

Hf - Fokussierung

M. Kurz

Institut für Angewandte Physik  
der  
Universität Frankfurt am Main

## 1.) Einleitung

Im Gegensatz zu Beschleunigungsstrukturen, die für relativ kleine Teilchengeschwindigkeiten ( $v \ll c_0$ ) ausgelegt sind, spielen Raumladungskräfte bei Elektronenbeschleunigern ( $v_e \approx c_0$ ) keine Rolle. Dennoch müssen auch hier Maßnahmen getroffen werden, den Strahl zu fokussieren. Der Grund liegt darin, daß der Strahl in der beschleunigenden Kavität Moden anregt (wake fields), die ihn aus der Achse auszuweichen suchen. Diese Fokussierung wurde bisher extern realisiert, indem man magnetische Quadrupollinsen in den Beschleuniger integrierte. Allerdings sind solche Maßnahmen teuer und kompliziert, soll doch der CLIC<sup>1</sup> Beschleuniger über zehn Kilometer Länge erreichen. Das würde einige Kilometer Fokussierungsmagnete bedeuten<sup>2</sup>.

Im Bereich der Schwerionenbeschleuniger wurde mit dem RFQ<sup>3</sup> eine Struktur gefunden, die - ohne zusätzliche äußere Maßnahmen - Ionenstrahlen fokussiert und beschleunigt. Dieses Prinzip läßt sich auch auf Elektronenbeschleuniger übertragen, auch wenn hier die Strukturen aufgrund der wesentlich höheren Frequenzen anders aufgebaut sein müssen<sup>4</sup>. Die in Elektronenbeschleunigern verwendeten Lochblenden haben keinerlei fokussierende Wirkung, da sich die radialen elektrischen und magnetischen Felder infolge der vorgegebenen Symmetrie gerade aufheben. Macht man nun die Apertur der Blende unsymmetrisch, so erreicht man sicher eine Aufhebung dieses Zustandes. Es muß also untersucht werden, wie die Apertur eines Mikrowellen-Quadrupols auszusehen hat und welches ihre Eigenschaften sind.

## 2.) Felder im kreiszylindrischen Hohlleiter

Wir betrachten einen kreiszylindrischen Hohlleiter und untersuchen die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen entlang der Zylinderachse. Um einen vollständigen Satz von Lösungen zu erhalten, genügt es, für den Hertzschen Vektor<sup>5</sup> nur eine Komponente in Richtung der Zylinderachse anzunehmen. Für die Zeitbeziehungsweise die Ortsabhängigkeit beschränken wir uns im folgenden auf eine Funktion der Form  $e^{i(\omega t - \beta z)}$ , wobei  $\beta$  im Falle des idealen Hohlleiters gerade  $\beta = 2\pi/\lambda$ .  $\lambda$  ist dabei die entlang der Zylinderachse meßbare Hohlleiterwellenlänge. Der Hertzsche Vektor muß der skalaren Wellengleichung  $\Delta\Pi + k^2\Pi = 0$  genügen. Wir erhalten nun un-

1 CLIC = CERN LINEAR COLLIDER

2 W. Schnell CERN-LEP-RF/87-24, CLIC Note 34, Genf, März 87

3 RFQ = Radio Frequency Quadrupole

4 R. Palmer Private Mitteilungen

5 K. Simonyi THEORETISCHE ELEKTROTECHNIK, Berlin 1980

ter Verwendung von Zylinderkoordinaten:

$$\Pi = \Pi(r, \varphi) e^{i(\omega t - \beta z)} ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Pi ; \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = -\beta^2 \Pi ; \quad k^2 = -\varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + s^2 \Pi = 0 \quad \text{mit } s^2 = \varepsilon \mu \omega^2 - \beta^2$$

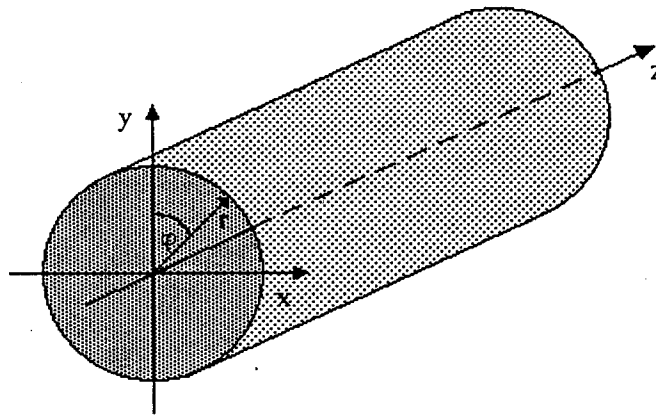


Fig. 1 kreiszylindrischer Hohlleiter

Mit dem Ansatz  $\Pi(r, \varphi) = \Pi(r) \cos m\varphi$  erhalten wir aus der obigen Differentialgleichung die Besselsche Differentialgleichung.

$$r^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \Pi}{\partial r} + (s^2 r^2 - m^2) \Pi = 0 \quad (2)$$

Damit erhalten wir als Lösung für die Funktion  $\Pi$ :

$$\Pi(r, \varphi, z, t) = A J_m(sr) \cos m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (3)$$

Aus dem Hertzschen Vektor erhält man die elektrischen bzw. die magnetischen Felder durch folgende Zusammenhänge (wir beschränken uns hier auf Lösungen des  $TM_{mn}$  Typs):  $E = \text{rot rot } \Pi$ ,  $H = \varepsilon \partial_t \text{ rot } \Pi$ . Die Feldstärkekomponenten sehen für TM-Wellen dann folgendermaßen aus:

$$E_z = A s^2 J_m(sr) \cos m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)} ; \quad H_z = 0 \quad (4)$$

$$E_r = -i A \beta s J_m(sr) \cos m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)} ; \quad H_r = -\frac{i\omega}{r} A \varepsilon J_m(sr) \sin m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$E_\varphi = A \frac{i\beta}{r} m J_m(sr) \sin m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)} ; \quad H_\varphi = -i\omega s A \varepsilon J'_m(sr) \cos m\varphi e^{i(\omega t - \beta z)}$$



Richtung geht, gibt es an der Blende keine x-Komponente, wohl aber existiert eine y-Komponente des E-Feldes.

Zur Klärung der Frage, ob die fokussierenden Kräfte - wenigstens in Achsen-  
nähe - linear sind, entwickeln wir die Besselfunktion in eine Reihe. Für  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$  erhält man so:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2340} + \dots - \dots + \dots \quad (6)$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{390} - \dots + \dots - \dots \quad \text{mit } x = sr$$

In der Nähe der Achse, also für kleine Werte von  $r$ , können wir die Terme höherer Ordnung der Reihen vernachlässigen und jeweils nur das erste Glied mitnehmen. Mit dieser Näherung ergeben sich die Felder im Hohlraumresonator in Achsennähe folgendermaßen:

$$E_z = 2 s^2 A e^{i\omega t} = E_0 e^{i\omega t} = E_0 \cos \omega t \quad (7)$$

$$H_\varphi = 2 s^2 A \frac{\epsilon r}{2} i\omega e^{i\omega t} = - \frac{\epsilon r}{2} E_0 \sin \omega t$$

Die in Fig. 2 skizzierte Kavität soll jetzt ein Teil eines Beschleunigers sein. Die Teilchen sollen beim Eintritt in den Resonator bereits Lichtgeschwindigkeit besitzen, die Periodenlänge des Beschleunigers entsprechend abgestimmt sein. Der Beschleuniger soll im "travelling wave mode" betrieben werden, und die Phasengeschwindigkeit der beschleunigenden Welle soll gerade der Teilchengeschwindigkeit angepaßt sein. Damit bekommen wir noch eine z-Abhängigkeit für die Felder in der Kavität. Die Gleichungen (7) bleiben richtig, müssen jedoch modifiziert werden.

$$E_z = E_0 \cos(\omega t - \beta z) , \quad (8)$$

$$H_\varphi = - \frac{\epsilon r}{2} E_0 \sin(\omega t - \beta z) , \quad \text{mit } \beta = \omega/c_0.$$

Unter der Annahme, daß das elektrische Feld in z-Richtung bekannt ist, kann man das zugehörige  $H_\varphi$ -Feld auch leicht aus einer anderen Überlegung gewinnen. Die Geometrie des Schlitzes in den Blenden der Runzelröhre war ja gerade so gewählt, daß das  $H_\varphi$ -Feld praktisch ungestört blieb, also  $\partial_\varphi = 0$ . Aus der Maxwellgleichung erhalten wir sofort:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \partial_t \vec{E} \quad \Rightarrow \quad (\text{in Zylinderkoordinaten}) \quad (9)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z \quad \Rightarrow$$

$$H_\varphi = - \frac{\epsilon r}{2} E_0 \sin(\omega t - \beta z) .$$

Wir kennen jetzt das magnetische Feld in der Kavität. Jetzt geht es darum, die Komponenten des elektrischen Feldes im Beschleuniger zu bestimmen, die auf ein eintretendes Teilchen wirken. Aufgrund der Wahl der Geometrie der Blende wird es kein E-Feld in x-Richtung geben, wohl aber in y-Richtung (siehe Fig. 2). Es muß  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  gelten. Da die x-Komponente des E-Feldes verschwindet, muß  $\partial_x = 0$  sein. Man erhält:

$$\frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = 0 \quad \Rightarrow \quad (10)$$

$$E_y = -y \frac{\partial}{\partial z} E_z = -y \beta E_0 \sin(\omega t - \beta z) .$$

Mit Kenntnis der Felder im Resonator kann man auf die transversalen Kräfte schließen, die auf ein geladenes Teilchen im Inneren der Kavität wirken. Zunächst die magnetischen Kräfte. Aus der Gleichung für die Lorentzkraft erhalten wir:

$$\vec{F}_r^{\text{mag}} = q \mu \vec{v} \times \vec{H} = -q \mu c_0 H_\varphi = \frac{q \omega}{2 c_0} r E_0 \sin(\omega t - \beta z) . \quad (11)$$

Für die elektrischen Felder:

$$F_x^{\text{el}} = 0 , \quad F_y^{\text{el}} = -q \beta y E_0 \sin(\omega t - \beta z) . \quad (12)$$

Damit erhält man für die fokussierenden bzw. defokussierenden Kräfte:

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= F_x^{\text{mag}} , & \bar{F}_y &= F_y^{\text{mag}} + F_y^{\text{el}} , & (13) \\ \bar{F}_x &= \frac{q \omega}{2 c_0} x E_0 \sin \Phi , & \bar{F}_y &= -\frac{q \omega}{2 c_0} y E_0 \sin \Phi . \end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung, daß die Teilchengeschwindigkeit über die Länge der Kavität konstant bleibt, ändert sich die Phasenlage des Teilchens gegenüber der Hochfrequenz nicht. Man kann daher eine feste Phase  $\Phi$  als Argument des Sinus angeben. Bei einer Phase von  $\Phi = \pi/2$  wird alle Hf-Leistung zur Fokussierung verwendet, es findet keine Beschleunigung mehr statt. In der Praxis wird man daher die Phase nicht größer als  $20^\circ$  werden lassen, d.h. der Beschleunigungsgradient nimmt in etwa um 6% ab. In der Größe  $E_0$  ist natürlich noch der transittime-factor zu berücksichtigen, der gerade den zur Beschleunigung nutzbaren Teil der maximalen Feldstärke in der Kavität angibt.

Führt man noch die Fokussierungsgradienten mit  $G_i = F_i / i q c_0$ ,  $i = x, y$  ein, so erhalten wir schließlich, daß  $G_x = -G_y$ . Für das Beispiel des geplanten Elektronenbeschleunigers CLIC am CERN bekommt man einen Fokussierungsgradienten von  $G = 84 \text{ T/m}$  bei einem beschleunigenden Feld von  $E_0 = 80 \text{ MV/m}$  und einer Betriebsfrequenz von  $f = 30 \text{ GHz}$ <sup>6</sup>.