellungen der Virasoro–Algebra interessiert. In diesem Fall ist der Energie–Impuls–Tensor $T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n+2} L_n$ für $|z| = 1$ hermitesch und für beliebige $z \in \mathbb{C}$ gilt $T(z)^* = T(\frac{1}{\bar{z}})$. (Diese Gleichung stimmt natürlich nur im Sinne der graduierten Moduln, im Rahmen der Hilbertraumtheorie gilt i. allg. nur "$\subset$". Es ist auch a priori nicht klar, ob $T(z)$ für $|z| \geq 1$ überhaupt einen dicht definierten Operator in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ definiert.)
Wir definieren eine anti–lineare Anti–Involution ω auf Vir durch $\omega(L_n) = L_{-n}, \omega(z) = z$ und $\omega([x,y]) = [\omega(x), \omega(y)]$.

Definition 1.4.1 *Eine sesquilineare Form $(\cdot,\cdot)$ auf einem* Vir*–Moduln M heißt kontravariant (bzgl. ω), wenn*

$$(X.m_1, m_2) = (m_1, \omega(X).m_2) \qquad (m_1, m_2 \in M, X \in \mathfrak{U}(\mathrm{Vir})) \tag{1.15}$$

gilt. Falls zusätzlich $(m,m) > 0$ für alle $m \neq 0$ gilt, heißt M unitärer Vir*–Modul.*

Die Unitarität einer Darstellung kann aus zwei Gründen verletzt sein:

(i) Es existiert ein $m \in M$ mit $(m, m) < 0$.

(ii) Es existiert ein $m \in M$, $m \neq 0$ mit $(m, m) = 0$.

Existieren in M nur Vektoren des zweiten Typs, so ist ${}^{M}\!/_{\mathrm{Rad}(\cdot,\cdot)}$ ein unitärer Modul. M heißt dann unitarisierbar. Wir können auf triviale Weise die bilineare Shapovalov–Form zu einer Sesquilinearform machen, indem wir der kanonischen Abbildung $S(h,c) : V(h,c) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$ die von $\lambda L_n \longmapsto \bar{\lambda} L_n$ erzeugte antilineare Involution vorschalten. Die so erzeugte Form auf $V(h,c)$ bezeichnen wir mit $(\cdot,\cdot)$. Die Frage, ob die Verma–Moduln unitär bzw. unitarisierbar sind, ist nicht ganz einfach zu beantworten. Elementar können wir sehen, daß für $c \geq 1$ und $h \geq 0$ $(\cdot,\cdot)$ positiv–semi–definit ist:
Es gilt, wenn wir in $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ als direkte Summe endlich dimensionaler Vektorräume adjungieren,

$$L_n(\alpha,\beta)^* = L_{-n}(\bar{\alpha}, -\bar{\beta}), \tag{1.16}$$

d.h. falls $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in i\mathbb{R}$ ist, gilt $L_n(\alpha,\beta)^* = L_{-n}(\alpha,\beta)$. In diesem Fall ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine kontravariante Form und $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ ein unitärer Vir–Modul.
Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
(\cdot,\cdot) : & V(h,c) \times V(h,c) \arrow[r] \arrow[d, "S'(\alpha,\beta)\times S'(\alpha,\beta)"'] & \mathbb{C} \arrow[d] \\
\langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathcal{F}(\alpha,\beta) \times \mathcal{F}(\alpha,\beta) \arrow[r] & \mathbb{C}
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

$\langle S'(\alpha,\beta)\cdot, S'(\alpha,\beta)\cdot\rangle$ definiert eine weitere kontravariante Form auf $V(h,c)$, da diese aber (bis auf Normierung) eindeutig ist und $\langle S'(\alpha,\beta)v_{h,c}, S'(\alpha,\beta)v_{h,c}\rangle = \langle v_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}\rangle = 1 = (v_{h,c}, v_{h,c})$ gilt, müssen beide Formen übereinstimmen. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle > 0$ gilt, folgt $(\cdot,\cdot) \geq 0$ für $h = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$, $c = 1 - 12\beta^2$, d.h. für $h \geq 0$ und $c \geq 1$.
Dies sind aber nicht alle unitarisierbaren Verma–Moduln:
Sei für $r, s, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$,

$$c(m) = 1 - \frac{6}{m(m+1)} \text{ und } h_{r,s} = \frac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}. \tag{1.18}$$

Es gilt der

Satz 1.4.2 *$V(h,c)$ ist genau dann unitär bzw. unitarisierbar, wenn entweder $h \geq 0$, $c \geq 1$ oder (h,c) von der Form (1.18) ist.*

Es ist offensichtlich $h \geq 0$ und $c \geq 0$ eine notwendige Bedingung für Unitarisierbarkeit, denn $(e_{-n}v_{h,c}, e_{-n}v_{h,c}) = 2nh + c\frac{n^3-n}{12}$ ist nur unter dieser Bedingung positiv für alle $n \geq 0$. Daß alle Verma–Moduln vom Typ $h \geq 0,\ c \geq 1$ unitarisierbar sind, haben wir bereits gesehen.

Im Falle $c < 1$ folgt aus einer detaillierten Untersuchung der Kac–Determinantenformel in einer Arbeit von D. Friedan, Z. Qiu und Z. Shenker [FQS], daß alle Moduln, deren Typen nicht in (1.18) vorkommen, Vektoren negativer Länge enthalten .

Die Unitarisierbarkeit der Moduln vom Typ (1.18) folgt aus der Goddard–Kent–Olive–Konstruktion [GKO],[KR]. Dort werden mit Hilfe der Sugawara Konstruktion aus unitären Darstellungen von affinen Algebren unitäre Darstellungen von Vir vom Typ (1.18) konstruiert. Diese Konstruktion spielt aber für unsere weiteren Untersuchungen keine Rolle, wir werden sie deswegen hier nicht genauer beschreiben.

Wenden wir uns nun den Fock–Moduln zu, die (1.18) entsprechen, d.h. insbesondere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. In diesem Fall ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ keine kontravariante Form für Vir. Wir können aber eine kontravariante Form auf $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ folgendermaßen einführen:
Sei J der selbstadjungierte idempotente Operator definiert durch $J\Phi_\mu = (-1)^{|\mu|}\Phi_\mu$ (wobei wie üblich $|\mu| = \sum \mu_i$ ist). Wir definieren eine neue Sesquilinearform auf $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ durch

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_J := \langle\cdot, J\cdot\rangle. \tag{1.19}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ ist zwar nicht positiv definit, aber immerhin nicht ausgeartet, d.h. falls $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \Longrightarrow x = 0$. $(\mathcal{H}(\alpha,\beta), \langle\cdot,\cdot\rangle_J)$ ist ein Krein–Raum ([Bo]), denn es gilt $\mathcal{H}(\alpha,\beta) = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, wobei $\mathcal{H}_+ = \overline{\mathrm{Lin}\{\Phi_\mu : |\mu| \text{ gerade}\}}$ und $\mathcal{H}_- = \overline{\mathrm{Lin}\{\Phi_\mu : |\mu| \text{ ungerade}\}}$ ist.
Wir können leicht den J–adjungierten Operator von a_n, den wir mit $a_n^\dagger$ bezeichnen, berechnen. Es gilt ([Bo], Lemma VI 2.1) $a_n^\dagger = Ja_n^* J = -a_{-n}$ für $n \neq 0$ und $a_0^\dagger = a_0$. Damit folgt $L_n(\alpha,\beta)^\dagger \supset L_{-n}(\bar\alpha,\bar\beta)$, d.h. für reelle α,β ist $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$ kontravariant.
Wenn wir mit $\mathcal{H}(\alpha,\beta)_0$ die Höchstgewichtskomponente von $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$, d.h. $\mathcal{H}(\alpha,\beta)_0 = \overline{\mathfrak{U}(\mathrm{Vir}).v_{\alpha,\beta}}$ bezeichnen, gilt für alle α,β, die (1.18) entsprechen,

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_J\Big|_{\mathcal{H}(\alpha,\beta)_0 \times \mathcal{H}(\alpha,\beta)_0} \geq 0,$$

da wir wieder ein kommutatives Diagramm wie in (1.17) erhalten. Diese Eigenschaft ist allerdings schwer zu verwenden, da wir keine handliche Beschreibung von $\mathcal{H}(\alpha,\beta)_0$ durch die Heisenbergalgebra besitzen. Diese Beschreibung werden wir erst in Kapitel 5 erhalten, wenn wir die Konstruktion von Felder vorstellen.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, daß wir, wie das folgende Beispiel zeigt, für nicht unitarisierbare Verma–Moduln i. allg. keine Krein–Raum Struktur bezüglich der Shapovalov–Form erwarten können.

Beispiel 1.4.3 *Sei $c = \frac{22}{5}$ und $h = -\frac{1}{5}$. Dann gilt*

$$(L_{-2}v_{h,c}, L_{-2}v_{h,c}) = \frac{7}{5}, \quad (L_{-1}L_{-1}v_{h,c}, L_{-1}L_{-1}v_{h,c}) = -\frac{12}{5}$$

und

$$(L_{-1}L_{-1}v_{h,c}, L_{-2}v_{h,c}) = -\frac{6}{5}.$$

$V(-\frac{1}{5}, \frac{22}{5})$ ist folglich nicht zerlegbar in die orthogonale Summe der Unterräume positiver bzw. negativer Vektoren.

1.5 Beweise der Determinantenformeln

Wir werden die Formeln (1.2.1), (1.2.2), (1.11) und (1.12) mit dem folgenden Satz beweisen, der ein Ergebnis aus Kapitel 4 ist, und die wesentliche Schwierigkeit im Beweis der Determinantenformel darstellt.
Sei $\gamma \in \mathbb{C}$, $r, s \in \mathbb{N}$. Es gibt Operatoren zwischen den Fockräumen

$$Q(\gamma; r, s) : \mathcal{H}(\alpha - r\gamma, \beta) \longrightarrow \mathcal{H}(\alpha, \beta), \quad D(Q(\gamma; r, s)) = \mathcal{F}(\alpha - r\gamma, \beta)$$

vom Grad rs, es gilt also genauer

$$Q(\gamma; r, s) : \mathcal{F}(\alpha - r\gamma, \beta)_n \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha, \beta)_{n+rs}.$$

Wir werden in Kapitel 4 eine explizite Konstruktion dieser Operatoren angeben und den folgenden Satz beweisen.

Satz 1.5.1 *Sei $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\gamma^2 \notin \mathbb{Q}$. Für $r, s \in \mathbb{N}$ setze $\beta = \dfrac{1}{\gamma} - \dfrac{\gamma}{2}$, $\alpha = \dfrac{r}{2}\gamma - \dfrac{s}{\gamma}$. Dann ist*

$$Q(\gamma; r, s) : \mathcal{F}(\alpha - r\gamma, \beta) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha, \beta)$$

ein nichttrivialer Intertwiner vom Grad rs, und

$$Q(\gamma; r, -s) : \mathcal{F}(-\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{F}(-\alpha + r\gamma, \beta)$$

ein nichttrivialer Intertwiner vom Grad $-rs$.

Aus Satz 1.5.1 folgt, daß unter den genannten Voraussetzungen $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ und $\mathcal{F}(-\alpha,\beta)$ einen singulären Vektor vom Grad rs enthalten.
Den konkreten Nutzen von Satz 1.5.1 für die Verma–Moduln zeigt:

Lemma 1.5.2 *Seien (h,c) und (α,β) durch (1.9) verknüpft. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(i) $V(h,c)$ ist irreduzibel.

(ii) $V(h,c)$ enthält keinen singulären Vektor von positivem Grad.

(iii) Die Shapovalov–Abbildung $S(h,c) : V(h,c) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$ ist ein Isomorphismus.

(iv) $\overline{V}(h,c)$ enthält keinen kosingulären Vektor von positivem Grad.

(v) Es gilt $\det S_n(h,c) \neq 0$ für alle $n \geq 0$.

(vi) Die Abbildungen $S'(\alpha,\beta) : V(h,c) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ und $S''(\alpha,\beta) : \mathcal{F}(\alpha,\beta) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$ sind Isomorphismen.

(vii) Es gilt $\det S'_n(\alpha,\beta) \neq 0$ und $\det S''_n(\alpha,\beta) \neq 0$ für alle $n \geq 0$.

(viii) Es gibt keine singulären oder kosingulären Vektoren in $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$.

(ix) $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ ist irreduzibel.

Der Beweis von Lemma 1.5.2 ist eine einfache Folgerung aus $\dim V(h,c)_n = \dim \overline{V}(h,c)_n = \dim \mathcal{F}(\alpha,\beta)_n$ und (1.2).
Nun ist klar, daß wir Nullstellen in der Kac–Determinante aller Verma–Moduln finden, die den Fockmoduln aus Satz 1.5.1 entsprechen.

Beweis der Determinantenformeln.
Da die Methoden, um aus Satz 1.5.1 die Determinantenformeln zu beweisen, bekannt sind, werden wir die Beweise hier nur skizzieren. Ausführlichere Beweise findet man in [KR], [TK] oder [CdG].
Zunächst sind die Sätze 1.2.1 und 1.2.2 äquivalent wegen

$$\Phi_{r,s}(h,c)\Phi_{s,r}(h,c) = (h-h_{r,s})^2(h-h_{s,r})^2 \text{ für } r \neq s \tag{1.20}$$

und

$$\Phi_{s,s}(h,c) = (h-h_{s,s})^2.$$

Es gibt auch eine Relation zwischen Satz 1.2.1 und Satz 1.3.1, es gilt

$$\Phi_{r,s}\left(h(\alpha,\beta),c(\beta)\right)\Phi_{s,r}\left(h(\alpha,\beta),c(\beta)\right)=\left(\Phi'_{r,s}(\alpha,\beta)\Phi'_{s,r}(\alpha,\beta)\Phi''_{r,s}(\alpha,\beta)\Phi''_{s,r}(\alpha,\beta)\right)^2. \qquad (1.21)$$

Satz 1.2.1 würde also aus Satz 1.3.1 folgen. Leider wird aber Satz 1.2.1 zum Beweis von Satz 1.3.1 benötigt.

Beweis von Satz 1.2.2.
Zunächst muß man sich überzeugen, daß beide Seiten von (1.5) den gleichen Grad als Polynom in h und c haben. Den Grad der rechten Seite von (1.3) bzw. (1.5) kann man unmittelbar ablesen.

Die folgende Überlegung liefert die Grade der linken Seite: Die Shapovalov–Form von zwei Basisvektoren $L_{-n_k}\dots L_{-1}v_{h,c}$ und $L_{-m_k}\dots L_{-1}v_{h,c}$ vom gleichen Grad in $V(h,c)$ ist der Eigenwert von $L_1\dots L_{n_k}L_{-m_k}\dots L_{-1}v_{h,c}$. Um den Eigenwert zu berechnen, muß man die Operatoren L_k $(k>0)$ mit (1.1) nach rechts bringen. Ein Faktor h bzw. c entsteht nur aus $[L_n,L_{-n}]=2nL_0+\frac{n^3-n}{12}z$. Deshalb hat die Shapovalov–Matrix auf der Diagonalen die Einträge mit dem höchsten Grad in h und c. Diese Grade kann man angeben, und eine einfache Rechnung zeigt, daß sie mit den Graden der rechten Seite übereinstimmen.
Es reicht also zu zeigen, daß in (1.5) die linke Seite durch die rechte Seite teilbar ist.

Als nächstes bestimmt man die Werte $h_{r,s}(c)$, die den Werten von α und β aus Satz 1.5.1 entsprechen. Man erhält genau die Ausdrücke (1.6). Da dann $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ einen singulären Vektor vom Grad rs enthält, muß nach Lemma 1.5.2 dies auch für $V(h_{rs}(c),c)$ gelten, und es muß $\det S_{rs}(h=h_{r,s}(c),c)=0$ sein, d.h. es muß $\det S_{rs}(hc)$ durch $(h-h_{r,s}(c))$ teilbar sein. Der singuläre Vektor in $V(h_{r,s}(c),c)$ erzeugt einen Untermodul W mit $\dim W_n=p(n-rs)$. Wegen (1.2) gilt $W\subset\ \mathrm{Rad}\ S(h_{r,s}(c),c)$, folglich muß $\det S_n(h,c)$ durch $(h-h_{r,s}(c))^{p(n-rs)}$ teilbar sein (vgl. [KR], Lemma 8.4). Da $r,s\in\mathbb{N}$ beliebig waren, folgt schon die Behauptung. □

Beweis von Satz 1.3.1.
Wir folgen hier [TK]. Wähle ein $\beta\in\mathbb{C}$. $\gamma_\pm$ seien die Lösungen von $\beta=\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{\gamma}{2}$ und es gelte $\gamma_\pm^2\notin\mathbb{Q}$. Dann hat für beliebige $\alpha\in\mathbb{Q}$ die Gleichung

$$\alpha+\frac{r}{2}\gamma_++\frac{s}{2}\gamma_-=0$$

höchstens eine Lösung $(r,s)\in\mathbb{Z}^2$. Sei nun $r,s\in\mathbb{N}$ und setze $\alpha_0=\alpha_{r,s}(\gamma)=\frac{r}{2}\gamma_++\frac{s}{2}\gamma_-$, $c=c(\beta)$ und $h_0=h(\alpha_0,\beta$. Dann besitzt $\det S_{rs}(h=h_0,c)$ eine einfache Nullstelle und wegen der Vorbemerkung ist damit schon klar, daß $M(h_0,c)$ nur von einem einzigen

singulären Vektor vom Grad rs erzeugt wird.
Es gilt also $M(h_0, c) \simeq V(h_0 + rs, c)$.

Aus Satz 1.5.1 erhalten wir einen Intertwiner vom Grad $-rs$

$$Q : \mathcal{F}(-\alpha_0, \beta) \longrightarrow \mathcal{F}(-\alpha_0', \beta)$$

mit $\alpha_0' = \alpha_{-r,s}(\gamma)$. Wir erhalten die Sequenz

$$V(h, c) \xrightarrow{S'(-\alpha_0,\beta)} \mathcal{F}(-\alpha_0, \beta) \xrightarrow{\quad Q \quad} \mathcal{F}(-\alpha_0', \beta),$$

denn es gilt $\deg(Q \circ S'(-\alpha_0, \beta)) = -rs$ und deswegen $Q \circ S'(-\alpha_0, \beta)v_{h,c} \in \mathcal{F}(-\alpha_0, \beta)_{-rs} = \{0\}$. Da Q nichttrivial ist, kann $S'(-\alpha_0, \beta)$ kein Isomorphismus sein, und es muß $\ker S'(-\alpha_0, \beta) = M(h_0, c)$ gelten. Es folgt $\dim \ker S'(-\alpha_0, \beta)_n = p(n - rs)$ und folglich ist $\det S_n(\alpha, \beta)$ durch $(\alpha + \alpha_0)^{p(n-rs)} = (\alpha + \frac{r}{2}\gamma_+ + \frac{s}{2}\gamma_-)^{p(n-rs)}$ teilbar. Durch Dualisierung folgt, daß $\det S''(\alpha, \beta)$ durch $(\alpha - \frac{r}{2}\gamma_+ - \frac{s}{2}\gamma_-)^{p(n-rs)}$ teilbar ist, denn es gilt

$$\Big(S''(\alpha, \beta) : \mathcal{F}(\alpha, \beta) \longrightarrow \overline{V}(h, c)\Big)' = S'(-\alpha, \beta) : V(h, c) \longrightarrow \mathcal{F}(-\alpha, \beta).$$

Wegen(1.21) ist klar, daß wir damit schon alle Teiler gefunden haben und Satz 1.3.1 ist bewiesen. □

Kapitel 2

Singuläre Vektoren in Virasoro–Moduln

In diesem Abschnitt wollen wir die Determinantenformeln verwenden, um tiefergehende Eigenschaften der Verma– und Fockmoduln zu beweisen. Das Hauptresultat ist dabei die Klassifikation der Moduln bezüglich der Struktur der singulären bzw. kosingulären Vektoren. Dazu verwenden wir Filtrationstechniken, die es erlauben, die Moduln immer weiter zu reduzieren.

In Höchstgewichts–Moduln der Virasoro–Algebra können entweder singuläre oder kosinguläre Vektoren auftreten. Verma–Moduln enthalten nur singuläre Vektoren und kontragrediente Verma–Moduln nur kosinguläre Vektoren. In Fock–Moduln treten dagegen im allgemeinen beide Typen auf. Die Kenntnis der Struktur der singulären Vektoren erlaubt zum einen die Konstruktion der irreduziblen Moduln, zum anderen die Klassifikation der Homomorphismen zwischen den Moduln.

2.1 Allgemeines

Zunächst möchten wir einige allgemeine Aussagen über singuläre Vektoren beweisen. Wir führen eine Parametrisierung von $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ ein: Für $r,s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}^*$ sei

$$c(t) = 6t + 13 + 6t^{-1} \text{ und } h_{r,s}(t) = \frac{(1+t)^2 - (s+tr)^2}{4t}. \tag{2.1}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß $\Phi_{r,s}(h_{r,s}(t), c(t)) = 0$ für $t \in \mathbb{C}^*$ gilt und daß umgekehrt alle Punkte (h,c) mit $\Phi_{r,s}(h,c) = 0$ auf einer solchen Kurve liegen. Wir werden gleich sehen, daß dann $V(h_{r,s}(t), c(t))$ einen singulären Vektor vom Grad rs enthält, was zunächst nur klar ist, falls die Shapovalov–Form in den Graden $n < rs$ nicht ausgeartet ist, d. h. falls $\det S_n(h_{r,s}(t), c(t)) \neq 0$ für $n < rs$ gilt.

Zunächst stellen wir uns eine andere Frage: Wann kann eine weitere Kurve $(h_{r',s'}(t'), c(t')) \subset \mathbb{C}^2$ mit $(r,s) \neq (r',s')$ und

$$c(t_0) = c(t_0') \text{ und } h_{r,s}(t_0) = h_{r',s'}(t_0')$$

existieren? Es ist leicht aus (2.1) zu sehen, daß t_0 dann rational sein muß.
Wir unterscheiden zwei Fälle: Sei $t = \pm q/p$ für $p, q \in \mathbb{N}$ und q und p relativ prim. Wir erhalten

$$(+) \quad c(q/p) = 25 + 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \quad h_{r,s}(q/p) = \frac{(p+q)^2 - (rq+sp)^2}{4pq} =: h^+_{r,s} \text{ und} \tag{2.2}$$

$$(-) \quad c(-q/p) = 1 - 6\frac{(p-q)^2}{pq}, \quad h_{r,s}(-q/p) = \frac{(rq-sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} := h^-_{r,s}, \tag{2.3}$$

d.h. es muß dann insbesondere entweder $c > 25$ oder $c < 1$ gelten. Bemerkenswerterweise treten in der zweiten Version der Kac–Determinantenformel (1.5) genau die Terme $h^-_{r,s}$ auf, wenn man dort in $h_{r,s}(c)$ c durch $c(-q/p)$ aus (2.3) ersetzt. Damit ist die Kac–Determinante von $V(h, c(-q/p))$ gegeben durch

$$\det S_n\left(h, c(-q/p)\right) = K_n \prod_{rs \leq n} \left(h - h^-_{r,s}\right)^{p(n-rs)}. \tag{2.4}$$

Genauso können wir die Kac–Determinante von $V(h, c(q/p))$ schreiben als

$$\det S_n\left(h, c(q/p)\right) = K_n \prod_{rs \leq n} \left(h - h^+_{r,s}\right)^{p(n-rs)}. \tag{2.5}$$

Dies wird im folgenden sehr nützlich sein, da wir nun die Nullstellen in der Kac–Determinante für Moduln mit mehr als einem singulären Vektor explizit angeben können.

Für die Fock–Moduln gilt Analoges zu dem eben gesagten, auch hier können wir eine Parametrisierung der singulären Vektoren einführen, die aus der entsprechenden Determinantenformel entspringt: Für $r, s \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{C}^*$ sei

$$\alpha(t) = \frac{s}{2}t - rt^{-1}, \qquad \beta(t) = \frac{1}{2}t + t^{-1}. \tag{2.6}$$

Die Determinanten der kanonischen Abbildungen $S'(\alpha,\beta) : V(h,c) \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ und $S''(\alpha,\beta) : \mathcal{F}(\alpha,\beta) \longrightarrow \overline{V}(h,c)$ sind parametrisiert durch γ mit $\beta = 1/\gamma - \gamma/2$. Es gilt $\Phi''(\alpha(t),\beta(t)) = 0$. Wir können durch eine einfache Rechnung die Punkte (α,β) bestimmen, die im Schnittpunkt mehrerer Kurven der Form (2.6) liegen. Wir erhalten für γ die Lösungen $\gamma_+ = i\sqrt{2p/q}$ und $\gamma_- = \sqrt{2p/q}$ mit relativ primen $p,q \in \mathbb{N}$ und völlig analog zu obigen Fällen:

$$(+) \quad \alpha_{r,s}(\gamma_+) = i\frac{rq+sp}{\sqrt{2pq}}, \quad \beta(\gamma_+) = i\frac{p-q}{\sqrt{2pq}}, \tag{2.7}$$

$$(-) \quad \alpha_{r,s}(\gamma_-) = \frac{rq-sp}{\sqrt{2pq}}, \quad \beta(\gamma_-) = \frac{q-p}{\sqrt{2pq}}. \tag{2.8}$$

Diese Fälle entsprechen genau denen für die Verma–Moduln mittels der Beziehungen $c = 1 - 12\beta^2$ und $h = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)$. Diese Nullstellen in den Determinanten entsprechen singulären Vektoren in den Moduln.

Lemma 2.1.1 *(i) Ist für ein $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ und $r,s \in \mathbb{N}$ $\Phi_{r,s}(h,c) = 0$, so enthält $V(h,c)$ einen singulären Vektor vom Grad rs.*

(ii) Ist für ein $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ und $r,s \in \mathbb{N}$ $\Phi''_{r,s}(\alpha,\beta) = 0$, so enthält $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ einen singulären Vektor vom Grad rs.

Beweis. (i):
Wir definieren $L_{h,c} : V(h,c) \longrightarrow V(h,c)$ durch $L_{h,c} = \sum_{k>0} L_k(h,c)$. $L_{h,c}$ ist definiert auf $V(h,c)$, denn für jedes $x \in V(h,c)_n$ gilt $L_{h,c}x = \sum_{k=1}^n L_k(h,c)x$.

$v \in V(h,c)$ ist offensichtlich genau dann ein singulärer Vektor, wenn $v \neq 0$ und $v \in \ker L_{h,c}$ gilt. Weiter hängt $L_{h,c} : V(h,c)_n \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{n-1} V(h,c)_k$ stetig (sogar polynominal) von h und c ab. Wir betrachten nun

$$\left(L_{h_{r,s}(t),c(t)}\right)_{rs} = L_{h_{r,s}(t),c(t)} : V(h_{r,s}(t),c(t))_{rs} \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{rs-1} V(h_{r,s}(t),c(t))_k$$

mit der Parametrisierung (2.1). Nach dem oben Gesagten gilt für alle t mit $t \notin \mathbb{Q}$

$$\dim\ker(L_{h_{r,s}(t),c(t)})_{rs} \geq 1.$$

Das muß dann aber auch für $t = \pm q/p$ gelten, denn die Injektivität von $L_{h_{r,s}(t),c(t)}$ für ein $t = \pm q/p$ müßte auf einer ganzen Umgebung von $t = \pm q/p$ gelten.

(ii) Der Beweis verläuft im wesentlichen analog, wenn man Folgendes berücksichtigt: Wir verwenden die Faktorisierung der Shapovalov–Abbildung über die Fock–Moduln

$$S(h,c) = S''(\alpha,\beta)S'(\alpha,\beta),$$

wobei $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ ein Modul vom Typ (h,c) ist. Wir müssen nach Nullstellen in $\det S''(\alpha,\beta)$ suchen, um singuläre Vektoren in $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ zu finden, denn in diesem Fall ist $\det S(h,c) = 0$ und $V(h,c)$ enthält nach (i) einen singulären Vektor, der durch $S'(\alpha,\beta)$ auf einen singulären Vektor in $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ abgebildet wird.

Genau wie in (i) funktioniert das bis auf eine Ausnahmemenge, die auf der reellen und komplexen Achse liegt, und mit der entsprechenden Abbildung

$$L_{\alpha,\beta} = \sum_{k>0} L_k(\alpha,\beta)$$

erschlagen wird. □

Interessanterweise gibt es in einem Fock-Modul nie zwei linear unabhängige singuläre Vektoren desselben Grades, es gilt genauer:

Lemma 2.1.2 ([TK]) $\mathfrak{S}_d = \Big\{(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2 : \ker\Big((L_{\alpha,\beta})_d\Big) \neq \{0\}\Big\}$ *ist eine algebraische Menge der Dimension* ≤ 1.

Beweis.
Wir verwenden die kanonische Basis $\{\Phi_\delta\}$ von $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$. Um die Wirkung von $L_{\alpha,\beta}$ auf der Basis einfacher hinzuschreiben, führen wir zunächst in den Ausdrücken für $L_n(\alpha,\beta)$ eine Wick–Ordnung durch (d.h. Erzeugeroperatoren links von Vernichteroperatoren) und erhalten für $n > 0$

$$L_n(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}a_{n+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} + (\alpha+n\beta)a_n. \tag{2.9}$$

Für $n < 0$ kann man einen ähnlichen Ausdruck herleiten, den wir aber hier nicht benötigen. Es folgt

$$\begin{aligned} L_n(\alpha,\beta)\Phi_\delta &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k(\delta_k+1)(n+k)\delta_{n+k}}\,\Phi_{\delta-e_{n+k}+e_k} \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k\delta_k(n-k)\delta_{n-k}}\,\Phi_{\delta-e_{n-k}-e_k} + (\alpha+n\beta)\sqrt{n\delta_n}\,\Phi_{\delta-e_n}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Daraus folgt für $L_{\alpha,\beta}\Phi_\delta$ mit $\|\delta\| = d$

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta}\Phi_\delta &= \sum_{n=1}^{d}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k(\delta_k+1)(n+k)\delta_{n+k}}\,\Phi_{\delta-e_{n+k}+e_n} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k\delta_k(n-k)\delta_{n-k}}\,\Phi_{\delta-e_{n-k}-e_k}+(\alpha+n\beta)\sqrt{n\delta_n}\,\Phi_{\delta-e_n}\Big\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

woran wir explizit sehen, daß $\mathfrak{S}_d$ eine algebraische Menge ist. Im folgenden werden wir die Abhängigkeit von Räumen und Operatoren von (α,β) nicht mehr mitführen.

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein: Sei $\mathcal{F}_d = \mathrm{Lin}\{\Phi_\delta : \|\delta\| = d\}$, $\mathcal{F}_d^j = \mathrm{Lin}\{\Phi_\delta : \|\delta\| = d, \delta_1 = j\}$, $\overline{\mathcal{F}}_d = \bigoplus_{l=0}^{d}\mathcal{F}_l$ und $\overline{\mathcal{F}}_d^j = \bigoplus_{l=0}^{d}\mathcal{F}_l^j$.

Es ist $\mathcal{F}_d^d = \mathbb{C}\Phi_{(d,0,0,\dots)}$, d.h $\dim\mathcal{F}_d^d = 1$. Außerdem ist $\dim\mathcal{F}_d^{d-1} = 0$. Es reicht also zu zeigen, daß $L\big|_{\bigoplus_{j=0}^{d-2}\mathcal{F}_d^j}$ injektiv ist. Wie man an (2.11) und

$$L(\mathcal{F}_d^k) \subset \bigoplus_{j=k-2}^{k+1}\overline{\mathcal{F}}_{d-1}^j \tag{2.12}$$

erkennt, reicht es sogar zu zeigen, daß

$$L(k) : \mathcal{F}_d^k \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_{d-1}^{k+1}, \qquad L(k) = \mathrm{pr}_{\overline{\mathcal{F}}_{d-1}^{k+1}} \circ L \tag{2.13}$$

für $k = 0,1,\dots,d-2$ injektiv ist:
Sei $\Psi = (\Psi_0,\Psi_1,\dots,\Psi_{d-2}) \in \bigoplus_{j=0}^{d-2}\mathcal{F}_d^j$ mit $L\Psi = \sum_{j=0}^{d-2}L\Psi_j = 0$. L ist injektiv als Abbildung $\mathcal{F}_d^{d-2} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}_d^{d-1}$, denn dort stimmt sie genau mit $L(d-2)$ überein, und es folgt $\Psi_{d-2} = 0$. Wir erhalten also $L\Psi = \sum_{j=0}^{d-3}L\Psi_j$ und $L\Psi_{d-3} \in \mathcal{F}_{d-1}^{d-4}\oplus\mathcal{F}_{d-1}^{d-3}\oplus\mathcal{F}_{d-1}^{d-2}$. Die Abbildung in den dritten Summanden ist $L(d-3)$, aus deren Injektivität folgt damit $\Psi_{d-3} = 0$. Induktiv erhalten wir aus diesen Argumenten $\Psi = 0$.

Es bleibt also die Injektivität von $L(k)$ zu zeigen. Sei $\Phi_\delta \in \mathcal{F}_d^k$. Es gilt

$$L(k)\Phi_\delta = \sum_{n=1}^{l}\sqrt{(k+1)(n+1)\delta_{n+1}}\,\Phi_{\delta-e_{n+1}+e_1}. \tag{2.14}$$

Jeder Basisvektor in $\overline{\mathcal{F}}_{d-1}^{k+1}$ tritt höchstens im Bild eines Basisvektors aus $\mathcal{F}_d^k$ auf, denn ist $\langle\Phi_\varepsilon, L(k),\Phi_\delta\rangle \neq 0$ und $\|\varepsilon\| = d-l$, so gilt $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots) = (k+1,\varepsilon_2,\dots)$ und $\delta = (k,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_l,\varepsilon_{l+1}+1,\dots)$. Damit muß $L(k)$ injektiv sein. $\square$

Die Aussage von Lemma 2.1.2 gilt in äquivalenter Form auch für die Verma–Moduln, es gibt aber keinen so elementaren Beweis für diese Behauptung, da die Kommutatoren der Virasoro–Algebra viel komplizierter sind als die der Heisenbergalgebra. Deshalb folgt das erst aus der Klassifizierung der Verma–Darstellungen.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einer elementaren Dualitätsaussage für Vir–Moduln und ihre kontragredienten Moduln:

Lemma 2.1.3 *Sei M ein $\mathbb{Z}$–graduierter Vir–Modul von endlichem Typ (d.h. $M = \oplus M_n$ und $\dim(M_n) < \infty$), und $\overline{M}$ sein kontragredienter Modul. Dann sind äquivalent:*

(i) M_n enthält einen singulären Vektor vom Grad n,

(ii) $\overline{M}_n$ enthält einen kosingulären Vektor vom Grad n.

Beweis.
Seien L_k die Generatoren von Vir in der Darstellung auf M und $\overline{L}_k$ die entsprechenden Generatoren auf $\overline{M}$. Sei

$$L_+ = \sum_{k=1}^{n} L_k : M_n \longrightarrow \bigoplus_{l<n} M_l,$$

und

$$\overline{L}_- = \sum_{k=1}^{n} \overline{L}_{-k} : \bigoplus_{l<n} \overline{M}_l \longrightarrow \overline{M}_n.$$

Die Abbildungen L_+ und $\overline{L}_-$ sind zueinander dual, woraus die Behauptung folgt. □

Aus Lemma 2.1.3 folgt sofort, daß die kontragredienten Verma–Moduln $\overline{V}(h,c)$ abgesehen von dem Höchstgewichtsvektor keine singulären, sondern nur kosinguläre Vektoren enthalten, da Verma–Moduln nur singuläre und keine kosinguläre Vektoren enthalten. Insbesondere besitzen reduzible Moduln $\overline{V}(h,c)$ keinen zyklischen Höchstgewichtsvektor.

2.2 Die Struktur der Verma–Moduln

2.2.1 Die Jantzen–Filtration in $V(h,c)$

Wir verwenden hier [RC1] und [RCW]. Sei $(.,.)_{h,c} = S_{h,c}(.,.)$ die Shapovalov Form auf $V(h,c)$ und sei $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ fest gewählt. Sei $V = \mathfrak{U}(N_-) = \mathfrak{U}(\mathrm{Lin}\{L_n : n < 0\})$ und seien V_n die Elemente vom Grad n in der kanonischen Graduierung von V. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert ein Vektorraumisomorphismus

$$\begin{aligned} i_z : V(h+z,c) &\longrightarrow V \\ w.v_{h+z,c} &\longmapsto w, \end{aligned}$$

wobei $v_{h+z,c}$ der Höchstgewichtsvektor von $V(h+z,c)$ ist. Wir definieren eine Vir–Modulstruktur auf V durch

$$\pi_z(X).w := i_z X.i_z^{-1} w \tag{2.15}$$

für $X \in \mathrm{Vir}$, $w \in V$. Es ist offensichtlich $(V,\pi_z) \simeq V(h+z,c)$ als Vir–Moduln. Wir definieren die Shapovalov–Form auf V durch

$$B_z(w_1,w_2) := (i_z^{-1}w_1, i_z^{-1}w_2)_{h+z,c}$$

für $w_1, w_2 \in V$. $B_{z,n}$ sei die Einschränkung von B_z auf V_n.

Sei $\mathcal{O}(V)$ die Menge aller Keime in Null analytischer Funktionen mit Werten in einem endlichdimensionalen Teilraum von V und sei $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ die Menge der Keime in Null analytischer Funktionen mit Werten in $\mathbb{C}$.

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{O}_k(V) := \left\{ f \in \mathcal{O}(V) : B_z(f(z),w) \in z^k\mathcal{O}(\mathbb{C}) \text{ für alle w } \in V \right\}, \tag{2.16}$$

$$V_{(k)} := \{f(0) : f \in \mathcal{O}_k(V)\} \tag{2.17}$$

und $J_k := i_0^{-1}(V_{(k)})$. Es gilt $V_{h,c} = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$ und $\bigcap_{k\geq 0} J_k = \{0\}$, denn $B_{z,n}$ ist für jedes n ein Polynom in h und c.
Außerdem ist jedes J_k ein Untermodul, denn ist $v \in J_k$, $X \in \mathrm{Vir}$, so existiert zu $v' = i_0 v$ ein Keim $f \in \mathcal{O}_k(V)$ mit $f(0) = v'$, und wegen $B_z(X.f(z),w) = B_z(f(z),X.w) \in z^k\mathcal{O}_k(\mathbb{C})$ für alle $w \in V$ folgt $X.f \in \mathcal{O}_k(V)$ oder $X.v \in J_k$.

$\{J_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ ist damit eine absteigende Filtration in $V(h,c)$, die Jantzen–Filtration. Wir wollen diese Filtration nun etwas genauer untersuchen.

2.2.2 Hilfsmittel

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $S_z \in \mathcal{O}(\mathrm{End}(V))$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$\mathcal{O}_k^S(V) := \left\{ f \in \mathcal{O}(V) : S_z f(z) = z^k g(z), g \in \mathcal{O}(V) \right\}$$

als die Keime, die unter S_z mit der Ordnung $\geq k$ in Null verschwinden, und

$$V_k^S = \left\{ f(0) : f \in \mathcal{O}_k^S(V) \right\}.$$

Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $f(z) = \sum_{i \geq 0} f_i z^i$ sei $\mathrm{ord}_0 f := \min\{i : f_i \neq 0\}$. Wir bestimmen zuerst eine Normalform für S_z.

Lemma 2.2.1 *Sei $e_1, \dots e_n$ eine Basis von V. Weiter sei $S_z \in \mathcal{O}(\mathrm{End}(V))$ und es existiere ein $\varepsilon > 0$ so, daß S_z bijektiv für $z \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ ist. Dann gibt es $L_z, R_z \in \mathcal{O}(\mathrm{End}\, V)$, so daß $\det L_z$ und $\det R_z$ konstant und ungleich Null sind und $L_z S_z R_z$ bezüglich der Basis $\{e_i\}$ durch die Diagonalmatrix*

$$D_z = \begin{pmatrix} s_1(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_n(z) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \mathrm{ord}_0 s_1 \leq \ldots \leq \mathrm{ord}_0 s_n$ gegeben ist.

Beweis.
Sei $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{k,l} \in M_{n,n}$, $P_{i,j} = \mathrm{Id} - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ und $Q_{i,j}(\beta(z)) = \mathrm{Id} + \beta(z)E_{i,j}$. (Linksmultiplikation mit $P_{i,j}$ vertauscht i-te und j-te Zeile, Rechtsmultiplikation mit $P_{i,j}$ die entsprechenden Spalten, es ist $\det P_{i,j} = 1$ und $\det Q_{i,j}(\beta) = 1 + \delta_{i,j}\beta$.)
Wir führen den Beweis durch Induktion nach n: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei $n > 1$ und seien $s_{i,j}(z)$ die Matrixelemente von S_z bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Es existieren k, l mit $\mathrm{ord}_0 s_{k,l} \leq \mathrm{ord}_0 s_{i,j}$ für alle i, j. Die Matrix $C_z := P_{1,k} S_z P_{1,l}$ hat $s_{k,l}$ in der ersten Zeile und Spalte. Für die Matrixelemente $c_{i,j}(z)$ von C_z gilt $\frac{c_{i,j}}{c_{1,1}} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Wir multiplizieren C_z von links mit

$$T_z = Q_{n,1}(-\frac{c_{n,1}(z)}{c_{1,1}(z)}) \cdots Q_{2,1}(-\frac{c_{2,1}(z)}{c_{1,1}(z)})$$

und von rechts mit

$$U_z = Q_{1,2}(-\frac{c_{1,2}(z)}{c_{1,1}(z)}) \cdots Q_{1,n}(-\frac{c_{1,n}(z)}{c_{1,1}(z)}).$$

Die resultierende Matrix hat in der ersten Zeile und Spalte bis auf $c_{1,1}$ nur Nullen als Einträge, wir können also auf die Abbildung $\tilde{S}$, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht, die Induktionsvoraussetzung anwenden, und erhalten $\tilde{L}_z\tilde{S}_z\tilde{R}_z = \tilde{D}_z$. Wir erhalten insgesamt $(1 \oplus \tilde{L}_z)T_zP_{1,k}S_zP_{1,l}U_z(1 \oplus \tilde{R}_z) = D_z$ als Normalform für S_z, die alle gewünschten Eigenschaften hat. $\square$

Damit können wir die folgende wichtige Beziehung beweisen:

Lemma 2.2.2 *Sei* $S_z \in \mathcal{O}(\mathrm{End}(V))$ *und* $\det S_z \neq 0$ *für* $z \in U_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$*. Dann gilt*

$$\sum_{k\geq 1} \dim V_k^S = \mathrm{ord}_0 \det S_z. \tag{2.18}$$

Beweis.
Nach Lemma 2.2.1 existieren L_z und R_z mit

$$D_z = L_zS_zR_z = \begin{pmatrix} s_1(z) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_n(z) \end{pmatrix},$$

und mit $\alpha_i := \mathrm{ord}_0\, s_i(z)$ gilt $\mathrm{ord}_0 \det S_z = \mathrm{ord}_0\, D_z = \sum \alpha_i$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_k^D(V) &= \Big\{h \in \mathcal{O}(V) : D_zh(z) = z^kg(z), g \in \mathcal{O}(W)\Big\} \\ &= \Big\{h \in \mathcal{O}(V) : L_zS_zR_zh(z) = z^kg(z), g \in \mathcal{O}(W)\Big\} \\ &= \Big\{R^{-1}f \in \mathcal{O}(V) : L_zS_zf(z) = z^kg(z), g \in \mathcal{O}(W)\Big\} \\ &= \Big\{R^{-1}f \in \mathcal{O}(V) : S_zf(z) = z^k\tilde{g}(z), \tilde{g} \in \mathcal{O}(W)\Big\}, \end{aligned}$$

denn $S_zf(z) = z^kg(z) \Longleftrightarrow L_zS_zf(z) = z^kL_zg(z) =: z^k\tilde{g}(z)$. Wir haben damit gezeigt, daß $V_k^D = R_0^{-1}V_k^S$ gilt. Wir wählen nun für $j = 1,\ldots,n$ $h_j \in \mathcal{O}(V)$ mit $h(0) = e_j$. Es folgt $D_zh_j(z) = z^{\alpha_j}g(z)$ und $V_k^D = \sum_{\alpha_j\geq k} \mathbb{C}e_j$. Wir erhalten $\dim V_k^S = \dim V_k^D = \sharp\{j : \alpha_j \geq k\}$ und schließlich

$$\sum_{k\geq 1} \dim V_k^S = \sum_{k\geq 1} \sharp\{j : \alpha_j \geq k\} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_j = \mathrm{ord}_0 \det S_z.$$

$\square$

Sei weiter $(.,.)$ eine nichtdegenerierte, symmetrische Bilinearform auf V mit $(S_z v, w) = (v, S_z w)$ für alle $v, w \in V$. Wir möchten nun eine Form auf V_k^S definieren. Dazu setzen wir $T_z(v,w) = (S_z v, w)$. Es ist offensichtlich $T_z \in \mathcal{O}(\mathrm{Hom}(V \times V, \mathbb{C}))$.
Für $f, g \in \mathcal{O}(V)$ setzen wir $\langle f, g\rangle(z) \equiv \langle f(z), g(z)\rangle := T_z(f(z), g(z))$, und für $f, g \in \mathcal{O}_k^S(V)$ setzen wir $\langle f, g\rangle_k(z) := z^{-k}\langle f, g\rangle(t)$.

$\langle f, g\rangle_k(0)$ hängt nur von $f(0)$ und $g(0)$ ab: Für $f, g \in \mathcal{O}_k^S(V)$ mit $S_z g(z) = z^k \tilde{g}(z)$, $f(0) = 0$ und deshalb $f(z) = zh(z)$ für ein $h \in \mathcal{O}(V)$ folgt

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_k(z) &= z^{-k}\langle f, g\rangle(t) = z^{-k} T_z(f(z), g(z)) \\ &= z^{-k}(f(z), S_z g(z)) = z(h(z), \tilde{g}(z)) \stackrel{z \to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist für $v, w \in V_k^S$, $v = f(0)$ und $w = g(0)$

$$\langle v, w\rangle_k := \langle f, g\rangle_k(0) \tag{2.20}$$

wohldefiniert, und, wie man an (2.19) sieht, gilt $\langle V_k^S, V_{k+1}^S\rangle = 0$. Konsequenterweise induziert $\langle .,.\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V_k^S / V_{k+1}^S, die wir ebenfalls mit $\langle .,.\rangle_k$ bezeichnen.

Lemma 2.2.3 *Sei S_z wie vorher. Dann ist $\langle .,.\rangle_k$ nichtdegeneriert auf ${}^{V_k^S}\!/_{V_{k+1}^S}$, d.h. es gilt* $\mathrm{Rad}\langle .,.\rangle_k = V_{k+1}^S$.

Beweis. Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie im vorherigen Lemma. Sei $v_i := R_0 e_i$ und $f_i(z) := R_z e_i$. Dann ist $V_k^S = \sum_{\alpha_i \geq k} \mathbb{C} v_i$.
Ist nun $\alpha_i = k$ und $\alpha_j \geq k$ für ein $i \neq j$, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_j\rangle_k(z) &= z^{-k}(S_z R_z e_i, f_j(z)) \\ &= z^{-k}(L_z^{-1} s_i(z) e_i, f_j(z)) \\ &= (L_z^{-1} \tilde{s}_i(z) e_i, f_j(z)), \end{aligned} \tag{2.21}$$

wobei wir $s_i(z) = z^k \tilde{s}(z)$ gesetzt haben. Mit $w_i := L_0^{-1} \tilde{s}_i(z) e_i$ folgt $\langle v_i, v_j\rangle_k = (w_i, v_j)$, und für $\alpha_j > k$ ist $0 = \langle v_i, v_j\rangle = (w_i, v_j)$. Da $V = \sum \mathbb{C} w_i$ ist folgt insgesamt, daß die Matrix $(w_i, v_j)_{i,j}$ die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{W_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \boxed{W_l} \end{pmatrix} \quad \text{mit } W_k = \{(w_i, v_j)_{i,j} : \alpha_i = \alpha_j = k\}$$

hat. Da $(.,.)$ nicht ausgeartet ist, folgt $0 \neq \det((W_i, v_j)_{i,j}) = \prod \det W_k$ und deshalb $\det W_k \neq 0$, falls $V_k^S \neq V_{k+1}^S$. Insgesamt gilt, wenn wir $\langle .,. \rangle_k$ als Form auf ${}^{V_k^S}/_{V_{k+1}^S}$ auffassen, $\det\langle .,. \rangle_k = \det W_k \neq 0$ falls $V_k^S \neq V_{k+1}^S$. □

Kommen wir nun zurück zur Shapovalov-Form: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $B_{z,n} : V_n \times V_n \longrightarrow \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform. Sei $(.,.)_n$ das kanonische Skalarprodukt auf V_n. Es gibt genau ein $\tilde{B}_{z,n} \in \mathcal{O}(\operatorname{End} V_n)$ mit $B_{z,n}(v,w) = (\tilde{B}_{z,n} v, w) = (v, \tilde{B}_{z,n} w)$ für alle $v, w \in V_n$. Weiter haben wir $\mathcal{O}_k(V_n) = \mathcal{O}_k^{\tilde{B}_{z,n}}(V_n)$. Wir können also die Lemmata 2.2.1, 2.2.2 und 2.2.3 auf $\tilde{B}_{z,n}$ für jedes n anwenden und erhalten für die Jantzen–Filtration von $V(h,c)$:

Satz 2.2.4 *Die Jantzen–Filtration $V(h,c) = J_0 \supset J_1 \supset \ldots$ der Verma–Moduln hat folgende Eigenschaften:*

(i) Die Shapovalov–Form $S_{h,c}(.,.)$ definiert eine invariante, nicht–degenerierte Form $\langle .,. \rangle_k$ auf den irreduziblen Quotienten–Moduln J_k/J_{k+1}.

(ii) Sei $J_k = \bigoplus_{n\geq 0} J_{k,n}$ und $S_{h,c}(.,.) = \bigoplus_{n\geq 0} S_{h,c,n}(.,.)$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{ord}_{z=0}(\det S_{h+z,c,n}(.,.)) = \sum_{k\geq 0} \dim J_{k,n}. \tag{2.22}$$

Beweis.
Die Invarianz von $\langle .,. \rangle_k$ folgt sofort aus (2.20) und der Invarianz der Shapovalov–Form. Es bleibt zu zeigen, daß J_k/J_{k+1} irreduzibel ist. Ist $J_k \neq J_{k+1}$, so folgt das genau wie für $V(h,c)$ und $S_{h,c}(.,.)$, wo man zeigt, daß der größte echte Untermodul genau $\operatorname{Rad} S_{h,c}(.,.)$ ist. Hier erhalten wir als größten echten Untermodul von J_k genau J_{k+1}. Die übrigen Aussagen folgen direkt aus Lemma 2.2.2 und Lemma 2.2.3. □

2.2.3 Der Klassifikationssatz für Verma–Moduln

Wir haben nun die nötigen Hilfsmittel bereit, um die Verma–Moduln zu klassifizieren. Dazu benötigen wir die folgende Fallunterscheidung, die sich an [FF] anlehnt. Seien $(h,c) \in \mathbb{C}^2$ beliebig. Wir unterscheiden:

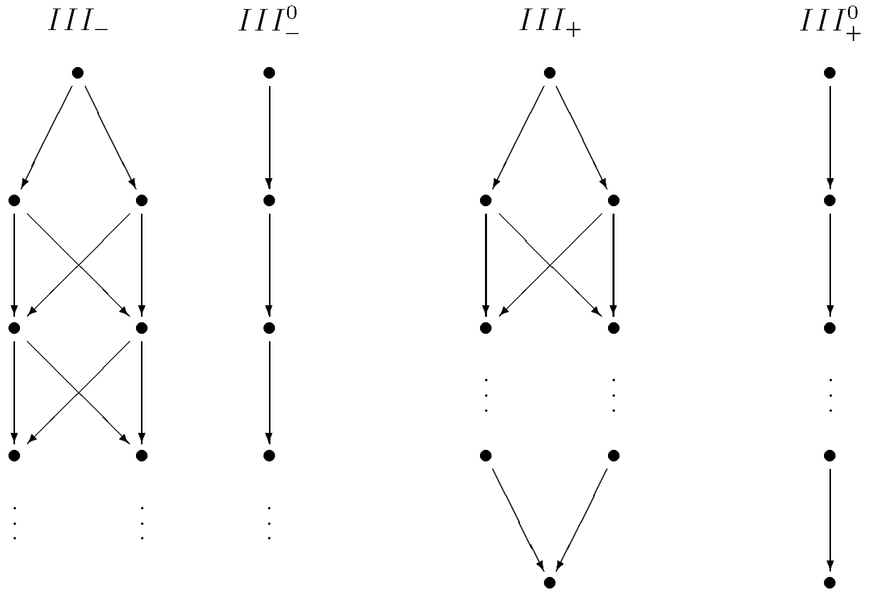
I : $\Phi_{r,s}(h,c) = 0$ hat keine ganzzahlige Lösung r, s.

II : $\Phi_{r,s}(h,c) = 0$ hat eine ganzzahlige Lösung r, s mit $rs > 0$ (II_+) oder $rs \leq 0$ (II_-).

III : $\Phi_{r,s} = 0$ hat unendlich viele ganzzahlige Lösungen, d.h es ist entweder $c < 1$ (III_-) oder $c > 25$ (III_+) und c und h sind durch (2.1) gegeben.
Wir unterscheiden weiter
III_-, III_+: $r \not\equiv 0 \bmod p$ und $s \not\equiv 0 \bmod q$,
III_-^0, III_+^0: $r \equiv 0 \bmod p$ oder $s \equiv 0 \bmod q$.

Das Ziel dieses Abschnittes ist der folgende Satz:

Satz 2.2.5 *Die Verma–Moduln sind im Fall I und II_- irreduzibel, und enthalten im Fall II_+ genau einen singulären Vektor, der den größten echten Untermodul erzeugt. Für die anderen Fälle gilt:*



Dabei entsprechen Punkte singulären Vektoren in dem Modul, und ein Pfeil geht von einem Punkt zu einem zweiten Punkt, wenn der zweite Vektor in dem vom ersten Vektor erzeugten Untermodul liegt. Der größte echte Untermodul ist im Fall III_-^0 und III_+^0 von einem, im Fall III_- und III_+ von zwei singulären Vektoren erzeugt.

Bemerkung 2.2.6 *Im Fall III_- mit $0 < r < p$ und $0 < s < q$ kann man die Gewichte und Grade der singulären Vektoren explizit angeben. Mit dem Gewicht eines Vektors w meinen wir den L_0–Eigenwert von w, den wir mit $\mathrm{wt}(w)$ bezeichnen. Aus diesen Moduln ist der Zustandsraum der minimalen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie zusammengesetzt.*

$$\begin{tikzcd}
& w_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w_1 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_2 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_3 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_4 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_5 & & w_6 \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Die singulären Vektoren numerieren wir wie im Bild angegeben. Wir erhalten dann für $V(h_{r,s}(-q/p), c(-q/p))$ und $i \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}(w_{4i}) &= h^-_{r,s+2iq}, \\
\mathrm{wt}(w_{4i+1}) &= h^-_{r,-s+2(i+1)q}, \\
\mathrm{wt}(w_{4i+2}) &= h^-_{r,-s-2iq}, \\
\mathrm{wt}(w_{4i+3}) &= h^-_{r,s-2(i+1)q}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Die Grade sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
\deg(w_{4i}) &= (ip-r)(iq+s)+rs, \\
\deg(w_{4i+1}) &= ((i+1)p-r)((i+1)q-s), \\
\deg(w_{4i+2}) &= (ip+r)(iq+s), \\
\deg(w_{4i+3}) &= ((i+1)p+r)((i+1)q-s)+rs.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Wir bezeichnen mit $[w_i]$ den von w_i erzeugten Untermodul. Aus den Gleichungen (2.23) folgt $[w_{4i}] \simeq V(h^-_{r,s+2iq}, c(-q/p))$ (analog für die anderen singulären Vektoren), denn jeder durch einen singulären Vektor erzeugte Untermodul ist frei über Vir_+ und somit wieder ein Verma–Modul. An Gl. (2.24) erkennen wir, daß die Vektoren w_{4i} für $i > 0$ und w_{4i+3} für $i \geq 0$ nicht auf Kurven der Form (2.1) durch $V(h^-_{r,s}, c(-q/p))$ liegen, da die entsprechenden Grade nicht faktorisieren. Diese Vektoren entstehen als singuläre Vektoren von Untermoduln, z.B. liegen sie auf Kurven der Form (2.1) durch $V(h^-_{r,s} + rs, c(-q/p)) \simeq [w_2]$.
Feigin und Fuks haben in [FF] einen Beweis für Satz 2.2.5 angegeben, der Methoden der algebraischen Geometrie verwendet. Wir werden im folgenden sehen, daß man Satz 2.2.5 auch mit elementaren Methoden beweisen kann, wenn man konkrete Eigenschaften der $h_{r,s}$ und die Aussagen über die Jantzen–Filtration von Satz 2.2.4 verwendet. Da die Fälle I und II trivial sind, können wir in den verbleibenden Fällen die Determinantenformeln (2.4) und (2.5) verwenden. Damit sind die Aussagen über singuläre Vektoren auf einfache Aussagen über $h^\pm_{r,s}$ zurückgespielt. Wir müssen dazu einfach feststellen, auf welchen Levels in der Kac–Determinante neue Nullstellen auftauchen. Anders gesagt, wir müssen bestimmen, wann $h^\pm_{r,s} = h^\pm_{m,n}$ gilt.

Lemma 2.2.7

$$h^+_{r,s} = h^+_{m,n} \Longleftrightarrow \begin{cases} m = r - kp,\ n = s + kq & \textit{für } k \in \mathbb{Z} \\ \textit{oder} & \\ m = -r - kp,\ n = -s + kq & \textit{für } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.25}$$

$$h^-_{r,s} = h^-_{m,n} \Longleftrightarrow \begin{cases} m = r + kp,\ n = s + kq & \textit{für } k \in \mathbb{Z} \\ \textit{oder} & \\ m = -r + kp,\ n = -s + kq & \textit{für } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{2.26}$$

Der Beweis ist eine triviale Rechnung. □

Beweis von Satz 2.2.5

Da $h^-_{r,s} = h^-_{-r,-s} = h^-_{r+p,s+q}$ gilt, können wir uns im Fall III_- o.B.d.A auf $0 < r < p$ und $jq < s < (j+1)q$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ beschränken. Weiter sehen wir, daß wegen (2.23) die Moduln $V(h_{r,s+jq}, c)$ mit $0 < r < p$ und $0 < s < q$ als Untermoduln von $V(h_{r,s}, c)$ auftreten, es reicht also den Fall III_- für diese Werte von r und s für beliebige, relativ prime p und q zu beweisen.

Ist z.B $r \equiv 0 \bmod p$, was wir wegen $h^-_{r,s} = h^-_{r-p,s-q}$ auf $r = 0$ und s beliebig zurückführen können, sieht man leicht, daß (zunächst für $0 < s < q$) nur die Vektoren $w_0, w_1, w_4, w_5, w_8, \ldots$ des Diagrammes für den Fall III_- übrigbleiben, die ein Diagramm vom Typ III^0_- bilden, die übrigen Nullstellen verschwinden (d. h. sie haben Grad ≤ 0 in den entsprechenden Moduln).

Auch hier treten die Fälle mit $jq < s < (j+1)q$ als Untermoduln auf. Ein interessanter Spezialfall ist $r \equiv 0 \bmod p$ und $s \equiv 0 \bmod q$. Hier erhält man durch Entartung doppelte Nullstellen, d. h. die entsprechenden singulären Vektoren liegen auf zwei Kurven der Form (2.1). Für $r = 0$ und $s = 0$ erhält man $\mathrm{wt}(w_0) = \mathrm{wt}(w_2)$ und $\mathrm{wt}(w_{4k+1}) = \mathrm{wt}(w_{4k+3}) = \mathrm{wt}(w_{4k+4}) = \mathrm{wt}(w_{4k+6})$. Die Vektoren w_{4k+3} und w_{4k+4} liegen auf keiner Kurve der Form (2.1), deshalb liegen $w_{4k+1} = w_{4k+6}$ nur auf dem Schnittpunkt zweier Kurven.

Eine analoge Überlegung kann man für die Fälle III_+ und III^0_+ anstellen, dazu aber später.

Beweis für den Fall III_- mit $0 < r < p$ und $0 < s < q$:

Sei kurz $V = V\left(h^-_{r,s}, c(-q/p)\right)$. Wir wollen (2.23) durch Induktion beweisen. Wenn wir Lemma 2.2.7 anwenden, erhalten wir einfache Nullstellen in der Kac–Determinante von V für $(n,m) = (r+kp, s+kq)$, $(k \geq 0)$ und $(n,m) = (-r+kp, -s+kq)$, $(k \geq 1)$. Diese Nullstellen erzeugen nach Lemma 2.1.1 singuläre Vektoren w_{4k+2} und $w_{4(k-1)+1}$. Man überzeugt sich leicht, daß weder $w_1 \in [w_2]$ noch $w_2 \in [w_1]$ gilt, da wir sonst Nullstellen in den entsprechenden Determinanten finden müßten. Wir haben also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & w_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ w_1 & & w_2 \end{tikzcd} \tag{2.27}$$

bewiesen. Das ist auch der Induktionsanfang. Wir untersuchen nun $[w_2] \simeq V\left(h^-_{r,-s}, c(-q/p)\right)$. w_2 hat in V den Grad rs, und die Kac–Determinante von $[w_2]$ liefert singuläre Vektoren der Grade $d^+_k = (r+kp)(-s+kq)$ bzw. $d^-_k = (-r+kp)(s+kq)$ für $k \geq 1$. Diese Vektoren haben in V den Grad $d^\pm_k + rs$, was genau $\deg w_{4(k-1)+3}$ bzw. $\deg w_{4k}$ entspricht. Damit haben wir, wie sich später zeigen wird, bereits alle singulären Vektoren in V gefunden. In $[w_1]$ finden wir singuläre Vektoren der Grade $\tilde{d}^+_k = (r+(k-1)p)(-s+(k+1)q)$ und $\tilde{d}^-_k = (-r+(k+1)p)(s+(k-1)q)$ für $k \geq 1$. Es gilt $\tilde{d}^\pm_k + (p-r)(q-s) = d^\pm_k + rs$, d.h. die singulären Vektoren von $[w_1]$ und $[w_2]$ haben in V denselben Grad.

Wir führen folgende Sprechweise ein: Zwei Teilräume $U = \oplus\, U_n, W = \oplus\, W_n$ von V heißen bis zum Grad n gleich, falls für $i = 0, \ldots, n$ $U_i = W_i$ gilt. Wir haben bis jetzt gezeigt, daß $J_1 = [w_1] + [w_2]$ bis unterhalb des Grades des nächsten singulären Vektors gilt, der z. B. w_3 sei.

V könnte im Prinzip zwei linear unabhängige singuläre Vektoren vom Grad $\deg w_3$ enthalten, denn sowohl $[w_1]$ als auch $[w_2]$ enthalten einen solchen Vektor. Diese Vektoren fallen in V aber zusammen: Sei $\deg w_3 = d$, w_3 und w_3' seien die von $[w_1]$ und $[w_2]$ induzierten singulären Vektoren in V vom Grad d. Aus Satz 2.2.4 folgt, daß $w_3, w_3' \in J_2$ gelten muß. Aus der Dimensionsformel von Satz 2.2.4 folgt

$$\dim J_{1,d} + \dim J_{2,d} = \operatorname{ord}_0 \det S_d(h_{r,s}, c(-q/p)) = p(d - \deg w_1) + p(d - \deg w_2) + 1.$$

Wären w_3 und w_3' linear unabhängig, so wäre die Summe $[w_1]+[w_2]$ bis zum Grad d direkt, und wir würden $\dim J_{1,d} + \dim J_{2,d} = p(d - \deg w_1) + p(d - \deg w_2) + 2$ erhalten, was einen Widerspruch ergibt. Es folgt also bis zum Grad d: $[w_1] \cap [w_2] = [w_3] = [w_3']$, $J_1 = [w_1] + [w_2]$ und $J_2 = [w_3]$. Analog zeigt man $w_4 = w_4'$, d.h $J_2 = [w_3] + [w_4]$ bis zum Grad $\deg w_4$. Wir haben damit bis jetzt das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& w_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w_1 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_2 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_3 & & w_4
\end{tikzcd} \tag{2.28}$$

bewiesen.

Der Induktionsschritt: Wir nehmen an, daß wir das folgende Diagramm bewiesen haben,

$$\begin{tikzcd}
& w_0 \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & J_0 \\
w_1 \bullet \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[r, dash, dashed] & J_1 \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
w_{4l-3} \bullet \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[d] \arrow[dll] \arrow[r, dash, dashed] & J_{2l-1} \\
w_{4l-1} \bullet \arrow[rr, dash, dashed] & & \bullet \arrow[r, dash, dashed] & J_{2l}
\end{tikzcd} \tag{2.29}$$

wobei die Aussagen über die Jantzen–Filtration bis zum höchsten Grad der im Bild auftretenden singulären Vektoren gelten sollen.

Lemma 2.2.7 liefert für $[w_{4l-1}] = [w_{4(l-1)+3}] \simeq V(h^-_{r,s-2(l-1)q}, c(-q/p))$ und $[w_{4l}] \simeq V(h^-_{r,s+2lq}, c(-q/p))$ singuläre Vektoren der Grade $\deg w_{4l+1}, \deg w_{4l+2}, \deg w_{4l+5}, \ldots$. Jedes der Untermoduln w_0 und $[w_{4r-1}], [w_{4r}], r = 1, \ldots, l$ enthält einen singulären Vektor vom Grad $\deg w_{4l+1} =: d$. Für $r = l$ folgt ganz analog zum Induktionsanfang aus (2.22), daß w''_{4l+1} und w'_{4l+1} in $[w_{4l-1}]$ und $[w_{4l}]$ linear abhängig sind. Dies gilt dann natürlich auch in V. Falls ein r existiert, so daß $[w_{4r-1}]$ oder $[w_{4r}]$ zwei linear unabhängige singuläre Vektoren vom Grad d enthält, wenden wir auf diesen Modul die Dimensionsformel an. Durch Umnumerierung können wir erreichen, daß dieser Modul durch w_0 erzeugt wird, d.h. wir erhalten genau das Bild aus der Induktionsannahme, wobei V auf dem Level d zwei linear unabhängige singuläre Vektoren enthält. Wir erhalten aus (2.4)

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_0 \det S_d(h_{r',s'}, c(-q/p)) &= p(d - \deg w_1) + p(d - \deg w_2) + p(d - \deg w_5) + \ldots \\ &\quad + p(d - \deg w_{4l-3}) + p(d - \deg w_{4l-2}) \\ &\quad + p(d - \deg w_{4l+1}) + p(d - \deg w_{4l+2}), \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei wir $p(-n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ gesetzt haben. Andererseits wissen wir über die Dimensionen der Jantzen–Filtration gemäß Induktionsanahme

$$\begin{aligned} \dim J_{1,d} &= p(d - \deg w_1) + p(d - \deg w_2) \\ &\quad - p(d - \deg w_3) - p(d - \deg w_4) \\ &\quad + p(d - \deg w_5) + p(d - \deg w_6) \\ &\quad \vdots \\ &\quad - p(d - \deg w_{4l-1}) - p(d - \deg w_{4l}) \\ &\quad + 2p(d - \deg w_{4l+1}). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Analog können wir die Dimensionen von J_k, d, $k = 2, \ldots, 2l$ als alternierende Summen angeben. Dort tritt der Faktor 2 bei $p(d - \deg w_{4l+1})$ wegen der Wahl von r nicht auf. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2l} \dim J_{k,d} &= p(d - \deg w_1) + p(d - \deg w_2) \\ &\quad + p(d - \deg w_5) + p(d - \deg w_6) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + p(d - \deg w_{4l-3}) + p(d - \deg w_{4l-2}) \\ &\quad + 2p(d - \deg w_{4l+1}) + p(d - \deg w_{4l+2}), \end{aligned} \tag{2.32}$$

was im Widerspruch zu (2.30) steht. Genauso folgt das für die singulären Vektoren vom Grad $\deg w_{4l+2}$, es folgt damit insgesamt $J_{2l+1} = [w_{4l+1}] + [w_{4l+2}]$. Der gleiche Beweisschritt, angewendet auf $[w_1]$ und $[w_2]$, liefert die Behauptung für w_{4l+3} und w_{4l+4}, und damit folgt der Induktionsschritt. Damit ist der Fall III_- bewiesen.

Beweis für den Fall III_+:
Wir werden den Beweis hier nur skizzieren, da er im wesentlichen aus denselben Methoden wie im Fall III_- folgt. Wir haben die Symmetrien $h^+_{r,s} = h^+_{-r,-s} = h^+_{r+p,s-q}$ und können uns deswegen wieder auf die Fälle $0 < r < p$ und $jq < s < (j+1)q$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$ beschränken. Wir behaupten für diese Moduln das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & & \vdots \\
w_5 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_6 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_3 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_4 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_1 \arrow[dr] & & w_2 \arrow[dl] \\
& w_0 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{wt}(w_{4i}) &= h^+_{r,-s+2iq} \\
\mathrm{wt}(w_{4i+1}) &= h^+_{r,s-2(i+1)q} \\
\mathrm{wt}(w_{4i+2}) &= h^+_{r,s+2iq} \\
\mathrm{wt}(w_{4i+3}) &= h^+_{r,-s-2iq}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Alle oben genannten Moduln tauchen in diesem Diagramm auf. Dieses Diagramm können wir durch Induktion “von unten nach oben” beweisen. Zunächst stellt man fest, daß die Kac–Determinante von $[w_0] \simeq V(h^+_{r,-s}, c(q/p))$ keine Nullstelle hat, was den Induktionsanfang darstellt.
Nun untersucht man $[w_1]$ und $[w_2]$ und stellt fest, daß beide genau einen singulären Vektor, nämlich w_0 enthalten. So fährt man fort, wobei man wieder zeigen muß, daß keine verschiedenen singulären Vektoren des gleichen Gewichtes auftauchen, was genau wie im Fall III_- aus Formel (2.22) für die Jantzen–Filtration folgt. □

Wir können nun mit Hilfe von Satz 2.2.5 und Lemma 2.1.3 auch die kontragredienten Verma–Moduln klassifizieren. Wir erhalten die gleichen Typen von Darstellungen $I, II_\pm, III_\pm, III^0_\pm$. Jeder singuläre Vektor ungleich dem Höchstgewichtsvektor in einem Verma–Modul entspricht einem kosingulären Vektor in dem kontragredienten Modul. Die Diagramme für $\overline{V}(h,c)$ erhalten wir einfach aus den entsprechenden Diagrammen für $V(h,c)$, indem wir alle Pfeile umdrehen, denn dies bedeutet genau, daß der Punkt von dem der Pfeil ausgeht, einem kosingulären Vektor entspricht.

Korollar 2.2.8 *Die kontragredienten Verma–Moduln $\overline{V}(h,c)$ sind im Fall I, II_- irreduzibel. Im Fall II_+ enthält $\overline{V}(h,c)$ genau einen kosingulären Vektor. Für die Fälle $III_\pm, III^0_\pm$ erhalten wir die Diagramme der kosingulären Vektoren nach obiger Vorschrift. In jedem Fall erzeugt der Höchstgewichtsvektor einen irreduziblen Untermodul.*

Für zwei Vir–Moduln V_1, V_2 sei $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ der Raum der Intertwiner zwischen V_1 und V_2. Eine direkte Folgerung aus Satz 2.2.5 ist, daß für zwei Verma–Moduln stets $\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \leq 1$ gilt. Insbesondere gibt es genau dann einen nichttrivialen Intertwiner $T : V_1 \longrightarrow V_2$, wenn V_2 einen singulären Vektor mit dem Gewicht des Höchstgewichtsvektors von V_1 enthält. T ist dann sogar eine Einbettung.

Im Fall der kontragredienten Verma–Moduln ist die Situation noch einfacher, es gilt, falls $V_1 \not\cong V_2$, immer $\mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \{0\}$.

2.3 Die Struktur der Fock–Moduln

Wir werden uns nun den Fock–Moduln zuwenden und ein Analogon zu Theorem 2.2.5 für die Fock–Moduln beweisen. Zunächst müssen wir aber die Begriffe aus Abschnitt 2.2.1 verallgemeinern.

2.3.1 Die Jantzen–Filtrationen von Fock–Moduln

Sei $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ ein Fock–Modul vom Typ (h, c). Dann haben wir kanonische Vir–Homomorphismen

$$V(h,c) \xrightarrow{S'(\alpha,\beta)} \mathcal{F}(\alpha,\beta) \xrightarrow{S''(\alpha,\beta)} \overline{V}(h,c), \tag{2.34}$$

deren Zusammensetzung gerade die Shapovalov–Abbildung ist.
Wir haben für $z \in \mathbb{C}$ Vektorraumisomorphismen

$$V(h+z,c) \xrightarrow{i_z} \mathfrak{U}(N_-) =: V, \tag{2.35}$$

$$\mathcal{F}(\alpha(z),\beta(z)) \xrightarrow{j_z} \mathfrak{U}(\mathrm{Lin}\{a_{-1}, a_{-2}, \ldots\}) =: \mathcal{F} \text{ und} \tag{2.36}$$

$$\overline{V}(h+z,c) \xrightarrow{\bar{i}_z} \overline{V}, \tag{2.37}$$

und erhalten folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
V(h+z,c) \arrow[r, "{S'(\alpha(z),\beta(z))}"] \arrow[d, "i_z"'] \arrow[rr, bend left, "{S(h+z,c)}"] & \mathcal{F}(\alpha(z),\beta(z)) \arrow[r, "{S''(\alpha(z),\beta(z))}"] \arrow[d, "j_z"] & \overline{V}(h+z,c) \arrow[d, "\bar{i}_z"] \\
V \arrow[r, "S'_z"'] \arrow[rr, bend right, "S_z"'] & \mathcal{F} \arrow[r, "S''_z"'] & \overline{V}
\end{tikzcd}$$

V haben wir bereits in Abschnitt 2.2.1 auf natürliche Weise zu einem Vir–Modul gemacht, und analog setzen wir

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_z(X).f &:= j_z X.j_z^{-1} f \qquad (f \in \mathcal{F}),\\ \bar{\pi}_z(X).\bar{v} &:= \bar{i}_z X.\bar{i}_z^{-1}\bar{v} \qquad (\bar{v} \in \overline{V}).\end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{F}(\alpha(z),\beta(z)) \simeq (\mathcal{F},\tilde{\pi}_z)$ und $\overline{V}(h+z,c) \simeq (\overline{V},\bar{\pi}_z)$. Die induzierten Abbildungen S'_z und S''_z sind Intertwiner, denn

$$S'_z\pi(X)v = j_z S'(h+z,c) i_z^{-1} i_z X i_z^{-1} v = j_z X j_z^{-1} j_z S'(h+z,c) i_z^{-1} v = \tilde{\pi}_z(X) S'_z v.$$

Per Definition gilt$S_z = S''_z \circ S'_z$, d.h für alle $f \in \mathcal{O}(V)$ gilt $S_z f(z) = S''_z \circ S'_z f(z)$ für $z \in U_f$ und daher faktorisiert S_z auch als Abbildung $\mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(\overline{V})$ über $\mathcal{O}(\mathcal{F})$. Sei

$$\mathcal{O}_k(S') := \{f \in \mathcal{O}(V) \ : \ S'f \in \mathcal{O}_k(\mathcal{F})\} \tag{2.38}$$

(analog für S'') und $V_k := \{f(0) : f \in \mathcal{O}_k(V)\}$. Es gilt

Bemerkung 2.3.1 *Ist $Sf \in \mathcal{O}_n(\overline{V})$ und $h = S'f \in \mathcal{O}_l(\mathcal{F})$, dann gilt mit $\widetilde{h}(z) = h(z)z^{-l}$, daß $S''\widetilde{h} \in \mathcal{O}_{n-l}(\overline{V})$ ist.*

Wir wollen nun Abbildungen $S'_k : V_k \longrightarrow ??$ definieren, wobei der Bildraum noch zu bestimmen ist; die einfachste Wahl $\mathcal{F}$ liefert i. allg. keine wohldefinierten Abbildungen. Dazu sei $v \in V_k$. Es existiert ein $f \in \mathcal{O}_k(V)$ mit $f(0) = v$. Wir definieren

$$\widetilde{S}'_k v = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^k} S'_z f(z).$$

$\widetilde{S}'_k v$ kann aber von der Wahl von $f \in \mathcal{O}_k(V)$ abhängen, was wir nun induktiv bereinigen.

(i) $S'_0 = \widetilde{S}'_0 : V \longrightarrow \mathcal{F}$ ist wohldefiniert.

(ii) Sei $f \in \mathcal{O}_1(S')$ mit $f(0) = 0$. Wir können also $f(z) = zh(z)$ für ein $h \in \mathcal{O}(V)$ schreiben. Es folgt

$$\frac{1}{z} S'_z f(z) = \frac{1}{z} S'_z z h(z) = S'_z h(z)$$

und

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z} S'_z f(z) = S_0 h(0) \in \operatorname{im} S_0.$$

Damit ist

$$S'_1 : V_1 \longrightarrow \mathcal{F}/_{\operatorname{im} S'_0} = \operatorname{koker} S'_0$$

wohldefiniert.

(iii) Sei $S'_{k-1} : V_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S'_{k-2}$ wohldefiniert und $f \in \mathcal{O}_k(S')$ mit $f(z) = zh(z)$. Wir erhalten $1/z^k S'_z f(z) = 1/z^{k-1} S'_z h(z)$. Da der Grenzwert auf der linken Seite existiert, ist $h \in \mathcal{O}_{k-1}(S')$ und es folgt weiter, wenn wir im Bild auf $\operatorname{koker} S'_{k-2}$ projizieren,

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^k} S'_z f(z) = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^{k-1}} S'_z h(z) = S'_{k-1} h(0) \in \operatorname{im} S_{k-1}.$$

Folglich ist

$$S'_k : V_k \longrightarrow \operatorname{koker} S'_{k-2} \Big/ \operatorname{im} S'_{k-1} = \operatorname{koker} S'_{k-1}$$

wohldefiniert.

Wenn wir die gleiche Prozedur auf S_z und S''_z anwenden, erhalten wir drei Folgen von Abbildungen

$$S_0 : V \longrightarrow \overline{V} \quad , \qquad S_k : \ker S_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S_{k-1}, \tag{2.39}$$
$$S'_0 : V \longrightarrow \mathcal{F} \quad , \qquad S'_k : \ker S'_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S'_{k-1} \text{ und} \tag{2.40}$$
$$S''_0 : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{V} \quad , \qquad S''_k : \ker S''_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S''_{k-1}. \tag{2.41}$$

Sei $\operatorname{pr}_k : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{koker} S'_k$ die kanonische Projektion. Wir definieren zwei Filtrationen in $\mathcal{F}$ durch

$$J'_k \;:=\; \ker\{\operatorname{pr}_k : \mathcal{F} \longrightarrow \operatorname{koker} S'_k\}, \tag{2.42}$$
$$J''_0 \;:=\; \mathcal{F}, \quad J''_k := \ker S''_{k-1} \; (k > 0). \tag{2.43}$$

Lemma 2.3.2 *J'_k und J''_k sind Untermoduln von $\mathcal{F}$. Es gilt*

(i) $J'_k \subset J'_{k+1}$ *und* $\cup_k J'_k = \mathcal{F}$,

(ii) $J''_k \supset J''_{k+1}$ *und* $\cap_k J''_k = \{0\}$.

Beweis.
Man sieht wie in Abschnitt 2.2.1, daß $J''_{k+1} \subset J''_k$ und $\cap_k J''_k = \{0\}$ gilt, daß also $\{J''_k\}$ eine absteigende Filtration von $\mathcal{F}$ ist. Wir wollen nun zeigen, daß $\{J'_k\}$ eine aufsteigende Filtration von $\mathcal{F}$ ist. Zunächst folgt wegen

$$\operatorname{koker} S'_k \simeq \mathcal{F}\Big/\operatorname{im}\widetilde{S}'_0 + \ldots + \operatorname{im}\widetilde{S}'_k, \tag{2.44}$$

daß $J'_k \simeq \operatorname{im}\widetilde{S}'_0 + \ldots \operatorname{im}\widetilde{S}'_k$ (die Summe ist wohldefiniert, da S'_i wohldefiniert modulo $\operatorname{im} S'_{i-1}$ ist), und daß $J'_k \subset J'_{k+1}$ gilt. Zu zeigen bleibt $\cup_k J'_k = \mathcal{F}$. Seien V_n die homogenen Elemente vom Grad n in V, $(J_k)_n = (\ker S'_k)_n$. Wegen $\cap J_k = \{0\}$ folgt, daß $a < b \in \mathbb{N}$ existieren mit $(J_a)_n = V_n$ und $(J_b)_n = \{0\}$. Wir erhalten als Isomorphie der Vektorräume

$$V_n \simeq {(J_a)_n}\Big/{(J_{a+1})_n} \oplus {(J_{a+1})_n}\Big/{(J_{a+2})_n} \oplus \cdots \oplus {(J_{b-1})_n}\Big/{(J_b)_n}.$$

Außerdem gilt wegen (2.44)

$$S'_k : {(J_{k-1})_n}\Big/{(J_k)_n} \xrightarrow{\simeq} {(\operatorname{koker} S'_{k-1})_n}\Big/{(\operatorname{koker} S'_k)_n} \simeq {(J'_k)_n}\Big/{(J'_{k-1})_n}.$$

Wir erhalten insgesamt:

$$\begin{tikzcd}
V_n \simeq & (J_a)_n/(J_{a+1})_n \arrow[d, "S'_{a+1}", "\simeq"'] & \oplus & (J_{a+1})_n/(J_{a+2})_n \arrow[d, "S'_{a+2}", "\simeq"'] & \oplus\cdots\oplus & (J_{b-1})_n/(J_b)_n \arrow[d, "S'_b", "\simeq"'] \\
(J'_b)_n/(J'_a)_n \simeq & (J'_{a+1})_n/(J'_a)_n & \oplus & (J'_{a+2})_n/(J'_{a+1})_n & \oplus\cdots\oplus & (J'_b)_n/(J'_{b-1})_n
\end{tikzcd}$$

$(J'_a)_n$ ist trivial, denn da $(\ker S'_a)_n = V_n$ ist, ist $(\operatorname{koker} S'_a)_n = \mathcal{F}_n$ und deswegen $(J'_a)_n = \{0\}$. Es folgt also $(J'_b)_n = \mathcal{F}_n$, was $\cup_n J'_n = \mathcal{F}$ beweist. □

Mit den Isomorphismen $i_z, j_z, \bar{i}_z$ folgt alles soeben Bewiesene auch für die Abbildungen zwischen den (kontragredienten) Verma–Moduln und den Fock–Moduln, wir erhalten somit drei Folgen von Abbildungen (2.39), (2.40) und (2.41) sowie zwei Filtrationen von $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$, die durch (2.42) und (2.43) gegeben sind.

2.3.2 Der Klassifikationssatz für Fock–Moduln

Wir wollen nun unser Wissen über die Struktur der Verma–Moduln verwenden, um die Struktur der Fock–Moduln zu beweisen. Wir haben aus $S(h,c)$, $S'(\alpha,\beta)$ und $S''(\alpha,\beta)$ drei Folgen von Abbildungen S_k, S'_k und S''_k konstruiert. Den Zusammenhang zwischen diesen Abbildungen klärt das nächste Lemma.

Lemma 2.3.3 ([FF]) *Sei* $v \in \ker S_{k+l-1} \cap S'_{k-1} (= D(S_{k+l}) \cap D(S'_k))$ *und* $S'_k v \neq 0$. *Dann gilt:*

(i) Es existiert $v \in \ker S''_{l-1} \subset \mathcal{F}(\alpha,\beta)$ *mit* $S'_k v = \mathrm{pr}_{k-1}\, w$, *wobei* pr_{k-1} *die kanonische Projektion* $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \longrightarrow \operatorname{koker} S'_{k-1}$ *ist.*

(ii) Ist $S'_l w = 0$, *dann ist auch* $S_{k+l} v = 0$.

Beweis.
Es existiert ein $f \in \mathcal{O}(V)$ mit $f(0) = v$ und $Sf \in \mathcal{O}_{k+l}(\overline{V})$, $S'f \in \mathcal{O}_k(\mathcal{F})$. Wir setzen

$$w := \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^k} S'_z f(z),$$

womit $S'_k v = \mathrm{pr}_{k-1}\, w$ folgt. Es gilt $w \in \ker S''_{l-1}$, denn

$$\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^{l-1}} S''_z S'_z \frac{1}{z^k} f(z) = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{1}{z^{k+l-1}} S_z f(z) = 0.$$

Ist $w = 0$, so folgt $f \in \mathcal{O}_{k+1}(S')$, und wegen $S'f \in \mathcal{O}_l(S'')$ ist $Sf = S''S'f \in \mathcal{O}_{k+l+1}(\overline{V})$, und deshalb ist $\lim_{z \to 0} 1/z^{k+l} S_z f(z) = 0$. $\square$

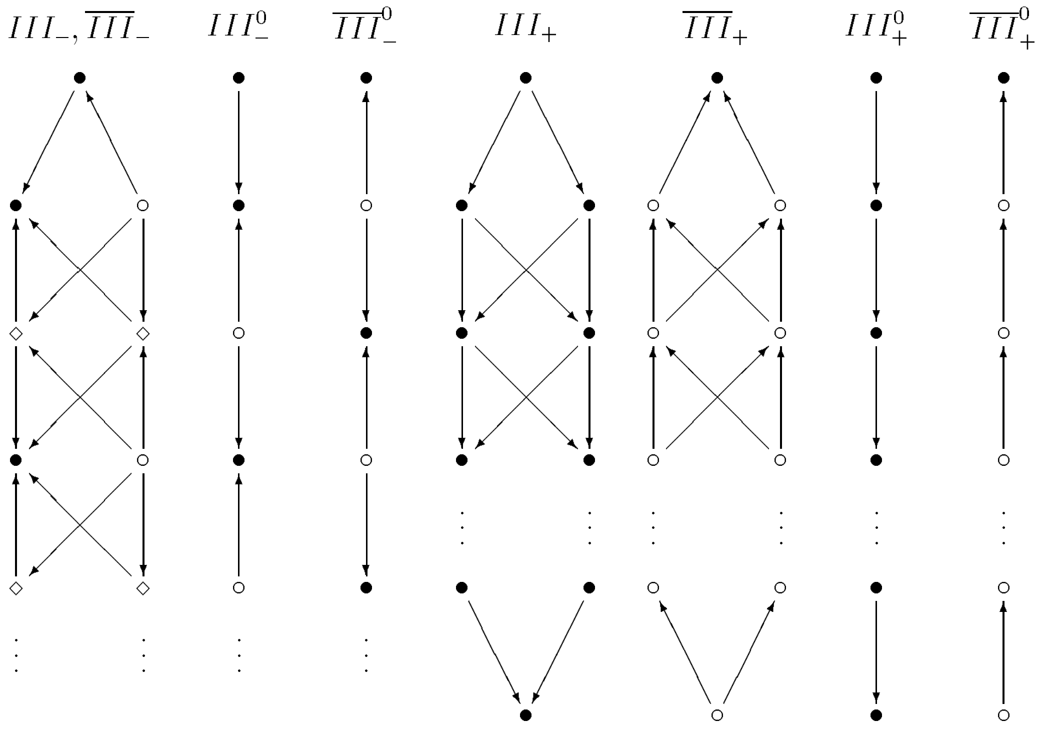
Bei der Klassifikation der Fock–Moduln tritt eine weitere Aufspaltung der bei der Klassifikation der Verma–Moduln aufgetretenen Fälle auf. Zum einen rührt das daher, daß die kontragredienten Fock–Moduln wieder Fock–Moduln sind. Wegen der Beziehungen $h = 1/2(\alpha^2 - \beta^2)$ und $c = 1 - 12\beta^2$ gibt es vier Fock–Moduln vom Typ (h,c). Wie man aber leicht an (1.8) sieht, sind $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ und $\mathcal{F}(-\alpha,-\beta)$ isomorph, und es gilt $\mathcal{F}(-\alpha,\beta) = \overline{\mathcal{F}}(\alpha,\beta)$. In den Diagrammen unterscheiden sich diese Moduln einfach durch die Vertauschung von singulären und kosingulären Vektoren und der entsprechenden Pfeile. Wir erhalten deshalb die Fälle $\{I, \overline{I}, II_\pm, \overline{II}_\pm, III_\pm, \overline{III}_\pm, III^0_\pm, \overline{III}^0_\pm\}$. Es tritt aber noch ein zusätzlicher Fall auf, der aus III^0_- entsteht, wenn $r = 0 \bmod p$ und $s = 0 \bmod q$ gilt. Die doppelten Nullstellen in der Kac–Determinante führen zu gleichzeitigen Nullstellen sowohl in $\det S'$ als auch in $\det S''$, im Unterschied zu den Fällen mit einfachen Nullstellen in der Kac–Determinante (vergl. Beweis von Satz 2.2.5). Wir bezeichnen diesen Fall mit III_-^{00} (bzw. $\overline{III}_-^{00}$, aber diese Moduln sind isomorph).

Im folgenden sei für einen Vektor $w \in \mathcal{F}$ mit $[w]$ der von w erzeugte Untermodul in $\mathcal{F}$ bezeichnet. Das folgende Theorem wurde bis auf einen Fehler in der Klassifizierung der Moduln vom Typ "+" zuerst von Feigin und Fuks in [FF] bewiesen.

Satz 2.3.4 *Die Fock–Moduln vom Typ $I, \overline{I}, II_-, \overline{II}_-$ sind irreduzibel. Im Fall II_+ enthält $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ genau einen singulären Vektor mit irreduziblem Quotienten (es gilt $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \simeq V(h,c)$), im Fall $\overline{II}_+$ enthält $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ genau einen kosingulären Vektor, und es gilt $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \simeq \overline{V}(h,c)$.*

Die Moduln vom Typ $III_\pm^{00}$ enthalten endlich oder unendlich viele singuläre (und gleichzeitig kosinguläre) Vektoren $w_1, w_2, \ldots$, und es gilt $\mathcal{F}(\alpha,\beta) \simeq [w_1] \oplus [w_2] \oplus \ldots$, wobei $[w_i]$ irreduzible Moduln sind.

Die Moduln vom Typ III_+ und III_+^0 sind isomorph zu den entsprechenden Verma–Moduln, die vom Typ $\overline{III}_+$ und $\overline{III}_+^0$ sind isomorph zu den entsprechenden kontragredienten Verma–Moduln.
Wir erhalten für die Fälle III die folgenden Diagramme:



Dabei entsprechen $\bullet$ singulären Vektoren, $\circ$ kosingulären Vektoren und $\diamond$ Vektoren, die nach der Faktorisierung des Moduls durch den von den singulären Vektoren *erzeugten Untermodul singulär werden. Im Fall III_- erhalten wir folgende Struktur: $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ enthält unendlich viele singuläre Vektoren („$\bullet$"), genauer die direkte Summe der durch „$\bullet$" erzeugten Untermoduln. Der Quotientenmodul von $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ mit dieser direkten Summe enthält die singulären Vektoren „$\diamond$". Wenn wir wieder den Quotienten durch den von diesen singulären Vektoren erzeugten Untermodul bilden, erhalten wir einen Modul, der die direkte Summe von durch die singulären Vektoren „$\circ$" erzeugten irreduziblen Moduln ist.*

Die Strukturbeweise in den Fällen III_- sind für die Fock–Moduln deutlich komplizierter als für die Verma–Moduln, denn dort waren alle Untermoduln wieder (Summen von) Verma–Moduln. Dies ist im Fall der Fock–Moduln nicht so einfach, die singulären Vektoren in einem Fock–Modul erzeugen i. allg. keinen Fock–Modul.

Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, daß die Abbildungen S_k' nur projektiv in die Fock–Moduln abbilden. Diese Schwierigkeit wird nur teilweise von Lemma 2.3.3 behoben.

Beweis.
Die Fälle I und II_- sind klar. Im Fall II_+ bzw. $\overline{II}_+$ hat entweder $\det \Phi''$ (II_+) oder $\det \Phi'$ ($\overline{II}_+$) genau eine Nullstelle. Es folgt aus Lemma 2.1.1, daß $\mathcal{F}$ (bzw. $\overline{\mathcal{F}}$) genau einen singulären und $\overline{\mathcal{F}}$ (bzw. $\mathcal{F}$) genau einen kosingulären Vektor enthält.

Wir werden den Fall III_- ausführlich beweisen, da dieser Fall der komplizierteste und der im Weiteren für uns interessanteste ist. Im Fall III_- haben die Verma–Moduln die folgende Struktur:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & V(h,c) & \\
 & w_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
w_1 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_2 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_3 \arrow[d] \arrow[drr] & & w_4 \arrow[d] \arrow[dll] \\
w_5 & & w_6 \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \overline{V}(h,c) & \\
 & \bar{w}_0 & \\
\bar{w}_1 \arrow[ur] & & \bar{w}_2 \arrow[ul] \\
\bar{w}_3 \arrow[u] \arrow[urr] & & \bar{w}_4 \arrow[u] \arrow[ull] \\
\bar{w}_5 \arrow[u] \arrow[urr] & & \bar{w}_6 \arrow[u] \arrow[ull] \\
\vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Im folgenden werden $V(h, c)$ kurz mit V und $\overline{V}(h, c)$ mit $\overline{V}$ bezeichnet. Für einen kosingulären Vektor $\bar{v} \in \overline{V}$ sei $[\bar{v}] := \overline{[v]}$, wobei v der zu $\bar{v}$ duale singuläre Vektor in V ist. $[\bar{v}]$ ist kein Untermodul, sondern ein Quotientenmodul von $\overline{V}$.

Eine einfache Folgerung aus Satz 2.2.5 zeigt, daß für $S_k : \ker S_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S_{k-1}$

$$\ker S_k = [w_{2k-1}] + [w_{2k}], \qquad \operatorname{koker} S_k = [\bar{w}_{2k+1}] + [\bar{w}_{2k+2}]$$

gilt. Es folgt daher

$$S_k w_{2k-1} = \bar{w}_{2k-1}, \qquad S_k w_{2k} = \bar{w}_{2k}, \qquad S_k w_j = 0 \text{ für } j > 2k.$$

Wir werden nun die Kerne von S'_k in V und die Kokerne von S''_k in $\overline{V}$ bestimmen. Das wird den Beweis des entsprechenden Teils von Satz 2.3.4 erlauben.

Lemma 2.3.5 *Für die Abbildungen* $S'_k : \ker S'_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S'_{k-1}$ *und* $S''_k : \ker S''_{k-1} \longrightarrow \operatorname{koker} S''_{k-1}$ *gilt:*

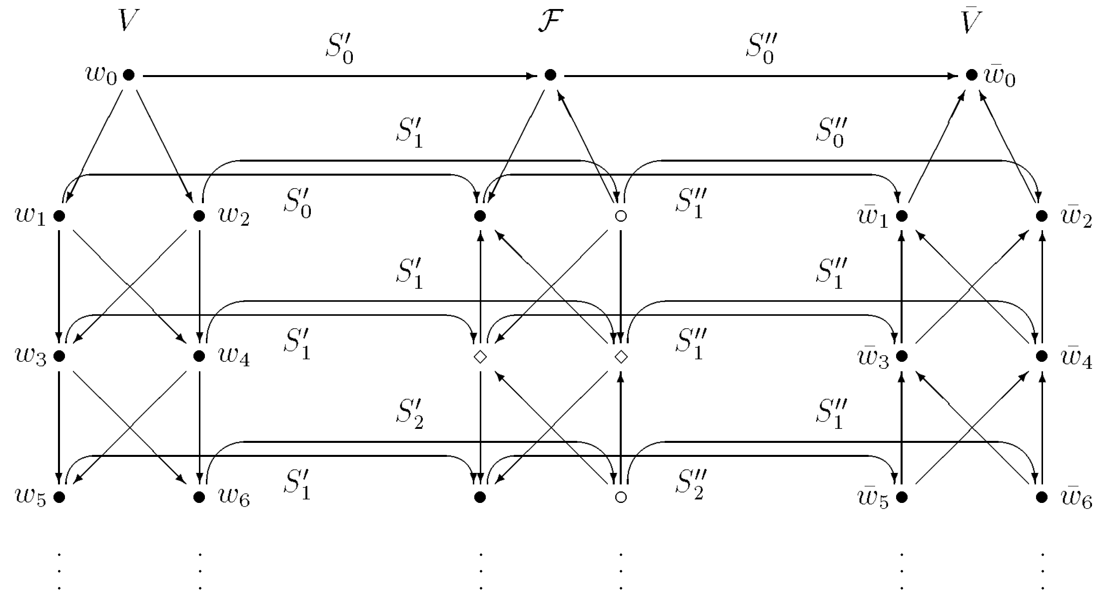
(i) $\ker S'_k = [w_{4k+2}]$ *und damit*

$$S'_0 : {}^{V}\!/_{[w_2]} \xrightarrow{\simeq} {}^{\mathcal{F}}\!/_{J'_0},$$
$$S'_k : {}^{[w_{4k-2}]}\!/_{[w_{4k+2}]} \xrightarrow{\simeq} {}^{J'_{k-1}}\!/_{J'_k}.$$

(ii) $\operatorname{koker} S''_k = [\bar{w}_{4k+1}]$ *und deshalb*

$$S''_0 : {}^{\mathcal{F}}\!/_{J''_1} \xrightarrow{\simeq} \ker\{\mathrm{pr} : \overline{V} \longrightarrow [\bar{w}_1]\},$$
$$S''_k : {}^{J''_k}\!/_{J''_{k+1}} \xrightarrow{\simeq} \ker\{\mathrm{pr} : [\bar{w}_{4k-3}] \longrightarrow [\bar{w}_{4k+1}]\}.$$

Die Aussage von Lemma 2.3.5 ist äquivalent zu dem folgenden Diagramm:



Dabei sind die Vektoren in $\mathcal{F}$, die in dem Diagramm auftauchen, nach Lemma 2.3.3 nur bis auf Äquivalenz bezüglich der bereits erwähnten Projektionen festgelegt. Die Abbildungen S'_k und S''_k, die im Bild eingezeichnet sind, sind natürlich erst nach der entsprechenden Projektion wohldefiniert, z.B. muß man S'_1 als Abbildung $\ker S'_0 \longrightarrow \mathcal{F}/\operatorname{im} S'_0 = \mathcal{F}/[S'_0 w_0]$ auffassen. Aus der Gültigkeit dieses Diagrammes folgt die Behauptung des Satzes 2.3.4 für den Fall III_-.

Beweis von Lemma 2.3.5.

Wir wissen aus Lemma 2.1.1 und Lemma 2.1.3, daß $\mathcal{F}$ singuläre Vektoren der Grade $\deg w_{4k+1}$ und kosinguläre Vektoren der Grade $\deg w_{4k+2}$ für $k \geq 0$ enthält. Aus der Determinantenformel von $S'(\alpha,\beta)$ folgt, daß $\ker S'_0 = \ker S'(\alpha,\beta) = [w_2]$ gilt, d.h. wir $S'_0 : V/[w_2] \xrightarrow{\simeq} \operatorname{im} S'_0$ haben. Da $S_1 w_2 \neq 0 (= \bar{w}_2)$, muß $S'_1 w_2 \neq 0$ sein (sonst wäre $S' w_2$ von der Ordnung z^2 und $S_1 w_2 = 0$). Wegen Lemma 2.3.3 muß ein $\tilde{w}_2$ mit $\mathrm{pr}_0\, \tilde{w}_2 = S'_1 w_2$ und $S''_0 \tilde{w}_2 = \bar{w}_2$ existieren. Außerdem gilt $S''_0 S'_0 w_1 = 0$ wegen $S_0 w_1 = 0$ und $S''_1 S'_0 w_1 = \bar{w}_1$ in koker S''_0, da $S_1 w_1 = \bar{w}_1$ gilt. Es folgt $\operatorname{koker} S''_0 = \overline{V}/\operatorname{im} S''_0 = [\bar{w}_1]$. Das liefert den Induktionsanfang.

Sei die Behauptung für alle $i < i_0$ bewiesen. Wir haben

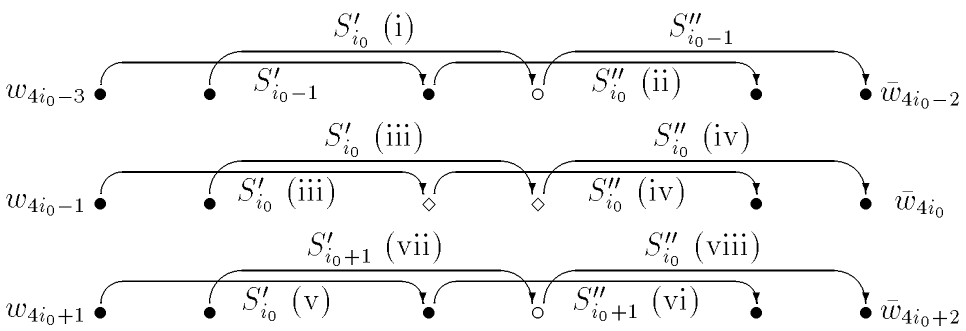
$$\ker S'_{i_0-2} = [w_{4i_0-6}], \quad \ker S'_{i_0-1} = [w_{4i_0-2}],$$

$$\operatorname{koker} S''_{i_0-2} = [w_{4i_0-7}] \text{ und } \operatorname{koker} S''_{i_0-1} = [w_{4i_0-3}].$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} S''_{i_0-2} : J''_{i_0-2}\big/J''_{i_0} &\xrightarrow{\ \simeq\ } \ker\{\mathrm{pr} : [\bar{w}_{4i_0-11}] \longrightarrow [\bar{w}_{4i_0-7}]\},\\ S''_{i_0-1} : J''_{i_0-1}\big/J''_{i_0} &\xrightarrow{\ \simeq\ } \ker\{\mathrm{pr} : [\bar{w}_{4i_0-7}] \longrightarrow [\bar{w}_{4i_0-3}]\}. \end{aligned}$$

Wir müssen die folgende Aussagen über S'_{i_0}, S''_{i_0}, S'_{i_0+1} und S''_{i_0+1} beweisen.



(i) Da $S_{2i_0-1}w_{4i_0-2} \neq 0$, muß $S'_{i_0}w_{4i_0-2} \neq 0$ sein.

(ii) Da $S_{2i_0-1}w_{4i_0-3} \neq 0$ und $\bar{w}_{4i_0-3} \in \operatorname{koker} S''_{i_0-1}$, muß $\bar{w}_{4i_0-3} \in \operatorname{im} S''_{i_0}$ gelten.

(iii) Es kann nicht $S'_{i_0}w_{4i_0-1} = 0$ gelten, denn sonst müßte ein $x \in \ker S''_{j-1}$ für ein $j < i_0 - 1$ mit $S''_j x = \bar{w}_{4i_o-1}$ existieren. Das ist aber nach der Induktionsannahme ausgeschlossen. Das gleiche Argument funktioniert für w_{4i_0}.

(iv) Es muß $S''_{i_0}S'_{i_0}w_{4i_0-1} = \bar{w}_{4i_0-1}$ und $S''_{i_0}S'_{i_0}w_{4i_0} = \bar{w}_{4i_0}$ gelten.

(v) J'_{i_0-1} enthält keinen singulären Vektor vom Grad $\deg w_{4i_0+1}$:
Es müßte sonst ein $j < i_0$ existieren, so daß $S'_j w_{4i_0+1}$ gleich diesem singulären Vektor ist. Es gilt aber $w_{4i_0+1} \in \ker S'_j$ für alle $j < i_0$.
Da $\mathcal{F}$ aber einen singulären Vektor diesen Grades enthält, folgt, daß auch $\mathcal{F}/J'_{i_0-1} \simeq \operatorname{koker} S'_{i_0-1}$ einen singulären Vektor diesen Grades enthält.
$S'_{i_0}w_{4i_0+1}$ muß gleich diesem Vektor sein:
Sonst müßte das für ein $j = i_0 + k > i_0$ gelten, und damit würde folgen, daß $S'_j w_{4i_0+1} \neq 0$ ist und $S''_{i_0-k+1}S'_{i_0+k}w_{4i_0+1}$ ein singulärer Vektor in $\operatorname{koker} S'_{i_0-k}$ ist. Es gibt dort aber keinen singulären Vektor diesen Grades.

(vi) Es muß $S''_{i_0}S'_{i_0}w_{4i_0+1} = 0$ sein, d.h. $S'_{i_0} \in \ker S''_{i_0}$. Weiter muß wegen $S_{2i_0+1}w_{4i_0+1} = \bar{w}_{4i_0+1}$ $S''_{i_0+1}S'_{i_0}w_{4i_0+1} \neq 0$ gelten.

(vii) Es muß $S'_{i_0}w_{4i_0+2} = 0$ gelten, denn ansonsten würde $\operatorname{koker} S'_{i_0-1}$ einen singulären Vektor diesen Grades enthalten, der sogar schon in $\mathcal{F}$ singulär sein müßte. $\mathcal{F}$ enthält aber einen kosingulären Vektor diesen Grades, der dann für keine j in $\operatorname{im} S'_j$ liegen würde, was einen Widerspruch bedeuten würde. Es folgt damit $\ker S'_{i_0} = [w_{4i_0+2}]$.

(viii) Aus (vii) folgt weiter $S'_{i_0+1}w_{4i_0+2} \neq 0$ und $S''_{i_0}S'_{i_0+1}w_{4i_0+2}$. Insgesamt muß $\operatorname{im} S''_{i_0} = [\bar{w}_{4i_0+2}]/[\bar{w}_{4i_0-2}]$ gelten oder äquivalent $\operatorname{koker} S''_{i_0} = [\bar{w}_{4i_0-3}]/[\bar{w}_{4i_0+1}]$.

Lemma 2.3.5 ist bewiesen. □

Der Beweis von Fall III_- folgt nun aus folgender Überlegung: Wir erfahren aus Lemma 2.3.5, daß S'_k Isomorphismen von $[w_{4k-2}]/[w_{4k+2}]$ nach J'_{k-1}/J'_k sind. Das Urbild ist der von dem Vektor w_{4k-2} erzeugte Modul mit drei singulären Vektoren und der Struktur:

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dl] \arrow[d] \\ \bullet \arrow[d] & \bullet \arrow[dl] \\ \bullet & \end{tikzcd} \tag{2.45}$$

Dasselbe gilt natürlich dann auch für das Bild. Da wir die Abbildungen S_k aber nach Lemma 2.3.3 “liften” können, wählen wir beliebige Elemente in $\mathcal{F}$, die unter der Projektion auf das Bild auf die entsprechenden Vektoren in J'_{k-1}/J'_k abgebildet werden. Diese Vektoren sind (bis auf das Bild von w_{4k+1}) sicherlich nicht mehr singulär, aber dennoch überträgt sich die obige Struktur auf diese Vektoren, d.h. wir erhalten in $\mathcal{F}$ Vektoren mit der obigen Struktur. Analog sieht man, daß aus den Aussagen über S''_k Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} \bullet & \\ \bullet \arrow[u] & \bullet \arrow[ul] \\ & \bullet \arrow[ul] \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{2.46}$$

in $\mathcal{F}$ folgen. Diese beiden Diagramme zusammengefügt ergeben das Diagramm von $\mathcal{F}$. Die verschiedenen Typen von Vektoren in $\mathcal{F}$ ergeben sich direkt aus der Lage der singulären Vektoren in $\mathcal{F}$ und den Richtungen der Pfeile. Damit erhalten wir insgesamt die behauptete Struktur von $\mathcal{F}$. Der Fall III_- ist bewiesen.

Einige Bemerkungen zum Beweis der restlichen Fälle:
Die aufmerksame Leserin hat im Beweis von Lemma 2.3.5 bemerkt, daß es letztendlich entscheidend war, wo singuläre und kosinguläre Vektoren in den Fock–Moduln liegen; sie markieren die Extremalpunkte in den Diagrammen (2.45) und (2.46). Man muß also wieder einige kleine Rechnungen mit den entsprechenden Determinantenformeln ausführen, um diese Vektoren zu finden. In den Fällen “+”, d.h $III_+, III_+^0, \overline{III}_+, \overline{III}_+^0$ erhalten wir als Ergebnis, daß alle Nullstellen von $\det S$ entweder ausschließlich in $\det S'$ oder $\det S''$ liegen. Damit ist entweder S' oder S'' ein Isomorphismus, und die Struktur des Moduls entspricht einem (kontragredienten) Verma–Modul.

Im Fall III_-^0 erhalten wir abwechselnd Nullstellen in $\det S'$ und $\det S''$, die abwechselnd singuläre und kosinguläre Vektoren in $\mathcal{F}$ erzeugen. Im Fall III_-^{00} schließlich erhalten wir Nullstellen gleichzeitig in $\det S'$ und $\det S''$, was zu zugleich singulären und kosingulären Vektoren führt. Man kann leicht die entsprechende Form von Lemma 2.3.5 aus diesen Überlegungen extrahieren und einen Beweis analog zu dem Beweis von Lemma 2.3.5 führen. Dies liefert dann den Beweis der entsprechenden Behauptung von Satz 2.3.4. □

Kapitel 3

Vertex–Operatoren

In diesem Kapitel werden wir die Vertex–Operatoren einführen. Sie sind die wichtigsten Objekte zur Konstruktion von Modellen der konformen Quantenfeldtheorie und zum Beweis der Determinantenformeln. Wir werden sie als Operatoren in den Hilberträumen $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ definieren und nicht nur als formale Exponentiale, wie es üblicherweise in der konformen Quantenfeldtheorie gemacht wird. Wir werden dann Produkte von Vertex–Operatoren untersuchen und zeigen, daß sie als Operatorprodukte auf einem dichten Teilraum existieren.
Die Berührung mit der Virasoro–Algebra kommt durch die Tatsache, daß wir trotz der komplizierten Struktur der Vertex–Operatoren ihre Kommutatoren mit der Virasoro–Algebra berechnen können. Dies wird der erste Schritt sein, um die im Satz 1.5.1 beschriebenen Intertwiner zu konstruieren, und ebenso auf dem Weg zur Konstruktion der primären Felder für die minimalen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie.
Wir werden danach die Vertex–Operatoren noch etwas eingehender untersuchen und eine Faktorisierung in einen Hilbert–Schmidt und einen Diagonal–Operator beweisen. Wir werden aber auch beweisen, daß die Vertex–Operatoren, wie sie in der konformen Quantenfeldtheorie benutzt werden, nicht abschließbare Operatoren in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ sind.

3.1 Das freie Feld

Vertex–Operatoren entstehen formal als Wick–geordnete Exponentiale des freien Feldes, genauer des euklidischen, freien, masselosen Feldes, daß in radialer Quantisierung in $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ folgendermaßen gegeben ist (vgl. [GSW]). Für $0 \neq z \in \mathbb{C}$ sei

$$\Phi(z) = q - ia_0 \ln z + i \sum_{n\neq 0} \frac{z^{-n}}{n} a_n, \tag{3.1}$$

wobei $[q, a_n] = i\delta_{n,0}$ gilt. (q und a_0 sind also ein Schrödinger–Paar, sie repräsentieren Ort und Impuls des freien Feldes.) Die Variable $z = re^{i\varphi}$ beschreibt die Raum–Zeit, der Winkel φ ist die Ortskoordinate und $\ln r$ ist die Zeitkoordinate. Der Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ist also die "Welt" zur Zeit $t = \ln r = 0$. Mit $\Phi_+(z) := -ia_0 - i\sum_{n>0} \frac{z^n}{n} a_{-n}$ und $\Phi_-(z) := q + i\sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} a_n$ gilt

$$[\Phi_-(z_1), \Phi_-(z_2)] = [\Phi_+(z_1), \Phi_+(z_2)] = 0 \tag{3.2}$$

und für $|z_1| > |z_2|$

$$[\Phi_-(z_1), \Phi_+(z_2)] = -\log(z_1 - z_2). \tag{3.3}$$

Aus (3.2) und (3.3) folgt unmittelbar für $|z_1| > |z_2|$

$$\langle v_{0,0}, \Phi(z_1)\Phi(z_2)v_{0,0}\rangle = \log(z_1 - z_2). \tag{3.4}$$

Gleichung (3.4) rechtfertigt die Bezeichnung "freies Feld" für Φ. $\Phi(z)$ erfüllt formal

$$\Phi(z)^* = \Phi(\bar{z}^{-1}), \tag{3.5}$$

insbesondere gilt also $\Phi(z)^* = \Phi(z)$ für $|z| = 1$. Es gibt noch eine weitere interessante formale Relation

$$\Phi(z) = |z|^N \Phi(\frac{z}{|\bar{z}|})|z|^{-N} = e^{\ln|z|N}\Phi(\frac{z}{|\bar{z}|})e^{-\ln|z|N}, \tag{3.6}$$

die das euklidische Heisenberg–Bild darstellt. N kann also als Hamiltonoperator interpretiert werden, dessen Halbgruppe e^{-tN} sowie e^{tN} die Zeitentwicklung liefern. Man sieht hier schon ein Handikap der euklidischen Felder und eine der Ursachen für unsere Schwierigkeiten, die Zeitentwicklung wird nicht durch unitäre Operatoren beschrieben.
Die Gleichheit in (3.5) kann man für die Operatoren natürlich nicht erwarten, man verlangt hier nur "$\supset$". Wir werden sehen, daß auch diese Relation nur trivial erfüllt ist, denn wir werden beweisen, daß $D(\Phi(z)) = D\left(\Phi(\bar{z}^{-1})^*\right) = \{0\}$ für $|z| > 1$ gilt, daß also das freie Feld für $|z| > 1$ nicht definierbar ist. Für $|z| < 1$ sieht man dagegen schnell, daß $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ im Definitionsbereich von $\Phi(z)$ liegt, (3.1) definiert also für $|z| < 1$ immerhin einen dicht definierten Operator.

Bevor wir weiter fortfahren, noch einige Bemerkungen zu den bereits erwähnten Schwierigkeiten mit dem freien Feld und den Vertex–Operatoren. Es gibt zumindest zwei Gründe, weshalb die zu definierenden Operatoren schlechte Eigenschaften haben können: Zum einen haben wir eine masselose Theorie, die bekanntermaßen singulärer als eine massive Theorie ist. Zum anderen sind Quantenfelder oft nur nach einer "Verschmierung" wohldefiniert, d.h. wir müssen die Felder als operatorwertige Distribution über einem geeigneten Testraum interpretieren.

Es ist bekannt, daß man die freien Felder in t lokalisieren kann [RSII], es reicht also, im Ortsraum, d.h. in S^1 zu verschmieren.

Sei $f \in C^\infty(S^1)$ und $f_{-k} := 1/i \int_{S^1} f(w) w^{-k-1} \mathrm{d}w$, so daß $|f_k| \leq C_1 \exp(-C_2 |k|^{1+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und Konstanten $C_1, C_2 > 0$. Den linearen Raum aller f mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$. Wegen $f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k$ für $|z| = 1$ und der Bedingung an $\{f_k\}$ entstehen die Elemente von $\mathcal{A}$ als Einschränkung in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytischer Funktionen auf S^1. Deshalb enthält $\mathcal{A}$ natürlich keine nichttrivialen Funktionen mit kompaktem Träger. Trotzdem können wir in $\mathcal{A}$ "lokalisieren", d.h. wir finden Funktionen, die ihren Träger bis auf einen beliebig kleinen Rest in einer beliebig kleinen Umgebung eines Punktes $\varphi_0 \in S^1$ haben. Als Beispiel können wir an Partialsummen $\sum_{k \leq N} e^{ik(\varphi - \varphi_0)}$ denken, wegen der Poisson–Formel $\delta(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{ik(\varphi - \varphi_0)}$ haben diese Partialsummen die gewünschte Eigenschaft und liegen natürlich in $\mathcal{A}$. Wir definieren für $f \in \mathcal{A}$

$$\Phi(f) = q - i a_0 \log f_0 + i \sum_{n \neq 0} \frac{f_{-n}}{n} a_n \tag{3.7}$$

als das verschmierte freie Feld zur Zeit $t = 0$. Mittels (3.6) definieren wir Φ für beliebige Zeiten $r = \ln t$ durch

$$\Phi(r, f) = q - i a_0 \log f_0 + i \sum_{n \neq 0} \frac{r^{-n} f_{-n}}{n} a_n. \tag{3.8}$$

Im Sinne der Poisson–Formel ist eine mögliche Verschmierung (d.h. Regularisierung) des freien Feldes durch

$$\Phi_N(z) = q - i a_0 \ln z + i \sum_{n \neq 0, n \leq N} \frac{z^{-n}}{n} a_n \tag{3.9}$$

gegeben. Aus unseren Voraussetzungen an f_k folgt, daß $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |r^n f_n|$ existiert und damit folgt schnell, daß $\Phi(r, f)$ dicht definiert ist.

3.2 Definition der Vertex–Operatoren

Formal sind Vertex–Operatoren definiert durch

$$\tilde{V}(\gamma, z) = :\exp(i\gamma\Phi(z)):, \tag{3.10}$$

wobei $\gamma \in \mathbb{C}$, $0 \neq z \in \mathbb{C}$ und $:\ :$ die Wick–Ordnung (Erzeuger links von Vernichteroperatoren) bezeichnet. Die Wick–Ordnung läßt sich leicht ausführen, wir erhalten

$$\tilde{V}(\gamma, z) = \exp\left(\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} a_{-n}\right) \exp(i\gamma q) z^{\gamma a_0} \exp\left(-\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n} a_n\right). \tag{3.11}$$

Der Operator $\exp(i\gamma q)$ bewirkt wegen $[a_0, \exp(i\gamma q)] = \gamma \exp(i\gamma q)$, daß $\tilde{V}(\gamma, z) : \mathcal{H}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{H}(\alpha + \gamma, \beta)$ gilt. Wir werden kurz T_γ für $\exp(i\gamma q)$ schreiben. $\tilde{V}(\gamma, z)$ erfüllt analoge Relationen zu (3.5) und (3.6), wir haben

$$\tilde{V}(\gamma, z)^* = \tilde{V}(-\bar{\gamma}, \frac{1}{\bar{z}}) \text{ und} \tag{3.12}$$

$$\tilde{V}(\gamma, z) = |z|^N \tilde{V}(\gamma, \frac{z}{|z|})|z|^{-N}. \tag{3.13}$$

Wir setzen $V(\gamma, z) = \exp(\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} a_{-n}) \exp(-\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n} a_n)$, wir haben also $\tilde{V}(\gamma, z) = T_\gamma z^{\gamma a_0} V(\gamma, z)$. $V(\gamma, z)$ und $\tilde{V}(\gamma, z)$ sind als Operatoren äquivalent, wir werden im folgenden oft die zunächst unwichtigen Faktoren $T_\gamma z^{\gamma a_0}$ ignorieren, beziehungsweise werden wir gegebenenfalls auch andere Potenzen von z wählen.

Formal können wir $\tilde{V}(\gamma, z)$ auch als unendliches Produkt schreiben (da a_n und a_m für $n \neq -m$ vertauschen), wir erhalten

$$\tilde{V}(\gamma, z) = \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(\gamma \frac{z^n}{n} a_{-n}\right) T_\gamma z^{\gamma a_0} \prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\gamma \frac{z^{-n}}{n} a_n\right). \tag{3.14}$$

Unsere erste Aufgabe wird es sein, zu zeigen, daß (3.11) bzw. (3.14) für $|z| < 1$ einen dicht definierten Operator definiert. Zur Definition von $V(\gamma, z)$ wollen wir Matrixelemente $\langle \Phi_\eta, V(\gamma, z)\Phi_\nu \rangle$ berechnen. Die lassen sich einfach berechnen, wenn wir $[a_k, V(\gamma, z)]$ kennen. Es reicht dazu den Kommutator mit dem entsprechenden Faktor in (3.14) zu berechnen. Es gilt für $k > 0$ (natürlich immer noch formal)

$$\begin{aligned}
[a_k, \exp(\gamma \frac{z^k}{k} a_{-k})] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\gamma z^k}{k}\right)^n [a_k, a_{-k}^n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\gamma z^k}{k}\right)^n n k a_{-k}^{n-1} = \gamma z^k \exp(\gamma \frac{z^k}{k} a_{-k}).
\end{aligned}$$

Analog erhält man $[a_{-k}, \exp(\gamma \frac{z^{-k}}{k} a_k)] = \gamma z^{-k} \exp(\gamma \frac{z^{-k}}{k} a_k)$. Weiter gilt $[a_0, \tilde{V}(\gamma, z)] = \gamma V(\gamma, z)$. Es folgt insgesamt für $k \in \mathbb{Z}$

$$[a_k, \tilde{V}(\gamma, z)] = \gamma z^k \tilde{V}(\gamma, z). \tag{3.15}$$

Der einzige Unterschied zu $V(\gamma, z)$ ist, daß $[a_0, V(\gamma, z)] = 0$ gilt. Nun ist es eine leichte Übung, die Matrixelemente von $V(\gamma, z)$ anzugeben, es folgt

$$\begin{aligned} \langle \Phi_\eta, V(\gamma, z)\Phi_\nu \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\min(\eta_i,\nu_i)} \binom{\eta_i}{j} \binom{\nu_i}{j} j! \left(\frac{\gamma}{\sqrt{i}} z^i \right)^{\eta_i - j} \left(-\frac{\gamma}{\sqrt{i}} z^{-i} \right)^{\nu_i - j} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} m_{\eta_i,\nu_i} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{i}} z^i, -\frac{\gamma}{\sqrt{i}} z^{-i} \right) \\ &=: v_{\eta,\nu}(\gamma, z) \end{aligned} \tag{3.16}$$

mit

$$m_{n,m}(x, y) := \sum_{j=0}^{\min(n,m)} \binom{n}{j} \binom{m}{j} j! x^{n-j} y^{m-j}. \tag{3.17}$$

Das unendliche Produkt in (3.16) entspricht dem Produkt in (3.14) und macht keine Probleme, da $\eta_i \neq 0$ und $\nu_i \neq 0$ nur für endlich viele i gilt und $m_{0,0}(x, y) = 1$ ist.

Natürlich läßt sich $m_{n,m}(x, y)$ durch bekannte Polynome ausdrücken, z.B. über Charlier–Polynome, die durch

$$C_n^{(a)}(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} \binom{x}{l} l! (-a)^{n-l}$$

definiert sind, es gilt $m_{n,m}(x, y) = y^{m-n} C_n^{(-xy)}(m)$ [Chi].

Analog zu (3.8) können wir verschmierte Vertex–Operatoren definieren, für $f \in \mathcal{A}$ sei

$$V(\gamma, r, f) = \exp\left(\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n f_n}{n} a^{-n} \right) \exp\left(-\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{-n} f_{-n}}{n} a_n \right). \tag{3.18}$$

Die Matrixelemente von $V(\gamma, r, f)$ sind gegeben durch

$$\langle \Phi_\eta, V(\gamma, r, f)\Phi_\nu \rangle = \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} m_{\eta_i,\nu_i} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{i}} r^i f_i, -\frac{\gamma}{\sqrt{i}} r^{-i} f_{-i} \right). \tag{3.19}$$

Es wird sich zeigen, daß die Verschmierung leider entscheidende Eigenschaften der Vertex–Operatoren zerstört, verschmierte Vertex–Operatoren sind keine "primären Felder". Deshalb sind sie für die konforme Quantenfeldtheorie nicht von großem Nutzen. Zunächst können wir jedoch die verschmierten Vertices mitbehandeln. Dazu untersuchen wir im folgenden allgemeiner Operatoren

$$V(\omega) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{\sqrt{n}} a_{-n}\right) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{-n}}{\sqrt{n}} a_n\right), \tag{3.20}$$

für $\omega = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \subset \mathbb{C}$, $V(\omega)$ ist durch die Matrixelemente

$$v_{\eta,\nu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} m_{\eta_i,\nu_i}(\omega_i, -\omega_{-i}) \tag{3.21}$$

definiert. Wir haben also die Beziehungen

$$V(\gamma, r, f) = V(\{\frac{\gamma}{\sqrt{i}} r^{\pm i} f_{\pm i}\}_{i \in \mathbb{N}}) \tag{3.22}$$

und

$$V(\gamma, z) = V(\{\frac{\gamma}{\sqrt{i}} z^{\pm i}\}_{i \in \mathbb{N}}). \tag{3.23}$$

Im Weiteren werden wir, wenn die Abhängigkeit der auftretetenden Operatoren von α und β trivial ist, oft kurz $\mathcal{H}$ für $\mathcal{H}(\alpha,\beta)$ und $\mathcal{F}$ für $\mathcal{F}(\alpha,\beta)$ schreiben. Mit Hilfe der Matrixelemente können wir nun einen Operator in $\mathcal{H}$ definieren durch [Wd]

$$\begin{aligned} D(V(\omega)) \quad = \quad & \Bigg\{ \Psi \in \mathcal{H} \; : \; \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{||\nu|| \leq k} v_{\eta,\nu}(\omega) \langle \Phi_v, \Psi \rangle \text{ existiert für alle } \eta \text{ und} \\ & \sum_{\eta} \left| \sum_{\nu} v_{\eta,\nu}(\omega) \langle \Phi_\nu, \Psi \rangle \right|^2 < \infty \Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

und

$$V(\omega)\Psi := \sum_{\eta} \sum_{\nu} v_{\eta,\nu}(\omega) \langle \Phi_\nu, \Psi \rangle \text{ für } \Psi \in D\left(V(\omega)\right). \tag{3.25}$$

Wir möchten nun untersuchen, wann $V(\omega)$ dicht definiert ist. Dazu verwenden wir die folgende Identität, die man als Verallgemeinerung der Orthogonalitätsrelation für die Charlier–Polynome interpretieren kann ([Chi], Ch. VI.1).

Lemma 3.2.1 *Für $x, y, z, w \in \mathbb{C}$ und $i, j \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} m_{i,k}(x, y) m_{k,j}(z, w) = m_{i,j}(x + z, y + w) e^{zy}. \tag{3.26}$$

Einen Beweis von Lemma 3.2.1 findet man in [BC]. Wir können nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.2.2 *(i) Sei $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|^2 < \infty$. Dann gilt $\mathcal{F}(\alpha, \beta) \subset D(V(\omega))$, $V(\omega)$ ist also insbesondere dicht definiert.*

(ii) Sei $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_{-i}|^2 < \infty$. Dann ist $V(\omega)$ abgeschlossen und $V(\omega)^*$ dicht definiert.

Beweis.
(i): Es gilt $\Phi_\nu \in D(V(\omega))$, falls $\sum_\eta |v_{\eta,\nu}(\omega)|^2 < \infty$, es reicht also, die Konvergenz dieser Summe für alle ν zu zeigen. Wegen $|m_{i,j}(x, y)| \leq m_{i,j}(|x|, |y|)$ und $m_{i,j}(x, y) = m_{j,i}(y, x)$ können wir mit Lemma 3.2.1 folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_\eta |v_{\eta,\nu}(\omega)|^2 &= \frac{1}{\nu!} \sum_\eta \frac{1}{\eta!} \prod_{i=1}^{\infty} |m_{\eta_i,\nu_i}(\omega_i, -\omega_{-i})|^2 \\
&\leq \frac{1}{\nu!} \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{\eta_i=0}^{\infty} \frac{1}{\eta_i!} m_{\nu_i,\eta_i}(|\omega_{-i}|, |\omega_i|) m_{\eta_i,\nu_i}(|\omega_i|, |\omega_{-i}|) \\
&= \frac{1}{\nu!} \prod_{i=1}^{\infty} \Big(m_{\nu_i,\nu_i}(|\omega_i| + |\omega_{-i}|, |\omega_i| + |\omega_{-i}|) \exp(|\omega_i|^2) \Big) \\
&= \frac{1}{\nu!} \prod_{i=1}^{\infty} (m_{\nu_i,\nu_i}(|\omega_i| + |\omega_{-i}|, |\omega_i| + |\omega_{-i}|)) \exp(\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|^2) \qquad (3.27) \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

falls $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|^2 < \infty$, da das übrigbleibende Produkt für jeden Multiindex ν mit $\|\nu\| < \infty$ endlich ist.
(ii): Völlig analog zu (i) können wir $\sum_\nu |v_{\eta,\nu}(\omega)|^2)$ durch

$$\sum_\nu |v_{\eta,\nu}(\omega)|^2 \leq \frac{1}{\mu!} \prod_{i=1}^{\infty} m_{\mu_i,\mu_i}(|\omega_i| + |\omega_{-i}|, |\omega_i| + |\omega_{-i}|) \exp(\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_{-i}|^2) \tag{3.28}$$

abschätzen. Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 6.20, [Wd]. □

Für die verschiedenen Typen von Vertex–Operatoren bedeutet das: Die verschmierten Vertex–Operatoren sind abgeschlossene Operatoren in $\mathcal{H}$. Für die nichtverschmierten Vertex–Operatoren erhalten wir aus Satz 3.2.2: Ist $|z| < 1$, so ist $V(\gamma, z)$ dicht definiert. Ist $|z| > 1$, so ist $V(\gamma, z)$ abgeschlossen. Für $|z| = 1$ ist weder (i) noch (ii) aus Satz 3.2.2 anwendbar.

3.3 Produkte von Vertex–Operatoren

Als nächsten Schritt möchten wir Produkte von Vertex–Operatoren einführen. Da wir keinen unter den Vertex–Operatoren invarianten Teilraum zur Verfügung haben, auf dem Produkte der Vertex–Operatoren existieren, müssen wir uns anderer Methoden bedienen. Die Rettung wird eine explizite Konstruktion der Produkte sein. Sei

$$V_+(\omega) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_{-n}}{\sqrt{n}} a_n\right) \tag{3.29}$$

und

$$V_-(\omega) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{\sqrt{n}} a_{-n}\right). \tag{3.30}$$

Mit Hilfe der Campbell–Baker–Hausdorff–Formel

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)\exp([A,B])$$

falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ erhalten wir formal

$$\begin{aligned} V_+(\omega^1)V_-(\omega^2) &= V_-(\omega^2)V_+(\omega^1)\exp\left(\left[-\sum_n \frac{\omega^1_{-n}}{\sqrt{n}} a_n, \sum_m \frac{\omega^2_m}{\sqrt{m}} a_{-m}\right]\right) \\ &= V_-(\omega^2)V_+(\omega_1)\exp(-\sum_{n=1}^{\infty} \omega^1_{-n}\omega^2_n). \end{aligned} \tag{3.31}$$

Damit erhalten wir die folgende Funktionalgleichung für die Produkte von Vertex–Operatoren:

$$\begin{aligned} V(\omega^1)V(\omega^2) &= V_-(\omega^1)V_+(\omega^1)V_-(\omega^2)V_+(\omega^2) \\ &= \exp(-\sum_{n=1}^{\infty} \omega^1_{-n}\omega^2_n)V_-(\omega^1)V_-(\omega^2)V_+(\omega^1)V_+(\omega^2) \\ &= \exp(-\sum_{n=1}^{\infty} \omega^1_{-n}\omega^2_n)V_-(\omega^1+\omega^2)V_+(\omega^1+\omega^2) \\ &= \exp(-\sum_{n=1}^{\infty} \omega^1_{-n}\omega^2_n)V(\omega^1+\omega^2). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Wir können also, falls $\sum_{n=1}^{\infty} \omega^1_{-n}\omega^2_n$ endlich ist, das Produkt von zwei Vertex–Operatoren $V(\omega^1)$ und $V(\omega^2)$ einfach durch die rechte Seite von (3.32) definieren. Dies ist für die verschmierten Operatoren immer der Fall, da $(\omega_i^{1,2})_{i\in\mathbb{Z}}$ dann schnellfallend sind. Für die lokalisierten Operatoren mit $\omega_i^{1,2} = \gamma_{1,2}\frac{z_{1,2}^i}{\sqrt{i}}$ ist $-\sum_{n=1}^{\infty}\omega_{-n}^1\omega_n^2 = -\gamma_1\gamma_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{z_2}{z_1})^n = \gamma_1\gamma_2\log(1-\frac{z_2}{z_1})$, falls $|z_1| > |z_2|$ gilt. Diese Einschränkung ist ein aus der euklidischen Quantenfeldtheorie bekannter Effekt, nur "zeitgeordnete" Produkte von Feldern sind definiert. Für das Produkt $\tilde{V}(\gamma_1, z_1)\tilde{V}(\gamma_2, z_2)$ müssen wir die Relation $\tilde{V}(\gamma, z) = V(\{\gamma\frac{z^i}{\sqrt{i}}\})T_\gamma z^{\gamma a_0}$ beachten. Die zusätzlichen Terme liefern bei der Produktbildung, da a_0 in der Wick–Ordnung rechts von q stehen soll,

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1} z_1^{\gamma_1 a_0} T_{\gamma_2} z_2^{\gamma_2 a_0} &= T_{\gamma_1} T_{\gamma_2} z_1^{\gamma_1(a_0+\gamma_2)} z_2^{a_0} \\ &= T_{\gamma_1+\gamma_2} z_1^{\gamma_1 a_0} z_2^{\gamma_2 a_0} z_1^{\gamma_1\gamma_2}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Damit erhalten wir in diesem Fall aus (3.32), falls $|z_1| > |z_2|$,

$$\begin{aligned} V(\gamma_1, z_1)V(\gamma_2, z_2) &= (1-\frac{z_2}{z_1})^{\gamma_1\gamma_2} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_1 z_1^n + \gamma_2 z_2^n}{n} a_{-n}\right) \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_1 z_1^{-n} + \gamma_2 z_2^{-n}}{n} a_n\right) \\ &=: (1-\frac{z_2}{z_1})^{\gamma_1\gamma_2} V(\gamma_1, \gamma_2; z_1, z_2) \end{aligned} \tag{3.34}$$

und

$$\tilde{V}(\gamma_1, z_2)\tilde{V}(\gamma_2, z_2) = (z_1 - z_2)^{\gamma_1\gamma_2} T_{\gamma_1+\gamma_2} z_1^{\gamma_1 a_0} z_2^{\gamma_2 a_0} V(\gamma_1, \gamma_2; z_1, z_2). \tag{3.35}$$

Interessanterweise spielt auf der rechten Seite von (3.34) und (3.35) die Zeitordnung keine Rolle mehr, sie ist für beliebige z_i mit $|z_i| < 1$ definiert. Die rechte Seite stellt also eine analytische Fortsetzung der linken Seite dar. Dafür haben wir uns allerdings eine Mehrdeutigkeit durch die Funktion $(z_1 - z_2)^{\gamma_1\gamma_2}$ eingehandelt. Wir werden die folgende Konvention verwenden: Für $0 < z_2 < z_1$ soll $\log(z_1 - z_2)$ reell sein.

Damit haben wir eine Möglichkeit gefunden, Produkte von Vertex–Operatoren wieder durch Vertex–Operatoren darzustellen. Wir können also das Produkt einfach durch die rechte Seite von (3.32) bzw. (3.34) definieren. Für die auf der rechten Seite stehenden Operatoren ist Satz 3.2.2 anwendbar (falls er es für die Faktoren war), und wir erhalten wieder dicht definierte Operatoren. Wir werden aber zeigen, daß (3.32) und (3.34) mehr als formale Relationen sind, eine Anwendung von Lemma 3.2.1 wird zeigen, daß diese Gleichungen sogar stark auf $\mathcal{F}$ gelten.

Satz 3.3.1 *Sei $\sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i^r|^2 < \infty$ (r=1,2), und weiter existiere $\sum_{i=1}^{\infty}\omega_{-i}^1\omega_i^2$. Dann gilt*

(i) $$V(\omega^2)(\mathcal{F}) \subset D(V(\omega^1)) \tag{3.36}$$

und

(ii) $$V(\omega^1)V(\omega^2)\Big|_{\mathcal{F}} = \exp(\sum_{i=1}^{\infty}\omega^1_{-i}\omega^2_i)V(\omega^1+\omega^2)\Big|_{\mathcal{F}}. \tag{3.37}$$

Beweis.
Nehmen wir an, wir könnten zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Satzes

$$\sum_{\mu} v_{\eta,\mu}(\omega^1)v_{\mu,\nu}(\omega^2) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\omega^1_{-i}\omega^2_i\right) v_{\eta,\mu}(\omega^1+\omega^2) \tag{3.38}$$

gilt. (Dabei und im folgenden soll $\sum_\mu$ immer die Summe über alle Indizes endlicher Länge bedeuten.) Dann folgt mit $\Psi_\nu = \sum_\mu v_{\mu,\nu}(\omega^2)\Phi_\mu$, daß $\Psi_\nu \in D(V(\omega^1))$ gilt, denn aus (3.38) folgt schnell, daß Ψ_ν die Bedingungen in (3.24) erfüllt, und weiter folgt aus (3.25)

$$\begin{aligned} V(\omega^1)V(\omega^2)\Phi_\nu &= V(\omega^1)\Psi_\nu = \sum_\eta\sum_\mu v_{\eta,\mu}(\omega^1)\langle\Phi_\mu,\Psi_\nu\rangle \\ &= \sum_\eta\sum_\mu v_{\eta,\mu}(\omega^1)v_{\mu,\nu}(\omega^2) = \exp(-\sum_{i=1}^{\infty}\omega^1_{-i}\omega^2_i)\sum_\eta v_{\eta,\nu}(\omega^1+\omega^2) \\ &= \exp(-\sum_{i=1}^{\infty}\omega^1_{-i}\omega^2_i)V(\omega^1+\omega^2)\Phi_\nu. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Es reicht also, (3.38) zu zeigen. Wir haben

$$\sum_\mu v_{\eta,\mu}(\omega^1)v_{\mu,\nu}(\omega^2) = \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}}\sum_\mu\prod_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\mu_i!}m_{\eta_i,-\mu_i}(\omega^1_i,\omega^1_{-i})m_{\mu_i,-\nu_i}(\omega^2_i,\omega^2_{-i})\right\}. \tag{3.40}$$

Wir möchten nun in (3.40) die Summe und das Produkt vertauschen. Als Abschätzung haben wir diesen Schritt bereits im Beweis von Satz 3.2.2 durchgeführt. Diese Vertauschung entspricht der Gleichung

$$\sum_{n_1,\ldots,n_N=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{N}X_{i,n_i} = \prod_{i=1}^{N}\left(\sum_{n_i=0}^{\infty}X_{i,n_i}\right) \tag{3.41}$$

für $N\to\infty$. Im Grenzfall stehen aber auf der linken Seite von (3.41) weniger Summanden als auf der rechten Seite, da wir nur über Multiindizes endlicher Länge summieren. Da η und ν fest sind, gilt ab einem i_0 für alle $i \geq i_0$ $\eta_i = \nu_i = 0$. Dann ist $m_{\eta_i,\mu_i}(\omega^1_i,-\omega^1_{-i})m_{\mu_i,\nu_i}(\omega^2_i,-\omega^2_{-i}) = (-\omega^1_{-i}\omega^2_i)^{\mu_i} =: X_i^{\mu_i}$. Für die endlich vielen Faktoren $i < i_0$ können wir (3.41) anwenden und es bleibt zu zeigen, daß

$$\sum_\mu\prod_{i=1}^{\infty}\frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} = \prod_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu_i=0}^{\infty}\frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} = \prod_{i=1}^{\infty}\exp(X_i) \tag{3.42}$$

gilt. Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ folgt $\prod_{i=1}^{\infty} X_i = 0$, also haben wir für jeden Multiindex μ mit $\|\mu\| = \infty$, daß $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} = 0$. Also ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu:\|\mu\|<\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} &= \sum_{\mu:\|\mu\|\leq\infty} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_N=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{N} \frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} \\
&= \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \sum_{\mu_i}^{\infty} \frac{X_i^{\mu_i}}{\mu_i!} = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(X_i). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

Wir können also in (3.40) weiterschreiben und erhalten unter Anwendung von Lemma 3.2.1

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu} v_{\eta,\mu}(\omega^1) v_{\mu,\nu}(\omega^2) &= \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{\mu_i=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_i!} m_{\eta_i,-\mu_i}(\omega_i^1, \omega_{-i}^1) m_{\mu_i,\nu_i}(\omega_i^2, -\omega_{-i}^2) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\eta!\nu!}} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ m_{\eta_i,\nu_i}(\omega_i^1 + \omega_i^2, -\omega_{-i}^1 - \omega_{-i}^2) \exp(-\omega_{-i}^1 \omega_i^2) \right\} \\
&= \exp(-\sum_{i=1}^{\infty} \omega_{-i}^1 \omega_i^2) v_{\eta,\nu}(\omega^1 + \omega^2). \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Satz 3.3.1 ist bewiesen. □

Eine triviale Verallgemeinerung von Satz 3.3.1 erlaubt es, beliebige Produkte von Vertex–Operatoren zu bilden, wir erhalten dann

$$V(\omega^1)V(\omega^2)\cdots V(\omega^r) = \prod_{1\leq i<j\leq r} \exp(-\sum_{l=1}^{\infty} \omega_{-l}^i \omega_l^j) V(\omega^1 + \omega^2 + \ldots \omega^r). \qquad (3.45)$$

Diese Gleichung gilt ebenfalls stark auf $\mathcal{F}$. Für das Produkt der Operatoren $V(\gamma_i, z_i)$ erhalten wir aus Satz 3.3.1 unter der Voraussetzung $|z_r| < |z_{r-1}| < \ldots < |z_1| < 1$

$$\begin{aligned}
&V(\gamma_1, z_1)V(\gamma_2, z_2)\cdots V(\gamma_r, z_r) = \\
&= \prod_{1\leq i<j\leq r} (1 - \frac{z_j}{z_i})^{\gamma_i\gamma_j} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^r \gamma_i z_i^n}{n} a_{-n}\right) T_{\Sigma\gamma_i} \prod_{i=1}^{r} z_i^{\gamma_i a_0} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^r \gamma_i z_i^{-n}}{n} a_n\right) \\
&=: \prod_{1\leq i<j\leq r} (1 - \frac{z_j}{z_i})^{\gamma_i\gamma_j} V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r), \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

(vgl. (3.34), natürlich gilt auch eine Verallgemeinerung von (3.35)). Auch diese Gleichung gilt unter den angegebenen Bedingungen stark auf $\mathcal{F}$.

3.4 Kommutatoren

Wir haben bis jetzt gesehen, daß Vertex–Operatoren unter bestimmten Bedingungen dicht definierte Operatoren sind. Zur Definition der Operatoren haben wir eine formale Kommutatorrelation zwischen Vertex–Operatoren und der Heisenbergalgebra verwendet (siehe (3.15)). Wir möchten nun als erstes beweisen, daß die Vertex–Operatoren Gl. (3.15) stark auf $\mathcal{F}$ erfüllen.

Lemma 3.4.1 *Sei* $\sum_{i=1}^{\infty}|\omega_i|^2<\infty$. *Dann gilt:*

(i) Für jedes Monom $P(a_{i_1},\ldots,a_{i_k})$ *ist* $V(\omega)(\mathcal{F})\subset D(P(a_{i_1},\ldots,a_{i_k}))$.

(ii) Für alle $\Phi\in\mathcal{F}$ *und* $k>0$

$$\begin{aligned} a_kV(\omega)\Phi &= V(\omega)(a_k+\sqrt{k}\omega_k)\Phi,\\ a_{-k}V(\omega)\Phi &= V(\omega)(a_{-k}+\sqrt{k}\omega_{-k})\Phi. \end{aligned} \tag{3.47}$$

(iii) $\|a_{\pm k}V(\omega)\Phi_\nu\|\le C(\nu)k^{1/2}$ *für* $k>0$.

Beweis.
(ii): Da wir zur formalen Berechnung der Matrixelemente von $V(\omega)$ (3.15) bzw. (3.47) verwendet haben, ist klar, daß (3.47) schwach auf $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ gilt. Damit reicht es (i) zu beweisen.
(i): Wir zeigen $V(\omega)(\mathcal{F})\subset D(a_k)$ für beliebige $k>0$. (i) ist dann eine offensichtliche Verallgemeinerung. Es gilt für $k>0$

$$\begin{aligned} ||a_kV(\omega)\Phi_\nu||^2 &= \sum_\mu|\langle\Phi_\mu,a_kV(\omega)\Phi_\nu\rangle|^2=\sum_\mu|\langle a_{-k}\Phi_\mu,V(\omega)\Phi_\nu\rangle|^2\\ &= \sum_\mu k(\mu_k+1)|\langle\Phi_{\mu+e_k},V(\omega)\Phi_\nu\rangle|^2\le k\sum_\mu(\mu_k+2)|\langle\Phi_\mu,V(\omega)\Phi_\nu\rangle|^2\\ &\le \frac{k}{\nu!}\prod_{i\neq k}\left(\sum_{\mu_i=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_i}|m_{\mu_i,\nu_i}(\omega)|^2\right)\left(\sum_{\mu_k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_k!}(\mu_k+2)|m_{\mu_k,\nu_k}(\omega)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Eine einfache Überlegung zeigt

$$|m_{i,j}(x,y)|^2\le C(j)i^2(\max(1,x))^{2i}, \tag{3.49}$$

so daß die Summe über μ_k existiert. Die übrigen Faktoren sind genau die aus dem Beweis von Satz 3.2.2. Es folgt (da a_k abgeschlossen ist) $V(\omega)\Phi_\nu\in D(a_k)$. Der Beweis

für a_{-k} geht analog.
(iii) folgt unmittelbar aus (3.48), das übrigbleibende Produkt über $i \neq k$ liefert die ν-abhängige Konstante. □

Wir wollen uns nun die Virasoro–Operatoren L_n etwas genauer anschauen.

Wir waren bis jetzt damit zufrieden, daß L_n auf $\mathcal{F}$ definiert sind. Da wir aber Kommutatoren $[L_n, V(\omega)]$ berechnen wollen und die Bilder $V(\omega)(\mathcal{F})$ sicher nicht mehr in $\mathcal{F}$ liegen, müssen wir den Definitionsbereich von L_n vergrößern. Zunächst ist wegen dem folgenden Lemma klar, daß L_n abschließbare Operatoren sind.

Lemma 3.4.2 *In einem separablen Hilbertraum ist die direkte Summe von endlichdimensionalen Operatoren abschließbar.*

Beweis. Klar. □

L_n können wir als direkte Summe schreiben, da $L_n : \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_{k-n}$, es gilt $L_n = \oplus_{k=0}^{\infty} L_n|_{\mathcal{F}_k}$. Ab sofort seien also $L_n(\alpha,\beta)$ als der Abschluß von $L_n(\alpha,\beta)|_{\mathcal{F}}$ definiert. Der Definitionsbereich der L_n ist genügend groß:

Lemma 3.4.3 *(i)* $D(L_0) = \left\{ \Phi = \sum_\mu c_\mu \Phi_\mu \ : \ \sum_\mu |c_\mu|^2 \|\mu\|^2 < \infty \right\}$.

(ii) $D(L_0) \subset D(L_n)$ *für alle* $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\omega_k|^2 < \infty$, *so gilt* $V(\omega)(\mathcal{F}) \subset D(L_0)$.

Beweis.
(i) ist offensichtlich, da $L_0 \Phi_\mu = \|\mu\| \Phi_\mu$.
(ii): Wir schreiben L_n für $n \neq 0$ in der Wick–Ordnung, dann gilt für $n > 0$

$$L_n(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_{n+k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} + (\alpha + n\beta) a_n \tag{3.50}$$

und

$$L_{-n}(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-n-k} a_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_{-k} a_{-n+k} + (\alpha - n\beta) a_{-n}. \tag{3.51}$$

Die endlichen Summen in (3.50) und (3.51) sind auf $D(L_0)$ definiert, da $D(L_0) \subset D(a_{\pm k})$ gilt, es reicht also, jeweils die Anteile

$$\tilde{L}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} a_{n+k} \text{ und } \tilde{L}_{-n} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-n-k} a_k \tag{3.52}$$

zu untersuchen. Es gilt mit $N(\mu) = \max\{i : \mu_i \neq 0\}$ und für $n > 0$

$$\tilde{L}_n \Phi_\mu = \sum_{k=1}^{N(\mu)-n} a_{-k} a_{n+k} \Phi_\mu = \sum_{k=1}^{N(\mu)-n} \sqrt{k(\mu_k + 1)(n+k)\mu_{n+k}}\, \Phi_{\mu - e_{n+k} + e_k} \tag{3.53}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}_n \Phi_\mu\|^2 &= \sum_{k=1}^{N(\mu)-n} k(\mu_k + 1)(n+k)\mu_{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{N(\mu)-n} k\mu_k(n+k)\mu_{n+k} + k(n+k)\mu_{n+k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{N(\mu)} k^2\mu_k^2 + k^2\mu_k \leq 2\|\mu\|^2. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Analog können wir $\|\tilde{L}_{-n}\Phi_\mu\|$ durch

$$\|\tilde{L}_{-n}\Phi_\mu\|^2 \leq (n+2)\|\mu\|^2 \tag{3.55}$$

abschätzen. Damit folgt, daß $\tilde{L}_n$ und damit auch L_n auf $D(L_0)$ definiert sind.
(iii): Zunächst zeigen wir, daß $V(\omega)\Phi_0 \in D(L_0)$ gilt. Aus der Form der Matrixelemente von $V(\omega)$ (3.21) folgt, daß

$$V(\omega)\Phi_0 = \sum_\mu \left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i^{\mu_i}}{\sqrt{\mu_i!}} \right) \Phi_\mu =: \sum_\mu v_\mu \Phi_\mu \tag{3.56}$$

gilt. Wir müssen also $\sum_\mu |v_\mu|^2 \|\mu\|^2$ abschätzen.
Wegen $(\sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k)^2 \leq 2\prod_{k=1}^{\infty}(k^2\mu_k^2 + 1)$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_\mu |v_\mu|^2 (\sum_{k=1}^{\infty} k\mu_k)^2 &\leq 2\sum_\mu \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega_k|^{2\mu_k}}{\mu_k!}(1 + \mu_k^2 k^2) \\ &= 2\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu_k=0}^{\infty} \frac{|\omega_k|^{2\mu_k}}{\mu_k!}(1 + \mu_k^2 k^2) \\ &= 2\prod_{k=1}^{\infty} (1 + k^2|\omega_k|^2 + k^2|\omega_k|^4)\exp(|\omega_k|^2) < \infty, \end{aligned} \tag{3.57}$$

denn das Produkt existiert nach Voraussetzung. Wir wissen also, daß $V(\omega)\Phi_0 \in D(L_0)$ gilt. Es reicht nun zu zeigen, daß für jedes Monom $P(a_{-1}, \ldots, a_{-l})$ gilt

$P(a_{-1},\dots,a_{-l})V(\omega)\Phi_0 \in D(L_0)$, denn wegen (3.47) können wir $V(\omega)\Phi_\mu$ als Linearkombination solcher Ausdrücke schreiben. Das folgt aber schnell, nach Lemma 3.4.1 ist z.B.

$$a_{-k}V(\omega)\Phi_0 = a_{-k}\sum_\nu v_\nu \Phi_\nu = \sum_\nu v_\nu \sqrt{k(\nu_k+1)}\Phi_{\nu+e_k}. \tag{3.58}$$

Analog können wir die Wirkung beliebiger Monome auf $V(\omega)\Phi_0$ hinschreiben. Mit den Koeffizienten aus (3.58) können wir auf die gleiche Weise wie in (3.57) verfahren, nur endlich viele der Faktoren aus (3.56) werden gestört, die Konvergenz des Produktes bleibt dabei unberührt. □

Wir kommen nun zum wichtigsten Punkt in diesem Abschnitt, den Kommutatoren zwischen den Virasoro–Operatoren und den Vertex–Operatoren. Zunächst gilt ganz allgemein:

Lemma 3.4.4 *Sei $\sum_{k=1}^\infty k|\omega_k| < \infty$. Setze $\theta_{\pm k} = \sqrt{k}\omega_{\pm k}$, $\theta_0 = \gamma$. Dann gilt stark auf $\mathcal{F}$:*

$$\begin{aligned} L_n(\alpha+\gamma,\beta)V(\omega) - V(\omega)L_n(\alpha,\beta) &= \sum_{k=1}^\infty \theta_{n+k}a_{-k}V(\omega) + \sum_{k=1}^\infty \theta_{n-k}V(\omega)a_k \\ &+ \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\theta_k\theta_{n-k} + \theta_n(\alpha+\gamma+n\beta)\right)V(\omega). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Beweis.
Sei $n > 0$. Weiter sei $L_n^N(\alpha,\beta) = \sum_{k=1}^N a_{-k}a_{n+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} + (\alpha+n\beta)a_n$. Aus Lemma 3.4.1 folgt stark auf $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} L_n^N(\alpha+\gamma,\beta)V(\omega) &= \sum_{k=1}^N a_{-k}V(\omega)(a_{n+k}+\theta_{n+k}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} V(\omega)(a_k+\theta_k)(a_{n-k}+\theta_{n-k}) \\ &\quad +(\alpha+\gamma+n\beta)V(\omega)(a_n+\theta_n) \end{aligned} \tag{3.60}$$

und

$$\begin{aligned} V(\omega)L_n^N(\alpha,\beta) &= \sum_{k=1}^N (a_{-k}-\theta_{-k})V(\omega)a_{n+k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} V(\omega)a_k a_{n-k} \\ &\quad +(\alpha+n\beta)V(\omega)a_n. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Für den Kommutator, also die Differenz von (3.60) und (3.61) ergibt sich

$$\begin{aligned}
[\quad] &= \sum_{k=1}^{N} a_{-k}\theta_{n+k}V(\omega) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} V(\omega)a_k\theta_{n-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} V(\omega)a_{n-k}\theta_k + \\
&\quad +\gamma V(\omega)a_n + \theta_n(\alpha+\gamma+n\beta)V(\omega) + \sum_{k=1}^{N}\theta_{-k}V(\omega)a_{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{N}\theta_{n+k}a_{-k}V(\omega) + \sum_{k=1}^{n-1}\theta_{n-k}V(\omega)a_k + \sum_{k=n+1}^{N+n}\theta_{n-k}V(\omega)a_k \\
&\quad +\gamma V(\omega)a_n + \theta_n(\alpha+\gamma+n\beta)V(\omega). \qquad (3.62)
\end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt nur die Konvergenz des ersten Terms. Für $\Phi \in \mathcal{F}$ gilt nach Lemma 3.4.1, (iii)

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\theta_{n+k}a_{-k}V(\omega)\Phi\right\| \le C\sum_{k=1}^{N}\sqrt{n+k}\sqrt{k}|\omega_k| < C_1(n) < \infty$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, falls $\sum_{k=1}^{\infty} k|\omega_k| < \infty$ gilt. Die Fälle $n = 0$ bzw. $n < 0$ gehen analog unter Verwendung von (1.8) bzw. (3.51). □

Nun werden wir zum ersten Male sehen, wieso die nichtverschmierten Operatoren für uns interessanter sind. Für $V(\gamma, z)$ bzw. $V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, \gamma_r)$ gilt:

Lemma 3.4.5 *Sei $|z_i| < 1$ $(i = 1, \ldots, r)$. Dann ist für $\Phi \in \mathcal{F}$ $V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)\Phi$ holomorph in $z_1, \ldots, z_r$ und es gilt*

$$\begin{aligned}
z_j\frac{\partial}{\partial z_j}V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)\Phi &= \gamma_j\sum_{k=1}^{\infty} z_j^k a_{-k}V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)\Phi \\
&\quad +\gamma_j\sum_{k=1}^{\infty} z_j^{-k}V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, z_1, \ldots, z_r)a_k\Phi. \qquad (3.63)
\end{aligned}$$

Für die Aussage von Lemma 3.4.5 benötigen wir wesentlich die Form von $\theta_k = Cz^k$, wodurch $V(\omega)$ von der Form $V(\gamma, z)$ sein muß.

Beweis.

Wir beweisen nur den Fall $r = 1$, die Verallgemeinerung auf beliebiges $r > 1$ ist offensichtlich. Sei $F(z) := V(\gamma, z)\Phi_\nu$. Nach Satz 3.2.2, (3.27) ist $\|F(z)\|$ lokal gleichmäßig beschränkt in dem gelochten Einheitskreis. Deshalb reicht es, die

Differenzierbarkeit von $\langle\Phi, F(z)\rangle$ für $\Phi \in \mathcal{F}$ nachzuweisen, denn für $\Phi = \sum_\mu c_\mu \Phi_\mu \in \mathcal{H}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left|\sum_\mu \overline{c}_\mu \langle\Phi_\mu, F(z)\rangle - \sum_{\|\mu\|\leq N} \overline{c}_\mu \langle\Phi_\mu, F(z)\rangle\right| &= \left|\sum_{\|\mu\|>N} \overline{c}_\mu \langle\Phi_\mu, F(z)\rangle\right| \\ \leq \left(\sum_{\|\mu\|>N} |c_\mu|^2 \sum_\mu |\langle\Phi_\mu, F(z)\rangle|\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{\|\mu\|>N} |c_\mu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|F(z)\| \xrightarrow{N\to\infty} 0 \end{aligned}$$

lokal gleichmäßig. $F(z)$ ist dann folglich schwach holomorph und damit auch (stark) holomorph. Es reicht demnach, (3.63) schwach auf $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ nachzuweisen, daß heißt für die Matrixelemente von $V(\gamma, z)$. Wir erhalten aus (3.16)

$$\begin{aligned} & z\frac{\partial}{\partial z}\langle\Phi_\mu, V(\gamma, z)\Phi_\nu\rangle = z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\mu!\nu!}}\prod_{i=1}^\infty m_{\mu_i,\nu_i}\left(\gamma\frac{z^i}{\sqrt{i}}, -\gamma\frac{z^{-i}}{\sqrt{i}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^\infty \left(\prod_{i\neq k}\frac{1}{\sqrt{\mu_i!\nu_i!}} m_{\mu_i\nu_i}\left(\gamma\frac{z^i}{\sqrt{i}}, -\gamma\frac{z^{-i}}{\sqrt{i}}\right)\right)\left(z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\mu_k!\nu_k!}} m_{\mu_k,\nu_k}\left(\gamma\frac{z^k}{\sqrt{k}}, -\gamma\frac{z^{-k}}{\sqrt{k}}\right)\right). \end{aligned}$$

Wir haben dabei die gewöhnliche Produktregel angewendet, denn alle auftretenden Produkte und Summen brechen nach endlich vielen Termen ab. Durch eine einfache Rechnung erhält man die folgende Identität:

$$\begin{aligned} & z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\mu_k!\nu_k!}} m_{\mu_k,\nu_k}\left(\gamma\frac{z^k}{\sqrt{k}}, -\gamma\frac{z^{-k}}{\sqrt{k}}\right) \\ &= z\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{\mu_k!\nu_k!}}\sum_{j=0}^{\min(\mu_k,\nu_k)}\binom{\mu_k}{j}\binom{\nu_k}{j} j!\left(\gamma\frac{z^k}{\sqrt{k}}\right)^{\mu_k-j}\left(-\gamma\frac{z^{-k}}{\sqrt{k}}\right)^{v_k-j} \\ &= \frac{\gamma z^k\sqrt{k\mu_k}}{\sqrt{(\mu_k-1)!v_k!}} m_{\mu_k-1,v_k}\left(\gamma\frac{z^k}{\sqrt{k}}, -\gamma\frac{z^{-k}}{\sqrt{k}}\right) + \frac{\gamma z^{-k}\sqrt{k\nu_k}}{\sqrt{\mu_k!\,(\nu_k-1)!}} m_{\mu_k,\nu_{k-1}}\left(\gamma\frac{z^k}{\sqrt{k}}, -\gamma\frac{z^{-k}}{\sqrt{k}}\right). \end{aligned}$$

Es folgt also insgesamt

$$\begin{aligned} & z\frac{\partial}{\partial z}\langle\Phi_\mu, V(\gamma, z)\,\Phi_\nu\rangle \\ &= \sum_{k=1}^\infty \gamma z^k\sqrt{k\mu_k}\,\langle\Phi_{\mu-e_k}, V(\gamma, z)\,\Phi_\nu\rangle + \sum_{k=1}^\infty \gamma z^{-k}\sqrt{k\nu_k}\,\langle\Phi_\mu, V(\gamma, z)\,\Phi_{\nu-e_k}\rangle \\ &= \sum_{k=1}^\infty \gamma z^k\,\langle\Phi_\mu, a_{-k}v(\gamma, z)\,\Phi_\nu\rangle + \sum_{k=1}^\infty \gamma z^{-k}\,\langle\Phi_\mu, V(\gamma, z)\,a_k\Phi_\nu\rangle\,. \end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir für $V(\gamma, z)$ folgende schöne Form des Kommutators mit L_n:

Korollar 3.4.6 *Es gilt für $\Phi \in \mathcal{F}$:*

$$\begin{aligned} & L_n(\alpha+\gamma,\beta)V(\gamma,z)\Phi - V(\gamma,z)L_n(\alpha,\beta)\Phi \equiv [L_n, V(\gamma,z)]\Phi \\ = \;& z^n \left\{ z\frac{\partial}{\partial z} + n(\frac{\gamma^2}{2} + \beta\gamma) + \gamma\alpha + \frac{1}{2}\gamma^2 \right\} V(\gamma,z)\Phi. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Beweis.
Aus Lemma 3.4.4 und Lemma 3.4.5 folgt mit $\theta_{\pm k} = \sqrt{k}\omega_{\pm k} = \gamma z^{\pm k}$

$$\begin{aligned} [L_n, V(\gamma,z)] &= z^n \sum_{k=1}^{\infty} \gamma z^k a_{-k} V(\gamma,z)\Phi + z^n \sum_{k=1}^{\infty} \gamma z^{-k} V(\gamma,z) a_k \Phi \\ &\quad + \left(\frac{n-1}{2}\gamma^2 z^n + \gamma^2 z^n + \gamma n \beta z^n + \gamma\alpha z^n \right) V(\gamma,z)\Phi \\ &= z^n \left\{ z\frac{\partial}{\partial z} + n(\frac{\gamma^2}{2} + \beta\gamma) + \gamma\alpha + \frac{1}{2}\gamma^2 \right\} V(\gamma,z)\Phi. \end{aligned}$$

□

Eine besonders einfache Form hat der Kommutator zwischen $T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma,z)$ und L_n, wir erhalten dann:

Korollar 3.4.7 *Es gilt stark auf $\mathcal{F}$*

$$[L_n, T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma,z)] = z^n \left\{ z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)(\frac{\gamma^2}{2} + \beta\gamma) \right\} T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma,z). \tag{3.65}$$

Beweis.
$z\frac{\partial}{\partial z} T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma,z)$ enthält nach der Produktregel den zusätzlichen Term $\gamma(\alpha - \beta) T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma,z)$ der (3.64) entsprechend modifiziert, es gilt

$$[L_n, V] = z^n X V \Longleftrightarrow [L_n, z^\lambda V] = z^n (X - \lambda) z^\lambda V.$$

□

Definition 3.4.8 *Ein Quantenfeld $F(z)$ (eine operatorwertige Funktion), das für ein $\kappa \in \mathbb{C}$*

$$[L_n, F(z)] = z^n \left\{ z\frac{\partial}{\partial z} + (n+1)\kappa \right\} F(z)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt, heißt konformes Feld vom Gewicht κ

$T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma, z)$ ist also ein konformes Feld vom Gewicht $\kappa = \gamma^2/2 + \beta\gamma$. Man bemerke, daß wir im Fall $\kappa = 1$ den Kommutator als eine Ableitung schreiben können, es gilt dann $[L_n, F(z)] = \frac{\partial}{\partial z}\left(z^{n+1} F(z)\right)$. Diese Gleichung wird für die integrierten ("abgeschirmten") Vertex–Operatoren sehr wichtig werden.
Wir möchten nun Kommutatoren zwischen der Virasoro–Algebra und Produkten von Vertex–Operatoren angeben. Wir verwenden dabei die folgende Form des Vorfaktors von $V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)$: Sei

$$F_\lambda (\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r) = \prod_{1 \le i < j \le r} (z_i - z_j)^{\gamma_i \gamma_j} \prod_{i=1}^{r} z_i^{\lambda \gamma_i}.$$

Dabei wählen wir den Zweig von F_λ aus, der durch folgende Bedingung festgelegt ist: Für $0 < z_r < z_{r-1} < \ldots < z_1$ sollen alle Logarithmen $\log(z_i - z_j)$ $(i < j)$ reell sein. Dieser Bereich ist genau dann der, auf dem $V(\gamma_1, z_1) \cdots V(\gamma_r, z_r)$ existiert. Für andere Bereiche ist F_λ natürlich nur festgelegt, wenn wir den Pfad der analytischen Fortsetzung angeben.
Was uns für den Kommutator zwischen L_n und $F_\lambda V(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, \gamma_r)$ noch fehlt, ist die passende Form von $z_i \frac{\partial}{\partial z_i} F_\lambda (\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)$. Dazu verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 3.4.9 *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{r} z_k^n \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{(n+1)}{2} \gamma_k^2 - \lambda \gamma_k \right) F_\lambda (\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \left(\gamma_1 z_1^k + \ldots + \gamma_r z_r^k \right) \left(\gamma_1 z_1^{n-k} + \ldots + \gamma_r z_r^{n-k} \right) F_\lambda (\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r) . \end{aligned} \tag{3.66}$$

Beweis.
Nachrechnen. □

Damit können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.4.10 *Sei kurz $F_\lambda := F_\lambda(\gamma_1, \ldots, \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)$, $T = T_{\gamma_1 + \ldots + \gamma_r}$ und $V = V(\gamma_1, \ldots \gamma_r; z_1, \ldots, z_r)$. Dann gilt stark auf $\mathcal{F}$:*

$$[L_n, F_\lambda T V] = \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1) \frac{\gamma_j^2}{2} + n\beta\gamma_j + \gamma_j (a_0 - \Sigma_{j=1}^{r} \gamma_j - \lambda) \right\} F_\lambda T V. \tag{3.67}$$

Beweis.

Aus Lemma 3.4.4 folgt mit $\theta_k = \gamma_1 z_1^k + \ldots + \gamma_r z_r^k$ stark auf $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
[L_n, F_\lambda TV] &= \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_1 z_1^{n+k} + \ldots + \gamma_r z_r^{n+k}) a_{-k} F_\lambda TV \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_1 z_1^{n-k} + \ldots + \gamma_r z_r^{n-k}) F_\lambda TV a_k \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma_1 z_1^k + \ldots + \gamma_r z_r^k)(\gamma_1 z_1^{n-k} + \ldots + \gamma_r z_r^{n-k}) F_\lambda TV \\
&\quad + (\gamma_1 z_1^n + \ldots + \gamma_r z_r^n)(\alpha + \sum_{i=1}^{r} \gamma_i + n\beta) F_\lambda TV \\
&= \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_j z_j^k a_{-k} F_\lambda TV + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_j z_j^{-k} F_\lambda TV a_k \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (\gamma_1 z_1^k + \ldots + \gamma_r z_r^k)(\gamma_1 z_1^{n-k} + \ldots + \gamma_r z_r^{n-k}) F_\lambda TV \\
&\quad + (\gamma_1 z_1^n + \ldots + \gamma_r z_r^n)(\alpha + n\beta) F_\lambda TV.
\end{aligned}$$

Nun können wir Lemma 3.4.5 und Lemma 3.4.9 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{r} z_j^n F_\lambda T (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} V) + \sum_{j=1}^{r} z_j^n (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} F_\lambda) TV \\
&\quad + \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ \frac{n+1}{2} \gamma_j^2 - \lambda \gamma_j + \gamma_j (\alpha + n\beta) \right\} F_\lambda TV \\
&= \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1) \frac{\gamma_j^2}{2} + n\beta\gamma_j + \gamma_j (a_0 - \Sigma\gamma_i - \beta) \right\} F_\lambda TV.
\end{aligned}$$

□

Uns werden dabei insbesondere zwei Wahlen von λ interessieren: Setzen wir $\lambda = a_0 - \Sigma\gamma_j - \beta = \alpha - \beta$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&L_n(\alpha + \Sigma\gamma_i, \beta) F_{\alpha-\beta} TV - F_{\alpha-\beta} TV L_n(\alpha, \beta) \\
&= \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + (n+1)(\frac{\gamma_j^2}{2} + \beta\gamma_j) \right\} F_{\alpha-\beta} TV,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

und für den Fall $\gamma = \gamma_1 = \ldots = \gamma_r$ und $\lambda = -\frac{r-1}{2}\gamma$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&L_n(\alpha + r\gamma) F_{-\frac{r-1}{2}\gamma} TV - F_{-\frac{r-1}{2}\gamma} TV L_n(\alpha, \beta) \\
&= \sum_{j=1}^{r} z_j^n \left\{ z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + n(\frac{\gamma^2}{2} + \beta\gamma) + \gamma a_0 - r\frac{\gamma^2}{2} \right\} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma} TV.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Gleichung (3.68) ist eine natürliche Verallgemeinerung von Korollar 3.4.7 auf r Variable.

3.5 Faktorisierung von Vertex–Operatoren

Wir haben bis jetzt Vertex–Operatoren im Wesentlichen auf $\mathcal{F}$ definiert und nicht untersucht, wie groß der Definitionsbereich der Vertex–Operatoren wirklich ist. Natürlich können wir aus der Produktformel für Vertex–Operatoren im Prinzip eine solche Aussage extrahieren, denn wir haben gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen $V(\omega^1)V(\omega^2)$ auf $\mathcal{F}$ existiert, daß heißt $D(V(\omega^1)) \supset V(\omega)(\mathcal{F})$. Da wir aber die Menge $V(\omega)(\mathcal{F})$ nicht kennen, ist das wenig hilfreich. Wir werden nun unter gewissen zusätzlichen Bedingungen eine Faktorisierung von Vertex–Operatoren $V(\omega) = Bc^{-N}$ beweisen, wobei B ein Hilbert–Schmidt–Operator ist, $N = \sum_{k>0} a_{-k}a_k$ der Teilchenzahloperator und $c < 1$. Damit sehen wir, daß der Definitionsbereich von $V(\omega)$ deutlich größer als $\mathcal{F}$ ist.

Satz 3.5.1 *Sei* $|\omega_i| \leq KR^i$ *für ein* $0 < R < 1$ *und* $|\omega_{-i}| \leq KS^i$ *für ein* $S > 0$ *und* $K > 1$. *Weiter sei* $0 < c < \left(1 + K^2 (R+S)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. *Dann ist*

$$B(\omega) := V(\omega)c^N \tag{3.70}$$

ein Hilbert–Schmidt–Operator. Für dieses c *gilt*

$$V(\omega) = V(\omega)c^N c^{-N} = B(\omega)c^{-N} \tag{3.71}$$

auf $D(V(\omega)) \cap D(c^{-N})$. *Wir können also* $V(\omega)$ *durch die rechte Seite von (3.71) auf* $D(c^{-N})$ *definieren.*

Beweis.
Wir müssen zeigen, daß für geeignetes $c > 0$

$$\sum_{\eta,\nu} |\nu_{\eta,\nu}(\omega)c^{\|\nu\|}|^2 < \infty$$

gilt. Wir setzen $M = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i|^2)$. Zunächst summieren wir über η. Aus dem Beweis von Satz 3.2.2 erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum_{\eta} |v_{\eta\nu}(\omega)c^{\|\nu\|}|^2 &= c^{2\|\nu\|} \sum_{\eta} |\nu_{\eta\omega}(\omega)|^2 \\
&\leq \frac{Mc^{2\|\nu\|}}{\nu!} \prod_{i=1}^{\infty} m_{\nu_i,\nu_j}\left(|\omega_i| + |\omega_{-i}|, |\omega_i| + |\omega_{-i}|\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad M c^{2\|\nu\|} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\nu_i!} \sum_{j=0}^{\nu_i} \binom{\nu_i}{j}^2 j! \left(|\omega_i| + |\omega_{-i}|\right)^{2(\nu_i - j)} \right\} \\
&\leq \quad M c^{2\|\nu\|} \prod_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu_i} \binom{\nu_i}{j} \left(|\omega_i| + |\omega_{-i}|\right)^{2(\nu_i - j)} \right\} \\
&= \quad M c^{2\|\nu\|} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \left(|\omega_i| + |\omega_{-i}|\right)^2\right)^{\nu_i}.
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Bis jetzt war c beliebig. Nach Voraussetzung können wir abschätzen

$$
\begin{aligned}
c^{2i\nu_i}\left(1 + \left(\|\omega_i\| + \|\omega_{-i}\right)^2\right)^{\nu_i} \quad &\leq \quad c^{2i\nu_i}\left(1 + K^2\left(R^i + S^i\right)^2\right)^{\nu_i} \\
&= \quad \left(c^{2i}\left(1 + K^2\left(R^i + S^i\right)^2\right)\right)^{\nu_i} \\
&=: \quad X_i^{\nu_i}.
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Für die Summierbarkeit für alle i benötigen wir $|X_i| < 1$ für alle i. Man überlegt sich leicht, daß falls $c^2\left(1 + K^2\left(R + S\right)^2\right) < 1$ oder

$$
c^2 < \frac{1}{1 + K^2(R+S)^2}
\tag{3.74}
$$

gilt, aus den Voraussetzungen des Satzes $1 > X_1 > X_2 > \ldots > X_i > \ldots$ folgt.
Wir wählen ein c das (3.74) erfüllt und können so weiter abschätzen

$$
\begin{aligned}
\sum_{\eta,\nu} |v_{\eta,\nu}(\omega) c^{2\|\nu\|}|^2 \quad &\leq \quad M \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu_i=0}^{\infty} X_i^{\nu_i} \\
&= \quad M \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - X_i} < \infty,
\end{aligned}
$$

da $\sum_{i=1}^{\infty} X_i < \infty$ ist. Damit ist $B(\omega) = V(\omega)c^N$ ein Hilbert–Schmidt–Operator. Es ist klar, daß (3.71) auf $\mathcal{F}$ gilt, denn es ist

$$
\begin{aligned}
V(\omega)\Phi_\nu \quad &= \quad \sum_\eta v_{\eta\nu}(\omega)\Phi_\eta \\
&= \quad \sum_\eta v_{\eta\nu}(\omega) c^{\|\nu\|}\, c^{-\|\nu\|}\Phi_\eta \\
&= \quad B(\omega)c^{-N}\Phi_\nu.
\end{aligned}
$$

Weiter ist, da $\mathcal{F} \subset D(V(\omega))$ und $V(\omega)$ als Matrixoperator definiert wurde, $V(\omega)$ "abgeschlossen auf $\mathcal{F}$" in dem folgendem Sinne:
Für $\Phi = \sum c_\nu \Phi_\nu \in D(V(\omega))$ und $\Phi_L = \sum_{\|\nu\| \leq L} c_\nu \Phi_\nu$ gilt $V(\omega)\Phi_L \longrightarrow V(\omega)\Phi$. Damit folgt für $\Phi \in D(V(\omega)) \cap D(c^{-N})$:

$$\begin{array}{ccc} V(\omega)\Phi_L & \longrightarrow V(\omega)\Phi & (L\to\infty) \\ \| & & \\ B(\omega)c^{-N}\Phi_L & \longrightarrow B(\omega)c^{-N}\Phi & (L\to\infty), \end{array}$$

da c^{-N} abgeschlossen ist. $\square$

Konkret für $V(\gamma,z)$ bzw. $V(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;z_1,\ldots,z_r)$ mit $|z_i|<1$ erhalten wir wegen $|\frac{\gamma}{\sqrt{i}}z^{\pm i}| \leq \max\{|\gamma|,1\}|z^{\pm 1}|^i$ bzw. $|\frac{\gamma_1 z_1^{\pm i}+\ldots+\gamma_r z_r^{\pm i}}{\sqrt{i}}| \leq r\max\{|\gamma_j|,1\}(\max\{|z_j^{\pm 1}|\})^i$ die folgende Bedingung für c aus (3.74):

$$c \;<\; \Big(1+\max\{|\gamma|,1\}^2(|z|+|z|^{-1})^2\Big)^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.75}$$

Eine analoge Ungleichung erhalten wir für $V(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;z_1,\ldots,z_r)$. Wichtig an (3.75) ist, daß c unabhängig von $\arg z$ ist, wir können eine Faktorisierung von $V(\gamma,z)$ finden, so daß $V(\gamma,z)=B(\gamma,z)c^{-N}$ für alle $c_1<|z|<c_2$ für ein festes c gilt. Eine analoge Aussage gilt für $V(\gamma_1,\ldots,\gamma_r;z_1,\ldots,z_r)$.

In Abschätzung (3.73) sieht man, daß für jedes $c<S^{-1}$ ein i_0 existiert mit $|X_i|<1$ für alle $i\geq i_0$. Anders gesagt, bedeutet das (vgl. (3.14)):

Korollar 3.5.2 *Sei*

$$V_i(\omega)=\prod_{n\geq i}\exp\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{n}}a_{-n}\right)\exp\left(-\frac{\omega_{-n}}{\sqrt{n}}a_n\right) \tag{3.76}$$

und ω erfülle die Voraussetzungen von Satz 3.5.1. Dann gibt es für jedes $c<S^{-1}$ ein i_0, so daß für alle $i\geq i_0$ die Matrixelemente von $V_i(\omega)c^{\sum_{j=i}^{\infty}-a_{-n}a_n}$ einen Hilbert–Schmidt–Operator in $\mathcal{H}$ definieren.

Wir vermuten, daß die Bedingung $c<S^{-1}$ die natürliche Voraussetzung für die Gültigkeit von Satz 3.5.1 ist. Das formulieren wir folgendermaßen:

Vermutung 3.5.3 *Für jedes $c<S^{-1}$ definieren die Matrixelemente von*

$$B(\omega)_n := \exp\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{n}}a_{-n}\right)\exp\left(-\frac{\omega_{-n}}{\sqrt{n}}a_n\right)c^{-a_{-n}a_n} \tag{3.77}$$

einen beschränkten Operator in $\mathcal{H}$.

Wäre diese Vermutung wahr, so wäre für jedes $c < S^{-1}$ der Operator $V(\omega)c^{-N}$ Hilbert–Schmidt, denn $V(\omega)c^{-N}$ ließe sich dann als ein Produkt eines Hilbert–Schmidt–Operators aus Korollar 3.5.2 mit endlich vielen beschränkten Operatoren darstellen. Im Falle von $V(\gamma, z)$ würde folgen, daß $V(\gamma, z)c^{-N}$ für jedes $c < |z|$ ein Hilbert–Schmidt–Operator ist. In [Fe2] wurde die (etwas schwächere) Behauptung aufgestellt, daß unter den genannten Voraussetzungen $V(\omega)c^{-N}$ ein kompakter Operator ist.

Eine Bemerkung zum Beweis der Vermutung: Sei $\mathcal{H}_n = \overline{\mathrm{Lin}\{\Phi_\mu \,:\, \mu_k = 0 \ (k \neq n)\}}$ und $\hat{\mathcal{H}}_n = \overline{\mathrm{Lin}\{\Phi_\mu \,:\, \mu_n = 0\}}$. Dann gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \otimes \hat{\mathcal{H}}_n$. Es reicht zu zeigen, daß

$$\check{B}(\omega)_n := B(\omega)_n\Big|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$$

ein beschränkter Operator ist, denn dann ist $B(\omega)_n = \check{B}(\omega)_n \otimes 1$ ebenfalls beschränkt.

3.6 Die Nichtabschließbarkeit von $V(\omega)$ und $\Phi(z)$

Nach dem positiven Ergebnis des letzten Abschnittes wollen wir uns nun einem negativen Resultat zuwenden, der bereits erwähnten Nichtabschließbarkeit des freien Feldes und der nicht verschmierten Vertex–Operatoren.
Man bemerke, daß auch bei der Faktorisierung $V(\omega) = B(\omega)c^{-N}$ die rechte Seite trotz ihrer schönen Faktoren Hilbert–Schmidt $\times$ Selbstadjungiert i. allg. nicht abschließbar sein muß (und auch nicht sein kann).
Zum Beweis der Nichtabschließbarkeit benötigen wir eine neue Menge von Elementen in $\mathcal{H}$, die sogenannten kohärenten Zustände. Kohärente Zustände sind verwandt mit dem Vertex–Operatoren, denn wie wir gleich sehen werden, ergibt ein Vertex–Operator, angewendet auf den Grundzustand Φ_0 in $\mathcal{H}$, einen kohärenten Zustand. Eine gute Einführung findet man in dem Buch von J. Klauder und E. Sudarshan "Quantum Optics" [KS] in Chapter 7.

Wir geben nun einen kurzen Überblick über die Eigenschaften kohärenter Zustände mit abzählbar unendlich vielen Freiheitsgraden, soweit wir sie benötigen.
Für $t = (t_1, \ldots, t_l) \in \mathbb{C}^l$ sei

$$|t, l\rangle \ := \ N_l \sum_{\mu_1 = \ldots = \mu_l = 0}^{\infty} \prod_{i=1}^{l} \frac{t_i^{\mu_i}}{\sqrt{\mu_i! i^{\mu_i}}} \Phi_\mu \tag{3.78}$$

$$= \ N_l \exp\left(\sum_{i=1}^{l} \frac{t_i}{i} a_{-i}\right) \Phi_0 \tag{3.79}$$

mit $N_l = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\frac{|t_i|^2}{i}\right)$. Das Exponential in (3.79) ist über die Potenzreihe definiert. Die normierten Vektoren $|t,l\rangle$ heißen kohärente Zustände, da sie Eigenvektoren der Vernichteroperatoren sind. Das können wir entweder durch eine explizite Rechnung sehen oder durch Anwendung von Lemma 3.4.1:
Wie (3.79) und (3.20) zeigen, entsteht $|t,l\rangle$ durch Anwendung des Vertex–Operators $V(\omega)$ mit

$$\omega_i = \begin{cases} \frac{t_i}{\sqrt{i}} & i = 1,\ldots,l, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

auf Φ_0. Nach Lemma 3.4.1 ist $V(\omega)\Phi_0 \in D(a_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$, und es gilt für $l \geq n > 0$

$$a_n|t,l\rangle = N_l a_n V(\omega)\Phi_0 = N_l V(\omega)(a_n + t_n)\Phi_0 = t_n N_l V(\omega)\Phi_0 = t_n|t,l\rangle. \tag{3.80}$$

Es folgt also

$$a_n|t,l\rangle = \begin{cases} t_n|t,l\rangle & 0 < n \leq l \\ 0 & n > l. \end{cases} \tag{3.81}$$

Sei $l_{2,h} = \{t = (t_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|t\|_{2,h} := \sum_{i=1}^{\infty}\frac{|t_i|^2}{i} < \infty\}$. Nach Satz 3.2.2 existiert für $t \in l_{2,h}$ der Grenzwert $\lim_{l\to\infty}|t,l\rangle =: |t\rangle$. Wiederum aus Lemma 3.4.1 folgt, daß $a_n|t\rangle = t_n|t\rangle$ für alle $n > 0$ gilt. Eine wichtige Eigenschaft der kohärenten Zustände ist:

Lemma 3.6.1 *Die Abbildung $l_{2,h} \longrightarrow S(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ mit $t \longmapsto |t\rangle$ ist stetig, es gilt*

$$\|\,|t\rangle - |t'\rangle\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\,(\|t\|_{2,h} + \|t'\|_{2,h})\,\|t - t'\|_{2,h}.$$

Einen Beweis findet man in [KS].
Außerdem werden wir die folgende Aussage benötigen:

Lemma 3.6.2 *Für jedes $t \in l_{2,h}$ ist die Menge der kohärenten Zustände*

$$\{|t + t_0\rangle : t_0 \in l_{2,0}\} \tag{3.82}$$

total in $\mathcal{H}$.

Beweis.
Sei $t \in l_{2,h}$ beliebig und Φ fest gewählt. Wir zeigen:
Falls $\langle\Phi|t+t_0\rangle = 0$ für alle $t_0 \in l_{2,0}$, folgt $\Phi = 0$. Wähle $r \in \mathbb{N}$ und $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{N}$. Weiter sei $l > \mu_r$. Für beliebige $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{C}$ gibt es ein $t^{(l)} \in l_{2,0}$, so daß

$$t + t^{(l)} = (0, \ldots, u_1, 0, \ldots, u_2, \ldots, 0, u_r, 0, \ldots, t_l, t_{l+1}, \ldots),$$

wobei u_i in der Position μ_i stehen soll, das heißt

$$\left(t + t^{(l)}\right)_i = \begin{cases} u_j & i = \mu_j, \\ t_i & i \geq l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.83}$$

Da $t + t^{(l)} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} (0, \ldots, u_1, \ldots, u_r, 0, 0, 0, \ldots) =: u$ in $l_{2,h}$, folgt nach Lemma 3.6.1 $|t + t^{(l)}\rangle \longrightarrow |u\rangle$ und folglich

$$\langle\Phi|t + t^{(l)}\rangle \longrightarrow \langle\Phi|u\rangle.$$

Dieses Skalarprodukt läßt sich aber explizit angeben.
Zunächst sei $\Phi = \Phi_\eta$ mit $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_N, 0, 0, \ldots)$ ein Basisvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle\Phi_\eta|u\rangle &= (\eta! I^\eta)^{-\frac{1}{2}} \left\langle a_{-N}^{\eta_N} \ldots a_{-1}^{\eta_1} \Phi_0 | u \right\rangle \\ &= (\eta! I^\eta)^{-\frac{1}{2}} \langle \Phi_0 | a_1^{\eta_1} \ldots a_N^{\eta_N} | u\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{r} \frac{u_i^{\eta_{\mu_i}}}{\sqrt{\eta_{\mu_i}! \mu_i^{\eta_{\mu_i}}}} \prod_{j \notin \{\mu_i\}} \delta_{0,\eta_j} \langle\Phi_0|u\rangle \\ &= \prod_{i=1}^{r} \frac{u_i^{\eta_{\mu_i}}}{\sqrt{\eta_{\mu_i}! \mu_i^{\eta_{\mu_i}}}} \prod_{j \notin \{\mu_i\}} \delta_{0,\eta_j}. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Die Kronecker–Deltas entstehen, da $a_n|t\rangle = 0$ falls $t_n = 0$ gilt und das hier immer der Fall ist, falls $n \notin \{\mu_i\}$ ist. Es ist also $\langle\Phi_\eta|u\rangle = 0$, falls ein $\eta_j \neq 0$ mit $j \notin \{\mu_i\}$ existiert. Damit ergibt sich für $\Phi = \sum_\eta c_\eta \Phi_\eta$

$$\begin{aligned} \langle\Phi|u\rangle &= \sum_\eta \overline{c}_\eta \langle\Phi_\eta|u\rangle \\ &= \sum_{\eta_{\mu_1}, \ldots, \eta_{\mu_r}=0}^{\infty} \overline{c}_\eta \langle\Phi_\eta|u\rangle \\ &= \sum_{\eta_{\mu_1}, \ldots, \eta_{\mu_r}=0}^{\infty} \overline{c}_\eta \prod_{i=1}^{r} \frac{u_i^{\eta_{\mu_i}}}{\sqrt{\eta_{\mu_i}! \mu_i^{\eta_{\mu_i}}}}. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Dies ist aber eine ganze Funktion in den Variablen $u_1, \ldots, u_r$. Ist nun $\langle \Phi | t + t^{(l)} \rangle = 0$ für alle $t^{(l)} \in l_{2,0}$, so folgt $\langle \Phi | u \rangle = 0$ für alle $(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{C}^l$ und damit impliziert (3.85) $c_\eta = 0$ für alle η der Form $\eta = (0, \ldots, \eta_{\mu_1}, 0, \ldots, \eta_{\mu_r}, 0, 0)$. Da aber r und $\mu_1, \ldots, \mu_r$ beliebig waren, und alle η von dieser Form für geeignete r und $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sind, folgt $c_\eta = 0$ für alle η und damit $\Phi = 0$. □

Da wir Vertex–Operatoren auf kohärente Zustände anwenden wollen, benötigen wir noch das folgende Lemma:

Lemma 3.6.3 *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} |\omega_k|^2 < \infty$. *Dann gilt*

i) $|t, l\rangle \in D\left(V\left(\omega\right)\right)$ *und*

ii) $V(\omega)|t, l\rangle = K_l \exp\left(-\sum_{k=1}^{l} \frac{\omega_k t_k}{\sqrt{k}}\right) |\tau, l\rangle$, *wobei* $|\tau, l\rangle$ *ein kohärente Zustand ist, der durch*

$$a_n|\tau, l\rangle = \begin{cases} (\sqrt{n}\omega_n + t_n)\,|\tau, l\rangle & \text{für } 0 < n \leq l \\ \sqrt{n}\omega_n|\tau, l\rangle & \text{für } n > l \end{cases}$$

festgelegt ist. Für K_l *erhalten wir*

$$K_l^{(t)} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\sqrt{k}\omega_k + t_k\right|^2 - |t_k|^2}{k}\right),$$

wobei wir $t_k = 0$ *für* $k > l$ *gesetzt haben.*

Beweis.
Eine direkte Anwendung von Satz 3.3.1, wenn wir $|t, l\rangle$ nach (3.79) durch einen Vertex–Operator erzeugt denken. □

Wir können nun ein Komplement zu Satz 3.2.2 beweisen, hierzu benötigen wir aber noch das folgende technische Lemma:

Lemma 3.6.4 *Sei* $t = (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. *Ist* $t \notin l_2$, *so existiert ein* $\omega \in l_2$ *mit* $t\omega \notin l_1$ *und* $t_i\omega_i \geq 0$ *für alle* i.

Beweis.
Eine einfache Übung. □

Ist $(\omega_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l_2$, so gilt $\mathcal{F} \subset D\left(V(\omega)\right)$. Wir wollen nun die Nichtabschließbarkeit dieses Operators, falls $(\omega_{-i})_{i \in \mathbb{N}} \notin l_2$ gilt, beweisen. Die Abschließbarkeit eines Operators hängt im allgemeinen vom Definitionsbereich des Operators ab. Da wir $V(\omega)$ als den maximalen Operator definiert haben, könnte eine Einschränkung von $V(\omega)$ abschließbar sein, obwohl $V(\omega)$ nicht abschließbar ist. Deshalb führen wir auch einen "minimalen Operator" ein,

$$V(\omega)_0 := V(\omega)|_{\mathcal{F}} \tag{3.86}$$

mit $D\left(V(\omega)_0\right) = \mathcal{F}$. Es ist klar, daß jede Fortsetzung von $V(\omega)_0$ nicht abschließbar ist, wenn $V(\omega)_0$ nicht abschließbar ist.

Satz 3.6.5 *Sei $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$, aber $(\omega_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \notin l_2$. Dann sind $V(\omega)_0$ und $V(\omega)$ nicht abschließbare (nicht abgeschlossene) Operatoren.*

Eine direkte Folgerung aus dem Beweis von Satz 3.6.5 ist:

Korollar 3.6.6 *$(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \notin l_2$, $(\omega_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$. Dann ist*

$$D\left(V(\omega)\right) = \{0\}$$

und $V(\omega)$ trivialerweise abgeschlossen.

Beweis.
Es gilt $\left(V(\omega)_0\right)^* = V\left(\{-\overline{\omega}_{-i}\}\right)$ ([Wd] Satz 6.20). □
Zusammenfassend erhalten wir aus Satz 3.2.2, Satz 3.6.5 und Korollar 3.6.6:

Korollar 3.6.7 *i) Sei $(\omega_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$. Dann ist $V(\omega)$ genau dann dicht definiert, wenn $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$.*

ii) Sei $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$. Dann ist $V(\omega)$ genau dann abgeschlossen, wenn

$$(\omega_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \in l_2.$$

Beweis von Satz 3.6.5.
Wir beweisen zunächst die Nichtabschließbarkeit von $V(\omega)$. Sei also $\omega = (\omega_{\pm i})$ fest gewählt mit $(\omega_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_2$, $(\omega_{-i})_{i\in\mathbb{N}} \notin l_2$. Nach Lemma 3.6.4 existiert eine Folge $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ mit $\sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_{-n}t_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow +\infty$ und folglich auch $\exp\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\omega_{-n}t_n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \infty (N \to \infty)$.

Sei nun $0 \neq \Phi \in \mathcal{H}$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß $\Phi \notin D\left(V(\omega)^*\right)$ gilt. Dazu zeigen wir, daß eine Folge $(f_n) \subset D\left(V(\omega)\right)$, $\|f_n\| = 1$ existiert mit

$$|\langle \Phi, V(\omega) f_n \rangle| \longrightarrow \infty.$$

Nach Lemma 3.6.3 gilt mit $F_l^{(t)} = \exp\left(\sum_{n=1}^{l} \frac{\omega_{-n} t_n}{\sqrt{n}}\right)$

$$V(\omega)|t, l\rangle = K_l^{(t)} F_l^{(t)} |\tau, l\rangle.$$

Weiter existiert nach Lemma 3.6.2 ein $t' \in l_{2,0}$ mit

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} \langle \Phi | \tau + t', l\rangle = \langle \Phi | \tau + t' \rangle \neq 0.$$

Damit folgt

$$|\langle \Phi | V(\omega) | t + t', l \rangle| = \left| K_l^{(t+t')} F_l^{(t+t')} \langle \Phi | \tau, l \rangle \right| \to \infty \qquad (l \to \infty),$$

denn $K_l^{(t+t')}$ und $\langle \Phi | \tau, l\rangle$ konvergieren für $l \to \infty$ gegen endliche Zahlen $\neq 0$ und $F_l^{(t+t')}$ ist divergent mit $l \to \infty$. Es folgt also $\Phi \notin D\left(V(\omega)^*\right)$ und die Nichtabschließbarkeit von $V(\omega)$.
Zu zeigen bleibt die Nichtabschließbarkeit von $V(\omega)_0$. Dazu approximieren wir $|t, l\rangle$ durch Elemente aus $\mathcal{F} = D\left(V(\omega)_0\right)$:
Sei für $Q \in \mathbb{N}$

$$|t, l, Q\rangle := N_l \sum_{\mu_1 = \ldots = \mu_l = 0}^{Q} \prod_{i=1}^{l} \frac{t_i^{\mu_i}}{(\mu_i! i^{\mu_i})^{\frac{1}{2}}} \Phi_\mu. \tag{3.87}$$

Es gilt $|t, l, Q\rangle \longrightarrow |t, l\rangle \qquad (Q \to \infty)$ und wie wir schon im Beweis von Satz 3.5.1 bemerkt haben, folgt aus Satz 3.3.1, daß sogar

$$V(\omega)_0 |t, l, Q\rangle \longrightarrow V(\omega)|t, l\rangle \qquad (Q \to \infty) \tag{3.88}$$

gilt.
Wir können also eine Folge $Q_l \to \infty \quad (l \to \infty)$ wählen, so daß

$$|\langle \Phi | V(\omega)_0 | t, l, Q_l \rangle| \to \infty \qquad (l \to \infty)$$

gilt, woran die Nichtabschließbarkeit von $V(\omega)_0$ folgt. □

Als letztes in diesem Abschnitt wollen wir den Beweis der Nichtabschließbarkeit des freien Feldes $\Phi(z)$ für $|z| < 1$ skizzieren.
Dazu sei $\Phi_-(z) = i \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} a_{-n}$, $\Phi_+(z) = -i \sum_{n>0} \frac{z^{-n}}{n} a_n$ und $\Phi(z) = \Phi_-(z) + \Phi_+(z)$. Dabei haben wir im Vergleich zu (3.1) die unwesentlichen Terme $q - i a_0 \ln z$ weggelassen.
Die Nichtabschließbarkeit von $\Phi(z)$ können wir in folgenden Schritten zeigen:

i) $\Phi_+(z)$ ist nicht abschließbar:
Dazu berechnet man $\Phi_+(z)|t,l\rangle = \left(\sum_{n=1}^{l} \frac{t_n z^n}{n}\right)|t,l\rangle$. Zu jedem $\Psi \in \mathcal{H}$ gibt es ein $t \in l_{2,h}$ mit

$$\langle\Psi|t\rangle \neq 0 \text{ und } \left|\sum_{n=1}^{l} \frac{t_n z^{-n}}{n}\right| \to \infty \qquad (l \to \infty).$$

Es folgt $|\langle\Psi|\Phi_+(z)|t,l\rangle| = \left|\sum_{n=1}^{l} \frac{t_n z^{-n}}{n} \langle\Psi|t,l\rangle\right| \to \infty \ (l \to \infty)$ und deshalb $\Psi \notin D\left(\Phi_+(z)^*\right)$.

ii) Es gilt $\|\Phi_-(z)|t,l\rangle\| \leq C(t)$ unabhängig von l und deshalb können wir abschätzen

$$\begin{aligned}
|\langle\Psi|\Phi(z)|t,l\rangle| &= |\langle\Psi|\Phi_-(z)|t,l\rangle + \langle\Psi|\Phi_+(z)|t,l\rangle| \\
&\geq |\langle\Psi|\Phi_+(z)|t,l\rangle| - \|\Psi\|\,\|\Phi_-(z)|t,l\rangle\| \\
&\geq |\langle\Psi|\Phi_+(z)|t,l\rangle| - C(t)\|\Psi\| \to \infty \ (l \to \infty).
\end{aligned}$$

Damit folgt auch die Nichtabschließbarkeit von $\Phi(z)$.

Kapitel 4

Abgeschirmte Vertex–Operatoren

4.1 Der Ladungsoperator

Als erstes Beispiel eines "abgeschirmten" Vertex–Operators definieren wir den Ladungsoperator Q. Damit werden wir in der Lage sein, den Beweis der Kac–Determinantenformel zu vervollständigen und die in Satz 1.5.1 behaupteten Intertwiner zu konstruieren.
Sei C_z die positiv orientierte Kurve aus Abbildung 4.1, die in z startet und wieder endet.
Sei $\mathrm{Re}\,\gamma^2 > 0$ und

z

0

Abbildung 4.1: Die Kontur C_z

$$1 = |z_1| > |z_2| > \ldots > |z_r| > 0. \tag{4.1}$$

Für $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ und $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ sei

$$\langle \Phi, Q\,(\gamma; n_1, \ldots, n_r)\,\Psi \rangle :=$$
$$\int_{C_1} \int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} \langle \Phi, F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) T_{r\gamma} V(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \Psi \rangle \prod_{j=1}^{r} z_j^{-n_j-1} dz_r \cdots dz_1. \tag{4.2}$$

Das Integral ist dabei als ein r–faches Kurvenintegral zu verstehen, die Integrale sind in der bezeichneten Reihenfolge auszuführen. Nach dem Satz von Fubini können wir aber die Integrationsreihenfolge von $z_2, \ldots, z_r$ beliebig vertauschen. Die Integrationsmenge liegt nicht in (4.1), ist aber (um die Phasen festzulegen) als Grenzwert aus (4.1) zu verstehen.
Da wir $\mathrm{Re}\,\gamma^2 > 0$ verlangen, existiert das Integral (4.2) für beliebige $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$, d. h. (4.2) definiert eine Form $Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)$ mit $D(Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)) = \mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu sehen, daß $Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)$ einen Operator zumindest auf $\mathcal{F}$ definiert. Wir werden zeigen, daß (4.2) "fast immer" Null ist, weshalb die Form ohne weitere Probleme einen Operator auf $\mathcal{F}$ definiert. Wir könnten natürlich auch die Ergebnisse aus Kapitel 3, Satz 3.2.2 oder Satz 3.5.1 anwenden, aber für Q wäre das nicht angemessen. Auf diese Methode werden wir im nächsten Abschnitt zurückgreifen.

Lemma 4.1.1 *Seien $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

(i)
$$\int_{c_1} \int_{c_{z_1}} \cdots \int_{c_{z_1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^{r} z^{m_j - 1} dz_r \cdots dz_1 = 0 \tag{4.3}$$

falls $\sum_{j=1}^{r} m_j \neq 0$.

(ii)
$$W(z) := \int_{c_{z_1}} \cdots \int_{c_{z_1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^{r} z^{m_j - 1} dz_r \cdots dz_2 \tag{4.4}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Beweis.

(i) Sei $z_1 = e^{i\varphi_1} = e^{i\tilde\varphi_1}$ mit $0 \leq \tilde\varphi_1 \leq 2\pi$, $dz_1 = ie^{i\tilde\varphi_1} d\tilde\varphi_1$ und $z_j = e^{i(\varphi_1 + \varphi_j)} =: e^{i\tilde\varphi_j}$ mit $dz_j = ie^{i\tilde\varphi_j} d\tilde\varphi_j = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_j} d\varphi_j$ und $0 \leq \varphi_j \leq 2\pi$ $(j \geq 2)$. Wir haben zu berechnen ($\lambda = -\frac{r-1}{2}\gamma$)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2\pi} \cdots \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + 2\pi} \prod_{1 \leq k < j \leq r} \left(e^{i\tilde\varphi_k} - e^{i\tilde\varphi_j}\right)^{\gamma^2} \prod_{j=1}^{r} e^{i\tilde\varphi_j(\lambda\gamma + m_j - 1)} \prod_{j=1}^{r} ie^{i\tilde\varphi_j} d\tilde\varphi_r \cdots d\tilde\varphi_1 \\
&= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \prod_{j=2}^{r} \left(e^{i\varphi_1}\left(1 - e^{i\varphi_j}\right)\right)^{\gamma^2} \prod_{2 \leq k < j \leq r} \left(e^{i\varphi_1}\left(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_j}\right)\right)^{\gamma^2} \times \\
&\quad e^{i\varphi_1(\lambda\gamma + m_1 - 1)} \prod_{j=2}^{r} e^{i(\varphi_1 + \varphi_j)(\lambda\gamma + m_j - 1)} e^{i\varphi_1(r-1)} \prod_{j=1}^{r} ie^{i\varphi_j} d\varphi_j .
\end{aligned}$$

Sammeln der $e^{i\varphi_1}$–Terme ergibt:

$$= \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_1\left(\sum_{j=1}^r m_j - 1\right)} \prod_{j\geq 2} \left(1 - e^{i\varphi_j}\right)^{\gamma^2} \prod_{2\leq k<j<r} \left(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_j}\right)^{\gamma^2} \times$$
$$\prod_{j\geq 2} e^{i\varphi_j(\lambda\gamma + m_j - 1)} \prod_{j=1}^{r} ie^{i\varphi_j} d\varphi_j .$$

Das φ_1–Integral faktorisiert und wir erhalten

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} e^{i\varphi_1\left(\sum_{j=1}^r m_j - 1\right)} ie^{i\varphi_1} d\varphi_1 \int_{[0,2\pi]^{r-1}} \cdots \prod_{j\geq 2} ie^{i\varphi_j} d\varphi_j \\ &= \int_{S^1} z_1^{\sum m_i - 1} dz_1 \int_{(S^1)^{r-1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma, 1, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j\geq 2} z_j^{m_j - 1} dz_r \ldots dz_2 . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Das Integral über z_1 ist Null, falls $\sum_{i=1}^r m_i \neq 0$. Damit ist (i) bewiesen.

(ii) Der Fall $\gamma^2 \in \mathbb{N}$ ist klar, wir setzen deshalb $\gamma^2 \notin \mathbb{N}$ voraus. $W(z)$ ist analytisch für $z \neq 0$. Zu zeigen ist noch, daß $z = 0$ kein Verzweigungspunkt von $W(z)$ ist, sondern höchstens eine isolierte Singularität. Für jedes $\varepsilon > 0$ definieren wir $W_\varepsilon(z)$ als Integral über die Konturen aus Abbildung 4.2.

Wir haben also $|z_k - z_j| \geq |k-j|\varepsilon$. Es gilt $|W(z) - W_\varepsilon(z)| \leq C(|z|)\,\varepsilon^{r-1}$. Wie aus

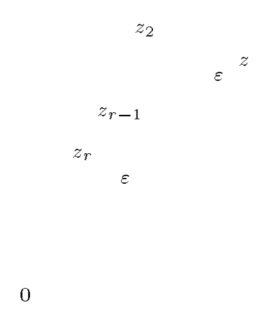


Abbildung 4.2: Die Konturen von W_ε

einem $\frac{\varepsilon}{3}$–Argument folgt, kann $W(z)$ keinen Verzweigungspunkt in Null haben,

falls $W_\varepsilon(z)$ keinen hat.
Den Integranden von $W_\varepsilon(z)$ können wir in binomischen Reihen entwickeln, d. h. jeder Faktor $(z_k - z_j)^{\gamma^2} = z_k^{\gamma^2}\left(1 - \frac{z_j}{z_k}\right)^{\gamma^2}$ wird in eine binomische Reihe entwickelt. Da die Reihen auf der Integrationsmenge gleichmäßig konvergieren, können wir gliedweise integrieren.
Wir erhalten für den Integranden

$$\begin{aligned} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \prod z_j^{m_j-1} &= \prod_{k<j} (z_k - z_j)^{\gamma^2} \prod_{j=1}^{r} z_j^{-\frac{r-1}{2}\gamma^2 + m_j - 1} \\ &= \prod_{j=1}^{r} z_j^{\frac{r-2j+1}{2}\gamma^2 + m_j - 1} \prod_{k<j} (1 - \frac{z_j}{z_k})^{\gamma^2} \\ &= \prod_{j=1}^{r} z_j^{\frac{r-2j+1}{2}\gamma^2 + m_j - 1} \prod_{k<j} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{z_j}{z_k}\right)^n \right\}, \quad (4.6) \end{aligned}$$

wobei $C_n = (-1)^n \frac{(\gamma^2 - n + 1)n}{n!}$ ist.
Das Produkt kann man (im Prinzip) ausmultiplizieren und erhält eine Entwicklung der Form

$$= \prod_{j=1}^{r} z_j^{\frac{r-2j+1}{2}\gamma} \times \text{ (Laurententwicklung in Null von } (z_1, \ldots, z_r)),$$

gültig in $|z_1| - \varepsilon \geq |z_2| - \varepsilon \geq \cdots \geq |z_{r-1}| - \varepsilon \geq |z_r|$. Nun gilt

$$\int_{C_z} t^\alpha dt = \frac{e^{2\pi i(\alpha+1)} - 1}{\alpha + 1} z^{\alpha+1},$$

und folglich bleibt der nichtganzzahlige Anteil bei den Integrationen erhalten. Wir erhalten also, daß

$$W_\varepsilon(z) = \int_{C_{z(1-\varepsilon)}} \cdots \int_{C_{z(1-(r-1)\varepsilon)}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z, z_2, \ldots, z_r) \prod_{j=1}^{r} z_j^{m_j-1} dz_r \cdots dz_2$$

bis auf eine Laurententwicklung in Null nur noch den Term

$$\prod_{j=1}^{r} \left(z_1 (1 - (j-1)\varepsilon)\right)^{\frac{r-2j+1}{2}\gamma^2} = C(\varepsilon) z_1^{\sum_{j=1}^{r} \frac{r-2j+1}{2}\gamma^2} = C(\varepsilon)$$

enthält, also eine echte Laurententwicklung in Null besitzt und folglich analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist. □

Mit Hilfe von Lemma 4.1.1 können wir nun zeigen, daß die Matrixelemente (4.2) zu einem dicht definierten Operator gehören.

Satz 4.1.2 *(i) Es ist* $\langle \Phi_\mu, Q\,(\gamma, n_1, \ldots, n_r)\,\Phi_\nu\rangle = 0$, *falls* $\|\nu\| + \sum_{j=1}^r n_j \neq \|\mu\|$.

(ii) $Q\,(\gamma; n_1, \ldots, n_r)\,\Phi_\nu \ := \ \sum_\mu \langle \Phi_\mu, Q\,(\gamma, n_1, \ldots, n_r)\,\Phi_\nu\rangle\,\Phi_\mu$ *ist ein Operator vom Grad* $\sum_j n_j$, *d. h. es gilt* $Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r) : \mathcal{F}(\alpha, \beta)_n \longrightarrow \mathcal{F}(\alpha + r\gamma, \beta)_{n+\sum n_j}$. $Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)$ *ist (als Matrixoperator) abgeschlossen.*

(iii) Es gilt stark auf $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
&[L_n, Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)] \\
&= \sum_{j=1}^r \left(n_j - n + \gamma a_0 - \frac{n}{2}\gamma^2 + n(\beta\gamma + \frac{\gamma^2}{2})\right) Q(\gamma; n_1, \ldots, n_j - n_i, \ldots, n_r). \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.3 *(i) Im Falle* $n_1 = \ldots = n_r = s$ *schreiben wir* $Q(\gamma; r, s)$ *für* $Q(\gamma; \underbrace{s, \ldots, s}_{r-\text{viele}})$.

(ii) Wählt man $\beta\gamma + \frac{\gamma^2}{2} = 1$ *und* $s = \frac{r}{2}\gamma^2 - \gamma a_0$, *so ist* $[L_n, Q(\gamma; r, s)] = 0$, *d. h.* $Q(\gamma; r, s)$ *ist ein Intertwiner zwischen den Fock–Moduln* $\mathcal{H}(\alpha - r\gamma, \beta)$ *und* $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$.

Beweis von Satz 4.1.2 (i).

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_\mu, Q\,(\gamma; n_1, \ldots, n_r)\,\Phi_\nu\rangle \\
&= \int_{C_1} \cdots \int_{C_{z_1}} \langle \Phi_\mu, F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma, z_1, \ldots, z_r) T_{r\gamma} V(\gamma, z_1, \ldots, z_r) \Phi_\nu\rangle \prod z_i^{-n_i-1} dz_r \cdots dz_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\mu!\nu!}} \int_{C_1} \cdots \int_{C_{z_1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \times \\
&\quad \prod_{i=1}^\infty m_{\mu_i,\nu_i}\Big(\frac{\gamma}{\sqrt{i}}(z_1^i + \ldots + z_r^i), -\frac{\gamma}{\sqrt{i}}(z_1^{-i} + \ldots + z_r^{-i})\Big) \prod z_i^{-n_i-1} dz_r \cdots dz_1. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Sei $\deg(\prod z_i^{k_i}) := \sum k_i$, dann gilt

$$\deg\left(\left(z_1^i + \ldots + z_r^i\right)^{n-j}\left(z_1^{-i} + \ldots + z_r^{-i}\right)^{m-j}\right) = i\,(n-m)$$

und deshalb

$$\deg m_{\mu_i,\nu_i}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{i}}\left(z_1^i + \ldots + z_r^i\right), -\frac{\gamma}{\sqrt{i}}\left(z_1^{-i} + \ldots + z_r^{-i}\right)\right) = i\,(\mu_i - \nu_i)\,.$$

Das Produkt in (4.8) hat also den Grad $\sum_i i(\mu_i - \nu_i) = \|\mu\| - \|\nu\|$. Aus Lemma 4.1.1, (i) folgt darum $\langle \Phi_\mu, Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)\Phi_\nu \rangle = 0$, falls $0 \neq \|\mu\| - \|\nu\| - \sum n_i$ oder äquivalent $\|\mu\| \neq \|\nu\| + \sum n_i$.
(ii) folgt unmittelbar aus (i), die Abgeschlossenheit folgt aus Lemma 3.4.2.
(iii): Da wir Q als ein Integral über die Matrixelemente von $F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) T_{r\gamma} V(\gamma; z_1, \ldots, z_r)$ definiert haben, ist sind die Matrixelemente von $[L_n, Q]$ als das schwache Integral von $[L_n, FTV]$ gegeben. Wir erhalten mit $\kappa = \gamma a_0 - \frac{r}{2}\gamma^2 + n(\beta\gamma + \frac{\gamma^2}{2})$

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_\mu, [L_n, Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)]\, \Phi_\nu \rangle \\
&= \int_{C_1} \int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} \sum_{j=1}^{r} z_j^n \Big\{ (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \kappa) \langle \Phi_\mu, FTV\Phi_\nu \rangle \Big\} \prod_{i=1}^{r} z_i^{-n_i - 1} dz_r \cdots dz_1 .
\end{aligned}$$

Wir können in $z_r, \ldots, z_2$ partiell integrieren und da $F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r)$ in den Endpunkten $z_i = z_1$ eine Nullstelle hat, treten keine Randterme auf. In z_1 können wir wegen Lemma 4.1.1 (ii) ohne Randterme partiell integrieren. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi_\mu, [L_n, Q(\gamma; n_1, \ldots, n_r)]\, \Phi_\nu \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{C_1} \int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} ((-\frac{\partial}{\partial z_j} z_j^{n-n_j}) + \kappa z_j^{n-n_j-1}) \langle \Phi_\mu, FTV\Phi_\nu \rangle \prod_{i \neq j} z_i^{-n_i-1} dz_r \cdots dz_1 \\
&= \sum_{j=1}^{r} \int_{C_1} \int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} (n_j - n + \kappa)\, z_j^{n-n_j-1} \langle \Phi_\mu, FTV\Phi_\nu \rangle \prod_{i \neq j} z_i^{-n_i-1} dz_r \cdots dz_1 \\
&= \sum_{j=1}^{r} (n_j - n + \kappa) \langle \Phi_\mu, Q(\gamma; n_1, \ldots, n_j - n, \ldots, n_r)\, \Phi_\nu \rangle .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt aber sogar stark auf $\mathcal{F}$, da für jedes Φ_ν nur für endlich viele μ $\langle \Phi_\mu, Q\Phi_\nu \rangle \neq 0$ ist. □

Zum Beweis von Satz 1.5.1 fehlt nur noch die folgende Aussage über die Nichttrivialität von $Q(\gamma; r, s)$.

Lemma 4.1.4 *Sei $s \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$. Ist $\gamma^2 \notin \mathbb{Q}$, so ist $Q(\gamma; r, s)$ nicht die Nullabbildung, insbesondere ist für $s \geq 0$ $v_{\alpha - r\gamma, \beta} \notin \ker Q(\gamma; r, s)$. Weiter ist für $s < 0$ $v_{\alpha,\beta} \notin$ koker $Q(\gamma; r, s)$.*

Damit erhalten wir:

Korollar 4.1.5 *Sei $\beta\gamma + \frac{\gamma^2}{2} = 1$ und $\alpha = -\frac{s}{\gamma} + \frac{r}{2}\gamma$ und $\gamma^2 \notin \mathbb{Q}$.*

(i) *Sei weiter $s \geq 0$. Dann ist $Q(\gamma; r, s)v_{\alpha-r\gamma,\beta}$ ein singulärer Vektor vom Grad rs in $\mathcal{H}(\alpha, \beta)$.*

(ii) *Ist $s < 0$, so gibt es einen Vektor vom Grad $-rs$ in $\mathcal{H}(\alpha - r\gamma, \beta)$ mit $Q(\gamma; r, s)w = v_{\alpha,\beta}$.*

Satz 1.5.1 ist bewiesen.

Beweis von Lemma 4.1.4.

Sei $s \geq 0$.

Wir werden ein bestimmtes Skalarprodukt $\langle \Phi, Q(\gamma; r, s)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle$ explizit berechnen können. Dazu wählen wir ein $\Phi = \sum c_\mu \Phi_\mu \in \mathcal{F}(\alpha, \beta)_{r\cdot s}$ so, daß der Integrand möglichst einfach wird. Zunächst ist

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, V(\gamma; z_1, \ldots, z_r)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle &= \sum_{\mu:||\mu||=rs} \overline{c}_\mu \langle \Phi_\mu, V(\gamma; z_1, \ldots, z_r)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle \\
&= \sum_{\mu:||\mu||=rs} \overline{c}_\mu \prod_{i=1}^{rs} \frac{1}{\sqrt{\mu_i!}} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{i}}\left(z_1^i + \ldots + z_r^i\right)\right)^{\mu_i} \\
&=: \sum_{\mu:||\mu||=rs} \overline{c}_\mu P_\mu(z_1, \ldots, z_r). \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

$P_\mu(z_1, \ldots, z_r)$ ist ein Polynom in $z_1, \ldots, z_r$ vom Grad rs, falls wir wieder $\deg\left(\prod z_i^{n_i}\right) = \sum n_i$ setzen. Die Polynome vom Grad rs bilden einen rs–dimensionalen Raum. Deshalb gibt es ein $\Phi = \sum c_\mu \Phi_\mu$, so daß

$$\langle \Phi, V(\gamma; z_1, \ldots, z_r)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle = z_1^s \cdots z_r^s \qquad (4.10)$$

gilt. Mit diesem Φ gilt dann

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi, Q(\gamma; r, s)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle \\
&= \int_{C_1}\int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} \langle \Phi, V(\gamma; z_1, \ldots, z_r)v_{\alpha-r\gamma,\beta}\rangle F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \prod_{i=1}^{r} z_i^{-s-1} dz_r \cdots dz_1 \\
&= \int_{C_1}\int_{C_{z_1}} \cdots \int_{C_{z_1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; z_1, \ldots, z_r) \prod_{i=1}^{r} z_i^{-1} dz_r \cdots dz_1.
\end{aligned}$$

Wir können nun Lemma 4.1.1 anwenden und das Integral über z_1 faktorisieren und erhalten aus (4.5)

$$= 2\pi i \int_{(C_1)^{r-1}} F_{-\frac{r-1}{2}\gamma}(\gamma; 1, z_2, \ldots, z_r) \prod_{i=1}^{r} z_i^{-1} dz_r \cdots dz_1.$$

Wir ersetzen $z_i \to z_{i-1}$, aus der Definition von F_λ folgt weiter

$$= 2\pi i \int_{(C_1)^{r-1}} \prod_{j=1}^{r-1} (1-z_j)^{\gamma^2} \prod_{1\le k<j\le r-1} (z_k - z_j)^{\gamma^2} \prod_{j=1}^{r-1} z_j^{-\frac{r-1}{2}\gamma^2 - 1} dz_{r-1} \cdots dz_1. \quad (4.11)$$

Dieses Integral ist zu berechnen. Wir betrachten statt (4.11) allgemeiner für $\alpha, \beta, \kappa \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}^n$

$$I(\alpha, \beta, \kappa) := 2\pi i \int_{(C_1)^n} F(\alpha, \beta, \kappa; z) dz_n \cdots dz_1 \quad (4.12)$$

mit $F(\alpha,\beta,\kappa;z) = \prod_{j=1}^n z_j^\alpha \prod_{k<j} (z_k - z_j)^\beta \prod_{j=1}^n (1-z_j)^\kappa$, wobei für $0 < z_n < \ldots < z_1 < 1$ alle auftretenden Logarithmen ihren Hauptwert annehmen sollen. Sei $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, $\operatorname{Re}\kappa > 0$. Dann existiert (4.12).
Zum Glück können wir (4.12) auf ein bekanntes Integral zurückführen. A. Selberg [Se] berechnete das folgende Integral.

Satz 4.1.6 *Seien $\alpha, \beta, \kappa \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\alpha > -1$, $\operatorname{Re}\kappa > -1$ und $\operatorname{Re}\beta > \min\{\frac{1}{n}, \operatorname{Re}\frac{\alpha+1}{n-1}, \operatorname{Re}\frac{\kappa+1}{n-1}\}$. Dann konvergiert das folgende uneigentliche (reelle) Integral und ist*

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} F(\alpha,\beta,\kappa) dt_n \cdots dt_1 \\ &= \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(j\beta+1)\Gamma((j-1)\beta+\alpha+1)\Gamma((j-1)\beta+\kappa+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma((n+j-2)\beta+\alpha+\kappa+2)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Für $n = 1$ ist (4.13) nichts anderes als die Integraldarstellung der Beta–Funktion

$$B(\alpha+1, \beta+1) = \int_0^1 t^\alpha (1-t)^\beta dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Wir möchten nun (4.12) auf (4.13) zurückführen. Das ist eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß das Integral einer symmetrischen Funktion von n Variablen über den Einheitswürfel das $n!$–fache des Integrals über dem Einheitssimplex ist. Wir haben hier keine symmetrische Funktion als Integrand, aber eine bis auf Phasen symmetrische Funktion.
Zunächst können wir (4.12) zu einem reellen Integrand machen, indem wir die Integrationswege von unten und oben auf die reelle Achse, genauer gegen das Intervall $[0,1]$ drücken. Dabei verlassen wir den Sektor $1 > |z_n| > \cdots > |z_1| > 0$. Jeder Konfiguration der reellen Variablen $t_1, \ldots, t_n$ im Intervall $[0,1]$ $0 < t_{\pi(1)} < \cdots <$

$t_{\pi(n)} < 1$ können wir eine Phase zuordnen, so daß der Integrand entlang der auf die Achse gedrückten Integrationsweg analytisch ist. Das Integral über eine vorgegebene Konfiguration ist bis auf diese Phase gleich dem Integral über dem Einheitssimplex. Diese Phasen können wir aufsummieren und erhalten folgenden Zusammenhang zwischen (4.12) und (4.13):

$$I\,(\alpha,\beta,\kappa) = \varphi(\alpha,\beta)\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} F(\alpha,\beta,\kappa,t)dt_n\cdots dt_1 \tag{4.14}$$

mit

$$\varphi(\alpha,\beta) = (-2i)^n e^{i\pi n\alpha} e^{i\pi n(n-1)\beta}\prod_{l=1}^{n}\frac{\sin\pi l\beta}{\sin\pi\beta}\prod_{l=0}^{n-1}\sin(\pi(\alpha+l\beta)). \tag{4.15}$$

Ist nun $\gamma^2 \notin \mathbb{Q}$, so folgt wegen $\alpha = \beta = \gamma^2$, $\kappa = -\frac{r-1}{2}\gamma^2 - 1$, daß (4.14) nicht verschwinden kann, denn weder (4.13) noch (4.15) können dann Null sein.
Im Falle $s < 0$ betrachten wir das Skalarprodukt $\langle v_{\alpha,\beta}, Q(\gamma;r,s)\Phi\rangle$ für $\Phi \in \mathcal{F}(\alpha - r\gamma,\beta)_{-rs}$. Die Argumentation verläuft dann völlig analog zu dem Fall $s \geq 0$. □

4.2 Abgeschirmte Vertex–Operatoren

Wir wollen nun etwas allgemeiner als im letzten Abschnitt Vertex–Operatoren integrieren. Diese Operatoren werden in bestimmten Fällen weitere primäre Felder definieren. Im Gegensatz zum letzten Abschnitt, wo wir von Lemma 4.1.1 ohne weitere Funktionalanalysis geschenkt bekommen haben, daß $Q(\gamma, n_1,\ldots,n_r)$ vernünftige Operatoren sind, müssen wir hier etwas mehr arbeiten, um die integrierten Vertex–Operatoren zu definieren. Sei $\boldsymbol{\gamma} := (\gamma_0,\ldots,\gamma_r)$ und zunächst $\mathrm{Re}\,\gamma_i\gamma_j > 0$ für alle i,j. Weiter sei $\mathbf{z} := (w, z_1,\ldots,z_r)$. Wir wollen

$$\int_{(C_w)^r} F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{z})T_{\Sigma\gamma_j}V(\boldsymbol{\gamma};\mathbf{z})\,dz_r\cdots dz_1 \tag{4.16}$$

als Operator $\mathcal{H}(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathcal{H}(\alpha+\sum\gamma_i,\beta)$ einen Sinn geben. Wir können auf drei Arten versuchen, (4.16) einen Sinn zu geben. Das Integral kann schwach, stark oder im Operatorsinne interpretiert werden, wir werden es meist stark interpretieren.
Sei $\Phi \in \mathcal{F}$. Dann ist nach Satz 3.2.2

$$\|V(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})\Phi\| \leq C_\Phi(|w|,|z_1|,\ldots,|z_r|), \tag{4.17}$$

die Norm des Integranden in (4.16), angewendet auf $\Phi \in \mathcal{F}$, ist also gleichmäßig beschränkt auf dem Integrationsgebiet. Außerdem ist $V(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})\Phi$ nach Lemma 3.4.5 eine holomorphe Funktion. Folglich definiert

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi := \int_{(C_w)^r} F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) T_{\Sigma\gamma_j} V(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})\Phi \, dz_r \cdots dz_1 \tag{4.18}$$

einen linearen Operator auf $\mathcal{F}$. Das Integral kann dabei als Riemann– oder als Bochner–Integral aufgefaßt werden.

Wir können aber auch die Ergebnisse über die Faktorisierung von Vertex–Operatoren anwenden. Wie wir in Abschnitt 3.5 gezeigt haben, gilt

$$V(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) = B_c(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) c^{-N} \tag{4.19}$$

für ein hinreichend kleines $c > 0$ für alle $(z_1,\ldots,z_r) \in (C_w)^r$. Da die Hilbert–Schmidt–Norm von $B_c(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})$ entlang der Integrationswege gleichmäßig beschränkt ist (und $B_2(\mathcal{H})$ separabel ist), sind die Abbildungen $z_i \mapsto F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})B_c(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})$ holomorph und Bochner–integrierbar ([DU]) und wir können alternativ mittels

$$\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}, w) := \left(\int_{(C_w)^r)} F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) B_c(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) \, dz_r \cdots dz_1 \right) T_{\Sigma\gamma_j} c^{-N} \tag{4.20}$$

die integrierten Vertex–Operatoren mit $D(V^B(\boldsymbol{\gamma},\omega)) = D(c^{-N})$ definieren. Wegen (3.71) gilt

$$\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi = \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi \tag{4.21}$$

für alle $\Phi \in \mathcal{F}$.

Leider ist die Bedingung $\mathrm{Re}\,\gamma_j\gamma_k > 0$ eine Einschränkung, die wir bei der Anwendung auf die konforme Quantenfeldtheorie nicht aufrecht erhalten können, dort treten notwendigerweise auch negative Exponenten in $F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})$ auf. Deshalb wollen wir (4.18) analytisch in den Exponenten fortsetzen. Wir verwenden die folgende einfache Methode, bekannt von der Beta–Funktion, indem wir die Konturen C_w durch Pochhammer–Konturen ersetzen. Dazu sei P_w die Pochhammer–Kontur um Null und w. Weiter seien $\gamma_j\gamma_0 \notin \mathbb{Z}$ und $(\alpha-\beta)\gamma_j \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt für $\Phi \in \mathcal{F}$

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi = \prod_{j=1}^{r} \frac{1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)\gamma_j)}}{1-e^{2\pi i\gamma_j\gamma_0}} \int_{(P_w)^r} F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z}) T_{\Sigma\gamma_j} V(\boldsymbol{\gamma},\mathbf{z})\Phi \, dz_r \cdots dz_1. \tag{4.22}$$

Dabei sollen die noch nicht integrierten Variablen $z_{i-1}, \ldots, z_1$ bei der Integration von z_i außerhalb der Pochhammer–Kontur liegen. Gl. (4.22) liefert eine analytische Fortsetzung von (4.18) und existiert unter den genannten Voraussetzungen an die Exponenten. Wir können natürlich auch die Konturen P_w und C_w mischen, falls die Exponenten geeignete Bedingungen erfüllen.
Genauso können wir in (4.20) die Konturen C_w durch Pochhammer–Konturen P_w in der Form von Abbildung 4.3 ersetzen. Wir erhalten den gleichen Zusammenhang wie in (4.22). Insgesamt haben wir gezeigt:

0 w

Abbildung 4.3: Die Pochhammer–Kontur für $\mathbf{V}^B$

Satz 4.2.1 *Sei* $\operatorname{Re}\gamma_k\gamma_j > 0$ *für alle* k, j *bzw.* $\gamma_j\gamma_0 \notin \mathbb{Z}$ *und* $(\alpha - \beta)\gamma_j \notin \mathbb{Z}$ *für alle* j*. Weiter sei* $|w| < 1$*. Dann definiert (4.18) bzw. (4.22) einen Operator* $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ *mit* $D(\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)) = \mathcal{F}$*. Unter denselben Voraussetzungen an die Exponenten können wir den Operator* $\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}, w)$ *mit* $D(\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}, w)) = D(c^{-N})$ *für ein hinreichend kleines* $c > 0$ *definieren.* $\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}, w)$ *ist eine Fortsetzung von* $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$*.*

Als nächstes möchten wir den Kommutator zwischen $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ und L_n angeben. Wir erhalten:

Satz 4.2.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.2.1 an* $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ *gilt für* $\Phi \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}[L_n, \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)]\,\Phi &= w^n \left(w\frac{\partial}{\partial w} + (n+1)\left(\frac{\gamma_0^2}{2} + \beta\gamma_0\right)\right)\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi \\ &+ \sum_{j=1}^{r}\left((n+1)(\frac{\gamma_j^2}{2} + \beta\gamma_0) - n - 1\right)\int z_j^n F_{\alpha-\beta}(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{z}) T_{\Sigma\gamma_j} V(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{z})\Phi\, dz_r \cdots dz_1. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ist insbesondere $\frac{\gamma_j^2}{2} + \beta\gamma_j = 1$ *für* $j = 1, \ldots, r$ *erhalten wir*

$$[L_n, \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)]\,\Phi = w^n \left(w\frac{\partial}{\partial w} + (n+1)\left(\frac{\gamma_0^2}{2} + \beta\gamma_0\right)\right)\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)\Phi. \tag{4.24}$$

$\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ *ist in diesem Fall ein konformes Feld vom Gewicht* $\frac{\gamma_0^2}{2} + \beta\gamma_0$.

Man kann sich nun fragen, was wir in (4.24) im Vergleich zu (3.65) gewonnen haben, dort haben wir ebenfalls konforme Felder mit denselben Gewichten erhalten, ohne integrieren zu müssen. Der entscheidende Unterschied ist, daß (4.24) im Vergleich zu (3.65) zwischen anderen Fock–Moduln abbilden, es gilt

$$\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w) \,:\, \mathcal{H}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{H}(\alpha + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j, \beta),$$

wogegen $T_\gamma z^{\gamma(\alpha-\beta)} V(\gamma, z) \,:\, \mathcal{H}(\alpha, \beta) \longrightarrow \mathcal{H}(\alpha + \gamma, \beta)$ gilt. $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ ist ein weiterer Baustein zur Konstruktion der konformen Felder im physikalischen Hilbertraum. Zu diesen Fragen kommen wir im nächsten Kapitel.

Beweis.
Formal ist (4.23) klar, die Gleichung entsteht durch Integration von (3.68) und r partiellen Integrationen analog zum Beweis von (4.7). Dabei entstehen keine Randterme, da wir entweder zwischen Nullstellen des Integranden oder auf einer geschlossenen Kontur integrieren. Es bleibt zu zeigen, daß für $\Phi \in \mathcal{F}$ (in Kurzschreibweise) $\int [L_n, V]\Phi = [L_n, \int V]\Phi$ gilt. Es ist zunächst wegen $L_n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ klar, daß $\int V L_n \Phi$ existiert. Da die L_n abgeschlossene Operatoren sind, folgt aus dem Satz von Hille, Thm. 6, Chapter II [DU] (die Meßbarkeit aller zu integrierenden Abbildungen ist dabei trivial), daß $L_n \int V\Phi = \int L_n V$ gilt. Wir erhalten also

$$[L_n, \int V]\Phi = L_n \int V\Phi - \int V L_n \Phi = \int (L_n V - V L_n)\Phi.$$

□

4.3 Produkte abgeschirmter Vertex–Operatoren

Wir wollen nun untersuchen, unter welche Vorausetzungen wir Produkte abgeschirmter Vertex–Operatoren bilden können. Da wir $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w)$ nur auf $\mathcal{F}$ definiert haben, ist klar, daß das Produkt dieser Operatoren i. allg. nicht existiert, denn man kann nicht erwarten, daß $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w) : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ gilt. Deshalb kann nur

$$\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}_1, w_1)\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}_2, w_2)\Phi \tag{4.25}$$

Sinn machen. Wir machen zunächst eine einfache Beobachtung.

Lemma 4.3.1 *Sei* $\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i c^{-i}|^2 < \infty$. *Dann gilt* $V(\omega)(\mathcal{F}) \subset D(c^{-N})$.

Beweis. Eine einfache Variante vom Beweis von Satz 3.2.2. □

Falls nun c gleichzeitig die Voraussetzungen von Lemma 4.3.1 und von Satz 3.5.1 erfüllt, ist (4.25) gut definiert, denn es ist leicht zu sehen, daß auch $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}, w_2)\Phi \in D(c^{-N})$ gilt. Dazu müssen allerdings w_1 und w_2 "weit genug" auseinander sein, wir erhalten so also eine stärkere Bedingung an w_1 und w_2 als die radiale Ordnung $|w_1| > |w_2|$, wie wir sie von den Produkten der freien Vertex–Operatoren kennen. Seien die Integranden von $\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}_1, w_1)$ und $\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}_2, w_2)$ kurz mit $V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1)$ und $V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2)$ bezeichnet. Weiter sei $V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1) = B(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1)c^{-N}$. Es folgt dann weiter

$$\begin{aligned}(\int V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1) \int V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2)\Phi &= \int\int B(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1)c^{-N} V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2) \\ &= \int\int V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1) V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2)\Phi,\end{aligned} \tag{4.26}$$

denn alle Integrale existieren nach Voraussetzung, und eine zweimalige Anwendung des Satzes von Hille liefert (4.26). Andererseits existiert die rechte Seite von (4.26) für beliebige $|w_1| < |w_2|$, nur können wir ohne die Faktorisierung von $\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}_1, w_1)$ (4.26) nicht beweisen, denn der Satz von Hille ist wegen der Nichtabschließbarkeit des Integranden nicht anwendbar. Würde aber Vermutung 3.5.3 gelten, so würde für alle $|w_2| < c < |w_1|$ die Faktorisierung

$$V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1) V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2)\Phi = B(\gamma_1, \mathbf{z}_1)c^{-N} V(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{z}_2)\Phi \tag{4.27}$$

gelten und könnten wir wieder (4.26) beweisen. Zusammenfassend haben wir:

Satz 4.3.2 *Sei* $0 < |w_2| < c < |w_1| < 1$ *so, daß* $V(\boldsymbol{\gamma}_1, \mathbf{z}_1)$ *die Voraussetzungen von Satz 3.5.1 erfüllt. Dann existiert*

$$\mathbf{V}^B(\boldsymbol{\gamma}_1, w_1)\mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}_2, w_2)\Phi \tag{4.28}$$

für alle $\Phi \in \mathcal{F}$. *Gilt Vermutung 3.5.3, so existiert (4.28) für alle* $0 < |w_2| < |w_1| < 1$.

Außerhalb der Gültigkeit von Satz 4.3.2 *definieren* wir, falls das Produkt der Integranden existiert, das Produkt der abgeschirmten Vertex–Operatoren über die rechte Seite von (4.26).

Kapitel 5

Konforme Quantenfeldtheorie

5.1 Einleitung

In diesem nichtmathematischen Abschnitt wollen wir kurz die von uns benötigten Begriffe und Sprechweisen aus der konformen Quantenfeldtheorie in zwei Dimensionen einführen, um danach zu zeigen, wie die bisher eingeführten Operatoren bei der Konstruktion von konkreten Modellen nützlich sind. Eine ausführliche Einleitung findet man z. B. in [Gin, SA]. Ganz allgemein ist zu sagen, daß die im folgenden aufgestellten Behauptungen aus der axiomatischen Quantenfeldtheorie (d. h. entweder den Wightman–Axiomen und konformer Invarianz oder den Osterwalder–Schrader–Axiomen und konformer Invarianz) folgen, falls man Unitarität der Theorie verlangt, vgl. dazu [FFK] bzw. [Mack]. Diese Forderung wird aber meist nicht gestellt. Für masselose Theorien (wie es die konformen Theorien sind) ist es nützlich, Lichtkegelkoordinaten $t+x, t-x$ zu verwenden. Im Falle euklidischer Theorien können wir die Koordinaten $w = t+ix$ und $\bar{w} = t-ix$ verwenden. Es ist ein Charakteristikum der konformen Theorien und bei konkreten Rechnungen äußerst nützlich, die Variablen w und $\bar{w}$ als unabhängige komplexe Variable zu interpretieren. Zur physikalischen Interpretation können w und $\bar{w}$ wieder auf den entsprechenden Unterraum in $\mathbb{C}^2$ eingeschränkt werden.

Da masselose Theorien typischerweise infrarot divergent sind, wird der Raum kompaktifiziert, was wir durch die Periodizitätsbedingung $w + 2\pi = w$, $\bar{w} + 2\pi = \bar{w}$ ausdrücken. w ist also eine Koordinate von einem Zylinder, wobei die Kurven t=const. einem Großkreis auf dem Zylinder entsprechen. Mit Hilfe der konformen Abbildung $z = e^w$, $\bar{z} = e^{\bar{w}}$ führen wir den Zylinder in die komplexe Ebene über, die Kurven t =const. sind nun konzentrische Kreise mit Radius e^t. Die Operation der Zeitumkehr $t \to -t$ entspricht nun $z \to 1/\bar{z}$ und der Generator der Dilatationen $z \to e^a z$ (d. h.

$w \to a + w$) entspricht dem Hamiltonoperator des Systems. Diese Beschreibung der Theorie wird radiale Quantisierung genannt.

Die wichtigste Observable ist der Noethersche Strom, der zur Invarianz unter der Poincaré-Gruppe assoziert ist, der Energie–Impuls Tensor T mit vier Komponenten. Aus der konformen Invarianz und der Kontinuitätsgleichung für T folgt, daß T Spur Null und nur zwei unabhängige Komponenten $T(z)$ und $\overline{T}(\bar{z})$ hat, wobei $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T(z) = 0$ und $\frac{\partial}{\partial z} \overline{T}(\bar{z}) = 0$ gilt. $T(z)$ ist also analytisch und $\overline{T}(\bar{z})$ antianalytisch. Das Theorem von Lüscher und Mack [Mack] sagt nun, daß die folgende "Operatorproduktentwicklung" für $T(z)$ gilt. ($\langle \cdot \rangle$ ist der Vakuumerwartungswert.)

$$\begin{aligned} \langle T(z_0)T(z_1)\rangle &= \frac{c/2}{(z_0 - z_1)^4} + \left(\frac{2}{(z_0 - z_1)^2} + \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \langle T(z_1)\rangle, & (5.1) \\ \langle \overline{T}(\bar{z}_0)\overline{T}(\bar{z}_1)\rangle &= \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z}_0 - \bar{z}_1)^4} + \left(\frac{2}{(\bar{z}_0 - \bar{z}_1)^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \right) \langle \overline{T}(\bar{z}_1)\rangle, & (5.2) \end{aligned}$$

wobei c ein modellabhängiger Parameter ist. Wie man sieht, unterscheiden sich (5.1) und (5.2) nur dadurch, daß ein Querstrich über (fast) alles gezogen wird, oft werden wir deshalb nur eine der Gleichungen aufschreiben. Man führt nun eine operatorwertige Laurententwicklung

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}, \qquad \overline{T}(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{L}_n \bar{z}^{-n-2} \tag{5.3}$$

ein, dann sind (5.1) und (5.2) äquivalent dazu, daß L_n und $\overline{L}_n$ Darstellungen der Virasoro–Algebra sind, wobei der zentrale Term z aus (1.1) durch c bzw. $\bar{c}$ dargestellt wird. In einer unitären Theorie sollen die euklidischen Felder zur Zeit $t = 0$ symmetrisch sein, hier würde diese Forderung bedeuten $T(z)^* = T(z)$ für $|z| = 1$ oder äquivalent $L_n^* = L_{-n}$. Die Operatoren L_n müssen also eine unitären Darstellung von Vir sein. Diese Forderung werden wir nicht stellen. Die Klasse der minimalen Modelle, die wir untersuchen werden, enthält aber die unitären Modelle. $L_0 + \overline{L}_0$ ist der konforme Hamiltonoperator.

Wenn wir annehmen, daß der Energie–Impuls–Tensor die einzige Observable ist, folgt, daß T die Observablenalgebra erzeugt und diese als die universelle einhüllende Algebra von Vir gewählt werden kann. Der Raum der physikalischen Zustände zerfällt dann in "Superauswahlsektoren", die eine irreduzible Darstellung von $\mathrm{Vir} \oplus \overline{\mathrm{Vir}}$ tragen. Für die bereits erwähnten minimalen Modelle verlangt man, daß es nur endlich viele Superauswahlsektoren gibt. Der physikalische Hilbertraum ist dann

$$\mathbb{H}_{\mathrm{phys}} = \bigoplus_{j=1}^{N} \mathbb{H}_j \otimes \overline{\mathbb{H}}_j, \tag{5.4}$$

wobei $\mathbb{H}_j$ und $\overline{\mathbb{H}}_j$ irreduzible Vir–Moduln sind. Wir werden der Einfachheit halber nur Modelle mit Spin Null, d. h. $c = \bar{c}$ und damit $\mathbb{H}_j \simeq \overline{\mathbb{H}}_j$ betrachten. Da $H = L_0 + \overline{L}_0$ nach unten halbbeschränkt sein soll und $\mathbb{H}_j$ einen zyklischen Vakkuumvektor besitzen soll, sind $\mathbb{H}_j$ Höchstgewichtsmoduln, d. h. irreduzible Vir–Moduln von einem Typ (h, c). c ist ja bereits durch $T(z)$ festgelegt und h ist ein weiterer Parameter, der durch j parametrisiert wird.

In [BPZ] wurde eine weitere Forderung aufgestellt: Es sollen Felder Φ_α existieren, die sich tensoriell unter konformen Transformationen $z \to w(z)$ und $\bar{z} \to \bar{w}(\bar{z})$ nahe der Identität transformieren, d. h. es soll

$$U(w, \bar{w})\Phi_\alpha(z, \bar{z})U(w, \bar{w})^{-1} = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{h_\alpha}(z)\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{h}_\alpha}(\bar{z})\Phi_\alpha(w, \bar{w}) \tag{5.5}$$

für unitäres $U(w, \bar{w})$ gelten. Ein solches Feld wird primäres Feld vom Gewicht $(h_\alpha, \bar{h}_\alpha)$ genannt. Für Felder von Spin 0 gilt $h_\alpha = \bar{h}_\alpha$. Die infinitesimale Variante von (5.5) ist

$$[L_k \oplus 1, \Phi_\alpha(z, \bar{z})] = \left(z^{k+1}\frac{\partial}{\partial z} + (k+1)z^n h_\alpha\right)\Phi_\alpha(z, \bar{z}) \tag{5.6}$$

und eine analoge Gleichung für den Kommutator mit $\overline{L}_k$. Aus (5.6) folgt, daß $\Phi_\alpha(0,0)\Omega := \lim_{z,\bar{z}\to 0}\Phi_\alpha(z, \bar{z})\Omega$ (Ω sei der Vakuumvektor) ein Höchstgewichtsvektor für $\mathrm{Vir} \oplus \mathrm{Vir}$ mit $(L_0 \oplus 1)\Phi_\alpha(0,0)\Omega = h_\alpha\Phi_\alpha(0,0)\Omega$ und $(1 \oplus \overline{L}_0)\Phi_\alpha(0,0)\Omega = \bar{h}_\alpha\Phi_\alpha(0,0)\Omega$ ist. Der von diesem Vektor erzeugte irreduzible Höchstgewichtsmodul bezeichnen wir mit $\mathbb{H}_\alpha$. Eine Theorie heißt nun minimal, wenn

(i) (5.4) erfüllt ist, und

(ii) zu jedem Summanden in (5.4) genau ein primäres Feld Φ_α mit $\mathbb{H}_j \otimes \overline{\mathbb{H}}_j \simeq \mathbb{H}_\alpha$ existiert.

Die übrigen Felder werden aus den primären Feldern auf die folgende Weise erzeugt: Sei

$$L_{-k}(z) = \int_{|\xi - z| = \varepsilon}\frac{T(z)}{(\xi - z)^{k+1}}\,d\xi \tag{5.7}$$

und

$$\Phi_\alpha^{(k_1,\ldots,k_N)}(z) = L_{-k_1}(z)\cdots L_{-k_N}(z)\Phi_\alpha(z). \tag{5.8}$$

Die Felder in (5.8) werden sekundäre Felder genannt. Es reicht, die Korrelationsfunktionen der primären Felder zu kennen, die der sekundären Felder ergeben sich dann durch die Anwendung eines zu $L_{-k_1}(z)\cdots L_{-k_N}(z)$ assozierten Differentialoperators auf die Korrelation der zugehörigen primären Felder.

Die Bestimmung der Korrelationen der primären Felder für die minimalen Modelle über die sogenannte Feigin–Fuks–Integraldarstellung geht auf Dotsenko und Fateev ([DF1, DF2]) und G. Felder [Fe1] zurück. Dazu ist es wesentlich, die Bausteine des physikalischen Hilbertraumes durch einen (Subquotienten eines) Fock–Raum(es) zu ersetzen. Die sogenannte Coulomb–Gas–Konstruktion erlaubt es dann die primären Felder zu konstruieren.

5.2 Die minimalen Modelle

Um die Notationen zu fixieren wiederholen wir kurz die für den nächsten Abschnitt relevanten Daten.
Die minimalen Modelle leben in Vir–Moduln vom Typ III_-, deshalb sind sie fixiert durch die Wahl von $p, p' \in \mathbb{N}$ mit p, p' relativ prim. Dadurch ist c durch

$$c = c(p', p) = 1 - \frac{6(p'-p)^2}{p'p} \tag{5.9}$$

festgelegt. Weiter ist

$$h_{n'n} = \frac{(np' - n'p)^2 - (p'-p)^2}{4pp'} \tag{5.10}$$

und

$$\mathbb{H}_{\mathbf{phys}} = \bigoplus_{h,\overline{h}} \mathbb{H}_h \otimes \mathbb{H}_{\overline{h}} = \bigoplus_{n'n} \mathbb{H}_{h_{n'n}} \otimes \overline{\mathbb{H}}_{h_{n'n}} =: \bigoplus_{n'n} \mathbb{H}_{n'n} \otimes \overline{\mathbb{H}}_{n'n} \tag{5.11}$$

mit $\mathbb{H}_{n'n} = V(h_{n'n}, c)/M(h_{n'n}, c)$ dem eindeutigen irreduziblen Vir–Modul vom Typ $(h_{n'n}, c)$. $M(h_{n'n}, c)$ ist der maximale nichttriviale Untermodul von $V(h_{n'n}, c)$ und nach Satz 2.2.5 von zwei singulären Vektoren erzeugt. Die direkte Summe in (5.11) geht über $1 \le n' \le p' - 1$, $1 \le n \le p' - 1$ und $n'p \le np'$.
$\mathbb{H}_{n'n}$ sind nach Satz 1.4.2 nur im Fall $|p - p'| = 1$ unitäre Vir–Moduln, in den anderen Fällen ist die Shapovalov–Form auf $\mathbb{H}_{n'n}$ zwar nicht ausgeartet, aber nicht

positiv definit. Leider ist $\mathbb{H}_{n'n}$ versehen mit der Shapovalov–Form i. allg. kein (Prä–)Krein–Raum, denn $\mathbb{H}_{n'n}$ zerfällt nicht in eine direkte Summe von Vektoren positiver bzw. negativer Länge. Siehe dazu Beispiel 1.4.3. Obwohl wir also vom "physikalischen Hilbertraum" gesprochen haben, ist zunächst nicht klar, wie wir $\mathbb{H}_{n'n}$ in einen Hilbertraum einbetten können. Da wir aber sehen werden, daß $\mathbb{H}_{n'n}$ als Vir–Modul zu einem Unterraum gewisser Fock–Moduln isomorph ist, können wir auf diese Weise eine Vervollständigung von $\mathbb{H}_{n'n}$ angeben.
Zu jedem Summand in (5.11) gibt es ein primäres Feld $\Phi_{n'n}(z,\overline{z})$ vom Gewicht $(h_{n'n},\bar{h}_{n'n})$, das die Gleichung (5.6) erfüllt. Wir haben die folgende Zerlegung von $\Phi_{n'n}(z,\overline{z})$ gemäß (5.11).
Sei $P_{r'r}:\mathbb{H}_{\text{phys}}\longrightarrow\mathbb{H}_{r'r}$ die kanonische Projektion. Wir können schreiben

$$\Phi_{n'n}(z,\overline{z})=\sum_{r',r,s',s}C^{r'r}_{n'ns's}\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)\otimes\overline{\varphi}^{r'r}_{n'ns's}(\overline{z}) \tag{5.12}$$

mit $\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)=:P_{r'r}\Phi_{n'n}(z,\overline{z})P_{s's}$. Wir können $\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)$ auch als Abbildung zwischen $\mathbb{H}_{s's}$ und $\mathbb{H}_{r'r}$ auffassen. Die Strukturkonstanten $C^{r'r}_{n'ns's}$ sind eindeutig durch die Normierung $\langle v_{r'r},\varphi^{r'r}_{n'ns's}(1)v_{s's}\rangle=1$ festgelegt. $\varphi^{n'r}_{n'ns's}(z)$ wird als konformes Feld bezeichnet und ist eine i. allg. vieldeutige operatorwertige Funktion.
$\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)$ erfüllt entsprechend zu (5.6)

$$\left[L_k,\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)\right]=\left(z^{k+1}\frac{d}{dz}+(k+1)h_{n'n}z^k\right)\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z). \tag{5.13}$$

Mit Hilfe von (5.12) können wir natürlich auch Korrelationen von primären Feldern auf Korrelationen von konformen Feldern zurückführen. Dazu sei $\mu=(m_1^{'},m_1,m_2^{'},\ldots,m_{k-1}^{'},m_{k-1})$. Es gilt

$$\langle\Phi_{n_1^{'}n_1}(z_1,\overline{z}_1)\cdots\Phi_{n_k^{'}n_k}(z_k,\overline{z}_k)\rangle=\sum_{\mu}\lambda_\mu F_\mu(\{z_j\})F_\mu(\{\overline{z}_j\}) \tag{5.14}$$

mit

$$F_\mu(\{z_j\})=\langle v_{1,1},\varphi^{11}_{n_1^{'}n_1m_1^{'}m_1}(z_1)\varphi^{m_1^{'}m_1}_{n_2^{'}n_2m_2^{'}m_2}(z_2)\cdots\varphi^{m_{k-1}^{'}m_{k-1}}_{n_k^{'}n_k11}(z_k)v_{11}\rangle. \tag{5.15}$$

F_μ wird als konformer Block bezeichnet, λ_μ entstehen als Produkte der Strukturkonstanten.

5.3 Die Konstruktion der primären Felder im Fock–Raum

Wir wollen nun die konformen Blöcke $\varphi^{r'r}_{n'ns's}(z)$ mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4 explizit konstruieren, d. h. wir definieren Operatoren, die (5.13) erfüllen. In einem zweiten Schritt zeigen wir dann, daß diese Operatoren auch auf den irreduziblen Höchstgewichtskomponenten der beteiligten Fock–Räume wohldefiniert sind.

Wir setzen $\gamma_+ = \sqrt{\frac{2p'}{p}}$ und $\gamma_- = -\sqrt{\frac{2p}{p'}}$. Es gilt $\gamma_+\gamma_- = -2$. Weiter setzen wir $\alpha_{n'n} = \frac{n'p-np'}{\sqrt{2p'p}}$, $\beta = \frac{p-p'}{\sqrt{2p'p}}$ und $\gamma_{n'n} = \alpha_{n'n} - \beta = \frac{1}{2}(1-n')\gamma_- + \frac{1}{2}(1-n)\gamma_+$ (vgl. dazu (2.8)). Dann sind $\mathcal{H}_{n'n} := \mathcal{H}(\alpha_{n'n}, \beta)$ Fock–Moduln vom Typ $(h_{n'n}, c)$ und vom Typ III_- der Feigin–Fuks Klassifikation Satz 2.3.4 und es gilt $h_{n'n} = \frac{\gamma^2_{n'n}}{2} + \beta\gamma_{n'n}$ und $\frac{\gamma^2_\pm}{2} + \beta\gamma_\pm = 1$.
Sei

$$0 < n < p, \quad 0 < n' < p', \quad 0 \le r < n, \quad 0 \le r' < n' \text{ und} \tag{5.16}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{r'r}_{n'n} = (\gamma_{n'n}, \underbrace{\gamma_-, \dots, \gamma_-}_{r'-\text{ viele}}, \underbrace{\gamma_+, \dots, \gamma_+}_{r-\text{ viele}}). \tag{5.17}$$

Die Exponenten $\boldsymbol{\gamma}^{r'r}_{n'n}$ erfüllen die Voraussetzungen von Satz 4.2.1, folglich können wir für $\Phi \in \mathcal{F}$ und $|z| < 1$

$$D(V^{r'r}_{n'n}(z)) := \mathcal{F}, \qquad V^{r'r}_{n'n}(z)\Phi := \mathbf{V}(\boldsymbol{\gamma}^{r'r}_{n'n}, z)\Phi \tag{5.18}$$

definieren. Die Bedingungen an die Anzahl der Integrale r bzw. r' in (5.16) entstehen aus den sogenannten Fusionsregeln für die minimalen Modelle, siehe dazu [Fe1, Mat]. Nach Satz 4.2.2 erfüllen $V^{r'r}_{n'n}$

$$\left[L_k, V^{r'r}_{n'n}(z)\right] = \left(z^{k+1}\frac{d}{dz} + (k+1)h_{n'n}z^k\right) V^{r'r}_{n'n}(z), \tag{5.19}$$

und es gilt $V^{r'r}_{n'n}(z) : \mathcal{H}_{m'm} \longrightarrow \mathcal{H}_{m'+n'-2r'-1, m+n-2r-1}$. Damit erfüllt $V^{r'r}_{n'n}(z)$ die richtigen Vertauschungsrelationen mit Vir zwischen Vir–Moduln vom richtigen Typ. Es bleibt zu zeigen, daß wir von den Fock–Räumen zu den irreduziblen Höchstgewichtsmoduln übergehen können. Dazu wird uns wieder der in Abschnitt 4.1 eingeführte Ladungsoperator nützlich sein. Sei dazu für $\Phi \in \mathcal{F}$

$$Q_{m'm}\Phi := \frac{e^{\pi i m\gamma_+^2} - 1}{m(e^{\pi i\gamma_+^2} - 1)} Q(\gamma_+; m, -m')\Phi \tag{5.20}$$

(zur Schreibweise siehe Bemerkung 4.1.3). Nach Konstruktion ist $Q_{m'm}$ ein Intertwiner vom Grad $-m'm$ zwischen Fock–Moduln; es gilt

$$Q_{m'm} : \mathcal{H}_{m'm} \longrightarrow \mathcal{H}_{m',-m}.$$

$Q_{m'm}$ ist ein abschließbarer Operator, den Abschluß bezeichnen wir ebenfalls mit $Q_{m'm}$.

Wir betrachten nun die folgende Sequenz von Fock–Moduln

$$\mathcal{H}_{m'-p',p-m} \xrightarrow{Q_{m'-p',p-m}} \mathcal{H}_{m'-p',m-p} \simeq \mathcal{H}_{m'm} \xrightarrow{Q_{m'm}} \mathcal{H}_{m',-m}. \tag{5.21}$$

Diese Sequenz kann in eine beidseitig unendliche Sequenz eigebettet werden, wir benötigen hier aber nur diesen Ausschnitt.
Wir beweisen:

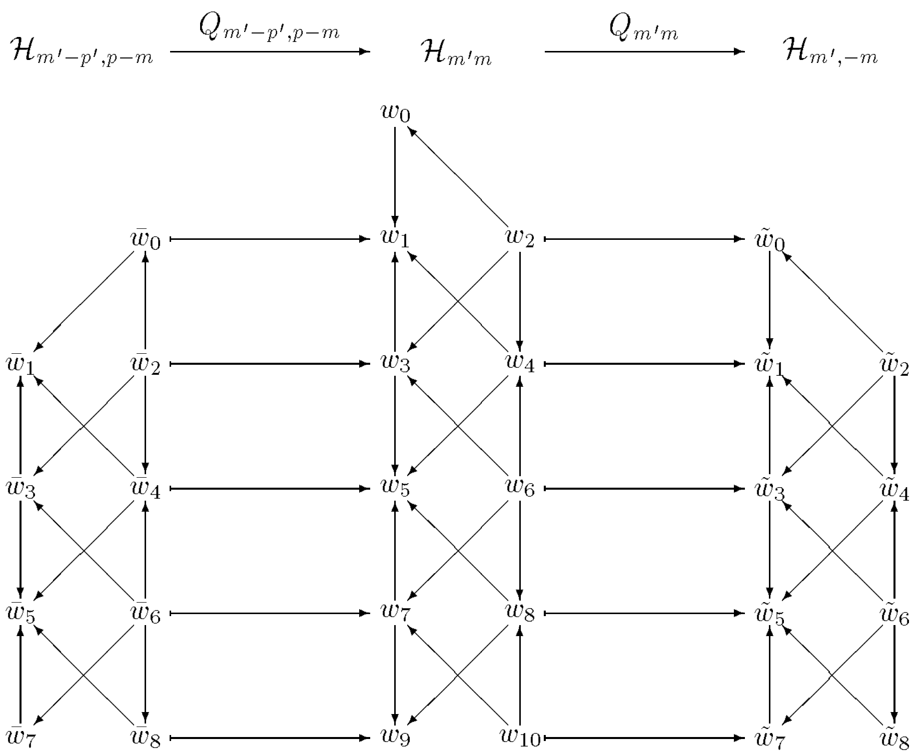
Lemma 5.3.1 *(i)* $Q_{m'm}Q_{m'-p',p-m} = 0$

(ii)
$$B_{m'm} := {}^{\ker Q_{m'm} \cap \mathcal{F}}\big/_{\operatorname{im} Q_{m'-p',p-m} \cap \mathcal{F}} \simeq \mathbb{H}_{m'm} \tag{5.22}$$

als Vir–Moduln. Es gilt $(B_{m'm}, \langle\cdot,\cdot\rangle_J) \simeq (\mathbb{H}_{m'm}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Beweis.
Aus Satz 2.3.4 kennen wir die Struktur der Fock–Moduln. Da die Kerne und Bilder von Q Untermoduln sind, müssen sie von einer Teilmenge der Vektoren der Diagramme aus Satz 2.3.4 erzeugt werden. Wir werden die folgenden Abbildungseigenschaften von

$Q_{m'-p',p-m}$ und $Q_{m'm}$ beweisen.



(5.23)

Wir bemerken zunächst, daß die Gewichte der Vektoren nach (2.23) zusammenpassen, es gilt $\mathrm{wt}(\bar{w}_{2k}) + (p'-m')(p-m) = \mathrm{wt}(w_{2k+1})$ u.s.w. Die Behauptung aus Diagramm (5.23) ist mit anderen Worten:

(i) $\ker Q_{m'-p',p-m}$ wird von $\bar{w}_{2k+1}$ $(k \geq 0)$ erzeugt.

(ii) $\mathrm{im}\, Q_{m'-p',p-m}$ wird von w_{2k+1} $(k \geq 1)$ erzeugt.

(iii) $\ker Q_{m'm}$ wird von w_0 und w_{2k+1} $(k \geq 0)$ erzeugt.

(iv) $\mathrm{im}\, Q_{m'm}$ wird von $\tilde{w}_0$ und $\tilde{w}_{2k+1}$ $(k \geq 0)$ erzeugt.

Damit folgt unmittelbar Behauptung (i) und weiter

$$\ker Q_{m'm} \big/ \mathrm{im}\, Q_{m'-p',p-m} \simeq [w_0] \big/ [w_1] \simeq \mathbb{H}_{m'm}. \tag{5.24}$$

Die Aussage über die Formen $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ folgt unmittelbar aus der Vir–Invarianz beider Formen. Zu zeigen bleibt nur (5.23).

Wir untersuchen zunächst $Q_{m'-p',p-m}\bar{w}_0$ und $Q_{m'm}w_2$. Analog zu Korollar 4.1.5 ist zu zeigen, daß diese Vektoren nicht Null sind. Korollar 4.1.5 läßt sich aber nicht direkt anwenden, denn es ist $\gamma_+^2 = \frac{2p'}{p} \in \mathbb{Q}$. Wir müssen also in (4.13), (4.14) und (4.15) noch einmal etwas genauer hinschauen.

Korollar 5.3.2 (zu Lemma 4.1.4) *Sei Φ wie im Beweis von Lemma 4.1.4 und $m' < 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \langle \Phi, Q_{-m',m} v_{m'm} \rangle &= \langle v_{m',-m}, Q_{m'm} \Phi \rangle \\ &= \frac{(2\pi i)^{m-1}}{m!} \frac{\Gamma(1 + m\frac{\gamma_+^2}{2})}{\Gamma(1 + \frac{\gamma_+^2}{2})^m} \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin(\pi j \frac{\gamma_+^2}{2})}{\sin(\pi \frac{\gamma_+^2}{2}}. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Dieser Ausdruck ist insbesondere nicht Null, falls $1 \leq m \leq p-1$ gilt.

Damit folgt unmittelbar, daß $Q_{m'-p',p-m}\bar{w}_0$ ein singulärer Vektor in $\mathcal{H}_{m'm}$ ist und damit proportional zu w_1 sein muß. Weiter muß ein Vektor $w_2 \in \mathcal{H}_{m'm}$ existieren mit $Q_{m'm} w_2 = \tilde{w}_0$.

Nun können wir uns in (5.23) auf folgende einfache Weise weiterhangeln. Wir beschränken uns nun auf die Aussagen über $Q_{m'-p',p-m} =: Q$, die Aussagen über $Q_{m'm}$ folgen analog.

Da die Vektoren $\bar{w}_{4k+1}$ für $k \geq 0$ singulär sind, ist klar, daß $Q\bar{w}_{4k+1} = 0$ $(k \geq 0)$ gelten muß, denn im Bild gibt es keine singulären Vektoren mit den entsprechenden Graden.
Wir untersuchen nun $Q\bar{w}_2$. Aus $Q\bar{w}_2 = 0$ würde wegen $\bar{w}_0 \in [\bar{w}_2]$ $Q\bar{w}_0 = 0$ folgen, ein Widerspruch. Wir setzen $w_3 = Q\bar{w}_2$. (Erinnern wir uns dabei daran, daß die Vektoren in diesen Diagrammen nur bis auf Äquivalenzklassen eindeutig sind; $Q\bar{w}_2$ ist in der selben Äquivalenzklasse wie w_3, da beide Vektoren singulär werden, wenn wir den Quotienten mit $[w_1]$ bilden.)

Weiter gilt $w_5 \in [w_3]$, es gibt demnach ein $L \in \mathfrak{U}(\mathrm{Vir})$ mit $w_5 = Lw_3$. Da Q ein Intertwiner ist, folgt weiter

$$w_5 = Lw_3 = LQ\bar{w}_2 = QL\bar{w}_2.$$

Wir setzen $\bar{w}_4 := L\bar{w}_2$. Außerdem folgt $Q\bar{w}_3 = 0$, denn im Bild gibt es keinen Vektor mit entsprechenden Eigenschaften.
Diese Schritte induktiv fortgesetzt beweisen (5.23) und damit Lemma 5.3.1. □

Die Sequenz (5.21) liefert damit eine Auflösung der irreduziblen Höchstgewichtsmoduln durch bestimmte Fock–Moduln. Als nächsten Schritt möchten wir zeigen, daß die von uns konstruierten konformen Felder (5.18) auch auf $B_{m'm}$ wohldefiniert sind. Zunächst vervollständigen wir $B_{m'm}$, diese Vervollständigung können wir identifizieren mit $\overline{B}_{m'm} := \ker Q_{m'm} \ominus \overline{\operatorname{im} Q_{m'-p',p-m}}$. Da $B_{m'm}$ aus dem Vakuumvektor in $\mathcal{H}_{m'm} \cap \mathcal{F}$ durch die Virasoro–Algebra erzeugt wird und $L_n : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ gilt, ist $\mathcal{F} \cap B_{m'm} = B_{m'm}$ dicht in $\overline{B}_{m'm}$. Wir werden zeigen, daß $V_{n'n}^{r'r}(z)$ Kettenabbildungen sind, d. h. daß sie mit Q vertauschen.

Lemma 5.3.3 *Es gilt das folgende bis auf Phasen kommutative Diagramm. Sei* $l = m + n - 2r - 1$ *und* $l' = m' + n' - 2r' - 1$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "Q_{m',2p-m}"] & \mathcal{H}_{m',-m+2p} \arrow[r, "Q_{m'-p',p-m}"] \arrow[d, "V_{n'n}^{r'n-r}(z)"] & \mathcal{H}_{m'm} \arrow[r, "Q_{m'm}"] \arrow[d, "V_{n'n}^{r'r}(z)"] & \mathcal{H}_{m',-m} \arrow[r, "Q_{m'm}"] \arrow[d, "V_{n'n}^{r',n-r-1}(z)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "Q_{l',2p-l}"'] & \mathcal{H}_{l',-l+2p} \arrow[r, "Q_{l'-p',p-l}"'] & \mathcal{H}_{l'l} \arrow[r, "Q_{l'l}"'] & \mathcal{H}_{l'l} \arrow[r, "Q_{l',-l}"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{5.26}$$

Genauer gilt für $\Phi \in \mathcal{F}$

$$Q_{m',m+n-2r-1} V_{n'n}^{r'r}(z)\Phi = e^{\pi i \gamma_{n'n}\gamma_+ (m+n-2r-1)} V_{n'n}^{r',n-r-1}(z) Q_{m'm}\Phi. \tag{5.27}$$

Die Phase in (5.27) können wir eliminieren, indem wir die Operatoren $V_{n'n}^{r'r}(z)$ mit der Phase $\exp(\pi i \gamma_{n'n}\gamma_+(r - m/2))$ multiplizieren.

Beweis.
Das Diagramm (5.26) beweisen wir in zwei Schritten, wir behaupten für $\Phi \in \mathcal{F}$

$$V_{n'n}^{r'r}(z) Q_{m'm}\Phi = V_{n'n}^{r',r+m}(z)\Phi \tag{5.28}$$

und

$$Q_{m'm} V_{n'n}^{r'r}(z)\Phi = e^{\pi i m \gamma_{n'n}\gamma_+} V_{n'n}^{r',r+m}(z)\Phi. \tag{5.29}$$

Diese beiden Gleichungen implizieren (5.27) und damit (5.26). Wir nehmen an, daß die beteiligten Operatoren durch (4.18) bzw. durch (4.20) definiert sind, d. h. daß $\operatorname{Re}\gamma_i\gamma_j > 0$ für alle Exponenten gilt. Aus der Gültigkeit von (5.28) und (5.29) in diesem Fall folgt, daß auch die analytisch in den Exponenten fortgesetzten Operatoren diese Gleichungen erfüllen.

Das Produkt der Operatoren ist im Sinne von Abschnitt 4.3 zu verstehen. Nach Lemma 4.1.1 können wir in (5.28) den Punkt 1 als Start– und Endpunkt der letzten Integration von $Q_{m'm}$ durch einen beliebigen Punkt in der komplexen Ebene ersetzen. Wir wählen z als diesen Punkt; die Integrationskonturen von $Q_{m'm}$ sollen innerhalb denen von $V_{n'n}^{r'r}(z)$ liegen, um die radiale Ordnung zu gewährleisten. Genauso lassen wir die Konturen von $Q_{m'm}$ in (5.29) von außen gegen C_z schrumpfen.

Es reicht zu zeigen, daß (5.28) und (5.29) schwach auf $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ gelten. Nach Definition der Produkte der abgeschirmten Vertex–Operatoren ist klar, daß die Integranden von (5.28) und (5.29) bis auf die Normierungskonstante von $Q_{m'm}$ aus (5.20) übereinstimmen; diese Konstante wurde eingeführt, damit (5.28) und (5.29) in der behaupteten Form stimmen. Wir konzentrieren uns nun auf den Fall (5.28).

Sei $\mathbf{w} = (z, u_1, \ldots, u_{r'}, \ldots, u_{r'+r+m})$. Dann sind die Matrixelemente von $V_{n'n}^{r'r}(z)Q_{m'm}$ und $V_{n'n}^{r',r+m}(z)$ endliche Summen von Integralen über

$$F_{\gamma_{n'n}}(\boldsymbol{\gamma}_{n'n}^{r',r+m}; \mathbf{w}) \prod_{i=1}^{r'+r+m} u_i^{k_i} z^{k_0} \tag{5.30}$$

gegeben. Der einzige Unterschied besteht in den Integrationskonturen, die von $V_{n'n}^{r'r}(z)Q_{m'm}$ sind in Abbildung 5.1 und die von $V_{n'n}^{r',r+m}(z)$ sind in Abbildung 5.2 angedeutet. Wir haben damit zu zeigen

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\pi i \gamma_+^2 m} - 1}{m(e^{\pi i \gamma_+^2} - 1)} \int \cdots \int_{I_{r'+r,m}(z)} F_{\gamma_{n'n}}(\boldsymbol{\gamma}_{n'n}^{r',r+m}, \mathbf{w}) \prod_{i=1}^{r'+r+m} u_i^{k_i} du_i \\ &= \int \cdots \int_{I_{r'+r+m}(z)} F_{\gamma_{n'n}}(\boldsymbol{\gamma}_{n'n}^{r',r+m}, \mathbf{w}) \prod_{i=1}^{r'+r+m} u_i^{k_i} du_i. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Zum Beweis von (5.31) verwendet man dieselbe Technik, die wir schon im Beweis von Lemma 4.1.4 nur angedeutet haben. Auf beiden Seiten werden die Integrationskonturen auf die Gerade durch 0 und z gedrückt und dann die Integrale zerlegt in Beiträge über geordnete Konfigurationen der Variablen u_i. Diese Beiträge können bis auf eine Phase auf das Integral über das "Einheitssimplex" zurückgeführt werden. Die Phasen können aufsummiert werden und liefern so den Zusammenhang zwischen den Integralen, wie er in (5.31) behauptet wird.

Beim Beweis von (5.29) ist zusätzlich noch zu beachten, daß auf der linken Seite von (5.29) die Integrale nicht in der gleichen Ordnung wie auf der rechten Seite stehen.

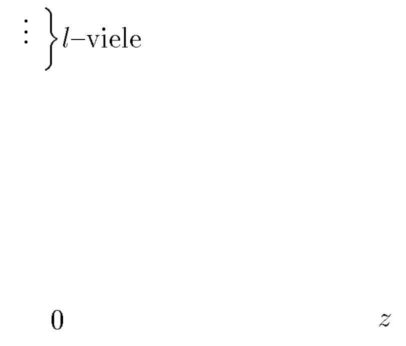


Abbildung 5.1: Die Konturen $I_l(z)$

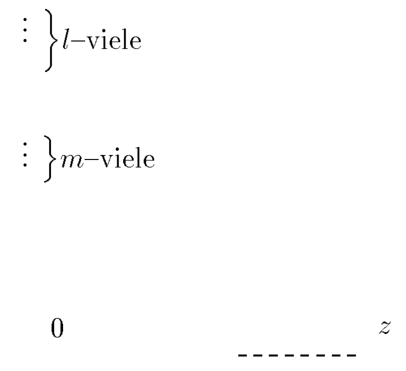


Abbildung 5.2: Die Konturen $I_{l,m}(z)$ (Die durch die gestrichelte Linie verbundenen Punkte sind zu identifizieren.)

Die Umordnung der Integrale auf der linken Seite liefert genau den Phasenfaktor in (5.29). □

Mit Lemma 5.3.3 folgt insgesamt:

Satz 5.3.4 *(i)*
$\overline{B}_{m'm} = \ker Q_{m'm} \ominus \overline{\mathrm{im}\, Q_{m'-p',p-m}}$ *ist ein irreduzibler Höchstgewichtsmodul, es gilt* $\overline{B}_{m'm} \cap \mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} V(h_{m'm}, c) \big/ M(h_{m'm}, c) = \mathbb{H}_{m'm}$.

(ii) Die Operatoren $V^{r'r}_{n'n}(z)$ *induzieren dicht definierte Operatoren zwischen* $\overline{B}_{m'm}$ *und* $\overline{B}_{l'l}$ *mit* $l' = m' + n' - 2r' - 1, l = m + n + 2r - 1$*, die wieder konforme Felder vom Gewicht* $h_{n'n}$ *sind.*

Beweis.
Aus Lemma 5.3.3 folgt, daß

$$V^{r'r}_{n'n}(z) : \ker Q_{m'm} \cap \mathcal{F} \longrightarrow \ker Q_{l',l}$$

gilt. Weiter folgt aus $\Phi \in \mathrm{im}\, Q_{m'm} \cap \mathcal{F}$, daß ein $\Psi \in \mathcal{F}$ mit $\Phi = Q_{m'm}\Psi$ existiert. Es folgt demnach

$$V^{r',n-r-1}_{n'n}(z)\Phi = Q_{l'l} V^{r'r}_{n'n}(z)\Psi \in \mathrm{im}\, Q_{l'l}.$$

Damit induziert $V^{r'r}_{n'n}$ einen Operator

$$\tilde{V}^{r'r}_{n'n}(z) : \overline{B}_{m'm} \longrightarrow \overline{B}_{l'l}$$

mit $D(\tilde{V}^{r'r}_{n'n}(z)) = \overline{B}_{m'm} \cap \mathcal{F} = B_{m'm}$, $\tilde{V}^{r'r}_{n'n}(z)$ sind also dicht definiert. Da $\overline{B}_{m'm}$ ein Untermodul ist, erfüllen die Operatoren (5.19) stark auf $B_{m'm}$, sie sind damit konforme Felder vom Gewicht $h_{n'n}$. □

Also sind

$$\begin{aligned} \varphi^{l'l}_{n'nm'm}(z) &: \mathbb{H}_{m'm} \longrightarrow \mathbb{H}_{l'l} \text{ und} \\ V^{r'r}_{n'n}(z) &: \overline{B}_{m'm} \longrightarrow \overline{B}_{l'l} \end{aligned}$$

für $m^{(\prime)} + n^{(\prime)} - 2r^{(\prime)} - 1 = l^{(\prime)}$ proportional. Die Proportionalitätskonstanten wurden in [Fe1] angegeben. In [DF1] wurden die Strukturkonstanten berechnet, wir haben also unter Verwendung dieser Ergebnisse die primären Felder

$$\Phi_{n'n}(z, \bar{z}) = \sum_{m'nl'l} C^{l'l}_{n'nm'm} \varphi^{l'l}_{n'nm'm}(z) \otimes \varphi_{n'nm'm} l'l(\bar{z})$$

in

$$\bigoplus_{n'n} \mathbb{H}_{n'n} \otimes \overline{\mathbb{H}}_{n'n}$$

explizit konstruiert. Bei der Bildung der konformen Blöcke (5.15) ist zu beachten, daß wir zur Berechnung der Korrelationen konformer Felder die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ verwenden müssen.

Ausblick

Ausgangspunkt dieser Arbeit waren die Arbeiten von V. Dotsenko und V. Fateev [DF1, DF2] und G. Felder [Fe1], in denen die sogenannten Feigin–Fuks–Integraldarstellungen für die Korrelationen primärer Felder für Vir–minimale Modelle gefunden wurden.

In diesen Arbeiten wird die "Coulomb–Gas–Darstellung" der primären Felder, d. h. die Fock–Raum–Realisierung der primären Felder über abgeschirmte Vertex–Operatoren, auf einer formalen Ebene verwendet. In [DF1] wird des weiteren der Unterschied zwischen irreduziblen Höchstgewichtsmoduln und den Fockmoduln der Virasoro–Algebra ignoriert. Felder korrigierte dies durch seine Einführung des BRST–Operators Q, die es erlaubt einen invarianten Unterraum in den Fock–Moduln zu finden, den wir mit den irreduziblen Vir–Moduln identifizieren können.

Der Beweis dieser Eigenschaften von Q verwendet tiefliegende Eigenschaften der Fock–Moduln, die wir wegen der Unzugänglichkeit der Originalliteratur [FF] in Kapitel 2 noch einmal aufbereitet haben.

Ein Ziel dieser Arbeit war es, zu zeigen, daß sich die Behandlung der beteiligten Operatoren auf mathematisch rigorose Weise durchführen läßt. Dazu war es notwendig, Vertex–Operatoren im Fock–Raum zu untersuchen. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 und 4 ist es uns gelungen, die primären Felder der minimalen Modelle der konformen Quantenfeldtheorie im Hilbertraum zu konstruieren.

Ein wesentliches Hilfsmittel, die Konstruktion der BRST–Symmetrie, also von Fock–Raum Auflösungen der irreduziblen Vir–Moduln, ist inzwischen in verschieden Arbeiten verallgemeinert worden. Hier sei insbesondere die Arbeit von P. Bouwknegt, J. McCarthy und J. Pilch [BMP1] erwähnt, in der Fock–Raum–Auflösungen für alle Moduln mit $c \leq 1$ bewiesen wurden. Der Unterschied zu dem von uns betrachteten Fall III_- besteht im wesentlichen darin, daß man die Integrationswege geeignet variieren muß, um die Nichttrivialität der Intertwiner zu garantieren.
Die Autoren untersuchen allerdings nicht die Konstruktion der primären Felder, hier wird man i. allg. Satz 4.2.1 nicht anwenden können, da die Exponenten die Voraussetzungen nicht immer erfüllen werden.

Eine andere Verallgemeinerung beschäftigt sich mit den WZNW–Modellen, die konforme Quantenfeldtheorien sind, wobei dann die Symmetriealgebra ein semidirektes Produkt einer Kac–Moody–Algebra und der Virasoro–Algebra ist. Die Observablen–Algebra ist dann von $T(z)$ und einem weiteren Strom $J_a(z)$ erzeugt.

In [BMP2] und [Kur] werden Fock–Raum–Darstellungen von Kac–Moody–Algebren, die Wakimoto–Moduln [Wak] eingeführt und Intertwiner zwischen diesen

Moduln mit Hilfe von Vertex–Operatoren eingeführt. In den genannten Arbeiten werden die Vertex–Operatoren allerdings nur über formale Potenzreihen definiert. Die dort verwendeten Vertex–Operatoren haben große Ähnlichkeit mit den von uns untersuchten, insbesondere in Hinsicht auf die funktionalanalytischen Eigenschaften (siehe [Boe]), es sollte möglich sein die von uns bewiesenen Eigenschaften auf die dort verwendeten Vertex–Operatoren zu verallgemeinern.

Ein Punkt, der in dieser Arbeit überhaupt nicht auftaucht, ist die Störungstheorie von konformen Quantenfeldtheorien. Dies ist ein recht neues und noch wenig homogenes Forschungsgebiet. In einer Arbeit von V. Yurov und Al. Zamolodchikov [YZ] wurde ein Wechselwirkungs–Hamilton–Operator der Form

$$H = H_0 + \int_{|z|=\mathrm{const.}} \Phi_{n'n}(z,\bar{z})dz \tag{6.1}$$

für das konforme Modell $c = 2/5$ untersucht, wobei $H_0 = L_0 + \bar{L}_0$ ist und Φ ein primäres Feld ist. M. Lässig e.a. [LMC] haben diese Arbeit verallgemeinert und das Modell $c = 7/10$ untersucht. Die Vermutung der Physiker ist, daß die konforme Invarianz zwar zerstört wird, aber daß unter diesen Störungen das gestörte System integrabel ist. Beide Autorengruppen legen die Vermutung nahe, (6.1) sei mit analytischer Störungstheorie zu behandeln. Wir haben zwar nicht die Nichtabschließbarkeit der Störung in (6.1) zeigen können, aber immerhin die Nichtabschließbarkeit des Integranden der Störung von (6.1). Dieses und auch die Aussagen über den Definitionsbereich von Vertex–Operatoren (wir können im wesentlichen die Störung auf $D(e^{H_0})$ definieren) lassen zum jetzigen Zeitpunkt eine mathematische Behandlung von (6.1) im Hilbertraum nicht zu. Als positives Ergebnis sei hier die Arbeit von F. Constantinescu und R. Flume [CF] erwähnt, in der ein positiver Konvergenzradius der Gell–Mann–Low–Reihe für das Modell $c = 7/10$ gestört durch $\Phi_{2,1}$ bewiesen wird. Was diese Aussage allerdings für die entsprechende Störungstheorie für (6.1) bedeutet, ist nicht klar.

Literaturverzeichnis

[BC] W. Boenkost, F. Constantinescu: “Vertex operators in Hilbert space”, J. Math. Phys. **34**(8) 1993, 3607 - 3615

[BG] A. Bilal, J. Gervais: “Systematic construction of conformal theories with higher spin symmetries”, Nucl. Phys. **B318**(1989) 579 - 630

[Boe] W. Boenkost: “Vertex operators are not closable”, erscheint in Rev. Math. Phys.

[Bo] J. Bognàr: “Indefinite inner product spaces”, Springer, Berlin Heidelberg New–York, 1974

[BMP1] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch: “Fock space resolutions of the Virasoro highest weight modules with $c \leq 1$” Lett. Math. Phys. **23**(1991), 193 - 204

[BMP2] P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch: “Free field approach to 2-dimensional conformal field theories”, Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 102(1990), 67-135

[BPZ] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov: “Infinite conformal symmetrie in two–dimensional quantum field theorie”, Nucl. Phys. **B241**(1984) 333 - 380

[Car] J. Cardy. “Conformal invariance” in “Phase transition and critical phenomena” Vol. 11, eds. C. Domb, J. Lebowitz, Academic Press London 1987

[CF] F. Constantinescu, R. Flume: “The convergence of strongly relevant perturbations of $d = 2$ conformal field theories”, Preprint Bonn-HE-93-48, Dezember 1993

[CdG] F. Constantinescu, H. de Groote: “Algebraische und geometrische Methoden in der Physik”, Teubner, Stuttgart, 1994

[Chi] T. Chihara: “An introduction to orthogonal polynomials”, Gordon & Breach, New York London Paris, 1978

[DF1] Vl. Dotsenko, V. Fateev: "Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models", Nucl. Phys. **B240**(1984) 312 - 348

[DF2] Vl. Dotsenko, V. Fateev: "Four–point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $c \leq 1$", Nucl. Phys. **B251**(1985) 691 - 734

[DU] J. Distel, J. J. Uhl: "Vector Measures", Mathematical Surveys No. 15, AMS 1977

[Fe1] G. Felder: "BRST approach to minimal models", Nucl. Phys. **B317**(1989) 215 - 236

[Fe2] G. Felder: "Minimal models on a Riemann surface", ETH-TH/90-1, Januar 1990

[FF] B. Feigin, D. Fuks: "Representations of the Virasoro algebra", in "Representations of Lie groups and related topics" eds. A. Vershik, D. Zhelobenko, Gordon & Breach, London 1990

[FFK] G. Felder, J. Fröhlich, G. Keller: "On the structure of unitary conformal field theory. Part I: Existence of conformal blocks", Comm. Math. Phys. **124**(1989), 647 - 664

[FQS] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker: "Details of the non-unitarity proof for highest weight representations of the Virasoro algebra", Comm. Math. Phys. **107**(1986), 535 - 542

[Gin] P. Ginsparg: "Applied conformal field theory", in Les Houches, Session XLIX, 1988, "Champs, Cordes et Phénomènes Critiques", eds. E. Brézin, J. Zinn–Justin 1989

[GKO] P. Goddard, A. Kent, D. Olive: "Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras", Comm. Math. Phys. **103**(1986), 105 - 119

[GSW] M. Green, J. Schwarz, E. Witten: "Superstring theory Vol. 1", Cambridge University Press, 1987

[Kac1] V. Kac: "Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras", in Proceedings of ICM, Helsinki, 1978, 299 - 304

[Kac2] V. Kac: "Infinite dimensional Lie Algebras", 3. Aufl. Cambridge University Press 1990

[Kaku] M. Kaku: "Introduction to Superstrings", Graduate texts in contemporary physics, Springer, New York Berlin Heidelberg, 1988

[KR] V. Kac, A. Raina: "Highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras", World Scientific, Singapore, 1987

[KS] J. Klauder, E. Sudarshan: "Fundamentals of quantum optics", Benjamin, New York, 1968

[Kur] G. Kuroki: "Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess–Zumino–Witten models", Comm. Math. Phys **142**, 511-542 (1991)

[LMC] M. Lässig, G. Mussardo, J. Cardy: "The scaling region of the tricritical Ising model in two dimensions", Nucl. Phys. **B348**(1991), 591 - 618

[Mack] G. Mack: "Introduction to conformal invariant quantum field theory in two and more dimensions", in Cargese Lectures 1987 "Nonperturbative quantum field theory" eds. G. t'Hooft e.a., Plenum Press, New York, 1988

[Man] S. Mandelstam: "Dual–Resonance–Models", Phys. Lett. C**15**, no. 6 (1974), 259 - 353

[Mat] S. Mathur: "Quantum Kac–Moody symmetry in integrable field theories", Nucl. Phys. **B369**(1992), 433 - 460

[OS1] K. Osterwalder, R. Schrader: "Axioms for euclidian Green's functions", Comm. Math. Phys. **31**(1973), 83 - 112
und "Axioms for euclidian Green's functions II", Comm. Math. Phys. **42**(1975), 281 - 305

[Put] C. Putnam: "Commutation properties of Hilbert space operators and related topics", Springer, New–York, 1967

[RC1] A. Rocha–Charidi: "Representation theory of the Virasoro and Super–Virasoro algebras. Irreducible characters", John Hopkins Workshop Vol. 10 Bonn 1986, eds. v. Rittenberg, Dietz, World Scientific 1987

[RC2] A. Rocha–Charidi: "On highest weight and Fock space representations of the Virasoro algebra", Proc. Symp. Pure Math. **49**(1989) Part I, 259 - 272

[RCW] A. Rocha–Charidi, N. Wallach: "Characters of irreducible representations of the Lie algebra of vector fields on the circle", Invent. Math. **72**(1983), 57 - 75

[RSII] M. Reed, B. Simon: "Methods in modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness", Academic Press, New–York San Francisco London, 1975

[Se] A. Selberg: “Bemerkninger om et multipelt integral”, Norsk Mat. Tids. **26**(1944), 71 - 78

[SA] Y. Saint–Aubin: “Phénomènes critiques en deux dimensions et invariance conforme”, Vorlesungsskript, Montreal, Juni 1987

[Th] C. Thorn: “Computing the Kac determinant using dual model techniques and more about the no–ghost theorem”, Nucl. Phys. **B 248**(1984), 551 - 569

[TK] A. Tsuchia, Y. Kanie: “Fock space representations of the Virasoro algebra”, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **22**(1986), 259 - 327

[Wak] M. Wakimoto: “Fock–Representations of the affine Lie–algebra $A_1^{(1)}$”, Comm. Math. Phys. **104**, 605-609 (1986)

[Wd] J. Weidmann: “Lineare Operatoren in Hilberträumen”, Teubner, Stuttgart, 1976

[YZ] V. Yurov, Al. Zamolodchikov: “Truncated conformal space approach to scaling Yang–Lee model”, Preprint ITEP 89-161

[ZZ] Al. Zamolodchikov, A. Zamolodchikov: “Conformal field theory and critical phenomena in two dimensional systems”, Physics Reviews, Vol. 10, Part 4