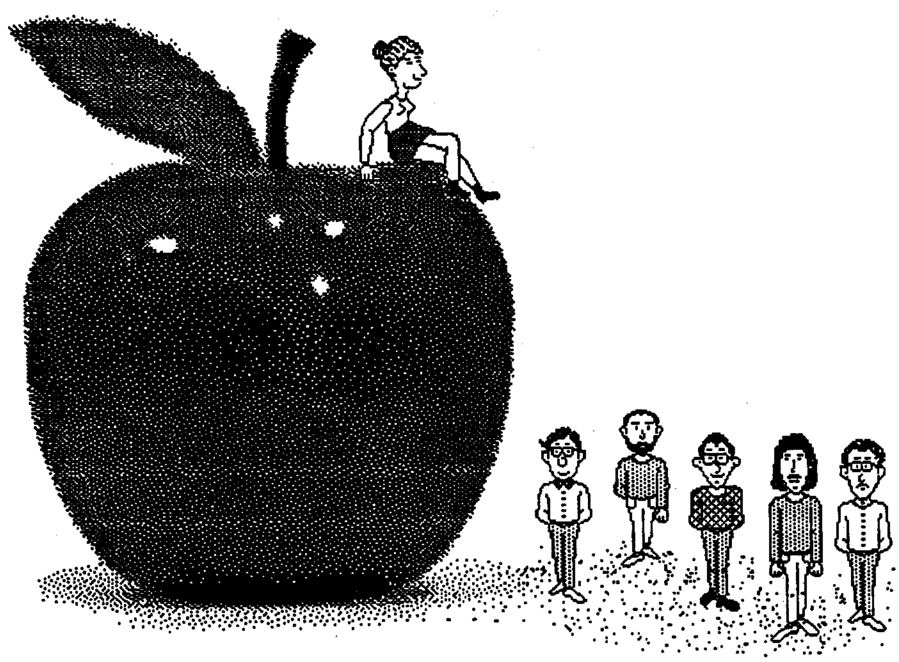
Skalierungsregeln für Güte und Shuntimpedanz

M. Kurz, H.-W. Glock, P. Hülsmann,
U. Niermann, C. Peschke, W.F.O. Müller

Institut für Angewandte Physik
der Universität Frankfurt am Main



Frankfurt am Main
Februar 1993

Weil man es immer wieder gerne vergißt, aber ständig wieder braucht, werden im folgenden die Skalierungsregeln für Güte und Shuntimpedanz in Abhängigkeit von der Frequenz wiedergegeben (abgeschrieben aus [1]):

Wir betrachten einen beliebig geformten Hohlraumresonator, dessen Abmessungen mit der Frequenz so skaliert werden, daß die Feldgeometrie erhalten bleibt. Ferner wird generell die Beschleunigungsfeldstärke festgehalten.
Shuntimpedanz und Güte sind auf etwas ungewohnte Art und Weise definiert. Es werden die Längenbeläge entlang der Teilchenbahn (z) von Verlustleistung dP/dz, gespeicherter Energie dW/dz und Wandwiderstand dR/dz verwendet. Dies vermeidet spezielle Annahmen über die Beschaffenheit des Beschleunigers:

$$\text{Shuntimpedanz} \qquad r := \frac{E^2}{\frac{dP}{dz}} \tag{1}$$

$$\text{Güte} \qquad Q := \frac{\omega \frac{dW}{dz}}{\frac{dP}{dz}} \tag{2}$$

Dabei bezeichnet E die effektive Beschleunigungsfeldstärke, die im allgemeinen Fall von Teilchen- und Phasengeschwindigkeit sowie dem Ort z abhängen kann. Man beachte, daß bei Skalierung der Frequenz , jedoch konstanter Teilchengeschwindigkeit durch einen geänderten Transittime-Faktor auch E beeinflußt wird. Die bekannten Definitionsgleichungen erhält man zwanglos durch Umstellen und Integration von (1) und (2) bezüglich z.
Aus den Definitionsgleichungen (1) und (2) leiten wir zunächst die lediglich geometrieabhängige Größe

$$\frac{r}{Q} = \frac{E^2}{\omega w}, \quad \text{mit } w = \frac{dW}{dz} \tag{3}$$

ab. Aus der Separation der Wellengleichung in transversale und longitudinale Komponenten ergibt sich als allgemeingültige Beziehung für die zugehörigen Wellenzahlvektoren:

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_\perp}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_z}\right)^2 \tag{4}$$

Aus (4) ergibt sich, daß eine Verkleinerung der geometrischen Abmessungen bei unveränderter Feldgeometrie eine proportionale Vergrößerung der Resonanzfrequenz bewirkt.

$$\Rightarrow \omega \propto \frac{1}{b} \tag{5}$$

In (5) bedeutet b eine gemeinsame Maßstabsgröße für beide Transversalkoordinaten.
Analog skaliert der Längenbelag der gespeicherten Energie w mit b^2. Ferner hängt er quadratisch von den Feldamplituden ab:

$$w \propto E^2 b^2 \tag{6}$$

Bei konstantem E folgt aus (5) und (6):

$$w \propto \frac{1}{\omega^2} \tag{7}$$

Betrachten wir nun die Verlustleistung pro Längeneinheit:

$$\frac{dP}{dz} = i_{wand}^2 \cdot \frac{dR}{dz} \tag{8}$$

In (8) bezeichnet i_{wand} die Wandströme und dR/dz den ohmschen Widerstand der Resonatorwandung pro Längeneinheit. Er läßt sich als

$$\frac{dR}{dz} = \frac{\rho}{A} \tag{9}$$

mit $A \propto b \cdot \delta$ schreiben. ρ ist dabei die spezifische Leitfähigkeit des Wandmaterials (z.B. Kupfer $1.7 \cdot 10^{-8}\Omega m$), A die stromdurchflossene Querschnittsfläche und δ die Skintiefe:

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\rho}{\omega}} \tag{10}$$

Zum Beispiel ergibt sich bei einem kreisförmigen Resonatorquerschnitt: $A = 2\pi\ b\ \delta$.
Einsetzen liefert:

$$\frac{dR}{dz} \propto \frac{\rho}{b\,\delta} \propto \frac{\rho}{b\sqrt{\frac{\rho}{\omega}}} \propto \frac{\sqrt{\rho\omega}}{b} \propto \sqrt{\rho}\,\omega^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

Bei der Skalierung der Geometrie sollen voraussetzungsgemäß Feldgeometrie und -amplituden erhalten bleiben. Folglich bleibt auch das tangentiale H-Feld an der Wand und mit ihm die Wandstromdichte erhalten. Entsprechend muß der Gesamtstrom i_{wand} proportional zu b sein.

$$i_{wand} \propto b \tag{12}$$

Wir setzen (12) in (8) ein und verwenden (5):

$$\frac{dP}{dz} \propto b^2 \cdot \omega^{\frac{3}{2}} \sqrt{\rho} \propto \sqrt{\frac{\rho}{\omega}} \tag{13}$$

Einsetzen in (1) ergibt:

$$r \propto \sqrt{\frac{\omega}{\rho}} \tag{14}$$

Analog erhalten wir für die Güte:

$$Q \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}} \tag{15}$$

Der Quotient r/Q skaliert damit wie:

$$\frac{r}{Q} \propto \omega \qquad (16)$$

Literatur:

[1] Lapostolle, P.M., Septier, A.L. (Hrsg.): Linear Accelerators, North Holland, Amsterdam 1970, S. 47ff