

Kontrollierter Zusammenhang über symmetrischen Räumen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Informatik und Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Wolf Hanno Rehn
aus Offenbach am Main

Frankfurt 2007
(D30)

vom Fachbereich *Informatik und Mathematik* der
Johann Wolfgang Goethe–Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: *Prof. Dr. Klaus Johannson*

Gutachter: *Prof. Dr. Robert Bieri, Prof. Dr. Helmut Behr*

Datum der Disputation: *2. November 2007*

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Einleitung	v
Danksagung	ix
1 Überblick	1
1.1 Resultat	1
1.2 Geometrische Invariante Σ^n	3
1.3 Filtrierungen	3
1.4 Der Fall $SL_2(\mathbb{Q})$	4
1.5 Reduktionstheorie	6
1.6 Links	8
2 Die geometrische Invariante $\Sigma^n(\rho)$	9
2.1 Bezeichnungen	9
2.2 Kontrollierter Zusammenhang für CW -Komplexe	10
2.3 Kontrollierter Zusammenhang	13
3 Symmetrische Räume	15
3.1 Riemannsche Mannigfaltigkeiten	15
3.2 Symmetrische Räume	16
3.3 Der symmetrische Raum $P_n(\mathbb{R})$	17
3.4 Die Exponentialabbildung	18
3.5 Flache Unterräume, singuläre Geodäten und Weyl-Kammern	19
3.6 Reduktive Untergruppen der $GL_n(\mathbb{R})$	21

4	Filtrierung	25
4.1	Minkowskische Reduktionstheorie	26
4.2	Die Funktionen \widetilde{n}_α	31
4.3	Die Menge \widehat{C}_t	32
4.4	Die Retraktionen	33
4.5	Eigenschaften der Filtrierung	35
5	Die Bruhat-Tits-Gebäude	39
5.1	Gebäude	39
5.2	Zusammenhangseigenschaften	41
6	Hauptresultat	45
6.1	Die Gruppen	45
6.2	Die Räume	45
6.3	Das Hauptresultat	46
6.4	Ausblick	48
6.5	Der Schnitt	48
	Literaturverzeichnis	52
	Lebenslauf	57

Einleitung

Im Zentrum dieser Arbeit steht die Operation der Gruppe $\Gamma := SL_n(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ auf dem symmetrischen Raum $M := SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$. Allgemeiner betrachten wir die Operation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(M)$ einer S -arithmetischen algebraischen Gruppe Γ durch Isometrien auf dem zugehörigen symmetrischen Raum M .

Die symmetrischen Räume sind Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Krümmung und daher insbesondere CAT(0)-Räume. R. Bieri und R. Geoghegan haben für die Operation $\rho : G \rightarrow \text{Isom}(M)$ einer abstrakten Gruppe G auf einem CAT(0)-Raum M die geometrischen Invarianten $\Sigma^k(\rho) \subset \partial M$ eingeführt. (Wir geben in Kapitel 2 die dazu relevanten Definitionen aus [BG03a] bzw. [BG03b] wieder.)

Damit erweitern sie die von R. Bieri, R. Strebel und W. D. Neumann in [BNS87] eingeführte geometrische Invariante $\Sigma(G)$ und die von R. Bieri und B. Renz in [BR88] eingeführten höherdimensionalen Invarianten $\Sigma^k(G)$. Betrachten wir die Operation τ_G der endlich erzeugten Gruppe G durch Translationen auf dem endlichdimensionalen euklidischen Raum $M := G_{ab} \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{E}^d$, so lassen sich diese Invarianten als $\Sigma^1(\tau_G)$ bzw. $\Sigma^k(\tau_G) \subseteq \partial \mathbb{E}^d \cong \mathbb{S}^{d-1}$ auffassen.

Die Fokussierung, die durch die geometrischen Invarianten erreicht wird, hat sich in vielen Fällen bewährt, in denen diese Operation durch Translationen auf dem euklidischen Raum zur Verfügung steht. Insbesondere bei der Betrachtung der Endlichkeitseigenschaften F_k von Gruppen und Untergruppen gibt es zahlreiche Beispiele, in denen die Analyse von $\Sigma^k(\tau_G)$ direkte Resultate liefert oder zumindest eine bessere Darstellung der Ergebnisse ermöglicht. Ohne den Anspruch der Vollständigkeit zu erheben, möchten wir einige Arbeiten in diesem Zusammenhang zitieren: [Åbe86], [BB97], [BG99], [Bro87], [MMvW98], [BS], [Bux97a].

Für viele Gruppen ist eine explizite Berechnung von $\Sigma^k(\tau_G)$ durchgeführt worden. Es wurden auch für verschiedene Klassen von Gruppen Strukturaussagen über diese Mengen getroffen. Über die Invarianten von anderen CAT(0)-Operationen ist noch wenig bekannt.

In [BG03b] berechnen R. Bieri und R. Geoghegan die Invarianten der Möbiusaktion ρ_m der Gruppe $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ auf der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 und liefern damit ein erstes Beispiel für die Invarianten $\Sigma^k(\rho_m)$ einer Gruppe, die nur die triviale Translationsoperation auf \mathbb{E}^d zulässt.

Ein weiteres Beispiel liefert die Diplomarbeit von Th. Lünemann [Lün02] über die Operation der $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{i}{m}])$ durch Poincaré-Extensionen auf \mathbb{H}^3 .

In der vorliegenden Arbeit berechnen wir nun die geometrischen Invarianten $\Sigma^k(\rho)$ für die oben erwähnte Operation ρ der S -arithmetischen Gruppe Γ auf dem zugehörigen symmetrischen Raum M .

Wir erhalten für die Gruppe $SL_n(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ die Invariante

$$\Sigma^k(\rho) = \begin{cases} \partial M & \text{falls } k < s(n-1) \\ \left\{ e \in \partial M \mid \begin{array}{l} e \text{ liegt nicht im Rand eines rational} \\ \text{definierten flachen Unterraumes von } M \end{array} \right\} & \text{falls } k \geq s(n-1). \end{cases}$$

Hierbei ist s die Anzahl der verschiedenen Primteiler von m .

Um diese Resultate zu erhalten, haben wir das Programm verfolgt nicht nur das Resultat von [BG03b], sondern auch den dort gegebenen Beweis zu verallgemeinern.

Dazu haben wir zunächst die geometrischen Gegebenheiten in symmetrischen Räumen untersucht. Dabei war das Buch [BH99] über CAT(0)-Geometrie sehr hilfreich. Den relevanten Teil über die symmetrischen Räume der $SL_n(\mathbb{R})$ geben wir in Kapitel 3 auszugsweise wieder.

Mit CAT(0)-Methoden alleine war das Resultat aber nicht zu erhalten. Wir mußten uns der Minkowskischen Reduktionstheorie zuwenden, wie sie in [Har71] in einer für unseren Fall geeigneten Form präsentiert wird. Mit den dort verwendeten Methoden, die am Anfang von Kapitel 4 zitiert werden, gelang es uns die Situation in den Griff zu bekommen. Die dabei gewonnenen Einsichten füllen den Rest von Kapitel 4.

Parallel dazu mußten wir einen Ersatz für die Resultate von H. Meinert in [Mei93] finden, auf die in der Arbeit von R. Bieri und R. Geoghegan Bezug genommen wird.

Wir konnten ein Lemma beweisen, mit dem wir dies erreichen, und gleichzeitig den Beweis von Bieri-Geoghegan wesentlich vereinfachen. Dieses Lemma ist schon in der Arbeit [Lün02] erfolgreich eingesetzt worden. Eine Skizze, wie der vereinfachte Beweis von [BG03b] funktioniert und gleichzeitig ein Überblick über die Resultate, die in der hier vorliegenden Arbeit gezeigt werden, findet sich in Kapitel 1.

Allerdings war das erwähnte Lemma auf Baumoperationen zugeschnitten. Da wir aber die Bruhat-Tits-Bäume, die in [BG03b] verwendet werden, durch Gebäude ersetzen müssen, konnten wir es nicht direkt verwenden.

Um eine Verallgemeinerung dieses Lemmas zu bewerkstelligen, betrachteten wir zunächst die Techniken, mit denen in [Bux97a] gearbeitet wird. Davon geleitet gelang es uns die Produktformel für Bewertungen, auf der das Lemma basiert, auch im Gebäudefall einzusetzen. Die zur Bestimmung der Invarianten nötige Untersuchung der Zusammenhangseigenschaften von Horoballkomplementen in Gebäuden brachte dann die Arbeit von B. Schulz [Sch05] ins Spiel. Mit deren Hauptresultat und den Techniken aus [BG99] gelang es uns auch, die in Kapitel 5 dargestellte Gebäude-Variante des Lemmas zu finden. Eine kurze Erinnerung an die Definition und einige wichtige Eigenschaften von Gebäuden sind am Anfang dieses Kapitels skizziert.

Damit waren wir in der Position, sowohl die geometrischen Betrachtungen am Anfang als auch die Analyse der Zusammenhangseigenschaften am Ende des Beweises in [BG03b] verallgemeinert zu haben. Glücklicherweise war der Mittelteil so modular aufgebaut, daß wir ihn ohne Änderung übernehmen und so unser Resultat komplettieren konnten. Um eine möglichst vollständige Darstellung zu erhalten, liefern wir in Kapitel 6 den Beweis unseres Resultats inklusive einer Darstellung der Teile, die wir aus der obigen Arbeit mehr oder weniger unverändert übernehmen konnten.

Wir haben nun eine Reihe von interessanten CAT(0)-Operationen und deren Invarianten $\Sigma^k(\rho)$ zur Verfügung. Wir haben die Hoffnung, daß die in der Arbeit verwendeten Räume auch zur Untersuchung von Untergruppen verwendet werden können. Zum Beispiel ist die Gruppe $GL_n(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]) \times (\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])^n \leq SL_{n+1}(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ sehr interessant, da sie auch auf dem symmetrischen Raum der $SL_{n+1}(\mathbb{R})$ operiert.

Zum anderen bietet unser Hauptresultat die Möglichkeit, eine interessante Eigenschaft linearer algebraischer Gruppen zu beobachten.

Ist Γ eine S -arithmetische Untergruppe einer linearen algebraischen Gruppe über einem Zahlkörper, so ist die Eigenschaft „ $\Sigma^k(\rho) = \partial M$ “ eine Invariante der Operation ρ von Γ auf dem symmetrischen Raum M .

Diese Eigenschaft können wir auch für einige Operationen einer S -arithmetischen Untergruppe $\tilde{\Gamma}$ einer linearen algebraischen Gruppe über einem Funktionenkörper untersuchen. Hat die Operation $\tilde{\rho} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \text{Isom}(\tilde{M})$ diskrete Bahnen, so gibt es einen engen Zusammenhang zwischen der Eigenschaft „ $\Sigma^k(\tilde{\rho}) = \partial \tilde{M}$ “ und der Eigenschaft „der Punktstabilisator $\tilde{\Gamma}_a$ von $\tilde{\rho}$ ist vom Typ F_k “ (vgl. [BG03a]).

Die Endlichkeitseigenschaften F_k sind für viele $\tilde{\Gamma}_a$ bestimmt worden (vgl. [Abe91], [Abr96], [Beh69], [Beh04], [Stu76], [Stu80], [BW07]). Wir zeigen, daß es dann eine naheliegende Operation $\tilde{\rho}$ auf einem Bruhat-Tits-Gebäude \tilde{M} gibt, für die die Eigenschaft „ $\tilde{\Gamma}_a$ ist vom Typ F_k “ und die Eigenschaft „ $\Sigma^k(\tilde{\rho}) = \partial \tilde{M}$ “ zusammenfallen (vgl. auch [BG03a] im Baumfall).

Ein ähnlicher Zusammenhang scheidet im Zahlkörperfall aus, da S -arithmetische Gruppen im reduktiven Zahlkörperfall alle vom Typ F_∞ sind. Daher ist eine diskrete Operation mit den kontrollierten Zusammenhangseigenschaften aus dem Hauptresultat unmöglich. Trotzdem zeigt die Invariante die gleichen Schranken, wie sie aus dem Funktionenkörperfall abgeleitet werden können. Eine weitergehende Betrachtung dieser Zusammenhänge könnte einen neuen Aspekt in beide Gebiete bringen.

Eine letzte interessante Begebenheit ist die Vermutung, daß die hier untersuchten geometrischen Invarianten Σ^k für CAT(0)-Operationen auf dem symmetrischen Raum M enge Verwandtschaft mit den \mathbb{R} -Operationen der Stabilisatoren der entsprechenden Randpunkte haben. Zumindest im Fall auflösbarer Stabilisatoren kennen wir deren Invarianten (vgl. [MMvW98], bzw. [Bux97a] im Funktionenkörperfall) und stellen eine Übereinstimmung fest. Inwieweit das ermöglicht, die Invarianten aller Stabilisatoren ganz oder teilweise zu bestimmen, ist aber noch unklar.

Danksagung

Ich möchte den vielen Menschen danken, die mich in den letzten Jahren bei diesem Projekt unterstützt haben.

Zunächst danke ich Prof. Dr. Robert Bieri, der durch seine Begeisterung mein Interesse an diesem Gebiet geweckt hat. Er hat mich während der ganzen Zeit unterstützt und mir entscheidende Impulse gegeben, insbesondere in den vielen Gesprächen, die geholfen haben, diese Arbeit voranzutreiben. Prof. Dr. Helmut Behr danke ich für wertvolle Literaturhinweise, seine Genauigkeit bei der Durchsicht dieser Arbeit und für seine Geduld beim Beheben der Sprachbarriere zwischen den verschiedenen Zweigen der Mathematik.

Ich danke auch Prof. Ross Geoghegan für sein Interesse an meiner Forschung. Er stand mir sowohl bei seinen Aufenthalten in Frankfurt als auch auf die Distanz mit Rat und Erklärungen zur Seite. Prof. Dr. Kai-Uwe Bux danke ich dafür, daß er mich auf eine Ungenauigkeit aufmerksam gemacht hat, und für die Diskussion, die mir geholfen hat diese zu beheben.

Ganz besonderer Dank gilt Dr. Björn Brill, der mich in vielen langen Sitzungen dabei unterstützt hat, die Arbeit von G. Harder für meine Fragestellung nutzbar zu machen. Weiter danke ich Dr. Bernd Schulz, mit dem ich die Anwendung seiner Resultate auf meine Fälle diskutieren konnte. Auch danke ich ihm für gründliches Korrekturlesen.

Frank Feierabend und Thilko Lünemann danke ich dafür, daß durch das gemeinsame Arbeiten der Grundstein für diese Arbeit gelegt wurde. Schließlich gilt mein Dank Kerstin Hept für die Durchsicht dieser Arbeit.

Ich danke meiner Familie, meinen Freunden, meinen Kollegen und den Personen in meinem mathematischen Umfeld für ihre Unterstützung.

Abschließend danke ich ganz besonders meiner Frau Ulrike Weil-Rehn für die Ausdauer und Akribie beim Korrekturlesen und Einarbeiten der Korrekturen, für die moralische Unterstützung der letzten Jahre und ganz besonders für die Geburt unseres kleinen Sohnes Björn Johannes Rehn.

Kapitel 1

Überblick

In diesem Kapitel formulieren wir das Hauptresultat dieser Arbeit sowie den Satz von R. Bieri und R. Geoghegan, den wir damit verallgemeinern.

Wir skizzieren den Beweis anhand seines Vorbildes in [BG03b] und zeigen auf, an welchen Stellen wir Modifikationen vornehmen müssen, um die Verallgemeinerung zu erhalten.

Um einen Überblick zu vermitteln, verzichten wir hier zunächst auf alle Beweise und geben nur die nötigsten Definitionen.

1.1 Resultat

Wir betrachten einen algebraischen Zahlkörper \mathbb{K} , $S \subset V_{\mathbb{K}} \setminus V_{\mathbb{K}}^{\infty}$ eine endliche Menge nicht-archimedischer Stellen über \mathbb{K} . Ferner betrachten wir den Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$ und $\mathcal{O}_S \subset \mathbb{K}$ den Ring der S -ganzen Zahlen

$$\mathcal{O}_S := \{\kappa \in \mathbb{K} \mid v(\kappa) \geq 0 \text{ für alle } v \in V_{\mathbb{K}} \setminus (S \cup V_{\mathbb{K}}^{\infty})\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \mathcal{O}_{\emptyset}.$$

Wenn wir von einer S -arithmetischen Untergruppe einer algebraischen Gruppe reden, betrachten wir eine feste lineare Darstellung dieser Gruppe in der $GL_n(\mathbb{K})$ und darin die Untergruppe

$$G(\mathcal{O}_S) := G(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathcal{O}_S)$$

der Matrizen mit S -ganzen Einträgen. Ist die Gruppe bereits als Matrixgruppe gegeben, so werden wir diese Darstellung verwenden, falls nichts anderes gesagt wird.

Eine *Chevalley-Gruppe* ist eine halbeinfache lineare algebraische Gruppe, die über \mathbb{Z} definiert ist (vgl. z.B. [Bux97a], [Hum75]).

Die SL_n , $n \geq 2$ ist ein prominentes Beispiel einer Chevalley-Gruppe vom Typ A_{n-1} .

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist das folgende Theorem über die geometrischen Invarianten Σ^m einer Gruppenoperation (siehe Abschnitt 1.2 bzw. Kapitel 2 für die Definition).

Theorem 1.1.1. *Ist ρ die Operation einer S -arithmetischen Untergruppe einer Chevalley-Gruppe $G := G(\mathbb{K})$ über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ auf ihrem symmetrischem Raum $M := Y_{\infty}$, ist $m := \sum_{v \in S} \dim Y_v$ die Summe der Dimensionen der Bruhat-Tits-Gebäude zu den Stellen in S und ist $e \in \partial M$, so gilt:*

Ist e Randpunkt eines rational definierten Flats (d.h. eines Flats in der G -Bahn des Standardflats), so ist $e \in \Sigma^{m-1}(\rho) \setminus \Sigma^m(\rho)$, sonst ist $e \in \Sigma^{\infty}(\rho)$.

Insbesondere ist $\Sigma^k(\rho) = \partial M$ genau dann, wenn $k < m$ ist.

Dieses Theorem ist eine Verallgemeinerung der Resultate von R. Bieri und R. Geoghegan [BG03b] bzw. Th. Lünemann [Lün02] über die S -arithmetischen Untergruppen von $SL_2(\mathbb{Q})$ bzw. $SL_2(\mathbb{Q}(i))$.

Theorem 1.1.2 (Bieri-Geoghegan). *Ist ρ die Operation der Gruppe $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ durch Möbiustransformationen auf der hyperbolischen Ebene \mathbb{H}^2 , ist $m = \prod_{i=1}^s p_i$ das Produkt s paarweise verschiedener Primzahlen und ist $e \in \partial M$, so gilt:*

Ist e ein rationaler Randpunkt, so ist $e \in \Sigma^{s-1}(\rho) \setminus \Sigma^s(\rho)$, sonst ist $e \in \Sigma^\infty(\rho)$.

Insbesondere ist $\Sigma^k(\rho) = \partial M$ genau dann, wenn $k < s$ ist.

Th. Lünemann beweist in seiner Diplomarbeit einen analogen Satz über die Operation von $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{i}{m}])$ via Poincaré-Extensionen auf \mathbb{H}^3 , wobei er die Primfaktorzerlegung von m im Ring $\mathbb{Z}[i]$ betrachtet.

Bemerkung 1.1.3. Aus unserem Resultat ergeben sich die Resultate von Bieri-Geoghegan (bzw. Lünemann) direkt.

Wir betrachten dazu den Körper \mathbb{Q} (bzw. $\mathbb{Q}(i)$), $m = \prod_{i=1}^s p_i$ das Produkt s paarweise verschiedener Primzahlen in \mathbb{Z} (bzw. $\mathbb{Z}[i]$). Die Menge S ergibt sich durch die p_i -adischen Bewertungen: $S := \{v_{p_1}, \dots, v_{p_s}\}$.

\mathbb{Z} (bzw. $\mathbb{Z}[i]$) ist der Ring der ganzen Zahlen \mathcal{O} , $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ (bzw. $\mathbb{Z}[\frac{i}{m}]$) der Ring \mathcal{O}_S der S -ganzen Zahlen. Die entsprechenden Gebäude sind immer eindimensional, somit kommt es nur auf die Mächtigkeit s der Menge S an.

Bemerkung 1.1.4. Die Formulierung des Theorems 1.1.1 für Chevalley-Gruppen geschieht aus technischen Gründen. Für die Formulierung (und den Beweis) benötigen wir eine vernünftige Definition von rationalem Randpunkt in einer halbeinfachen linearen algebraischen Gruppe über einem Zahlkörper \mathbb{K} , was im Falle Chevalley-Gruppen über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ relativ einfach ist, da hier der Rand des symmetrischen Raumes gut zu verstehen ist.

Die Formel $m := \sum_{v \in S} \dim Y_v$ ist zwar für Chevalley-Gruppen unangemessen, da die Dimensionen alle gleich sind, allerdings ist dies die richtige Formel im allgemeinen Fall, deshalb wählen wir diese Darstellung.

Bemerkung 1.1.5. Unterstellen wir, daß die Einschränkung auf Chevalley-Gruppen gelockert werden kann, so ermöglicht die Tatsache, daß die Gruppe von Lünemann auch eine Darstellung als Untergruppe der $SL_4(\mathbb{Q})$ hat, falls m reell ist, einen anderen Blickwinkel für das Beispiel aus Bemerkung 1.1.3.

Während der symmetrische Raum der gleiche bleibt, sind die auftretenden Gebäude hier andere. Wir betrachten dazu die Menge S' , die aus den p -adischen Bewertungen zu den Primzahlen in der Primfaktorzerlegung von m in \mathbb{Z} besteht. Diese erhalten wir aus der Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$, indem wir Paare von konjugiert komplexen Primfaktoren multiplizieren.

Die zugehörigen Gebäude sind eindimensional, falls die Primzahl $p \in S'$ nicht nur in \mathbb{Z} , sondern auch in $\mathbb{Z}[i]$ prim ist (d.h. p ist kongruent 3 modulo 4) und zweidimensional sonst. Das „Aufspalten“ der Primzahlen, die nicht kongruent 3 modulo 4 sind, wird hier in der Dimension zwei des zugehörigen Gebäudes sichtbar. Wenden wir jetzt unser Theorem an, so erhalten wir dasselbe Resultat.

Nun wollen wir den Beweis skizzieren. Dazu müssen wir zunächst auf die geometrischen Invarianten Σ^n eingehen.

1.2 Geometrische Invariante Σ^n

Wir betrachten eine Gruppe Γ vom Typ F_n (d.h. Γ besitzt einen $K(\Gamma, 1)$ -Komplex mit endlichem n -Gerüst). Dann kodiert die geometrische Invariante $\Sigma^n(\rho) \subset \partial M$ die „kontrollierten Zusammenhangseigenschaften“ einer Γ -Operation ρ auf einem eigentlichen $CAT(0)$ -Raum M durch Isometrien.

Zur Bestimmung dient ein geeigneter Γ -Raum X (z.B. der $K(\Gamma, 1)$ -Komplex), der mit einer „Kontrollabbildung“ h Γ -äquivariant auf M abgebildet wird.

Definition 1.2.1. Für einen Randpunkt $e \in \partial M$ heißt der Raum X und damit die Γ -Operation ρ genau dann *kontrolliert* ($n - 1$)-*zusammenhängend*, wenn für $k < n$ die k -Sphären im Urbild eines Horoballs $HB_r(\xi)$ zusammenziehbar im Urbild des etwas vergrößerten Horoballs $HB_{r+\lambda}(\xi)$ sind. Hierbei ist ξ ein geodätischer Strahl mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = e$, der den Horoball definiert. Damit erhalten wir die geometrische Invariante

$$\Sigma^n(\rho) := \{e \in \partial M \mid \rho \text{ ist kontrolliert } (n - 1)\text{-zusammenhängend}\}.$$

Auf der Suche nach einem geeigneten Raum für die Operation beobachten wir:

Beobachtung 1.2.2. Die Gruppe $\Gamma := G(\mathcal{O}_S)$ operiert mit endlichen Stabilisatoren auf dem Produkt

$$X := Y_\infty \times \prod_{v \in S} Y_v.$$

Hierbei bezeichnet $Y_\infty = G_\infty / K_\infty$ den symmetrischen Raum zur Gruppe $G_\infty := G(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, wobei $K_\infty \leq G_\infty$ eine maximal kompakte Untergruppe ist. Die Y_v sind die Bruhat-Tits-Gebäude der $G(\mathbb{K})$ bezüglich der Stelle v über \mathbb{K} . Der Punktstabilisator des Basispunktes in $Y := Y_S := \prod_{v \in S} Y_v$ ist $\Gamma_0 := G(\mathcal{O})$, der des Basispunktes in Y_∞ ist K_∞ .

Die Randpunkte der rationalen Flats, d.h. der Flats in der Γ -Bahn des Standardflats, nennen wir im folgenden rationale Enden, die übrigen Randpunkte nennen wir irrationale Enden.

Der Raum X ist geeignet, um $\Sigma^k(\rho)$ zu bestimmen. Als Kontrollabbildung $h : X \rightarrow M$ dient die kanonische Projektion auf den ersten Faktor. Dies ist eine stetige Γ -Abbildung. Allerdings ist X nicht cokompakt bezüglich der Γ -Operation. Wir benötigen daher eine angepasste Variante der Theorie, die es erlaubt auch mit nicht cokompakten Räumen zu arbeiten.

1.3 Filtrierungen

Die gesuchten kontrollierten n -Zusammenhangseigenschaften lassen sich für ein X , das kein cokompakter Γ -Raum ist, so formulieren:

Ist ξ ein geodätischer Strahl, so ist $\xi(\infty)$ genau dann in $\Sigma^n(\rho)$, wenn es zu jeder cokompakten Menge $K \subset X$ eine cokompakte Menge $K' \subset X$ und eine Funktion $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda(r) = \infty$ gibt, so daß für alle $r \in \mathbb{R}$, $k < n$ und alle $\sigma : \mathbb{S}^k \rightarrow K \cap h^{-1}(HB_r(\xi))$ ein $\bar{\sigma} : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow K' \cap h^{-1}(HB_{r+\lambda(r)}(\xi))$ existiert, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^k & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{B}^{k+1} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \bar{\sigma} \\ K \cap h^{-1}(HB_r(\xi)) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & K' \cap h^{-1}(HB_{r+\lambda(r)}(\xi)) \end{array}$$

kommutiert. Hierbei bezeichnet $\text{HB}_r(\xi)$ den Horoball, der $\xi(\infty)$ und $\xi(-r)$ berührt.

Zur Untersuchung der obigen Eigenschaft genügt es natürlich, sich auf eine Γ -cokompakte Filtrierung $(K_t)_{t \geq 0}$ mit $X = \bigcup_{t \geq 0} K_t$ zu beschränken.

Das Hauptaugenmerk liegt daher darauf, eine cokompakte Filtrierung zu finden, bei der die Mengen $K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ gut zu analysieren sind. Dabei konzentrieren wir uns auf eine Filtrierung von Y_∞ , da Y_S im Zahlkörperfall einen kompakten Fundamentalbereich bezüglich der Γ -Operation besitzt.

Um einen ersten Eindruck zu vermitteln, wie wir eine solche Filtrierung bekommen könnten und was wünschenswerte Eigenschaften sind, beschränken wir uns zunächst auf die Gruppe $SL_2(\mathbb{Q})$. Damit können wir erst einmal auf [BG03b] zurückgreifen, um uns die entsprechenden Beweisschritte zu veranschaulichen.

Dazu schildern wir zunächst die Beweisidee aus [BG03b] und geben dann einen alternativen Beweis.

1.4 Der Fall $SL_2(\mathbb{Q})$

In ihrer Arbeit [BG03b] untersuchen R. Bieri und R. Geoghegan die Zusammenhangseigenschaften der Operation von $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ durch Möbiustransformationen auf der hyperbolischen Ebene.

Dazu konstruieren sie zunächst eine Γ_0 -cokompakte Filtrierung $(C_t)_{t \geq 0}$ für \mathbb{H}^2 . Anschließend erhalten sie mit Hilfe eines Fundamentalbereichs F für Y_S die Menge $K_t := \Gamma \cdot (C_t \times F)$.

Dieses Setup entspricht genau dem unseren, da \mathbb{H}^2 als symmetrischer Raum Y_∞ der $SL_2(\mathbb{R})$ interpretiert werden kann. S enthält die p -adischen Bewertungen zu Primteilern von m , die Y_p sind Bruhat-Tits-Bäume.

Die Mengen C_t und K_t haben eine geradezu unanständige Häufung von guten Eigenschaften, welche Bieri und Geoghegan mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen in \mathbb{H}^2 nachweisen.

- i) Die Mengen C_t sind zusammenziehbar.
- ii) Die Mengen $C_t \cap \text{HB}_r(\xi)$ sind zusammenziehbar oder leer.
- iii) Ist $D = D^{-1} \subset \Gamma$ eine Menge mit beschränkten Nennern, so gibt es ein t_D , so daß gilt:

$$\bigcup_{g \in D} g \cdot C_t \subset C_{t+t_D}.$$

- iv) Da die Menge $D := \{g \in \Gamma \mid gF \cap F \neq \emptyset\}$ eine Menge mit beschränkten Nennern ist, gilt dann für $\tau \in F$:

$$K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \cap \pi^{-1}(\tau) \subset \bigcup_{g \in D} g \cdot C_t \times \tau \subset C_{t+t_D} \times \tau$$

Hierbei ist π die kanonische Projektion auf den zweiten Faktor Y .

Mit diesen Eigenschaften lässt sich nun ein f konstruieren, das das folgende Diagramm bis auf Homotopie kommutativ macht. Die Mengen $Y_{K,r}$ bzw. $Y_{K',r+\lambda(r)} \subset Y$ bezeichnen das jeweilige Bild unter π .

$$\begin{array}{ccc} K \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) & \xrightarrow{\quad} & K' \cap h^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda(r)}(\xi)) \\ \pi \downarrow & \nearrow f & \downarrow \pi \\ Y_{K,r} & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & Y_{K',r+\lambda(r)} \end{array}$$

Wir erhalten zusätzlich:

- v) Die Mengen $Y_{t,r} := Y_{K_t,r}$ sind volle Unterkomplexe. Ist das Ende irrational, d.h. nicht in der Γ -Bahn der Enden des Standardflats, so ist $Y_{t,r} = Y$.

Für den kontrollierten Zusammenhang von X ergibt sich in diesem Fall:

Satz 1.4.1 (Bieri-Geoghegan). *Die $K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ lassen sich entweder auf Y_S surjektiv abbilden, oder sie haben die gleichen Zusammenhangseigenschaften wie die analog definierten Mengen für die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen $B \leq SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$. An rationalen Enden ist X also kontrolliert $(k-1)$ -zusammenhängend, aber nicht kontrolliert k -zusammenhängend, wobei k die Anzahl der Primstellen in S ist. An irrationalen Enden ist X kontrolliert k -zusammenhängend für alle k .*

Beweis. Um dies zu beweisen, zeigen die Autoren, daß die Gruppe B ebenfalls auf X und M operiert und daß eine ähnliche Konstruktion die Zusammenhangseigenschaften von $\rho|_B$ mit denselben Mengen $Y_{t,r}$ verknüpft. Dadurch sind die Zusammenhangseigenschaften an rationalen Endpunkten die gleichen wie die von $\rho|_B$ an ∞ . Diese Zusammenhangseigenschaften können nun mit einer Arbeit von [Mei93] leicht bestimmt werden.

An den irrationalen Enden sieht man leicht, daß, wegen der Zusammenziehbarkeit von Y , der Raum kontrolliert k -zusammenhängend für alle k ist. **q.e.d.**

Der Startpunkt für die vorliegende Arbeit war die Idee, die Zusammenhangseigenschaften von $Y_{t,r}$ direkt zu studieren. Dazu ermutigte die Beobachtung

Lemma 1.4.2 (R.). *In der Situation von 1.4.1 gilt:*

- i) *Für rationale Enden gibt es eine Morsefunktion $\mu : Y_S \rightarrow \mathbb{R}$, so daß die $Y_{t,r} = \mu^{-1}([\rho, \infty])$ für ein $\rho = \rho(t, r) \in \mathbb{R}$ sind.*
- ii) *Die Links von Ecken in Y_S sind der Join von $k := \#S$ unzusammenhängenden Mengen, die aufsteigenden Links sind damit k -sphärisch und nicht zusammenziehbar.*
- iii) *Die $Y_{t,r}$ sind entweder ganz Y_S und damit zusammenziehbar, oder die Mengen sind $(k-1)$ -zusammenhängend und enthalten k -Sphären, so daß keine der durch π_k induzierten Abbildungen trivial wird.*

Mit Hilfe des Homotopieschnittes f aus dem obigen Diagramm ergibt sich, daß kontrollierter k -Zusammenhang von X äquivalent dazu ist, daß die von der Einbettung induzierte Abbildung

$$\pi_k(\iota) : \pi_k(Y_{K,r}) \rightarrow \pi_k(Y_{K',r+\lambda(r)})$$

die Nullabbildung ist.

Die alternative Beweisidee ist, durch die Analyse der $Y_{K,r}$ direkt die Zusammenhangseigenschaften nachzuweisen.

Dies hatten Bieri und Geoghegan ja auch schon für den irrationalen Fall benutzt, für den die Zusammenziehbarkeit von $Y = Y_{K,r}$ verwendet wird.

Neu ist, daß auch im rationalen Fall diese Mengen den Schlüssel bilden.

Zum einen erhalten wir nun durch obiges Lemma 1.4.2 eine explizite Beschreibung der Menge. Zum anderen liefert die Betrachtung der Links und damit der Zusammenhangseigenschaften der Filtrierung $Y_{K,r}$ die gleichen Resultate wie 1.4.1, ohne auf die Arbeit von Meinert zurückgreifen zu müssen.

(Wobei erwähnt werden sollte, daß ein zentrales Argument aus der Arbeit von Meinert [Mei93] ganz ähnlich arbeitet. Wir haben hier gewissermaßen eine auf den Spezialfall zugeschnittene Version des Beweises von Meinert eingebaut, die auch durch die Arbeit von Bux [Bux97a] inspiriert wurde.)

Mit diesem neuen Ansatz gelang es Th. Lünemann in seiner Diplomarbeit [Lün02], das Resultat von [BG03b] auf den Fall $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{i}{m}])$ zu erweitern. Dort wurde die Operation auf \mathbb{H}^3 untersucht.

In beiden Fällen vereinfachte der Rang 1 der symmetrischen Räume sowie die Dimension 1 der Bruhat-Tits-Gebäude die Analyse.

Zum einen war es in diesen symmetrischen Räumen möglich, durch Abschneiden von disjunkten Horobällen die cokompakte Menge C_t zu erhalten, zum anderen war der Komplex Y_S ein Produkt von Bäumen. Dadurch standen Methoden von [Åbe86] und [Bux97a] zur Verfügung, um die Zusammenhangseigenschaften zu bestimmen.

Außerdem konnten einige Resultate mit geometrischen Argumenten in \mathbb{H}^2 bzw. \mathbb{H}^3 etabliert werden.

1.5 Reduktionstheorie

Einer weiteren Verallgemeinerung standen nun zwei Dinge im Weg. Zum einen mußte eine adäquate Menge gefunden werden, auf der Γ operiert und die eine schöne Filtrierung ermöglicht, zum anderen mußte ein Ersatz für die Bäume gefunden werden.

Als Verallgemeinerung der Bäume drängten sich natürlich die Bruhat-Tits-Gebäude auf, nicht zuletzt wegen [Bux97a]. Um aber die symmetrischen Räume geometrisch in den Griff zu bekommen, bedurfte es einiger Anstrengungen.

Hier kam uns die Arbeit von G. Harder [Har71] zur Hilfe. Dabei ist nicht das Resultat dieser Arbeit an sich interessant für uns, sondern die Methode, mit der Harder hier arbeitet. Entscheidend sind die Begriffe *reduziert* und *nahe am Rand*, die Harder einführt.

Harder interessiert sich für die Gruppe $G = G(\mathbb{K})$ bzw. für die Gruppe $G_\infty = G(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ der reellen Punkte.

Dazu wählt er einen maximalen Torus A_{ref} und eine minimal parabolische Gruppe P_{ref} als Bezugssystem. Π_{ref} ist eine (positive) Basis des Wurzelsystems von A_{ref} .

Die Idee ist nun, die Wurzelfunktionen auf den symmetrischen Raum Y_∞ zu übertragen. Dies geschieht mit der Operation der ganzzahligen Gruppe $\Gamma_0 = G(\mathcal{O})$.

Es gibt zu $\alpha \in \Pi_{ref}$ eine Funktion $n_\alpha : Y_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$n_\alpha(p.x, P_{ref}) = |\alpha(p)|n_\alpha(x, P_{ref}) \text{ für } p \in P_{ref}.$$

Diese überträgt er nun mit der Γ_0 -Operation auf $P \leq G$ minimal parabolisch, durch

$$n_\alpha(x, P) := n_\alpha(x, \gamma P \gamma^{-1}), \text{ für } \gamma \in \Gamma_0 \text{ mit } \gamma P \gamma^{-1} = P_{ref}.$$

Wir erlauben uns $\Pi := \Pi_{ref}$ auch für andere Tori zu verwenden, solange klar ist, welche minimal parabolische Gruppe der Bezug ist bzw. mit welchem Γ_0 -Element die Situation konjugiert wird, um in die Situation des Bezugssystems zu kommen. Wir erhalten:

$$n_\alpha(p.x, P) = |\alpha(p)|n_\alpha(x, P), \text{ für } p \in P \quad \text{und} \quad n_\alpha(\gamma.x, P) = n_\alpha(x, \gamma P \gamma^{-1}) \text{ für } \gamma \in \Gamma_0.$$

Satz 1.5.1 (Harder). *Es gibt eine Konstante ρ_1 , so daß für alle $x \in X$ ein minimal parabolisches $P \leq G$ existiert mit $n_\alpha(x, P) < \rho_1$ für alle $\alpha \in \Pi$.*

Definition 1.5.2 (Harder). x heißt *reduziert* bezüglich der minimal parabolischen Untergruppe $P \leq G$, falls $n_\alpha(x, P) < \rho_1$ für alle $\alpha \in \Pi$ gilt.

Satz 1.5.3 (Harder). *Es gibt eine Konstante ρ_2 , für die gilt: Ist x reduziert bzgl. P und gilt für ein $\alpha \in \Pi$, daß $n_\alpha(x, P) < \rho_2$ ist, so gilt für alle minimal parabolischen $P' \leq G$ mit x reduziert bzgl. P' , daß $P' \leq P^{(\alpha)}$ ist, wobei $P \leq P^{(\alpha)} < G$ die maximal parabolische Gruppe zu $\Pi \setminus \{\alpha\}$ ist, die P enthält.*

Definition 1.5.4 (Harder). Ein bezüglich P reduziertes x , das $n_\alpha(x, P) < \rho_2$ erfüllt, heißt dann *nahe am Rand* bezüglich α bzw. $P^{(\alpha)}$.

Auf den ersten Blick ist unklar, was das mit unserem Problem zu tun hat. Aber mit Hilfe des folgenden Satzes erhalten wir die Verbindung.

Satz 1.5.5 (Harder). *Für eine Menge $\Omega \subset Y_\infty$ sind äquivalent:*

- i) Ω ist relativkompakt mod Γ_0 ;
- ii) *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für jedes $x \in \Omega$ eine minimal parabolische Untergruppe $P \leq G$ existiert, für die gilt:*

$$\rho_1 > n_\alpha(x, P) \geq C, \text{ für alle } \alpha \in \Pi.$$

Damit wird klar, daß wir zum Konstruieren von cokompakten Mengen nur die Punkte, die nahe am Rand bezüglich eines $\alpha \in \Pi$ sind, kontrollieren müssen.

Dies können wir mit Hilfe der Funktionen $p(x, Q)$ für maximal parabolische Q tun. Diese lassen sich aus den n_α errechnen und genügen einer ähnlichen Transformationsformel. Insbesondere gilt für $\gamma \in \Gamma_0$ die Gleichung $p(\gamma.x, Q) = p(x, \gamma Q \gamma^{-1})$.

Alle diese Definitionen und Resultate werden in [Har71] zusammengestellt.

Betrachten wir also für ein $\rho_3 > 0$ die Mengen:

$$H_t^Q := \{x \in Y_\infty \mid x \text{ ist nahe am Rand bezgl. } Q \text{ und } p(x, Q) < \rho_3 e^{-t}\}$$

Für $\gamma \in \Gamma_0$ gilt offensichtlich:

$$H_t^Q = \gamma.H_t^Q \Leftrightarrow Q = \gamma Q \gamma^{-1} \Leftrightarrow \gamma \in Q$$

Die erste Äquivalenz ist klar, die zweite folgt daraus, daß parabolische Gruppen selbstnormalisierend sind. Die Γ_0 -Bahn der H_t^Q besteht also aus disjunkten offenen Mengen. Außerdem definiert $p(-, Q) < \rho_3 e^{-t}$ einen Horoball.

Wie in [Har71] wählen wir $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \leq G$ als Vertreter für die endlich vielen Γ_0 -Bahnen von maximal parabolischen Untergruppen von G . Damit definieren wir:

$$C_t := Y_\infty \setminus \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma.H_t^{Q_i}$$

Die Konstante ρ_3 dient dazu, die „Skala“ für die K_t zu verschieben, so daß später für $t \geq 0$ gewisse Eigenschaften vorausgesetzt werden können.

Bemerkung 1.5.6. Die Mengen C_t , die in [BG03b] definiert werden, stimmen mit den oben angegebenen Mengen (bis auf Reskalierung) überein, da im Fall der $SL_2(\mathbb{Q})$ die Funktionen n und p wie auch die Begriffe minimal und maximal parabolisch zusammenfallen. Die Mengen H_t^P sind dann Horobälle.

Die Menge C_t ist Γ_0 -invariant. Außerdem gibt es eine Retraktion r_t von Y_∞ auf C_t , die mit geodätischen Kontraktionen verträglich ist. D.h. ist $\xi : [0, m] \rightarrow Y_\infty$ eine Geodäte mit $a := \xi(0) \in C_t$ und $y := \xi(m) \in C_t$, dann gilt $r_t \circ \xi([0, m]) \subset B_m(a) \cap C_t$.

Insbesondere gilt, daß C_t zusammenziehbar ist und auch der Schnitt von C_t mit einem Ball oder Horoball entweder zusammenziehbar oder leer ist. C_t hat damit die Eigenschaft i) und ii) aus Abschnitt 1.4.

Definieren wir für einen Fundamentalbereich F von Y die Menge $K_t := \Gamma.(C_t \times F)$, so hat K_t die Eigenschaften iii) und iv) aus 1.4. Die gleichen Beweise wie in [BG03b] liefern dann eine Abbildung f und das entsprechende Diagramm. Der Eigenschaft v), für den (nicht surjektiven) Fall der rationalen Enden, widmet sich der nächste Abschnitt.

1.6 Links

Die verbleibende Aufgabe ist es also, die Eigenschaften der $Y_{t,r}$ in rational definierten Flats zu bestimmen. Dies erreichen wir durch eine Verallgemeinerung von Lemma 1.4.2.

Im Fall der $SL_2(\mathbb{Q})$ resultiert die erste Eigenschaft der $Y_{t,r}$ daraus, daß ein Horoball an einem rationalen Ende über seinen Stabilisator einen Strahl in den Y_p auszeichnet, der wiederum eine Höhenfunktion im Baum liefert. Die Morsefunktion μ entsteht dann als Linearkombination.

Bei genauerer Betrachtung stellt sich heraus, das diese Beziehung nichts anderes ist, als die Beziehung, die zwischen der Funktion $p(-, Q)$ und ihren diskreten Analoga besteht.

Die aufsteigenden Links, die dann untersucht werden, entpuppen sich als Joins von Hemisphärenkomplexen, wie sie in [Sch05] untersucht werden. Sie sind sphärisch von der Dimension des Gebäudes Y_p und nicht zusammenziehbar, insgesamt gilt für $m := \sum_{p \in S} \dim Y_p$, die aufsteigenden Links von Ecken in Y_S sind $(m - 1)$ -zusammenhängend und enthalten nichttriviale m -Sphären.

Damit ist auch die Verallgemeinerung der Aussage iii) aus 1.4.2 gefunden. D.h. die Mengen $Y_{t,r}$, die auftreten, sind entweder ganz Y oder sie sind $(m - 1)$ -zusammenhängend und enthalten nichttriviale m -Sphären.

Damit ist Verallgemeinerung des Satzes 1.4.1 erreicht.

Kapitel 2

Die geometrische Invariante $\Sigma^n(\rho)$

In diesem Kapitel stellen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Σ -Theorie dar, wie sie in [BG03a] bereitgestellt werden. Wir erweitern sie im Sinne von [BG03b] auf den Fall, daß der Raum X , in dem die Zusammenhangseigenschaften untersucht werden, kein CW-Komplex ist. Wir beschränken uns hierbei auf die Zusammenhangseigenschaften über Randpunkten und geben explizite Beweise für die Invarianzsätze in diesen Fällen.

2.1 Bezeichnungen

Wir betrachten eine Gruppe G , die auf einem eigentlichen CAT(0)-Raum M durch Isometrien via $\rho : G \rightarrow \text{Isom}(M)$ operiert.

Dieser Operation können für $m \in \mathbb{N}_0$ Teilmengen $\Sigma^m(\rho) \subset \partial M$ des (Busemann-)Randes von M zugeordnet werden. Diese Teilmengen sind durch Zusammenhangseigenschaften G -äquivarianter Abbildungen in die Menge M definiert.

Definition 2.1.1. Ist (M, d) metrischer Raum, so nennen wir eine Isometrie von einem (uneigentlichen) Intervall $\xi : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ ein *geodätisches Segment*, d.h.

$$d(\xi(t), \xi(s)) = |t - s|; \quad s, t \in I.$$

Ist I von der Form $[a, \infty[$ oder $] - \infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, so heißt ξ (*geodätischer*) *Strahl*. Ist $I = \mathbb{R}$, so heißt ξ (*geodätische*) *Linie* oder auch nur *Geodätische*.

Definition 2.1.2. Ist (M, d) metrischer Raum, $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Geodätische, so ist der Horoball

$$\text{HB}_r(\xi) := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \xi(t)) - t < r\}.$$

Der Rand des Horoballs besteht aus den Punkten der Horosphäre

$$\text{HS}_r(\xi) := \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \xi(t)) - t = r\}.$$

Bemerkung 2.1.3. Ist ξ eine Geodätische, so definieren die geodätischen Strahlen $\xi|_{[-r, \infty[}$ alle denselben Randpunkt $e := \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) \in \partial M$. Wir schreiben auch $\xi(\infty) := e$.

Damit ist durch die Familie von Horobällen $(HB_r(\xi))_{r \in \mathbb{R}}$ in einem CAT(0)-Raum M das Ende $e \in \partial M$ definiert. Denn es gilt

$$\begin{aligned} HB_r(\xi) \subset HB_s(\eta) &\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) \\ &\Leftrightarrow \rho := \limsup_{t \rightarrow \infty} d(\xi(t), \eta(t)) < \infty \\ &\Leftrightarrow HB_s(\eta) = HB_{r+\rho}(\xi). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\xi(-r) \in HS_r(\xi) \quad \text{und} \quad d(HS_r(\xi), HS_{r'}(\xi)) = |r - r'|.$$

Nützlich ist auch die folgende Darstellung des Horoballs als Vereinigung der (sich in $\xi(-r)$ berührenden) Bälle:

$$HB_r(\xi) = \bigcup_{t > -r} B_{t+r}(\xi(t)),$$

wobei $B_r(a) := \{x \in M \mid d(x, a) < r\}$ der Ball um $a \in M$ mit Radius $r > 0$ ist.

2.2 Kontrollierter Zusammenhang für CW-Komplexe

Betrachten wir zunächst einen nicht leeren G -CW-Komplex X und G -äquivalente Abbildungen von X nach M , d.h. G operiert auf X durch Zellpermutationen, und $h : X \rightarrow M$ ist eine stetige G -Abbildung. In diesem Kontext heißt M auch der *Kontrollraum* und h die *Kontrollabbildung*. Wir definieren:

Definition 2.2.1. Ist $n \in \mathbb{N}$, dann heißt ein G -CW-Komplex X mit cokompaktem n -Gerüst *kontrolliert* $(n-1)$ -*zusammenhängend* über dem Randpunkt $e \in \partial M$, wenn für jede Geodätische $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\xi(\infty) = e$ eine Funktion $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt *Lag*, mit $\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda(r) = \infty$ existiert, so daß für $r \in \mathbb{R}$ und $k < n$ jede k -Sphäre in $h^{-1}(HB_r(\xi))$ einen Ball in $h^{-1}(HB_{r+\lambda(r)}(\xi))$ berandet. Mit anderen Worten:

Für jedes $\sigma : \mathbb{S}^k \rightarrow h^{-1}(HB_r(\xi))$ gibt es eine Fortsetzung $\bar{\sigma} : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow h^{-1}(HB_{r+\lambda(r)}(\xi))$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^k & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{B}^{k+1} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \bar{\sigma} \\ h^{-1}(HB_r(\xi)) & \xrightarrow{\quad} & h^{-1}(HB_{r+\lambda(r)}(\xi)) \end{array}$$

Diese Definition hat eine sinnvolle Erweiterung:

Definition 2.2.2. Der G -CW-Komplex X heißt *kontrolliert* (-1) -*zusammenhängend* über $e \in \partial M$, wenn für jede Geodätische $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\xi(\infty) = e$ und $r \in \mathbb{R}$ die Menge $h^{-1}(HB_r(\xi))$ nicht die leere Menge ist, d.h.

$$h^{-1}(HB_r(\xi)) \neq \emptyset$$

Bemerkung 2.2.3. Die Bedingung $\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda(r) = \infty$ kann ersetzt werden durch die zusätzliche Forderung, daß für $r \in \mathbb{R}$ auch jede k -Sphäre in $h^{-1}(HB_{r-\lambda(r)}(\xi))$ einen Ball in $h^{-1}(HB_r(\xi))$ berandet.

Unser eigentliches Interesse gilt der Gruppenoperation ρ . Für eine Gruppe G vom Typ F_n (d.h. eine Gruppe G , die einen $K(G, 1)$ -Komplex mit endlichem n -Gerüst besitzt) können wir definieren:

Definition 2.2.4. Ist $k < n$, X die universelle Überlagerung eines $K(G, 1)$ -Komplexes mit endlichem n -Gerüst, so ist ρ kontrolliert k -zusammenhängend über $e \in \partial M$, falls es eine Kontrollfunktion h gibt, so daß X kontrolliert k -zusammenhängend über e ist.

Mit dieser Definition können wir nun den Hauptgegenstand dieser Arbeit definieren.

Definition 2.2.5. Ist ρ die Operation einer Gruppe vom Typ F_n auf einem eigentlichen $\text{CAT}(0)$ -Raum M , so ist für $k \leq n$ die geometrische Invariante $\Sigma^k(\rho)$ durch

$$\Sigma^k(\rho) := \{e \in \partial M \mid \rho \text{ ist kontrolliert } (k-1)\text{-zusammenhängend über } e\}$$

gegeben.

Das folgende Theorem A aus [BG03a] gibt eine interessante Verbindung dieser Invariante zu den Endlichkeitseigenschaften F_k der Punktstabilisatoren.

Theorem 2.2.6. *Ist $\rho : G \rightarrow \text{Isom}(M)$ die Operation einer Gruppe vom Typ F_n auf einem eigentlichen $\text{CAT}(0)$ -Raum M mit diskreten Bahnen, so gilt für $k \leq n$, $a \in M$:*

$$\Sigma^k(\rho) = \partial M \Leftrightarrow G_a \text{ ist vom Typ } F_k.$$

Hierbei ist G_a der Stabilisator von a in G .

Korollar 2.2.7. *Sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p(t)$, $S \neq \emptyset$ eine endliche Menge von Stellen auf \mathbb{K} , \mathcal{O}_S der Ring der S -ganzen Zahlen. Ferner sei $v \notin S$ eine weitere Stelle von \mathbb{K} .*

Die Gruppe $G := SL_n(\mathcal{O}_{S \cup \{v\}})$ operiert via der Einbettung $\rho_v|_G$ auf dem Bruhat-Tits-Gebäude zu v . Der Stabilisator des Basispunktes ist $SL_n(\mathcal{O}_S)$.

Ist G vom Typ F_m , so können wir für $k \leq m$ folgern:

$$\Sigma^k(\rho_v|_G) = \partial Y_v \Leftrightarrow SL_n(\mathcal{O}_S) \text{ ist vom Typ } F_k$$

Bemerkung 2.2.8. Es wird vermutet, daß $SL_n(\mathcal{O}_S)$ vom Typ $F_{|S|(n-1)-1}$, aber nicht vom Typ $F_{|S|(n-1)}$ ist. Verschiedene Arbeiten, unter anderem [Abe91], [Abr96], [Beh69], [Beh04], [Stu76], [Stu80] oder auch [BW07], unterstützen diese Vermutung. Bewiesen ist sie unter anderem für $n \geq 2$, $|S| = 1$ und für $n = 2$, $|S|$ beliebig.

Beispiel 2.2.9. Wir betrachten $G := SL_n(\mathcal{O}_{S \cup \{v\}})$ und ρ wie in Korollar 2.2.7, $k \geq -1$, und wenden das Korollar auf die Fälle aus Bemerkung 2.2.8 an.

Für $n \geq 2$ und $|S| = 1$ ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\Sigma^k(\rho_v|_G) = \partial Y_v \Leftrightarrow SL_n(\mathcal{O}_S) \text{ ist vom Typ } F_k \Leftrightarrow k < n - 1.$$

Sie wird hinreichend, falls $SL_n(\mathcal{O}_{S \cup \{v\}})$ für eine Stelle v vom Typ F_{n-1} ist.

Dies ist für die Gruppen $SL_2(\mathcal{O}_{S \cup \{v\}})$ bekannt. Wir erhalten dann für $n = 2$

$$\Sigma^k(\rho_v|_G) = \partial Y_v \Leftrightarrow SL_n(\mathcal{O}_S) \text{ ist vom Typ } F_k \Leftrightarrow k < |S|.$$

Die genaue Bestimmung der Invarianten $\Sigma^k(\rho)$ scheint zunächst schwierig, da nur die Existenz eines $K(G, 1)$ -Komplexes mit entsprechenden Eigenschaften gefordert wird. Wir werden aber sehen, daß wir eine große Klasse von G -Räumen X zur Verfügung haben, die die gleichen kontrollierten Zusammenhangseigenschaften wie die Operation ρ haben. Wir definieren dazu:

Definition 2.2.10. Sind X_1 und X_2 zwei CW -Komplexe, so wird X_2 von X_1 *homotop dominiert*, falls Abbildungen $\Phi : X_1 \rightarrow X_2$ und $\Psi : X_2 \rightarrow X_1$ existieren, so daß $\Phi \circ \Psi$ homotop zu Id_{X_2} ist.

Definition 2.2.11. Sind X_1 und X_2 zwei G - CW -Komplexe, so wird X_2 von X_1 *G -homotop dominiert*, falls X_2 von X_1 homotop dominiert wird und die Abbildungen Φ, Ψ und die Homotopie G -Abbildungen sind.

Satz 2.2.12 (Invarianzsatz). *Ist $k \geq -1$, sind X_1 und X_2 zwei G - CW -Komplexe mit kokompakten k -Gerüst, $h_i : X_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, Kontrollabbildungen und wird X_2 von X_1 G -homotop dominiert, so gilt für $e \in \partial M$:*

Ist X_1 kontrolliert k -zusammenhängend über e , so auch X_2 .

Der Beweis benutzt nur die kompakten Fundamentalbereiche für die Skelette und die Beschränktheit ihrer Bilder. Er wird im nächsten Abschnitt in einem allgemeineren Setup bewiesen. Wichtig ist die Tatsache, daß die Lag-Funktion, die sich für X_2 ergibt, nur durch Addition einer Konstanten aus der für X_1 hervorgeht.

Wir definieren nun:

Definition 2.2.13. X heißt kontrolliert k -zusammenhängend über e mit *konstantem Lag*, falls die Lag-Funktion λ konstant gewählt werden kann.

Aus dem Invarianzsatz folgt, daß kontrollierter k -Zusammenhang und kontrollierter k -Zusammenhang mit konstantem Lag unter Homotopieäquivalenzen erhalten bleiben. Insbesondere ist die Eigenschaft unabhängig von der konkreten Kontrollfunktion h . Damit ergibt sich:

Satz 2.2.14. *Ist X ein zusammenziehbarer G - CW -Komplex mit kokompaktem n -Gerüst, auf dem G durch Zellpermutationen operiert, $-1 \leq k < n$, h eine Kontrollfunktion für den Kontrollraum M , auf dem G via ρ operiert, so ist X kontrolliert k -zusammenhängend über $e \in \partial M$, genau dann wenn ρ kontrolliert k -zusammenhängend über $e \in \partial M$ ist. X ist dann kontrolliert k -zusammenhängend mit konstantem Lag.*

Insbesondere hängt dies alles nicht von X (auch nicht implizit von der Wahl von h und der Geodätischen ξ), sondern nur von ρ und e ab.

Beweis. Gibt es den Raum X mit den obigen Eigenschaften, so gibt es auch einen $K(G, 1)$ -Komplex Y mit endlichem n -Gerüst.

Eine Kontrollfunktion können wir dann auf der universellen Überlagerung \tilde{Y} konstruieren. Operiert G frei auf X , so ist X homotopieäquivalent zu \tilde{Y} und der Invarianzsatz greift. Ansonsten spielen wir die Aussage auf eine torsionsfreie Untergruppe von endlichem Index zurück. **q.e.d.**

2.3 Kontrollierter Zusammenhang

Wir wollen nun den Begriff auf G -Räume erweitern. Sei dazu X ein nichtleerer G -Raum, d.h. ein Raum, auf dem G durch Homöomorphismen operiert, und $h : X \rightarrow M$ eine stetige G -Abbildung. Wie oben ist M der Kontrollraum und h die Kontrollabbildung. Wir definieren:

Definition 2.3.1. Ist $n \in \mathbb{N}$, dann heißt der Raum X *kontrolliert* $(n - 1)$ -*zusammenhängend* über $e \in \partial M$, wenn für jede cokompakte Menge $K \subset X$ und für jede Geodätische $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\xi(\infty) = e$ eine cokompakte Menge $K \subset K' \subset X$ und eine Funktion $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (das Lag) mit $\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda(r) = \infty$ existiert, so daß für $r \in \mathbb{R}$ und $k < n$ jede k -Sphäre in $K \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ einen Ball in $K' \cap h^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda(r)}(\xi))$ berandet. Mit anderen Worten: Für jedes $\sigma : \mathbb{S}^k \rightarrow K \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ gibt es eine Fortsetzung $\bar{\sigma} : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow K' \cap h^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda(r)}(\xi))$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^k & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{B}^{k+1} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \bar{\sigma} \\ K \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) & \xrightarrow{\quad} & K' \cap h^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda(r)}(\xi)) \end{array}$$

Diese Definition hat eine sinnvolle Erweiterung:

Definition 2.3.2. Der Raum X heißt *kontrolliert* (-1) -*zusammenhängend* über $e \in \partial M$, wenn eine cokompakte Menge $K' \subset X$ existiert, so daß für jede Geodätische $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $\xi(\infty) = e$ und $r \in \mathbb{R}$ die Menge $K' \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ nicht die leere Menge ist, d.h.

$$K' \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \neq \emptyset$$

Definition 2.3.3. Sind X_1 und X_2 zwei Räume, so wird X_2 von X_1 *homotop dominiert*, falls Abbildungen $\Phi : X_1 \rightarrow X_2$ und $\Psi : X_2 \rightarrow X_1$ existieren, so daß $\Phi \circ \Psi$ homotop zu Id_{X_2} ist.

Definition 2.3.4. Sind X_1 und X_2 zwei G -Räume, so wird X_2 von X_1 *G -homotop dominiert*, falls X_2 von X_1 homotop dominiert wird und die Abbildungen Φ , Ψ und die Homotopie G -Abbildungen sind.

Satz 2.3.5 (Invarianzsatz). Sind X_1 und X_2 zwei G -Räume und sind $h_i : X_i \rightarrow M$, $i = 1, 2$, Kontrollabbildungen, $k \geq -1$, $e \in \partial M$ und wird X_2 von X_1 G -homotop dominiert, so gilt:

Ist X_1 kontrolliert k -zusammenhängend über e , so auch X_2 .

Beweis. Seien Φ und Ψ wie oben. $K_2 \subset X_2$, $k \geq 0$, $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Wähle zu $K_1 := \Psi(K_2) \subset X_1$ ein $K'_1 \subset X_1$, das 2.3.1 mit dem Lag $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genügt. Setze $K'_2 := H(\Phi(K'_1) \times I)$.

Da sowohl K'_2 als auch K'_1 cokompakt sind, können wir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ wählen, so daß

$$d(h_1(x_1), h_2(\Phi(x_1))) \leq \lambda_1, \quad x_1 \in K'_1 \quad \text{und} \quad d(h_2(x_2), h_1(\Psi(x_2))) \leq \lambda_2, \quad x_2 \in K'_2$$

gilt. Sei nun $r \in \mathbb{R}$ gegeben. Betrachte $f_2 : \mathbb{S}^k \rightarrow K_2 \cap h_2^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$.

Dann liegt das Bild von $f_1 := \Psi \circ f_2$ in der Menge $h_1^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda_1}(\xi))$, und es gibt eine Fortsetzung $\bar{f}_1 : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow K'_1 \cap h_1^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda_1+\lambda(r+\lambda_1)}(\xi))$.

Setze:

$$\bar{f}_2(x) := \begin{cases} H(f_2(\frac{1}{\|x\|}x), 2\|x\| - 1) & \|x\| \geq \frac{1}{2} \\ \Phi \circ \bar{f}_1(2x) & \|x\| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Damit ist $\lambda'(r) := \lambda_1 + \lambda(r + \lambda_1) + \lambda_2$ ein Lag für X_2 bei e . Denn:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda'(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} r + \lambda_1 - \lambda(r + \lambda_1) - 2\lambda_1 - \lambda_2 = \infty$$

Im Fall $k = -1$ leistet $K'_2 := H(\Phi(K'_1) \times I)$ das Verlangte. **q.e.d.**

Bemerkung 2.3.6. Wie auch im Fall der CW-Komplexe, kann die Bedingung an das Lag $\lim_{r \rightarrow \infty} r - \lambda(r) = \infty$ durch die zusätzliche Forderung ersetzt werden, daß für $r \in \mathbb{R}$ auch jede k -Sphäre in $K \cap h^{-1}(\text{HB}_{r-\lambda(r)}(\xi))$ einen Ball in $K' \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ berandet.

Mit dem Invarianzsatz lässt sich eine Beziehung zum vorherigen Abschnitt herstellen:

Satz 2.3.7. *Ist X ein zusammenziehbarer ANR (absolute neighbourhood retract), auf dem eine (virtuell) torsionsfreie Gruppe G eigentlich diskontinuierlich operiert, h eine Kontrollfunktion für den Kontrollraum M , auf dem G via ρ operiert, so ist X kontrolliert k -zusammenhängend über $e \in \partial M$, genau dann wenn ρ kontrolliert k -zusammenhängend über $e \in \partial M$ ist.*

Insbesondere hängt dies alles nicht von X , h und ξ , sondern nur von ρ und e ab.

Um dies zu beweisen, betrachten wir zunächst einen freien G -CW-Komplex X_1 und einen zusammenziehbaren G -ANR X_2 . Die Abbildungen Φ , Ψ und H sind leicht zu konstruieren und falls X_1 die universelle Überlagerung eines $K(G, 1)$ -Komplex ist, sind X_1 und X_2 homotopieäquivalent. Die Details sind in [BG03a] ausgeführt.

Bemerkung 2.3.8. Der Beweis benötigt nicht unbedingt eine Gruppe vom Typ F_k , ob schon die Eigenschaft kontrolliert k -zusammenhängend für ρ dies eigentlich einschließt. Somit dient der Satz für virtuell torsionsfreie Gruppen, die nicht vom Typ F_k sind, als Definition von $\Sigma^k(\rho)$.

Korollar 2.3.9. *Gibt es eine Filtrierung von X durch cokompakte Mengen K_t , so daß X kontrolliert k -zusammenhängend über e mit Lag-Funktion $\lambda(t, r) := \lambda(K_t, r)$ ist und λ konstant gewählt werden kann, so ist ρ kontrolliert k -zusammenhängend über e mit konstantem Lag.*

Wir können also mit Hilfe dieses Korollars die Menge $\Sigma^n(\rho)$ bestimmen, indem wir die kontrollierten Zusammenhangseigenschaften eines zusammenziehbaren G -ANRs X untersuchen.

Kapitel 3

Symmetrische Räume

In diesem Kapitel stellen wir einige Fakten über symmetrische Räume zusammen. Die hier präsentierten Begriffe und Resultate entnehmen wir aus [BH99], wo auch die Beweise zu finden sind. Hiermit wollen wir uns etwas auf das nächste Kapitel einstimmen, in dem diese Räume im Mittelpunkt stehen.

Wer mit Riemannschen Mannigfaltigkeiten im allgemeinen und symmetrischen Räumen im besonderen vertraut ist, kann dieses Kapitel getrost überblättern.

3.1 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Definition 3.1.1. Eine *Riemannsche Mannigfaltigkeit* M ist eine glatte Mannigfaltigkeit, zusammen mit einer *Riemannschen Struktur*, die für jeden Punkt $p \in M$ dem Tangentialraum T_p differenzierbar ein Skalarprodukt $T_p \times T_p \rightarrow \mathbb{R} : (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_p$ zuordnet.

Definition 3.1.2. Die Riemannsche Metrik erlaubt es, die *Länge* einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ zu definieren.

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

Die daraus resultierende Längenmetrik ist stetig auf $M \times M$.

Definition 3.1.3. Eine *Geodäte* ist eine differenzierbare Kurve von einem (uneigentlichen) Intervall $I \subset \mathbb{R}$ nach M :

$$\gamma : I \rightarrow M \text{ mit } l(\gamma|_{[a,b]}) = b - a \text{ für alle } a < b, a, b \in I.$$

Eine *maximale Geodäte* ist eine, die keine echte Restriktion einer Geodäte ist. Ein Strahl (eine Linie) ist eine Geodäte, bei der eine (beide) Intervallgrenze(n) in $\partial\mathbb{R}$ liegen.

Satz 3.1.4. *Es gibt in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M zu $p \in M$ und $v \in T_p$, $\|v\|_p = 1$, genau eine maximale Geodäte $\gamma_{p,v}$ mit $\gamma_{p,v}(0) = p$ und Ableitung $\dot{\gamma}_{p,v}(0) = v$.*

Satz 3.1.5. *In einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M gibt es zu $p \in M$ eine Abbildung $\exp_p : T_p \rightarrow M$, so daß gilt:*

- i) \exp_p bildet eine Nullumgebung in T_p diffeomorph auf eine Umgebung von p ab.
- ii) $\gamma(t) := \exp_p(\frac{t}{\|v\|_p}v)$, $v \in T_p \setminus \{0\}$ ist für kleine t eine Geodäte.
- iii) Ist M vollständig, nichtpositiv gekrümmt und einfach zusammenhängend, so gilt i) für ganz T_p , und die Kurve γ aus ii) ist eine Geodäte. Außerdem ist die Ableitung von \exp_p nicht kontrahierend, d.h.

$$\|(D \exp_p)_v(w)\|_p \geq \|w\|_p, \quad \text{insbesondere gilt } l(\exp_p \circ \Gamma) \geq l(\Gamma)$$

für $v, w \in T_p$ und Γ eine differenzierbare Kurve in T_p .

Beweis. Für i) und iii) setze $\exp_p(v) := \gamma_{p, \frac{1}{\|v\|_p}v}(\|v\|_p)$. Die zweite Aussage folgt aus dem vorherigen Satz. **q.e.d.**

Satz 3.1.6. *In einer ordentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeit M gibt es zu $p \in M$ genau eine (Riemannsche) Isometrie σ mit $\sigma(p) = p$ und $(D\sigma)_p = Id_{T_p}$.*

3.2 Symmetrische Räume

Definition 3.2.1. Ein *symmetrischer Raum* ist eine (ordentliche) Riemannsche Mannigfaltigkeit M , für die es zu jedem $p \in M$ eine Symmetrie σ_p mit (isoliertem) Fixpunkt p gibt, deren Ableitung im Punkt p wie Multiplikation mit -1 auf T_p wirkt. Wegen Satz 3.1.6 ist $\sigma_p^2 = Id_{T_p}$.

Beispiel 3.2.2. Der $CAT(\kappa)$ Modellraum M_κ^n , $\kappa \leq 0$, insbesondere der euklidische \mathbb{E}^n und der hyperbolische \mathbb{H}^n , ist ein symmetrischer Raum.

Beispiel 3.2.3. Weitere Räume erhalten wir, wenn wir komplexe oder quaternionische Räume als reelle Mannigfaltigkeiten auffassen; z.B. den hyperbolischen Raum $\mathbb{KH}^n \subset \mathbb{K}^{n,1}$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, oder die Quaternionen.

Definition 3.2.4. Sei X ein $CAT(0)$ -Raum, $c : [0, \infty[\rightarrow X$ ein geodätischer Strahl, dann ist die Funktion

$$\beta_c : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, c(t)) - t)$$

die zu c assoziierte Busemann-Funktion.

Lemma 3.2.5. *Sei X ein $CAT(0)$ -Raum, auf dem eine Gruppe G durch Isometrien operiert. Ferner sei $h \in G$ ein Element, daß die Geodäte $c : \mathbb{R} \rightarrow X$ festläßt und auf ihr durch $h.c(t) = c(t + a)$, $t \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ operiert. Dann gilt für $x_0 := c(0) \in X$ und $\xi := c(\infty) \in \partial X$:*

Die Menge $N := \{g \in G | h^{-n}gh^n.x_0 \rightarrow x_0 \text{ für } n \rightarrow \infty\}$ ist eine Untergruppe von G , die den Randpunkt ξ und die zu c assoziierte Busemann-Funktion festhält.

Beispiel 3.2.6. Ist $X = \mathbb{H}^2$ und G die Gruppe der Möbius-Transformationen, $h(z) = 4z$, dann ist N die Gruppe, die aus den Elementen $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$ besteht. In Matrix-Darstellung sind dies die oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.2.7. Sei $A := \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ die Untergruppe der Diagonalmatrizen mit Determinante 1, N wie oben. Dann gilt:

- i) Die Untergruppe AN operiert einfach transitiv auf \mathbb{H}^2 .
- ii) Die Untergruppe N ist ein Normalteiler in AN .
- iii) Die Bahnen von N sind die Horosphären mit Zentrum ∞ .

3.3 Der symmetrische Raum $P_n(\mathbb{R})$

Beispiel 3.3.1. Der Raum der reellen, symmetrischen und positiv definiten $n \times n$ -Matrizen $P_n(\mathbb{R})$ ist der symmetrische Raum.

Er ist als offene Teilmenge der reellen, symmetrischen $n \times n$ -Matrizen $S_n(\mathbb{R})$ in natürlicher Weise eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die Riemannsche Struktur ist auf $T_p \cong S_n(\mathbb{R})$ gegeben durch:

$$\langle X, Y \rangle_p = \text{Tr}(p^{-1}Xp^{-1}Y), \quad X, Y \in S_n(\mathbb{R}), \quad p \in P_n(\mathbb{R}).$$

Die Gruppe $GL_n(\mathbb{R})$ operiert auf $S_n(\mathbb{R})$ durch

$$g.A := gA^t g, \quad A \in S_n(\mathbb{R}), \quad g \in GL_n(\mathbb{R}),$$

und damit auch auf $P_n(\mathbb{R})$, da diese Operation $P_n(\mathbb{R})$ invariant läßt.

Proposition 3.3.2. Für die Operation von $GL_n(\mathbb{R})$ auf $P_n(\mathbb{R})$ gilt:

- i) Die Operation ist transitiv.
- ii) Die Gruppe operiert durch Riemannsche Isometrien.
- iii) Der Stabilisator von $Id \in P_n(\mathbb{R})$ ist $O(n)$.
- iv) $\{\pm Id\} < O(n) < GL_n(\mathbb{R})$ operiert trivial, $GL_n(\mathbb{R})/\{\pm Id\}$ operiert treu auf $P_n(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $p \in P_n(\mathbb{R})$.

Wähle $O \in SO(n)$ mit ${}^tOpO = D$, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen ist.

Setze $p^{1/2} := OD^{1/2}{}^tO$, wobei D die Diagonalmatrix mit positiven Einträgen und $D^{1/2}D^{1/2} = D$ ist. Es gilt dann:

$$p^{1/2}.Id = (OD^{1/2}{}^tO)Id({}^t(OD^{1/2}{}^tO)) = OD^{1/2}D^{1/2}{}^tO = p$$

Damit ist i) gezeigt. Die Aussagen iii) und iv) sind klar.

Um ii) zu zeigen, betrachten wir $g \in GL_n(\mathbb{R})$, $X, Y \in S_n(\mathbb{R}) = T_p$. Die Ableitung von g in p bildet X auf $gX^t g \in T_{g,p}$ ab. Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle g \cdot X, g \cdot Y \rangle_{g,p} &= \text{Tr} \left((gp^t g)^{-1} gX^t g (gp^t g)^{-1} gY^t g \right) \\ &= \text{Tr} \left({}^t g^{-1} p^{-1} g^{-1} gX^t g {}^t g^{-1} p^{-1} g^{-1} gY^t g \right) \\ &= \text{Tr} \left({}^t g^{-1} p^{-1} X p^{-1} Y^t g \right) = \text{Tr} \left(p^{-1} X p^{-1} Y \right) \\ &= \langle X, Y \rangle_p \end{aligned}$$

Also operiert g durch eine Riemannsche Isometrie.

q.e.d.

Proposition 3.3.3. $P_n(\mathbb{R})$ ist ein symmetrischer Raum.

Beweis. Sei $p \in P_n(\mathbb{R})$. Setze $\sigma_{Id}(q) := q^{-1}$, $q \in P_n(\mathbb{R})$.

Um zu zeigen, daß σ_{Id} eine Isometrie ist, beobachten wir zunächst, daß

$$\bar{X} := -q^{-1} X q^{-1} \in T_{q^{-1}}$$

das Bild von $X \in T_q$ unter der Ableitung von σ_{Id} ist.

Es gilt nämlich $(q + tX)^{-1} = q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (tXq^{-1})^n$, wegen:

$$\begin{aligned} (q + tX)q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (tXq^{-1})^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (tXq^{-1})^n + tXq^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (tXq^{-1})^n = Id \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \langle \bar{X}, \bar{Y} \rangle_{q^{-1}} &= \text{Tr} (q \bar{X} q \bar{Y}) \\ &= \text{Tr} (q(q^{-1} X q^{-1}) q (q^{-1} Y q^{-1})) \\ &= \text{Tr} (q^{-1} X q^{-1} Y) = \langle X, Y \rangle_q \end{aligned}$$

Also operiert σ_{Id} durch eine Riemannsche Isometrie, deren Ableitung in Id Multiplikation mit -1 ist. Konjugieren wir diese Abbildung mit $q \mapsto p^{\frac{1}{2}} \cdot q$, so erhalten wir die Isometrie $\sigma_p(q) := p q^{-1} p$.

Für diese gilt: $\sigma_p(p) = p$ und $(D\sigma_p)_p(X) = -X$, $X \in T_p$.

q.e.d.

Bemerkung 3.3.4. Die Komposition $\sigma_q \circ \sigma_p$ ist eine *Transvektion*. Sie operiert auf einer lokalen Geodäte, die p und q enthält, wie eine Translation. Insbesondere hält sie diese fest. Die Operation von $p \in P_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$ läßt sich als $\sigma_p \circ \sigma_{Id}$ schreiben, ist also eine Transvektion, die Id nach p Id schiebt.

3.4 Die Exponentialabbildung

Definition 3.4.1. Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ sei die analytische Abbildung $\exp : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ definiert durch die Reihe:

$$\exp A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Bemerkung 3.4.2. Es wird sich herausstellen, daß dies eine Exponentialabbildung im Sinne der Differentialgeometrie (vgl. Satz 3.1.5) ist.

Lemma 3.4.3. Seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $g \in GL_n(\mathbb{R})$:

- i) Gilt $AB = BA$, dann gilt $A(\exp B) = (\exp B)A$ und $\exp(A + B) = \exp A \exp B$, insbesondere $\exp(-A) = (\exp A)^{-1}$.
- ii) $\exp({}^tA) = {}^t(\exp A)$ und $\exp(gAg^{-1}) = g(\exp A)g^{-1}$
- iii) \exp ist differenzierbar, mit $\frac{d}{dt}(\exp tA) = A(\exp tA)$, $t \in \mathbb{R}$
- iv) \exp bildet $S_n(\mathbb{R})$ bijektiv auf $P_n(\mathbb{R})$ ab.

Bemerkung 3.4.4. Eine direkte Konsequenz aus diesem Lemma ist, daß es zu jeder Matrix $p \in P_n(\mathbb{R})$ eine eindeutig bestimmte Matrix $X \in S_n(\mathbb{R})$ gibt mit $p = \exp X$. Damit ist klar, daß das $p^{1/2}$ aus 3.3.2 gleich $\exp \frac{1}{2}X$ ist. Es ist der Mittelpunkt der Geodäte von Id nach p . Außerdem halten wir fest, daß die Transvektion $\sigma_{p^{1/2}} \circ \sigma_{Id}$ den Punkt Id auf p abbildet.

Satz 3.4.5. $P_n(\mathbb{R})$ ist ein eigentlicher CAT(0) Raum.

Die CAT(0)-Methoden erlauben uns folgendes Korollar:

Korollar 3.4.6. Jede kompakte Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ ist konjugiert zu einer Untergruppe von $O(n)$.

Beweis. Sei $K < GL_n(\mathbb{R})$ kompakt. Jede K -Bahn in $P_n(\mathbb{R})$ ist kompakt, insbesondere beschränkt. Damit ist K Untergruppe des Stabilisators des Mittelpunktes p dieser Bahn und da die Operation von $GL_n(\mathbb{R})$ transitiv ist, gibt es $g \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $g \cdot Id = p$. Da $O(n)$ der Stabilisator von Id ist, erhalten wir den Stabilisator von p als $gO(n)g^{-1}$. Daraus folgt, daß die Gruppe $g^{-1}Kg$ Untergruppe von $O(n)$ ist. **q.e.d.**

3.5 Flache Unterräume, singuläre Geodäten und Weyl-Kammern

Satz 3.5.1. Die Abbildung \exp erfüllt die Bedingungen der gleichnamigen Abbildung aus Satz 3.1.5. Es gilt:

- i) Die geodätischen Linien $c : \mathbb{R} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$, mit $c(0) = p = g{}^tg$, sind die Abbildungen:

$$c(t) := g(\exp tX){}^tg, \text{ mit } X \in S_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(X^2) = 1$$

- ii) Ist $p = \exp X$, dann ist $d(Id, p)^2 = \text{Tr}(X^2) = \|X\|_{Id}^2$
- iii) Ist $\mathfrak{a} \leq M_n(\mathbb{R})$ ein Vektorraum kommutierender Matrizen, dann ist die Einschränkung von \exp auf \mathfrak{a} eine Isometrie.

Beweis. Dies sind direkte Auswirkungen der Eigenschaften der Abbildung \exp und von Satz 3.4.5. **q.e.d.**

Beispiel 3.5.2. Sei $\mathfrak{a} < M_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Diagonalmatrizen.

Dann ist $A := \exp \mathfrak{a}$ die Gruppe der Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen.

$A = A \cdot Id \subset P_n(\mathbb{R})$ ist isometrisch (via \exp) zum euklidischen Raum \mathbb{E}^n und operiert durch Transvektionen auf $P_n(\mathbb{R})$.

Definition 3.5.3. Eine isometrisch eingebettete Kopie des euklidischen Raumes \mathbb{E}^k heißt ein (*k-dimensionaler*) flacher Unterraum. Ein maximaler flacher Unterraum heißt *Flat*.

Satz 3.5.4. Für die flachen Unterräume von $P_n(\mathbb{R})$ gilt:

- i) Jeder flache Unterraum ist in einem maximalen flachen Unterraum (Flat) enthalten und dieser hat Dimension n .
- ii) $GL_n(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf den Paaren (F, p) , wobei $p \in F \subset P_n(\mathbb{R})$ und F maximaler flacher Unterraum.
- iii) $\exp : S_n(\mathbb{R}) \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ induziert eine Bijektion der Vektorräume kommutierender, symmetrischer Matrizen \mathfrak{a} und der flachen Unterräume F , die Id enthalten.
- iv) Die Geodäte $t \mapsto \exp tX$ durch den Punkt Id liegt in einem maximalen flachen Unterraum F . F ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn X paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

Beweis. iii) ist wieder eine direkte Auswirkung der Eigenschaften der Abbildung \exp und von Satz 3.4.5.

Um i) und ii) zu beweisen, überlegen wir uns zunächst, daß eine Menge kommutierender Matrizen simultan diagonalisiert werden kann.

Damit erhalten wir $\mathfrak{a} = O \cdot \mathfrak{a}_0$ mit \mathfrak{a}_0 dem Raum der Diagonalmatrizen. Die Behauptung folgt dann mit der Transitivität der Operation.

iv) Ist eine Folgerung aus iii), da eine Diagonalmatrix mit verschiedenen Eigenwerten nur mit Diagonalmatrizen kommutiert. **q.e.d.**

Wir können also definieren:

Definition 3.5.5. Sei M ein symmetrischer Raum. Eine geodätische Linie (Strahl) heißt *regulär*, wenn sie in genau einem Flat liegt. Sonst heißt sie *singulär*.

Bemerkung 3.5.6. Sind zwei geodätische Strahlen asymptotisch, so sind beide singulär oder beide regulär. Da Regularität unter Isometrien erhalten bleibt, ist die Operation von $GL_n(\mathbb{R})$ auf $\partial P_n(\mathbb{R})$ offensichtlich nicht transitiv.

Definition 3.5.7. Sei M ein symmetrischer Raum, sei $F \subset M$ ein Flat. Eine *Weyl-Kammer* C mit Spitze $p \in F$ ist eine Zusammenhangskomponente der Menge

$$\{q \in F \setminus \{p\} \mid \text{die Geodäte durch } p \text{ und } q \text{ ist regulär}\}.$$

Der Abschluß einer Weyl-Kammer in M heißt *abgeschlossene Weyl-Kammer*.

Die singulären Geodäten zerlegen den Raum, es gilt:

Satz 3.5.8. Sei $F \subset P_n(\mathbb{R})$ ein Flat und sei $p \in F$ fest, dann gilt:

- i) Die Vereinigung aller Weyl-Kammern mit Spitze p ist das Komplement in F von $\frac{1}{2}n(n-1)$ flachen, $(n-1)$ -dimensionalen Unterräumen durch p . Insbesondere liegt jede singuläre Geodäte durch p in einem dieser Unterräume.
- ii) Es gibt $n!$ Weyl-Kammern mit Spitze p , $GL_n(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf der Menge aller Weyl-Kammern.

Definition 3.5.9. Der unendlich ferne Rand einer (abgeschlossenen) Weyl-Kammer W , also die Menge aller Endpunkte geodätischer Strahlen in W , heißt (abgeschlossene) Weyl-Kammer im Rand. Ist der Schnitt zweier abgeschlossener Weyl-Kammern nicht leer, so heißt der Schnitt Simplex im Rand.

Satz 3.5.10. Die Menge aller Simplices im Rand von $X := P_n(\mathbb{R})$ bilden ein sphärisches Gebäude Y . Die Apartments sind die (unterteilten) Ränder der Flats in X . Die Menge $\partial P_n(\mathbb{R})_1$ ist eine Realisierung des Simplizialkomplexes Y . Die Gruppen $GL_n(\mathbb{R})$ und $SL_n(\mathbb{R})$ operieren simplizial. Die Metrik auf Y ist (bis auf Skalierung) die Tits-Metrik auf ∂X , also die (basispunktfreie) Winkelmetrik auf Geodäten.

Ein weiterer nützlicher Fakt ist der folgende:

Satz 3.5.11 (Iwasawa Zerlegung). Sei $K = O(n)$, A die Gruppe der Diagonalmatrizen mit positiven Einträgen, N die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen. Dann ist die Abbildung von $K \times A \times N \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$, $(k, a, n) \mapsto kan$ ein Diffeomorphismus. Oder:

$$GL_n(\mathbb{R}) = KAN$$

Korollar 3.5.12. AN operiert einfach transitiv auf $P_n(\mathbb{R})$. Die Abbildung $A \times N \rightarrow P_n(\mathbb{R})$, $(a, n) \mapsto an$. $Id = an^t na$ ist ein Diffeomorphismus.

Im folgenden Abschnitt stellen wir nun den Bezug her zu beliebigen reduktiven algebraischen Gruppen und ihren symmetrischen Räumen.

3.6 Reduktive Untergruppen der $GL_n(\mathbb{R})$

Definition 3.6.1. Eine Untergruppe $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ heißt *reduktiv*, wenn sie als topologischer Unterraum abgeschlossen ist und zu jeder Matrix $A \in G$ auch die transponierte Matrix ${}^t A$ enthält.

Eine Untergruppe $G \leq GL_n(\mathbb{R})$ heißt *algebraisch*, wenn sie sich durch endlich viele polynomielle Gleichungen in den Matrixeinträgen definieren läßt.

Zunächst geben wir einige Beispiele:

Beispiel 3.6.2.

- i) $SL_n(\mathbb{R})$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind reduktive algebraische Untergruppen von $GL_n(\mathbb{R})$. Dazu betrachten wir die Gleichung $\det(M) = 1$ bzw. ${}^t MM = Id$ für $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

ii) $GL_n(\mathbb{C})$ ist eine reduktive Untergruppe der $GL_{2n}(\mathbb{R})$ via

$$r : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_{2n}(\mathbb{R}), \quad A + iB \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

Es gibt einen Zusammenhang zwischen reduktiven Untergruppen und Untermannigfaltigkeiten. Wir definieren dazu:

Definition 3.6.3. Eine Untermannigfaltigkeit M einer CAT(0)-Mannigfaltigkeit X heißt *vollständig geodätische Untermannigfaltigkeit*, wenn jede Geodätische, die M in zwei Punkten trifft, vollständig in M enthalten ist.

Es gilt:

Lemma 3.6.4.

- i) Die Menge $P_n(\mathbb{R})_1 \subset P_n(\mathbb{R})$ der Matrizen mit Determinante 1 ist eine vollständig geodätische Untermannigfaltigkeit.
- ii) $SL_n(\mathbb{R}) \leq GL_n(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf $P_n(\mathbb{R})_1$. Der Kern dieser Operation ist $\{\pm Id\}$, falls n gerade ist und ansonsten trivial.
- iii) $P_n(\mathbb{R})_1 = \exp(S_n(\mathbb{R})_0)$, wobei $S_n(\mathbb{R})_0 \subset S_n(\mathbb{R})$ die symmetrischen Matrizen mit Spur 0 sind.
- iv) Die Abbildung $(s, p) \mapsto e^{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ist eine Isometrie

$$\mathbb{R} \times P_n(\mathbb{R})_0 \cong P_n(\mathbb{R}).$$

Eine notwendige Bedingung an $M := G.Id$, um eine vollständig geodätische Untermannigfaltigkeit von $P_n(\mathbb{R})$ zu sein, ist:

$$(*) \quad \text{Ist } X \in S_n(\mathbb{R}) \text{ und } \exp(X) \in G, \text{ dann ist } \exp(sX) \in G, s \in \mathbb{R}$$

Theorem 3.6.5. Ist $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ eine reduktive Untergruppe, die die Bedingung (*) erfüllt, $K := G \cap O(n)$ und $M := G \cap P_n(\mathbb{R})$, dann gilt:

- i) M ist der G -Orbit von Id .
- ii) M ist eine vollständig geodätische Untermannigfaltigkeit von $P_n(\mathbb{R})$; sie ist diffeomorph zu G/K .
- iii) M ist ein symmetrischer Raum, insbesondere ein CAT(0)-Raum.
- iv) Die Flats in M sind die Schnitte von Flats in $P_n(\mathbb{R})$ mit M .
- v) K ist eine maximal kompakte Untergruppe von G ; bis auf Konjugation in G ist sie eindeutig.
- vi) Die Abbildung $K \times M \rightarrow G, (k, m) \mapsto k.m$ ist ein Diffeomorphismus.

Ist umgekehrt V eine vollständig geodätische Untermannigfaltigkeit von $P_n(\mathbb{R})$ mit $Id \in V$, dann ist $G := \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid g.V = V\}$ eine reduktive Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$ und $V = G \cap P_n(\mathbb{R})$.

Bemerkung 3.6.6. Jede reductive algebraische Gruppe erfüllt (*). Außerdem lässt sie sich als Untergruppe einer $GL_n(\mathbb{R})$ realisieren.

Definition 3.6.7. Ist G eine algebraische Gruppe über einem Zahlkörper \mathbb{K} und ist $G_\infty := G(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$, dann bezeichnet $X_\infty := G_\infty/K_\infty$ den symmetrischen Raum zu G , wobei $K_\infty \leq G_\infty$ eine maximal kompakte Untergruppe ist.

Kapitel 4

Filtrierung

Wir beginnen mit einigen Auszügen aus [Har71]. In dieser Arbeit konstruiert Harder eine glatte Funktion auf dem symmetrischen Raum X , deren kritische Punkte in einer Γ -cokompakten Menge liegen ($\Gamma \leq G := G(\mathbb{K})$ die arithmetische Untergruppe der algebraischen Gruppe G). Mit unseren Bezeichnungen ist der symmetrische Raum Y_∞ , und die arithmetische Gruppe ist Γ_0 .

Diese Konstruktion und die dazugehörigen Beweisideen verwenden wir, um eine Γ_0 -cokompakte Filtrierung zu konstruieren. Wir verwenden aber nicht direkt Harders Funktion, da ihre geometrischen Eigenschaften schwer zu überblicken sind. Statt dessen konstruieren wir mit Hilfe seiner Methoden Mengen, deren geometrische Eigenschaften besser unter Kontrolle sind. Insbesondere sind die Filtrierungsmengen zusammenziehbar und Schnitte mit Bällen (bzw. Horobällen) sind zusammenziehbar oder leer.

Schließlich untersuchen wir noch, wie die Mengen durch Elemente von G abgebildet werden. Als Beispiele dienen uns $SL_2(\mathbb{Q})$ und $SL_3(\mathbb{Q})$, mit deren Hilfe wir die geometrischen Zusammenhänge verdeutlichen. Alle Argumente in den Beweisen verwenden diese speziellen Gruppen natürlich nicht.

Das Kapitel ist in enger Zusammenarbeit mit B. Brill entstanden. Insbesondere hat er die entscheidende Beweisidee zur Cokompaktheit in Satz 4.3.1 beigetragen. Auch die Idee, die Zusammenziehbarkeit über Retraktionen zu beweisen, stammt von ihm.

Aus Gründen der Bequemlichkeit und der besseren Lesbarkeit unterstellen wir, daß die minimal parabolischen Gruppen in G eine Bahn unter der Konjugation mit Γ_0 bilden. Dies ist im allgemeinen falsch. Allerdings gibt es immer nur endlich viele Bahnen. Alle Beweise in dieser Arbeit werden einfach nur umständlicher, aber nicht schwieriger. Wir verzichten daher darauf dies zu berücksichtigen.

Wir werden hier, um einen besseren Vergleich mit der Quelle [Har71] zu ermöglichen, zur Rechtsoperation auf dem symmetrischen Raum Y_∞ übergehen. Da die Resultate selbstverständlich nicht von der Rechtsoperation abhängen, erlauben wir uns das zusammenfassende Lemma 4.5.4 und das Lemma 4.5.5 am Ende des Kapitels mit der Linksoperation zu formulieren.

4.1 Minkowskische Reduktionstheorie

Die Sätze und Definitionen in diesem Abschnitt haben wir aus der Arbeit [Har71] von G. Harder übernommen. Wir verzichten hier weitgehend auf Beweise, wer daran interessiert ist, kann in [Har71] die nötigen Quellen finden.

Wir betrachten einen algebraischen Zahlkörper \mathbb{K} . Im folgenden ist $G(\mathbb{K})$ eine halbeinfache algebraische Gruppe über \mathbb{K} dargestellt als Untergruppe der $GL_n(\mathbb{K})$.

$G_\infty := G(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ bezeichnet die Gruppe der reellen Punkte von G .

Sei Y_∞ der symmetrische Raum zu G_∞ und $\Gamma_0 := G(\mathcal{O}) := G(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathcal{O})$ die Gruppe mit Einträgen im Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$.

Definition 4.1.1. Für einen Punkt $x \in Y_\infty$ und $P \leq G$ parabolisch sei:

$$p(x, P) := \int_{U_\infty/U_\infty \cap \Gamma_0} d_x u.$$

Hierbei ist $U \leq P$ das unipotente Radikal von P , U_∞ die dazugehörige Gruppe reeller Punkte, $d_x u$ ist das Volumenelement im Punkt x .

Notation 4.1.2. Damit wir im folgenden von Wurzeln reden können, müssen wir eine minimal parabolische Untergruppe $P_{ref} \leq G$ und einen Torus $A_{ref} \leq P_{ref}$ auszeichnen. Auf A erhalten wir eine Menge Π einfacher Wurzeln. Auf diese Wahl beziehen sich alle weiteren Definitionen, die Wurzeln verwenden.

Da parabolische Gruppen selbstnormalisierend sind und alle Eigenschaften, die wir im folgenden untersuchen wollen, invariant unter den in der minimal parabolischen Gruppe enthaltenen ganzzahligen Matrizen sind, können wir diese Wurzeln auf eine beliebige minimal parabolische Gruppe P übertragen.

Wir wählen $\gamma \in \Gamma_0$ mit $P = \gamma^{-1} \cdot P_{ref} \cdot \gamma$ und betrachten den Torus $A := \gamma^{-1} \cdot A_{ref} \cdot \gamma$. Dies erlaubt uns die Wurzeln von A_{ref} auf A zu übertragen.

In diesem Sinne werden wir von nun an von den einfachen Wurzeln reden.

Bemerkung 4.1.3. Unter gewissen Umständen kann es passieren, daß es mehrere Γ_0 -Konjugationsklassen minimal parabolischer Gruppen gibt. Dann treffen wir die Wahlen pro Klasse. Wir wollen die daraus resultierenden technischen Details unterdrücken. Die Gruppe $SL_n(\mathbb{K})$, die für uns als Prototyp herhält, besitzt nur eine solche Konjugationsklasse, eine beliebige algebraische Gruppe über einem Zahlkörper kann endlich viele besitzen.

Definition 4.1.4. Zu einer minimal parabolischen Untergruppe $P \leq G$ und der Wurzel $\alpha \in \Pi$ gehört eine maximal parabolische Untergruppe $P^{(\alpha)} \leq G$ vom Typ $\Pi \setminus \{\alpha\}$, die P enthält. Wir setzen:

$$p_\alpha(x, P) := p(x, P^{(\alpha)}).$$

Beobachtung 4.1.5. Ist $Q \leq P^{(\alpha)}$ minimal parabolisch, so ist:

$$p_\alpha(x, Q) = p_\alpha(x, P).$$

Um das Transformationsverhalten von p_α zu verstehen, ist es hilfreich die Fundamentalgewichte γ_α einzuführen. Sie sind über die Gleichung

$$\frac{2 \langle \gamma_\alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} = \delta_{\alpha, \beta}, \quad \alpha, \beta \in \Pi$$

definiert. Außerdem ist $\gamma_{P(\alpha)}$, die Summe aller positiven Wurzeln in $P(\alpha)$, ein ganzzahliges Vielfaches von γ_α

$$\gamma_{P(\alpha)} = f_\alpha \gamma_\alpha, \quad f_\alpha \in \mathbb{N}.$$

Es gilt die folgende Transformationsformel für die Gruppe der reellen Punkte $P_\infty \leq G_\infty$:

$$p_\alpha(x.p, P) = p_\alpha(x, P) |\gamma_{P(\alpha)}(p)|, \quad p \in P_\infty, \quad x \in Y_\infty.$$

Weiter können wir auch die einfachen Wurzeln $\alpha \in \Pi$ durch die $\gamma_{P(\beta)}$ ausdrücken.

$$\alpha = \prod_{\beta \in \Pi} \gamma_{P(\beta)}^{c_{\alpha, \beta}}, \quad c_{\alpha, \beta} \in \mathbb{Q}$$

Damit können wir neue Funktionen n_α durch

$$n_\alpha(x, P) = \prod_{\beta \in \Pi} p_\beta(x, P)^{c_{\alpha, \beta}}, \quad x \in Y_\infty$$

definieren. Diese haben dann das Transformationsverhalten

$$n_\alpha(x.p, P) = n_\alpha(x, P) |\alpha(p)|, \quad p \in P_\infty, \quad x \in Y_\infty.$$

Diese Funktionen erlauben es nun, die folgenden grundlegenden Theoreme der Minkowskischen Reduktionstheorie, wenn auch in einer unüblichen Art und Weise, zu formulieren.

Theorem 4.1.6. *Es gibt eine Konstante ρ_1 , so daß es für jeden Punkt $x \in Y_\infty$ eine minimal parabolische Untergruppe $P \leq G$ gibt, so daß für alle $\alpha \in \Pi$*

$$n_\alpha(x, P) < \rho_1 \tag{4.1}$$

erfüllt ist.

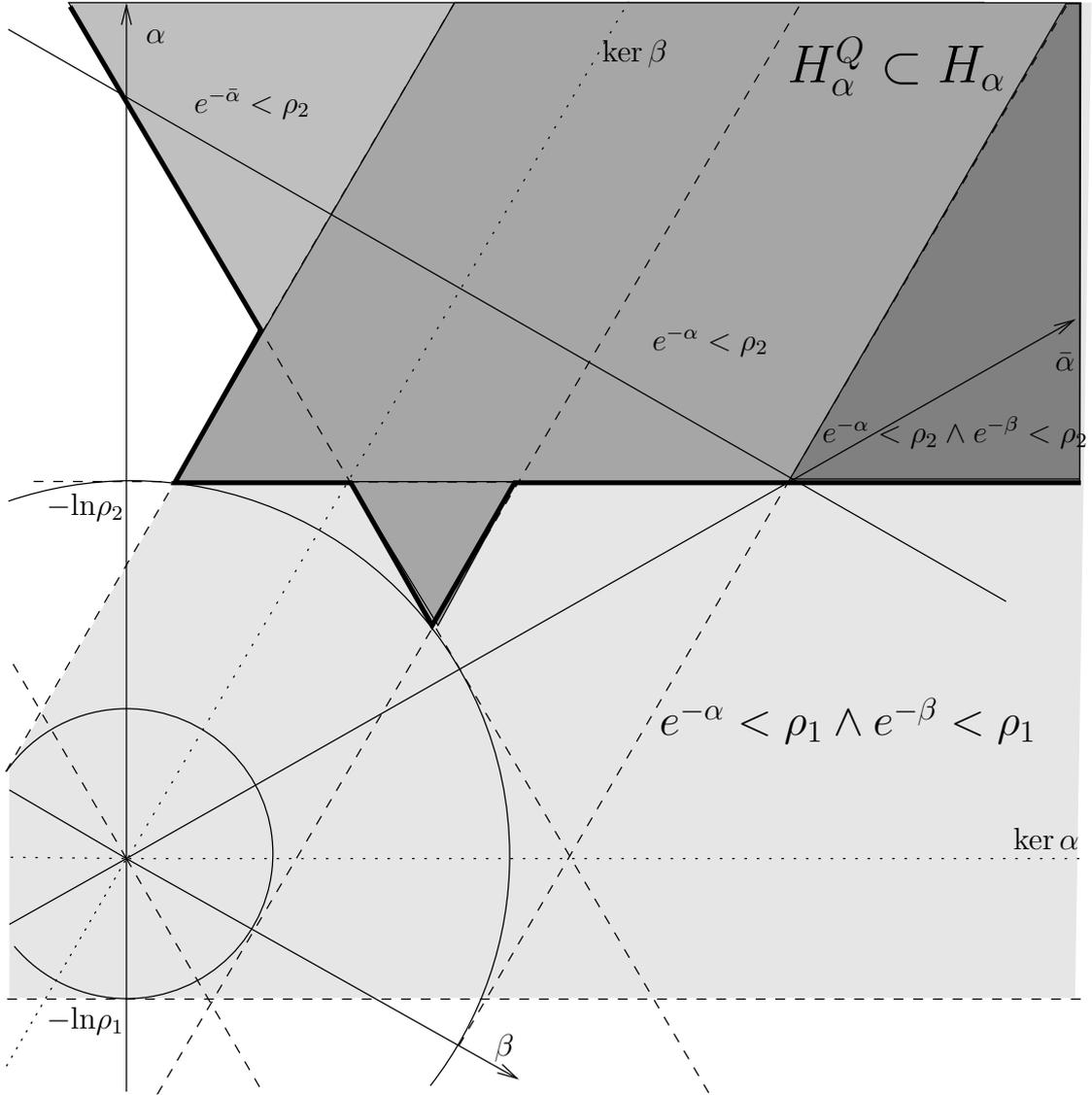
Wir wählen eine solche Konstante ρ_1 und definieren damit:

Definition 4.1.7. Ist $x \in Y_\infty$ ein Punkt, dann heißt eine minimal parabolische Untergruppe $P \leq G$, die (4.1) erfüllt, *reduziert bezüglich x* , kurz *x -reduziert*.

Theorem 4.1.8. *Es gibt eine Konstante ρ_2 , so daß für jedes $x \in Y_\infty$ gilt:*

Ist P minimal parabolisch und x -reduziert und gilt ferner $n_{\alpha_0}(x, P) < \rho_2$ für eine einfache Wurzel $\alpha_0 \in \Pi$, so ist jede x -reduzierte minimal parabolische Untergruppe in $P^{(\alpha_0)}$ enthalten.

Auch diese Konstante ρ_2 wollen wir hiermit wählen.

Abbildung 4.1: Die Menge H_α im Flat

In der Arbeit von Harder wird mit Hilfe dieser Funktionen die folgende Eigenschaft untersucht:

Definition 4.1.9. Ein Punkt $x \in Y_\infty$ heißt *nahe am Rand bezüglich* $\alpha \in \Pi$, wenn es eine x -reduzierte minimal parabolische Untergruppe P gibt, so daß $n_\alpha(x, P) < \rho_2$ gilt.

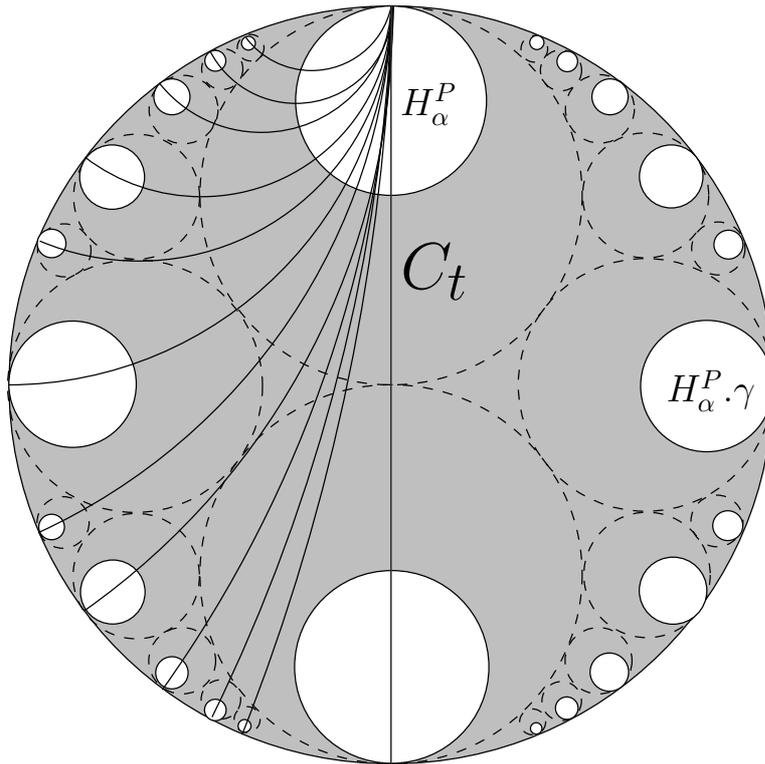
H_α bezeichnet die Menge aller solcher Punkte.

H_α ist wegen $n_\alpha(x, P) = n_\alpha(x, \gamma, \gamma^{-1}P\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_0$ offensichtlich Γ_0 -invariant.

Außerdem können wir wegen Theorem 4.1.8 dem Punkt $x \in H_\alpha$ die maximal parabolische Untergruppe $P_x^{(\alpha)}$ vom Typ $\Pi \setminus \{\alpha\}$ zuordnen, die alle x -reduzierten minimal parabolischen Untergruppen enthält.

Das eröffnet die Möglichkeit, für maximal parabolische Untergruppen Q vom Typ $\Pi \setminus \{\alpha\}$ die folgenden Mengen zu definieren:

$$H_\alpha^Q := \{x \in H_\alpha \mid P_x^{(\alpha)} = Q\}.$$

Abbildung 4.2: Die Menge C_t im Kreismodell

Lemma 4.1.10. *Ist $\alpha \in \Pi$ eine einfache Wurzel und sind Q, Q' maximal parabolische Untergruppen vom Typ $\Pi \setminus \{\alpha\}$, so gilt:*

i) *Ist $Q \neq Q'$, so ist $H_\alpha^Q \cap H_\alpha^{Q'} = \emptyset$.*

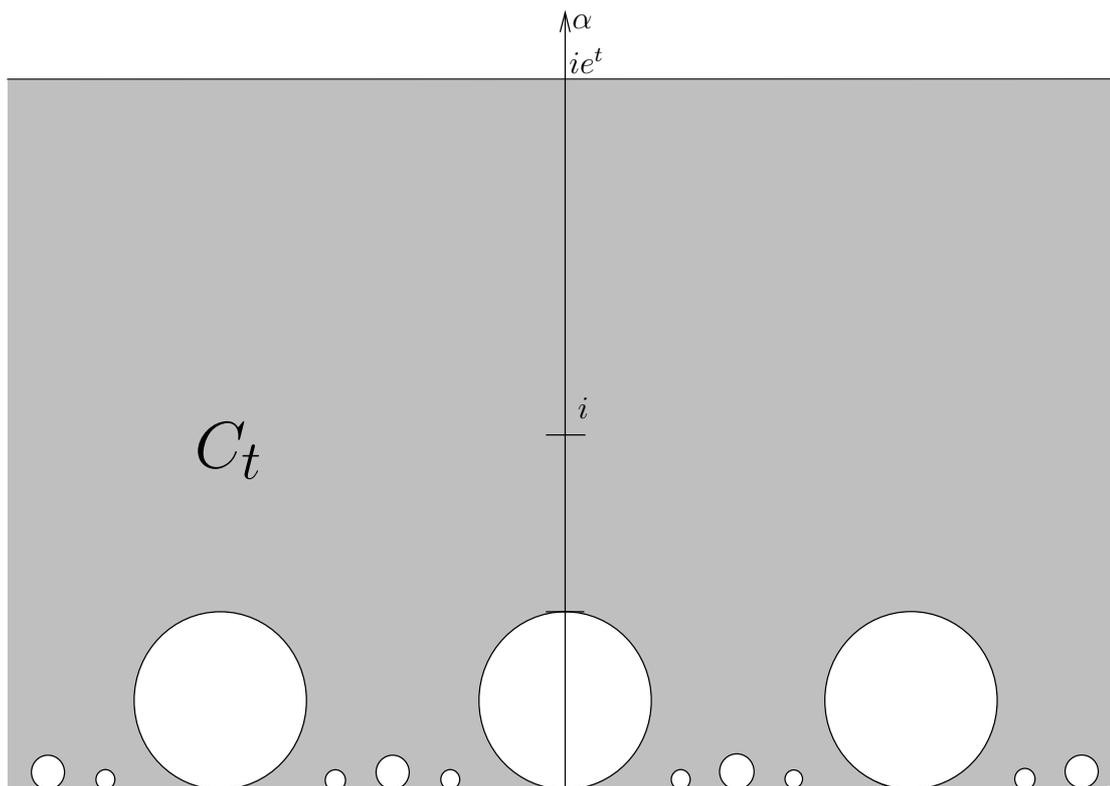
ii) *Ist $\gamma \in \Gamma_0$, so ist $H_\alpha^Q \cdot \gamma = H_\alpha^{\gamma^{-1}Q\gamma}$.*

iii) *Ein $\gamma \in \Gamma_0$ stabilisiert H_α^Q genau dann, wenn $\gamma \in \Gamma_0 \cap Q$ ist.*

Beispiel 4.1.11. Die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ operiert auf der oberen Halbebene durch Möbiustransformationen. Diese Operation läßt sich auch als Operation von $SL_2(\mathbb{R})$ auf dem Raum der quadratischen Formen interpretieren. Mit anderen Worten, die hyperbolische Ebene ist ein Modell für den symmetrischen Raum zu $SL_2(\mathbb{R})$.

Es gibt in der $SL_2(\mathbb{Q})$ nur eine einfache Wurzel. Die Konstante ρ_1 kann so gewählt werden, daß Theorem 4.1.8 für $\rho_2 \geq 2$ gilt.

Das Komplement der Menge H_α ist dann gerade die Menge C_t aus [BG03b] für $\rho_2 = e^t \geq 2$. Die zur Gruppe B der oberen Dreiecksmatrizen gehörige Menge H_α^B ist die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > \rho_2\}$, der Horoball mit Randpunkt $\rho_2 \cdot i$ am Ende ∞ . Dessen $SL_2(\mathbb{Z})$ -Bahn besteht aus Horobällen an allen rationalen Enden.

Abbildung 4.3: Die Menge C_t in der oberen Halbebene

Dieser Umstand wirft nun die Frage auf, inwieweit die Mengen H_α dazu geeignet sind, eine cokompakte Filtrierung mit schönen Eigenschaften zu definieren.

Eine erste Teilantwort liefert Harder mit folgendem Kompaktheitskriterium:

Satz 4.1.12. *Für eine Menge $\Omega \subset Y_\infty$ sind äquivalent:*

- i) Ω/Γ_0 ist relativkompakt.
- ii) Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß zu jedem $x \in \Omega$ eine x -reduzierte minimal parabolische Untergruppe P existiert, die $n_\alpha(x, P) \geq C$ für alle $\alpha \in \Pi$ erfüllt.

Korollar 4.1.13. *Die Menge $Y_\infty \setminus \bigcup_{\alpha \in \Pi} H_\alpha$ ist cokompakt.*

Beweis. Wähle $C = \rho_2$.

q.e.d.

Diese Menge ist demnach ein Kandidat für unsere Filtrierung. Allerdings enthält H_α auch Punkte x , die eine x -reduzierte Darstellung mit $n_\alpha(x, P) \geq \rho_2$ erlauben. Unsere Filtrierungsmengen haben also gewissermaßen Löcher.

Um dies in den Griff zu bekommen, betrachten wir im nächsten Abschnitt eine modifizierte Version der n_α .

Zunächst interessieren wir uns aber für ein paar Eigenschaften der Mengen H_α . Setzen wir hierzu

$$\pi(x) := \{\alpha \in \Pi \mid x \in H_\alpha\}.$$

Hierbei ergibt sich aus Theorem 4.1.8 zunächst:

Lemma 4.1.14. *Sind P und Q x -reduzierte minimal parabolische (über \mathbb{Q} definierte) Untergruppen, so gilt:*

$$Q \subset P^{(\pi(x))} := \bigcap_{\alpha \in \pi(x)} P^{(\alpha)}$$

Beweis. Sei $x \in Y_\infty$ und $\alpha \in \pi(x)$, ferner sei Q' x -reduziert mit $n_\alpha(x, Q') < \rho_2$. Wegen Theorem 4.1.8 gilt damit $P \subset Q'^{(\alpha)}$ und $Q \subset Q'^{(\alpha)}$. Natürlich gilt dann auch

$$Q \subset Q^{(\alpha)} = Q'^{(\alpha)} = P^{(\alpha)} \quad \text{und damit} \quad Q \subset \bigcap_{\alpha \in \pi(x)} P^{(\alpha)}.$$

q.e.d.

Wir können uns nun unserer Konstruktion zuwenden.

4.2 Die Funktionen \widetilde{n}_α

Definition 4.2.1. Ist $x \in Y_\infty$, P minimal parabolisch und $\alpha \in \Pi$ eine einfache Wurzel, so ist

$$\widetilde{n}_\alpha(x, P) := \sup \{ n_\alpha(x, \gamma^{-1}P\gamma) \mid \gamma \in \Gamma_0, \gamma^{-1}P\gamma \text{ ist } x\text{-reduziert} \}.$$

Diese Funktionen sind (zumindest für $x \in H_\alpha$) stetig.

Ferner definieren wir analog zum letzten Abschnitt die Mengen:

$$\widetilde{H}_\alpha(t) := \{ x \in Y_\infty \mid \widetilde{n}_\alpha(x, P) < e^{-t} \} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_\alpha^{P^{(\alpha)}}(t) := H_\alpha^{P^{(\alpha)}} \cap \widetilde{H}_\alpha(t),$$

wobei wir einen Filtrierungsparameter $t \in \mathbb{R}$ einführen. Im folgenden werden für t immer nur Werte eingesetzt, so daß $\rho_2 > e^{-t}$ gilt und damit Theorem 4.1.8 anwendbar ist.

Beobachtung 4.2.2. *Sofort aus der Definition ist klar, daß für $\pi \subset \Pi$*

$$x \in \widetilde{H}_\pi(t) := \bigcap_{\alpha \in \pi} \widetilde{H}_\alpha(t),$$

genau dann gilt, wenn aus $\gamma \in \Gamma_0$, mit $n_\alpha(x.\gamma, P) \leq \rho_1$ für alle $\alpha \in \Pi$ (d.h. P ist $x.\gamma$ reduziert), folgt, daß für alle $\beta \in \pi$ gilt:

$$n_\beta(x.\gamma, P) < e^{-t}.$$

Ferner definieren wir für $t \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\widehat{H}_\alpha(t) := \{ x \in H_\alpha \mid \text{Für ein } \gamma \in \Gamma_0 \text{ ist } P \text{ } x.\gamma\text{-reduziert,} \\ n_\alpha(x.\gamma, P) < \rho_2 \text{ und } p_\alpha(x.\gamma, P) < e^{-t} \}$$

$$\text{sowie} \quad \widehat{H}_\alpha^P(t) := H_\alpha^{P^{(\alpha)}} \cap \widehat{H}_\alpha(t).$$

4.3 Die Menge \widehat{C}_t

Satz 4.3.1. *Die Mengen*

$$\widetilde{C}_t := Y_\infty \setminus \bigcup_{\alpha \in \Pi} \widetilde{H}_\alpha(t) \quad \text{und} \quad \widehat{C}_t := Y_\infty \setminus \bigcup_{\alpha \in \Pi} \widehat{H}_\alpha(t)$$

bilden kokompakte Filtrierungen von Y_∞ , für wachsenden (hinreichend großen) Filtrierungsparameter $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Mengen kokompakt sind. Dazu wollen wir Satz 4.1.12 anwenden.

Sei dazu $t \in \mathbb{R}$ mit $\rho := e^t < \rho_2$, $x \in \widetilde{C}_t$ (bzw. $x \in \widehat{C}_t$), sei P x -reduziert. Sei $\alpha \in \Pi$, zu zeigen ist $n_\alpha(x, P) \geq C$ für ein C , das unabhängig von α und x ist.

Sei dazu $\epsilon > 0$ beliebig.

Wir wählen $\gamma \in \Gamma_0$, so daß $\gamma^{-1}P\gamma$ x -reduziert ist und außerdem

$$n_\alpha(x, \gamma^{-1}P\gamma) \geq \rho - \epsilon \quad \text{bzw.} \quad p_\alpha(x, \gamma^{-1}P\gamma) \geq \rho$$

gilt. Dies können wir nach den Voraussetzungen an x .

Sei nun

$$\pi := \{\beta \in \Pi \mid n_\beta(x, P) < \rho_2 \text{ oder } n_\beta(x, \gamma, P) < \rho_2\}.$$

Es gilt dann mit Lemma 4.1.14

$$\gamma \in P^{(\pi)} := \bigcap_{\beta \in \pi} P^{(\beta)}.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel in dem Artikel von Harder ist die Möglichkeit, gemischte Darstellungen mit n_α und p_α zu betrachten. Die Koeffizienten, die hier auftreten, sind die, die bei der Umrechnung von Wurzeln in Gewichte auftreten, vgl. [Har71, S.421, S.425f.].

Es gilt:

$$n_\alpha(x, P) = \prod_{\beta \in \pi} p_\beta(x, P)^{c_{\alpha, \beta}} \prod_{\beta \notin \pi} n_\beta(x, P)^{d_{\alpha, \beta}} \quad (4.2)$$

und

$$n_\alpha(x, \gamma, P) = \prod_{\beta \in \pi} p_\beta(x, \gamma, P)^{c_{\alpha, \beta}} \prod_{\beta \notin \pi} n_\beta(x, \gamma, P)^{d_{\alpha, \beta}}.$$

Da $\gamma \in P^{(\pi)}$ gilt, ist

$$\prod_{\beta \in \pi} p_\beta(x, P)^{c_{\alpha, \beta}} = \prod_{\beta \in \pi} p_\beta(x, \gamma, P)^{c_{\alpha, \beta}}.$$

Außerdem ist für $\beta \notin \pi$

$$\rho_1 \geq n_\beta(x, P) \geq \rho_2 \quad \text{und} \quad \rho_1 \geq n_\beta(x, \gamma, P) \geq \rho_2.$$

Es gibt also Konstanten $\widetilde{\rho}_1 > \widetilde{\rho}_2 > 0$, unabhängig von x und γ und auch unabhängig von den endlich vielen Möglichkeiten für α und π , so daß

$$\widetilde{\rho}_1 \geq \prod_{\beta \notin \pi} n_\beta(x, P)^{d_{\alpha, \beta}} \geq \widetilde{\rho}_2 \quad \text{und} \quad \widetilde{\rho}_1 \geq \prod_{\beta \in \pi} n_\beta(x, \gamma, P)^{c_{\alpha, \beta}} \geq \widetilde{\rho}_2$$

gilt. Damit folgt auch:

$$\frac{\tilde{\rho}_1}{\tilde{\rho}_2} \geq \frac{n_\alpha(x, P)}{n_\alpha(x.\gamma, P)} \geq \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1}.$$

Daraus ergibt sich für $x \in \tilde{C}_t$:

$$n_\alpha(x, P) \geq n_\alpha(x.\gamma, P) \cdot \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1} \geq (\rho - \epsilon) \cdot \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1}$$

Da ϵ beliebig war, gilt

$$n_\alpha(x, P) \geq \rho \frac{\tilde{\rho}_2}{\tilde{\rho}_1}$$

Für $x \in \hat{C}_t$ ergibt sich für große t unabhängig von α und π ein $\tilde{\rho}_3$ mit

$$\prod_{\beta \in \pi} \rho^{c_{\alpha, \beta}} \geq \tilde{\rho}_3.$$

Damit gilt

$$n_\alpha(x, P) \geq \prod_{\beta \in \pi} p_\beta(x, P)^{c_{\alpha, \beta}} \cdot \tilde{\rho}_2 \geq \prod_{\beta \in \pi} \rho^{c_{\alpha, \beta}} \cdot \tilde{\rho}_2 \geq \tilde{\rho}_3 \cdot \tilde{\rho}_2.$$

q.e.d.

Bemerkung 4.3.2. Der Beweis zeigt, daß für große $t \in \mathbb{R}$ ein $T \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\hat{C}_{t-T} \subset \tilde{C}_t \subset \hat{C}_{t+T} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{C}_{t-T} \subset \hat{C}_t \subset \tilde{C}_{t+T}$$

4.4 Die Retraktionen

Im folgenden Abschnitt wollen wir beweisen, daß die Mengen \tilde{C}_t und \hat{C}_t Retrakte von Y_∞ sind. Hierzu werden wir die Zerlegung, die von den Mengen H_α , $\alpha \in \Pi$, definiert wird, verwenden, um Retraktionen r_α zu konstruieren.

Definition 4.4.1. Für $\alpha \in \Pi$ sei

$$r_{\alpha, t} : Y_\infty \rightarrow Y_\infty \setminus \tilde{H}_\alpha(t)$$

die (geodätische, Γ_0 -äquivalente) Retraktion parallel zum Durchschnitt der Kerne der $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$. Hierbei sei für $x \in \tilde{H}_\alpha^{P(\alpha)}(t)$:

$$r_{\alpha, t}(x) \in \partial \tilde{H}_\alpha^{P(\alpha)}(t) \text{ mit } \tilde{n}_\alpha(r_{\alpha, t}(x)) = e^t.$$

Dies kann Γ_0 -äquivalent fortgesetzt werden, so daß

$$r_{\alpha, t}(x) = x \text{ für } x \in Y_\infty \setminus \tilde{H}_\alpha(t) \text{ und } r_{\alpha, t}(x.\gamma) = r_{\alpha, t}(x).\gamma \text{ für } x \in \tilde{H}_\alpha(t), \gamma \in \Gamma_0$$

gilt.

Lemma 4.4.2. Die Funktion r_α ist stetig.

Beweis. Wir betrachten hierzu für $\alpha \in \Pi$ die Geodäte ξ im Durchschnitt der Kerne der $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ und den geodätischen Fluss F parallel zu ξ .

$$F : Y_\infty \times \mathbb{R} \rightarrow Y_\infty, \quad F(x, \mu) \text{ ist von } x \text{ um } \mu \text{ in Richtung } \xi \text{ verschoben}$$

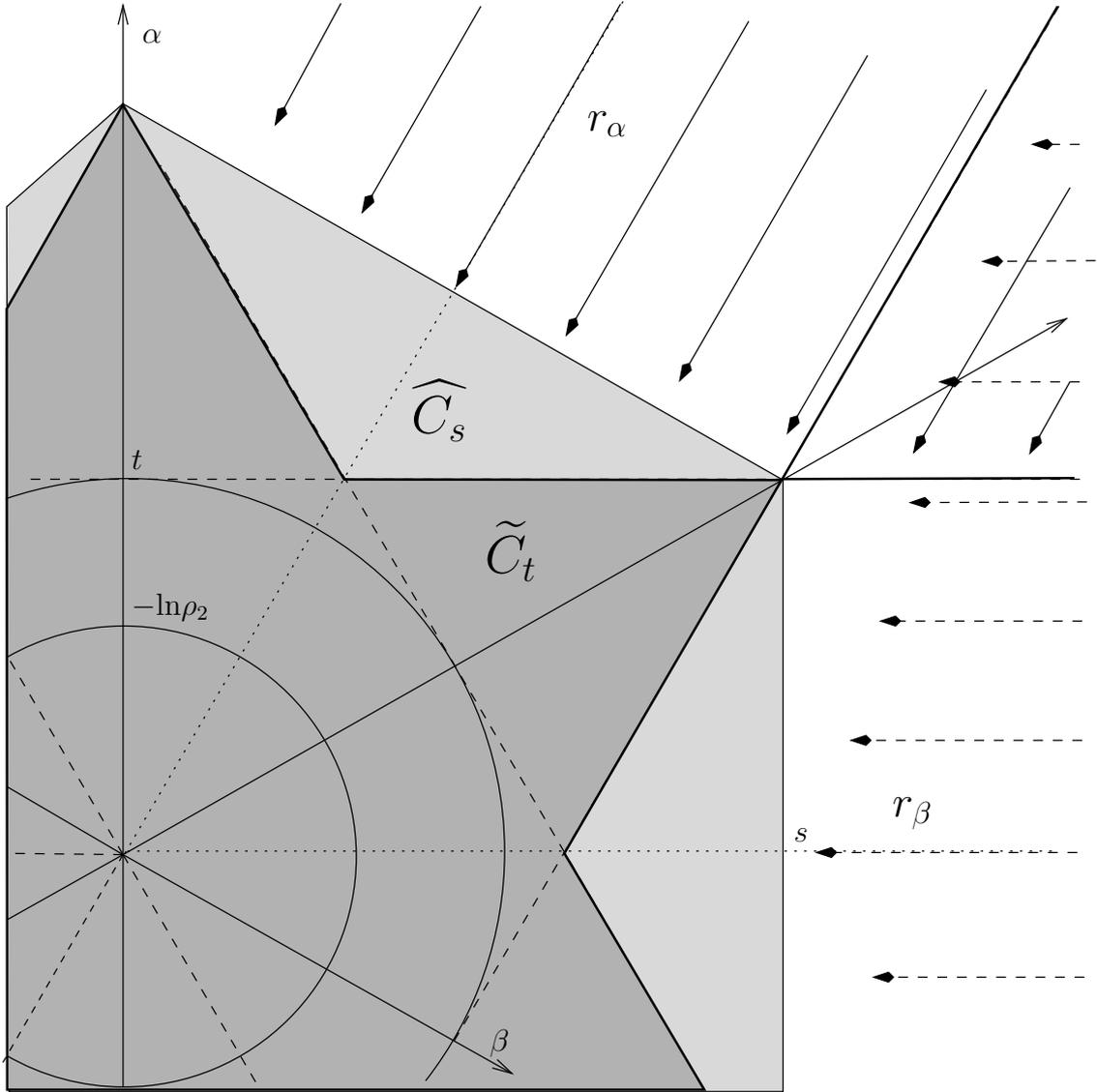


Abbildung 4.4: Die Menge \tilde{C}_t im Standardflat der $SL_3(\mathbb{R})$

Diese Abbildung ist stetig und da $P^{(\alpha)}$ die Geodäte ξ parallelverschiebt, gilt:

$$F(x.\gamma, \mu) = F(x, \mu).\gamma, \quad \gamma \in P^{(\alpha)}.$$

Die Funktion \tilde{n}_α ist stetig auf H_α . Aus den Argumenten im Beweis von Satz 4.3.1 folgt ferner, daß $\tilde{n}_\alpha(F(x, \mu))$ Lipschitz-stetig und streng monoton in μ ist, solange $F(x, \mu) \in H_\alpha^{P^{(\alpha)}}$ ist, da die Veränderung in μ sich direkt in eine Veränderung von p_α umrechnet.

Es gibt daher eine, auf $H_\alpha^{P^{(\alpha)}} \times]\rho_2, \infty[$ implizit definierte, stetige Funktion $\mu(x, \rho)$, für die gilt:

$$r_{\alpha,t}(x) = F(x, \mu(x, e^t)).$$

Insbesondere ist $r_{\alpha,t}$ stetig und es gilt:

$$r_{\alpha,t}(x).\gamma = r_{\alpha,t}(x.\gamma) \quad \text{für } x \in \tilde{H}_\alpha^{P^{(\alpha)}}(t), \quad \gamma \in P^{(\alpha)}.$$

Und da die $\tilde{H}_\alpha^{P^{(\alpha)}}(t)$ disjunkt sind, wird $r_{\alpha,t}$ eine stetige Γ_0 -Abbildung.

q.e.d.

Lemma 4.4.3. Für $\alpha, \beta \in \pi \subset \Pi$ und $x \in \widetilde{H}_\pi^P(t) = \bigcap_{\gamma \in \pi} \widetilde{H}_\gamma^P(t)$ gilt

$$r_{\beta,t}(r_{\alpha,t}(x)) = r_{\alpha,t}(r_{\beta,t}(x)).$$

Insbesondere ist $r_{\pi,t}$, die Hintereinanderausführung der $r_{\alpha,t}$, $\alpha \in \pi$, wohldefiniert und stetig.

Beweis. Um das einzusehen, schauen wir uns die Gleichung (4.2) in Satz 4.3.1 an. Wir stellen fest, daß die oben beschriebene Retraktion jeweils nur die Werte der n_μ mit $\mu \in \pi$ verändert und zwar vergrößert.

Die Werte für n_μ für $\mu \notin \pi$ bleiben unverändert, da die Retraktion parallel zum Kern von μ stattfindet.

Außerdem sind nach Ausführung der beiden Retraktionen dort die Maximalwerte für n_α und n_β des Bildpunktes erreicht und damit gleich.

Der Bildpunkt ist damit in der α - β -Ebene (und damit in allen $P^{(\pi)}$ Kopien davon) eindeutig bestimmt und hängt nicht von der Reihenfolge ab, in der dort der Maximalwert eingestellt wird. **q.e.d.**

Die obige Konstruktion können wir natürlich auch für \widehat{C}_t durchführen. Das analoge Lemma über die Hintereinanderausführung gilt ebenfalls. Der Beweis benutzt dann p_α und p_β und liefert das Gewünschte.

Definition 4.4.4. Wir erhalten mit der Hintereinanderausführung der hier konstruierten Retraktionen die (Deformations-) Retraktionen

$$r_t := r_{\Pi,t} : Y_\infty \rightarrow \widetilde{C}_t \quad \text{und} \quad \widehat{r}_t := \widehat{r}_{\Pi,t} : Y_\infty \rightarrow \widehat{C}_t.$$

Damit sind die Mengen \widetilde{C}_t und \widehat{C}_t zusammenziehbar.

4.5 Eigenschaften der Filtrierung

Für die Konstruktionen in den folgenden Kapiteln ist, neben der Γ_0 -Invarianz und der Zusammenziehbarkeit, die folgende G -Eigenschaft der Filtrierung wichtig:

Lemma 4.5.1. Es gibt eine Funktion $\tau : G \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\widetilde{C}_t \cdot g \subset \widetilde{C}_{t+\tau(g)}$ (bzw. $\widehat{C}_t \cdot g \subset \widehat{C}_{t+\tau(g)}$). Für alle $g, h \in G$ gilt: $\tau(gh) \leq \tau(g) + \tau(h)$ und $\tau(g^{-1}) = \tau(g)$.

Beweis. Wähle $N \in \mathcal{O}$ mit $|N|$ minimal und der Eigenschaft, das $N \cdot g$ und $N \cdot g^{-1}$ ganzzahlige Matrizen sind. $\tau(g) := 2 * \ln(|N|)$ leistet das Verlangte, da für alle Wurzeln $\alpha \in \Pi$ und alle $\gamma \in \Gamma_0$ gilt: $|\alpha(\gamma \cdot g)| \leq 2 \ln(|N|)$. Dazu genügt es zu beobachten, daß für Diagonalmatrizen $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ mit dieser Eigenschaft immer gilt:

$$\frac{1}{|N|^2} \leq \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| \leq |N|^2, \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Die Behauptung ergibt sich aus den Transformationsformeln für die Funktionen n_α und p_α . **q.e.d.**

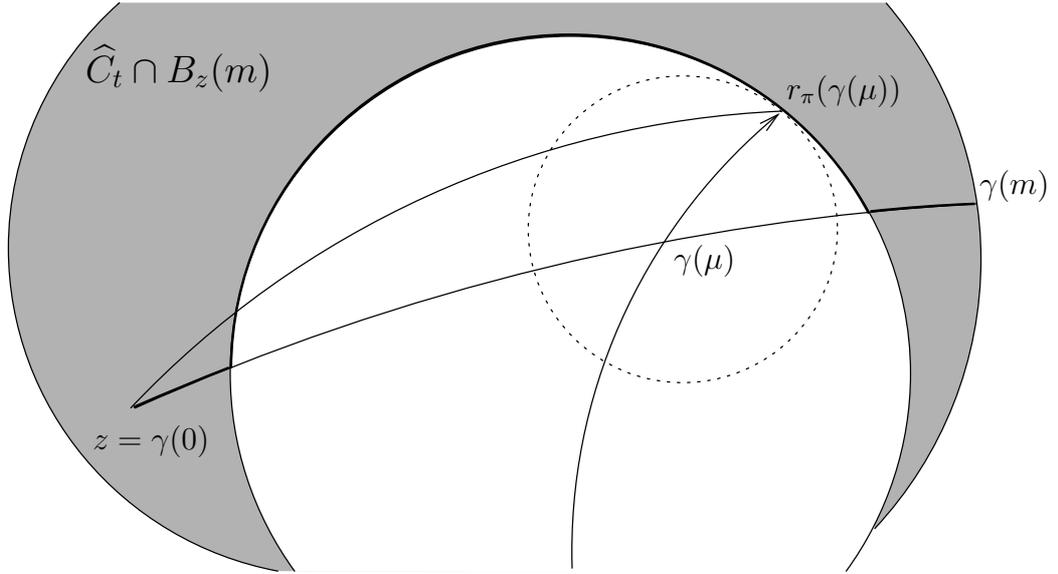


Abbildung 4.5: Die Retraktion \hat{r}_t ist verträglich mit geodätischen Kontraktionen

Lemma 4.5.2. *Ist $\gamma : [0, m] \rightarrow Y_\infty$ eine Geodäte mit $\gamma(m) \in \hat{C}_t$, so gilt*

$$d(\gamma(0), \hat{r}_t(\gamma(\mu))) \leq d(\gamma(0), \gamma(m)) \quad \text{für } \mu \in [0, m]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\hat{r}_t(\gamma(\mu)) = \gamma(m)$ gilt.

Beweis. Wir betrachten den Punkt $\gamma(\mu)$ in dem zu seiner reduzierten Darstellung gehörigen Flat.

Die Retraktion liefert in diesem Flat den Punkt, der von $\gamma(\mu)$ zu dem konvexen Schnitt von \hat{C}_t mit dem Flat den kürzesten Abstand hat.

Damit ist durch $d(\hat{r}_t(\gamma(\mu)), \gamma(\mu))$ auch der Abstand zu \hat{C}_t realisiert.

Daher muß der Abstand zu $\gamma(m)$, das innerhalb von \hat{C}_t liegt, mindestens so groß sein.

Es gilt

$$\begin{aligned} m = d(\gamma(0), \gamma(m)) &= d(\gamma(0), \gamma(\mu)) + d(\gamma(\mu), \gamma(m)) \\ &\geq d(\gamma(0), \gamma(\mu)) + d(\gamma(\mu), \hat{r}_t(\gamma(\mu))) \\ &\geq d(\gamma(0), \hat{r}_t(\gamma(\mu))). \end{aligned}$$

q.e.d.

Diese Verträglichkeit mit geodätischen Kontraktionen liefert dann:

Korollar 4.5.3. *Der Schnitt mit einem Ball $B_z(r) \cap \hat{C}_t$ ist zusammenziehbar. In dem Schnitt mit einem Horoball $HB_\xi(r) \cap \hat{C}_t$ sind alle Fundamentalgruppen trivial.*

Wir fassen die Resultate aus diesem Kapitel zusammen mit:

Lemma 4.5.4. *Ist $G = G(\mathbb{K})$ eine halbeinfache algebraische Gruppe, Γ_0 eine arithmetische Untergruppe, so gibt es eine Γ_0 -cokompakte Filtrierung C_t des symmetrischen Raumes $Y_\infty := G_\infty/K_\infty$ mit*

i) Für $\gamma \in \Gamma_0$ ist $\gamma.C_t = C_t$ und es gilt $\bigcup_{t \geq 0} C_t = Y_\infty$.

ii) Die Mengen C_t sind zusammenziehbar.

iii) Für jede Geodätische ξ und $r \in \mathbb{R}$ sind die Mengen $C_t \cap \text{HB}_r(\xi)$ zusammenziehbar oder leer.

iv) Ist $D = D^{-1} \subset G$ eine Menge mit beschränkten Nennern, so gibt es ein t_D , so daß gilt:

$$\bigcup_{g \in D} g.C_t \subset C_{t+t_D}.$$

Beweis. Die Menge $C_t := \widehat{C}_t$ aus Satz 4.3.1 ist die gesuchte Filtrierung.

Die Eigenschaft i) folgt direkt aus der Definition.

ii) folgt aus der Zusammenziehbarkeit von Y_∞ durch Zusammensetzen der geodätischen Kontraktion mit der in 4.4.1 definierten Retraktion.

iii) folgt analog, da die Zusammensetzung wegen Korollar 4.5.3 auf Bälle und Horobälle eingeschränkt werden kann.

iv) ist schließlich die Aussage von Lemma 4.5.1. **q.e.d.**

Ist G eine Chevalley-Gruppe vom Rang n und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$, dann ist das Standardflat Σ in Y_∞ via \exp isometrisch zu einem n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum. Die Funktionen $-\ln|p_\alpha(x, P)|$, $x \in \Sigma$ sind Koordinatenfunktionen. Die zugehörige Basis $\{b_\alpha, \alpha \in \Pi\}$ mit $p_\alpha(\exp(b_\alpha), P) = e^{-1}$, $\alpha \in \Pi$ und $n_\beta(\exp(b_\alpha), P) = 1$, $\beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}$ sind die den Gewichten zugeordneten Vektoren.

Ein Strahl in diesem Flat ist gegeben durch einen Richtungsvektor a . Dieser ist o.B.d.A eine Linearkombination $a := \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha b_\alpha$. Damit erhalten wir die Busemann-Funktion der Geodäten $\xi_a : \mathbb{R} \rightarrow Y_\infty$, $t \mapsto \exp(t.a)$ als $\beta_{\xi_a}(x) = \sum_{\alpha \in \Pi} a'_\alpha \ln|p_\alpha(x, P)|$ für $x \in \Sigma$. Der Stabilisator des von ξ definierten Endes ist gerade der Durchschnitt der $P^{(\alpha)}$ mit $a_\alpha \neq 0$. Insbesondere enthält er P . Damit ist β_{ξ_a} auf $Y_\infty = P_\infty.\Sigma$ durch diese Formel gegeben. Wir erhalten:

Lemma 4.5.5. *Ist G eine Chevalley-Gruppe vom Rang n und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ und ist β_{ξ_a} die Busemann-Funktion eines rationalen Endes, gegeben durch $\xi_a \subset \Sigma$ wie oben, so gilt für $x \in C_t$, $t, r \in \mathbb{R}$, $t > \ln \rho_2$, $g \in G$*

$$g.C_t \cap \text{HB}_r(\xi_a) \neq \emptyset$$

genau dann, wenn $\gamma \in \Gamma_0$ und $\bar{g} \in P$ existieren, so daß

$$g = \bar{g}.\gamma \quad \text{und} \quad \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \ln|\alpha(\bar{g})| \leq r + t.c_a$$

gilt.

Beweis. Wir wählen $x \in C_t$, $g \in G$. Sei zunächst $z := g.x \in \text{HB}_r(\xi_a)$. Es gibt dann ein $\gamma \in \Gamma_0$ mit:

$$z = g.x = \underbrace{g\gamma^{-1}}_{\bar{g}} \cdot \underbrace{\gamma.x}_{\bar{x}} \quad \text{und} \quad \bar{g} \in P$$

Da $z \in \text{HB}_r(\xi_a)$ und $\bar{x} \in C_t$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} r &\geq \beta_{\xi_a}(z) = \sum_{\alpha \in \Pi} a'_\alpha \ln |p_\alpha(z, P)| \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \ln |\alpha(\bar{g})| + \sum_{\alpha \in \Pi} a'_\alpha \underbrace{\ln |p_\alpha(\bar{x}, P)|}_{\geq -t} \\ &\geq \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \ln |\alpha(\bar{g})| - t \sum_{\alpha \in \Pi} a'_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \ln |\alpha(\bar{g})| - t.c_a \end{aligned}$$

Die Rückrichtung folgt sofort aus der Beobachtung, daß es Punkte $\bar{x} \in C_t$ gibt mit $p_\alpha(\bar{x}, P) = e^{-t}$ für alle $\alpha \in \Pi$. Es gilt $x := \gamma.\bar{x} \in C_t$ und $g.x \in \text{HB}_r(\xi_a)$. **q.e.d.**

Kapitel 5

Die Bruhat-Tits-Gebäude

Wir können und wollen in diesem Kapitel keine umfassende Einführung in die Theorie der Gebäude liefern. Es sollen hier nur die nötigsten Definitionen und Fakten zusammengestellt werden. Wir stützen uns dabei im wesentlichen auf das Buch von [Bro89].

Schließlich benötigen wir noch ein Lemma über die Zusammenhangseigenschaften der vorkommenden affinen Gebäude. Dazu kombinieren wir die Resultate von [Sch05] über sphärische Gebäude mit Techniken aus [BG99] und [BMM03].

Damit können wir die kontrollierten Zusammenhangseigenschaften der Filtrierung $(Y^{\leq \rho})_{\rho \in \mathbb{R}}$ bestimmen.

5.1 Gebäude

Zunächst wollen wir die klassische Definition eines Gebäudes liefern.

Definition 5.1.1. Ein *Gebäude* ist ein Simplicialkomplex Y zusammen mit einer Familie \mathcal{A} von *Apartments*, die den folgenden Axiomen genügt:

- (B0) Jedes Apartment $A \in \mathcal{A}$ ist ein Coxeterkomplex.
- (B1) Zu $\sigma, \tau \in Y$ gibt es ein Apartment $A \in \mathcal{A}$, das beide enthält.
- (B2) Sind $A, A' \in \mathcal{A}$ zwei Apartments, die die Simplices σ und τ enthalten, so gibt es einen Isomorphismus $A \rightarrow A'$, der σ und τ punktweise festhält.

Ein höchstdimensionales Simplex in Y heißt *Kammer*. Die Bedingung (B2) kann durch die folgenden äquivalenten Formulierungen ersetzt werden:

- (B2') Sind $A, A' \in \mathcal{A}$ zwei Apartments, die eine Kammer σ und ein Simplex τ enthalten, so gibt es einen Isomorphismus $A \rightarrow A'$, der σ und τ punktweise festhält.
- (B2'') Sind $A, A' \in \mathcal{A}$ zwei Apartments, die eine gemeinsame Kammer besitzen, so gibt es einen Isomorphismus $A \rightarrow A'$, der $A \cap A'$ punktweise festhält.

Proposition 5.1.2. *Ein Gebäude Y ist ein numerierter Kammerkomplex. Die Isomorphismen in (B2) können Typ-erhaltend gewählt werden.*

Proposition 5.1.3. *Alle Apartments sind Coxeterkomplexe zur gleichen Coxetergruppe W . Insbesondere gibt es für jedes Apartment einen Typ-erhaltenden Isomorphismus auf den Standard-Coxeterkomplex zu W .*

Die wichtigste Klasse von Gebäuden ist sicherlich die der sphärischen Gebäude.

Definition 5.1.4. Ein *sphärisches Gebäude* ist ein Gebäude mit endlichen Apartments.

Proposition 5.1.5. *Ist Y ein Gebäude, so ist für jedes $\sigma \in Y$ der Link $\text{lk } \sigma$ ein (sphärisches) Gebäude.*

Eine weitere wichtige Klasse von Gebäuden ist die der affinen Gebäude.

Definition 5.1.6. Ein *affines Gebäude* ist ein Gebäude mit euklidischen Apartments, d.h. die Apartments können als Triangulierung eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums E aufgefasst werden, auf dem W als affine Spiegelungsgruppe operiert. Insbesondere kann W als diskrete Untergruppe der Gruppe der affin-linearen Abbildungen auf E aufgefasst werden.

Bemerkung 5.1.7. Ein immerwährendes Ärgernis der Gebäudetheorie ist die Tatsache, daß Simplicialkomplexe und damit auch Gebäude nicht abgeschlossen unter der Bildung des kartesischen Produktes sind. Es gibt verschiedene Ansätze den Gebäudebegriff zu erweitern, um dies zu beheben.

In [Bri06] hat B. Brill sich die Mühe gemacht, einen davon systematisch zu entwickeln und aufzuschreiben. Die Grundidee ist dabei, auch polyedrische Zellkomplexe als Gebäude zuzulassen. Dazu definiert er sparsame Realisierungen eines Coxeterkomplexes, deren Kombinatorik noch genug Informationen kodiert, um die Weylgruppe(n) zu rekonstruieren. Damit definiert er ein sparsames Gebäude, indem er Simplices durch Zellen und Coxeterkomplex durch sparsamer Coxeterkomplex in (B0)-(B2) ersetzt.

Viele Resultate für Gebäude gelten auch für sparsame Gebäude. Wir werden aber davon keinen Gebrauch machen, da die Resultate, die wir benötigen, leicht von den einzelnen Gebäuden auf Produkte verallgemeinert werden können.

Ein Prototyp des affinen Gebäudes ist das Bruhat-Tits-Gebäude zu einer diskreten Bewertung eines algebraischen Körpers.

Beispiel 5.1.8 (Bruhat-Tits-Gebäude zur $SL_n (GL_n)$). Sei \mathbb{K} ein Körper (z.B. \mathbb{Q}) mit einer diskreten Bewertung v (z.B. die p -adische Bewertung zu einer Primzahl p). Sei \mathcal{O}_v der Bewertungsring zu v , d.h.

$$\mathcal{O}_v := \{o \in \mathbb{K} | v(o) \geq 0\}$$

(in \mathbb{Q} sind das Brüche in gekürzter Darstellung, deren Nenner nicht durch p teilbar sind). Für eine Basis b_1, b_2, \dots, b_n des \mathbb{K} -Vektorraumes $V := \mathbb{K}^n$ bezeichnen wir den \mathcal{O}_v -Untermodul $L := \mathcal{O}_v \cdot b_1 \oplus \mathcal{O}_v \cdot b_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_v \cdot b_n$ als Gitter. L ist ein freier Untermodul vom Rang n . Ist die Basis die Standardbasis e_1, e_2, \dots, e_n , so heißt L auch Standardgitter. Wir betrachten die Menge der Gitterklassen $[L] := \{\lambda \cdot L | \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. Eine Fahne von Gitterklassen $\{[L_1], [L_2], \dots, [L_k]\}$ ist eine Menge von Gitterklassen, so daß es Vertreter L_i gibt mit $L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_k \subset \pi L_1$ für ein $\pi \in \mathcal{O}_v$ mit $v(\pi) = 1$. Die Fahnen (ohne

die leere Fahne) bilden zusammen mit der Inklusion als Seitenrelation einen simplizialen Kammerkomplex Y .

Es stellt sich heraus, daß Y ein Gebäude ist. $SL_n(\mathbb{K})$ operiert auf Y . Die Gitter der Form $[L]$ mit $L := \pi^{a_1}\mathcal{O}_v.e_1 \oplus \pi^{a_2}\mathcal{O}_v.e_2 \oplus \dots \oplus \pi^{a_n}\mathcal{O}_v.e_n$, $a_i \in \mathbb{Z}$, bilden die Ecken des Standardapartments. Ein Apartmentsystem erhalten wir, indem wir mit $SL_n(\mathbb{K})$ auf der Basis operieren.

Details sind z.B. bei [Bro89] oder [Ser77] ausgeführt; dort sind auch Konstruktionen für andere Gebäudetypen zu finden.

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Arbeit mit Gebäuden sind die Kammerretraktionen.

Satz 5.1.9. *Ist Y ein Gebäude, A ein Apartment und $\sigma \leq A$ eine Kammer, so gibt es eine Retraktion $r_\sigma : Y \rightarrow A$, die A punktweise festläßt und den Abstand zu σ erhält. Insbesondere werden Abstände zwischen beliebigen Punkten nicht vergrößert.*

Die Unterteilung der Apartments in Sektoren (Sektorseiten) liefert eine Einteilung des euklidischen Randes. Identifizieren wir Sektoren, die einen gemeinsamen Teilsektor haben, so stellt sich heraus, daß das nicht nur einen Simplizialkomplex definiert, sondern ein sphärisches Gebäude (vgl. [Bro89]).

Dieses Gebäude im Rand eines affinen Gebäudes liefert eine weitere nützliche Retraktion, die das Gebäude von einem Randsimplex aus „glatt streicht“.

Satz 5.1.10. *Ist Y ein affines Gebäude, A ein Apartment und $\sigma \leq \partial A$ eine Kammer im Rand von A , so gibt es eine Retraktion $r_\sigma : Y \rightarrow A$, die A punktweise festläßt und Abstände zwischen beliebigen Punkten nicht vergrößert. Dabei wird jedes Apartment, das σ im Rand hat, isometrisch auf A abgebildet, wobei der Durchschnitt mit A punktweise fest bleibt.*

5.2 Zusammenhangseigenschaften

Ein zentraler Baustein dieser Arbeit ist die Analyse der Zusammenhangseigenschaften von Bruhat-Tits-Gebäuden an rationalen Randpunkten des symmetrischen Raumes Y_∞ .

Betrachten wir dazu zunächst ein rationales Ende $e \in \partial Y_v$ für eine diskrete Bewertung $v \in S$. O.B.d.A. ist dieses Ende im Rand des positiven Sektors des Standardapartments. Das Ende e zeichnet damit eine spezielle parabolische Untergruppe $P \leq G$ aus.

Diese parabolische Untergruppe wiederum stabilisiert ein Simplex im Rand des Bruhat-Tits-Gebäudes Y_v .

Wir wählen in ∂Y_v eine Kammer Δ , die dieses Simplex enthält. Mit r_Δ bezeichnen wir die Retraktion von Δ aus auf das Standardapartment. Auf dem Standardapartment wiederum ist eine Höhenfunktion auf den Ecken durch die Funktion

$$\kappa(x) := \sum_{\alpha \in \Omega} a'_\alpha \ln |v(p_v(x, P^{(\alpha)}))|, \quad x \in \Sigma^{(0)}$$

gegeben. Hierbei bezeichnet p_v das Volumen des unipotenten Radikals in $P^{(\alpha)}$ bezüglich der Stelle v . $P^{(\alpha)}$ wiederum bezeichnet die maximal parabolische Untergruppe vom Typ $\alpha \in \Omega$ als algebraische Gruppe über \mathbb{K} . Diese muß bezüglich v nun nicht mehr maximal sein!

κ läßt sich mit der P -Operation fortsetzen zu einer Funktion $\kappa : Y_v \rightarrow \mathbb{R}$, die uns als Morsefunktion dient.

Wir nehmen an, daß die Funktion κ nichttrivial ist, da sonst die folgenden Betrachtungen sowieso unnötig (und auch unmöglich) sind. Ferner nehmen wir an, daß Y_v irreduzibel ist. Falls Y_v in irreduzible Faktoren zerfällt, setzen wir zusätzlich voraus, daß κ auf keinem der Faktoren trivial ist, wodurch wir o.B.d.A. annehmen können, daß Y_v doch irreduzibel ist (vgl. Satz 5.2.4).

Lemma 5.2.1. *Diese Morsefunktion κ definiert eine Filtrierung $(Y_v^{\leq r})_{r \in \mathbb{R}}$ des Bruhat-Tits-Gebäudes Y_v zur Bewertung v . Die Mengen*

$$Y_v^{\leq r} := \kappa^{-1}(] - \infty, r])$$

sind (wesentlich) $(n - 2)$ -zusammenhängend und enthalten (essentiell) nichttriviale $(n - 1)$ -Sphären, wobei n die Dimension von Y ist.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, daß wir in CAT(0)-Komplexen von einer Morsefunktion nicht verlangen müssen, daß kritische Werte nur auf Ecken fallen. Auch die Forderung, daß kritische Werte diskret liegen müssen, ist unnötig (vgl. [BB97], [BG99], [BMM03]).

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die absteigenden Links aller $\sigma \leq Y$ dieser Filtrierung Hemisphärenkomplexe der vollen Dimension sind. Sie sind nach Satz 3.5 aus [Sch05] damit $(n - 2)$ -zusammenhängend und enthalten nichttriviale $(n - 1)$ -Sphären. Hierbei ist $n := \dim Y_v - \dim \sigma$.

Wir beobachten, daß die Höhenfunktion auf jeder Zelle höchstens endlich viele kritische Punkte hat und daß es eine Konstante $\epsilon > 0$ gibt, so daß sich die Bilder zweier solcher kritischer Punkte mindestens um ϵ unterscheiden. Insbesondere gibt es keine Kanten, die Niveaumengen zu zwei unterschiedlichen Niveaus, die sich um weniger als ϵ unterscheiden, verbindet. Außerdem sind die aufsteigenden Links zusammenziehbar.

Damit können wir wie in [BG99] schließen, daß die Menge $\kappa^{-1}(] - \infty, a])$ homotopieäquivalent zu der Menge ist, die aus $\kappa^{-1}(] - \infty, a - \epsilon])$ durch Abkegeln der absteigenden Links an den kritischen Punkten entsteht.

Die Mengen $\kappa^{-1}(] - \infty, r])$ sind also $(n - 2)$ -zusammenhängend und enthalten nichttriviale $(n - 1)$ -Sphären, falls n die Dimension des Gebäudes ist.

Haben die Komplexe nicht die volle Dimension, so sind die absteigenden Links nur k -zusammenhängend mit $-1 \leq k < n - \dim \sigma$. Die oben behauptete Homotopieäquivalenz ist nicht erfüllt. Betrachten wir aber ein um ein festes λ höheres Niveau, so können wir den „nicht aufsteigenden“ Link, der immer die volle Dimension und damit die vollen Zusammenhangseigenschaften hat, als homotopieäquivalenten Teilkomplex in dem niedrigeren Niveau realisieren. Insbesondere gilt die obige Homotopieäquivalenz der Menge $\kappa^{-1}(] - \infty, a])$ zu der Menge, die aus $\kappa^{-1}(] - \infty, a - \epsilon])$ durch Abkegeln der absteigenden Links an den kritischen Punkten entsteht, in der Menge $\kappa^{-1}(] - \infty, a - \epsilon + \lambda])$. **q.e.d.**

Bemerkung 5.2.2. Eine Alternative dies einzusehen ist die folgende Beobachtung:

Erstens, der Raum Y_v ist n -dimensional. Gäbe es eine n -Sphäre im Link eines kritischen Punktes x , die zwar nichttrivial im absteigenden Link von x , wohl aber trivial in $\kappa^{-1}(] - \infty, \kappa(x) - \epsilon])$ ist, so entstünde in $\kappa^{-1}(] - \infty, \kappa(x)])$ eine n -Sphäre. Da Y aber n -dimensional und zusammenziehbar ist, kann dies nicht passieren. Damit sind alle nicht-trivialen Sphären im absteigenden Link eines kritischen Punktes x auch in $\kappa^{-1}(] - \infty, s])$ für $s < \kappa(x)$ nicht zusammenziehbar.

Wegen der Zusammenhangseigenschaften der Links können wir außerdem (zumindest im generischen Fall) leicht erreichen, daß eine Abbildung eines k -Balles, mit $k < n$, bis auf Homotopien relativ des Randes, ihren maximalen κ -Wert auf dem Rand annimmt. Dieses „Straffen“ oder lokale Schieben zeigt, daß $(k - 1)$ -Sphären (die ja in Y_v zusammenziehbar sind) in jeder Filtrierungsmenge zusammengezogen werden können, die sie enthält. Insbesondere sind die Filtrierungsmengen $(n - 2)$ -zusammenhängend.

Im nicht generischen Fall funktioniert dieses Straffen ganz genauso, da die Links immer (-1) -zusammenhängend, also nicht leer sind. Allerdings verläuft die Homotopie dabei in einem Bereich, dessen κ -Werte um λ höher sind als das bisherige Maximum.

Dies scheint auf den ersten Blick problematisch. Allerdings ist das Ergebnis trotzdem ein Ball, der fast überall um ϵ tiefer liegt als der vorherige. Lediglich das „Anschlußstück“, d.h. die Homotopie auf den Rand eingeschränkt, kann nicht verbessert werden. Wir erhalten also einen Ball, der das Maximum auf dem Rand im Inneren höchstens um λ überschreitet.

Bemerkung 5.2.3. Kai-Uwe Bux und Kevin Wortman haben eine Arbeit angekündigt, in der sie die Zusammenhangseigenschaften von Horosphären untersuchen. Die hier bewiesenen Resultate wären direkte Konsequenzen aus ihrem Ergebniss.

Satz 5.2.4. Sei F der Γ_0 -invariante Fundamentalbereich für die Γ -Operation auf Y , $*$ $\in F$ die Ecke, deren Stabilisator gerade Γ_0 ist.

Für alle $\rho \in \mathbb{R}$ ist die Menge $Y^{\leq \rho} := \{g.F \mid g \in P, \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \ln|\alpha(g)| \leq \rho\}$ ein voller Unterkomplex von Y . Eine Kammer liegt in $Y^{\leq \rho}$ genau dann, wenn ihre eindeutig bestimmte Ecke y in der Γ -Bahn von $*$ die Ungleichung $\kappa(y) \leq \rho$ erfüllt, wobei

$$\kappa(y) := \sum_{v \in S} \kappa_v \circ \pi_v(y)$$

die Summe der Höhenfunktionen κ_v auf den Y_v aus Lemma 5.2.1 ist und π_v die Projektion von $Y = \prod_{v \in S} Y_v$ auf die entsprechende Komponente.

Diese Funktion κ definiert eine Höhenfunktion im Produkt. Die Mengen $Y^{\leq \rho}$ sind (wesentlich) $(n - 2)$ -zusammenhängend und enthalten (essentielle) $(n - 1)$ -Sphären, wobei $n := \sum_{v \in S} \dim Y_v$ ist.

Beweis. Sei $\rho \in \mathbb{R}$, $y = g.*$, mit $g \in P$ und $\sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \ln|\alpha(g)| \leq \rho$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa(g.*) &= \sum_{v \in S} \kappa_v \circ \pi_v(g.*) = \sum_{v \in S} \kappa_v(g.*_v) \\ &= \sum_{v \in S} \sum_{\alpha \in \Omega} a'_\alpha \ln|v(p_v(g.*_v, P^{(\alpha)}))| \\ &= \sum_{v \in S} \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \ln|v(\alpha(g))| \\ &= \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \left(\sum_{v \in S} \ln|v(\alpha(g))| \right) \end{aligned}$$

Mit der Produktformel $\prod_{v \in V_{\mathbb{K}}} v(k) = 1$, $k \in \mathbb{K}$, für Bewertungen erhalten wir

$$\kappa(g.*) = \sum_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \ln|\alpha(g)|.$$

Da F die Γ_0 -Bahn einer Zelle ist, die $*$ enthält, folgt der erste Teil der Behauptung. Die Zusammenhangseigenschaften, die behauptet werden, ergeben sich mit Lemma 5.2.1 aus der Tatsache, daß die Menge $\kappa^{-1}(]-\infty, \rho])$ dargestellt werden kann als

$$\kappa^{-1}(]-\infty, \rho]) = \bigcup_{\sum \rho_v = \rho} \prod_{v \in S} Y_v^{\leq \rho_v}.$$

Damit ergeben sich die Zusammenhangseigenschaften über die Joins der entsprechenden absteigenden Links. Die tatsächliche Filtrierung $Y^{\leq \rho}$ weicht davon höchstens um den Durchmesser von F ab, d.h.

$$\kappa^{-1}(]-\infty, \rho - \lambda]) \subset Y^{\leq \rho} \subset \kappa^{-1}(]-\infty, \rho + \lambda]),$$

was für die (wesentlichen) Zusammenhangseigenschaften keinen Unterschied macht. **q.e.d.**

Kapitel 6

Hauptresultat

6.1 Die Gruppen

Fixieren wir zunächst einen algebraischen Zahlkörper \mathbb{K} und eine endliche Menge nicht-archimedischer Stellen S . Wir bezeichnen den Ring der ganzen Zahlen mit \mathcal{O} und den Ring der S -ganzen Zahlen mit \mathcal{O}_S . Aus technischen Gründen schränken wir uns auf den Fall einer archimedischen Bewertung, also auf $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ ein.

Aus den gleichen Gründen beschränken wir uns bei den über \mathbb{K} definierten halbeinfachen linearen algebraischen Gruppen $G(\mathbb{K})$, die wir betrachten wollen, auf die Gruppen der \mathbb{K} -Punkte von Chevalley-Gruppen.

Darin betrachten wir die arithmetische Untergruppe $\Gamma_0 := G(\mathcal{O})$ und die S -arithmetische Untergruppe $\Gamma := G(\mathcal{O}_S)$. Außerdem betrachten wir G_∞ , die Gruppe der reellen Punkte, d.h. $G_\infty := G(\mathbb{K} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$.

6.2 Die Räume

Die Gruppe G_∞ hat einen kanonischen Raum, auf dem sie operiert, den symmetrischen Raum $Y_\infty := G_\infty/K_\infty$, wobei K_∞ eine maximale kompakte Untergruppe in G_∞ ist. Die Gruppe $G(\mathbb{K})$ operiert auf Y_∞ , kann aber außerdem, für $v \in S$, auch noch auf dem Bruhat-Tits-Gebäude Y_v zu $G(\mathbb{K})$ bzgl. der diskreten Bewertung v operieren. Wir betrachten

$$Y := Y_S := \prod_{v \in S} Y_v \quad \text{und} \quad X := Y_\infty \times Y$$

mit der diagonalen Operation von G .

Hierbei ist Y_S ein Polysimplizialkomplex, den man als sparsames Bruhat-Tits-Gebäude zu $\Gamma := G(\mathcal{O}_S)$ auffassen kann (vgl. z.B. [Bri06]), die Punktstabilisatoren von Y_S bezüglich der Operation von G sind komensurabel zu $\Gamma_0 = G(\mathcal{O})$.

Die Räume Y_v , $v \in S$, und auch Y_∞ sind CAT(0)-Räume und damit insbesondere zusammenziehbar. Damit sind auch X und $Y = Y_S$ zusammenziehbar.

Die Elemente von $G = G(\mathbb{K})$ operieren durch Isometrien auf dem symmetrischen Raum. Wir wollen im folgenden diese Γ -Operation $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(M)$ auf $M := Y_\infty$ untersuchen.

Der (Busemann-)Rand der Menge M trägt (über die Ränder der flachen, d.h. euklidischen Unterräume) die Feinstruktur eines sphärischen Gebäudes. Wir wollen im weiteren davon

ausgehen, daß wir in M einen Basispunkt und ein den Basispunkt enthaltenden euklidischen Unterraum maximaler Dimension, das Standardflat, gewählt haben.

6.3 Das Hauptresultat

Wir definieren:

Definition 6.3.1. Die Randpunkte der rationalen Flats, d.h. der Flats in der G -Bahn des Standardflats, heißen *rationale Enden*, die übrigen Randpunkte werden im folgenden *irrationale Enden* genannt.

Theorem 6.3.2. Sei $G = G(\mathbb{K})$ eine Chevalley-Gruppe über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(i)$ und S eine endliche Menge diskreter Bewertungen auf \mathbb{K} , \mathcal{O} der Ring der S -ganzen Zahlen. Ferner sei $\Gamma = G(\mathcal{O}_S)$ eine S -arithmetische Untergruppe von G .

Operiert Γ auf dem symmetrischen Raum $M = Y_\infty$ via der Einbettung $\rho : \Gamma \rightarrow G_\infty$ und ist $m := \sum_{v \in S} \dim Y_v$ die Summe der Dimensionen der Bruhat-Tits-Gebäude Y_v , so ist ein Endpunkt $e \in \partial M$ genau dann in der Menge $\Sigma^k(\rho)$, wenn e irrational ist oder $k \leq m - 1$ gilt.

Korollar 6.3.3. Sei $G = SL_n(\mathbb{Q})$ und $m \in \mathbb{Z}$. Ferner sei $\Gamma := SL_n(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$, s die Zahl der verschiedenen Primfaktoren von m .

Operiert Γ auf dem symmetrischen Raum $M = Y_\infty$ via der Einbettung $\rho : \Gamma \rightarrow G_\infty$, dann ist ein Endpunkt $e \in \partial M$ genau dann in der Menge $\Sigma^k(\rho)$, wenn e irrational ist oder $k < s(n - 1)$ gilt.

Beweis. Wir wählen die Menge der p -adischen Bewertungen $S := \{v_p \mid p \text{ Primteiler von } m\}$. Die Behauptung folgt dann aus dem Theorem, da alle Bruhat-Tits-Gebäude in diesem Fall die Dimension $n - 1$ haben. **q.e.d.**

Beweis des Theorems. Die Gruppe $\Gamma := G(\mathcal{O}_S)$ operiert mit endlichen Stabilisatoren auf dem Produkt

$$X := Y_\infty \times Y \quad \text{mit} \quad Y := Y_S := \prod_{v \in S} Y_v.$$

Damit ist Γ insbesondere vom Typ F_∞ . Die Projektion auf den ersten Faktor $M := Y_\infty$ liefert eine Kontrollabbildung h für die Operation ρ von G auf M .

Die Gruppe Γ_0 operiert eigentlich diskontinuierlich auf Y_∞ , daher operiert G eigentlich diskontinuierlich auf X . Der Raum X ist daher geeignet, um $\Sigma^k(\rho)$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu bestimmen. Als Kontrollabbildung $h : X \rightarrow M$ dient die kanonische Projektion auf den ersten Faktor. Dies ist eine stetige G -Abbildung.

Zur Bestimmung der Zusammenhangseigenschaften filtrieren wir X durch die Mengen

$$K_t := \Gamma.(C_t \times F),$$

wobei C_t die Γ_0 -kokompakten Mengen aus Lemma 4.5.4 sind und F die Γ_0 -Bahn des Standardfundamentalbereichs von Y ist.

Die C_t haben die Eigenschaft, daß Schnitte mit Horobällen immer zusammenziehbar oder leer sind. Zusammen mit den anderen Eigenschaften aus 4.5.4 erlaubt uns das, einen Schnitt

(zumindest bis auf Homotopie) für die Projektion $\pi : X \rightarrow Y$ auf den zweiten Faktor anzugeben.

D.h. wir können zu $t > 0$ ein $s > t$, eine Abbildung f und eine Homotopie H wählen, so daß für eine Geodätische ξ das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) & \xrightarrow{\iota} & K_s \cap h^{-1}(\text{HB}_{r+\lambda(r)}(\xi)) \\
 \pi \downarrow & \circlearrowleft_H \nearrow & \downarrow \pi \\
 Y_{t,r} & \xrightarrow{f|} & Y_{s,r+\lambda(r)}
 \end{array}$$

bis auf die Homotopie H kommutativ ist. Hierbei sind die Mengen $Y_{t,r}$ bzw. $Y_{s,r+\lambda(r)}$ das jeweilige Bild der Abbildung π .

Um dies einzusehen, können wir wörtlich den entsprechenden Beweis aus [BG03b] verwenden. Der Vollständigkeit halber geben wir nach diesem Beweis in Abschnitt 6.5 noch eine Variante der Konstruktion an.

Mit Hilfe des Homotopieschnittes f aus dem obigen Diagramm ergibt sich, daß kontrollierter n -Zusammenhang von X äquivalent dazu ist, daß die von der Einbettung induzierte Abbildung

$$\pi_l(\iota) : \pi_l(Y_{t,r}) \rightarrow \pi_l(Y_{s,r+\lambda(r)}) \quad (6.1)$$

trivial für alle $-1 \leq l \leq n$ sind.

Wir beobachten, daß eine Zelle σ genau dann in $Y_{t,r}$ liegt, wenn es ein $g \in \Gamma$ gibt, so daß $\sigma \leq g.F$ und $g.C_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \neq \emptyset$ gilt.

Im Fall eines irrationalen Endes $e := \xi(\infty)$ sind wir damit schon fertig. Hier ist der Schnitt mit einem Horoball bei e nie leer, also ist π surjektiv. Daher ist die Menge $Y_{t,r} = Y$ zusammenziehbar.

Im Fall eines rationalen Endes liefert Lemma 4.5.5 die Bedingung an g in Abhängigkeit von t und r , mit der $g.C_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \neq \emptyset$ gilt.

Mit der Hilfe von Satz 5.2.4, der über die Produktformel $\prod_{v \in V_{\mathbb{K}}} v(k) = 1$, $k \in \mathbb{K}$, die Busemann-Funktionen in Y_{∞} durch die Darstellung mit archimedischen Bewertungen schließlich in Beziehung zu den nicht archimedischen Bewertungen und damit zu Höhenfunktionen in den Gebäuden bringt, erhalten wir

$$Y_{t,r} = Y^{\leq c_e t + r}.$$

Damit liefert die obige Filtrierung von Y_{∞} eine Filtrierung von Y durch die vollen Unterkomplexe $Y^{\leq c_e t + r}$. Derselbe Satz 5.2.4 benennt auch die (wesentlichen) Zusammenhangseigenschaften dieser Menge. Insbesondere sehen wir, daß die Abbildung in (6.1) dann nicht trivial wird, wenn e rational ist und $l = m - 1$ ist. Damit ist ρ kontrolliert $(k - 1)$ -zusammenhängend über e , d.h. $e \in \Sigma^k(\rho)$, genau dann wenn e irrational ist oder $k \leq m - 1$ gilt. **q.e.d.**

6.4 Ausblick

Wenn wir eine feste Darstellung einer halbeinfachen algebraischen Gruppe $G(\mathbb{K})$ als Matrizen­gruppe über einem Zahlkörper \mathbb{K} wählen, so daß G über \mathcal{O} definiert ist und über \mathbb{K} (quasi-)zerfallend ist (vgl. [Hum75]), so läßt sich der Beweis vermutlich anpassen. Verwendet haben wir eigentlich nur, daß $G(\mathbb{K})$ eine halbeinfache lineare algebraische Gruppe ist, bei der globaler und reeller Rang übereinstimmen, um eine vernünftige Definition von rationalem Ende zu bekommen. Außerdem brauchen wir einen Begriff wie quasizerfallend, um eine Beziehung zwischen den parabolischen Untergruppen in den verschiedenen Kontexten zu erhalten. Der Beweis läßt sich vermutlich auf einen beliebigen Zahlkörper \mathbb{K} erweitern: Lemma 4.5.5 benötigt nur eine Beziehung zwischen dem Absolutbetrag und den archimedischen Bewertungen. Diese erhalten wir möglicherweise aus der Tatsache, daß wir die archimedischen Bewertungen in der Iwasawa-Zerlegung kontrollieren können. All dies muß aber sicherlich noch genauer untersucht werden.

Spannende Fragen ergeben sich auch, wenn wir die Frage nach den Invarianten von Untergruppen stellen. Hier ist außer den Ergebnissen aus [Bux97a] noch wenig bekannt. Inwieweit sich die hier verwendeten Methoden auf den Funktionenkörperfall übertragen lassen, ist mehr als unklar, aber sicherlich ist die Frage interessant.

6.5 Der Schnitt

In diesem Abschnitt geben wir eine Konstruktion für den Schnitt f aus dem Beweis von Theorem 6.3.2 an. Diese Konstruktion ist die gleiche wie in [BG03b]. Der Vollständigkeit halber geben wir sie trotzdem hier an, zumal sie expliziter als die in [BG03b] angegebene ist.

Wir fangen zunächst mit einem rationalen Ende $e \in \partial Y$ an. Wir wählen eine Geodätische mit $\xi(\infty) = e$. Im folgenden werden wir sowohl eine Abbildung $f : Y \rightarrow K_s$ als auch die Homotopie $H : K_t \times I \rightarrow K_s$ konstruieren, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 K_t & \xrightarrow{\iota} & K_s \\
 \pi \downarrow & \circlearrowleft_H \nearrow & \downarrow \pi \\
 Y & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

kommutiert. Außerdem soll auch das Diagramm, das durch Einschränken auf die Urbilder $h^{-1}(\text{HB}_r(e))$ von Horobällen am Ende e entsteht

$$\begin{array}{ccc}
 K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) & \xrightarrow{\iota|} & K_s \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \\
 \pi| \downarrow & \circlearrowleft_{H|} \nearrow & \downarrow \pi| \\
 Y_{t,r} & \xrightarrow{f|} & Y_{s,r}
 \end{array}$$

bis auf die Einschränkung der obigen Homotopie kommutativ sein. D.h.:

$$f(\pi(x)) \in h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)), \quad \text{für } x \in h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$$

und

$$H(x, \mu) \in h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)), \quad \text{für } x \in h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)), \quad t \in I.$$

In [BG03b] wird die Idee verfolgt, daß es ganz einfach wäre, f und H zu konstruieren, wenn K_t ein CW -Komplex und $K_{t'}$ zusammenziehbar wäre. Wir könnten die Abbildung und die Homotopie dann einfach auf Zellen definieren und anschließend zusammensetzen.

Wir werden sehen, daß das Urbild eines CW -Komplexes fast so gut ist wie der Komplex selbst, wenn es um „gerüstweise“ Konstruktion geht.

Ein erster Schritt ist nun, die Situation im Urbild einer Zelle $\sigma \in Y$ zu betrachten.

Als Ersatz für die Zusammenziehbarkeit von K_s finden wir zusammenziehbare Mengen $W_{t,\sigma}$, die mit der Filtrierung durch die Mengen K_t verträglich sind. Für diese Mengen ist für jedes $f_\sigma : \sigma \rightarrow W_{t,\sigma}$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K_t \cap \pi^{-1}(\sigma) & \xrightarrow{\iota = \iota_2 \circ \iota_1} & K_{t'} \cap \pi^{-1}(\sigma) \\ \downarrow \pi & \swarrow \iota_1 & \nearrow \iota_2 \\ & W_{t,\sigma} & \\ \downarrow \pi & \nearrow f_\sigma & \searrow \iota_2 \circ f_\sigma \\ \sigma & & \sigma \end{array}$$

bis auf eine Homotopie $H_\sigma : K_t \times I \rightarrow W_{t',\sigma}$ kommutativ.

Außerdem ist für geeignete f_σ und für $\sigma \in Y_{t,r}$ auch das Diagramm, das durch Einschränken auf die Urbilder $h^{-1}(\text{HB}_r(\xi))$ von Horobällen am Ende e entsteht:

$$\begin{array}{ccc} K_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \cap \pi^{-1}(\sigma) & \xrightarrow{\iota = \iota_2 \circ \iota_1} & K_{t'} \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \cap \pi^{-1}(\sigma) \\ \downarrow \pi & \swarrow \iota_1 & \nearrow \iota_2 \\ & W_{t,\sigma} \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) & \\ \downarrow \pi & \nearrow f & \searrow \iota_2 \circ f \\ \sigma & & \sigma \end{array}$$

kommutativ, und H_σ kann so gewählt werden, daß die Einschränkung auf $h^{-1}(\text{HB}_r(e))$ die gewünschte Homotopie ist.

Im folgenden werden wir argumentieren, daß man diese Abbildungen so wählen kann, daß sie zu einer Abbildung f (bzw. H) auf ganz Y (bzw. $K_t \times I$) zusammengesetzt werden können.

Mit β_ξ bezeichnen wir die Busemann-Funktion, die durch $\beta_\xi(\xi(s)) = -s$ charakterisiert ist. Mit $\chi_\xi(g) := \beta_\xi(x) - \beta_\xi(g.x)$ bezeichnen wir die Verschiebungslänge von g in Richtung e . Die Verschiebungslänge definiert einen Gruppencharakter auf P .

Ferner sei P eine minimal parabolische Untergruppe des Stabilisators von e .

Für eine Zelle $\sigma \in Y$ definieren wir Repräsentanten $g_\sigma \in P$ mit $g_\sigma^{-1}\sigma \in F$ und $\chi_\xi(g_\sigma)$ maximal, d.h. g_σ schiebt maximal in Richtung e .

Für $\tau \leq \sigma \leq F$ gilt:

$$g_\sigma^{-1}g_\tau F \cap F \neq \emptyset.$$

Wir können daher λ so wählen, daß gilt:

$$g_\sigma^{-1}g_\tau.C_t \subset C_{t+\lambda}.$$

Wir definieren:

$$W_{t,\sigma} := g_\sigma \cdot C_{t+(\dim \sigma+1)\lambda} \times \sigma \subset X.$$

Es gilt dann $W_{t,\tau} \subset W_{t,\sigma}$, falls $\tau \leq \sigma$ ist.

Ferner sind die Mengen $\pi^{-1}(\sigma)$, $\sigma \in Y$, abgeschlossene Teilmengen von X . Bezeichnet $Y^{(n)}$ das n -Gerüst von Y , so ist auch

$$X_n := X_0 \cap \pi^{-1}(Y^{(n)}) = \bigcup_{\tau \in Y^{(n)}} X_0 \cap \pi^{-1}(\tau) \subset X$$

abgeschlossen. Diese Mengen ersetzen in der folgenden Konstruktion die Zellen und Gerüste, die im CW-Komplex zur Verfügung wären. Es gilt

$$X_0 \subset X_1 \dots \subset X_n \subset K_{t+n\lambda}.$$

Außerdem gilt für alle $\sigma \in Y$

$$\pi^{-1}(\sigma) \cap K_t \subset W_\sigma.$$

Wählen wir nun einen Basispunkt $y_0 \in C_t$ sowie eine totale Ordnung auf der Menge der Ecken von Y , so können wir f und H „gerüstweise“ konstruieren.

Die Abbildung f_0 bildet $\sigma \in Y^{(0)}$ auf $(g_\sigma \cdot y_0, \sigma)$ ab.

Um f_n zu konstruieren, identifizieren wir die n -Zelle σ mit der Vereinigung der Strahlen $[x_0, x]$, wobei x_0 die bezüglich der gewählten totalen Ordnung minimale Nullzelle und $x \in \partial\sigma \setminus x_0$ ist. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ die linear reparametrisierte Geodäte von $f_{n-1}(x_0)$ nach $f_{n-1}(x)$ und ρ_σ die (faserweise) Retraktion auf W_σ , dann definieren wir

$$f_n(\pi(\gamma(t))) := \rho_\sigma(\gamma(t)).$$

H_n ist die Homotopie, die auf $\pi^{-1}(\sigma)$ eingeschränkt von der Zusammenziehung von W_σ auf $f_n(\sigma)$ induziert wird und die auf $X_0 \cap W_\tau \cap W_\sigma$, $\tau < \sigma$, mit H_{n-1} übereinstimmt.

Um hier zellenweise so argumentieren zu können, braucht es zwei Überlegungen.

Erstens ist der Bildbereich W_σ zusammenziehbar und damit ein absoluter Retrakt. Damit sind alle Fortsetzungen von Abbildungen und Homotopien gesichert.

Zweitens sind sowohl σ als auch $X_0 \cap \pi^{-1}(\sigma)$ abgeschlossene Teilmengen von Y bzw. X . Ferner gilt für n -Zellen $\sigma \neq \tau$,

$$\sigma \cap \tau \leq Y^{(n-1)} \quad \text{und} \quad W_\sigma \cap W_\tau \subset X_0.$$

Eine Menge in Y ist genau dann offen, wenn ihr Schnitt mit σ offen in σ ist. Genauso ist eine Menge in X_0 genau dann offen, wenn ihr Schnitt mit $\pi^{-1}(\sigma)$ offen in $\pi^{-1}(\sigma)$ ist.

Damit sind die zellenweise definierten Abbildungen wohldefiniert und stetig, wenn sie auf dem Rand mit dem nächsttieferen Gerüst übereinstimmen und stetig auf der Zelle bzw. dem Urbild der Zelle sind.

Um die Verträglichkeit mit den Urbildern der Horobälle sicherzustellen, genügt es nun den Basispunkt $y_0 \in C_t \subset Y_\infty$ so zu wählen, daß aus $g \cdot C_t \cap h^{-1}(\text{HB}_r(\xi)) \neq \emptyset$ folgt, daß $g \cdot y_0 \in h^{-1}(\text{HB}_{r'}(g \cdot \xi))$ gilt, was für g aus dem Stabilisator von e leicht sicherzustellen ist.

Im irrationalen Fall gibt es zwei Möglichkeiten. Zum einen können wir die Konstruktion von oben auch im irrationalen Fall durchführen, wobei die Wahl der Punkte nicht so einfach mit der Operation des Stabilisators transportiert werden kann. Zum anderen ist unsere Konstruktion so gemacht, daß alle Wahlen explizit genug sind, um Konvergenzaussagen zu ermöglichen. Wählen wir also eine Folge $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Geodätischen, so daß $(\xi_k(\infty))_{k \in \mathbb{N}}$ und $(\xi_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ konvergieren, und wählen wir die y_0 im obigen Beweis so, daß sie ebenfalls konvergieren, so konvergieren die Diagramme, d.h. alle Abbildungen konvergieren lokal gleichmäßig.

Literaturverzeichnis

- [Åbe86] Hans Åberg, *Bieri-strebel valuations (of finite rank)*, Proceedings of the London Mathematical Society **52** (1986), 269–304.
- [Abe91] Herbert Abels, *Finiteness properties of certain arithmetic groups in the function field case*, Israel Journal of Mathematics **76** (1991), 113–128.
- [Abr96] Peter Abramenko, *Twin buildings and applications to S -arithmetic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1641, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.
- [BB97] Mladen Bestvina and Noel Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups*, Inventiones Mathematicae **129** (1997), 445–470.
- [Beh69] Helmut Behr, *Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern*, Inventiones Mathematicae **7** (1969), 1–32.
- [Beh04] ———, *Higher finiteness properties of S -arithmetic groups in the function field case I*, Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 311, Cambridge University Press, 2004, pp. 269–304.
- [BG99] Kai-Uwe Bux and Carlos Gonzales, *The Bestvina-Brady construction revisited—geometric computation of Σ -invariants for right angled artin groups*, Journal of the London Mathematical Society **60** (1999), no. 2, 793–801.
- [BG03a] Robert Bieri and Ross Geoghegan, *Connectivity properties of group actions on non-positively curved spaces*, vol. 161, Memoirs of the AMS, no. 765, American Mathematical Society, 2003.
- [BG03b] ———, *Controlled connectivity of $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$* , Geometriae Dedicata **99** (2003), 137–166.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [BMM03] Noel Brady, Jon McCammond, and John Meier, *Local-to-asymptotic topology for cocompact $CAT(0)$ complexes*, Topology and its Applications **131** (2003), no. 2, 177–188.
- [BNS87] Robert Bieri, Walter D. Neumann, and Ralph Strebel, *A geometric invariant of discrete groups*, Inventiones Mathematicae **90** (1987), no. 3, 451–477.

- [Boo75] William Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1975.
- [Bor69] Armand Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.
- [Bor91] ———, *Linear algebraic groups*, Graduate texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, Second Enlarged Edition.
- [BR88] Robert Bieri and Burkhardt Renz, *Valuations on free resolutions and higher geometric invariants of groups*, Commentarii Mathematici Helvetici **63** (1988), 464–497.
- [Bri06] Björn Brill, *Eine Familie von Kompaktifizierungen affiner Gebäude*, Dissertation, J. W. Goethe Universität, Frankfurt am Main, 2006, Logos Verlag, Berlin.
- [Bro87] Kenneth S. Brown, *Trees, valuations, and the Bieri-Neumann-Strebel invariant*, Inventiones Mathematicae **90** (1987), no. 3, 479–504.
- [Bro89] ———, *Buildings*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [BS] Robert Bieri and Ralf Strebel, *Geometric invariants for discrete groups*, (Monograph in preparation).
- [BS80] ———, *Valuations and finitely presented metabelian groups*, Proceedings of the London Mathematical Society **41** (1980), no. 3, 439–464.
- [BT72] François Bruhat and Jacques Tits, *Groupes réductives sur un corps local I*, Publications Mathématiques IHES **41** (1972), 5–252.
- [Bux97a] Kai-Uwe Bux, *Endlichkeitseigenschaften auflösbarer arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern*, Dissertation, J. W. Goethe Universität, Frankfurt am Main, 1997.
- [Bux97b] ———, *Finiteness properties of some metabelian S -arithmetic groups*, Proceedings of the London Mathematical Society **75** (1997), 308–322.
- [Bux99] ———, *Finiteness properties of soluble S -arithmetic groups - a survey*, Groups: Geometric and Combinatorial Aspects (Bielefeld), 1999.
- [BW07] Kai-Uwe Bux and Kevin Wortman, *Finiteness properties of arithmetic groups over function fields*, Inventiones Mathematicae **167** (2007), no. 2, 355–378.
- [Har69] Günter Harder, *Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern*, Inventiones Mathematicae **7** (1969), 33–54.
- [Har71] ———, *A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **4** (1971), 409–455.
- [Hel62] Sigurdur Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York, 1962.
- [Hum75] James E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

- [Hum80] ———, *Arithmetic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 789, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.
- [Hum95] ———, *Conjugacy classes in semisimple algebraic groups*, American Mathematical Society, 1995.
- [Lün02] Thilko Lünemann, *Kontrollierter Zusammenhang der Operation von $SL_2(\mathbb{Z}[\frac{i}{m}])$ auf \mathbb{H}^3* , Diplomarbeit, J. W. Goethe Universität, Frankfurt am Main, 2002.
- [Mar89] Gregori A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [Mei93] Holger Meinert, *Die höheren geometrischen Invarianten Σ^n von Gruppen via Operationen auf CW-Komplexen und der Beweis der Σ -Vermutung*, Dissertation, J. W. Goethe Universität, Frankfurt am Main, 1993.
- [MMvW98] John Meier, Holger Meinert, and Leonard A. van Wyk, *Higher generation subgroup sets and the Σ invariants of graph groups*, Commentarii Mathematici Helvetici **73** (1998), 22–44.
- [Mos73] G. Daniel Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Princeton University Press, 1973.
- [Neu79] Walter D. Neumann, *Normal subgroups with infinite cyclic quotient*, Math. Sci. **4** (1979), 143–148.
- [PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Academic Press, New York, 1994.
- [Rag72] Madabusi S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [Ron89] Mark Ronan, *Lectures on buildings*, Perspectives in Math., vol. 7, Academic Press, New York, 1989.
- [Rot93] Joseph J. Rotman, *An introduction to algebraic topology*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993.
- [Sch05] Bernd Schulz, *Sphärische Unterkomplexe sphärischer Gebäude*, Dissertation, J. W. Goethe Universität, Frankfurt am Main, 2005.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.
- [Spr98] Tonny A. Springer, *Linear algebraic groups*, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [Stu76] Ulrich Stuhler, *Zur Frage der endlichen Präsentiertheit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall*, Mathematische Annalen **224** (1976), 217–232.
- [Stu80] ———, *Homological properties of certain arithmetic groups in the function field case*, Inventiones Mathematicae **57** (1980), 263–281.



Lebenslauf

23. 2. 1971 Geburt in Offenbach am Main als erstes Kind des Diplomingenieurs Hugdieter Rehn und seiner Frau, der Schulleiterin Heidrun Rehn, geb. Lotz
- 1977-1981 Besuch der Konrad-Neumann-Grundschule Neuses
ab 1981 Besuch des Grimmelshausen-Gymnasiums Gelnhausen
7. 1. 1983 Geburt meines Bruders Kai Ingo
27. 8. 1985 Geburt meines Bruders Dirk Robert
9. 12. 1989 Erhalten des Hans-Heß-Preises der Schule für ein Informatikprojekt zusammen mit drei Mitschülern
- Juni 1990 Abitur
- 9/1990-12/1991 Zivildienst beim Sozialen Friedensdienst e.V. in Kassel in der individuellen Schwerstbehindertenbetreuung
- Oktober 1991 Beginn des Mathematikstudiums mit Ziel Diplom an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
- September 1993 Vordiplom
- 10/1993-2/1998 Tätigkeit als studentische Hilfskraft am mathematischen Seminar
23. 12. 1998 Tod meines Vaters
- Juni 2000 Diplomarbeit mit dem Titel „Eine Klasse hypoelliptischer Differentialoperatoren mit C^∞ -Koeffizienten“ bei Prof. Dr. J. Bliedtner
6. 12. 2000 Diplommathematiker mit Nebenfach Theoretische Physik
- Seit 1. 9. 2001 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik in Frankfurt in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. R. Bieri
28. 12. 2001 Hochzeit mit Ulrike Weil
6. 7. 2002 Kirchliche Trauung
21. 10. 2004 Geburt meines Sohnes Björn Johannes

Meine akademischen Lehrer waren: Prof. Dr. Robert Bieri, Prof. Dr. Helmut Behr und Prof. Dr. Jürgen Bliedtner.

Viel gelernt habe ich auch von Prof. Dr. Friedrich W. Bauer, Dr. Jürgen Bauer, Prof. Dr. Johann Baumeister, Dr. Björn Brill, Prof. Dr. Kai-Uwe Bux, Dr. Markus Denzer, Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner, Prof. Dr. Jens Harlander, Prof. Dr. Rainer-J. Jelitto, Prof. Dr. Werner Martiensen, Dr. Holger Meinert, Mahmud Moghaddam, Prof. Dr. Walter Oevel, Dr. Bernd Schulz, Prof. Dr. Malte Sieveking, Alexander Spahn, Prof. Dr. Anton Wakolbinger und von meiner Frau Dipl. math. Ulrike Weil-Rehn.

(Wolf Hanno Rehn)
Großkrotzenburg, den 2. Juli 2007