

Diplomarbeit

Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen

Johannes Cuno

Januar 2011

Fachbereich Informatik und Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

VORWORT

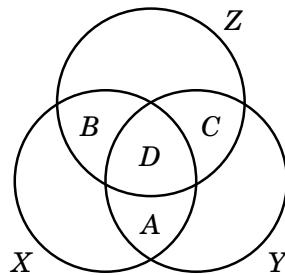
*Schläft ein Lied in allen Dingen,
Die da träumen fort und fort,
Und die Welt hebt an zu singen,
Triffst du nur das Zauberwort.*

Joseph Freiherr von Eichendorff

Gegenstand der Arbeit

Der zentrale Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind Dreiecke von Gruppen und deren Colimites. Unter einem Dreieck von Gruppen, nennen wir es Δ , können wir uns eine Menge M vorstellen, die von drei Gruppen überdeckt wird, d. h. $M = X \cup Y \cup Z$, und zwar so, dass sich je zwei dieser Gruppen in einer gemeinsamen Untergruppe schneiden.

Wir bezeichnen die drei Gruppen X, Y, Z als Eckengruppen und die drei Schnittmengen $A = X \cap Y, B = X \cap Z, C = Y \cap Z$ als Kantengruppen. Die Schnittmenge $D = X \cap Y \cap Z$ ist eine gemeinsame Untergruppe aller drei Eckengruppen, wir bezeichnen sie schließlich als Zweizellengruppe.



Vorwort

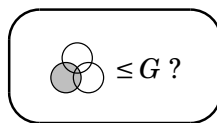
Einen Colimes G von Δ erhalten wir, indem wir zunächst das freie Produkt \tilde{G} der drei Eckengruppen bilden und anschließend zu einer Faktorgruppe $G = \tilde{G}/N$ übergehen. Wenn $\iota_X : X \hookrightarrow \tilde{G}$, $\iota_Y : Y \hookrightarrow \tilde{G}$, $\iota_Z : Z \hookrightarrow \tilde{G}$ die Homomorphismen der drei Eckengruppen in das freie Produkt \tilde{G} sind, dann können wir den Normalteiler N wie folgt beschreiben:

$$N = \langle\langle \iota_X(a) \cdot \iota_Y(a)^{-1}, \iota_X(b) \cdot \iota_Z(b)^{-1}, \iota_Y(c) \cdot \iota_Z(c)^{-1} \mid a \in A, b \in B, c \in C \rangle\rangle \leq \tilde{G}$$

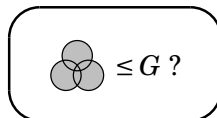
Im freien Produkt \tilde{G} identifizieren wir also, salopp gesagt, die drei Eckengruppen entlang der entsprechenden Kantengruppen. Die drei Homomorphismen $\varphi_X : X \hookrightarrow \tilde{G} \twoheadrightarrow \tilde{G}/N = G$, $\varphi_Y : Y \hookrightarrow \tilde{G} \twoheadrightarrow \tilde{G}/N = G$, $\varphi_Z : Z \hookrightarrow \tilde{G} \twoheadrightarrow \tilde{G}/N = G$, setzen sich dann zu einer Abbildung φ_M der Menge M in den Colimes G zusammen.

Fragen und Antworten

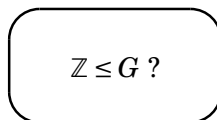
Nach einer sorgfältigen Einführung im ersten Kapitel, setzen wir uns im zweiten und dritten Kapitel mit den folgenden vier Fragen auseinander:



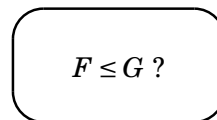
Sind die Homomorphismen der Eckengruppen in den Colimes G injektiv?



Ist die Abbildung der Menge M in den Colimes G injektiv?





Enthält der Colimes G ein Element unendlicher Ordnung?



Enthält der Colimes G eine nichtabelsche freie Untergruppe?

Es stellt sich heraus, dass es sphärische Dreiecke von Gruppen gibt, für die wir alle vier Fragen mit „Nein!“ beantworten müssen. Wir beschränken uns daher auf nichtsphärische Dreiecke von Gruppen: Sie erlauben geometrisch motivierte Beweise, mit deren Hilfe wir die vier Fragen weitgehend mit „Ja!“ beantworten können.

In der nun folgenden Tabelle¹ sind einige der im zweiten und dritten Kapitel behandelten Sätze zusammengefasst. Das Symbol ✓ bedeutet „Ja, die Aussage stimmt!“, das Symbol ✗ bedeutet „Nein, die Aussage stimmt i. A. nicht!“.

	Δ hyperbolisch	Δ euklidisch	Δ sphärisch
 $\leq G$?	Satz 2.9 ✓		Satz 1.13 ✗
 $\leq G$?	Satz 2.12 ✓		
$\mathbb{Z} \leq G$?	Δ nichtausgeartet: D trivial: Satz 3.1 ✓ D beliebig: Satz 3.9 ✓	Δ nichtausgeartet: D trivial: Satz 3.1 ✓ D beliebig: Satz 3.9 ✓	
$F \leq G$?	Δ nichtausgeartet: D trivial: Satz 3.2 ✓ D beliebig: Satz 3.11 ✓	Δ nichtausgeartet: Satz 4.1 ✗	

Da es offensichtlich nichtsphärische Dreiecke von Gruppen gibt, deren Colimites keine nichtabelsche freie Untergruppe enthalten, beschäftigen wir uns im vierten Kapitel mit der Frage, ob die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen zumindest die Tits-Alternative erfüllt. Nach einer Bemerkung von Kopteva und Williams in [KW08] ist diese Frage bis heute noch nicht beantwortet worden.²

In den Diplomarbeiten [Lor95] von Steffen Lorenz und [Bre04] von Dirk Brendel ist es bereits gelungen, die Existenz nichtabelscher freier Untergruppen in den Colimites vieler nichtsphärischer und insbesondere euklidischer Dreiecke von Gruppen nachzuweisen.

¹Die Tabelle verdient einige Erläuterungen: **Satz 1.13** ist ein klassisches Beispiel. **Satz 2.9** ist in [Sta91] zu finden. Der hier vorgestellte Beweis orientiert sich zwar an dieser Vorlage, ist aber etwas elementarer. **Satz 2.12** ist in dieser Form weder in [Sta91] noch in [Bri91] zu finden, doch ergibt er sich aus den dort angestellten Überlegungen. Der hier vorgestellte direkte Beweis verwendet die im Beweis von Satz 2.9 eingeführte Technik weiter. **Satz 3.1** und **Satz 3.2** zitieren wir nur aus [ERST00] und [HK06], da es uns gelingt, diese in **Satz 3.9** und **Satz 3.11** zu verallgemeinern. Dabei können wir die Beweisideen aus [ERST00] und [HK06] weitgehend übernehmen und müssen lediglich bei deren technischer Umsetzung etwas behutsamer zu Werke gehen. **Satz 4.1** ist wiederum ein klassisches Beispiel.

²Kopteva und Williams beziehen sich in ihrer Bemerkung auf [HK06] und haben daher vermutlich nur die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-ecken-ausgearteter Dreiecke von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D vor Augen.

Vorwort

Wir geben zunächst einen ganz kurzen Einblick in deren Argumentation und versuchen anschließend, die Technik weiter auszureizen und so etwas Licht ins Dunkel zu bringen.

In der nun folgenden Tabelle sind einige der im vierten Kapitel behandelten Sätze, wie gewohnt, zusammengefasst:

Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen			
Tits-Alternative ?	Die gesamte Klasse ohne weitere Einschränkungen	Satz 4.14 ✗	
	Δ nicht-ecken-ausgeartet	D beliebig	Satz 4.15 ✗
		D trivial	Satz 4.16 ✗
	Δ nicht-kanten-ausgeartet	D beliebig	Satz 4.15 ✗
		D trivial	Satz 4.16 ✗
	Δ nicht-winkel-ausgeartet	D beliebig	Satz 4.17 ✗
		D trivial	Satz 4.37 ✓
		D ist endlich erzeugt und enthält entweder F oder ist virtuell auflösbar	Satz 4.44 ✓
	Jede einzelne der beteiligten Gruppen ist endlich erzeugt und enthält entweder F oder ist virtuell auflösbar		Satz 4.45 ✓

Dankesworte

Ich danke Herrn Prof. Dr. Robert Bieri, der mich für Dreiecke von Gruppen begeisterte und mir immer für Gespräche zur Verfügung stand. Er gab mir den Freiraum, eigene Fragestellungen zu entwickeln, und sah, vermutlich schweren Herzens, mit an, wie ich mich schließlich auch voll und ganz deren Beantwortung widmete.

Ich danke den Mitgliedern und Gästen der Arbeitsgemeinschaft, von denen ich im Laufe der Semester viele wertvolle Hinweise erhielt. Aus diesem Kreise möchte ich besonders Herrn Dr. Pascal Schweitzer und Herrn Dipl.-Math. Benno Kuckuck hervorheben.

Vorwort

Meiner Schwester Frau Marie Cuno danke ich für die moralische Unterstützung, ebenso meinen treuen Begleitern Herrn Dipl.-Math. Ralf Lehnert, Herrn Kolja Hept und Herrn Stefan Lell.

Schließlich verneige ich mich vor Herrn Dr. Jörg Lehnert, dessen Engagement für mich und meine Arbeit außergewöhnlich war. Er ließ sich Woche für Woche vorbehaltlos auf meine Überlegungen ein, formulierte begründete Kritik und gab wichtige Impulse.

Frankfurt am Main

Januar 2011

Johannes Cuno

Vorwort

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einführung	1
1.1	Der Colimes eines Diagramms von Gruppen	1
1.2	Ein erstes Beispiel	5
1.3	Diagramme von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$	8
1.3.1	Eine vereinfachte Präsentation des Colimes	8
1.3.2	Das freie Produkt mit Amalgam	9
1.3.3	Eine geometrische Realisierung des Standardbaumes	11
1.4	Dreiecke von Gruppen	12
1.4.1	Die Definition eines Dreiecks von Gruppen	12
1.4.2	Ein klassisches Beispiel	15
2	Realisierbarkeit	19
2.1	Der Gersten-Stallings-Winkel	19
2.1.1	Die Definition des Gersten-Stallings-Winkels	19
2.1.2	Die Krümmung von Dreiecken von Gruppen	21
2.2	Der Einbettungssatz für die Eckengruppen	22
2.3	Der Einbettungssatz für die Menge $M = X \cup Y \cup Z$	38
2.4	Über das Verhältnis zwischen den Sätzen 2.9 und 2.12	44
3	Freie Untergruppen	47
3.1	Die Vorgeschichte	47

Inhaltsverzeichnis

3.2	Das Gewichtslemma	48
3.2.1	Einige wichtige Begriffe	48
3.2.2	Die Formulierung und der Beweis des Gewichtslemmas	50
3.3	Die Verallgemeinerung von Satz 3.1	54
3.4	Die Verallgemeinerung von Satz 3.2	73
4	Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative	79
4.1	Das Erzeugnis dreier Spiegelungen	80
4.2	Die Tits-Alternative	88
4.2.1	Die Definition der Tits-Alternative	88
4.2.2	Nichtsphärische verallgemeinerte Tetraedergruppen	89
4.2.3	Sphärische verallgemeinerte Tetraedergruppen	91
4.3	Drei verschiedene Ausartungsbegriffe	91
4.4	Einige negative Resultate zur Tits-Alternative	93
4.4.1	Der allgemeine Fall	93
4.4.2	Eine erste Einschränkung	94
4.4.3	Eine zweite Einschränkung	96
4.5	Die Arbeiten von Lorenz und Brendel	98
4.6	Der Ansatz von Lorenz und Brendel	99
4.6.1	Das Erzeugnis der Kantengruppen	99
4.6.2	Der Simplicialkomplex K	100
4.6.3	Die intrinsische Metrik auf $ K $	102
4.6.4	Lokale und globale Geodäten in $ K $	105
4.6.5	Die Argumentation von Lorenz und Brendel	111
4.7	Zum Schluss noch drei positive Resultate	112
4.7.1	Ein vorbereitendes Lemma	112
4.7.2	Das erste positive Resultat	120
4.7.3	Einige weitere vorbereitende Lemmata	124
4.7.4	Das zweite und dritte positive Resultat	131
	Erklärung	139
	Literaturverzeichnis	141
	Index	143

KAPITEL 1

Einführung

1.1 Der Colimes eines Diagramms von Gruppen

Definition 1.1 (Colimes eines Diagramms von Gruppen) Sei Δ ein Diagramm von Gruppen, also eine nichtleere Familie $(G_i)_{i \in I}$ von Gruppen, in der jedem Paar $(i, j) \in I \times I$ eine Teilmenge $H_{ij} \subseteq \text{Hom}(G_i, G_j)$ zugeordnet ist. Ein Colimes von Δ besteht aus einer Gruppe G und einer Familie $(\varphi_i : G_i \rightarrow G)_{i \in I}$ von Homomorphismen, sodass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- **Verträglichkeitsbedingung:**

$$\forall (i, j) \in I \times I : \forall f \in H_{ij} : \varphi_i = \varphi_j \circ f$$

Das bedeutet, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{f} & G_j \\ & \searrow \varphi_i & \swarrow \varphi_j \\ & & G \end{array}$$

- **Universalitätsbedingung:**

Erfüllen eine Gruppe \tilde{G} und eine Familie $(\tilde{\varphi}_i : G_i \rightarrow \tilde{G})_{i \in I}$ von Homomorphismen die

Kapitel 1 Einführung

Verträglichkeitsbedingung, so gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \tilde{G}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in I : \tilde{\varphi}_i = \alpha \circ \varphi_i$$

Das bedeutet, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc}
 & G_i & \\
 \varphi_i \swarrow & & \searrow \tilde{\varphi}_i \\
 G & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{G}
 \end{array}$$

Genau genommen ist ein Colimes also ein Paar, bestehend aus einer Gruppe und einer Familie von Homomorphismen. Wenn wir in der vorliegenden Arbeit von einem Colimes sprechen, dann meinen wir nicht das Paar sondern allein die Gruppe.

Wir können die beiden Bedingungen wie folgt interpretieren: Ist $f \in H_{i,j}$, so garantiert die Verträglichkeitsbedingung, dass jedes Element $g \in G_i$ mit seinem Bild $f(g) \in G_j$ auf ein gemeinsames Element des Colimes abgebildet wird. Die beiden Elemente werden im Colimes also miteinander identifiziert. Die Universalitätsbedingung garantiert nun, dass es im Colimes nur die durch die Verträglichkeitsbedingung erzwungenen Identifikationen gibt. Mehr noch! Es gilt der folgende Satz:

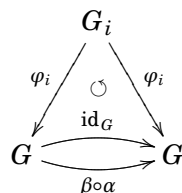
Satz 1.2 *Der Colimes ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei Δ ein Diagramm von Gruppen (genau wie in Definition 1.1) und seien sowohl G , mit $(\varphi_i : G_i \rightarrow G)_{i \in I}$, als auch \tilde{G} , mit $(\tilde{\varphi}_i : G_i \rightarrow \tilde{G})_{i \in I}$, Colimites von Δ . Es gibt also eindeutig bestimmte Homomorphismen $\alpha : G \rightarrow \tilde{G}$ und $\beta : \tilde{G} \rightarrow G$ mit der Eigenschaft, dass, für jedes $i \in I$, die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc}
 & G_i & \\
 \varphi_i \swarrow & & \searrow \tilde{\varphi}_i \\
 G & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{G}
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & G_i & \\
 \tilde{\varphi}_i \swarrow & & \searrow \varphi_i \\
 \tilde{G} & \xrightarrow{\beta} & G
 \end{array}$$

Setzen wir die Diagramme paarweise zusammen, so erkennen wir, dass neben $\text{id}_G : G \rightarrow G$ auch der Homomorphismus $\beta \circ \alpha : G \rightarrow G$ die Eigenschaft hat, dass, für jedes $i \in I$, das

folgende Diagramm kommutativ ist:



Wegen der Universalitätsbedingung gibt es aber nur einen solchen Homomorphismus, es muss also $\beta \circ \alpha = \text{id}_G$ gelten. Analog zeigt man $\alpha \circ \beta = \text{id}_{\tilde{G}}$. Damit ist schließlich bewiesen, dass $\alpha : G \rightarrow \tilde{G}$ und $\beta : \tilde{G} \rightarrow G$ Isomorphismen sind. \square

Satz 1.3 *Der Colimes existiert.*

Hinweis. Wenn eine Gruppe G zusammen mit einer Präsentation $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ gegeben ist, dann erlauben wir uns, die Elemente von G durch Wörter über $\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$ zu beschreiben. Das erfolgt in der Regel stillschweigend. Um an einzelnen Stellen deutlich zu machen, dass wir mit Elementen der Gruppe G arbeiten, schreiben wir „ $=_G$ “ anstelle von „ $=$ “.

Beweis. Sei Δ ein Diagramm von Gruppen (genau wie in Definition 1.1). Die einzelnen Gruppen seien durch Präsentierungen beschrieben, für jedes $i \in I$ sei $G_i \cong \langle \mathcal{X}_i | \mathcal{R}_i \rangle$. Wir können o. B. d. A. davon ausgehen, dass die Erzeugendenmengen \mathcal{X}_i paarweise disjunkt sind. Nun betrachten wir die folgende Gruppe G :

$$G := \left\langle \bigcup_{i \in I} \mathcal{X}_i \mid \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i, \{x = \widetilde{f(x)} \mid (i, j) \in I \times I, f \in H_{ij}, x \in \mathcal{X}_i\} \right\rangle$$

Das Symbol $\widetilde{f(x)}$ steht in dieser Präsentation für ein beliebiges Wort über $\mathcal{X}_j^+ \cup \mathcal{X}_j^-$, das das Element $f(x) \in G_j$ beschreibt. Man kann mit Hilfe von Tietze-Transformationen leicht einsehen, dass G unabhängig von der speziellen Wahl dieses Wortes ist.

Nun konstruieren wir, für jedes $i \in I$, einen Homomorphismus $\varphi_i : G_i \rightarrow G$, und zwar auf die nahe liegende Weise: Für jedes Erzeugende $x \in \mathcal{X}_i$ gelte $\varphi_i(x) := x$.

Um zu zeigen, dass sich diese Zuordnung zu einem Homomorphismus fortsetzen lässt, genügt es, zu beobachten, dass, salopp gesagt, die buchstabenweise berechneten Bilder der definierenden Relationen \mathcal{R}_i stets das neutrale Element der Gruppe G ergeben, und

Kapitel 1 Einführung

anschließend den Satz von Dyck anzuwenden. Wir stellen also fest, dass tatsächlich für jede definierende Relation $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}_i$ gilt:

$$\varphi_i(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \varphi_i(x_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \varphi_i(x_n)^{\varepsilon_n} =_G x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n} =_G 1$$

Zunächst überlegen wir uns, dass G , mit $(\varphi_i : G_i \rightarrow G)_{i \in I}$, die Verträglichkeitsbedingung erfüllt, anschließend überprüfen wir die Universalitätsbedingung:

- Seien $(i, j) \in I \times I$ und $f \in H_{ij}$. Um zu zeigen, dass die Gleichung $\varphi_i = \varphi_j \circ f$ erfüllt ist, rechnen wir sie für ein beliebiges Erzeugendes $x \in \mathcal{X}_i$ nach:

$$\varphi_i(x) =_G x =_G \widetilde{f(x)} =_G \varphi_j(\widetilde{f(x)}) =_G \varphi_j \circ f(x)$$

- Seien \tilde{G} eine Gruppe und $(\tilde{\varphi}_i : G_i \rightarrow \tilde{G})_{i \in I}$ eine Familie von Homomorphismen, die die Verträglichkeitsbedingung erfüllen. Ein Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow \tilde{G}$ erfüllt die Gleichung $\tilde{\varphi}_i = \alpha \circ \varphi_i$ genau dann, wenn für jedes Erzeugende $x \in \mathcal{X}_i$ gilt:

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \underbrace{\alpha \circ \varphi_i(x)}_{\alpha(x)}$$

Bei der Konstruktion von α sind wir also gezwungen, die Bilder der Erzeugenden entsprechend festzulegen: Für jedes Erzeugende $x \in \bigcup \mathcal{X}_i$ gelte, je nach dem, zu welcher Menge \mathcal{X}_i es gehört, $\alpha(x) := \tilde{\varphi}_i(x)$.

Um zu zeigen, dass sich diese Zuordnung zu einem Homomorphismus fortsetzen lässt, beobachten wir, dass auch in diesem Fall die Voraussetzungen des Satzes von Dyck erfüllt sind:

- Für $i \in I$ und $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}_i$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \alpha(x_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \alpha(x_n)^{\varepsilon_n} &=_{\tilde{G}} \tilde{\varphi}_i(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \tilde{\varphi}_i(x_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \tilde{\varphi}_i(x_n)^{\varepsilon_n} \\ &=_{\tilde{G}} \tilde{\varphi}_i(x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n}) \\ &=_{\tilde{G}} \tilde{\varphi}_i(1) \\ &=_{\tilde{G}} 1 \end{aligned}$$

– Für $(i, j) \in I \times I$, $f \in H_{ij}$, $x \in \mathcal{X}_i$ und $\widetilde{f}(x) = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &=_{\bar{G}} \tilde{\varphi}_i(x) \\ &=_{\bar{G}} \tilde{\varphi}_j \circ f(x) \\ &=_{\bar{G}} \tilde{\varphi}_j(x_1^{\varepsilon_1} \cdot x_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\varepsilon_n}) \\ &=_{\bar{G}} \tilde{\varphi}_j(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \tilde{\varphi}_j(x_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \tilde{\varphi}_j(x_n)^{\varepsilon_n} \\ &=_{\bar{G}} \alpha(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \alpha(x_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \alpha(x_n)^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

□

1.2 Ein erstes Beispiel

Wir betrachten nun ein Diagramm von Gruppen, das übersichtlich ist und sich dennoch als ein besonderer Leckerbissen erweisen wird:

$$\Delta_1 : \mathbb{Z}_4 \xleftarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}_6$$

Satz 1.4 *Der Colimes von Δ_1 ist isomorph zur Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Wir wählen zunächst Präsentierungen der einzelnen Gruppen, zum Beispiel $\mathbb{Z}_2 \cong \langle a \mid a^2 \rangle$, $\mathbb{Z}_4 \cong \langle x \mid x^4 \rangle$ und $\mathbb{Z}_6 \cong \langle y \mid y^6 \rangle$, und geben anschließend mit deren Hilfe den Colimes G von Δ_1 an:

$$G \cong \langle a, x, y \mid a^2, x^4, y^6, a = x^2, a = y^3 \rangle$$

Den Isomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ konstruieren wir wie folgt:

$$\rho(a) := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(y) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Um zu zeigen, dass sich diese Zuordnung zu einem Homomorphismus fortsetzen lässt, genügt es, nachzurechnen, dass die Gleichungen $\rho(a)^2 = 1$, $\rho(x)^4 = 1$, $\rho(y)^6 = 1$, $\rho(a) = \rho(x)^2$ und $\rho(a) = \rho(y)^3$ erfüllt sind, und anschließend den Satz von Dyck anzuwenden.

1. Behauptung: Der Homomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist surjektiv.

Wir betrachten die folgenden beiden Matrizen:

$$A := \rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \rho(y^2x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kapitel 1 Einführung

Um die Surjektivität von ρ zu zeigen, überlegen wir uns, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von A und B erzeugt wird. Hierfür wählen wir eine beliebige Matrix $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wir versuchen nun, M zur Einheitsmatrix $E_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ umzuformen, indem wir nach und nach Potenzen von A und B von links an M heranmultiplizieren. Unser erstes Ziel dabei ist, M so umzuformen, dass ein Eintrag in der ersten Spalte gleich 0 ist. Nehmen wir also an, sowohl a als auch c sind von 0 verschieden.

Wenn $|a| < |c|$ ist, dann ersetzen wir die Matrix M durch $A \cdot M$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Somit gilt jedenfalls $|a| \geq |c|$. Durch Division mit Rest finden wir $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq |\mu| < |c|$, sodass $a = \lambda c + \mu$ gilt. Wir ersetzen die Matrix M durch $B^{-\lambda} \cdot M$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow B^{-\lambda} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & b - \lambda d \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dieses Verfahren wiederholen wir nun so lange, bis $a = 0$ oder $c = 0$ ist. Da sich die Summe $|a| + |c| \geq 0$ bei jedem Durchlauf um mindestens 1 verringert, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab.

Wenn $a = 0$ ist, dann ersetzen wir die Matrix M durch $A \cdot M$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow A \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Somit gilt jedenfalls $c = 0$. Da, nach wie vor, $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist, sind entweder $a = d = 1$ oder $a = d = -1$. Im letztgenannten Fall ersetzen wir die Matrix M durch $A^2 \cdot M$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftarrow A^2 \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich ist M von der folgenden Form:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Und es gilt tatsächlich:

$$B^{-b} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Daraus folgt, dass sich die ursprüngliche Matrix M als Produkt von Potenzen von A und B darstellen lässt. Also wird $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ von A und B erzeugt.

2. *Behauptung*: Der Homomorphismus $\rho: G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist injektiv.

Angenommen, es gibt ein nichttriviales Element $g \in \ker(\rho)$. Wir können g wie folgt durch ein Wort über a , x und y sowie deren Inversen beschreiben:

$$g =_G a^r \cdot y^{s_1} \cdot x \cdot y^{s_2} \cdot x \cdot \dots \cdot y^{s_{n-1}} \cdot x \cdot y^{s_n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$,

$$r \in \{0, 1\},$$

$$s_1, s_n \in \{0, 1, 2\},$$

$$s_2, s_3, \dots, s_{n-1} \in \{1, 2\}.$$

Da keines der sechs Wörter, die man mit $n = 1$ bilden kann, ein nichttriviales Element des Kerns von ρ beschreibt, können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass $n \geq 2$ ist. Außerdem können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass sowohl s_1 als auch s_n von 0 verschieden sind.

Wenn nämlich $s_1 = 0$ oder $s_n = 0$ wären, dann fänden wir durch Konjugation von g mit einer geeigneten Potenz von y ein nichttriviales Element $g' \in \ker(\rho)$, sodass gilt:

$$g' =_G a^{r'} \cdot y^{s'_1} \cdot x \cdot y^{s_2} \cdot x \cdot \dots \cdot y^{s_{n-1}} \cdot x \cdot y^{s'_n}$$

mit $r' \in \{0, 1\}$,

$$s'_1, s'_n \in \{1, 2\}.$$

Gegebenenfalls können wir also g durch g' ersetzen. Nun verwenden wir ein sogenanntes „Ping-Pong-Argument“, um die Annahme $g \in \ker(\rho)$ zu einem Widerspruch zu führen. Bekanntermaßen operiert $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der Menge $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dabei handelt es sich um eine Linksoperation $\bullet: \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \times \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ durch Möbiustransformationen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet z := \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$$

Kapitel 1 Einführung

An dieser Stelle überlassen wir den Nachweis, dass es sich tatsächlich um eine Operation einer Gruppe auf einer Menge handelt, dem Leser als Fingerübung. Uns interessiert, wie die Elemente $\rho(a)$, $\rho(x)$, $\rho(y)$ und $\rho(y^2)$ operieren:

$$\begin{aligned} \rho(a) \bullet z &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \bullet z = \frac{-z}{-1} & \Rightarrow \rho(a) \bullet \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^+ \\ \rho(x) \bullet z &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet z = \frac{-1}{z} & \Rightarrow \rho(x) \bullet \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}^- \\ \rho(y) \bullet z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet z = \frac{1}{-z+1} & \Rightarrow \rho(y) \bullet \mathbb{R}^- \subseteq \mathbb{R}^+ \\ \rho(y^2) \bullet z &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bullet z = \frac{-z+1}{-z} & \Rightarrow \rho(y^2) \bullet \mathbb{R}^- \subseteq \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\rho(g) \bullet \mathbb{R}^- = \rho(a^r) \cdot \rho(y^{s_1}) \cdot \rho(x) \cdot \rho(y^{s_2}) \cdot \rho(x) \cdot \dots \cdot \rho(y^{s_{n-1}}) \cdot \rho(x) \cdot \rho(y^{s_n}) \bullet \mathbb{R}^- \subseteq \mathbb{R}^+$$

Das Element $\rho(g)$ operiert also nichttrivial, es kann sich daher nicht um das neutrale Element handeln. Folglich ist $g \notin \ker(\rho)$, im Widerspruch zur Annahme. ζ Es folgt die Behauptung. □

1.3 Diagramme von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$

Wie nehmen das Beispiel zum Anlass, uns noch ein wenig allgemeiner mit Diagrammen von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$ zu beschäftigen. Um dabei eine möglichst intuitive Notation zu verwenden, bezeichnen wir den Homomorphismus $A \rightarrow X$ mit φ_{AX} und den Homomorphismus $A \rightarrow Y$ mit φ_{AY} .

1.3.1 Eine vereinfachte Präsentation des Colimes

Das folgende Lemma besagt, dass wir die Erzeugenden von A gar nicht benötigen, um den Colimes durch eine Präsentation zu beschreiben:

Lemma 1.5 *Sei Δ ein Diagramm von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$. Die Gruppen seien durch Präsentierungen mit paarweise disjunkten Erzeugendenmengen beschrieben, seien $A \cong \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \rangle$, $X \cong \langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \rangle$ und $Y \cong \langle \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \rangle$. Dann gilt für den Colimes G von Δ :*

$$G \cong \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{ \overline{\varphi_{AX}(a)} = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \} \rangle$$

Beweis. Mit Hilfe von Tietze-Transformationen zeigen wir:

$$\begin{aligned}
G &\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle \\
&\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle \\
&\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, \overline{\varphi_{AX}(a)} = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle \\
&\cong \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{\overline{\varphi_{AX}(a)} = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle
\end{aligned}$$

Die Tietze-Transformation von der ersten zur zweiten Zeile verdient eine Begründung: Wir müssen uns davon überzeugen, dass die definierenden Relationen $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ bereits aus den übrigen definierenden Relationen folgen. Sei also H die durch die Präsentation in der zweiten Zeile gegebene Gruppe. Dann gilt für jedes $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n} \in \mathcal{R}_{\mathcal{A}}$:

$$a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n} =_H \overline{\varphi_{AX}(a_1)^{\varepsilon_1}} \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_2)^{\varepsilon_2}} \cdot \dots \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_n)^{\varepsilon_n}}$$

Doch in der Gruppe X gilt:

$$\begin{aligned}
\overline{\varphi_{AX}(a_1)^{\varepsilon_1}} \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_2)^{\varepsilon_2}} \cdot \dots \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_n)^{\varepsilon_n}} &=_X \varphi_{AX}(a_1)^{\varepsilon_1} \cdot \varphi_{AX}(a_2)^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \varphi_{AX}(a_n)^{\varepsilon_n} \\
&=_X \varphi_{AX}(a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n}) \\
&=_X \varphi_{AX}(1) \\
&=_X 1
\end{aligned}$$

Also folgt bereits aus definierenden Relationen $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$:

$$\overline{\varphi_{AX}(a_1)^{\varepsilon_1}} \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_2)^{\varepsilon_2}} \cdot \dots \cdot \overline{\varphi_{AX}(a_n)^{\varepsilon_n}} =_H 1$$

□

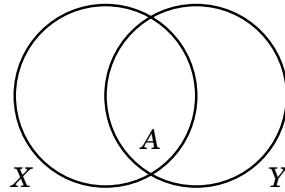
1.3.2 Das freie Produkt mit Amalgam

Es wäre töricht, in diesem Zusammenhang nicht auf das freie Produkt mit Amalgam, ein wichtiges Konstruktionsprinzip, einzugehen:

Definition 1.6 (Freies Produkt mit Amalgam) Sei Δ ein Diagramm von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$. Wenn die Homomorphismen φ_{AX} und φ_{AY} injektiv sind, dann heißt der Colimes G von Δ das freie Produkt von X und Y mit Amalgam A , kurz $G = X *_A Y$.

Kapitel 1 Einführung

Oft nimmt man die Identifikationen der Elemente von A mit ihren Bildern in X und Y vorweg und fasst A , wie die folgende Abbildung suggeriert, als gemeinsame Untergruppe von X und Y auf:



Wir zitieren nun zwei Sätze, die wichtige Eigenschaften des freien Produkts mit Amalgam zusammenfassen:

Satz 1.7 (Normalformensatz für freie Produkte mit Amalgam) Sei $G = X *_A Y$ und seien $\varphi_A : A \rightarrow G$, $\varphi_X : X \rightarrow G$ und $\varphi_Y : Y \rightarrow G$ die drei Homomorphismen der einzelnen Gruppen in den Colimes. Aufgrund der Verträglichkeitsbedingung setzen sie sich zu einer wohldefinierten Abbildung φ_M der Menge $M = X \cup Y$ (mit $X \cap Y = A$) in den Colimes zusammen. Es gelten die folgenden Aussagen:

- φ_A , φ_X und φ_Y sind injektiv.
- φ_M ist injektiv.
- Wenn S und T vollständige Repräsentantensysteme der echten Rechtsnebenklassen¹ von $A \leq X$ und $A \leq Y$ sind, dann kann jedes Element $g \in G$ auf eindeutige Weise geschrieben werden als:

$$g =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

$$\text{mit } n \in \mathbb{N},$$

$$u_1 \in \varphi_M(A),$$

$$u_2, u_3, \dots, u_n \text{ abwechselnd in } \varphi_M(S) \text{ und } \varphi_M(T).$$

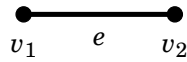
Beweis. Siehe zum Beispiel [CgRR08, Satz 5.4]. □

Es sei darauf hingewiesen, dass wir bereits im Beweis von Satz 1.4, ohne das Kind beim Namen zu nennen, mit einer solchen Normalform gearbeitet haben.

¹Wir bezeichnen eine Nebenklasse dann als echt, wenn sie nicht das neutrale Element enthält.

Satz 1.8 (Standardbaum für freie Produkte mit Amalgam) Sei $G = X *_A Y$. Es gibt einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Baum T , auf dem G mit den folgenden Eigenschaften operiert:

- Ein Teilbaum $S \subseteq T$ der folgenden Form ist ein Fundamentalbereich der Operation:



- Für die Stabilisatoren der Ecken v_1 und v_2 und der Kante e gilt:

$$\text{Stab}_G(v_1) = \text{im}(\varphi_X)$$

$$\text{Stab}_G(v_2) = \text{im}(\varphi_Y)$$

$$\text{Stab}_G(e) = \text{im}(\varphi_A)$$

Beweisidee. Man kann den Baum T wie folgt konstruieren: Die Eckenmenge $\text{ver}(T)$ sei $(G/\text{im}(\varphi_X)) \sqcup (G/\text{im}(\varphi_Y))$, die Kantenmenge $\text{edg}(T)$ sei $G/\text{im}(\varphi_A)$. Jede Kante $g \cdot \text{im}(\varphi_A)$ verbinde die beiden Ecken $g \cdot \text{im}(\varphi_X)$ und $g \cdot \text{im}(\varphi_Y)$ miteinander. Es entsteht ein Baum, auf dem G durch Linksmultiplikation wie gewünscht operiert.

Beweis. Siehe zum Beispiel [Ser80, Chapter I, Theorem 7]. □

1.3.3 Eine geometrische Realisierung des Standardbaumes

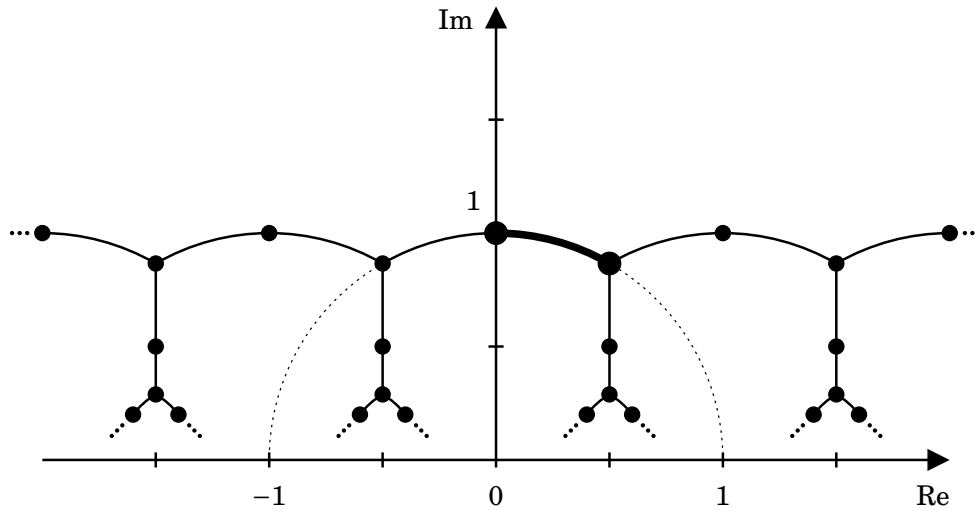
Noch einmal betrachten wir das Beispiel Δ_1 mit dem Colimes $G = \mathbb{Z}_4 *_2 \mathbb{Z}_6$. In diesem Fall können wir den Standardbaum für freie Produkte mit Amalgam auch auf eine ganz andere Weise finden. Aus dem Beweis von Satz 1.4 geht hervor, dass G , vermittelt durch den Isomorphismus $\rho : G \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, auf \hat{C} operiert. Wir definieren nun:

$$v_1 := \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_2 := \exp\left(i \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$

$$e := \left\{ \exp(i \cdot \vartheta) \mid \frac{\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Der so definierte Kreisbogen e bildet zusammen mit seinen beiden Endpunkten v_1 und v_2 die geometrische Realisierung $|S| \subseteq \hat{C}$ eines Teilbaumes S . Man kann nun zeigen, dass die Bahn $|T| := G \bullet |S| \subseteq \hat{C}$ die geometrische Realisierung eines Baumes T ist, auf dem G wie gewünscht operiert:

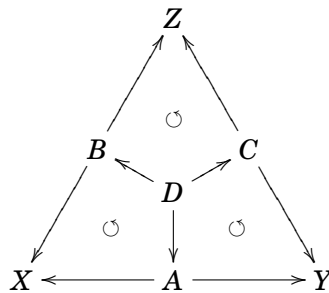


1.4 Dreiecke von Gruppen

Wir werden uns nun einer weiteren Klasse von Diagrammen von Gruppen zuwenden, den Dreiecken von Gruppen. Sie und ihre Colimites sind der zentrale Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

1.4.1 Die Definition eines Dreiecks von Gruppen

Definition 1.9 (Dreieck von Gruppen) Sei Δ ein Diagramm von Gruppen der folgenden Form:



Wir verwenden die im vergangenen Abschnitt eingeführte Notation zur Bezeichnung der Homomorphismen weiter. Die Gruppen X , Y und Z bezeichnen wir als „Eckengruppen“, die Gruppen A , B und C als „Kantengruppen“ und die Gruppe D als „Zweizellengruppe“.

Wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind, dann heißt Δ ein Dreieck von Gruppen:

- Δ ist ein kommutatives Diagramm.

- Alle Homomorphismen von Δ sind injektiv.
- In jeder Eckengruppe schneiden sich die Bilder der angrenzenden Kantengruppen genau im Bild der Zweizellengruppe.

Das bedeutet konkret:

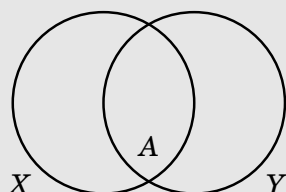
$$\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \text{im}(\varphi_{AX} \circ \varphi_{DA}) = \text{im}(\varphi_{BX} \circ \varphi_{DB})$$

$$\text{im}(\varphi_{AY}) \cap \text{im}(\varphi_{CY}) = \text{im}(\varphi_{AY} \circ \varphi_{DA}) = \text{im}(\varphi_{CY} \circ \varphi_{DC})$$

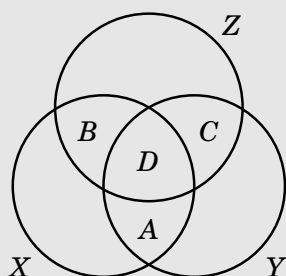
$$\text{im}(\varphi_{BZ}) \cap \text{im}(\varphi_{CZ}) = \text{im}(\varphi_{BZ} \circ \varphi_{DB}) = \text{im}(\varphi_{CZ} \circ \varphi_{DC})$$

An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, dass manche Autoren den Begriff des Dreiecks von Gruppen etwas weiter fassen, unsere Definition stammt aus [Sta91].

Motivation. Im vergangenen Abschnitt haben wir A als gemeinsame Untergruppe von X und Y aufgefasst und die Menge $M = X \cup Y$ (mit $X \cap Y = A$) betrachtet:



Nun wollen wir die Anzahl der Gruppen erhöhen und auf diese Weise eine Variante des freien Produkts mit Amalgam konstruieren. Ein Dreieck von Gruppen erlaubt es uns, eine entsprechende Menge $M = X \cup Y \cup Z$, bestehend aus drei Gruppen X , Y und Z , in der alle Schnittmengen $X \cap Y = A$, $X \cap Z = B$, $Y \cap Z = C$ und $X \cap Y \cap Z = D$ gemeinsame Untergruppen sind, zu bilden:



Diese Vorstellung wird uns von nun an begleiten: Insbesondere erlauben wir uns, statt $\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \text{im}(\varphi_{AX} \circ \varphi_{DA}) = \text{im}(\varphi_{BX} \circ \varphi_{DB})$ einfach $A \cap B = D$ zu schreiben.

Kapitel 1 Einführung

Definition 1.10 (Eigenschaft „nichtausgeartet“) Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Wenn es Elemente $a \in A - D$, $b \in B - D$ und $c \in C - D$ gibt, dann heißt Δ nichtausgeartet, sonst heißt Δ ausgeartet.

Hinweise.

- Wir arbeiten in den ersten drei Kapiteln dieser Arbeit nur mit nichtausgearteten Dreiecken von Gruppen! Die ausgearteten Exemplare sind für uns insofern weniger interessant, als ihre Colimites bereits die Struktur eines iterierten freien Produkts mit Amalgam besitzen.
- In Definition 4.10 auf Seite 91 werden wir noch zwei weitere Ausartungsbegriffe kennenlernen. Um keine Verwirrung zu verursachen, werden wir für die im Sinne der oben gegebenen Definition nichtausgearteten Dreiecke von Gruppen ab Seite 91 ausschließlich den Begriff „nicht-kanten-ausgeartet“ verwenden.

In Lemma 1.5 haben wir die Präsentierung des Colimes eines Diagramms von Gruppen der Form $X \leftarrow A \rightarrow Y$ bearbeitet. Das folgende Lemma macht nun eine entsprechende Aussage für Dreiecke von Gruppen:

Lemma 1.11 Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Die Gruppen seien durch Präsentierungen mit paarweise disjunkten Erzeugendenmengen beschrieben:

$$\begin{aligned} X &\cong \langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \rangle, Y \cong \langle \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \rangle, Z \cong \langle \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Z}} \rangle, \\ A &\cong \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \rangle, B \cong \langle \mathcal{B} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \rangle, C \cong \langle \mathcal{C} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \rangle, D \cong \langle \mathcal{D} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \rangle. \end{aligned}$$

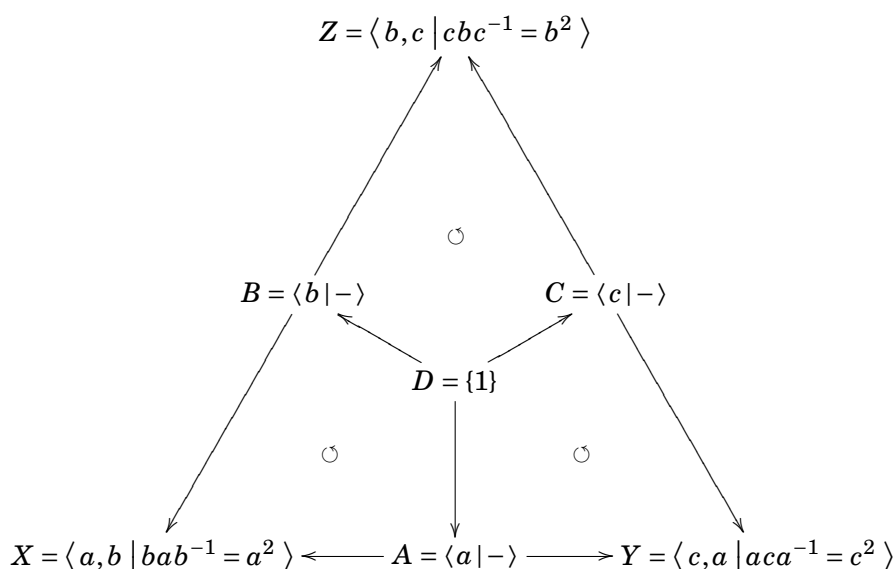
Dann gilt für den Colimes G von Δ :

$$\begin{aligned} G &\cong \left\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \{ \overline{\varphi_{AX}(a)} = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \}, \right. \\ &\quad \left. \{ \overline{\varphi_{BX}(b)} = \overline{\varphi_{BZ}(b)} \mid b \in \mathcal{B} \}, \{ \overline{\varphi_{CY}(c)} = \overline{\varphi_{CZ}(c)} \mid c \in \mathcal{C} \} \right\rangle \end{aligned}$$

Den Beweis überlassen wir dem Leser als Fingerübung. Man verfährt im Wesentlichen wie beim Beweis von 1.5, muss jedoch die Kommutativität von Δ verwenden.

1.4.2 Ein klassisches Beispiel

Nun stellt sich die Frage, wie weit die Eigenschaften des freien Produkts mit Amalgam auch für Colimites von Dreiecken von Gruppen gelten. Dass bereits die Homomorphismen der einzelnen Gruppen in den Colimites nicht injektiv sein müssen, belegt das folgende klassische Beispiel:



Die Homomorphismen sind durch $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ gegeben. Da es sich bei den Definitionsmengen um freie Gruppen handelt, lassen sich diese Zuordnungen problemlos zu Homomorphismen fortsetzen.

Satz 1.12 *Bei diesem Beispiel, nennen wir es Δ_2 , handelt es sich um ein nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen.*

Beweis. Es genügt, zu zeigen, dass die Homomorphismen φ_{AX} und φ_{BX} injektiv sind und dass $\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \{1\}$ ist. Die Argumente lassen sich anschließend auf die beiden anderen „Ecken“ des Dreiecks von Gruppen übertragen.

1. *Behauptung:* Der Homomorphismus $\varphi_{AX} : A \rightarrow X$ ist injektiv.

Bei der Gruppe $X = \langle a, b \mid bab^{-1} = a^2 \rangle$ handelt es sich um eine HNN-Erweiterung der Basis $A = \langle a \mid - \rangle$ mit stabilem Buchstaben b . Für HNN-Erweiterungen gilt grundsätzlich, dass der natürliche Homomorphismus der Basis in die HNN-Erweiterung injektiv ist. Einen entsprechenden Beweis findet man zum Beispiel in [CgRR08, Satz 6.3].

Kapitel 1 Einführung

2. *Behauptung:* Der Homomorphismus $\varphi_{BX} : B \rightarrow X$ ist injektiv.

Sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wenn $b^n \in \ker(\varphi_{BX})$ ist, dann gilt $\varphi_{BX}(b^n) =_X b^n =_X 1$ und somit:

$$b^n \in \underbrace{\langle\langle bab^{-1}a^{-2} \rangle\rangle}_N \trianglelefteq \langle a, b \mid - \rangle$$

Da aber jedes Wort über a , b und deren Inversen, das ein Element von N beschreibt, die Buchstaben b und b^{-1} in gleicher Anzahl enthalten muss, folgt $n = 0$. Also besteht $\ker(\varphi_{BX})$ nur aus dem neutralen Element b^0 und der Homomorphismus φ_{BX} ist injektiv.

3. *Behauptung:* Es gilt $\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \{1\}$.

Angenommen, es gibt zwei ganze Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $a^m =_X b^n \neq_X 1$. Dann kommutiert a^m mit b und es gilt nicht nur $a^{2m} =_X ba^mb^{-1}$ sondern auch $a^m =_X ba^mb^{-1}$. Daraus folgt $a^{2m} =_X a^m, \Rightarrow a^m =_X 1$, was im Widerspruch zur Annahme $a^m \neq_X 1$ steht. \square

Satz 1.13 *Der Colimes von Δ_2 ist isomorph zur trivialen Gruppe.*

Beweis. Den Colimes G von Δ_2 kann man wie folgt beschreiben:

$$G \cong \langle a, b, c \mid bab^{-1} = a^2, aca^{-1} = c^2, cbc^{-1} = b^2 \rangle$$

Diese Präsentation erhält man, indem man die Erzeugenden der einzelnen Gruppen zunächst disambiguiert und anschließend die in Lemma 1.11 beschriebene Präsentation mit Hilfe von Tietze-Transformationen vereinfacht. Die Details überlassen wir dem Leser als Fingerübung.

Aus den definierenden Relationen ergeben sich die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= b^{-1}a^2 & b^2a^{-1} &= a^{-4}b^2 \\ ca^{-1} &= a^{-1}c^2 & a^2c^{-1} &= c^{-4}a^2 \\ bc^{-1} &= c^{-1}b^2 & c^2b^{-1} &= b^{-4}c^2 \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Relationen sehen wir:

$$\begin{aligned} 1 &= b^2 \cdot c^2 \cdot ab^{-1} \cdot bc^{-1} \cdot ca^{-1} \cdot c^{-2} \cdot b^{-2} \\ &= b^2 \cdot c^2 \cdot b^{-1}a^2 \cdot c^{-1}b^2 \cdot a^{-1}c^2 \cdot c^{-2} \cdot b^{-2} \\ &= b^2 \cdot c^2b^{-1} \cdot a^2c^{-1} \cdot b^2a^{-1} \cdot b^{-2} \\ &= b^2 \cdot b^{-4}c^2 \cdot c^{-4}a^2 \cdot a^{-4}b^2 \cdot b^{-2} \\ &= b^{-2}c^{-2}a^{-2} \end{aligned}$$

Also gilt $1 = b^{-2}c^{-2}a^{-2}$, $\Rightarrow c^2b^2 = a^{-2}$, und somit kommutiert c^2b^2 mit a . Um zu sehen, dass nicht nur c^2b^2 sondern auch c^2 mit a kommutiert, führen wir die folgende Rechnung durch:

$$\begin{aligned}
 c^2b^2 &= a \cdot c^2b^2 \cdot a^{-1} \\
 &= ac^2a^{-1} \cdot ab^2a^{-1} \\
 &= c^4 \cdot ab^2a^{-1} \\
 &= c^4a \cdot b^2a^{-1}b^{-2} \cdot b^2 \\
 &= c^4a \cdot a^{-4} \cdot b^2 \\
 &= c^4a^{-3}b^2
 \end{aligned}$$

Also gilt $c^2b^2 = c^4a^{-3}b^2$, $\Rightarrow 1 = c^2a^{-3}$, $\Rightarrow a^3 = c^2$, und somit kommutiert c^2 mit a . Der Rest des Beweises ist vergleichsweise trivial: Da c^2 mit a kommutiert, wissen wir, dass nicht nur $c^4 = ac^2a^{-1}$ sondern auch $c^2 = ac^2a^{-1}$ gilt. Daraus folgt $c^4 = c^2$, $\Rightarrow acca^{-1} = c^2 = 1$, $\Rightarrow c = 1$. Wenn aber $c = 1$ ist, dann gilt $b^2 = cbc^{-1} = b$, $\Rightarrow b = 1$, und, wenn $b = 1$ ist, dann gilt auch $a^2 = bab^{-1} = a$, $\Rightarrow a = 1$. Es folgt die Behauptung. \square

Im Jahr 1991 haben Stallings und Gersten, siehe [Sta91], einen Krümmungsbegriff für Dreiecke von Gruppen eingeführt. Etwas „harmloser“ als die sphärischen Dreiecke von Gruppen, zu denen auch Δ_2 gehört, sind die nichtsphärischen Dreiecke von Gruppen. In den folgenden Kapiteln der Arbeit werden wir diese genauer untersuchen.

Kapitel 1 Einführung

KAPITEL 2

Realisierbarkeit

2.1 Der Gersten-Stallings-Winkel

2.1.1 Die Definition des Gersten-Stallings-Winkels

Definition 2.1 (Gersten-Stallings-Winkel) Sei G eine Gruppe und seien $A \leq G$ und $B \leq G$ Untergruppen. Außerdem sei $D \leq A \cap B \leq G$ eine Untergruppe. Die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die es Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in G$ gibt, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$ ist, bezeichnen wir mit $n_G(A, B; D)$. Für den Fall, dass es kein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ gibt, setzen wir $n_G(A, B; D) := \infty$. Nun können wir den Gersten-Stallings-Winkel wie folgt definieren:

$$\angle_G(A, B; D) := \frac{2\pi}{n_G(A, B; D)}$$

Lemma 2.2 Es gilt grundsätzlich:

$$n_G(A, B; D) \in 2 \cdot \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Beweis. Den Fall $n_G(A, B; D) = 1$ können wir ausschließen, da es offensichtlich weder ein $u_1 \in A - D$ noch ein $u_1 \in B - D$ mit $u_1 =_G 1$ gibt. Dass $n_G(A, B; D)$ auch keine andere ungerade natürliche Zahl sein kann, ergibt sich aus der folgenden Überlegung:

Wenn es eine ungerade natürliche Zahl $n \geq 3$ und Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in G$ gibt, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$ ist,

Kapitel 2 Realisierbarkeit

dann ist auch $u_n \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1} =_G 1$. Da n ungerade ist, sind u_n und u_1 entweder beide in $A - D$ oder beide in $B - D$ enthalten.

Wir setzen o. B. d. A. voraus, dass u_n und u_1 beide in $A - D$ enthalten sind. Je nach dem, ob $u_n \cdot u_1 \in A - D$ oder $u_n \cdot u_1 \in D$ ist, können wir entweder die ersten beiden Faktoren des Produkts $u_n \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1}$ zu einem gemeinsamen Faktor in $A - D$ oder sogar die ersten drei Faktoren des Produkts $u_n \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1}$ zu einem gemeinsamen Faktor in $B - D$ zusammenfassen, und somit stets ein geeignetes Produkt mit weniger als n Faktoren konstruieren. \square

Typischerweise handelt es sich bei der Untergruppe D um die gesamte Schnittmenge $A \cap B$. Wenn es aber ein Element $u \in (A \cap B) - D$ gibt, dann gilt auch $u^{-1} \in (A \cap B) - D$. Wir können also $u_1 := u \in A - D$ und $u_2 := u^{-1} \in B - D$ wählen, $\Rightarrow u_1 \cdot u_2 =_G u \cdot u^{-1} =_G 1$. Also ist $n_G(A, B; D) \leq 2$. Mit Lemma 2.2 folgt schließlich $n_G(A, B; D) = 2$.

Wenn umgekehrt $n_G(A, B; D) = 2$ ist, dann gibt es zwei Elemente $u_1, u_2 \in G$, o. B. d. A. $u_1 \in A - D$ und $u_2 \in B - D$, mit $u_1 \cdot u_2 =_G 1$. Da $u_2 \in B - D$ ist, ist auch $u_1 = u_2^{-1} \in B - D$. Es gibt also ein Element $u := u_1 \in (A - D) \cap (B - D) = (A \cap B) - D$. Wir haben damit bewiesen:

Lemma 2.3 *Genau dann ist $n_G(A, B; D) = 2$, wenn es ein $u \in (A \cap B) - D$ gibt.*

Der Gersten-Stallings-Winkel ist im Allgemeinen schwer zu berechnen. Wir werden dies an einem Warnbeispiel von Stallings illustrieren, siehe [Sta91]:

Beispiel. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $G := \langle a, b \mid (ab)^m b = 1 \rangle$. Wir betrachten nun die Untergruppen $A := \langle a \rangle \leq G$, $B := \langle b \rangle \leq G$ und $D := \{1\} \leq A \cap B \leq G$. Zunächst könnte man vermuten, dass der Winkel $\angle_G(A, B; D) = \frac{\pi}{m}$ ist, was letztendlich aber nur für $m = 1$ zutrifft.

Behauptung: Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $n_G(A, B; D) = 2$, $\Rightarrow \angle_G(A, B; D) = \pi$.

Es gilt $(ab)^m b =_G 1$, $\Rightarrow b(ab)^m =_G 1$. Also gilt auch $abb =_G (ab)^{-(m-1)} =_G bab$, $\Rightarrow ab =_G ba$. Die Gruppe G ist also abelsch und es ergibt sich aus der definierenden Relation:

$$a^m b^{m+1} =_G 1$$

Wir wissen somit, dass $a^m =_G b^{-(m+1)} \in A \cap B$ ist. Um einzusehen, dass $a^m \notin D$ ist, wenden wir den Freiheitssatz von Magnus¹ an:

¹Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass Magnus diesen Satz im Jahr 1931 im Rahmen seiner Dissertation an der Goethe-Universität Frankfurt bewiesen hat.

Satz 2.4 (Freiheitssatz) Sei $G \cong \langle x_1, x_2, \dots \mid r = 1 \rangle$, wobei r ein zyklisch reduziertes Wort über x_1, x_2, \dots und deren Inversen ist. B entstehe aus $\{x_1, x_2, \dots\}$ durch Weglassen eines einzigen Erzeugenden, das oder dessen Inverses in r vorkommt. Dann ist $F = \langle B \rangle \leq G$ eine freie Untergruppe mit Basis B .

Beweis. Siehe zum Beispiel [CgRR08, Satz 7.1]. □

Insbesondere gilt in unserem Fall, dass $\langle a \rangle \leq G$ eine freie Untergruppe mit Basis $\{a\}$ ist, $\Rightarrow a^m \neq_G 1, \Rightarrow a^m \notin D$. Mit Lemma 2.3 folgt schließlich die Behauptung.

2.1.2 Die Krümmung von Dreiecken von Gruppen

Definition 2.5 (Winkelsumme eines Dreiecks von Gruppen) Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Die Winkelsumme von Δ ist definiert als:

$$\Sigma(\Delta) := \angle_X(A, B; D) + \angle_Y(A, C; D) + \angle_Z(B, C; D)$$

Lemma 2.6 Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Jeder der drei Winkel $\angle_X(A, B; D)$, $\angle_Y(A, C; D)$ und $\angle_Z(B, C; D)$ beträgt höchstens $\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Wir schätzen zunächst den Winkel $\angle_X(A, B; D)$ nach oben ab. Nach Lemma 2.2 ist $n_X(A, B; D) \in 2 \cdot \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Da in einem Dreieck von Gruppen nach Definition $A \cap B = D$ gilt, es also kein $u \in (A \cup B) - D$ gibt, können wir Lemma 2.3 anwenden und zeigen, dass $n_X(A, B; D) \neq 2$ und somit $n_X(A, B; D) \geq 4$ ist. Es folgt:

$$\angle_X(A, B; D) = \frac{2\pi}{n_X(A, B; D)} \leq \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Entsprechend können wir die Winkel $\angle_Y(A, C; D)$ und $\angle_Z(B, C; D)$ unter Verwendung der beiden Lemmata 2.2 und 2.3 nach oben abschätzen. □

Definition 2.7 (Krümmung eines Dreiecks von Gruppen) Je nach dem, ob $\Sigma(\Delta) < \pi$, $\Sigma(\Delta) = \pi$ oder $\Sigma(\Delta) > \pi$ ist, sprechen wir von einem hyperbolischen, einem euklidischen oder einem sphärischen Dreieck von Gruppen.

Die Krümmung eines Dreiecks von Gruppen ist also eine Information, die man berechnen kann, indem man jede der drei Eckengruppen einzeln untersucht und die Winkel addiert. Kommen wir noch einmal auf das Beispiel Δ_2 zurück:

Satz 2.8 Bei Δ_2 handelt es sich um ein sphärisches Dreieck von Gruppen.

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Beweis. Aus Symmetriegründen gilt:

$$\langle_X(A, B; D) = \langle_Y(A, C; D) = \langle_Z(B, C; D)$$

Wie wir im Beweis von Satz 1.12 gesehen haben, sind $b \in B - D$, $a \in A - D$, $b^{-1} \in B - D$ und $a^{-2} \in A - D$. Da aber $bab^{-1}a^{-2} =_G 1$ ist, wissen wir zumindest, dass $n_G(A, B; D) \leq 4$, $\Rightarrow \langle_X(A, B; D) \geq \frac{\pi}{2}$, ist.

Nach Lemma 2.6 ist jedoch $\langle_X(A, B; D) \leq \frac{\pi}{2}$, folglich gilt die Gleichheit. Bei Δ_2 handelt sich also um ein sphärisches Dreieck von Gruppen mit $\Sigma(\Delta) = \frac{3\pi}{2}$. □

2.2 Der Einbettungssatz für die Eckengruppen

Wir haben gesehen, dass im Fall von Δ_2 nicht einmal die Homomorphismen der einzelnen Gruppen in den Colimes injektiv sind. Das folgende Resultat besagt jedoch, dass dieses Phänomen nur bei sphärischen Dreiecken von Gruppen auftreten kann:

Satz 2.9 (Gersten und Stallings, 1991) *Sei Δ ein nichtsphärisches (d. h. hyperbolisches oder euklidisches) Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Dann sind die Homomorphismen $\varphi_X : X \rightarrow G$, $\varphi_Y : Y \rightarrow G$ und $\varphi_Z : Z \rightarrow G$ der Eckengruppen in den Colimes injektiv.*

Beweis. Der ursprüngliche Beweis dieses Satzes, den man in [Sta91] findet, untersucht Homotopien von Wegen im klassifizierenden Raum des Colimes. Wir werden den Beweis in einer eher kombinatorischen Sprache präsentieren und, vergleichsweise elementar, mit van-Kampen-Diagrammen arbeiten.

Wie in Lemma 1.11 seien die einzelnen Gruppen durch Präsentierungen mit paarweise disjunkten Erzeugendenmengen beschrieben:

$$\begin{aligned} X &\cong \langle \mathcal{X} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \rangle, Y \cong \langle \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \rangle, Z \cong \langle \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Z}} \rangle, \\ A &\cong \langle \mathcal{A} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \rangle, B \cong \langle \mathcal{B} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \rangle, C \cong \langle \mathcal{C} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \rangle, D \cong \langle \mathcal{D} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \rangle. \end{aligned}$$

Wir können o. B. d. A. voraussetzen, dass die Erzeugendenmengen \mathcal{X} , \mathcal{Y} und \mathcal{Z} nichtleer sind. Sollte nämlich eine der drei Mengen leer sein, so erzeugt sie die triviale Gruppe, die wir aber nicht nur mit $\langle - \mid - \rangle$ sondern z. B. auch mit $\langle x \mid x \rangle$ präsentieren können.

Es gilt für den Colimes G von Δ :

$$G \cong \left\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \{ \widehat{\varphi_{AX}(a)} = \widehat{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \}, \right. \\ \left. \{ \widehat{\varphi_{BX}(b)} = \widehat{\varphi_{BZ}(b)} \mid b \in \mathcal{B} \}, \{ \widehat{\varphi_{CY}(c)} = \widehat{\varphi_{CZ}(c)} \mid c \in \mathcal{C} \} \right\rangle$$

Um uns die Arbeit zu erleichtern, fügen wir noch weitere definierende Relationen hinzu, die sich jedoch alle aus den ursprünglichen definierenden Relationen ergeben:

$$G \cong \left\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}, \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}, \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}} \right\rangle$$

$$\text{mit } \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}} := \{ w_1 = w_2 \mid a \in A, w_1 \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* : w_1 =_X a, \\ w_2 \in (\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-)^* : w_2 =_Y a \}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}} := \{ w_1 = w_2 \mid b \in B, w_1 \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* : w_1 =_X b, \\ w_2 \in (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-)^* : w_2 =_Z b \}$$

$$\hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}} := \{ w_1 = w_2 \mid c \in C, w_1 \in (\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-)^* : w_1 =_Y c, \\ w_2 \in (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-)^* : w_2 =_Z c \}$$

Man beachte, dass in dieser Präsentation nicht mehr nur die Erzeugenden sondern alle Elemente der Kantengruppen definierende Relationen liefern. Dabei werden jeweils alle Paare von geeigneten Wörtern identifiziert.

Wir überprüfen zunächst, dass es sich bei den hinzugefügten definierenden Relationen nur um Folgerelationen der ursprünglichen definierenden Relationen handelt.

Sei also $(w_1 = w_2) \in \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}$ und sei $a \in A$ mit $w_1 =_X a$ und $w_2 =_Y a$.² Da $a \in A$ ist, gibt es $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ mit $a =_A a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n}$. Es gilt einerseits:

$$w_1 =_X a =_X a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n} =_X \widehat{\varphi_{AX}(a_1)}^{\varepsilon_1} \cdot \widehat{\varphi_{AX}(a_2)}^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \widehat{\varphi_{AX}(a_n)}^{\varepsilon_n}$$

andererseits:

$$w_2 =_Y a =_Y a_1^{\varepsilon_1} \cdot a_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot a_n^{\varepsilon_n} =_Y \widehat{\varphi_{AY}(a_1)}^{\varepsilon_1} \cdot \widehat{\varphi_{AY}(a_2)}^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot \widehat{\varphi_{AY}(a_n)}^{\varepsilon_n}$$

Die Gleichheit der beiden rechten Terme ergibt sich unmittelbar aus den ursprünglichen definierenden Relationen $\{ \widehat{\varphi_{AX}(a)} = \widehat{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \}$. Bei $(w_1 = w_2) \in \hat{\mathcal{R}}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}$ handelt es

²Wie auf Seite 13 beschrieben, fassen wir die Kantengruppe A als gemeinsame Untergruppe der beiden Eckengruppen X und Y auf. Dies erlaubt uns, anstelle von $w_1 =_X \varphi_{AX}(a)$ und $w_2 =_Y \varphi_{AY}(a)$ einfach $w_1 =_X a$ und $w_2 =_Y a$ zu schreiben.

Kapitel 2 Realisierbarkeit

sich also um eine Folgerelation aus den ursprünglichen definierenden Relationen \mathcal{R}_X und \mathcal{R}_Y sowie $\{\widehat{\varphi_{AX}(a)} = \widehat{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\}$. Analoges gilt für $\hat{\mathcal{R}}_{X \leftrightarrow Z}$ und $\hat{\mathcal{R}}_{Y \leftrightarrow Z}$.

Um nachher jede definierende Relation in Abhängigkeit davon, welche Erzeugenden sie enthält, genau einem der sechs Typen von definierenden Relationen zuordnen zu können, nehmen wir eine letzte Schönheitskorrektur an der Präsentation vor und entfernen aus $\hat{\mathcal{R}}_{X \leftrightarrow Y}$, $\hat{\mathcal{R}}_{X \leftrightarrow Z}$ und $\hat{\mathcal{R}}_{Y \leftrightarrow Z}$ diejenigen definierenden Relationen, bei denen mindestens eines der beiden identifizierten Wörter das leere Wort e ist. Wir erhalten schließlich:

$$G \cong \langle X, Y, Z \mid \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y, \mathcal{R}_Z, \mathcal{R}_{X \leftrightarrow Y}, \mathcal{R}_{X \leftrightarrow Z}, \mathcal{R}_{Y \leftrightarrow Z} \rangle$$

$$\text{mit } \mathcal{R}_{X \leftrightarrow Y} := \{w_1 = w_2 \mid a \in A, w_1 \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* - \{e\} : w_1 =_X a,$$

$$w_2 \in (\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-)^* - \{e\} : w_2 =_Y a \}$$

$$\mathcal{R}_{X \leftrightarrow Z} := \{w_1 = w_2 \mid b \in B, w_1 \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* - \{e\} : w_1 =_X b,$$

$$w_2 \in (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-)^* - \{e\} : w_2 =_Z b \}$$

$$\mathcal{R}_{Y \leftrightarrow Z} := \{w_1 = w_2 \mid c \in C, w_1 \in (\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-)^* - \{e\} : w_1 =_Y c,$$

$$w_2 \in (\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-)^* - \{e\} : w_2 =_Z c \}$$

Auch dieses Mal überprüfen wir, dass es sich bei den entfernten definierenden Relationen nur um Folgerelationen aus den verbliebenen definierenden Relationen handelt.

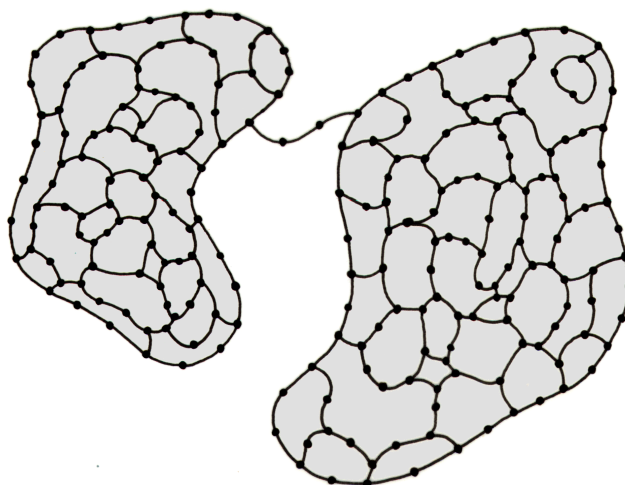
Sei also $(w_1 = e) \in \hat{\mathcal{R}}_{X \leftrightarrow Y}$ und sei $a \in A$ mit $w_1 =_X a$ und $e =_Y a$. Es gilt:

$$a =_Y e \Rightarrow a =_Y 1 \Rightarrow a =_A 1 \Rightarrow a =_X 1 \Rightarrow w_1 =_X 1$$

Bei der Relation $(w_1 = e) \in \hat{\mathcal{R}}_{X \leftrightarrow Y}$ handelt es sich also um eine Folgerelation aus den verbliebenen definierenden Relationen \mathcal{R}_X . Analoges gilt für die übrigen Fälle.

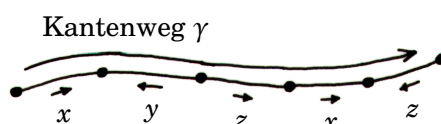
Kommen wir nun, nach diesen Vorbereitungen, zum eigentlichen Beweis des Satzes: Aus Symmetriegründen genügt es, zu zeigen, dass der Homomorphismus $\varphi_X : X \rightarrow G$ injektiv ist. Sei $x \in \ker(\varphi_X)$ beliebig und sei w_x ein Wort über $\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$ mit $w_x =_X x$. Es gilt also $\varphi_X(x) =_G 1, \Rightarrow \varphi_X(w_x) =_G 1, \Rightarrow w_x =_G 1$. Um die Injektivität von $\varphi_X : X \rightarrow G$ zu zeigen, überzeugen wir uns davon, dass wir die Gleichung $w_x =_G 1$ sogar allein unter Verwendung der definierenden Relationen \mathcal{R}_X herleiten können. Gelingt uns das, so gilt offensichtlich auch $w_x =_X 1, \Rightarrow x =_X 1, \Rightarrow \ker(\varphi_X) = \{1\}$.

Für w_x gibt es jedenfalls ein van-Kampen-Diagramm K bezüglich unserer erweiterten Präsentation von G :

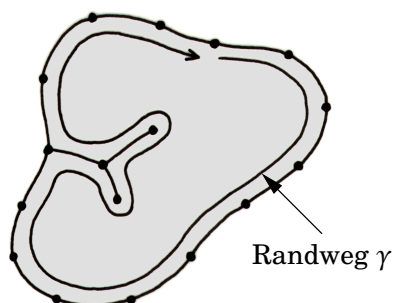


Das bedeutet konkret: Bei K handelt es sich um einen endlichen, zusammenhängenden, planaren Graphen zusammen mit einer fest gewählten geometrischen Realisierung in der euklidischen Ebene. Die Kanten von K sind orientiert und jeweils mit einem Erzeugenden aus \mathcal{X} , \mathcal{Y} oder \mathcal{Z} beschriftet.

Entlang eines jeden Kantenweges können wir also ein Wort ablesen, indem wir für jede einzelne Kante, die wir durchlaufen, das entsprechende Erzeugende oder dessen Inverses notieren, und zwar je nach dem, ob wir die Kante mit oder entgegen ihrer Orientierung durchlaufen. Im folgenden Beispiel können wir das Wort $xy^{-1}zxz^{-1}$ ablesen:



Betrachten wir eine Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - K$, so können wir insbesondere entlang ihres Randweges ein Wort ablesen:



Kapitel 2 Realisierbarkeit

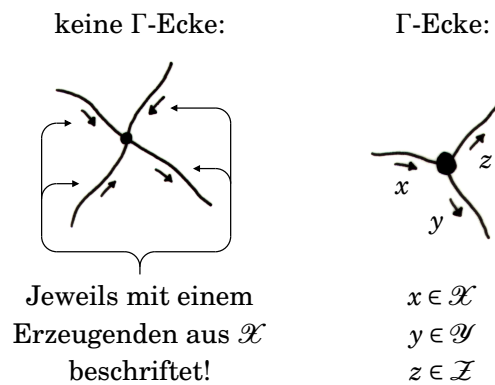
Ein solcher Randweg ist natürlich nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt davon ab, an welcher Ecke wir starten und mit welcher Orientierung wir den Rand durchlaufen. Wir müssen an dieser Stelle also etwas präziser sein: Wir können entlang eines jeden ihrer Randwege ein Wort, d. h. ein „Randwort“, ablesen.

Unter den Randwörtern einer jeden beschränkten Zusammenhangskomponente befindet sich stets eine definierende Relation. Aus diesem Grund bezeichnen wir die beschränkten Zusammenhangskomponenten als „Relatorzellen“.

Unter den Randwörtern der unbeschränkten Zusammenhangskomponente befindet sich das Wort w_x . Auch hier pflegen wir eine Sprechweise: Den Rand der unbeschränkten Zusammenhangskomponente bezeichnen wir als „Rand von K “ und die Randwörter der unbeschränkten Zusammenhangskomponente als „Randwörter von K “.

Ausgehend vom van-Kampen-Diagramm K konstruieren wir einen endlichen, planaren Graphen $\Gamma = \Gamma(K)$ zusammen mit einer fest gewählten geometrischen Realisierung in der euklidischen Ebene.

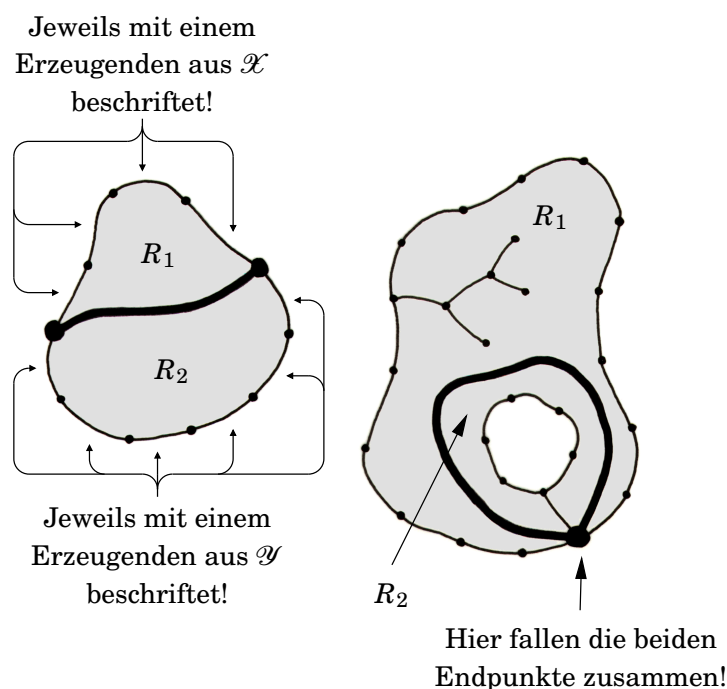
Die Eckenmenge von Γ ist eine Teilmenge der Eckenmenge von K , eine K -Ecke ist genau dann eine Γ -Ecke, wenn es zwei K -Kanten gibt, die beide mit der K -Ecke inzidieren aber mit Elementen aus verschiedenen Erzeugendenmengen beschriftet sind:



Die Definition der Kantenmenge von Γ ist etwas aufwändiger: Wenn eine Relatorzelle R eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ als Randwort hat, dann gibt es zwei nicht notwendigerweise verschiedene K -Ecken auf dem Rand von R , an denen beim Ablesen des Randwortes ein Wechsel der Erzeugendenmenge stattfindet.

Diese beiden K -Ecken, die natürlich auch Γ -Ecken sind, verbinden wir nun durch eine Jordankurve miteinander, die, abgesehen von ihren beiden Endpunkten, vollständig in

der Relatorzelle R verläuft und selbige so in zwei Gebiete R_1 und R_2 zerschneidet, dass alle K -Kanten im Rand von R_1 mit Elementen der einen Erzeugendenmenge und alle K -Kanten im Rand von R_2 mit Elementen der anderen Erzeugendenmenge beschriftet sind.



So verfahren wir für jede Relatorzelle, die eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ als Randwort hat. Die dabei gewählten Jordankurven realisieren schließlich die Kantenmenge von Γ .

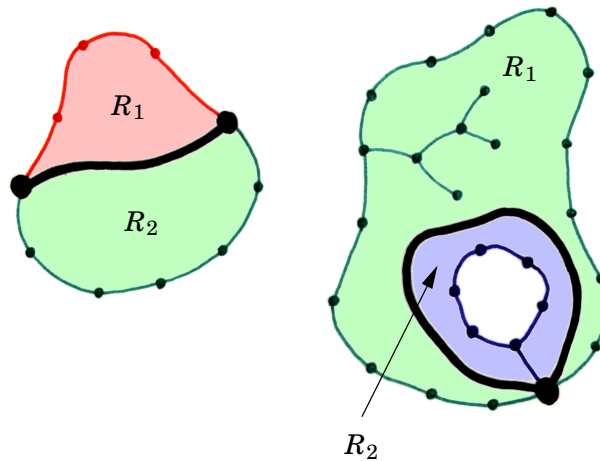
Nachdem wir den Graphen Γ definiert haben, färben wir das van-Kampen-Diagramm K und die Relatorzellen. Für jede der drei Erzeugendenmengen wählen wir eine Farbe: Für \mathcal{X} die Farbe Rot, für \mathcal{Y} die Farbe Grün und für \mathcal{Z} die Farbe Blau. Den Graphen Γ färben wir schwarz.

Jede K -Kante färben wir mit der Farbe der Erzeugendenmenge, aus der das Element stammt, mit dem die K -Kante beschriftet ist. Jede K -Ecke, die nicht zugleich eine Γ -Ecke ist, inzidiert nur mit K -Kanten einer einzigen Farbe. Mit ebendieser Farbe färben wir auch die K -Ecke selbst.

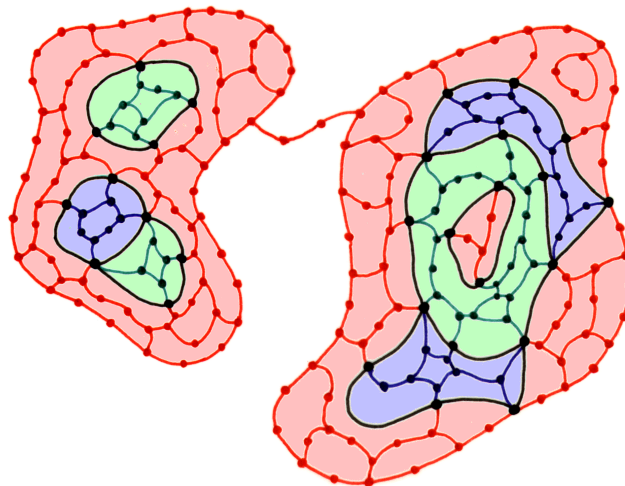
Jede Relatorzelle, die eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y}}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Z}}$ als Randwort hat, enthält in ihrem Rand nur K -Kanten einer einzigen Farbe. Wir färben die gesamte

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Relatorzelle mit der Farbe der K -Kanten, die sie in ihrem Rand enthält. Jede Relatorzelle, die eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ als Randwort hat, wird von einer Jordankurve in zwei Gebiete R_1 und R_2 zerschnitten, von denen jedes in seinem Rand nur K -Kanten einer einzigen Farbe enthält. Wir färben jedes der beiden Gebiete mit der Farbe der K -Kanten, die es in seinem Rand enthält.



Wir erhalten schließlich ein wie in der folgenden Abbildung eingefärbtes van-Kampen-Diagramm K :



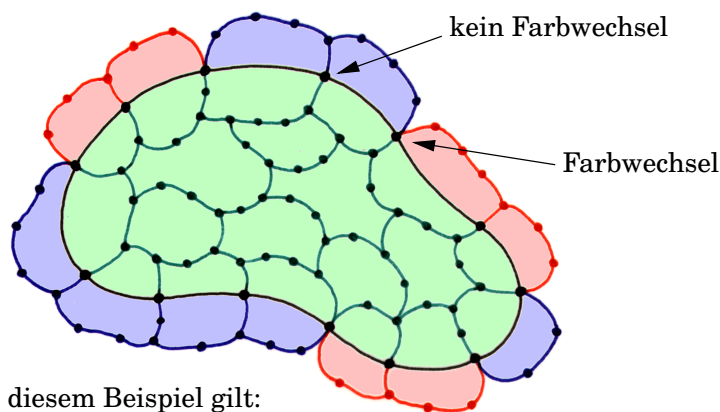
Die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{E}^2 - \Gamma$ bezeichnen wir als „Inseln“, die unbeschränkte Zusammenhangskomponente als „Meer“. Inseln werden der zentrale Gegenstand der folgenden Überlegungen sein.

Behauptung: Jede Insel ist einfarbig.

Da wir das van-Kampen-Diagramm K und alle Relatorzellen eingefärbt haben, zerfällt jede Insel in eine rote, eine grüne und eine blaue Teilmenge. Wie man sich leicht überlegt, ist jede dieser drei Teilmengen offen. Da eine Insel aber zusammenhängend und nichtleer ist, folgt, dass genau eine dieser drei Teilmengen nichtleer ist. Sie bestimmt die Farbe der Insel. \square

Wir beschränken uns zunächst auf einfach zusammenhängende Inseln, betrachten z. B. eine grüne einfach zusammenhängende Insel I . Jeder Randweg von I besteht aus einer Folge von Γ -Kanten, die durch grün-rote und grün-blaue Relatorzellen verlaufen.

Wenn wir entlang eines solchen Randweges einen Übergang von einer grün-roten zu einer grün-blauen oder von einer grün-blauen zu einer grün-roten Relatorzelle vorfinden, dann sprechen wir von einem Farbwechsel. Das gilt außerdem für den möglichen Farbwechsel von der letzten zur ersten Γ -Kante, sodass die Anzahl der Farbwechsel unabhängig von der speziellen Wahl des Randweges ist. Wir bezeichnen sie von nun an mit $\chi(I)$.



In diesem Beispiel gilt:
 $\chi(I) = 6$

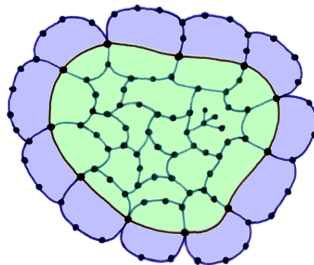
Bleiben wir noch einen Moment bei unserer Insel I . Wenn $\chi(I) \geq n_Y(A, C; D)$ ist, dann hat sie genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf. Wenn jedoch $\chi(I) < n_Y(A, C; D)$ ist, dann nicht. Wir werden gleich zeigen, dass wir das van-Kampen-Diagramm K in diesem Fall so verändern können, dass sich die Anzahl der Inseln verringert.

Beweisstrategie. Unsere Begriffe und Argumente lassen sich natürlich auch auf rote und blaue einfach zusammenhängende Inseln übertragen, sodass wir die angesprochene Veränderung des van-Kampen-Diagramms K für jede einfach zusammenhängende Insel, die nicht genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat, durchführen können. Da sich die Anzahl der Inseln aber nicht beliebig oft verringern kann, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein van-Kampen-Diagramm K , in dem jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

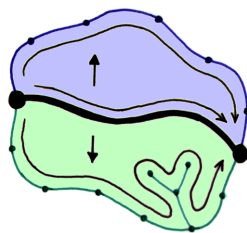
Nehmen wir also an, es sei $\chi(I) < n_Y(A, C; D)$.

Fall 1: $\chi(I) = 0$

Wenn $\chi(I) = 0$ ist, dann hat I keinen einzigen Farbwechsel in seinem Randverlauf und jeder Randweg verläuft entweder nur durch grün-rote oder, wie im folgenden Beispiel, nur durch grün-blaue Relatorzellen:



Wählen wir also einen beliebigen Randweg γ . Jede einzelne Γ -Kante von γ können wir durch den grünen oder den blauen K -Kantenweg ersetzen, den wir erhalten, wenn wir nicht durch die Relatorzelle hindurchlaufen, sondern den entsprechenden grünen oder blauen K -Kanten im Rand der Relatorzelle folgen:



Entlang des K -Kantenweges, den wir erhalten, wenn wir jede einzelne Γ -Kante durch den entsprechenden grünen K -Kantenweg ersetzen, können wir das Wort $\text{in}(\gamma)$ ablesen. Wenn wir jede einzelne Γ -Kante durch den entsprechenden blauen K -Kantenweg ersetzen, das Wort $\text{out}(\gamma)$.

Bemerkung. Auch, wenn γ ein beliebiger Kantenweg im Rand einer beliebigen Insel I ist, definieren wir $\text{in}(\gamma) = \text{in}(\gamma, I)$ und $\text{out}(\gamma) = \text{out}(\gamma, I)$, und zwar wie folgt:

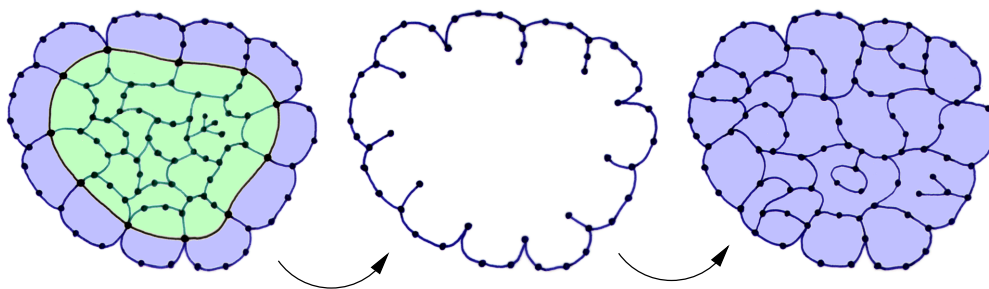
Mit $\text{in}(\gamma)$ bezeichnen wir das Wort, das wir entlang des entsprechenden K -Kantenweges in der Farbe der Insel I ablesen können, und mit $\text{out}(\gamma)$ das Wort, das wir entlang des entsprechenden K -Kantenweges in den beiden anderen Farben ablesen können.

Da γ in unserem Beispiel nur durch grün-blaue Relatorzellen verläuft, gibt es nicht nur für jede einzelne Γ -Kante von γ sondern auch für den gesamten Γ -Kantenweg γ ein $c \in C$ mit $\text{in}(\gamma) =_Y c$ und $\text{out}(\gamma) =_Z c$.

Der Teilgraph von K , der aus allen K -Ecken und K -Kanten besteht, die im Abschluss der Insel I enthalten sind, ist, wenn man von der möglichen Identifikation einzelner Ecken auf dem Rand von I absieht, ein van-Kampen-Diagramm für $\text{in}(\gamma)$. Da aber jede Kante dieses Diagramms mit einem Element aus \mathcal{Y} beschriftet ist und jede Relatorzelle eine definierende Relation vom Typ \mathcal{R}_y als Randwort hat, folgt, dass $\text{in}(\gamma) =_Y 1$ ist. Also gilt:

$$c =_Y 1 \Rightarrow c =_C 1 \Rightarrow c =_Z 1 \Rightarrow \text{out}(\gamma) =_Z 1$$

Wir können also alle K -Ecken und K -Kanten, die in der Insel I enthalten sind, entfernen und in die so entstandene beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - K$ ein van-Kampen-Diagramm für $\text{out}(\gamma)$ einkleben, wobei jede Kante des eingeklebten Diagramms mit einem Element aus \mathcal{Z} beschriftet ist und jede Relatorzelle eine definierende Relation vom Typ \mathcal{R}_z als Randwort hat.

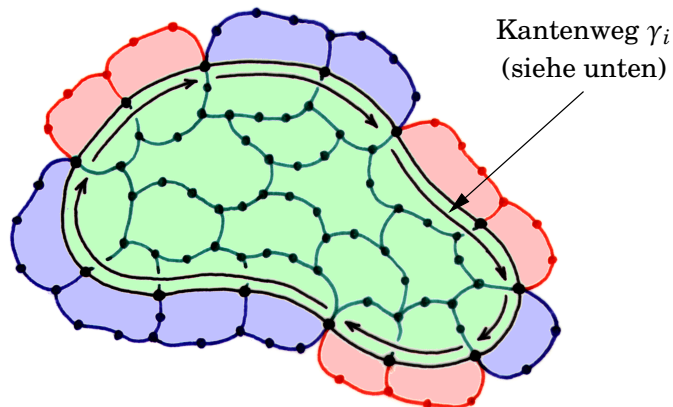


Kapitel 2 Realisierbarkeit

Nach dieser Veränderung des van-Kampen-Diagramms K und der damit verbundenen Veränderung des Graphen Γ sowie der Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 hat sich die Anzahl der Inseln verringert. Damit ist der erste Fall abgeschlossen.

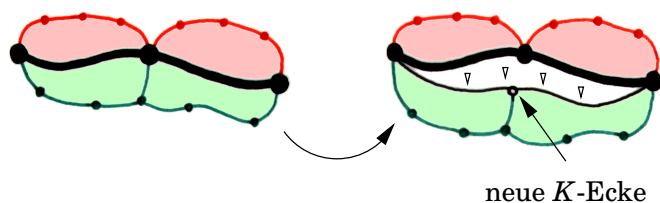
Fall 2: $\chi(I) > 0$

Wenn $\chi(I) > 0$ ist, dann wählen wir einen Randweg γ so, dass zwischen der letzten und der ersten Γ -Kante ein Farbwechsel stattfindet. Folgen wir dem Randweg von Farbwechsel zu Farbwechsel, so erhalten wir eine Folge $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\chi(I)}$ von Teilwegen, von denen jeder einzelne entweder nur durch grün-rote oder nur durch grün-blaue Relatorzellen verläuft:

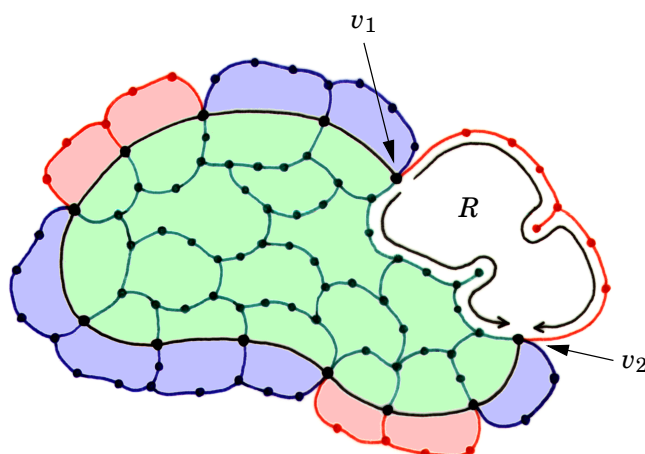


In diesem Fall gibt es also $u_1, u_2, \dots, u_{\chi(I)}$, die abwechselnd in A und C enthalten sind, sodass, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, \chi(I)\}$, $\text{in}(\gamma_i) =_Y u_i$ gilt, $\Rightarrow \text{in}(\gamma) =_Y u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{\chi(I)}$. Genau wie im ersten Fall können wir einsehen, dass $\text{in}(\gamma) =_Y 1$, $\Rightarrow u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{\chi(I)} =_Y 1$, ist. Da aber $\chi(I) < n_Y(A, C; D)$ ist, muss es mindestens ein $i \in \{1, 2, \dots, \chi(I)\}$ geben, sodass u_i in D enthalten ist.

Sei also $i \in \{1, 2, \dots, \chi(I)\}$ mit $u_i \in D$. Entlang des zu u_i gehörenden Teilweges γ_i lösen wir die Insel I von ihrem Rand, ziehen sie, wie in der folgenden Abbildung angedeutet, zusammen und fügen auf dem Rand der zusammengezogenen Insel I , wo es nötig ist, neue K -Ecken ein:



Die in unserem Beispiel grün-roten Relatorzellen, durch die γ_i ursprünglich verlief, sind nun zu einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - K$, nennen wir sie R , verbunden, entlang deren Rand wir auf der einen Seite $\text{in}(\gamma_i)$ und auf der anderen Seite $\text{out}(\gamma_i)$ ablesen können:



Wir wissen bereits, dass $\text{in}(\gamma_i) =_Y u_i$ und $\text{out}(\gamma_i) =_X u_i$ gilt. Da $u_i \in D = X \cap Y \cap Z$ ist, gibt es aber auch ein nichtleeres Wort w über $\mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ mit $w =_Z u_i$.

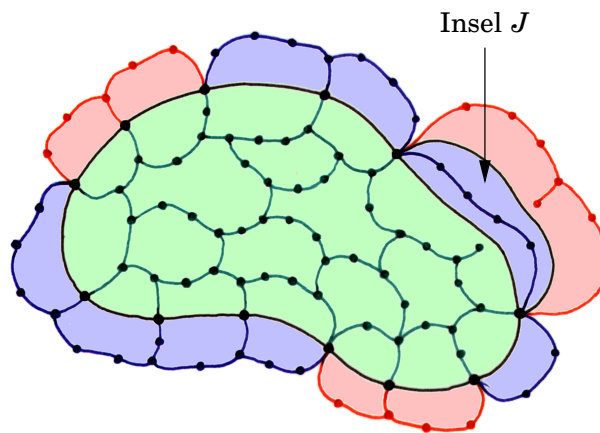
Wir wählen eine Jordankurve, die, abgesehen von ihren beiden Endpunkten, vollständig in der Zusammenhangskomponente R verläuft und die K -Ecke v_1 , an der γ_i ursprünglich begann, mit der K -Ecke v_2 , an der γ_i ursprünglich endete, verbindet.

An $|w| - 1$ verschiedenen Punkten im Inneren der Jordankurve fügen wir jeweils eine neue K -Ecke ein. Die Abschnitte der Jordankurve, die zwischen zwei K -Ecken liegen, werden zu neuen K -Kanten, die so orientiert und beschriftet werden, dass wir entlang des neuen K -Kantenweges von v_1 nach v_2 das Wort w ablesen können.

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Die zwischenzeitlich entstandene Zusammenhangskomponente R wird auf diese Weise in zwei Zusammenhangskomponenten zerschnitten: Die eine ist eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$, die andere eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$.

Wenn wir nun den Graphen Γ und die Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 entsprechend ergänzen und die unwesentlich deformierte Insel I betrachten, dann erkennen wir, dass sich $\chi(I)$ zwar um 2 verringert hat, die Anzahl der Inseln sich jedoch um 1 erhöht hat. Die neu entstandene blaue Insel bezeichnen wir mit J :

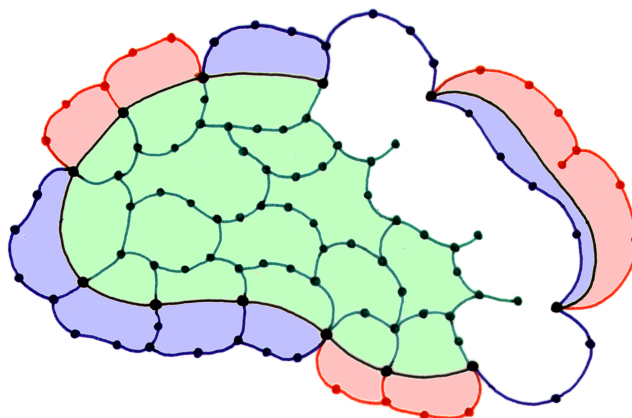


Wir müssen also noch ein wenig weiterarbeiten und unterscheiden zwei Fälle:

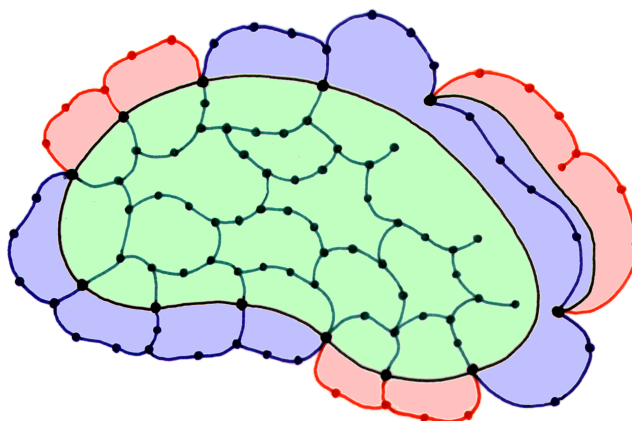
Fall 2.1: Wenn mittlerweile $\chi(I) = 0$ ist, dann entfernen wir die Insel I so, wie es in Fall 1 beschrieben ist. Insbesondere wird dabei auch die Insel J entweder mit mindestens einer ursprünglich bestehenden blauen Insel oder, was in der allgemeinen Situation durchaus möglich sein wird, mit dem Meer verbunden. Jedenfalls gilt, dass sich die Anzahl der Inseln insgesamt verringert.

Fall 2.2: Wenn aber nach wie vor $\chi(I) > 0$ ist, dann wählen wir einen Randweg γ so, dass zwischen der letzten und der ersten Γ -Kante ein Farbwechsel stattfindet. Wir bezeichnen die Γ -Kante, die zwischen der Insel I und der Insel J verläuft, mit e und den Teilweg von γ , der die Γ -Kante e und ihre beiden Nachbarkanten enthält, mit $\tilde{\gamma}$. Nach Konstruktion verlaufen alle drei Γ -Kanten von $\tilde{\gamma}$ durch grün-blaue Relatorzellen. Wie oben lösen wir die Insel I entlang des Teilweges $\tilde{\gamma}$ von ihrem Rand, ziehen sie zusammen und fügen auf dem Rand der zusammengezogenen Insel I , wo nötig, neue K -Ecken ein. Die drei grün-blauen

Relatorzellen, durch die $\tilde{\gamma}$ ursprünglich verlief, sind nun zu einer einzigen Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{y \rightarrow z}$ verbunden:



Wir ergänzen den Graphen Γ und die Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 entsprechend. Die Insel J wird dabei entweder mit mindestens einer ursprünglich bestehenden blauen Insel oder mit dem Meer verbunden. Jedenfalls gilt, dass sich $\chi(I)$ nach wie vor um 2 verringert und sich die Anzahl der Inseln insgesamt zumindest nicht mehr erhöht:



Bemerkung. Die beschriebenen Veränderungen des van-Kampen-Diagramms K haben den Rand von K nicht verändert. Folglich ist w_x nach wie vor ein Randwort von K .

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Damit ist auch der zweite Fall abgeschlossen, denn wir können die beschriebene Prozedur wiederholt auf I anwenden: Nach endlich vielen Schritten ist $\chi(I) = 0$ und die Anzahl der Inseln verringert sich. Erinnern wir uns nun an die Beweisstrategie!

Beweisstrategie. Unsere Begriffe und Argumente lassen sich natürlich auch auf rote und blaue einfach zusammenhängende Inseln übertragen, sodass wir die angesprochene Veränderung des van-Kampen-Diagramms K für jede einfach zusammenhängende Insel, die nicht genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat, durchführen können. Da sich die Anzahl der Inseln aber nicht beliebig oft verringern kann, erhalten wir nach endlich vielen Schritten ein van-Kampen-Diagramm K , in dem jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

Wir können also o. B. d. A. voraussetzen, dass jede einfach zusammenhängende rote Insel mindestens $n_X(A, B; D)$ Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat, jede grüne mindestens $n_Y(A, C; D)$, jede blaue mindestens $n_Z(B, C; D)$. Der Rest des Beweises ist vergleichsweise trivial: Wir zeigen, dass Γ unter diesen Voraussetzungen der leere Graph ist.

Nehmen wir also an, Γ sei nicht der leere Graph. Auf den Zusammenhangskomponenten von Γ definieren wir eine partielle Ordnung: Es gilt $A \leq B$ genau dann, wenn $A = B$ ist oder wenn A in einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - B$ enthalten ist. Da Γ ein endlicher Graph ist, gibt es ein minimales Element Γ_0 . Dieses Element hat die Eigenschaft, dass jede beschränkte Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - \Gamma_0$, d. h. jede „ Γ_0 -Insel“, eine einfach zusammenhängende Insel ist und somit genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

Auf die Γ_0 -Ecken verteilen wir Gewichte, die in unserem Fall auch negativ sein können. Zunächst erhält jede Γ_0 -Ecke das Gewicht 2π . Dann verteilen wir für jede Γ_0 -Kante das Gewicht -2π zu gleichen Teilen auf die Γ_0 -Ecken, mit denen sie inzidiert. Schließlich verteilen wir für jede Γ_0 -Insel I das Gewicht 2π , und zwar ebenfalls zu gleichen Teilen: Für jeden der $\chi(I)$ Farbwechsel in ihrem Randverlauf verteilen wir das Gewicht $\frac{2\pi}{\chi(I)}$ auf die Γ_0 -Ecke, an der der Farbwechsel stattfindet.

Da Γ_0 ein nichtleerer, endlicher, zusammenhängender, planarer Graph ist, können wir die Eulerformel anwenden, um das Gesamtgewicht aller Γ_0 -Ecken zu berechnen:

$$\text{Gesamtgewicht}(\Gamma_0) = 2\pi \cdot |\Gamma_0\text{-Ecken}| - 2\pi \cdot |\Gamma_0\text{-Kanten}| + 2\pi \cdot |\Gamma_0\text{-Inseln}| = 2\pi$$

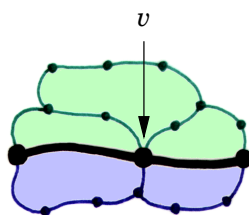
Vorüberlegung. Nun wissen wir, dass jede Γ_0 -Insel I genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat. Je nach dem, ob es sich bei I um eine rote, eine grüne oder eine blaue Insel handelt, können wir $\frac{2\pi}{\chi(I)}$ also wie folgt abschätzen:

Wenn I eine rote Insel ist: $\frac{2\pi}{\chi(I)} \leq \frac{2\pi}{n_X(A,B;D)} = \angle_X(A,B;D)$

Wenn I eine grüne Insel ist: $\frac{2\pi}{\chi(I)} \leq \frac{2\pi}{n_Y(A,C;D)} = \angle_Y(A,C;D)$

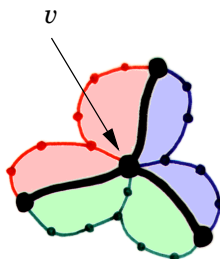
Wenn I eine blaue Insel ist: $\frac{2\pi}{\chi(I)} \leq \frac{2\pi}{n_Z(B,C;D)} = \angle_Z(B,C;D)$

Abschätzung des Gesamtgewichts. Nach Konstruktion enthält Γ , und folglich auch Γ_0 , keine Ecken von Valenz 0 oder 1. An einer Ecke v von Valenz $k = 2$ finden keine Farbwechsel statt, es gilt in diesem Fall also:



$$\text{Gewicht}(v) = 2\pi - k \cdot \pi = (2 - k) \cdot \pi = 0$$

Da Δ ein nichtsphärisches Dreieck von Gruppen ist, gilt für jede Ecke v von Valenz $k = 3$:



$$\text{Gewicht}(v) \leq 2\pi - k \cdot \pi + \underbrace{\angle_X(A,B;D) + \angle_Y(A,C;D) + \angle_Z(B,C;D)}_{\leq \pi} \leq (3 - k) \cdot \pi = 0$$

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Das Lemma 2.6 besagt nun, dass jeder der drei Winkel höchstens $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Also gilt für jede Ecke v von Valenz $k \geq 4$:

$$\text{Gewicht}(v) \leq 2\pi - k \cdot \pi + k \cdot \frac{\pi}{2} = (4 - k) \cdot \frac{\pi}{2} \leq 0$$

Es folgt, dass jede Γ_0 -Ecke nichtpositives Gewicht hat. Also kann auch das Gesamtgewicht aller Γ_0 -Ecken nicht positiv sein. ζ

Wir haben die Annahme, Γ sei nicht der leere Graph, zu einem Widerspruch geführt. Folglich muss Γ der leere Graph sein. Das van-Kampen-Diagramm K ist also vollständig rot gefärbt: Jede Kante ist mit einem Element aus \mathcal{X} beschriftet und jede Relatorzelle hat eine definierende Relation vom Typ \mathcal{R}_x als Randwort. Es gilt also $w_x =_X 1$. \square

Corollar 2.10 *In der Situation von Satz 2.9 sind auch die Homomorphismen $\varphi_A : A \rightarrow G$, $\varphi_B : B \rightarrow G$ und $\varphi_C : C \rightarrow G$ der Kantengruppen und der Homomorphismus $\varphi_D : D \rightarrow G$ der Zweizellengruppe in den Colimes injektiv.*

Beweis. Der Homomorphismus $\varphi_A : A \rightarrow G$ lässt sich nach der Verträglichkeitsbedingung als Komposition $\varphi_A = \varphi_X \circ \varphi_{AX}$ schreiben. Da sowohl $\varphi_{AX} : A \rightarrow X$ als auch $\varphi_X : X \rightarrow G$ injektiv sind, ist auch $\varphi_A : A \rightarrow G$ injektiv. Analoges gilt für $\varphi_B = \varphi_X \circ \varphi_{BX}$, $\varphi_C = \varphi_Y \circ \varphi_{CY}$ und $\varphi_D = \varphi_A \circ \varphi_{DA} = \varphi_X \circ \varphi_{AX} \circ \varphi_{DA}$. \square

2.3 Der Einbettungssatz für die Menge $M = X \cup Y \cup Z$

Im vergangenen Abschnitt haben wir nichtsphärische Dreiecke von Gruppen untersucht und gesehen, dass die Homomorphismen der einzelnen Gruppen in den Colimes injektiv sind, d. h. wir haben die erste Aussage des Satzes 1.7, des Normalformensatzes für freie Produkte mit Amalgam, auf nichtsphärische Dreiecke von Gruppen übertragen. In diesem Abschnitt werden wir die zweite Aussage übertragen.

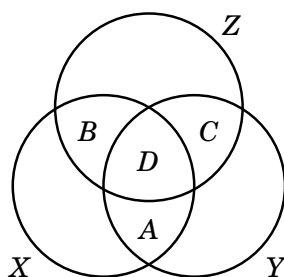
Definition 2.11 (Eigenschaft „realisierbar“) *Sei Δ ein Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Aufgrund der Verträglichkeitsbedingung setzen sich die Homomorphismen der einzelnen Gruppen zu einer wohldefinierten Abbildung φ_M der Menge $M = X \cup Y \cup Z$ (mit $X \cap Y = A$, $X \cap Z = B$, $Y \cap Z = C$ und $X \cap Y \cap Z = D$) in den Colimes zusammen. Wenn $\varphi_M : M \rightarrow G$ injektiv ist, dann nennen wir Δ realisierbar.*

An dieser Stelle sollte darauf hingewiesen werden, dass unsere Definition der Eigenschaft „realisierbar“ von der in [Bri91, Section 4.1] gegebenen abweicht.

Satz 2.12 *Ein nichtsphärisches Dreieck von Gruppen ist realisierbar.*

Beweis. Der Satz ist in dieser Form zwar weder in [Sta91] noch in [Bri91] zu finden, doch ergibt er sich aus den dort angestellten Überlegungen. Wir gehen hier allerdings einen anderen Weg und führen einen Beweis, der die im vergangenen Abschnitt eingeführte Technik weiterverwendet.

Betrachten wir die Menge M :



Wir müssen nun zeigen, dass $\varphi_M : M \rightarrow G$ injektiv ist. Aus Satz 2.9 und Corollar 2.10 wissen wir, dass die Homomorphismen der einzelnen Gruppen in den Colimes injektiv sind. Es genügt also, sich davon zu überzeugen, dass zwei Elemente aus verschiedenen Eckengruppen nur dann auf dasselbe Element des Colimes abgebildet werden können, wenn eines der beiden Elemente in der gemeinsamen Kantengruppe enthalten ist. Dann gibt es nämlich eine Eckengruppe, die beide Elemente enthält, und aus der Injektivität des Homomorphismus dieser Eckengruppe in den Colimes folgt, dass die beiden Elemente gleich sind.

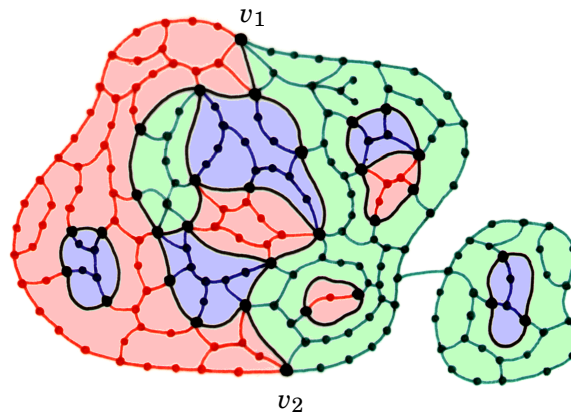
Aus Symmetriegründen genügt es, dies für die Eckengruppen X und Y zu zeigen. Seien also $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\varphi_M(x) =_G \varphi_M(y)$. Wie oben bemerkt genügt es, zu zeigen, dass $x \in A$ ist.

Sei w_x ein Wort über $\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-$ mit $w_x =_X x$ und sei w_y ein Wort über $\mathcal{Y}^+ \cup \mathcal{Y}^-$ mit $w_y =_Y y$. Es gilt $\varphi_M(x) =_G \varphi_M(y)$, $\Rightarrow \varphi_X(w_x) =_G \varphi_Y(w_y)$, $\Rightarrow w_x =_G w_y$, $\Rightarrow w_x w_y^{-1} =_G 1$.

Hinweis. Eine Bemerkung zur Notation: Wir erhalten das Wort w_y^{-1} , indem wir das Wort w_y von hinten nach vorne lesen und jeden Buchstaben durch den formal inversen Buchstaben ersetzen.

Kapitel 2 Realisierbarkeit

Wie im Beweis von Satz 2.9 für w_x , gibt es nun für $w_x w_y^{-1}$ ein van-Kampen-Diagramm K bezüglich unserer erweiterten Präsentation von G . Wieder definieren wir einen Graphen $\Gamma = \Gamma(K)$, wieder färben wir das van-Kampen-Diagramm K und die Relatorzellen, wieder können wir o. B. d. A. voraussetzen, dass jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat. Der wesentliche Unterschied zum Beweis von Satz 2.9 besteht nun darin, dass das van-Kampen-Diagramm K selbst zwei Farbwechsel in seinem Randverlauf hat. Die beiden Γ -Ecken, an denen diese Farbwechsel stattfinden, bezeichnen wir mit v_1 und v_2 .

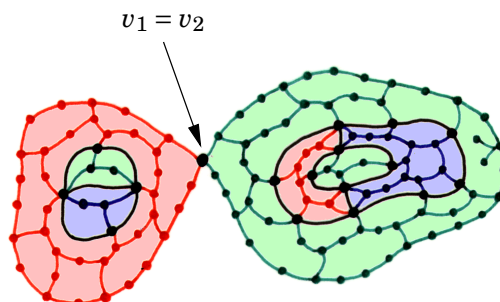


Im Gegensatz zu den anderen Γ -Ecken haben v_1 und v_2 nachher möglicherweise positives Gewicht. Wir können die Abschätzung aus dem Beweis von Satz 2.9 also leider nicht ohne Weiteres übernehmen, aber wir können sie der neuen Situation anpassen.

Fall 1: $v_1 = v_2$

Wenn v_1 und v_2 zusammenfallen, dann besteht das van-Kampen-Diagramm K aus einem van-Kampen-Diagramm für w_x und einem van-Kampen-Diagramm für w_y , die an einer Ecke miteinander verklebt sind. Insbesondere folgt daraus $w_x =_G 1$ und, mit Satz 2.9, $w_x =_X 1$. Also gilt:

$$w_x =_X 1 \Rightarrow x =_X 1 \Rightarrow x \in A$$



Fall 2: $v_1 \neq v_2$

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Wenn der Graph Γ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es jedenfalls eine Zusammenhangskomponente Γ_0 von Γ , die höchstens eine der beiden kritischen Γ -Ecken v_1 und v_2 enthält und bezüglich der im Beweis von Satz 2.9 definierten partiellen Ordnung minimal ist.

Wie im Beweis von Satz 2.9 verteilen wir Gewichte auf die Γ_0 -Ecken und überzeugen uns davon, dass das Gesamtgewicht wieder gleich 2π ist und das Gewicht einer jeden Γ_0 -Ecke, die von v_1 und v_2 verschieden ist, nichtpositiv ist. Wenn Γ_0 weder v_1 noch v_2 enthielte, hätten wir sofort einen Widerspruch gefunden. Also muss Γ_0 genau eine der beiden kritischen Ecken v_1 und v_2 enthalten, beispielsweise v_1 .

Da $v_1 \neq v_2$ ist, hat v_1 nicht die Valenz 0. Wenn v_1 die Valenz $k = 1$ hat, dann gilt:

$$\text{Gewicht}(v_1) = 2\pi - k \cdot \pi = \pi$$

Nun grenzen nicht nur Inseln sondern auch das Meer an v_1 an. Wenn also v_1 die Valenz $k \geq 2$ hat, dann wird sein Gewicht durch Farbwechsel im Randverlauf der angrenzenden Inseln um höchstens $(k-1) \cdot \frac{\pi}{2}$ erhöht und es gilt:

$$\text{Gewicht}(v_1) \leq 2\pi - k \cdot \pi + (k-1) \cdot \frac{\pi}{2} = (3-k) \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

Sowohl im Fall $k = 1$ als auch im Fall $k \geq 2$ ist das Gewicht von v_1 , und somit auch das Gesamtgewicht aller Γ_0 -Ecken, höchstens gleich π .

Der Graph Γ muss also zusammenhängend sein, folglich muss auch jede Insel einfach zusammenhängend sein. Da der Graph Γ nichtleer ist, können wir das bekannte Spiel durchführen: Wir verteilen Gewichte auf die Γ -Ecken und überzeugen uns davon, dass

Kapitel 2 Realisierbarkeit

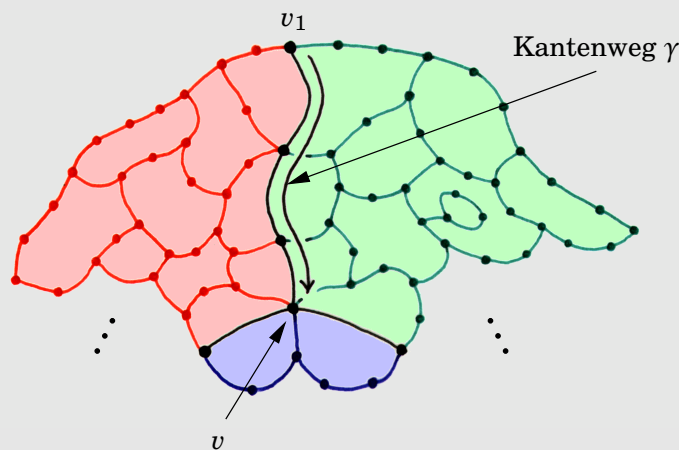
das Gesamtgewicht wieder gleich 2π ist und das Gewicht einer jeden Γ -Ecke, die von v_1 und v_2 verschieden ist, nichtpositiv ist.

Das berechnete Gesamtgewicht von 2π kann überhaupt nur dann erreicht werden, wenn v_1 und v_2 jeweils das Gewicht π und somit die Valenz 1 haben und alle anderen Γ -Ecken jeweils das Gewicht 0 haben.

Behauptung: In dieser Situation haben alle Γ -Ecken, außer v_1 und v_2 , die Valenz 2.

Nach Konstruktion haben alle Γ -Ecken, außer v_1 und v_2 , deren Valenz 1 ist, mindestens die Valenz 2. Angenommen, es gibt eine Γ -Ecke, deren Valenz größer als 2 ist.

Dann betrachten wir den eindeutig bestimmten reduzierten Γ -Kantenweg γ , der in der Γ -Ecke v_1 beginnt und solange Γ -Ecken von Valenz 2 durchläuft bis er schließlich eine derjenigen Γ -Ecken erreicht, deren Valenz größer als 2 ist. Diese Γ -Ecke bezeichnen wir mit v , ihre Valenz mit $k \geq 3$.



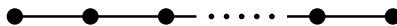
Da an die Γ -Kanten von γ weder von der einen noch von der anderen Seite eine Insel sondern von beiden Seiten das Meer grenzt, wird das Gewicht von v durch Farbwechsel im Rand der angrenzenden Inseln nur um höchstens $(k-2) \cdot \frac{\pi}{2}$ erhöht und es gilt:

$$\text{Gewicht}(v) \leq 2\pi - k \cdot \pi + (k-2) \cdot \frac{\pi}{2} = (2-k) \cdot \frac{\pi}{2} < 0$$

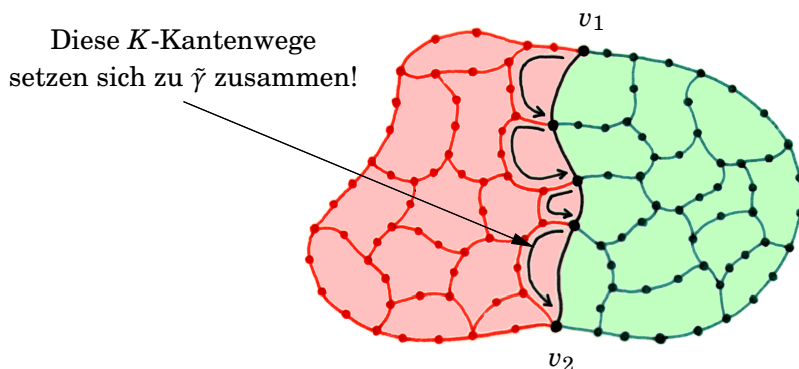
Daraus folgt: Es gibt eine Γ -Ecke, deren Gewicht negativ ist. ζ

Wir haben also die Annahme, dass es eine Γ -Ecke gibt, deren Valenz größer als 2 ist, zu einem Widerspruch geführt. Es folgt die Behauptung. \square

Folglich ist Γ ein Graph der folgenden Form mit mindestens 2 Ecken:



Sei γ der eindeutig bestimmte reduzierte Γ -Kantenweg von v_1 nach v_2 , er verläuft nur durch rot-grüne Relatorzellen. Wie schon bei der Konstruktion von $\text{in}(\cdot)$ und $\text{out}(\cdot)$ im Beweis von Satz 2.9 können wir auch jetzt jede einzelne Γ -Kante von γ durch den roten K -Kantenweg ersetzen, den wir erhalten, wenn wir nicht durch die Relatorzelle hindurchlaufen, sondern den entsprechenden roten K -Kanten im Rand der Relatorzelle folgen. Entlang des K -Kantenweges $\tilde{\gamma}$, den wir erhalten, wenn wir jede einzelne Γ -Kante durch den entsprechenden roten K -Kantenweg ersetzen, können wir das Wort $w_{\tilde{\gamma}}$ ablesen. Da γ nur durch rot-grüne Relatorzellen verläuft, gibt es ein $a \in A$ mit $w_{\tilde{\gamma}} =_X a$.



Andererseits ist der Teilgraph von K , der aus allen roten und schwarzen K -Ecken und allen roten K -Kanten besteht, ein van-Kampen-Diagramm für $w_x w_{\tilde{\gamma}}^{-1}$. Also gilt:

$$w_x w_{\tilde{\gamma}}^{-1} =_G 1 \Rightarrow w_x w_{\tilde{\gamma}}^{-1} =_X 1 \Rightarrow w_x =_X w_{\tilde{\gamma}} \Rightarrow x =_X a \Rightarrow x \in A$$

In beiden Fällen, Fall 1 und Fall 2, gilt $x \in A$, es folgt die Behauptung. □

Wir haben nun die ersten beiden Aussagen des Satzes 1.7, des Normalformensatzes für freie Produkte mit Amalgam, auf nichtsphärische Dreiecke von Gruppen übertragen. Die dritte Aussage beschäftigt sich mit der eigentlichen Normalform. Es drängt sich die Frage auf, ob und wie man auch die dritte Aussage auf nichtsphärische Dreiecke von Gruppen übertragen kann.

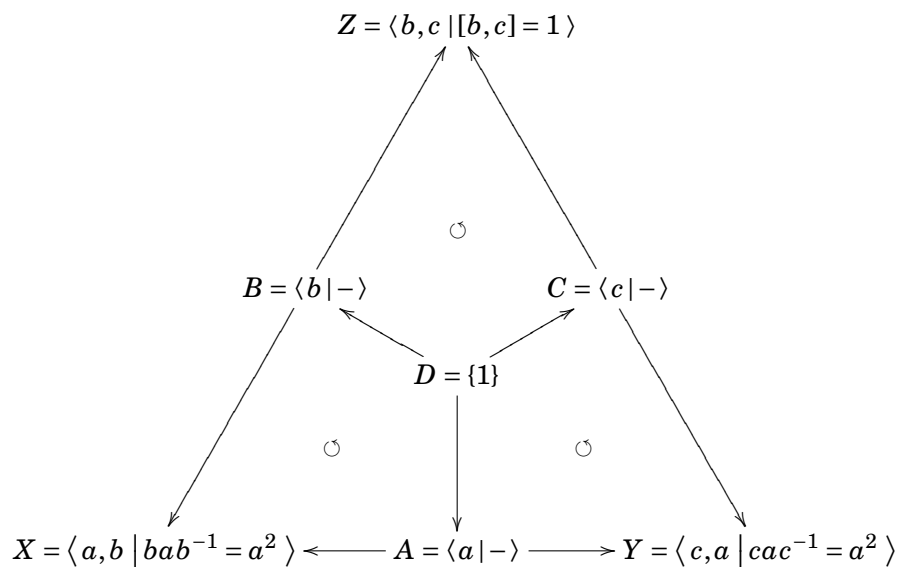
Zwar stellt Bridson in [Bri91] eine Arbeit mit dem Titel „Normal forms in triangles of groups“ in Aussicht, hat diese aber bis heute noch nicht publiziert. Wir werden uns in

den nächsten beiden Kapiteln etwas elementareren Fragen zuwenden, zuvor beschließen wir dieses zweite Kapitel mit einer Beobachtung zum Verhältnis zwischen den Sätzen 2.9 und 2.12.

2.4 Über das Verhältnis zwischen den Sätzen 2.9 und 2.12

Wenn man die beiden Sätze 2.9 und 2.12 miteinander vergleicht, stellt sich die Frage, ob die Injektivität der Abbildung φ_M bereits aus der Injektivität der Homomorphismen der einzelnen Eckengruppen in den Colimes folgt oder ob wir zum Beweis der Injektivität tatsächlich ein weiteres Mal von der Voraussetzung, dass Δ nichtsphärisch ist, Gebrauch machen mussten. Es stellt sich heraus, dass die letztgenannte Alternative zutrifft.

Wir betrachten das folgende Beispiel:



Die Homomorphismen sind durch $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ gegeben. Da es sich bei den Definitionsmengen um freie Gruppen handelt, lassen sich diese Zuordnungen problemlos zu Homomorphismen fortsetzen.

Satz 2.13 *Bei diesem Beispiel, nennen wir es Δ_3 , handelt es sich um ein nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen.*

Beweis. Die meisten der anzustellenden Überlegungen sind entweder trivial oder bereits im Beweis von 1.12 angestellt worden. Die Injektivität der Homomorphismen φ_{BZ} und

φ_{CZ} sowie die Gleichung $\text{im}(\varphi_{BZ}) \cap \text{im}(\varphi_{CZ}) = \{1\}$ ergeben sich aus der Beobachtung, dass jedes Wort über b, c und deren Inversen, das in der Eckengruppe Z das neutrale Element beschreibt, die Buchstaben b und b^{-1} sowie c und c^{-1} in jeweils gleicher Anzahl enthalten muss. \square

Satz 2.14 *Die Homomorphismen der einzelnen Gruppen von Δ_3 in den Colimes G sind injektiv.*

Beweis. Es genügt, die Injektivität für die Homomorphismen der Eckengruppen in den Colimes nachzuweisen, aus Symmetriegründen sogar nur für $\varphi_X : X \rightarrow G$ und $\varphi_Z : Z \rightarrow G$. Zunächst beobachten wir, dass man den Colimes G wie folgt beschreiben kann:

$$G \cong \langle a, b, c \mid bab^{-1} = a^2, cac^{-1} = a^2, [b, c] = 1 \rangle$$

1. *Behauptung:* Der Homomorphismus $\varphi_X : X \rightarrow G$ ist injektiv.

Wir wählen den Normalteiler $N := \langle\langle bc^{-1} \rangle\rangle \trianglelefteq G$. Mit Hilfe von Tietze-Transformationen können wir einsehen:

$$G/N \cong \langle a, b, c \mid bab^{-1} = a^2, cac^{-1} = a^2, [b, c] = 1, b = c \rangle \cong \langle a, b \mid bab^{-1} = a^2 \rangle$$

Wenn wir nun die kanonische Projektion $G \twoheadrightarrow G/N$ mit dem Buchstaben π bezeichnen, die Komposition $\pi \circ \varphi_X : X \rightarrow G/N$ betrachten und die letztgenannte Präsentation der Faktorgruppe G/N wählen, dann erkennen wir, dass $\pi \circ \varphi_X(a) = a$ und $\pi \circ \varphi_X(b) = b$ gilt und es sich folglich bei der Komposition $\pi \circ \varphi_X$ um einen Isomorphismus handelt. Insbesondere ist φ_X injektiv.

2. *Behauptung:* Der Homomorphismus $\varphi_Z : Z \rightarrow G$ ist injektiv.

Wir wählen nun den Normalteiler $N := \langle\langle a \rangle\rangle \trianglelefteq G$. In diesem Fall gilt nämlich:

$$G/N \cong \langle a, b, c \mid bab^{-1} = a^2, cac^{-1} = a^2, [b, c] = 1, a = 1 \rangle \cong \langle b, c \mid [b, c] = 1 \rangle$$

Bei der Komposition $\pi \circ \varphi_Z : Z \rightarrow G/N$ handelt es sich, wie oben, um einen Isomorphismus. Insbesondere ist φ_Z injektiv. \square

Satz 2.15 Δ_3 ist nicht realisierbar.

Beweis. Wir arbeiten erneut mit der im Beweis von Satz 2.14 gegebenen Präsentation des Colimes G und zeigen, dass einerseits zwar $b^{-1}ab \in X - A$ und $c^{-1}ac \in Y - A$ gilt, andererseits aber $b^{-1}ab =_G c^{-1}ac$.

Kapitel 2 Realisierbarkeit

1. *Behauptung:* Es gilt $b^{-1}ab \in X - A$.

Angenommen, es gilt $b^{-1}ab \in A$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $b^{-1}ab =_X a^m$, $\Rightarrow a =_X ba^m b^{-1}$,
 $\Rightarrow a =_X (bab^{-1})^m$, $\Rightarrow a =_X a^{2m}$, $\Rightarrow a =_A a^{2m}$, $\Rightarrow 1 = 2m$. \nexists Folglich muss $b^{-1}ab \in X - A$
gelten. Völlig analog zeigt man, dass auch $c^{-1}ac \in Y - A$ gilt.

2. *Behauptung:* Es gilt $b^{-1}ab =_G c^{-1}ac$.

Wir können unter Verwendung der definierenden Relationen ganz einfach beobachten,
dass $b^{-1}ab =_G c^{-1}ac \Leftrightarrow a =_G bc^{-1}acb^{-1} \Leftrightarrow a =_G c^{-1}bab^{-1}c \Leftrightarrow cac^{-1} =_G bab^{-1} \Leftrightarrow a^2 =_G a^2$
gilt. Die letztgenannte Aussage ist wahr, also auch die erstgenannte. \square

Übungsaufgabe. Eine Diplomarbeit ist mit Sicherheit nicht das optimale Medium um Übungsaufgaben zu stellen. Ich möchte an dieser Stelle dennoch darauf hinweisen, dass ich das Beispiel Δ_3 gefunden habe, indem ich nicht gefragt habe, wie ein entsprechendes van-Kampen-Diagramm in einem möglichst übersichtlichen Dreieck von Gruppen, dessen Winkel alle $\frac{\pi}{2}$ betragen, aussehen kann. Dem interessierten Leser empfehle ich daher, den Beweis, dass $b^{-1}ab =_G c^{-1}ac$ gilt, mit einem van-Kampen-Diagramm zu illustrieren.

KAPITEL 3

Freie Untergruppen

In den nächsten beiden Kapiteln werden wir uns schließlich mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen der Colimes eines nichtsphärischen Dreiecks von Gruppen ein Element unendlicher Ordnung oder sogar eine nichtabelsche freie Untergruppe, und folglich freie Untergruppen von beliebigem abzählbarem Rang, enthält.

3.1 Die Vorgeschichte

Es gibt bereits eine Reihe von Publikationen, die sich, wenn auch nur beiläufig, mit dieser Frage beschäftigen. Zwei Resultate sind dabei besonders hervorzuheben: Das eine von Edjvet, Rosenberger, Stille und Thomas, siehe [ERST00, Proposition 3.1], und das andere von Howie und Kopteva, siehe [HK06, Proposition 2.2].

In den genannten Publikationen wird allerdings aus praktischen Gründen nicht mit dem ursprünglichen Gersten-Stallings-Winkel, wie wir ihn in Definition 2.1 eingeführt haben, sondern mit einer Variante gearbeitet:

Bei uns heißt es in Definition 2.1 auf Seite 19: „Die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die es Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in G$ gibt, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$ ist, bezeichnen wir mit $n_G(A, B; D)$.“

Bei der Variante des Gersten-Stallings-Winkels lässt man die Zweizellengruppe D außer Acht und ersetzt den genannten Abschnitt aus Definition 2.1 durch den folgenden: „Die

Kapitel 3 Freie Untergruppen

kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die es Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in G$ gibt, die abwechselnd in $A - \{1\}$ und $B - \{1\}$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$ ist, bezeichnen wir mit $n_G(A, B; D)$.“

Die übrigen Passagen der beiden Definitionen sind identisch, sodass wir für die Variante des Gersten-Stallings-Winkels festhalten können: Während sich die Winkelsumme eines Dreiecks von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D nicht von der ursprünglichen Winkelsumme unterscheidet, beträgt die Winkelsumme eines Dreiecks von Gruppen mit nichttrivialer Zweizellengruppe D stets 3π .

Satz 3.1 (Edjvet, Rosenberger, Stille und Thomas, 2000) *Mit der oben beschriebenen Variante des Gersten-Stallings-Winkels gilt: Der Colimes eines nichtsphärischen nichtausgearteten Dreiecks von Gruppen enthält ein Element unendlicher Ordnung.*

Satz 3.2 (Howie und Kopteva, 2006) *Mit dieser Variante gilt außerdem: Der Colimes eines hyperbolischen nichtausgearteten¹ Dreiecks von Gruppen enthält eine nichtabelsche freie Untergruppe.*

Über Dreiecke von Gruppen mit nichttrivialer Zweizellengruppe D machen diese beiden Sätze keine Aussage. Es ist Ziel dieses Kapitels, die beiden Sätze so zu verallgemeinern, dass sie für alle nichtsphärischen und hyperbolischen Dreiecke von Gruppen² gelten.

Um meinen bescheidenen Beitrag an dieser Stelle richtig einordnen zu können, sei darauf hingewiesen, dass ich die Beweisideen weitgehend übernehmen und lediglich bei deren technischer Umsetzung etwas behutsamer zu Werke gehen werde.

3.2 Das Gewichtslemma

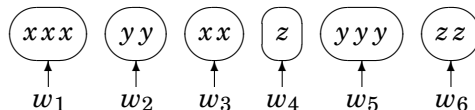
3.2.1 Einige wichtige Begriffe

Definition 3.3 (Block) *Sei w entweder das leere Wort oder ein nichtleeres Wort über den Buchstaben x, y und z , dessen erster und letzter Buchstabe verschieden sind. Wir können w auf eindeutige Weise in ein Produkt von Teilwörtern $w_1, w_2, \dots, w_n \in (\{x\}^* \cup \{y\}^* \cup \{z\}^*) - \{e\}$ maximaler Länge zerlegen. Jedes dieser Teilwörter bezeichnen wir als einen Block.*

¹Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass in [HK06] mit nicht-ecken-ausgearteten Dreiecken von Gruppen gearbeitet wird. Doch alle nichtausgearteten Dreiecke von Gruppen sind nicht-ecken-ausgeartet. Siehe hierzu auch Definition 4.10 und Satz 4.12.

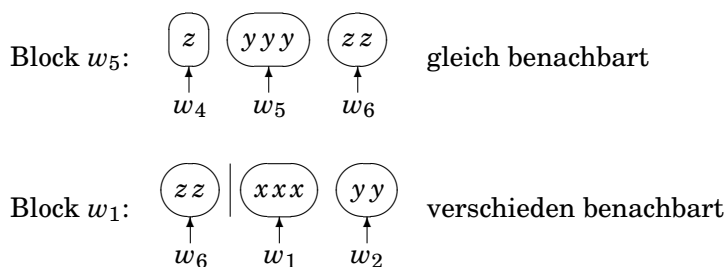
²Natürlich im Sinne des ursprünglichen Gersten-Stallings-Winkels!

Um die nun folgenden Begriffe an einem konkreten Beispiel zu illustrieren, betrachten wir das Wort $w = xxxyyxxzyyyzz$ und dessen Blockzerlegung:



Definition 3.4 (Eigenschaft „gleich b.“/„verschieden b.“) Sei $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ wie in Definition 3.3. Wenn wir uns das Wort w zyklisch angeordnet vorstellen, dann hat jeder Block einen linken und einen rechten Nachbarblock. Je nach dem, ob die beiden Nachbarblöcke Potenzen desselben Buchstabens sind oder nicht, bezeichnen wir den Block entweder als *gleich benachbart* oder als *verschieden benachbart*.

In unserem Beispiel betrachten wir die beiden Blöcke w_5 und w_1 . Der eine von ihnen ist *gleich benachbart*, der andere *verschieden benachbart*:



Definition 3.5 (Charakteristik: 1. Teil) Sei $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ wie in Definition 3.3. Die Charakteristik $\chi(w_i)$ eines Blockes w_i ist die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}_0$, sodass entweder $|w_i| < 2m + 3$ ist oder $|w_i| = 2m + 3$ und w_i verschieden benachbart ist. Alternativ können wir zur Bestimmung von $\chi(w_i)$ die folgende Tabelle verwenden:

Länge des Blocks w_i	Wie ist er benachbart?	Charakteristik $\chi(w_i)$
1	—	0
2	—	0
3	verschieden	0
3	gleich	1
4	—	1
5	verschieden	1
\vdots	\vdots	\vdots
$2m + 1$	gleich	m
$2m + 2$	—	m
$2m + 3$	verschieden	m

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Definition 3.6 (Charakteristik: 2. Teil) Sei $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ wie in Definition 3.3. Die Charakteristik $\hat{\chi}(w)$ des Wortes w ist die Summe der Charakteristiken seiner Blöcke:

$$\hat{\chi}(w) := \sum_{i=1}^n \chi(w_i)$$

Unser Beispiel $w = xxxyyxxzyyyzz$ hat die Charakteristik $\hat{\chi}(w) = 1$, da, wovon man sich leicht überzeugen kann, $\chi(w_1) = \chi(w_2) = \chi(w_3) = \chi(w_4) = 0$, $\chi(w_5) = 1$ und $\chi(w_6) = 0$ ist.

3.2.2 Die Formulierung und der Beweis des Gewichtslemmas

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir mit nur noch mit bestimmten Wörtern arbeiten. Zunächst definieren wir, welche das sind, und wenden uns anschließend dem Gewichtslemma zu.

Definition 3.7 (Eigenschaft „ ε -speziell“) Sei $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ wie in Definition 3.3 und sei $\varepsilon \geq 0$. Wenn die folgende Implikation erfüllt ist, dann bezeichnen wir das Wort w als ε -speziell:

$$\hat{\chi}(w) \geq 2 \Rightarrow \varepsilon > 0 \wedge |w| > \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(w) - 2) \cdot \pi + 2 \cdot \hat{\chi}(w)$$

Im Beweis des nun folgenden Gewichtslemmas werden wir sehen, dass diese Definition genau auf unsere Bedürfnisse zurechtgeschnitten ist.

Lemma 3.8 (Gewichtslemma) Sei $g : \{x, y, z\}^* \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ ein Monoid-Homomorphismus mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$$g(x), g(y), g(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) + g(y) + g(z) \leq \pi$$

Seien außerdem $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n$ wie in Definition 3.3 und $\varepsilon := \pi - g(x) - g(y) - g(z) \geq 0$.

Wenn w ein ε -spezielles Wort ist, dann gilt die folgende Ungleichung:

$$-n \cdot \pi + g(w) = -n \cdot \pi + \sum_{i=1}^n g(w_i) < 2\pi$$

Beweis. Wir bezeichnen den Term $-n \cdot \pi + g(w)$ als Gewicht $G(w)$. Nun verkürzen wir das Wort w und betrachten die damit verbundene Veränderung des Gewichts.

Aus jedem Block mit Charakteristik $m > 0$ entfernen wir $2m$ Buchstaben und bezeichnen das so verkürzte Wort mit $w' = w'_1 \cdot w'_2 \cdot \dots \cdot w'_n$. Es hat die Länge $|w'| = |w| - 2 \cdot \hat{\chi}(w)$, die

Charakteristik $\hat{\chi}(w') = 0$ und erfüllt die Ungleichung $G(w) \leq G(w') + \hat{\chi}(w) \cdot \pi$. Zum Beweis des Gewichtslemmas genügt es also, die folgende Ungleichung zu beweisen:

$$G(w') + \hat{\chi}(w) \cdot \pi < 2\pi$$

Um dieses Ziel zu erreichen, beginnen wir mit dem Wort w' und entfernen daraus einen Block nach dem anderen. Wir werden auf den nächsten Seiten beobachten, dass sich das Gewicht des Wortes dabei um mindestens $\frac{\varepsilon}{5}$ pro entferntem Buchstaben erhöht. Wenn wir uns einmal davon überzeugt haben, dass diese Quote tatsächlich erreicht wird, dann können wir das Gewichtslemma vergleichsweise einfach beweisen:

Fall 1: $\hat{\chi}(w) \leq 1$

Nachdem wir alle Blöcke entfernt haben, erhalten wir das leere Wort e . Es gilt also:

$$G(w') + \frac{\varepsilon}{5} \cdot |w'| \leq G(e) = 0 \Rightarrow G(w') \leq 0 \Rightarrow G(w') + \hat{\chi}(w) \cdot \pi < 2\pi$$

Fall 2: $\hat{\chi}(w) \geq 2$

Nachdem wir alle Blöcke entfernt haben, erhalten wir das leere Wort e . Da w ε -speziell und $\hat{\chi}(w) \geq 2$ ist, gilt:

$$\varepsilon > 0 \wedge |w| > \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(w) - 2) \cdot \pi + 2 \cdot \hat{\chi}(w)$$

Wir können also auch die Länge von w' abschätzen:

$$|w'| = |w| - 2 \cdot \hat{\chi}(w) > \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(w) - 2) \cdot \pi + 2 \cdot \hat{\chi}(w) - 2 \cdot \hat{\chi}(w) = \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(w) - 2) \cdot \pi$$

Da aber, wie im ersten Fall, $G(w') + \frac{\varepsilon}{5} \cdot |w'| \leq G(e) = 0$ ist, folgt:

$$G(w') + \frac{\varepsilon}{5} \cdot \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(w) - 2) \cdot \pi < 0 \Rightarrow G(w') + \hat{\chi}(w) \cdot \pi < 2\pi$$

Es bleibt zu zeigen, dass die genannte Quote tatsächlich erreicht wird. Hierzu stellen wir uns das Wort w' erneut zyklisch angeordnet vor und entfernen die Blöcke auf die folgende Weise:

① Wenn drei verschieden benachbarte Blöcke aufeinander folgen, dann entfernen wir alle drei in einem Schritt. Man kann beobachten, dass die verbliebenen Blöcke danach

Kapitel 3 Freie Untergruppen

genauso benachbart sind, wie sie es zuvor waren: Insbesondere handelt es sich nach wie vor um ein Wort, das die Voraussetzungen von Definition 3.3 erfüllt und Charakteristik 0 hat.

Betrachte zum Beispiel:

$$\overbrace{z} \quad \overbrace{x \cdots x} \quad \overbrace{y \cdots y} \quad \overbrace{z \cdots z} \quad \overbrace{x}$$

Doch nun hat sich die Anzahl der Blöcke um 3 verringert, weswegen sich das Gewicht zunächst um 3π erhöht, und es sind jeweils bis zu drei x , y , z entfernt worden, weswegen sich das Gewicht wieder um maximal $3 \cdot (\pi - \varepsilon)$ verringert. Insgesamt hat es sich somit um mindestens 3ε erhöht, pro entferntem Buchstaben also um mindestens $\frac{3\varepsilon}{9} = \frac{\varepsilon}{3} \geq \frac{\varepsilon}{5}$.

② Wenn zwei gleich benachbarte Blöcke aufeinander folgen, dann entfernen wir alle beide in einem Schritt. Man kann auch hier beobachten, dass die verbliebenen Blöcke danach genauso benachbart sind, wie sie es zuvor waren.

Betrachte zum Beispiel:

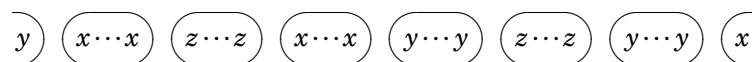
$$\overbrace{y} \quad \overbrace{x \cdots x} \quad \overbrace{y \cdots y} \quad \overbrace{x}$$

Doch nun hat sich die Anzahl der Blöcke um 2 verringert, weswegen sich das Gewicht zunächst um 2π erhöht, und es sind jeweils bis zu zwei x , y , z entfernt worden, weswegen sich das Gewicht wieder um maximal $2 \cdot (\pi - \varepsilon)$ verringert. Insgesamt hat es sich somit um mindestens 2ε erhöht, pro entferntem Buchstaben also um mindestens $\frac{2\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{5}$.

Die beiden Schritte ① und ② führen wir durch, wo immer es möglich ist. Da wir das Wort bei jeder Durchführung echt verkürzen, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. Wir wissen also, dass danach weder drei verschieden benachbarte noch zwei gleich benachbarte Blöcke aufeinander folgen.

③ Wenn in dieser Situation zwei verschieden benachbarte Blöcke aufeinander folgen, dann enthält das Wort mindestens sechs Blöcke. Dies zu zeigen, überlassen wir dem Leser als Fingerübung. Wir entfernen nun sechs Blöcke in einem Schritt, und zwar neben den beiden genannten Blöcken die nächsten beiden linken und die nächsten beiden rechten Nachbarblöcke. Man kann auch hier beobachten, dass die verbliebenen Blöcke danach genauso benachbart sind, wie sie es zuvor waren.

Betrachte zum Beispiel:



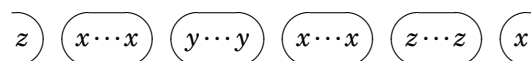
Doch nun hat sich die Anzahl der Blöcke um 6 verringert, weswegen sich das Gewicht zunächst um 6π erhöht, und es sind jeweils bis zu sechs x , y , z entfernt worden, weswegen sich das Gewicht wieder um maximal $6 \cdot (\pi - \varepsilon)$ verringert. Insgesamt hat es sich somit um mindestens 6ε erhöht, pro entferntem Buchstaben also um mindestens $\frac{6\varepsilon}{16} = \frac{3\varepsilon}{8} \geq \frac{\varepsilon}{5}$.

Nach jeder Durchführung von Schritt ③ müssen wir aufräumen: Mit Hilfe der beiden Schritte ① und ② stellen wir sicher, dass die Ausgangssituation von Schritt ③ weiterhin erfüllt ist und weder drei verschieden benachbarte noch zwei gleich benachbarte Blöcke aufeinander folgen.

Wir führen Schritt ③ inklusive der Aufräumarbeiten durch, wo immer es möglich ist. Da wir das Wort bei jeder Durchführung echt verkürzen, bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab. Wir wissen also, dass danach weder zwei verschieden benachbarte noch zwei gleich benachbarte Blöcke aufeinander folgen, d. h. verschieden benachbarte und gleich benachbarte Blöcke wechseln einander ab.

④ Wenn in dieser Situation nicht bereits das leere Wort erreicht ist, dann enthält das Wort mindestens vier Blöcke. Dies zu zeigen, überlassen wir dem Leser als Fingerübung. Wir entfernen nun vier beliebige aufeinander folgende Blöcke in einem Schritt. Man kann auch hier beobachten, dass die verbliebenen Blöcke danach genauso benachbart sind, wie sie es zuvor waren.

Betrachte zum Beispiel:



Doch nun hat sich die Anzahl der Blöcke um 4 verringert, weswegen sich das Gewicht zunächst um 4π erhöht, und es sind jeweils bis zu zwei x , y , z sowie bis zu vier weitere Exemplare eines der drei Buchstaben entfernt worden, weswegen sich das Gewicht wieder um maximal $2 \cdot (\pi - \varepsilon) + 4 \cdot \frac{\pi}{2}$ verringert. Insgesamt hat es sich somit um mindestens 2ε erhöht, pro entferntem Buchstaben also um mindestens $\frac{2\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5}$.

Da offensichtlich auch nach jeder Durchführung von Schritt ④ verschieden benachbarte und gleich benachbarte Blöcke einander abwechseln, sind, im Gegensatz zu Schritt ③, keine weiteren Aufräumarbeiten mehr zu leisten.

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Wir führen Schritt ④ nun so lange durch, bis wir schließlich das leere Wort erreichen. Da wir das Wort bei jeder Durchführung echt verkürzen, ist das nach endlich vielen Schritten der Fall. □

3.3 Die Verallgemeinerung von Satz 3.1

Mit Hilfe des Gewichtslemmas beweisen wir nun die beiden Sätze 3.1 und 3.2 für alle nichtsphärischen und hyperbolischen Dreiecke von Gruppen.

Satz 3.9 (Verallgemeinerung von Satz 3.1) *Der Colimes eines nichtsphärischen nichtausgearteten Dreiecks von Gruppen enthält ein Element unendlicher Ordnung.*

Beweis. Sei Δ ein nichtsphärisches nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Da Δ nichtausgeartet ist, gibt es ein $a \in A - D$, ein $b \in B - D$ und ein $c \in C - D$. Wir werden zeigen, dass deren Produkt $abc \in G$ unendliche Ordnung hat.

In den Beweisen der Sätze 2.9 und 2.12 haben wir mit der folgenden Präsentierung des Colimes G gearbeitet:

$$G \cong \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}} \rangle$$

Diese Präsentierung nehmen wir zwar auch hier als Grundlage, fügen aber noch weitere Erzeugende und definierende Relationen hinzu, um uns die Arbeit mit den Elementen $a \in A - D$, $b \in B - D$ und $c \in C - D$ sowie den Elementen der Zweizellengruppe D ein wenig zu erleichtern:

$$G \cong \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, D \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow a}, \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow b}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow a}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow c}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow b}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow c}, \\ \mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow D}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow D}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow D} \rangle$$

mit $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow a} := \{w = a \mid w \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* - \{e\} : w =_X a\}$

Wir definieren $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow b}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow a}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow c}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow b}$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow c}$ analog.

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow D} := \{w = d \mid d \in D, w \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* - \{e\} : w =_X d\}$$

Wir definieren $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow D}$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \leftrightarrow D}$ analog.

Den Beweis, dass sich die beiden Präsentierungen mit Hilfe von Tietze-Transformationen ineinander überführen lassen, überlassen wir dem Leser als Fingerübung. Die erweiterte Präsentation von G bezeichnen wir mit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, b, c)$.

Angenommen, das Produkt $abc \in G$ hat endliche Ordnung. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(abc)^n =_G 1$, und folglich finden wir für das Wort $(abc)^n$ ein van-Kampen-Diagramm K bezüglich der Präsentation \mathcal{P} .

Wir versuchen nun, die beiden Vorbereitungsschritte, die wir bereits in den Beweisen der beiden Sätze 2.9 und 2.12 durchgeführt haben, auf unsere Situation zu übertragen.

Es heißt im Beweis von Satz 2.12 auf Seite 40:

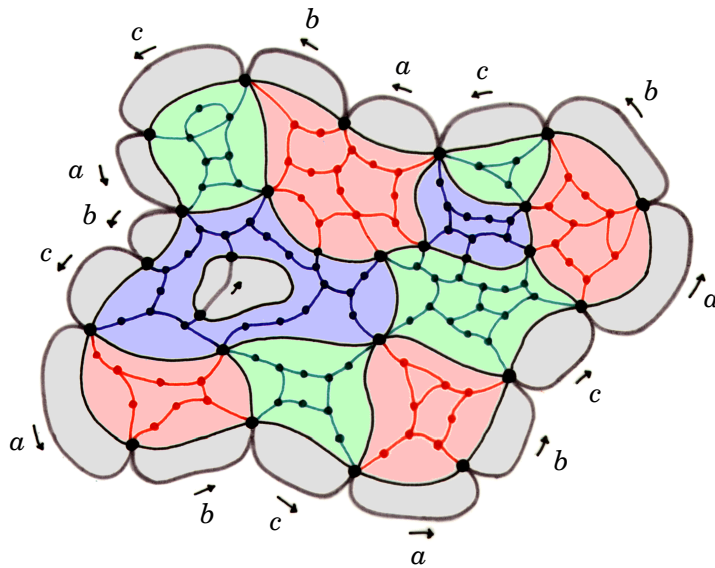
Vorbereitungsschritt 1: „Wieder definieren wir einen Graphen $\Gamma = \Gamma(K)$, wieder färben wir das van-Kampen-Diagramm K und die Relatorzellen, ...“

Die Eckenmenge von Γ definieren wir wie im Beweis von Satz 2.9 auf Seite 26, mit der Besonderheit, dass wir nicht mehr drei sondern sieben Erzeugendenmengen haben: „Eine K -Ecke ist genau dann eine Γ -Ecke, wenn es zwei K -Kanten gibt, die beide mit der K -Ecke inzidieren aber mit Elementen aus verschiedenen Erzeugendenmengen beschriftet sind.“

Und auch die Definition der Kantenmenge von Γ unterscheidet sich allein dadurch von der im Beweis von Satz 2.9 gegebenen, dass wir nicht mehr nur die Relatorzellen, die eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}}$ als Randwort haben, sondern auch die Relatorzellen, die eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow a}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow b}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow a}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow c}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \rightarrow b}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \rightarrow c}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow D}$, $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow D}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \rightarrow D}$ als Randwort haben, durch eine Jordankurve in zwei Gebiete zerschneiden und so eine Kante von Γ realisieren.

Für die drei Erzeugendenmengen \mathcal{X} , \mathcal{Y} und \mathcal{Z} haben wir schon im Beweis von Satz 2.9 drei Farben gewählt, für die vier weiteren Erzeugendenmengen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ und D wählen wir die gemeinsame Farbe Grau. Nun können wir das van-Kampen-Diagramm K und die Relatorzellen wie im Beweis von Satz 2.9 färben.

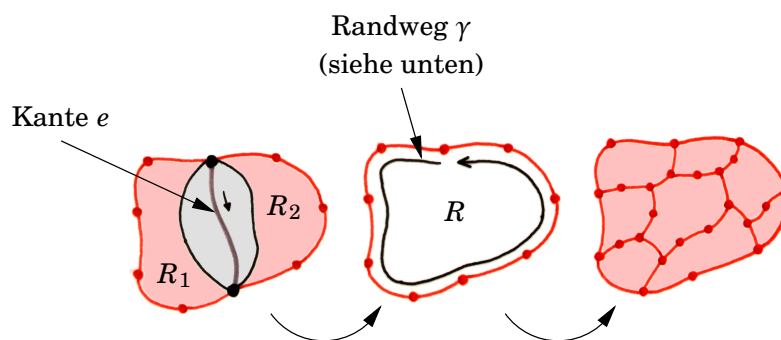
Wieder betrachten wir Inseln und Meer, nach wie vor ist jede Insel einfarbig. Nun jedoch kann es passieren, dass das van-Kampen-Diagramm K nicht nur rote, grüne, blaue Inseln sondern auch graue Inseln umschließt.



Unsere nächste Aufgabe ist, die grauen Inseln zu entfernen: Jede graue Insel enthält nur eine einzige graue Kante. Indem wir diese graue Kante entfernen, verbinden wir die beiden angrenzenden Relatorzellen zu einer beschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{E}^2 - K$.

Wir bezeichnen die ursprüngliche graue Kante mit e , die ursprünglichen Relatorzellen mit R_1 und R_2 und die neue Zusammenhangskomponente mit R .

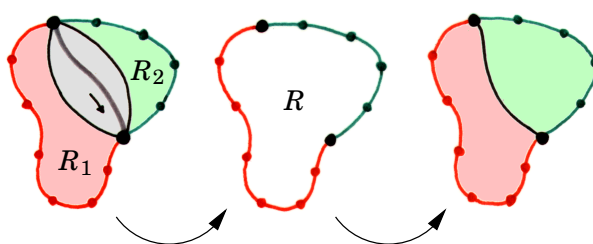
Fall 1: Wenn R_1 und R_2 definierende Relationen desselben Typs als Randwort hatten, beispielsweise definierende Relationen vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow a}$, dann enthält R nur K -Kanten einer einzigen Farbe in seinem Rand. In unserem Beispiel sind das nur rote Kanten.



Sei γ ein Randweg von R , der im Anfangspunkt von e startet und den Rand von R mit einer beliebigen Orientierung umläuft. Entlang dieses Randweges γ können wir ein Wort $w \in (\mathcal{X}^+ \cup \mathcal{X}^-)^* - \{e\}$ mit $w =_X a \cdot a^{-1} =_X 1$ ablesen.

Wir können also in R ein van-Kampen-Diagramm für w einkleben, wobei jede Kante des eingeklebten Diagramms mit einem Element aus \mathcal{X} beschriftet ist und jede Relatorzelle eine definierende Relation vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ als Randwort hat.

Fall 2: Wenn aber R_1 und R_2 definierende Relationen verschiedener Typen als Randwort hatten, beispielsweise definierende Relationen vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow a}$ und $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow a}$, dann hat auch R , ohne weiteres Zutun, eine definierende Relation als Randwort. In unserem Beispiel ist sie vom Typ $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$.



Die hier an zwei Beispielen illustrierten Veränderungen des van-Kampen-Diagramms K lassen sich natürlich auf alle grauen Inseln übertragen. Nach diesen Veränderungen und der damit verbundenen Veränderung des Graphen Γ sowie der Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 sind die grauen Inseln verschwunden.

Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass es keine grauen Inseln gibt. Auch die nun folgenden Veränderungen des van-Kampen-Diagramms K werden alle von der Art sein, dass sie keine grauen Inseln mehr erzeugen.

Vorbereitungsschritt 2: „...wieder können wir o. B. d. A. voraussetzen, dass jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.“

Dieser Vorbereitungsschritt ist nicht ganz einfach auf unsere Situation zu übertragen. Wir schwächen ihn also ab und erlauben uns, anstelle des van-Kampen-Diagramms K eine Quasischeibe L von K zu betrachten.

Eine solche Quasischeibe L von K , das sei an dieser Stelle ausdrücklich erwähnt, wird in unserer konkreten Situation zwar mit Hilfe des van-Kampen-Diagramms K konstruiert, muss aber nach Definition gar nicht so viele Gemeinsamkeiten mit ihm haben.

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Definition 3.10 (Quasischeibe) Sei K ein van-Kampen-Diagramm bezüglich unserer Präsentation \mathcal{P} . Eine Quasischeibe L von K ist ebenfalls ein van-Kampen-Diagramm bezüglich unserer Präsentation \mathcal{P} , das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Es gibt ein Randwort w von K , sodass entweder ein nichtleeres Teilwort v von w oder die Verkettung eines nichtleeren Teilwortes v von w mit einem Erzeugenden $d \in D$ ein Randwort von L ist.
- Das van-Kampen-Diagramm L ist ein Scheibendiagramm, d. h. die Vereinigung von L mit seinen Relatorzellen ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Scheibe.

Vorüberlegung. Im vorliegenden Beweis ist K ein van-Kampen-Diagramm für das Wort $(abc)^n$, jedes Randwort von K ist eine zyklische Permutation von $(abc)^n$ oder $(abc)^{-n}$.

Behauptung: Wenn L eine Quasischeibe von K ist, dann enthält jedes Randwort von L mindestens ein $a^{\pm 1}$, d. h. ein a oder ein a^{-1} , mindestens ein $b^{\pm 1}$, d. h. ein b oder ein b^{-1} , und mindestens ein $c^{\pm 1}$, d. h. ein c oder ein c^{-1} .

Wenn es eine Quasischeibe L von K mit einem Randwort gibt, das beispielsweise kein $c^{\pm 1}$ enthält, dann gilt entweder $a \in D$ oder $b \in D$ oder $ab \in D$. Die ersten beiden Alternativen widersprechen der Wahl $a \in A - D$ und $b \in B - D$. Die dritte Alternative hat zur Folge, dass $n_X(A, B; D) = 2$, $\Rightarrow \langle_X(A, B; D) = \pi$, ist, was in Dreiecken von Gruppen nach Lemma 2.6 nicht möglich ist. Es führen also alle drei Alternativen zu einem Widerspruch. Da sich entsprechende Überlegungen auch für Quasischeiben mit Randwörtern, die kein $a^{\pm 1}$ oder kein $b^{\pm 1}$ enthalten, anstellen lassen, folgt die Behauptung. \square

Wir schwächen den Vorbereitungsschritt 2 nun wie folgt ab:

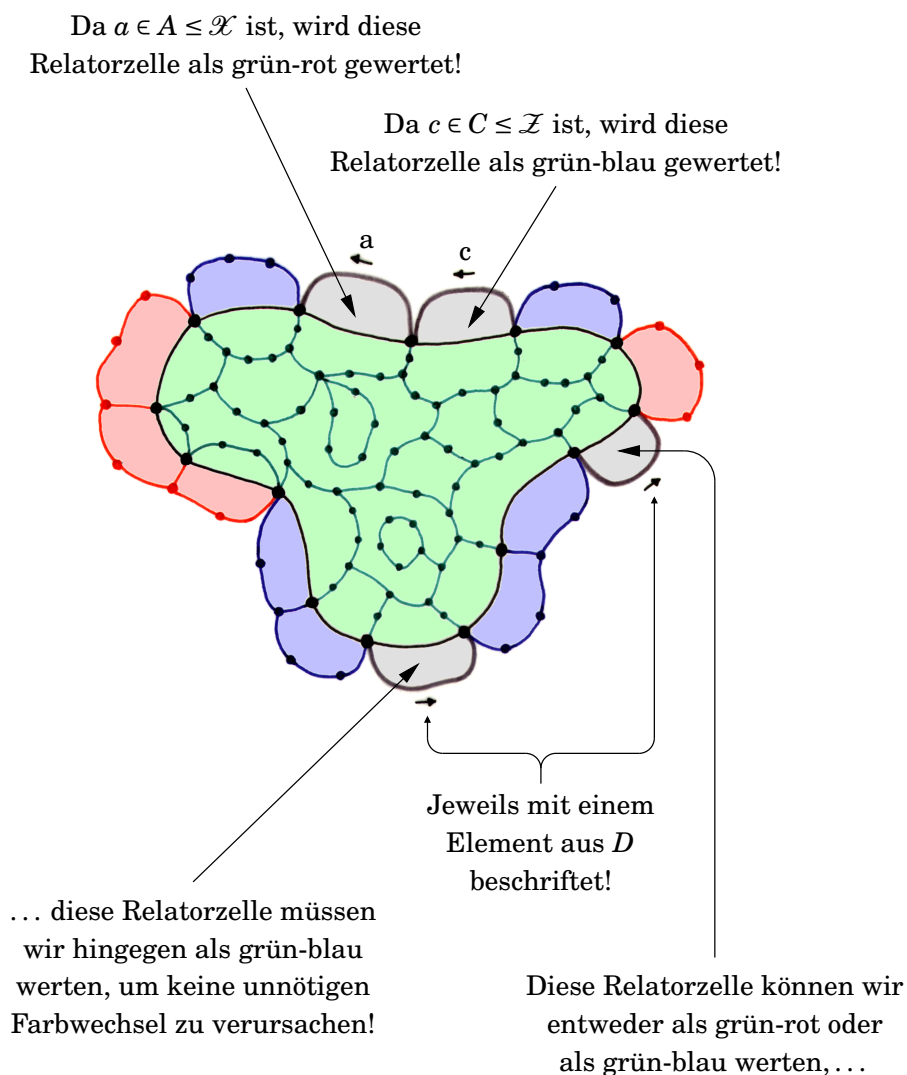
Neuer Vorbereitungsschritt 2: „Wir können o. B. d. A. voraussetzen, dass es eine Quasischeibe L von K gibt, in der jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.“

Die Anzahl der Farbwechsel im Randverlauf einer einfach zusammenhängenden Insel können wir wie im Beweis von Satz 2.9 bestimmen, mit einer weiteren Besonderheit: Wir betrachten z. B. wieder eine grüne einfach zusammenhängende Insel I . Jeder Randweg

von I besteht aus einer Folge von Γ -Kanten, die durch grün-rote, grün-blaue und grün-graue Relatorzellen verlaufen.

Beim Zählen der Farbwechsel werten wir die grün-grauen Relatorzellen, deren graue Kante mit einem a beschriftet ist, als grün-rot und die grün-grauen Relatorzellen, deren graue Kante mit einem c beschriftet ist, als grün-blau.

Die grün-grauen Relatorzellen, deren graue Kante mit einem Element aus D beschriftet ist, werten wir entweder als grün-rot oder als grün-blau. Die Wahl geschieht dabei allein unter der Prämisse, so wenige Farbwechsel wie möglich zu verursachen. Wir bezeichnen die Anzahl der Farbwechsel nach wie vor mit $\chi(I)$, in unserem Beispiel ist $\chi(I) = 6$:



Kapitel 3 Freie Untergruppen

Entsprechend bestimmen wir die Anzahl der Farbwechsel bei roten und blauen einfach zusammenhängenden Inseln. Wie im Beweis von Satz 2.9 können wir nun beurteilen, welche von ihnen genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf haben und welche nicht.

Beweisstrategie. Wenn eine Quasischeibe L von K eine einfach zusammenhängende Insel enthält, die nicht genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat, dann können wir sie durch eine Quasischeibe ersetzen, bei der die folgende Summe Σ geringer ist:

$$\Sigma := \text{Anzahl der Inseln} + \text{Länge eines Randwortes}$$

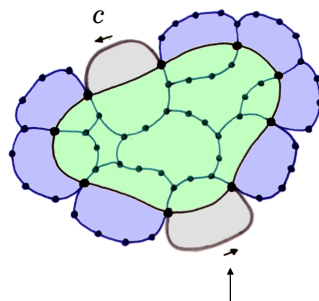
Somit erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Quasischeibe, in der jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

Da das Wort $(abc)^n$ zyklisch reduziert ist, enthält kein Randweg von K einen Stachel, und wir finden einen Teilgraphen $L \leq K$, der eine Quasischeibe von K ist. Wir arbeiten fortan nicht mehr mit dem van-Kampen-Diagramm K sondern mit dem Teilgraphen $L \leq K$.

Nehmen wir an, beispielsweise eine grüne einfach zusammenhängende Insel I hat nicht genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf. Es gilt also $\chi(I) < n_Y(A, C; D)$.

Fall 1: $\chi(I) = 0$

Wir verfahren mehr oder weniger wie im Beweis von Satz 2.9: Jeder Randweg von I verläuft entweder nur durch grün-rote, und grün-rot gewertete, oder, wie im folgenden Beispiel, nur durch grün-blaue, und grün-blau gewertete, Relatorzellen:



Mit einem $d \in D$
beschriftet!

Behauptung: Kein Randweg von I verläuft nur durch grün-graue Relatorzellen.

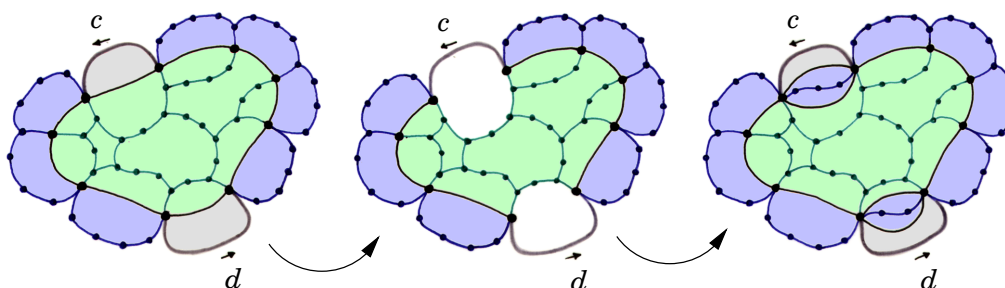
Wenn ein Randweg von I nur durch grün-graue Relatorzellen verläuft, dann folgt aus der Tatsache, dass L ein Scheibendiagramm ist, das keine grauen Inseln enthält und dessen graue Kanten ausschließlich im Rand liegen, dass I die einzige Insel von L ist. Da aber jedes Randwort von L mindestens ein $a^{\pm 1}$, mindestens ein $b^{\pm 1}$ und mindestens ein $c^{\pm 1}$ enthält, muss es insbesondere eine grün-graue Relatorzelle geben, deren graue Kante mit einem b beschriftet ist. So eine gibt es aber nicht, es folgt die Behauptung. \square

Wir wählen einen beliebigen Randweg γ . Jede grün-graue Relatorzelle R , durch die γ verläuft, zerschneiden wir wie folgt:

Je nach dem, ob die graue Kante im Rand von R mit einem c oder einem $d \in D$ beschriftet ist, wählen wir ein nichtleeres Wort $w \in \mathcal{Z}^+ \cup \mathcal{Z}^-$ mit $w =_Z c$ oder $w =_Z d$. Anschließend wählen wir eine Jordankurve, die, abgesehen von ihren beiden Endpunkten, vollständig in der Relatorzelle R verläuft und die L -Ecke v_1 , an der die graue Kante beginnt, mit der L -Ecke v_2 , an der die graue Kante endet, verbindet.

An $|w|-1$ verschiedenen Punkten im Inneren der Jordankurve fügen wir jeweils eine neue L -Ecke ein. Die Abschnitte der Jordankurve, die zwischen zwei L -Ecken liegen, werden zu neuen L -Kanten, die so orientiert und beschriftet werden, dass wir entlang des neuen L -Kantenweges von v_1 nach v_2 das Wort w ablesen können.

Die Relatorzelle R wird auf diese Weise in zwei Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{E}^2 - L$ zerschnitten: Die eine ist eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}}$, die andere eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \rightarrow c}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{Z} \rightarrow D}$.



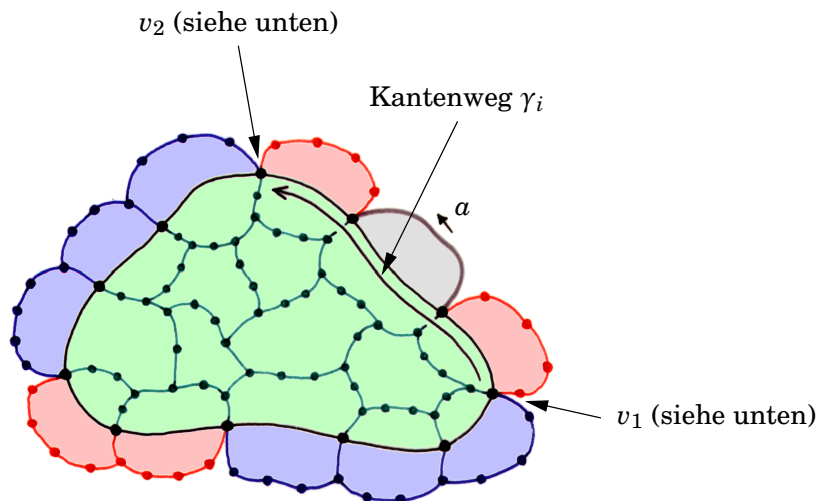
Wenn wir nun den Graphen Γ und die Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 entsprechend ergänzen und die unwesentlich deformierte Insel I betrachten, dann erkennen wir, dass

jeder Randweg nur durch grün-blaue Relatorzellen verläuft.

Wenn wir schließlich die Insel I wie im Beweis von Satz 2.9 entfernen, dann können wir unter Verwendung der Behauptung im grauen Kästchen auf Seite 61 einsehen, dass sich die Anzahl der Inseln insgesamt verringert hat. Der Rand von L unverändert geblieben ist, entsprechend hat sich Σ verringert.

Fall 2: $\chi(I) > 0$

Wie schon im ersten Fall, verfahren wir auch in diesem Fall mehr oder weniger wie im Beweis von Satz 2.9: Wieder wählen wir einen Randweg γ von I , wieder erhalten wir eine Folge $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{\chi(I)}$ von Teilwegen, von denen jeder einzelne entweder nur durch grün-rote, und grün-rot gewertete, oder nur durch grün-blaue, und grün-blau gewertete, Relatorzellen verläuft, wieder gibt es $u_1, u_2, \dots, u_{\chi(I)}$, die abwechselnd in A und C enthalten sind, sodass, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, \chi(I)\}$, $\text{in}(\gamma_i) =_Y u_i$ gilt, und wieder wählen wir ein $i \in \{1, 2, \dots, \chi(I)\}$ mit $u_i \in D$ aus.



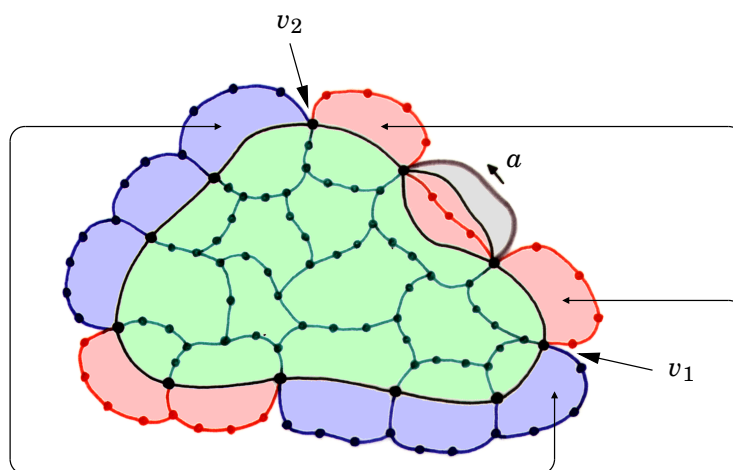
Behauptung: Wenn γ_i nur eine einzige Γ -Kante enthält ist, dann verläuft diese einzige Γ -Kante keinesfalls durch eine grün-graue Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{y \leftarrow D}$.

Der Teilweg γ_i verläuft von einem Farbwechsel bis zum nächsten Farbwechsel. Wenn die einzige Γ -Kante von γ_i durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{y \leftarrow D}$ verläuft,

dann können wir diese grün-graue Relatorzelle umwerten und $\chi(I)$ um 2 verringern. Dies ist aber nicht möglich, da wir die grün-graue Relatorzelle bereits unter der Prämisse, so wenige Farbwechsel wie möglich zu verursachen, als grün-rot oder als grün-blau gewertet haben. Es folgt die Behauptung. \square

Je nach dem, ob die L -Ecken v_1 , an der γ_i beginnt, und v_2 , an der γ_i endet, auf dem Rand von L liegen oder nicht, unterscheiden wir nun drei Fälle: Im ersten Fall nehmen wir an, dass weder v_1 noch v_2 auf dem Rand von L liegen. Dies hat zur Folge, dass weder v_1 noch v_2 mit grauen Kanten inzidieren und wir im Wesentlichen wie im Beweis von Satz 2.9 verfahren können. Die beiden anderen Fälle, insbesondere der dritte, in dem wir annehmen, dass sowohl v_1 als auch v_2 auf dem Rand von L liegen, verdienen neue Argumente. Wir gehen in allen drei Fällen davon aus, dass γ_i nur durch grün-rote, und grün-rot gewertete, Relatorzellen verläuft.

Fall 2.1: Wenn weder v_1 noch v_2 auf dem Rand von L liegen, dann ersetzen wir zunächst jede grün-graue Relatorzelle R , durch die γ_i verläuft, durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}}$ und eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow a}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow D}$. Dies geschieht so, wie wir es im ersten Fall beschrieben haben.

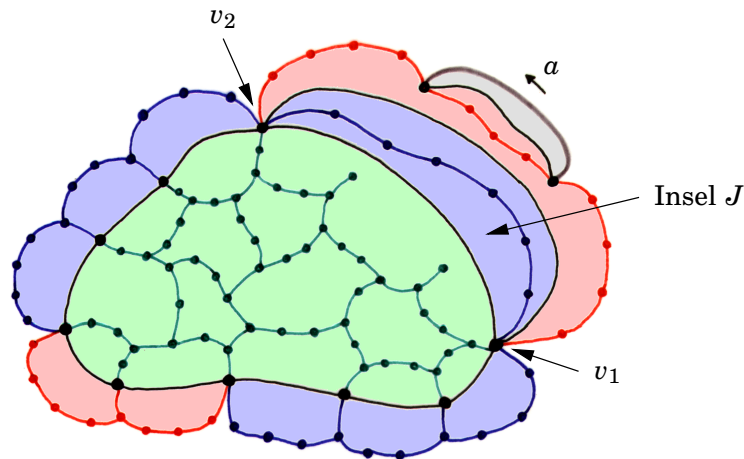


Da weder v_1 noch v_2 auf dem Rand von L liegen, ist keine dieser vier Relatorzellen grün-grau gefärbt!

Damit erreichen wir, dass der neue Teilweg γ_i nur noch durch grün-rote Relatorzellen verläuft. Für das Element $u_i \in D$ gilt also $\text{in}(\gamma_i) =_{\mathcal{Y}} u_i$ und $\text{out}(\gamma_i) =_{\mathcal{X}} u_i$. Nun ersetzen wir

Kapitel 3 Freie Untergruppen

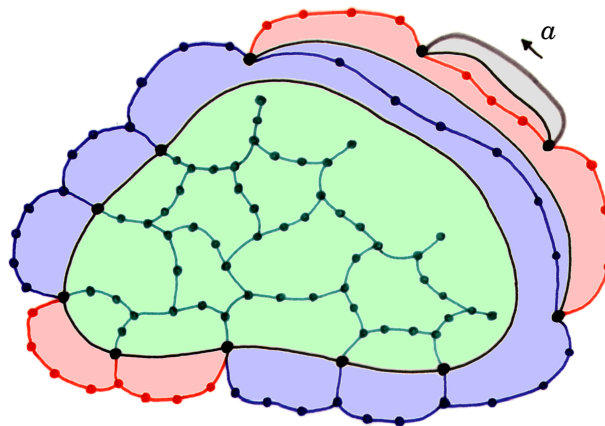
die grün-roten Relatorzellen, durch die γ_i verläuft, wie im Beweis von Satz 2.9 durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ und eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$.



Wie im Beweis von Satz 2.9 hat sich $\chi(I)$ um 2 verringert, die Anzahl der Inseln hat sich jedoch um 1 erhöht. Man beachte, dass aufgrund der Tatsache, dass weder v_1 noch v_2 mit grauen Kanten inzidieren, tatsächlich nur eine blaue Insel J und nicht etwa noch eine weitere neue rote Insel entstanden ist.

Fall 2.1.1: Wenn mittlerweile $\chi(I) = 0$ ist, dann entfernen wir die Insel I so, wie es in Fall 1 beschrieben ist. Insbesondere wird dabei auch die Insel J mit mindestens einer ursprünglich bestehenden blauen Insel verbunden und die Anzahl der Inseln insgesamt verringert. Der Rand von L bleibt unverändert, entsprechend verringert sich Σ .

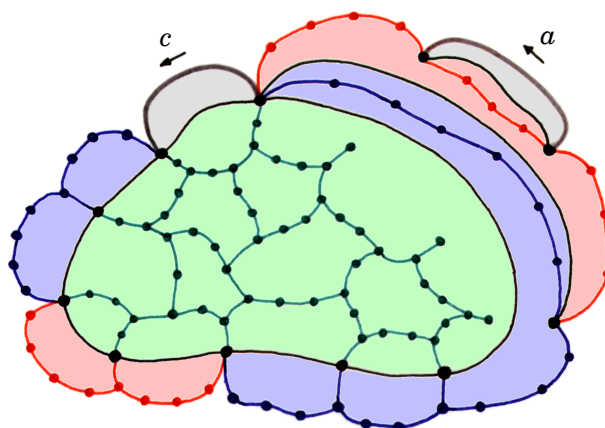
Fall 2.1.2: Wenn aber nach wie vor $\chi(I) > 0$ ist, dann verfahren wir genau wie im Fall 2.2 des Beweises von Satz 2.9, den wir auf Seite 34 finden: „... wählen wir einen Randweg γ so, dass zwischen der letzten und der ersten Γ -Kante ein Farbwechsel stattfindet. Wir bezeichnen die Γ -Kante, die zwischen der Insel I und der Insel J verläuft, mit e und den Teilweg von γ , der die Γ -Kante e und ihre beiden Nachbarkanten enthält, mit $\tilde{\gamma}$. Nach Konstruktion verlaufen alle drei Γ -Kanten von $\tilde{\gamma}$ durch grün-blaue Relatorzellen. Wie oben lösen wir die Insel I entlang des Teilweges $\tilde{\gamma}$ von ihrem Rand, ziehen sie zusammen und fügen auf dem Rand der zusammengezogenen Insel I , wo nötig, neue K -Ecken ein. Die drei grün-blauen Relatorzellen, durch die $\tilde{\gamma}$ ursprünglich verlief, sind nun zu einer einzigen Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{Y} \leftrightarrow \mathcal{Z}}$ verbunden.“



Die Insel J wird mit mindestens einer ursprünglich bestehenden blauen Insel verbunden. Somit gilt, dass sich $\chi(I)$ nach wie vor um 2 verringert und sich die Anzahl der Inseln insgesamt zumindest nicht mehr erhöht. Der Rand von L bleibt unverändert.

Fall 2.2: Wenn genau eine der beiden L -Ecken v_1 und v_2 auf dem Rand von L liegt, dann verfahren wir wie im Fall 2.1, mit einer Besonderheit:

In diesem Fall wählen wir $\tilde{\gamma}$ nicht mehr unbedingt als denjenigen Teilweg von γ , der die Γ -Kante e und ihre beiden Nachbarkanten enthält, sondern nur noch als denjenigen, der die Γ -Kante e und diejenigen Nachbarkanten enthält, die nicht durch grün-graue Relatorzellen verlaufen, wovon es mindestens eine gibt.

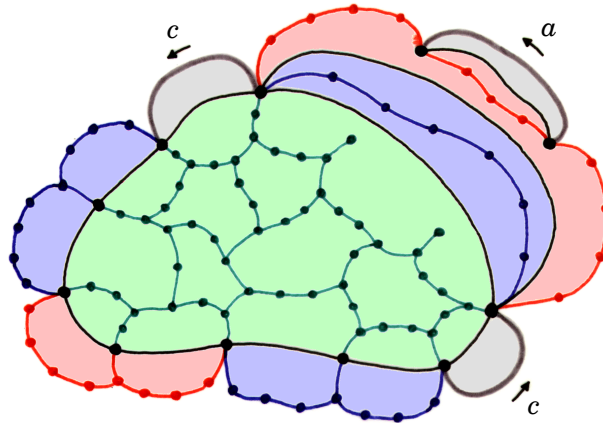


Von dieser Besonderheit abgesehen verfahren wir aber genau wie in Fall 2.1 und erreichen auch hier entweder wie in Fall 2.1.1, dass sich die Anzahl der Inseln verringert, oder wie

Kapitel 3 Freie Untergruppen

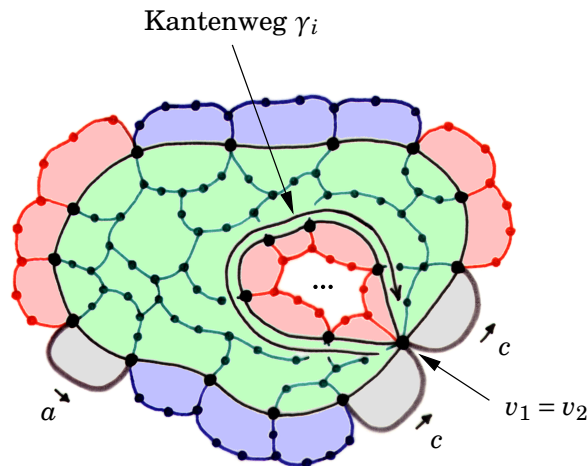
in Fall 2.1.2, dass sich die Anzahl der Inseln zumindest nicht erhöht und sich $\chi(I)$ um 2 verringert. Der Rand von L bleibt jedenfalls unverändert.

Fall 2.3: Wenn allerdings sowohl v_1 als auch v_2 auf dem Rand von L liegen, dann können wir dieses Verfahren nicht mehr unbedingt anwenden, da wir damit rechnen müssen, dass beide Nachbarkanten von e durch grün-graue Relatorzellen verlaufen:



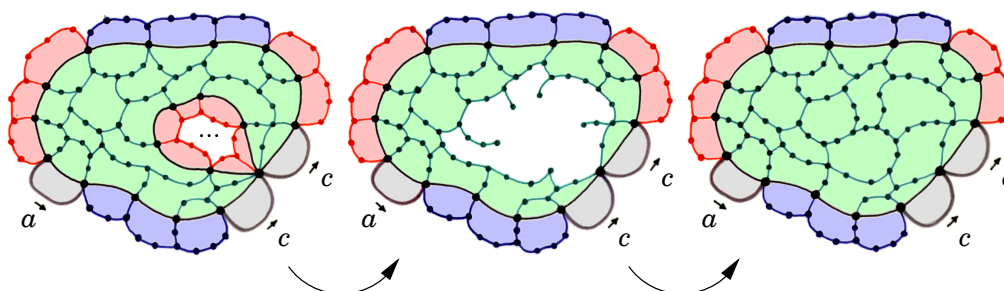
Stattdessen vermeiden wir, dass die Insel J überhaupt entsteht!

Fall 2.3.1: Wenn $v_1 = v_2$ ist, d. h. wenn γ_i ein geschlossener Kantenweg ist, dann folgt daraus $\text{in}(\gamma_i) =_G 1$ und, mit Satz 2.9, $\text{in}(\gamma_i) =_Y 1$.



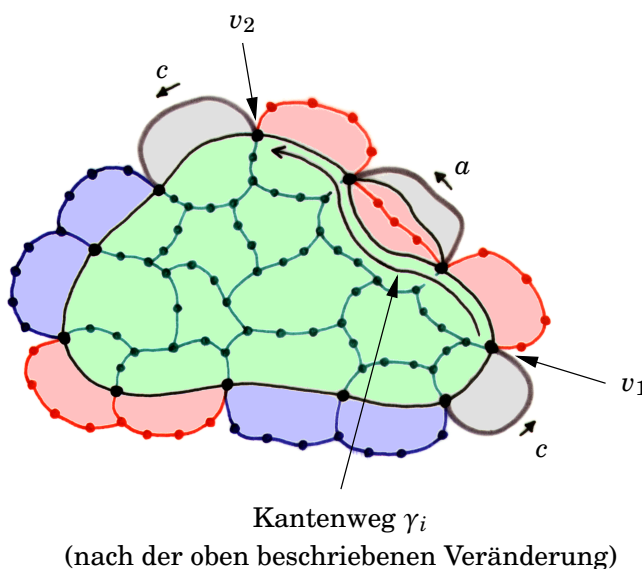
Wir können also alle von γ_i umschlossenen L -Ecken und L -Kanten aus L entfernen und stattdessen ein van-Kampen-Diagramm für $\text{in}(\gamma_i)$ einkleben, wobei jede Kante mit einem

Element aus \mathcal{Y} beschriftet ist und jede Relatorzelle eine definierende Relation vom Typ \mathcal{R}_{xy} als Randwort hat.



Wenn wir nun den Graphen Γ und die Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 entsprechend ergänzen, dann erkennen wir, dass sich die Anzahl der Inseln verringert. Das Randwort von L verändert sich nicht, entsprechend verringert sich Σ .

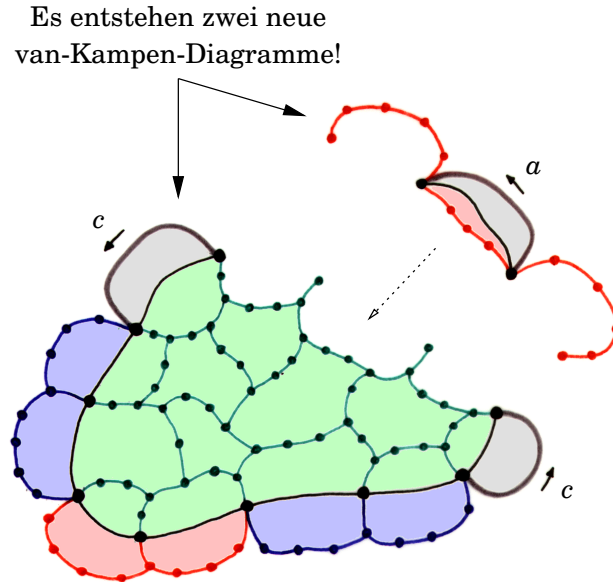
Fall 2.3.2: Wenn $v_1 \neq v_2$ ist, dann ersetzen wir zunächst jede grün-graue Relatorzelle R , durch die γ_i verläuft, durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{x \rightarrow y}$ und eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{x \rightarrow a}$ oder $\mathcal{R}_{x \rightarrow D}$. Dies geschieht so, wie wir es im ersten Fall beschrieben haben.



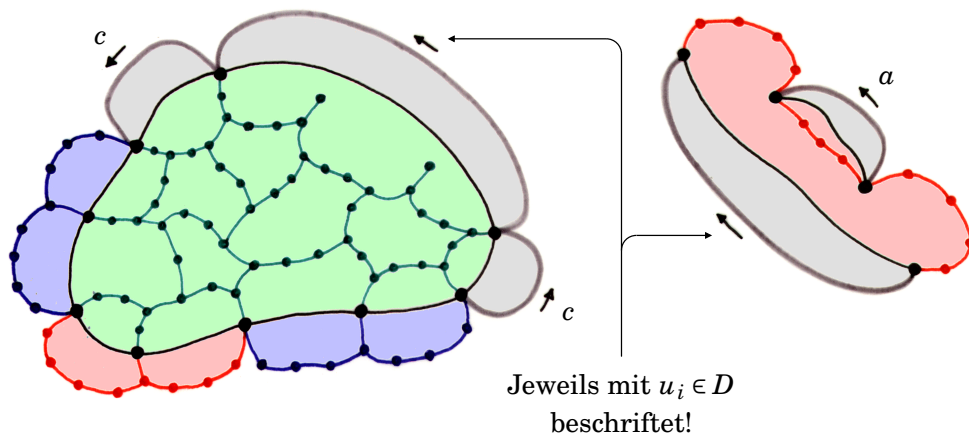
Nun zerlegen wir die Quasischeibe L von K in zwei van-Kampen-Diagramme, indem wir L entlang γ_i zerschneiden, das Diagramm, das die Insel I enthält, wie in der folgenden

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Abbildung angedeutet, von dem anderen Diagramm wegziehen und, wo nötig, neue Ecken einfügen.



Es entstehen zwei neue van-Kampen-Diagramme, der Rand des einen enthält die grünen L -Kanten, entlang derer wir $\text{in}(\gamma_i)$ ablesen können, der Rand des anderen enthält die roten L -Kanten, entlang derer wir $\text{out}(\gamma_i)$ ablesen können. Indem wir an das eine der van-Kampen-Diagramme eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \rightarrow D}$ und an das andere eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{\mathcal{X} \leftarrow D}$ ankleben, wird mindestens eines der beiden zu einer neuen Quasischeibe von K . Eine solche ist es, die wir fortan mit L bezeichnen.



Wir passen den Graphen Γ und die Färbung der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 entsprechend an und überprüfen, ob sich die Summe Σ tatsächlich verringert hat:

Fall 2.3.2.1: Wenn γ_i ursprünglich mindestens eine grün-rote Relatorzelle durchlief, dann hat sich die Anzahl der Inseln um mindestens 1 verringert. Da sich aber die Länge des Randwortes nicht erhöht hat, verringert sich Σ .

Fall 2.3.2.2: Wenn das aber nicht der Fall war und γ_i ursprünglich nur durch grün-graue Relatorzellen verlief, dann sind beim Zerlegen der ursprünglichen Quasischeibe L zwei van-Kampen-Diagramme entstanden, von denen das eine genauso viele Inseln wie L und das andere nur eine einzige Insel enthält.

Da, wie wir oben gesehen haben, jedes Randwort einer Quasischeibe mindestens ein $a^{\pm 1}$, mindestens ein $b^{\pm 1}$ und mindestens ein $c^{\pm 1}$ enthält, enthält jede Quasischeibe mehr als eine Insel. Daraus folgt, dass das van-Kampen-Diagramm mit nur einer einzigen Insel keine Quasischeibe ist, L also nur das andere van-Kampen-Diagramm sein kann und somit genauso viele Inseln wie zuvor enthält.

Die Länge des Randwortes verringert sich jedoch: Wie wir oben gesehen haben, verlief γ_i ursprünglich, für den Fall, dass es nur eine einzige Γ -Kante enthielt, keinesfalls durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{y \leftrightarrow D}$. Da $a \in A - D$ und $c \in C - D$ ist, können wir ebenso ausschließen, dass es durch eine Relatorzelle mit einem Randwort in $\mathcal{R}_{y \leftrightarrow a}$ oder $\mathcal{R}_{y \leftrightarrow c}$ verlief. Also enthielt γ_i ursprünglich mehr als eine Kante. Die Länge des Randwortes von L verringert sich also, entsprechend verringert sich Σ .

Damit ist auch der zweite Fall abgeschlossen, denn wir können die beschriebene Prozedur wiederholt auf I anwenden: Nach endlich vielen Schritten verringert sich Σ . Erinnern wir uns nun an die Beweisstrategie!

Beweisstrategie. Wenn eine Quasischeibe L von K eine einfach zusammenhängende Insel enthält, die nicht genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat, dann können wir sie durch eine Quasischeibe ersetzen, bei der Σ geringer ist. Somit erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Quasischeibe, in der jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

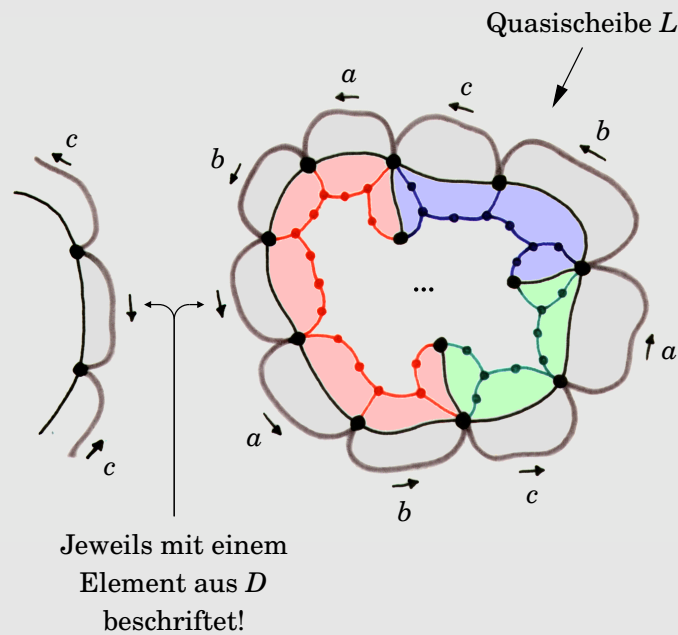
Wenn Γ nicht zusammenhängend ist, dann gibt es eine Zusammenhangskomponente Γ_0 von Γ , die bezüglich der im Beweis von Satz 2.9 definierten partiellen Ordnung minimal

Kapitel 3 Freie Untergruppen

ist. Da aber alle Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, in einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente enthalten sind, liegt keine einzige Γ_0 -Ecke auf dem Rand von L . Wie im Beweis von Satz 2.9 verteilen wir Gewichte auf die Γ_0 -Ecken und überzeugen uns davon, dass das Gesamtgewicht wieder gleich 2π ist und das Gewicht einer jeden Γ_0 -Ecke nichtpositiv ist. ζ

Der Graph Γ muss also zusammenhängend sein, folglich muss auch jede Insel einfach zusammenhängend sein. Da der Graph Γ nichtleer ist, können wir das bekannte Spiel durchführen: Wir verteilen Gewichte auf die Γ -Ecken und überzeugen uns davon, dass das Gesamtgewicht wieder gleich 2π ist und das Gewicht einer jeden Γ -Ecke, die nicht auf dem Rand von L liegt, nichtpositiv ist.

Bemerkung. Dass die Summe der Gewichte der Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, tatsächlich positiv sein kann, illustriert das folgende Beispiel:

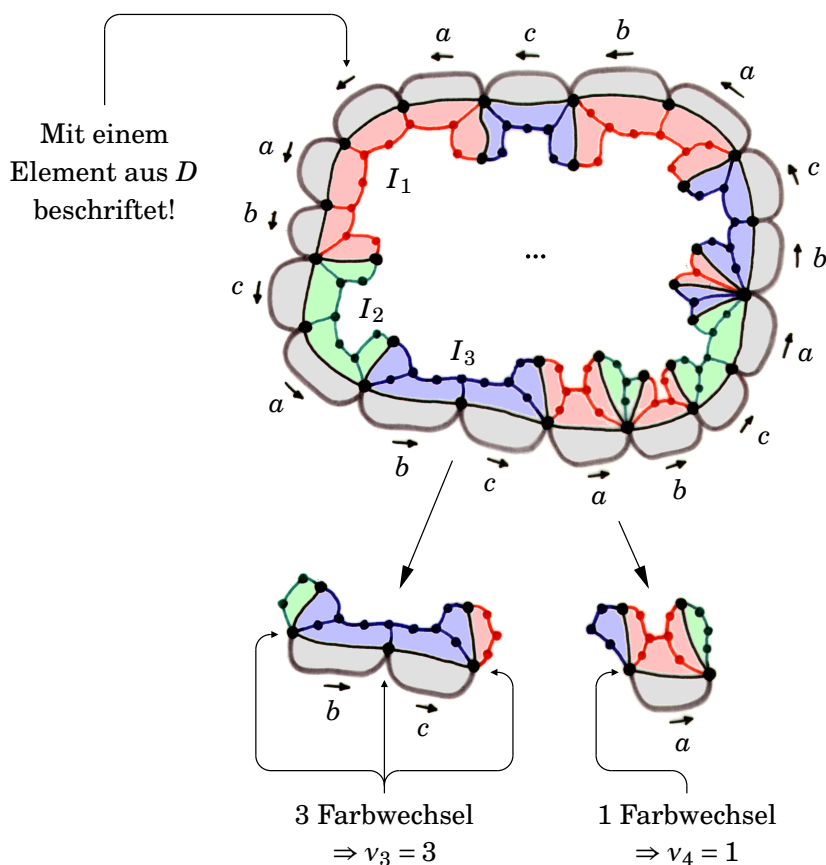


Wenn hier nämlich $\langle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{2}$ und $\langle_Y(A, C; D) = \langle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{4}$ ist, dann kann das Gesamtgewicht der Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, bis zu π betragen:

$$\text{Gesamtgewicht}(\partial L) \leq 9 \cdot 2\pi - 21 \cdot \pi + 5 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} + 3 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi$$

Um das Gesamtgewicht der Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, in der allgemeinen Situation abzuschätzen, wenden wir das Gewichtslemma an. Das geschieht wie folgt:

Wenn wir den Rand von L einmal mit einer fest gewählten Orientierung umlaufen, dann erhalten wir eine zyklisch angeordnete Folge I_1, I_2, \dots, I_n von Inseln, die nacheinander den Rand von L berühren. Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet $v_k \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Farbwechsel im entsprechenden Abschnitt des Randverlaufes der Insel I_k :



Bei der Abschätzung des Gesamtgewichts der Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, arbeiten wir außerdem mit den folgenden Bezeichnungen:

- v_1, v_2, \dots, v_m Die Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen.
- Winkel(\cdot) Für jede Insel I bezeichnet Winkel(I) entweder $\angle_X(A, B; D)$ oder $\angle_Y(A, C; D)$ oder $\angle_Z(B, C; D)$, und zwar je nach dem, ob es sich bei I um eine rote, eine grüne oder eine blaue Insel handelt.

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Nun können wir beobachten:

$$\begin{aligned}
 \text{Gesamtgewicht}(\partial L) &\leq m \cdot 2\pi - \sum_{i=1}^m \text{val}(v_i) \cdot \pi + \sum_{k=1}^n v_k \cdot \text{Winkel}(I_k) \\
 &= -n \cdot \pi + \sum_{k=1}^n v_k \cdot \text{Winkel}(I_k) \\
 &\leq -n \cdot \pi + \sum_{k=1}^n \max\{v_k, 1\} \cdot \text{Winkel}(I_k)
 \end{aligned}$$

Um das Gewichtslemma anzuwenden, konstruieren wir ein Wort \tilde{w} über den Buchstaben x , y und z , indem wir mit dem leeren Wort beginnen und dann nacheinander, für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, genau $\max\{v_k, 1\}$ Exemplare eines der drei Buchstaben x , y und z an das bisherige Wort anhängen:

Falls I_k eine rote Insel ist, dann hängen wir $\max\{v_k, 1\}$ Exemplare des Buchstaben x an, falls I_k eine grüne Insel ist, dann $\max\{v_k, 1\}$ Exemplare des Buchstaben y , falls I_k eine blaue Insel ist, dann $\max\{v_k, 1\}$ Exemplare des Buchstaben z . In der obigen Abbildung erhalten beispielsweise das Wort $\tilde{w} = xxxyyzzzxxyyyzxxzzxxzz$.

Wir überlassen es dem Leser als Fingerübung, zu zeigen, dass das Wort \tilde{w} höchstens einen Block mit Charakteristik 1 und sonst ausschließlich Blöcke mit Charakteristik 0 enthält. Somit ist es 0-spezial, und folglich ε -spezial für jedes $\varepsilon \geq 0$ im Sinne von Definition 3.7.

Schließlich definieren wir einen Monoid-Homomorphismus $g : \{x, y, z\}^* \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ durch die Zuordnungen $g(x) := \angle_X(A, B; D)$, $g(y) := \angle_Y(A, C; D)$ und $g(z) := \angle_Z(B, C; D)$.

Damit erfüllt g die beiden Voraussetzungen des Gewichtslemmas:

$$\begin{aligned}
 g(x), g(y), g(z) &\in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
 g(x) + g(y) + g(z) &\leq \pi
 \end{aligned}$$

Wählt man $\varepsilon := \pi - g(x) - g(y) - g(z) = \pi - \Sigma(\Delta) \geq 0$, so ist \tilde{w} ein ε -spezielles Wort. Wir können also das Gewichtslemma anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \text{Gesamtgewicht}(\partial L) &\leq -n \cdot \pi + \sum_{k=1}^n \max\{v_k, 1\} \cdot \text{Winkel}(I_k) \\
 &= -n \cdot \pi + g(\tilde{w}) < 2\pi
 \end{aligned}$$

Das Gesamtgewicht aller Γ -Ecken kann daher nicht 2π betragen. ζ

□

3.4 Die Verallgemeinerung von Satz 3.2

Satz 3.11 (Verallgemeinerung von Satz 3.2) *Der Colimes eines hyperbolischen nichtausgearteten Dreiecks von Gruppen enthält eine nichtabelsche freie Untergruppe.*

Beweis. Sei Δ ein hyperbolisches nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Wir setzen o. B. d. A. voraus, dass Z diejenige Eckengruppe ist, in der die beiden angrenzenden Kantengruppen den kleinsten Winkel einschließen. Es gilt also:

$$\angle_Z(B, C; D) < \frac{\pi}{3}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $a \in A - D$, ein $b \in B - D$ und ein $c \in C - D$. Wir werden zeigen, dass die beiden Elemente $(abc)^n \in G$ und $(acb)^n \in G$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eine nichtabelsche freie Untergruppe erzeugen.

Als hinreichend groß wird sich $n := 6 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 3$ erweisen, wobei $\varepsilon := \pi - \Sigma(\Delta) > 0$ ist. Eine kleine Nebenrechnung zeigt, dass, unabhängig von der genauen Größe der drei Winkel, stets $\varepsilon \geq \frac{1}{42}$ erfüllt ist und somit $n := 6 \cdot 42 + 3 = 255$ eine für jedes hyperbolische Dreieck von Gruppen geeignete Wahl ist.

Um zu zeigen, dass die beiden Elemente $(abc)^n \in G$ und $(acb)^n \in G$ eine nichtabelsche freie Untergruppe erzeugen, betrachten wir den durch die Zuordnungen $\psi(x) := (abc)^n$ und $\psi(y) := (acb)^n$ gegebenen surjektiven Homomorphismus:

$$\psi : F(x, y) \rightarrow \text{gp}((abc)^n, (acb)^n) \leq G$$

Es genügt nun, zu zeigen, dass der Homomorphismus ψ nicht nur surjektiv sondern auch injektiv ist. Nehmen wir also an, ψ ist nicht injektiv. Dann gibt es ein zyklisch reduziertes Wort w' über x und y sowie deren Inversen, das ein nichttriviales Element von $\ker(\psi)$ beschreibt.

Sei w'' das Wort über a, b und c sowie deren Inversen, das entsteht, wenn wir im Wort w' die Buchstaben x und x^{-1} durch $(abc)^n$ und $(abc)^{-n}$ sowie die Buchstaben y und y^{-1} durch $(acb)^n$ und $(acb)^{-n}$ ersetzen. Es gilt $w'' =_G \psi(w') =_G 1$.

Wenn wir das Wort w'' zyklisch reduzieren, dann erhalten wir ein Wort w''' , für das auch $w''' =_G 1$ gilt. Da w' ein nichttriviales Element von $\ker(\psi)$ beschreibt, sind w' und somit auch w'' nichtleer. Beim Übergang von w'' zu w''' finden allenfalls an den Stellen, an denen zwei Teilwörter der Form $(abc)^n, (abc)^{-n}, (acb)^n$ oder $(acb)^{-n}$ aufeinandertreffen,

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Kürzungen statt, und zwar von jeweils höchstens einem Buchstaben. Also ist auch w''' nichtleer.

Wir werden nun mit dem Wort w''' weiterarbeiten und schreiben w statt w''' . Da $w =_G 1$ ist, gibt es für w ein van-Kampen-Diagramm K bezüglich der im Beweis von Satz 3.9 eingeführten erweiterten Präsentierung $\mathcal{P} = \mathcal{P}(a, b, c)$ des Colimes G . Wieder führen wir die folgenden beiden Vorbereitungsschritte durch:

Vorbereitungsschritt 1: „Wieder definieren wir einen Graphen $\Gamma = \Gamma(K)$, wieder färben wir das van-Kampen-Diagramm K und die Relatorzellen.“

Neuer Vorbereitungsschritt 2: „Wir können o. B. d. A. voraussetzen, dass es eine Quasischeibe L von K gibt, in der jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.“

Tatsächlich lassen sich beide Vorbereitungsschritte auch in dieser Situation durchführen: Die näheren Erläuterungen zum ersten Vorbereitungsschritt können wir unverändert aus dem Beweis von Satz 3.9 übernehmen, und auch beim zweiten Vorbereitungsschritt muss lediglich die Vorüberlegung neu angestellt werden:

Vorüberlegung. Im vorliegenden Beweis ist K ein van-Kampen-Diagramm für das Wort w , jedes Randwort von K ist eine zyklische Permutation von w oder w^{-1} . Im Gegensatz zum Beweis von Satz 3.9 kann es hier allerdings auch ein Teilwort eines Randwortes von K geben, dessen Länge größer als 2 ist und in dem nicht mindestens ein $a^{\pm 1}$, mindestens ein $b^{\pm 1}$ und mindestens ein $c^{\pm 1}$ vorkommen, das also „unär“ oder „binär“ ist.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht, welche „maximalen binären“ Teilwörter, deren Länge größer als 2 ist, beim Aufeinandertreffen von $(abc)^n$, $(abc)^{-n}$ und $(acb)^n$, $(acb)^{-n}$ entstehen können:

	$(abc)^n$	$(abc)^{-n}$	$(acb)^n$	$(acb)^{-n}$
$(abc)^n$	—	—	$c ac$	$bc b^{-1}c^{-1}$
$(abc)^{-n}$	—	—	$c^{-1}b^{-1} cb$	$b^{-1}a^{-1} b^{-1}$
$(acb)^n$	$b ab$	$cb c^{-1}b^{-1}$	—	—
$(acb)^{-n}$	$b^{-1}c^{-1} bc$	$c^{-1}a^{-1} c^{-1}$	—	—

Behauptung: Wenn L eine Quasischeibe von K ist, dann enthält jedes Randwort von L mindestens ein $a^{\pm 1}$, mindestens ein $b^{\pm 1}$ und mindestens ein $c^{\pm 1}$.

Wenn es eine Quasischeibe L von K mit einem Randwort gibt, das kein $c^{\pm 1}$ enthält, dann gilt, wie wir der Tabelle entnehmen können, $n_X(A, B; D) \leq 3$, $\Rightarrow n_X(A, B; D) = 2$, $\Rightarrow \angle_X(A, B; D) = \pi$, was in Dreiecken von Gruppen nach Lemma 2.6 nicht möglich ist.

Wenn es eine Quasischeibe L von K mit einem Randwort gibt, das kein $b^{\pm 1}$ enthält, dann können wir eine entsprechende Überlegung anstellen.

Wenn es eine Quasischeibe L von K mit einem Randwort gibt, das kein $a^{\pm 1}$ enthält, dann gilt jedoch, wie wir der Tabelle entnehmen können, $n_Z(B, C; D) \leq 4$, $\Rightarrow \angle_Z(B, C; D) \geq \frac{\pi}{2}$, was aber unserer anfänglichen Beobachtung $\angle_Z(B, C; D) < \frac{\pi}{3}$ widerspricht. \square

Nach dieser Vorüberlegung können wir auch die näheren Erläuterungen zum zweiten Vorbereitungsschritt übernehmen und o. B. d. A. voraussetzen, dass es eine Quasischeibe L von K gibt, in der jede einfach zusammenhängende Insel genügend Farbwechsel in ihrem Randverlauf hat.

Mit derselben Begründung wie im Beweis von Satz 3.9 erhalten wir schließlich, dass der Graph $\Gamma = \Gamma(L)$ zusammenhängend und jede Insel einfach zusammenhängend ist. Da der Graph Γ nichtleer ist, können wir das bekannte Spiel durchführen: Wieder verteilen wir Gewichte auf die Γ -Ecken und überzeugen uns davon, dass das Gesamtgewicht gleich 2π ist und das Gewicht einer jeden Γ -Ecke, die nicht auf dem Rand von L liegt, nichtpositiv ist.

Um nun das Gesamtgewicht der Γ -Ecken, die auf dem Rand von L liegen, abzuschätzen, wenden wir erneut das Gewichtslemma an. Wie im Beweis von Satz 3.9 konstruieren wir dafür ein Wort \tilde{w} über den Buchstaben x , y und z .

Behauptung: Das Wort \tilde{w} ist ε -speziell.

Wenn $\hat{\chi}(\tilde{w}) \leq 1$ ist, dann ist nichts zu beweisen. Und auch, wenn $\hat{\chi}(\tilde{w}) = 2$ ist, müssen wir uns nur davon überzeugen, dass $\varepsilon > 0$ ist, was hier der Fall ist. Die Bedingung an die Länge von \tilde{w} ist zwangsläufig erfüllt, da Wörter mit Charakteristik 2 stets mehr als 4 Buchstaben enthalten. Wir können also o. B. d. A. voraussetzen, dass $\hat{\chi}(\tilde{w}) \geq 3$ ist.

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Da L eine Quasischeibe von K ist, gibt es einen Randweg γ von L , entlang dessen wir das in Definition 3.10 beschriebene Teilwort v oder die Verkettung des in Definition 3.10 beschriebenen Teilwortes v mit einem Erzeugenden $d \in D$ ablesen können.

Sprechweise. Falls wir entlang γ nur das Teilwort v ablesen können, bezeichnen wir die Γ -Ecke, an γ beginnt und endet, als Nahtstelle. Andernfalls überlegen wir uns, dass die letzte L -Kante von γ , entlang derer wir das Erzeugende $d \in D$ ablesen können, im Rand einer eindeutig bestimmten Relatorzelle R vom Typ $\mathcal{R}_{x \rightarrow D}$, $\mathcal{R}_{y \rightarrow D}$ oder $\mathcal{R}_{\mathcal{I} \rightarrow D}$ enthalten ist. Dann bezeichnen wir die Γ -Kante, die durch R verläuft, inklusive der mit ihr inzidierenden Γ -Ecken als Nahtstelle.

Wenn v ein „maximales binäres“ Teilwort enthält, dessen Länge größer als 2 ist, dann gibt es innerhalb dieses Teilwortes eine wohldefinierte Stelle, an der zwei Endstücke von $(abc)^n$, $(abc)^{-n}$ und $(acb)^n$, $(acb)^{-n}$ aufeinandertreffen. In der Tabelle auf Seite 74 sind diese Stellen durch einen senkrechten Strich gekennzeichnet. Die Γ -Ecken, an denen die entsprechenden grauen Kanten aufeinandertreffen, nennen wir kritisch.

Wenn der Rand von L genau k kritische Ecken enthält, dann enthält v mindestens $k - 1$ Exemplare der Faktoren $(abc)^n$, $(abc)^{-n}$, $(acb)^n$ und $(acb)^{-n}$ vollständig, abgesehen von einer möglichen Kürzung des ersten und des letzten Buchstabens, und es gilt:

$$|v| \geq (k - 1) \cdot (3n - 2)$$

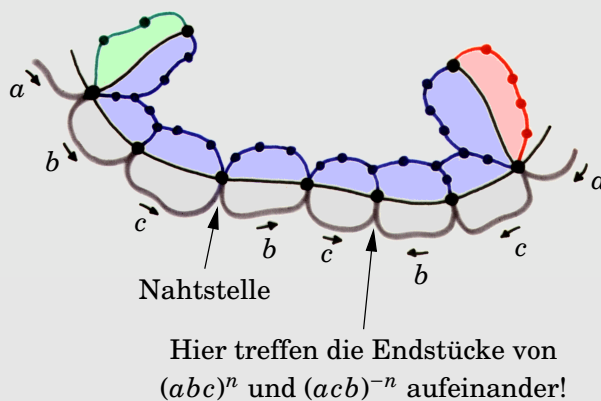
Betrachten wir nun das Wort \tilde{w} genauer: Ein Block \tilde{w}_i von \tilde{w} kann überhaupt nur dann positive Charakteristik haben, wenn der entsprechende Abschnitt des Randverlaufes der Insel I_i die Nahtstelle oder eine kritische Γ -Ecke durchläuft, d. h. erreicht und wieder verlässt.

Umgekehrt erhöhen die Nahtstelle und jede kritische Γ -Ecke, in dem Fall, dass an sie nur eine einzige Insel I_i grenzt, die Charakteristik des Blockes \tilde{w}_i jeweils um höchstens 1.

Zählen wir also, wie oft der entsprechende Abschnitt des Randverlaufes der Insel I_i die Nahtstelle oder eine kritische Γ -Ecke durchläuft, so erhalten wir eine obere Schranke für die Charakteristik des Blockes \tilde{w}_i . Daraus folgt:

$$\hat{\chi}(\tilde{w}) = \sum_{i=1}^n \chi(\tilde{w}_i) \leq k + 1$$

Bemerkung. Das folgende Beispiel illustriert, wie durch geringe Distanz zwischen der Nahtstelle und einer kritischen Γ -Ecke auch ein Block $\tilde{w}_i = zzzzzzz$ der Charakteristik 2 entstehen kann:



Es gilt also $\hat{\chi}(\tilde{w}) \leq k + 1$, $\Leftrightarrow k \geq \hat{\chi}(\tilde{w}) - 1$, und $n \geq 6 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 3$, woraus schließlich folgt:

$$\begin{aligned}
 |v| &\geq (k - 1) \cdot (3n - 2) \\
 &\geq (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot (3n - 2) \\
 &\geq (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot (3 \cdot (6 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 3) - 2) \\
 &= (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot (18 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 7) \\
 &= (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot (18 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 5) + 2 \cdot \hat{\chi}(\tilde{w}) - 4 \\
 &\geq (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot 18 \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 2 \cdot \hat{\chi}(\tilde{w}) + 1 \\
 &> (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot 5\pi \cdot \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 2 \cdot \hat{\chi}(\tilde{w}) + 1 \\
 &\geq \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot \pi + 2 \cdot \hat{\chi}(\tilde{w}) + 1
 \end{aligned}$$

Nun kann man sich leicht davon überzeugen, dass an jeder der $|v| - 1$ vielen Γ -Ecken, die auf dem Rand von L aber nicht auf der Nahtstelle liegen, mindestens ein Farbwechsel im Randverlauf einer angrenzenden Insel stattfindet. Da jeder dieser Farbwechsel einen Buchstaben von \tilde{w} induziert, gilt:

$$|\tilde{w}| \geq |v| - 1 > \frac{5}{\varepsilon} \cdot (\hat{\chi}(\tilde{w}) - 2) \cdot \pi + 2 \cdot \hat{\chi}(\tilde{w})$$

Das Wort \tilde{w} ist also auch dann ε -speziell, wenn $\hat{\chi}(\tilde{w}) \geq 3$ ist. Damit ist die Behauptung von Seite 75 bewiesen.

Kapitel 3 Freie Untergruppen

Schließlich definieren wir, wie im Beweis von Satz 3.9, einen Monoid-Homomorphismus $g : \{x, y, z\}^* \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ durch die Zuordnungen $g(x) := \langle \lrcorner_X(A, B; D)$, $g(y) := \langle \lrcorner_Y(A, C; D)$ und $g(z) := \langle \lrcorner_Z(B, C; D)$.

Damit erfüllt g die beiden Voraussetzungen des Gewichtslemmas:

$$g(x), g(y), g(z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$g(x) + g(y) + g(z) \leq \pi$$

In unserem Fall ist ε gerade so definiert, dass $\varepsilon = \pi - \Sigma(\Delta) = \pi - g(x) - g(y) - g(z)$ gilt. Da, wie wir oben gesehen haben, \tilde{w} ein ε -spezielles Wort ist, können wir das Gewichtslemma anwenden und erhalten:

$$\text{Gesamtgewicht}(\partial L) \leq -n \cdot \pi + g(\tilde{w}) < 2\pi$$

Das Gesamtgewicht aller Γ -Ecken kann daher nicht 2π betragen. ζ

□

KAPITEL 4

Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

Im dritten Kapitel haben wir die Existenz nichtabelscher freier Untergruppen in den Colimites von nichtausgearteten hyperbolischen Dreiecken von Gruppen bewiesen.

Dabei haben wir von der Hyperbolizität der Dreiecke massiv Gebrauch gemacht, indem wir aus den Grundwörtern abc und acb , die bei der Abschätzung von Gesamtgewicht (∂L) tendenziell negatives Gewicht ergeben, die Erzeugenden $(abc)^n$ und $(acb)^n$ konstruiert haben.

Durch ihre Länge haben sie in ausreichendem Maße negatives Gewicht eingebracht, um die positiven Gewichte an der Nahtstelle und den kritischen Γ -Ecken aufzuheben: Das ist ein Zusammenhang, der durch die technische Formulierung des Gewichtslemmas leider etwas verschleiert wird! Dieser Ansatz scheint sich jedoch nicht auf euklidische Dreiecke von Gruppen übertragen zu lassen, weswegen wir nun einen anderen Ansatz verfolgen werden, der bereits in den Diplomarbeiten [Lor95] von Steffen Lorenz und [Bre04] von Dirk Brendel reiche Früchte trug.

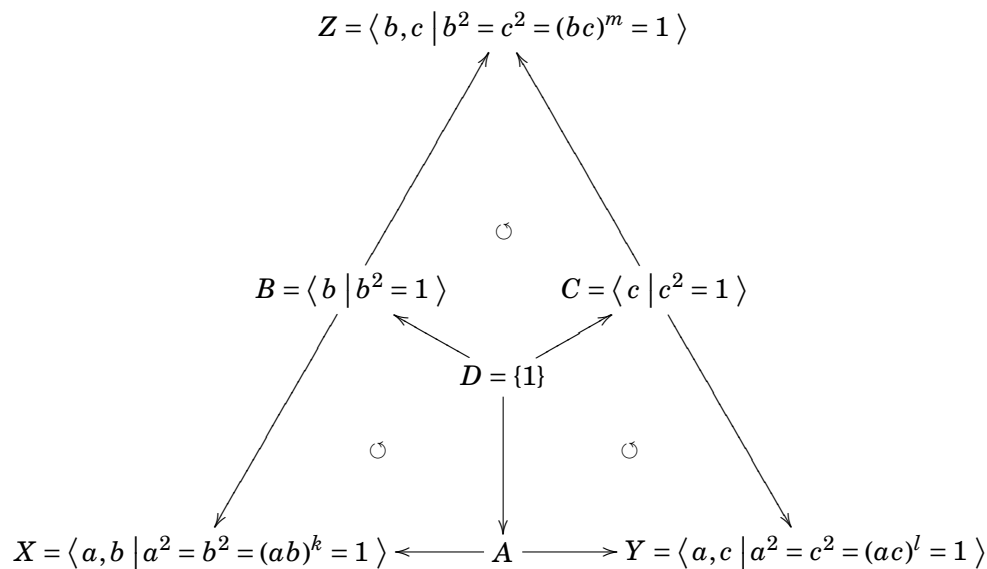
Bei der Einführung des Ansatzes von Lorenz und Brendel, der auf den Arbeiten [Sta91] und [Bri91] fußt, werden wir es uns erlauben, auf einige technische Details zu verzichten und den Leser an entsprechender Stelle auf die Literatur zu verweisen.

4.1 Das Erzeugnis dreier Spiegelungen

Am Anfang unserer Bemühungen um die Colimites von nichtausgearteten euklidischen Dreiecken von Gruppen steht jedoch eine ganz elementare Beobachtung:

Satz 4.1 *Es gibt ein nichtausgeartetes euklidisches Dreieck von Gruppen, dessen Colimes keine nichtabelsche freie Untergruppe enthält.*

Beweis. Wir wählen $(k, l, m) \in \{(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)\}$ und betrachten anschließend das folgende Diagramm von Gruppen:

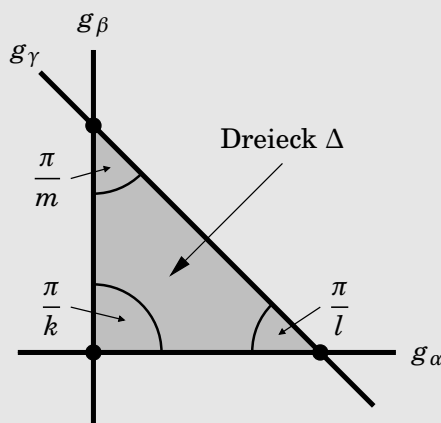


Hierbei ist $A = \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ zu ergänzen. Die Homomorphismen sind durch $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ gegeben, nach dem Satz von Dyck können wir diese Zuordnungen tatsächlich zu Homomorphismen fortsetzen.

Bevor wir zeigen, dass es sich bei dem Diagramm von Gruppen, nennen wir es $\Delta_4(k, l, m)$, um ein nichtausgeartetes euklidisches Dreieck von Gruppen handelt, untersuchen wir seinen Colimes.

Zu Beginn des Beweises haben wir $k, l, m \in \mathbb{N}$ gerade so gewählt, dass $\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} = \pi$ ist. Nun betrachten wir drei beliebige Geraden g_α , g_β und g_γ in der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 ,

die, wie in der folgenden Abbildung angedeutet, ein Dreieck $\Delta \subseteq \mathbb{E}^2$ mit den drei Winkeln $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{l}$ und $\frac{\pi}{m}$ begrenzen:



Wir bezeichnen die Spiegelungen an den Geraden g_α , g_β und g_γ mit den Buchstaben α , β und γ , und betrachten die von ihnen erzeugte Untergruppe:

$$U := \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$$

Behauptung: Der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ ist isomorph zu U .

Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einer Beweisskizze, die in [CgRR08, Beweis von Satz 3.18], zumindest für den Fall $(k, l, m) = (2, 4, 4)$, detailliert ausgeführt wird. Doch auch die beiden anderen Fälle $(k, l, m) = (2, 3, 6)$ und $(k, l, m) = (3, 3, 3)$ kann man mit den dort vorgebrachten Argumenten beweisen.

Für den Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ gilt:

$$G \cong \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^k = (ac)^l = (bc)^m = 1 \rangle$$

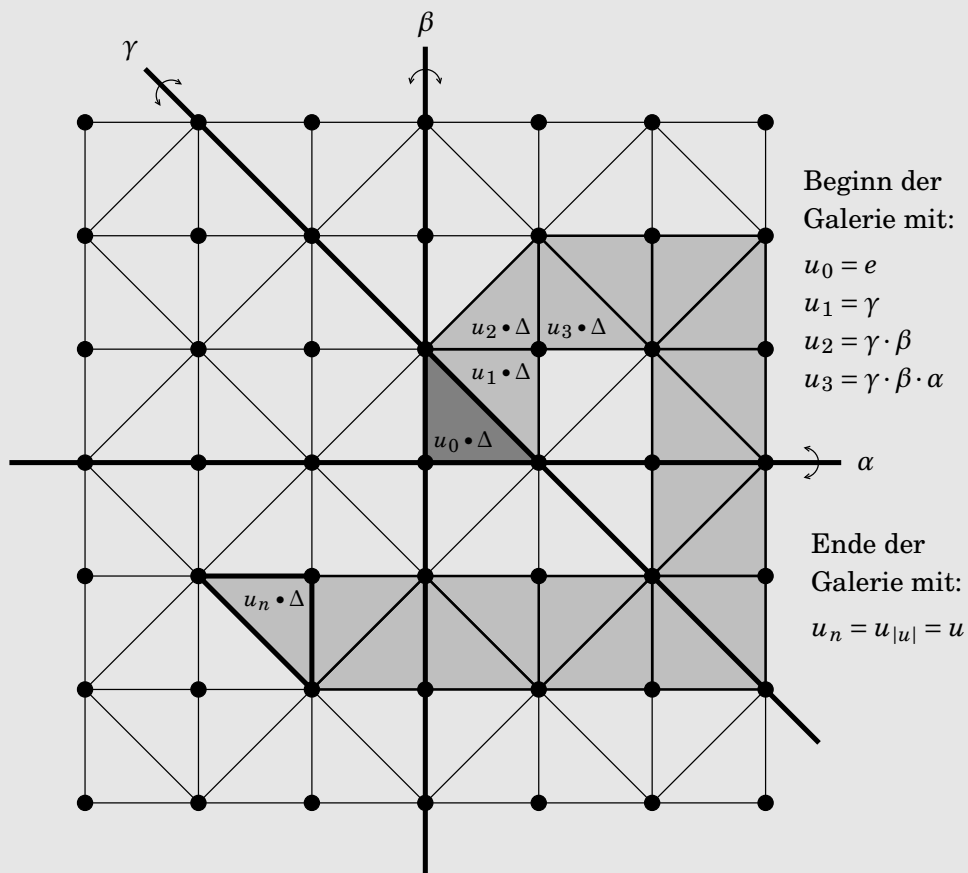
Nun definieren wir einen Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow U$ durch die Zuordnungen $\varphi(a) := \alpha$, $\varphi(b) := \beta$ und $\varphi(c) := \gamma$. Wir beobachten:

- Da α , β und γ Spiegelungen sind, ist $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$.
- Da die Produkte $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ Rotationen mit den Drehwinkeln $\frac{2\pi}{k}$, $\frac{2\pi}{l}$ und $\frac{2\pi}{m}$ um jeweils einen der drei Eckpunkte von Δ sind, ist $(\alpha\beta)^k = (\alpha\gamma)^l = (\beta\gamma)^m = 1$.

Nach dem Satz von Dyck können wir die Zuordnungen also zu einem Homomorphismus fortsetzen, dieser ist nach Konstruktion surjektiv. Wir zeigen, dass er auch injektiv ist.

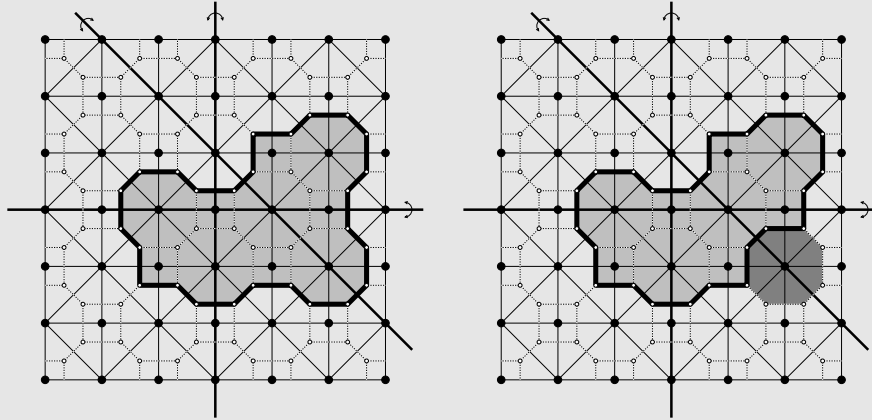
Das Dreieck Δ ist, wovon man sich leicht überzeugen kann, ein Fundamentalbereich der Operation von U auf der euklidischen Ebene E^2 . Die Bilder der Ecken und Kanten von Δ realisieren einen Graphen Γ .

Zu jedem Wort u über α , β und γ konstruieren wir eine Galerie, die Δ mit $u \cdot \Delta$ verbindet: Hierzu bilden wir die Folge $(u_i \cdot \Delta)_{i \in \{0,1,\dots,n:=|u|\}}$, wobei u_i gerade das Präfix von u mit Länge i ist. Umgekehrt finden wir zu jeder in Δ beginnenden Galerie aber auch genau ein Wort über α , β und γ , das diese Galerie erzeugt. Betrachten wir zum Beispiel den Fall $(k,l,m) = (2,4,4)$ und das Wort $u := \gamma \cdot \beta \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \alpha$:



Es wird sich als vorteilhaft erweisen, anstelle einer Galerie einen Kantenweg in dem zu Γ dualen Graphen Γ^* zu betrachten. In unserem Beispiel erhalten wir schließlich:

der im Rand einer einzigen Zusammenhangskomponente K von $\mathbb{E}^2 - \Gamma^*$ verläuft, dann können wir, wie in der Abbildung angedeutet, σ durch den Weg ersetzen, der den Rand von K auf der anderen Seite entlangläuft.



Die Kantenwege $\gamma(w) = \gamma(w_0), \gamma(w_1), \gamma(w_2), \dots, \gamma(w_m) = \gamma(e)$, die beim Zusammenziehen entstehen, werden von Wörtern $\tilde{\varphi}(w_i) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}^*$ bzw. $w_i \in \{a, b, c\}^*$ erzeugt. Jedes Wort w_i geht dabei durch einmalige „Anwendung“ einer definierenden Relation $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ oder $(ab)^k = (ac)^l = (bc)^m = 1$ aus dem Wort w_{i-1} hervor. Also gilt:

$$w = w_0 =_G w_1 =_G w_2 =_G \dots =_G w_m = e =_G 1$$

Folglich gilt auch $g =_G w =_G 1$, der Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow U$ ist also injektiv. □

Vermittelt durch den Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow U$ operiert der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ durch Isometrien auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 . Nun können wir leicht einsehen, dass es sich bei $\Delta_4(k, l, m)$ um ein nichtausgeartetes euklidisches Dreieck von Gruppen handelt. Die meisten der anzustellenden Überlegungen sind ohnehin trivial.

1. *Behauptung:* Der Homomorphismus $\varphi_{AX} : A \rightarrow X$ ist injektiv.

Da $a \in G$ auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 nichttrivial operiert, gilt $a \neq_G 1, \Rightarrow a \neq_X 1$. Also gilt $a \notin \ker(\varphi_{AX})$, d. h. der Homomorphismus $\varphi_{AX} : A \rightarrow X$ ist injektiv. Völlig analog zeigt man, dass auch die anderen Homomorphismen der Kantengruppen in die Eckengruppen injektiv sind.

2. *Behauptung:* Es gilt $\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \{1\}$.

Da a und b verschieden auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 operieren, gilt $a \neq_G b, \Rightarrow a \neq_X b$. Also gilt $\text{im}(\varphi_{AX}) \cap \text{im}(\varphi_{BX}) = \{1, a\} \cap \{1, b\} = \{1\}$. Völlig analog zeigt man, dass sich auch in den anderen Eckengruppen die Bilder der angrenzenden Kantengruppen genau im Bild der Zweizellengruppe schneiden.

3. *Behauptung:* Es gilt $\angle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{k}$.

Wir betrachten die Gruppe $X = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^k = 1 \rangle$. Nach Lemma 2.2 genügt es, bei der Bestimmung von $n_X(A, B; D)$ nur Produkte zu betrachten, die aus einer geraden Anzahl von Faktoren, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, bestehen. Ein solches Produkt ist in dieser Gruppe X stets von der Form $(ab)^n$ oder $(ba)^n$ mit einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Die Elemente $ab \in G$ und $ba \in G$ operieren durch Rotationen mit dem Winkel $\pm \frac{2\pi}{k}$ um ein festes Zentrum auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 , sie haben also Ordnung k . Also haben auch $ab \in X$ und $ba \in X$ mindestens Ordnung k , d. h. es gibt kein $n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ mit $(ab)^n =_X 1$ oder $(ba)^n =_X 1$ und folglich gilt $n_X(A, B; D) \geq 2k$. Da aber $(ab)^k =_X 1$ ist, gilt $n_X(A, B; D) = 2k, \Rightarrow \angle_X(A, B; D) = \frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$.

Völlig analog zeigt man, dass auch $\angle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{l}$ und $\angle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{m}$ gilt und es sich somit tatsächlich um ein nichtausgeartetes euklidisches Dreieck von Gruppen handelt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ keine nichtabelsche freie Untergruppe enthält. Ein nützliches Werkzeug dafür ist der Begriff der Auflösbarkeit.

Definition 4.2 (Eigenschaft „auflösbar“/ „virtuell auflösbar“) Eine Gruppe G heißt *auflösbar*, wenn es eine Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_{n-1} \supseteq N_n = \{1\}$ mit der Eigenschaft gibt, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe N_i/N_{i+1} abelsch ist. Eine Gruppe G heißt *virtuell auflösbar*, wenn sie eine auflösbare Untergruppe $U \leq G$ mit endlichem Index $|G : U| < \infty$ enthält.

Aus der Definition ergibt sich sofort, dass jede auflösbare Gruppe auch virtuell auflösbar ist. Nun gilt das folgende Lemma:

Lemma 4.3 Sei G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Die Gruppe G enthält genau dann eine nichtabelsche freie Untergruppe, wenn N oder G/N eine solche enthalten.

Die Idee des folgenden Beweises habe ich von Dirk Brendel übernommen:

Beweis. „ \Leftarrow “: Wenn N eine nichtabelsche freie Untergruppe $F \leq N$ enthält, dann enthält offenbar auch G eine solche Untergruppe. Wenn hingegen G/N eine nichtabelsche freie Untergruppe $F \leq G/N$ enthält, dann wählen wir zunächst eine Basis \mathcal{X} von $F \leq G/N$ und anschließend zu jedem $x \in \mathcal{X}$ einen Repräsentanten $\tilde{x} \in G$. Jedes frei reduzierte Wort über diesen $\{\tilde{x} \mid x \in \mathcal{X}\}$ sowie deren Inversen repräsentiert ein nichttriviales Element von G/N und beschreibt folglich ein nichttriviales Element von G . Die Menge $\widetilde{\mathcal{X}} := \{\tilde{x} \mid x \in \mathcal{X}\} \subseteq G$ ist also Basis einer nichtabelschen freien Untergruppe von G .

„ \Rightarrow “: Wenn G eine nichtabelsche freie Untergruppe $F \leq G$ enthält, der Normalteiler N aber keine solche enthält, dann unterscheiden wir zwei Fälle: Wenn $N \cap F = \{1\}$ ist, dann enthält G/N die Untergruppe $FN/N \cong F/(N \cap F) = F/\{1\} \cong F$, also eine nichtabelsche freie Untergruppe.

Wenn aber $H := N \cap F \neq \{1\}$ ist, dann ist H als Untergruppe der freien Gruppe F frei und hat als Untergruppe von N höchstens Rang 1. Da $H \neq \{1\}$ ist, ist der Rang sogar genau 1. $H = N \cap F \trianglelefteq F$ ist somit ein endlich erzeugter Normalteiler einer freien Gruppe und hat, wie zum Beispiel in [LS77, Proposition 3.12] bewiesen, endlichen Index $|F : H| < \infty$. Es folgt mit der Formel von Nielsen-Schreier:

$$1 = \text{rk}(H) = |F : H| \cdot (\text{rk}(F) - 1) + 1 \geq 1 + 1 = 2 \quad \zeta$$

Der Fall $N \cap F \neq \{1\}$ kann also nicht eintreten, es folgt die Behauptung. □

Corollar 4.4 Sei $G \cong X \times Y$. Die Gruppe G enthält genau dann eine nichtabelsche freie Untergruppe, wenn X oder Y eine solche enthalten.

Satz 4.5 Wenn eine Gruppe G virtuell auflösbar ist, dann enthält sie keine nichtabelsche freie Untergruppe.

Beweis. Sei G eine virtuell auflösbare Gruppe. Dann gibt es eine Untergruppe $U \leq G$ mit endlichem Index $|G : U| < \infty$ und eine erweiterte Normalreihe:

$$G \geq U = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_{n-1} \supseteq N_n = \{1\}$$

mit der Eigenschaft, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe N_i/N_{i+1} abelsch ist. Da die triviale Gruppe und die abelschen Faktorgruppen sicher keine nichtabelschen

freien Untergruppen enthalten, können wir durch iterierte Anwendung von Lemma 4.3 einsehen, dass keines der N_i , insbesondere also auch nicht $N_0 = U$, eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält.

Angenommen, G enthält eine nichtabelsche freie Untergruppe $F \leq G$. Dann betrachten wir erneut $H := U \cap F \leq G$, das als Untergruppe der freien Gruppe F frei ist und als Untergruppe von U höchstens Rang 1 hat. Wir beobachten:

$$\infty > |G : U| \geq |(G \cap F) : (U \cap F)| = |F : H| \geq |F : \langle\langle H \rangle\rangle|$$

Den Beweis der Ungleichung $|G : U| \geq |(G \cap F) : (U \cap F)|$ überlassen wir dem Leser als Fingerübung. Für die Faktorgruppe $F / \langle\langle H \rangle\rangle$ gibt es eine naheliegende Präsentation mit $\text{rk}(F) \geq 2$ Erzeugenden und $\text{rk}(H) \leq 1$ definierenden Relationen. Der Freiheitssatz von Magnus garantiert, dass $F / \langle\langle H \rangle\rangle$ eine freie Untergruppe enthält, und somit unendlich ist. Also gilt:

$$|F : \langle\langle H \rangle\rangle| = \infty \not\leq$$

Die Gruppe G enthält also auch keine nichtabelsche freie Untergruppe. \square

Wir werden nun zeigen, dass der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ auflösbar ist: Dann ist er auch virtuell auflösbar und enthält nach Satz 4.5 keine nichtabelsche freie Untergruppe.

1. Behauptung: $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ ist auflösbar.

Wir betrachten die folgende Normalreihe:

$$N_0 := \text{Isom}(\mathbb{E}^2) \supseteq N_1 := \text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \supseteq N_2 := \text{Trans}(\mathbb{E}^2) \supseteq N_3 := \{1\}$$

Dabei bezeichnet $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$, wie gehabt, die Gruppe der Isometrien, $\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2)$ die Gruppe der orientierungserhaltenden Isometrien und $\text{Trans}(\mathbb{E}^2)$ die Gruppe der Translationen der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 . Es ist nun eine geometrische Fingerübung, sich zu überlegen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Normalreihe handelt und dass die Faktorgruppen $N_0/N_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $N_1/N_2 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $N_2/N_3 \cong \mathbb{R}^2$ allesamt abelsch sind. Es folgt, dass $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ auflösbar ist.

2. Behauptung: Untergruppen auflösbarer Gruppen sind auflösbar.

Sei G eine auflösbare Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe. Da G auflösbar ist, gibt es eine Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_{n-1} \supseteq N_n = \{1\}$ mit der Eigenschaft, dass,

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe N_i/N_{i+1} abelsch ist. Davon ausgehend betrachten wir die folgende Normalreihe:

$$U = (N_0 \cap U) \supseteq (N_1 \cap U) \supseteq (N_2 \cap U) \supseteq \dots \supseteq (N_{n-1} \cap U) \supseteq (N_n \cap U) = \{1\}$$

Es ist wieder eine Fingerübung, sich zu überlegen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Normalreihe handelt und dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, auch die Faktorgruppe $(N_i \cap U)/(N_{i+1} \cap U)$ abelsch ist. Es folgt, dass U auflösbar ist.

Damit sind wir am Ziel angekommen: Der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ ist, wie wir oben gesehen haben, isomorph zu einer Untergruppe $U \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$. Diese ist als Untergruppe von $\text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ auflösbar, also ist auch G auflösbar. \square

4.2 Die Tits-Alternative

Indem wir uns im vergangenen Abschnitt davon überzeugt haben, dass der Colimes G von $\Delta_4(k, l, m)$ virtuell auflösbar ist, haben wir gezeigt, dass er keine nichtabelsche freie Untergruppe enthält.

4.2.1 Die Definition der Tits-Alternative

Eine Frage, die sich an dieser Stelle aufdrängt, ist, ob der Colimes eines Dreiecks von Gruppen, oder zumindest der eines nichtsphärischen Dreiecks von Gruppen, immer dann virtuell auflösbar ist, wenn er keine nichtabelsche freie Untergruppe enthält.

Definition 4.6 (Tits-Alternative) *Eine Klasse von Gruppen erfüllt die Tits-Alternative, wenn jede Gruppe dieser Klasse entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist.*¹

Die Tits-Alternative ist nach Jacques Tits benannt, der sie in [Tit72] für die Klasse der endlich erzeugten linearen Gruppen nachgewiesen hat. Doch auch andere Klassen von Gruppen wurden und werden daraufhin untersucht, ob sie die Tits-Alternative erfüllen.

¹Um Missverständnissen vorzubeugen, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass man gelegentlich auch sagt, eine Gruppe G erfülle die Tits-Alternative: Damit ist dann nicht nur gemeint, dass die Gruppe G selbst entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist, sondern auch, dass jede Untergruppe von G diese Eigenschaft hat. Wir arbeiten jedoch mit Klassen von Gruppen und der entsprechenden Formulierung der Tits-Alternative!

Howie und Kopteva haben dankenswerterweise in [HK06] eine kurze Bibliographie zu diesem Thema zusammengestellt.

Uns interessiert nun, ob die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen die Tits-Alternative erfüllt. Es gibt bereits einige Resultate, die Anlass zu vorsichtigem Optimismus geben.

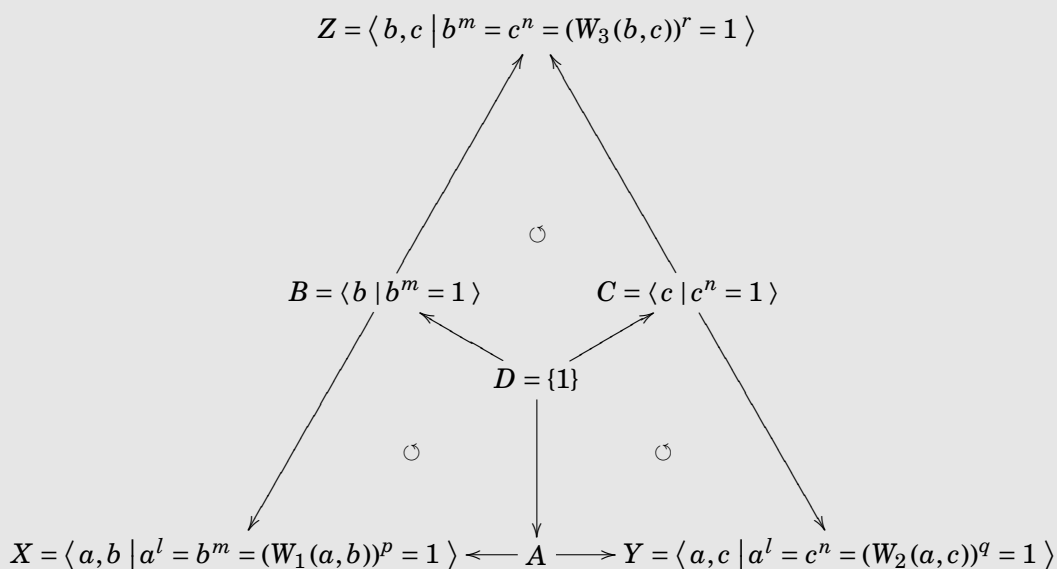
4.2.2 Nichtsphärische verallgemeinerte Tetraedergruppen

Definition 4.7 (VTG) Eine Gruppe G heißt verallgemeinerte Tetraedergruppe, kurz VTG, wenn sie eine Präsentation \mathcal{P}_G der folgenden Form hat:

$$G \cong \langle a, b, c \mid a^l = b^m = c^n = (W_1(a, b))^p = (W_2(a, c))^q = (W_3(b, c))^r = 1 \rangle$$

Dabei sind die Exponenten $l, m, n, p, q, r \in \mathbb{N} - \{1\}$ und, für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$, ist $W_i(x, y)$ ein zyklisch reduziertes Wort über x und y sowie deren Inversen, das mindestens ein $x^{\pm 1}$ und mindestens ein $y^{\pm 1}$ enthält. Wir bezeichnen eine solche Präsentation im Folgenden als Tetraederpräsentierung.

Bemerkung. Eine VTG G mit der Tetraederpräsentierung \mathcal{P}_G ist isomorph zum Colimes des folgenden nichtausgearteten Dreiecks $\Delta_5(\mathcal{P}_G)$ von Gruppen:



Hierbei ist $A = \langle a \mid a^l = 1 \rangle$ zu ergänzen. Die Homomorphismen sind durch $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ gegeben, nach dem Satz von Dyck können wir diese Zuordnungen tatsächlich zu Homomorphismen fortsetzen.

Dass die Homomorphismen der Kantengruppen in die Eckengruppen injektiv sind und dass sich in jeder Eckengruppe die Bilder der angrenzenden Kantengruppen genau im Bild der Zweizellengruppe schneiden, ist zwar nicht trivial, folgt jedoch unmittelbar aus dem „Spelling theorem“, siehe zum Beispiel [HK06, Theorem 3.1]. Es handelt sich bei $\Delta_5(\mathcal{P}_G)$ also tatsächlich um ein nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen.

Beispiel. Ein Beispiel für eine VTG ist der Colimes von $\Delta_4(k, l, m)$.

Satz 4.8 (Howie und Kopteva, 2006) *Die Klasse der nichtsphärischen VTG, d. h. der VTG G , für die es eine Tetraederpräsentierung \mathcal{P}_G gibt, sodass $\Delta_5(\mathcal{P}_G)$ nichtsphärisch ist, erfüllt die Tits-Alternative.*

Beweis. Siehe [HK06, Theorem 1]. □

Kopteva und Williams kommentieren dieses Resultat in [KW08, Seite 58] wie folgt:

„In [HK06], it was proved that if the angle sum² of the triangle³ is strictly less than π then G contains a non-abelian free subgroup. In the same paper the Tits alternative was proved for a particular class of non-spherical triangles of groups, namely, for non-spherical generalized tetrahedron groups. In general, it is unknown if this property holds for non-spherical triangles of groups.“

Uns motiviert diese Bemerkung, noch intensiver der Frage nachzugehen, ob die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen die Tits-Alternative erfüllt. Dabei wird sich, soviel sei verraten, herausstellen, dass das im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Wir können die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen jedoch so einschränken, dass eine reichhaltige Unterklasse übrig bleibt, die die Tits-Alternative erfüllt.

²Man beachte, dass in [HK06] mit der auf Seite 47 beschriebenen Variante des Gersten-Stallings-Winkels gearbeitet wird, im Endeffekt werden also nur Dreiecke von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D untersucht.

³Man beachte außerdem, dass in [HK06] mit nichtausgearteten, genauer mit nicht-ecken-ausgearteten, Dreiecken von Gruppen gearbeitet wird. Siehe hierzu auch Definition 4.10 und Satz 4.12.

4.2.3 Sphärische verallgemeinerte Tetraedergruppen

Auch wenn es für uns im Moment weniger interessant ist, sei der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, dass es große Rebel in seiner Dissertation gelungen ist, das Resultat von Howie und Kopteva auf fast alle VTG auszuweiten.

Satz 4.9 (große Rebel, 2006) *Auch die Klasse der sphärischen VTG, d. h. der VTG G , für die es eine Tetraederpräsentierung \mathcal{P}_G gibt, sodass $\Delta_5(\mathcal{P}_G)$ sphärisch ist, für die außerdem $(p, q, r) \neq (2, 2, 2)$ gilt, erfüllt die Tits-Alternative.*

Beweis. Siehe [gR06], der Beweis von große Rebel beruht auf einer sehr umfangreichen Fallunterscheidung. □

4.3 Drei verschiedene Ausartungsbegriffe

In Definition 1.10 haben wir festgelegt, was ein nichtausgeartetes Dreieck von Gruppen ist. Wir werden nun zwei Varianten dieser Definition kennenlernen, die sich insbesondere für die Frage nach der Tits-Alternative als interessant erweisen werden.

Definition 4.10 (Eigenschaft „nicht-...-ausgeartet“) *Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Wenn keiner der sechs Homomorphismen der Kantengruppen in die Eckenruppen surjektiv ist, dann heißt Δ nicht-ecken-ausgeartet. Wenn keiner der drei Homomorphismen der Zweizellengruppe in die Kantengruppen surjektiv ist, dann heißt Δ nicht-kanten-ausgeartet. Wenn keiner der drei Winkel $\sphericalangle_X(A, B; D)$, $\sphericalangle_Y(A, C; D)$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D)$ gleich 0 ist, dann heißt Δ nicht-winkel-ausgeartet.*

Hinweis. Die nach Definition 1.10 nichtausgearteten Dreiecke von Gruppen sind genau die nicht-kanten-ausgearteten. Um keine Verwirrung zu verursachen, werden wir für sie von nun an ausschließlich den Begriff „nicht-kanten-ausgeartet“ verwenden.

Satz 4.11 *Sei Δ ein Dreieck von Gruppen (genau wie in Definition 1.9). Dann gelten die folgenden Implikationen:*

$$\Delta \text{ nicht-ecken-ausgeartet} \Leftarrow \Delta \text{ nicht-kanten-ausgeartet} \Leftarrow \Delta \text{ nicht-winkel-ausgeartet}$$

Beweis. Wenn Δ nicht-winkel-angestrichelt ist, dann gibt es $n := n_X(A, B; D) \in 2 \cdot \mathbb{N}$ viele Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_X 1$ ist. Insbesondere gibt es ein $a \in A - D$ und ein $b \in B - D$. Analog zeigt man, dass es auch ein $c \in C - D$ gibt. Also ist Δ nicht-kanten-angestrichelt.

Wenn Δ nicht-kanten-angestrichelt ist, dann gibt es ein $a \in A - D$, ein $b \in B - D$ und ein $c \in C - D$. Da $A \cap B = D$ ist, ist $b \in X - A$. Analog zeigt man, dass $a \in X - B$, $c \in Y - A$, $a \in Y - C$, $c \in Z - B$ und $b \in Z - C$ ist. Also ist Δ nicht-ecken-angestrichelt. \square

Einen Sachverhalt haben wir bislang nur in Fußnoten gewürdigt: Howie und Kopteva arbeiten in [HK06] gar nicht mit nicht-kanten-angestrichelten, sondern, etwas allgemeiner, mit nicht-ecken-angestrichelten Dreiecken von Gruppen.

Unsere Entscheidung, zunächst nur die nicht-kanten-angestrichelten Dreiecke von Gruppen zu studieren, wird jedoch durch den folgenden Satz legitimiert:

Satz 4.12 *Sei Δ ein nicht-ecken-angestricheltes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Wenn Δ kanten-angestrichelt ist, dann enthält G grundsätzlich eine nichtabelsche freie Untergruppe.*

Beweis. Wir können o. B. d. A. davon ausgehen, dass $A = D$ und somit $G \cong (X *_B Z) *_C Y$ ist. Da Δ nicht-ecken-angestrichelt ist, gibt es ein $z \in Z - C$, dieses Element ist Repräsentant einer echten Rechtsnebenklasse $C \cdot z \in C \setminus (X *_B Z)$. Daneben gibt es ein $x \in X - B$, es ist sicher kein Element der Eckengruppe Z und daher Repräsentant einer weiteren echten Rechtsnebenklasse $C \cdot x \in C \setminus (X *_B Z)$. Somit gilt $|(X *_B Z) : C| \geq 3$. Nach Voraussetzung gilt außerdem $|Y : C| \geq 2$. Wir können also das folgende Lemma 4.13 anwenden, um die Behauptung zu beweisen. \square

Lemma 4.13 *Sei $G \cong X *_A Y$. Wenn $|X : A| \geq 3$ und $|Y : A| \geq 2$ ist, dann enthält G eine nichtabelsche freie Untergruppe.*

Beweis. Da $|X : A| \geq 3$ ist, gibt es mindestens zwei echte Rechtsnebenklassen von $A \leq X$. Seien also $x_1, x_2 \in X$ aus verschiedenen echten Rechtsnebenklassen. Dann gilt $x_1 \in X - A$, $x_2 \in X - A$ und $x_2 \cdot x_1^{-1} \in X - A$. Sei außerdem $y \in Y - A$. Wir betrachten nun die von den beiden folgenden Elementen $g_1, g_2 \in G$ erzeugte Untergruppe $U := \langle g_1, g_2 \rangle \leq G$:

$$\begin{aligned} g_1 &:= x_1^{-1} \cdot y \cdot x_2 & \Rightarrow & \quad g_1^{-1} = x_2^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x_1 \\ g_2 &:= y^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot y \cdot x_2 \cdot y & \Rightarrow & \quad g_2^{-1} = y^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot y^{-1} \cdot x_1 \cdot y \end{aligned}$$

Behauptung: $U \leq G$ ist eine freie Untergruppe mit Basis $\{g_1, g_2\}$.

Sei $w \neq e$ ein frei reduziertes Wort über g_1 und g_2 sowie deren Inversen. Wir müssen uns nun davon überzeugen, dass w nicht das neutrale Element der Gruppe G beschreibt. Wenn wir in w , das wir von nun an als Produkt in G auffassen, jedes $g_1^{\pm 1}$ und jedes $g_2^{\pm 1}$ durch das oben angegebene Produkt ersetzen und anschließend, wo immer es möglich ist, je zwei benachbarte Faktoren $y \cdot y^{-1}$ gegeneinander kürzen und je zwei benachbarte Faktoren $x_2 \cdot x_1^{-1}$ und $x_1 \cdot x_2^{-1}$ zu einem Faktor in $X - A$ zusammenfassen, dann erhalten wir ein Produkt mit $n \in \mathbb{N}$ Faktoren, die abwechselnd in $X - A$ und $Y - A$ enthalten sind:

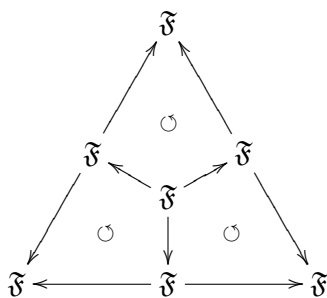
$$w = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

Dieses Produkt können wir, nachdem wir jeweils ein vollständiges Repräsentantensystem der echten Rechtsnebenklassen von $A \leq X$ und $A \leq Y$ gewählt haben, in eine Normalform mit $n + 1 \geq 2$ Faktoren überführen. Da eine solche Normalform nach Satz 1.7 eindeutig bestimmt ist und die Normalform des neutralen Elements genau einen Faktor enthält, kann w nicht das neutrale Element sein. □

4.4 Einige negative Resultate zur Tits-Alternative

4.4.1 Der allgemeine Fall

Dass es leider vermessen war, zu hoffen, die Klasse der Colimites aller nichtsphärischen Dreiecke von Gruppen erfülle die Tits-Alternative, können wir wie folgt einsehen: Wir wählen zunächst eine beliebige Gruppe, die weder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält noch virtuell auflösbar ist, z. B. Thompsons Gruppe \mathfrak{F} , und betrachten dann das folgende Diagramm von Gruppen:



Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

Die Homomorphismen sind jeweils durch die Identität $\text{id}_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$ gegeben. Dass es sich bei dem Diagramm von Gruppen, nennen wir es Δ_6 , um ein Dreieck von Gruppen handelt, ist also klar.

Da $\langle_X(A, B; D) = \langle_Y(A, C; D) = \langle_Z(B, C; D) = 0$ sind, ist Δ_6 hyperbolisch. Für den Colimes G von Δ_6 gilt jedoch $G \cong \mathfrak{F}$, er enthält also weder eine nichtabelsche freie Untergruppe noch ist er virtuell auflösbar.

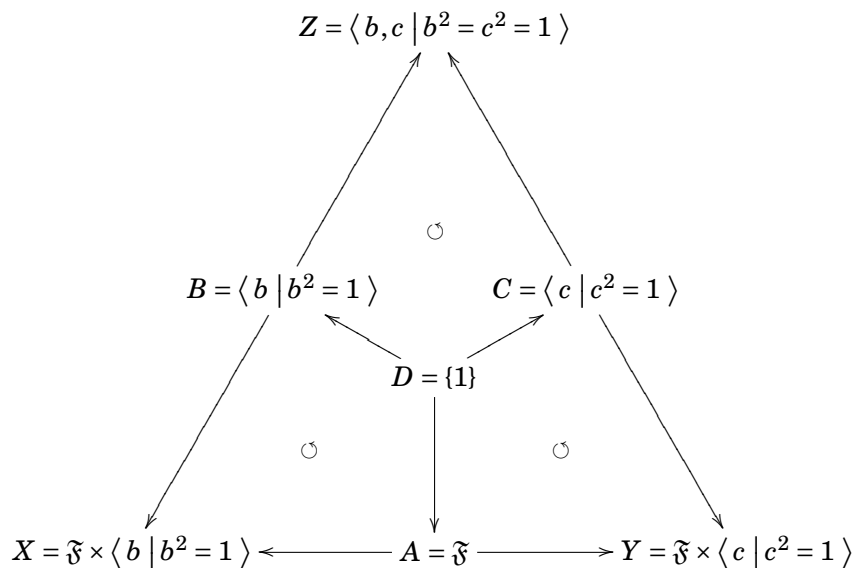
Wir haben damit bewiesen:

Satz 4.14 *Die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen erfüllt die Tits-Alternative nicht.*

4.4.2 Eine erste Einschränkung

Unser Gegenbeispiel Δ_6 ist winkel-ausgeartet, kanten-ausgeartet und ecken-ausgeartet. Ferner ist seine Zweizellengruppe D nichttrivial. Es schließt sich die Frage an, wie es um die Tits-Alternative gestellt ist, wenn wir die Klasse einschränken, wenn wir uns zum Beispiel an [HK06] orientieren und die Klasse der Colimites nicht-ecken-ausgearteter nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D untersuchen. Auch in diesem Fall ist die Antwort negativ!

Um das zu sehen, betrachten wir das folgende Diagramm von Gruppen:



Hinweis. Wann immer wir mit dem direkten Produkt zweier Gruppen $G \times H$ arbeiten, fassen wir G und H als Untergruppen von $G \times H$ auf, indem wir G mit $G \times \{1\} \leq G \times H$ und H mit $\{1\} \times H \leq G \times H$ identifizieren. Wir werden unsere Notation dabei immer so wählen, dass Missverständnisse ausgeschlossen sind.

Die Homomorphismen sind durch die Zuordnungen $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ sowie durch $\forall f \in \mathfrak{F} : f \mapsto f$ gegeben. Dass es sich bei dem Diagramm von Gruppen, nennen wir es Δ_7 , um ein Dreieck von Gruppen handelt, ist leicht einzusehen. Es ist nicht-kanten-ausgeartet, somit auch nicht-ecken-ausgeartet, und hat eine triviale Zweizellengruppe D .

Da $\langle_X(A, B; D) = \langle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{2}$ und $\langle_Z(B, C; D) = 0$ sind, ist Δ_7 euklidisch. Wenn wir nun eine Präsentation $\mathfrak{F} \cong \langle \mathcal{X}_{\mathfrak{F}} | \mathcal{R}_{\mathfrak{F}} \rangle$ wählen, dann können wir zunächst beobachten, dass für den Colimes G von Δ_7 gilt:

$$G \cong \langle \mathcal{X}_{\mathfrak{F}}, b, c \mid \mathcal{R}_{\mathfrak{F}}, b^2 = c^2 = 1, \{[b, x] = [c, x] = 1 \mid x \in \mathcal{X}_{\mathfrak{F}}\} \rangle \cong \mathfrak{F} \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$$

Behauptung: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ enthält keine nichtabelsche freie Untergruppe.

Es gilt:

$$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1 \rangle$$

Da $x \cdot xy \cdot x = yx = (xy)^{-1}$ und $y \cdot xy \cdot y = yx = (xy)^{-1}$ sind, ist die von $xy \in \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ erzeugte Untergruppe $N := \langle xy \rangle \leq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ sogar ein Normalteiler. Dieser ist zyklisch, also abelsch, und enthält somit sicher keine nichtabelsche freie Untergruppe. Außerdem gilt:

$$(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)/N \cong \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, xy = 1 \rangle \cong \langle x \mid x^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

Da auch $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)/N$ abelsch ist, enthalten weder N noch $(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)/N$ eine nichtabelsche freie Untergruppe, nach Lemma 4.3 also auch nicht $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. \square

Also enthalten weder \mathfrak{F} noch $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ eine nichtabelsche freie Untergruppe, nach Corollar 4.4 also auch nicht $\mathfrak{F} \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ und somit auch nicht G .

Behauptung: Untergruppen virtuell auflösbarer Gruppen sind virtuell auflösbar.

Sei G eine virtuell auflösbare Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe. Da G virtuell auflösbar ist, enthält es eine auflösbare Untergruppe $U \leq G$ mit endlichem Index $|G : U| < \infty$. Wir betrachten nun die Untergruppe $V := U \cap H \leq G$, sie ist als Untergruppe von U auflösbar (siehe die „2. Behauptung“ auf Seite 87).

Außerdem gilt für alle $h_1, h_2 \in H$:

$$U \cdot h_1 = U \cdot h_2 \Leftrightarrow h_1 \cdot h_2^{-1} \in U \Leftrightarrow h_1 \cdot h_2^{-1} \in U \cap H \Leftrightarrow (U \cap H) \cdot h_1 = (U \cap H) \cdot h_2$$

Insbesondere ist also:

$$\begin{aligned} |H : V| &= \text{card}\{V \cdot h \mid h \in H\} \\ &= \text{card}\{(U \cap H) \cdot h \mid h \in H\} \\ &= \text{card}\{U \cdot h \mid h \in H\} \\ &\leq \text{card}\{U \cdot g \mid g \in G\} \\ &= |G : U| < \infty \end{aligned}$$

Folglich ist H virtuell auflösbar. □

Da aber \mathfrak{F} nicht virtuell auflösbar ist, sind es $\mathfrak{F} \times (\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2)$ und G ebensowenig. Also enthält G weder eine nichtabelsche freie Untergruppe noch ist es virtuell auflösbar.

Wir haben damit bewiesen:

Satz 4.15 *Weder die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-ecken-angestrichelter noch die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-kanten-angestrichelter Dreiecke von Gruppen erfüllt die Tits-Alternative.*

Satz 4.16 *Die Aussage von Satz 4.15 gilt auch dann, wenn man sich auf Dreiecke von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D beschränkt.*

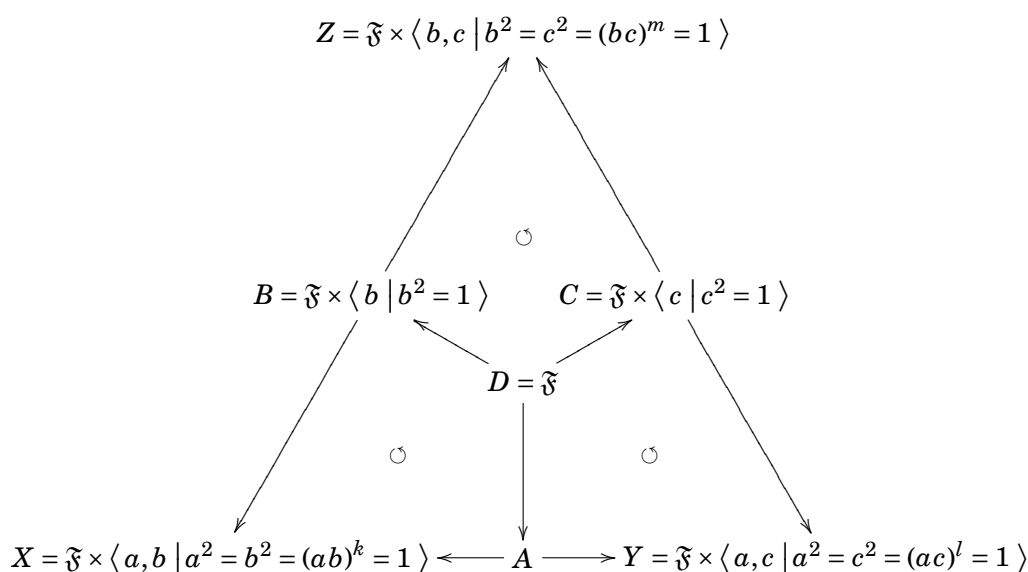
4.4.3 Eine zweite Einschränkung

Unsere beiden Gegenbeispiele, Δ_6 und Δ_7 , sind winkel-angestrichelt, d. h. in beiden Fällen ist mindestens ein Winkel gleich 0. Wir wenden uns daher den Colimites nichtsphärischer

nicht-winkel-ausgearteter Dreiecke von Gruppen zu. Was folgt, ist das letzte negative Resultat dieser Arbeit!

Satz 4.17 Die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-winkel-ausgearteter Dreiecke von Gruppen erfüllt die Tits-Alternative nicht.

Beweis. Wir wählen $(k, l, m) \in \{(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)\}$ und betrachten anschließend das folgende Diagramm von Gruppen:



Hierbei ist $A = \mathfrak{F} \times \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ zu ergänzen. Die Homomorphismen sind, wie oben, durch die Zuordnungen $a \mapsto a, b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ sowie durch $\forall f \in \mathfrak{F} : f \mapsto f$ gegeben. Dass es sich bei dem Diagramm von Gruppen, nennen wir es Δ_8 , um ein Dreieck von Gruppen handelt, ist leicht einzusehen.

Da $\angle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{k}, \angle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{l}$ und $\angle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{m}$ sind, handelt es sich bei Δ_8 um ein euklidisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen. Für den Colimes G von Δ_8 gilt jedoch:

$$G \cong \mathfrak{F} \times \text{colim}(\Delta_4(k, l, m))$$

Nun enthalten weder \mathfrak{F} noch, wie wir in Satz 4.1 gesehen haben, $\text{colim}(\Delta_4(k, l, m))$ eine nichtabelsche freie Untergruppe, nach Corollar 4.4 also auch nicht $\mathfrak{F} \times \text{colim}(\Delta_4(k, l, m))$ und somit auch nicht G .

Da aber \mathfrak{F} nicht virtuell auflösbar ist, sind es, wie wir im Beweis von Satz 4.15 gesehen haben, $\mathfrak{F} \times \text{colim}(\Delta_4(k, l, m))$ und G ebensowenig. Also enthält G weder eine nichtabelsche freie Untergruppe noch ist es virtuell auflösbar. \square

4.5 Die Arbeiten von Lorenz und Brendel

In den bereits erwähnten Diplomarbeiten [Lor95] von Steffen Lorenz und [Bre04] von Dirk Brendel werden nichtsphärische und sphärische Dreiecke von Gruppen untersucht. Für nichtsphärische Dreiecke von Gruppen beweisen sie einen Satz, den wir uns an dieser Stelle, in einer leicht überarbeiteten Formulierung, ansehen.

Satz 4.18 Sei Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9), das eine der folgenden Eigenschaften hat:

Eigenschaft I:

- Der Winkel $\angle_X(A, B; D)$ ist gerade, d. h. $\frac{1}{2} \cdot n_X(A, B; D) \equiv 0 \pmod{2}$.

Eigenschaft II:

- Der Winkel $\angle_X(A, B; D)$ ist ungerade, d. h. $\frac{1}{2} \cdot n_X(A, B; D) \equiv 1 \pmod{2}$.
- Δ ist in X gleichschenkelig, d. h. $\angle_Y(A, C; D) = \angle_Z(B, C; D)$.

Sei nun $c \in C$, sodass, für jedes $n \in \{1, 2, \dots, \text{ord}(c)\}$, $c^n \in C - D$ gilt, und sei $x \in \langle A, B \rangle \leq X$, sodass, für jedes $n \in \{1, 2, \dots, \text{ord}(x)\}$, die folgende Ungleichung gilt:

$$\text{len}(x^n) := \min \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists x_1, \dots, x_m \in A \cup B : x^n = x_1 \cdots x_m\} \geq \frac{1}{2} \cdot n_X(A, B; D)$$

Dann ist der durch die beiden Zuordnungen $c \mapsto c$ und $x \mapsto x$ definierte Homomorphismus $\varphi : \langle c \rangle * \langle x \rangle \rightarrow G$ injektiv.

Beweis. Siehe [Lor95, Abschnitt 4.3] und [Bre04, Satz 2.3]. \square

Aus Symmetriegründen gilt Satz 4.18, mutandis mutatis, natürlich auch dann, wenn man anstelle der Eckengruppe X und der gegenüberliegenden Kantengruppe C eine der beiden anderen Eckengruppen mit der jeweils gegenüberliegenden Kantengruppe betrachtet.

Zusatz 4.19 Wenn Δ aus Satz 4.18 die Eigenschaft II hat und es ein $a \in A$ gibt, sodass, für jedes $n \in \{1, 2, \dots, \text{ord}(a)\}$, $a^n \in A - D$ gilt, dann können wir durch Konjugation des $a \in A$ ein geeignetes $x \in X$ konstruieren.

Beweis. Siehe [Lor95, Abschnitt 4.3] und [Bre04, Satz 2.3]. □

Brendel wendet Satz 4.18 und Zusatz 4.19 wie folgt an: In einem konkreten Beispiel, einem euklidischen Dreieck von Gruppen, das die Eigenschaft II hat, findet er Elemente $c \in C$ und $a \in A$, sodass, für jedes $n \in \mathbb{N}$, sowohl $c^n \in C - D$ als auch $a^n \in A - D$ gilt. Nach Zusatz 4.19 gibt es ein geeignetes $x \in X$, sodass nach Satz 4.18 gilt:

$$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle c \rangle * \langle x \rangle \cong \text{im}(\varphi) \leq G$$

Der Satz 4.18 ermöglicht also den Nachweis von nichtabelschen freien Untergruppen in den Colimites einiger nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen. Nun sind wir an einer möglichst allgemeinen Aussage interessiert: Wir werden aus diesem Grunde versuchen, die Voraussetzungen des Satzes ein wenig abzuschwächen.

Betrachten wir ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen, so ist zum Beispiel klar: Wenn das Dreieck von Gruppen hyperbolisch ist, dann enthält sein Colimes nach Satz 3.11 eine nichtabelsche freie Untergruppe, wir können uns also auf den euklidischen Fall zurückziehen. Für euklidische Dreiecke von Gruppen gibt es im Wesentlichen nur drei verschiedene Möglichkeiten, wie die Winkel verteilt sein können. Diese können wir einzeln studieren. Auch die Suche nach geeigneten Elementen in den Ecken- und Kantengruppen wird uns dann etwas leichter fallen.

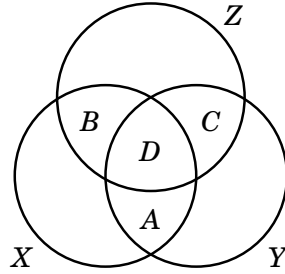
4.6 Der Ansatz von Lorenz und Brendel

Zunächst aber fassen wir den Ansatz von Lorenz und Brendel zusammen:

4.6.1 Das Erzeugnis der Kantengruppen

Satz 4.20 Sei Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Wenn es eine Eckengruppe gibt, die nicht von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird, dann enthält G eine nichtabelsche freie Untergruppe.

Beweis. Als nichtsphärisches Dreieck von Gruppen ist Δ nach Satz 2.12 realisierbar. Wir können es uns daher in diesem Beweis erlauben, die Abbildung φ_M nicht explizit anzugeben und die Menge $M = X \cup Y \cup Z$ (mit $X \cap Y = A$, $X \cap Z = B$, $Y \cap Z = C$ und $X \cap Y \cap Z = D$) als Teilmenge des Colimes G aufzufassen:



O. B. d. A. können wir davon ausgehen, dass es sich bei $\langle A, B \rangle < X \leq G$ um eine echte Untergruppe handelt. Man kann nun leicht einsehen, dass der Colimes G wie folgt als freies Produkt mit Amalgam aufgefasst werden kann:

$$G \cong X *_{\langle A, B \rangle} \langle Y, Z \rangle$$

Da $\langle A, B \rangle < X$ ist, gilt jedenfalls $|X : \langle A, B \rangle| \geq 2$. Andererseits können wir uns überlegen: Da Δ nicht-winkel-angestrichelt und folglich auch nicht-kanten-angestrichelt ist, gibt es ein $c \in C - D$, $\Rightarrow c \in \langle Y, Z \rangle - \langle A, B \rangle$. Wäre $\langle A, B \rangle \cdot c$ die einzige echte Rechtsnebenklasse von $\langle A, B \rangle$ in $\langle Y, Z \rangle$, so handelte es sich um einen Normalteiler $\langle A, B \rangle \trianglelefteq \langle Y, Z \rangle$ und für ein beliebiges Element $a \in A - D$ würde $c^{-1} \cdot a \cdot c \in \langle A, B \rangle \cap Y$, $\Rightarrow c^{-1} \cdot a \cdot c \in A$, gelten. Dann jedoch würde $n_Y(A, C; D) \leq 4$, $\Rightarrow n_Y(A, C; D) = 4$, $\Rightarrow \triangleleft_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{2}$ gelten. Analog würde auch $\triangleleft_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{2}$ gelten und es folgte aufgrund der Nichtsphärizität $\triangleleft_X(A, B; D) = 0$. Im Widerspruch zur Voraussetzung, dass Δ nicht-winkel-angestrichelt ist. ζ

Also gilt $|\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| \geq 3$ und G enthält nach Lemma 4.13 eine nichtabelsche freie Untergruppe. \square

Es genügt nun also, nichtsphärische nicht-winkel-angestrichelte Dreiecke von Gruppen zu betrachten, in denen jede Eckengruppe von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird. In diesem Fall wird auch der Colimes von den Bildern der Kantengruppen erzeugt.

4.6.2 Der Simplizialkomplex K

In Satz 1.8 haben wir gelernt, dass es zu einem freien Produkt mit Amalgam einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Baum gibt, auf dem es mit gewissen Eigenschaften

operiert. Wir führen nun eine vergleichbare Konstruktion für Colimites von Dreiecken von Gruppen durch: Dabei entsteht jedoch kein Baum, sondern ein zweidimensionaler Simplizialkomplex K .

Sei also Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen, dessen Colimes G von den Bildern der Kantengruppen erzeugt wird.

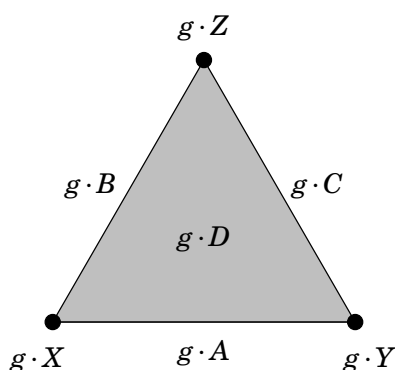
Die Menge der Simplizes von K sei:

$$0\text{-Simplizes: } (G/\text{im}(\varphi_X)) \sqcup (G/\text{im}(\varphi_Y)) \sqcup (G/\text{im}(\varphi_Z))$$

$$1\text{-Simplizes: } (G/\text{im}(\varphi_A)) \sqcup (G/\text{im}(\varphi_B)) \sqcup (G/\text{im}(\varphi_C))$$

$$2\text{-Simplizes: } G/\text{im}(\varphi_D)$$

Für jedes $g \in G$ indizieren die einzelnen Simplizes von K wie folgt:



Man kann leicht einsehen, dass die Definition der Inzidenz unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten ist.

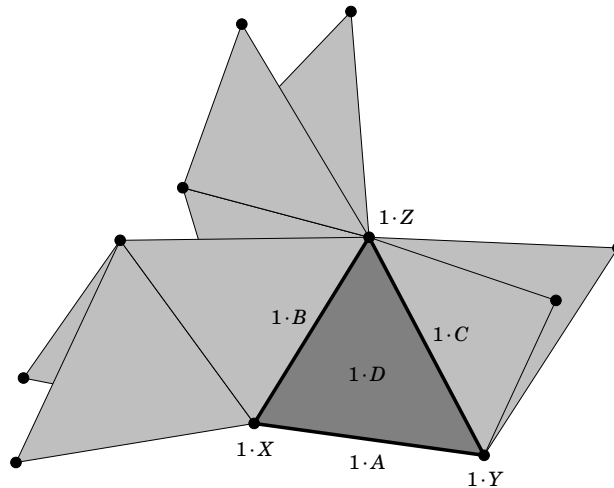
Lemma 4.21 *Durch die Definition der Inzidenz wird K ein Simplizialkomplex.*

Beweis. An dieser Stelle kommt die Realisierbarkeit von Δ ins Spiel! Wir müssen uns davon überzeugen, dass jedes 1-Simplex und jedes 2-Simplex durch die 0-Simplizes, mit denen es inzidiert, eindeutig bestimmt ist.

Seien zunächst σ_1 und σ_2 zwei 1-Simplizes, die mit denselben 0-Simplizes inzidieren. Wir können o. B. d. A. davon ausgehen, dass es $g_1, g_2 \in G$ mit $\sigma_1 = g_1 \cdot A$ und $\sigma_2 = g_2 \cdot A$ gibt. Dann gilt $g_1 \cdot X = g_2 \cdot X, \Rightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in X$, und $g_1 \cdot Y = g_2 \cdot Y, \Rightarrow g_1^{-1} \cdot g_2 \in Y$. Nun ist Δ ein nichtsphärisches Dreieck von Gruppen und nach Satz 2.12 realisierbar. Es gilt also auch $g_1^{-1} \cdot g_2 \in X \cap Y = A, \Rightarrow g_1 \cdot A = g_2 \cdot A, \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$.

Völlig analog zeigt man, dass auch jedes 2-Simplex durch die 0-Simplizes, mit denen es inzidiert, eindeutig bestimmt ist. Damit wird K ein Simplicialkomplex. Oder genauer: Damit können wir K als abstrakten Simplicialkomplex auffassen. \square

Einen Ausschnitt von K können wir uns wie folgt vorstellen:



Lemma 4.22 Die geometrische Realisierung $|K|$ von K ist zusammenhängend und einfach zusammenhängend.

Beweis. Siehe zum Beispiel [Beh75, Satz 1.2]. \square

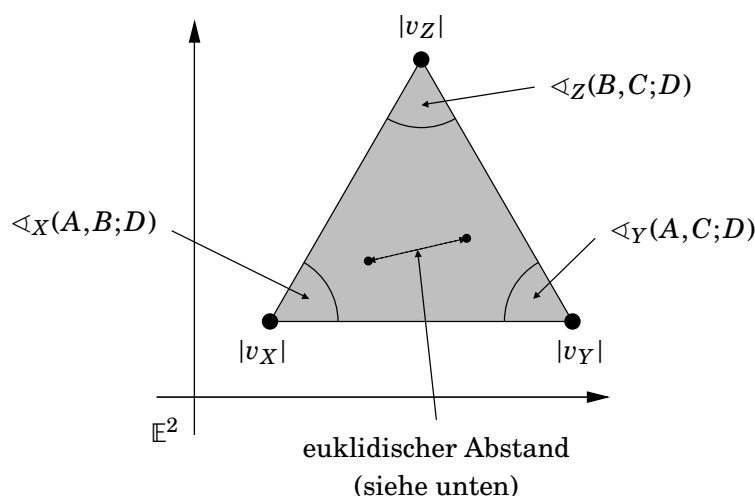
Bemerkungen.

- Wir statten die geometrische Realisierung $|K|$ von K , wie üblich, zunächst mit der „schwachen Topologie auf $|K|$ “ aus, siehe [Mun84, Seite 8].
- Der topologische Raum $|K|$ ist i. A. nicht lokal kompakt: Wenn z. B. $|X : D| = \infty$ ist, dann inzidieren unendlich viele 2-Simplizes mit dem 0-Simplex $1 \cdot X$. Folglich ist K nicht lokal endlich und $|K|$ nicht lokal kompakt, siehe [Mun84, Lemma 2.6].

4.6.3 Die intrinsische Metrik auf $|K|$

Wir geben der geometrischen Realisierung $|K|$ von K nun etwas mehr Struktur:

- Zunächst betrachten wir einen abstrakten Simplicialkomplex, bestehend aus einem einzigen 2-Simplex τ und dessen Seiten. Die drei 0-Simplizes im Rand des 2-Simplex τ bezeichnen wir mit v_X, v_Y und v_Z .
- Anschließend wählen wir eine konkrete geometrische Realisierung $|\bar{\tau}| \subseteq \mathbb{E}^2$ von $\bar{\tau}$ durch ein Dreieck mit den Winkeln $\sphericalangle_X(A, B; D)$ an der Ecke $|v_X|$, $\sphericalangle_Y(A, C; D)$ an der Ecke $|v_Y|$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D)$ an der Ecke $|v_Z|$:



- Für jedes 2-Simplex σ von K gibt es ein $g \in G$, sodass $\sigma = g \cdot D$ ist. Sei $\varphi_{\bar{\sigma}} : \bar{\sigma} \rightarrow \bar{\tau}$ der durch die Zuordnungen $g \cdot X \mapsto v_X, g \cdot Y \mapsto v_Y$ und $g \cdot Z \mapsto v_Z$ gegebene simpliciale Isomorphismus. Dieser induziert einen Homöomorphismus $\varphi_{|\bar{\sigma}|} : |\bar{\sigma}| \rightarrow |\bar{\tau}|$.
- Das Dreieck $|\bar{\tau}| \subseteq \mathbb{E}^2$ ist mit der euklidischen Metrik ausgestattet. Folglich ist auch $|\bar{\sigma}| \subseteq |K|$ metrisierbar, und zwar mit der durch den Homöomorphismus $\varphi_{|\bar{\sigma}|} : |\bar{\sigma}| \rightarrow |\bar{\tau}|$ vermittelten Metrik $d_{|\bar{\sigma}|} : |\bar{\sigma}| \times |\bar{\sigma}| \rightarrow \mathbb{R}$:

$$d_{|\bar{\sigma}|}(x, y) := d_{|\bar{\tau}|}(\varphi_{|\bar{\sigma}|}(x), \varphi_{|\bar{\sigma}|}(y)) := \|\varphi_{|\bar{\sigma}|}(x) - \varphi_{|\bar{\sigma}|}(y)\|$$

Damit wird der Homöomorphismus $\varphi_{|\bar{\sigma}|} : |\bar{\sigma}| \rightarrow |\bar{\tau}|$ ein isometrischer Isomorphismus. Wie die Metrik überträgt sich auch der Winkelbegriff von $|\bar{\tau}|$ auf $|\bar{\sigma}|$.

- Wie das Dreieck $|\bar{\tau}| \subseteq \mathbb{E}^2$ besitzt auch $|\bar{\sigma}| \subseteq |K|$ eindeutige Geodäten, wir bezeichnen die Geodäte von $x \in |\bar{\sigma}|$ nach $y \in |\bar{\sigma}|$ mit $[[x, y]]$ und die von ihr durchlaufene Strecke mit $\|x, y\|$. Für jedes $x \in |\bar{\sigma}|$ und je zwei $y, y' \in |\bar{\sigma}| - \{x\}$ definieren wir den Winkel zwischen den Strecken $[[x, y]]$ und $[[x, y']]$ als den Winkel, den ihre Bilder $\varphi_{|\bar{\sigma}|}(\|x, y\|)$ und $\varphi_{|\bar{\sigma}|}(\|x, y'\|)$ am Punkt $\varphi_{|\bar{\sigma}|}(x) \in |\bar{\tau}|$ einschließen.

Sind σ und σ' zwei 2-Simplizes von K , so stimmen die beiden Metriken $d_{|\sigma|}$ und $d_{|\sigma'|}$ auf dem Schnitt $|\sigma| \cap |\sigma'|$ überein. Damit erfüllt K die Axiome eines „stückweise euklidischen Simplicialkomplexes mit endlicher Formenmenge“.⁴ Es folgen einige Begriffe und Sätze, die es uns ermöglichen werden, die neue Struktur auf $|K|$ gewinnbringend auszunutzen:

Definition 4.23 (*m*-Kette) Eine *m*-Kette von $x_0 \in |K|$ nach $x_m \in |K|$ ist ein $(m+1)$ -Tupel von Punkten aus $|K|$, $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$, zusammen mit einem, meist nicht erwähnten, *m*-Tupel von 2-Simplizes von K , $\mathcal{S} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$, mit der Eigenschaft, dass, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, die Punkte x_{i-1} und x_i in $|\sigma_i|$ enthalten sind.

Bemerkung. Wenn $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine *m*-Kette ist, dann können wir auch die Länge $\lambda(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}$ berechnen, sie ist wie folgt definiert:

$$\lambda(\mathcal{C}) := \sum_{i=1}^m d_{|\sigma_i|}(x_{i-1}, x_i)$$

Wir bezeichnen den durch Konkatenation der Geodäten $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{m-1}, x_m]$ entstehenden Weg als den von der *m*-Kette \mathcal{C} induzierten Weg $\tilde{\mathcal{C}}$. Umgekehrt bezeichnen wir einen Weg, der von einer *m*-Kette induziert wird, als PL-Weg.

Anhand des in [Beh75, Satz 1.2] vorgestellten Beweises kann man sich leicht überlegen, dass es für je zwei Elemente $x, y \in |K|$ ein $m \in \mathbb{N}$ und eine *m*-Kette \mathcal{C} von x nach y gibt.

Definition 4.24 (Intrinsische Pseudometrik) Seien $x, y \in |K|$, dann definieren wir die intrinsische Pseudometrik $d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}$ als:

$$d(x, y) := \inf\{\lambda(C) \mid \exists m \in \mathbb{N} : C \text{ ist eine } m\text{-Kette von } x \text{ nach } y\}$$

Satz 4.25 Die intrinsische Pseudometrik $d : |K| \times |K| \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik. Dabei wird das oben genannte Infimum angenommen, d. h. für je zwei $x, y \in |K|$ gibt es eine *m*-Kette \mathcal{C} von x nach y mit $\lambda(\mathcal{C}) = d(x, y)$.

Beweis. Siehe [Bri91, Section 1.2-3]. □

⁴Weitere Details zu den „stückweise euklidischen Simplicialkomplexen mit endlicher Formenmenge“ oder, gleichbedeutend, den „ $M(0)$ -simplicialen Komplexen mit endlicher Formenmenge“ sowie zu den folgenden Begriffen und Sätzen findet man zum Beispiel in [Bri91, Section 1.1-2].

Daraus ergibt sich sofort, dass der von der m -Kette \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ eine Geodäte ist. Im metrischen Raum $(|K|, d)$ können also je zwei Punkte durch einen geodätischen PL-Weg verbunden werden. Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, dass die Geodäten auch eindeutig sind.

Bemerkungen.

- Wenn eine Teilmenge $A \subseteq |K|$ offen bezüglich der von der intrinsischen Metrik d induzierten Topologie \mathcal{O}_d ist, dann auch bezüglich der schwachen Topologie. Also ist $(|K|, \mathcal{O}_d)$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend.
- Die Umkehrung gilt i. A. nicht: Wenn $|K|$ nicht lokal-kompakt ist, dann ist die von der intrinsischen Metrik d induzierte Topologie \mathcal{O}_d nicht so fein wie die schwache Topologie!

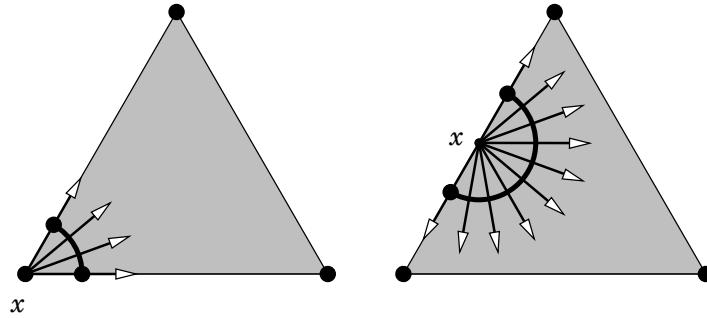
4.6.4 Lokale und globale Geodäten in $|K|$

Definition 4.26 (Geometrischer Link I) Seien σ ein 2-Simplex von K und $x \in |\bar{\sigma}| \subseteq |K|$. Für je zwei $y, y' \in |\bar{\sigma}| - \{x\} \subseteq |K|$ nennen wir die Strecken $[[x, y]]$ und $[[x, y']]$ äquivalent, d. h. $[[x, y]] \sim [[x, y']]$, wenn eine in der anderen enthalten ist. Die Relation \sim ist offenbar eine Äquivalenzrelation: Die einzelnen Äquivalenzklassen nennen wir „Richtungen“, die Menge aller Richtungen bezeichnen wir mit $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$.

Der Abstand zweier Richtungen $v, v' \in \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$, repräsentiert von $[[x, y]]$ und $[[x, y']]$, sei der Winkel zwischen $[[x, y]]$ und $[[x, y']]$. Dieser Abstand ist wohldefiniert, wir bezeichnen ihn mit $\angle_{|\bar{\sigma}|}(v, v')$. Er macht $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ zu einem metrischen Raum.

Wir beobachten zunächst: Wenn $x \in |\partial\sigma|$ ist, dann ist $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ zusammen mit der von der Metrik $\angle_{|\bar{\sigma}|} : \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|) \times \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|) \rightarrow \mathbb{R}$ induzierten Topologie $\mathcal{O}_{\angle_{|\bar{\sigma}|}}$ die geometrische Realisierung eines abgeschlossenen 1-Simplex $\text{Sk}(x, |\bar{\sigma}|)$.

Die Ecken von $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ sind die beiden Richtungen, deren Repräsentanten im Rand $|\partial\sigma|$ verlaufen, die Kante von $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ besteht aus den Richtungen, deren Repräsentanten, abgesehen von ihren Endpunkten, im Inneren $|\sigma|$ verlaufen.



Je nach dem, wo sich $x \in |\partial\sigma|$ genau befindet, beträgt die Länge dieser Kante entweder $\angle_X(A,B;D)$, $\angle_Y(A,C;D)$, $\angle_Z(B,C;D)$ oder π .

Definition 4.27 (Geometrischer Link II) Seien $x \in |K|$ beliebig und Σ_x die Menge aller 2-Simplizes σ von K mit $x \in |\bar{\sigma}| \subseteq |K|$. Wir definieren den geometrischen Link $\text{Lk}(x, |K|)$ als den topologischen Raum, den wir erhalten, wenn wir die Summe der $(\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|), \mathcal{O}_{\angle_{|\bar{\sigma}|}})$ mit $\sigma \in \Sigma_x$ bilden und darin anschließend zwei Richtungen u und u' genau dann miteinander identifizieren, wenn u und u' von denselben Strecken in $|K|$ repräsentiert werden.

Bemerkung. Der geometrische Link $\text{Lk}(x, |K|)$ kann auf verschiedene Weisen definiert werden, siehe auch die Bemerkungen in [BH99, Abschnitt I.7.14-15].

Man kann leicht nachrechnen, dass die Abbildungen $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|) \rightarrow \text{Lk}(x, |K|)$, die den Raum $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ identisch in den entsprechenden Summanden abbilden und den entsprechenden Summanden anschließend auf den Quotientenraum projizieren, $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|)$ homöomorph auf sein mit der Teilraumtopologie ausgestattetes Bild in $\text{Lk}(x, |K|)$ abbilden. Wir erlauben uns daher, $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ zu schreiben.

Lemma 4.28 Für jedes $x \in |K|$ ist der geometrische Link $\text{Lk}(x, |K|)$ zusammenhängend.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es ein 2-Simplex σ mit $x \in |\bar{\sigma}| \subseteq |K|$ gibt. Dann ist, wie man leicht einsehen kann, $\text{Lk}(x, |K|) = \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}|) \approx \mathbb{S}^1$ und somit zusammenhängend.

Nun nehmen wir an, dass es ein 1-Simplex σ mit $x \in |\bar{\sigma}| \subseteq |K|$ gibt. Seien σ' und σ'' zwei beliebige 2-Simplizes aus Σ_x . Um zu zeigen, dass $\text{Lk}(x, |K|)$ zusammenhängend ist, genügt es, zu beobachten, dass wir eine beliebige Richtung $[[x, y']\sim \in \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ durch

einen Weg in $\text{Lk}(x, |K|)$ mit einer beliebigen Richtung $[[x, y'']]_{\sim} \in \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}''|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ verbinden können.⁵

Da σ eine gemeinsame Seite von σ' und σ'' ist, gibt es mindestens zwei Richtungen in $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|) \cap \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}''|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$. Da $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ und $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}''|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ wegzusammenhängend sind, können wir also einen Weg finden, der die Richtung $[[x, y'']]_{\sim}$ über eine Richtung in $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|) \cap \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}''|)$ mit der Richtung $[[x, y'']]_{\sim}$ verbindet.

Schließlich nehmen wir an, dass es ein 0-Simplex σ mit $x \in |\sigma| \subseteq |K|$ gibt. Wir können dabei o. B. d. A. davon ausgehen, dass es ein $g \in G$ mit $\sigma = g \cdot X$ gibt. Seien also σ' das 2-Simplex $g \cdot D$ und σ'' ein beliebiges 2-Simplex, das ebenfalls in Σ_x enthalten ist.

Um zu zeigen, dass $\text{Lk}(x, |K|)$ zusammenhängend ist, genügt es erneut, zu zeigen, dass wir eine beliebige Richtung $[[x, y']]_{\sim} \in \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ durch einen Weg mit einer beliebigen Richtung $[[x, y'']]_{\sim} \in \text{Lk}(x, |\bar{\sigma}''|) \subseteq \text{Lk}(x, |K|)$ verbinden können.

Das ist aber sicher dann der Fall, wenn es eine Folge $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ von 2-Simplizes mit $\sigma_0 = \sigma'$ und $\sigma_n = \sigma''$ gibt, die mit σ inzidieren und bei denen je zwei benachbarte mindestens ein 1-Simplex als gemeinsame Seite haben. Dann können wir, wie schon im zweiten Fall, den Wegzusammenhang der einzelnen $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}_i|)$ verwenden, um einen Weg zu finden, der die Richtung $[[x, y']]_{\sim}$ mit der Richtung $[[x, y'']]_{\sim}$ verbindet.

Ein 2-Simplex $h \cdot D$ inzidiert genau dann mit σ , wenn $h \cdot X = g \cdot X$, $\Leftrightarrow \exists \xi \in X : h = g \cdot \xi$, gilt. Insbesondere gibt es also ein $\xi \in X$, sodass $\sigma'' = g \cdot \xi \cdot D$ ist. Da die Eckengruppe X nach Voraussetzung von den beiden angrenzenden Kantengruppen A und B erzeugt wird, gibt es Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in A \cup B$ mit $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_X \xi$, $\Rightarrow u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G \xi$. Wir definieren schließlich:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &:= g \cdot D = \sigma' \\ \sigma_1 &:= g \cdot u_1 \cdot D \\ \sigma_2 &:= g \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot D \\ &\vdots \\ \sigma_n &:= g \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot D = \sigma'' \end{aligned}$$

Da $1, u_1, u_1 \cdot u_2, \dots, u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ Elemente von X sind, inzidieren alle 2-Simplizes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ mit σ . Dass je zwei benachbarte 2-Simplizes mindestens ein 1-Simplex als gemeinsame Seite haben, können wir auch leicht einsehen: Sei $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig

⁵Der Ausdruck $[[x, y'']]_{\sim}$ bezeichnet die von der Strecke $[[x, y'']]$ repräsentierte Äquivalenzklasse in $\text{Lk}(x, |\bar{\sigma}'|)$. Analoges gilt für den Ausdruck $[[x, y'']]_{\sim}$.

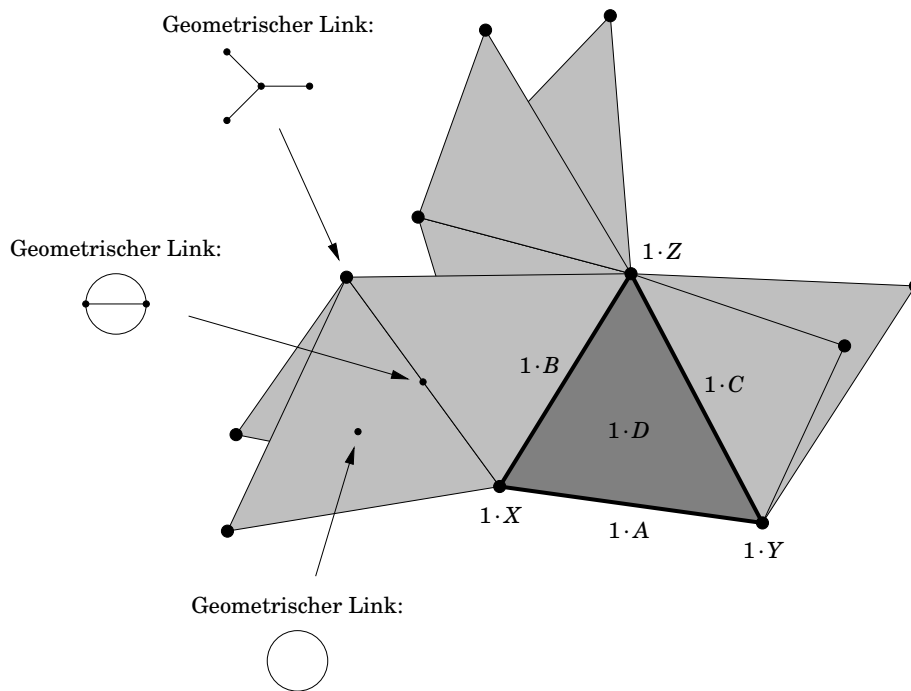
und o. B. d. A. $u_i \in A$. Dann ist $g \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{i-1} \cdot A = g \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{i-1} \cdot u_i \cdot A$, d. h. die beiden 2-Simplizes σ_{i-1} und σ_i haben mindestens ein 1-Simplex als gemeinsame Seite. \square

Besonders interessant für uns ist der Fall, dass $x \in |K|$ in der geometrischen Realisierung des 1-Gerüsts von K enthalten ist. Dann setzen sich die abgeschlossenen 1-Simplizes $\text{Sk}(x, |\sigma|)$ mit $\sigma \in \Sigma_x$, wenn wir sie wie oben beschrieben miteinander identifizieren, nach geeigneter Unterteilung zu einem Simplicialkomplex $\text{Sk}(x, |K|)$ zusammen.

Bemerkung. Die Topologie auf $\text{Lk}(x, |K|)$ ist gerade so gewählt, dass der geometrische Link $\text{Lk}(x, |K|)$ die geometrische Realisierung von $\text{Sk}(x, |K|)$ ist.

Da $\text{Sk}(x, |K|)$ ein eindimensionaler Simplicialkomplex mit endlich vielen verschiedenen Kantenlängen ist, induzieren die einzelnen Metriken $\langle_{|\sigma|} : \text{Lk}(x, |\sigma|) \times \text{Lk}(x, |\sigma|) \rightarrow \mathbb{R}$, wie in Definition 4.24, eine intrinsische Pseudometrik auf $\text{Lk}(x, |K|)$. Diese ist, wie in Satz 4.25, sogar eine Metrik.

In unserem Ausschnitt erhalten wir etwa die folgenden geometrischen Links:



Definition 4.29 (Linkbedingung) Sei K ein stückweise euklidischer Simplicialkomplex mit endlicher Formenmenge. Der Komplex K erfüllt die Linkbedingung, wenn für jedes

$x \in |K|$ je zwei Richtungen $u, u' \in \text{Lk}(x, |K|)$, deren Abstand kleiner als π ist, durch eine eindeutig bestimmte Geodäte miteinander verbunden werden können.

Lemma 4.30 Wenn K ein zweidimensionaler stückweise euklidischer Simplizialkomplex mit endlicher Formenmenge ist, dann erfüllt er die Linkbedingung genau dann, wenn, für jedes 0-Simplex v von K , der geometrische Link $\text{Lk}(|v|, |K|)$ keine einfach geschlossenen Wege, deren Länge kleiner als 2π ist, enthält.

Beweis. Siehe [BH99, Lemma II.5.6]. □

Bemerkung. Bridson und Haefliger definieren die Linkbedingung in [BH99, Definition II.5.1] anders als Bridson in [Bri91, Seite 410]. Dass die beiden Definitionen u. a. für stückweise euklidische Simplizialkomplexe mit endlicher Formenmenge äquivalent sind, folgt z. B. aus [BH99, Theorem II.5.5, (2) \Leftrightarrow (3)] und [BH99, Theorem I.7.55, (1) \Leftrightarrow (3)].

Lemma 4.31 Unser Komplex K erfüllt die Linkbedingung.

Beweis. Angenommen, unser Komplex K erfüllt die Linkbedingung nicht. Dann gibt es nach Lemma 4.30 ein 0-Simplex v von K , für das der geometrische Link $\text{Lk}(|v|, |K|)$ einen einfach geschlossenen Weg γ der Länge $\lambda(\gamma) < 2\pi$ enthält. Wir können o. B. d. A. davon ausgehen, dass es ein $g \in G$ mit $v = g \cdot X$ gibt. Nun wählen wir $n \in \mathbb{N}$ wie folgt:

$$n := \frac{\lambda(\gamma)}{\angle_X(A, B; D)} < \frac{2\pi}{\angle_X(A, B; D)} = n_G(A, B; D)$$

Der Weg γ hat die Länge $\lambda(\gamma)$. Da er einfach geschlossen ist, verläuft er durch genau n Kanten von $\text{Lk}(|v|, |K|)$. Sie induzieren eine zyklisch angeordnete Folge $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ von 2-Simplizes, die mit v inzidieren und von denen je zwei benachbarte abwechselnd ein 1-Simplex vom Typ $g \cdot A$ und ein 1-Simplex vom Typ $g \cdot B$ als gemeinsame Seite haben.

Nach Definition eines 2-Simplex gibt es ein $h \in G$ mit $\sigma_1 = h \cdot D$. Die beiden 2-Simplizes σ_1 und σ_2 haben o. B. d. A. das 1-Simplex $h \cdot A$ als gemeinsame Seite. Da $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ist, gibt es ein $a_1 \in A - D$ mit $\sigma_2 = h \cdot a_1 \cdot D$. Die beiden 2-Simplizes σ_2 und σ_3 haben folglich das 1-Simplex $h \cdot a_1 \cdot B$ als gemeinsame Seite. Da $\sigma_2 \neq \sigma_3$ ist, gibt es ein $b_2 \in B - D$ mit $\sigma_3 = h \cdot a_1 \cdot b_2 \cdot D$. Diese Überlegung setzen wir nun so lange fort, bis wir wieder bei dem 2-Simplex σ_1 ankommen. Wir haben dann $a_1, b_2, a_3, \dots, b_n$ gefunden, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und $\sigma_1 = h \cdot D = h \cdot a_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot b_n \cdot D$ erfüllen.

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

Es gibt also ein $d \in D$, sodass $a_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot b_n =_G d$ ist. Wenn wir nun $\tilde{b}_n := b_n \cdot d^{-1}$ wählen, dann sind auch $a_1, b_2, a_3, \dots, a_{n-1}, \tilde{b}_n$ abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten und es gilt $a_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \tilde{b}_n =_G 1$, also auch $a_1 \cdot b_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot \tilde{b}_n =_X 1$. Dies widerspricht jedoch der Minimalität von $n_X(A, B; D)$. ζ Es folgt die Behauptung. \square

Den großartigen Nutzen, den der Nachweis der Linkbedingung mit sich bringt, offenbaren uns die folgenden beiden Sätze aus [Bri91]:

Satz 4.32 (Bridsons Hauptsatz) *Sei K ein stückweise euklidischer Simplicialkomplex mit endlicher Formenmenge. Wenn $|K|$ einfach zusammenhängend ist, dann sind u. a. die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

- K erfüllt die Linkbedingung.
- $|K|$ besitzt eindeutige Geodäten.

Beweis. Siehe [Bri91, Section 2, Main Theorem, (11) \Leftrightarrow (1)]. \square

Satz 4.33 (Lokal-Global-Prinzip) *Sei K ein stückweise euklidischer Simplicialkomplex mit endlicher Formenmenge. Wenn $|K|$ eindeutige Geodäten besitzt, dann ist jede lokale Geodäte in $|K|$ eine Geodäte in $|K|$.*

Beweis. Siehe [Bri91, Section 2.1]. \square

Damit können wir unsere Arbeit mit den Geodäten beginnen. Zunächst aber definieren wir, wann wir eine m -Kette \mathcal{C} lokal geodätisch nennen:

Definition 4.34 (Eigenschaft: „lokal geodätisch“) *Eine m -Kette $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$ heißt lokal geodätisch, wenn, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, die Punkte $x_{i-1} \in |K|$ und $x_i \in |K|$ verschieden sind und, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, die von den Strecken $[[x_i, x_{i-1}]]$ und $[[x_i, x_{i+1}]]$ repräsentierten Richtungen in $\text{Lk}(x_i, |K|)$ mindestens den Abstand π haben.*

Lemma 4.35 *Sei $\mathcal{C} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine lokal geodätische m -Kette. Dann ist der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ eine lokale Geodäte.*

Beweisidee. Bridson beweist in [Bri91, Section 2, Main Theorem, (11) \Leftrightarrow (5)], dass jedes geodätische Dreieck in $|K|$ nichtpositiven „Exzess“ hat.⁶ Damit kann man die Annahme, der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ wäre keine lokale Geodäte, leicht zu einem Widerspruch führen. \square

⁶Der Begriff des „Exzess“ eines geodätischen Dreiecks stammt ursprünglich von Alexandrov. Weitere Details hierzu findet man zum Beispiel in [Bri91, Section 2.2].

4.6.5 Die Argumentation von Lorenz und Brendel

Sei $\delta := 1 \cdot D \in G/D$. So, wie das freie Produkt mit Amalgam durch Linksmultiplikation auf dem Standardbaum operiert hat, operiert nun der Colimes G durch Linksmultiplikation auf dem Simplizialkomplex K . Die Eigenschaften der beiden Operationen sind ähnlich:

- Das abgeschlossene 2-Simplex $\bar{\delta}$ ist ein Fundamentalbereich der Operation.
- Die Eckengruppen X, Y, Z und die Kantengruppen A, B, C sind die Stabilisatoren der entsprechenden Seiten von $\bar{\delta}$, die Zweizellengruppe D ist der Stabilisator von $\bar{\delta}$.

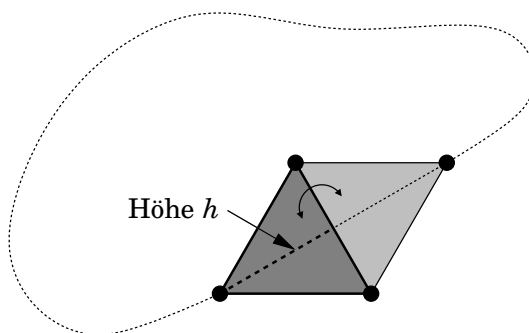
Die Operation von G auf K induziert eine Operation von G auf $|K|$. Für jedes $g \in G$ gilt dabei insbesondere $g \bullet |X| = |g \cdot X|$, $g \bullet |Y| = |g \cdot Y|$ und $g \bullet |Z| = |g \cdot Z|$.

Das zentrale Argument des Beweises von Satz 4.18 ist nun wie folgt: Seien $n \in \mathbb{N}$ und u_1, u_2, \dots, u_n Elemente, die abwechselnd in $\langle c \rangle - \{1\}$ und $\langle x \rangle - \{1\}$ enthalten sind. Wir zeigen, dass deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \neq_G 1$ ist, indem wir uns davon überzeugen, dass es nichttrivial auf $|K|$ operiert.

Hierzu betrachten wir im Dreieck $|\bar{\delta}|$ die Höhe h , die senkrecht auf der Kante $|1 \cdot C| \subseteq |\bar{\delta}|$ steht und sie mit dem Punkt $|1 \cdot X| \in |\bar{\delta}|$ verbindet.

Die Präfixe $g_0 := 1, g_1 := u_1, g_2 := u_1 \cdot u_2, \dots, g_n := u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ operieren so auf $|K|$, dass die Bilder $g_0 \bullet h, g_1 \bullet h, g_2 \bullet h, \dots, g_n \bullet h$ von einem PL-Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ mit zugrundeliegender $(n+2)$ -Kette \mathcal{C} durchlaufen werden. Die Bedingungen an $c \in C$ und $x \in X$ garantieren nun, dass \mathcal{C} eine lokal geodätische $(n+2)$ -Kette ist. Also ist $\tilde{\mathcal{C}}$ nach Lemma 4.35 eine lokale Geodäte in $|K|$ und nach Satz 4.33 eine Geodäte in $|K|$.

Angenommen, es ist $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$, $\Rightarrow g_n =_G 1$. Dann ist $g_0 \bullet h = g_n \bullet h$ und die Geodäte $\tilde{\mathcal{C}}$ enthält mindestens einen Doppelpunkt. \nmid Also ist $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \neq_G 1$.



Soweit unsere Erläuterung des zentralen Arguments des Beweises von Satz 4.18. Im nun folgenden letzten Abschnitt dieser Arbeit werden wir noch genauer über die Bedingungen nachdenken, die garantieren, dass eine solche $(n + 2)$ -Kette \mathcal{C} lokal geodätisch ist.

4.7 Zum Schluss noch drei positive Resultate

4.7.1 Ein vorbereitendes Lemma

Bevor die wir zu den drei versprochenen positiven Resultaten kommen, beweisen wir ein Lemma, das eine Aussage, die wir im Lemma 4.13 über freie Produkte mit Amalgam gemacht haben, auf Colimites nichtsphärischer nicht-winkel-ausgearteter Dreiecke von Gruppen überträgt.

Lemma 4.36 *Sei Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Wenn $|C : D| \geq 3$ ist, dann enthält G eine nichtabelsche freie Untergruppe.*

Aus Symmetriegründen gilt Lemma 4.36, mutandis mutatis, natürlich auch dann, wenn man anstelle der Kantengruppe C eine der beiden anderen Kantengruppen betrachtet.

Beweis. Wir können uns den Beweis durch einige Voraussetzungen erleichtern:

- Zunächst beobachten wir: Wenn es eine Eckengruppe gibt, die nicht von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird, dann enthält G nach Satz 4.20 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede Eckengruppe von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird.
- Da Δ ein nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen ist, ist es nach Satz 4.11 auch nicht-kanten-ausgeartet. Wenn Δ hyperbolisch ist, dann enthält sein Colimes G nach Satz 3.11 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass Δ euklidisch ist.

Fall 1: Alle Winkel von Δ betragen $\frac{\pi}{3}$.

Da $|C : D| \geq 3$ ist, gibt es mindestens zwei echte Rechtsnebenklassen von $D \leq C$. Seien $c_1, c_2 \in C$ aus verschiedenen echten Rechtsnebenklassen. Dann gilt $c_1 \in C - D$, $c_2 \in C - D$ und $c_2 \cdot c_1^{-1} \in C - D$. Seien außerdem $x_1, x_2, x_3 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$

enthalten sind, und $x := x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \in X$. Wir betrachten nun die von den folgenden beiden Elementen $g_1, g_2 \in G$ erzeugte Untergruppe $U := \langle g_1, g_2 \rangle \leq G$:

$$\begin{aligned} g_1 &:= c_1^{-1} \cdot x \cdot c_2 & \Rightarrow & \quad g_1^{-1} = c_2^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c_1 \\ g_2 &:= x^{-1} \cdot c_1^{-1} \cdot x \cdot c_2 \cdot x & \Rightarrow & \quad g_2^{-1} = x^{-1} \cdot c_2^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \end{aligned}$$

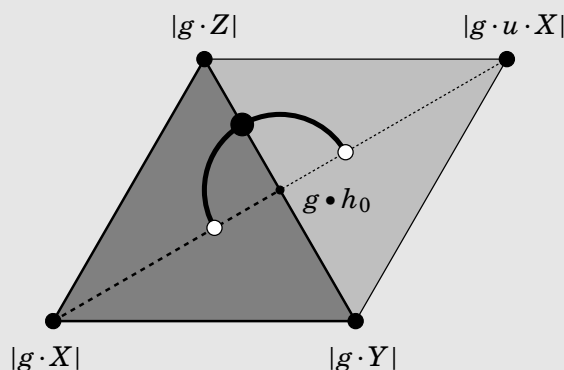
Behauptung: $U \leq G$ ist eine freie Untergruppe mit Basis $\{g_1, g_2\}$.

Sei $w \neq e$ ein frei reduziertes Wort über g_1 und g_2 sowie deren Inversen. Wir müssen uns nun davon überzeugen, dass w nicht das neutrale Element der Gruppe G beschreibt. Wenn wir in w , das wir von nun an als Produkt in G auffassen, jedes $g_1^{\pm 1}$ und jedes $g_2^{\pm 1}$ durch das oben angegebene Produkt ersetzen und anschließend, wo immer es möglich ist, je zwei benachbarte Faktoren $x \cdot x^{-1}$ gegeneinander kürzen und je zwei benachbarte Faktoren $c_2 \cdot c_1^{-1}$ und $c_1 \cdot c_2^{-1}$ zu einem Faktor in $C - D$ zusammenfassen, dann erhalten wir ein Produkt mit $n \in \mathbb{N}$ Faktoren, die abwechselnd entweder gleich $x^{\pm 1} \in X$ sind oder in $C - D$ enthalten sind:

$$w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

Wir machen nun einige vorbereitende Beobachtungen! Dabei seien das 2-Simplex δ und die Höhe h wie in Abschnitt 4.6.5 definiert. Den Fußpunkt der Höhe h bezeichnen wir mit $h_0 \in |\bar{\delta}|$. Schließlich sei $g \in G$ beliebig.

Beobachtung 1. Wenn $u \in C - D$ ist, dann zeigt man leicht, dass der Abstand zwischen den von den Strecken $[[g \bullet h_0, |g \cdot X|]]$ und $[[g \bullet h_0, |g \cdot u \cdot X|]]$ repräsentierten Richtungen in $\text{Lk}(g \bullet h_0, |K|)$ mindestens π ist.

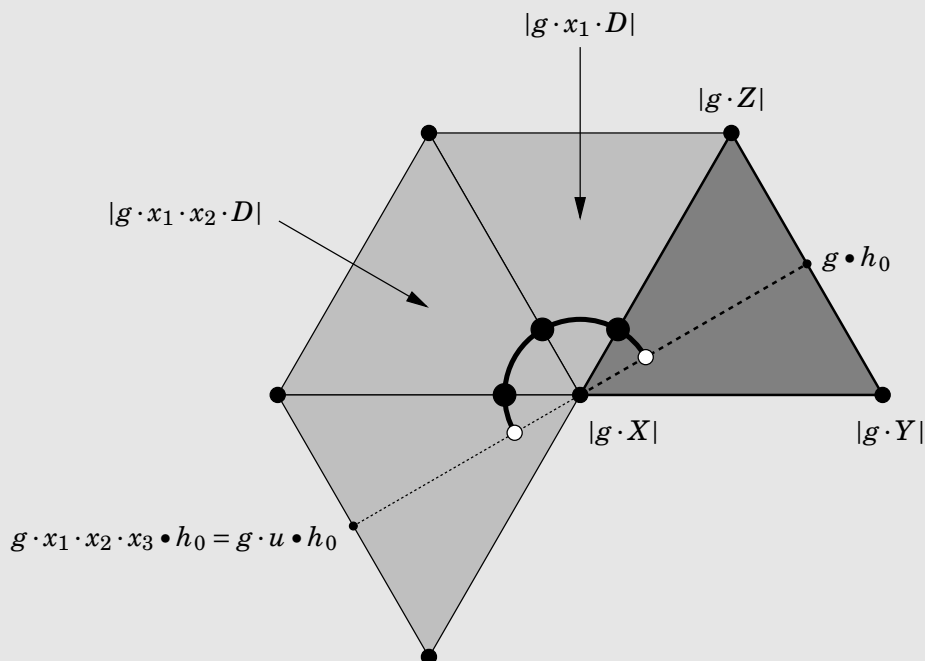


Das bedeutet aber, dass $\mathcal{C} := (|g \cdot X|, g \cdot h_0, |g \cdot u \cdot X|)$ eine lokal geodätische 3-Kette ist und der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$, der die Strecken $g \cdot h$ und $g \cdot u \cdot h$ von $|g \cdot X|$ nach $|g \cdot u \cdot X|$ durchläuft, eine lokale Geodäte ist.

Beobachtung 2. Wenn $u = x \in X$ ist, dann ist der Abstand zwischen den von den Strecken $[|g \cdot X|, g \cdot h_0]$ und $[|g \cdot X|, g \cdot u \cdot h_0]$ repräsentierten Richtungen in $\text{Lk}(|g \cdot X|, |K|)$ auch mindestens π .

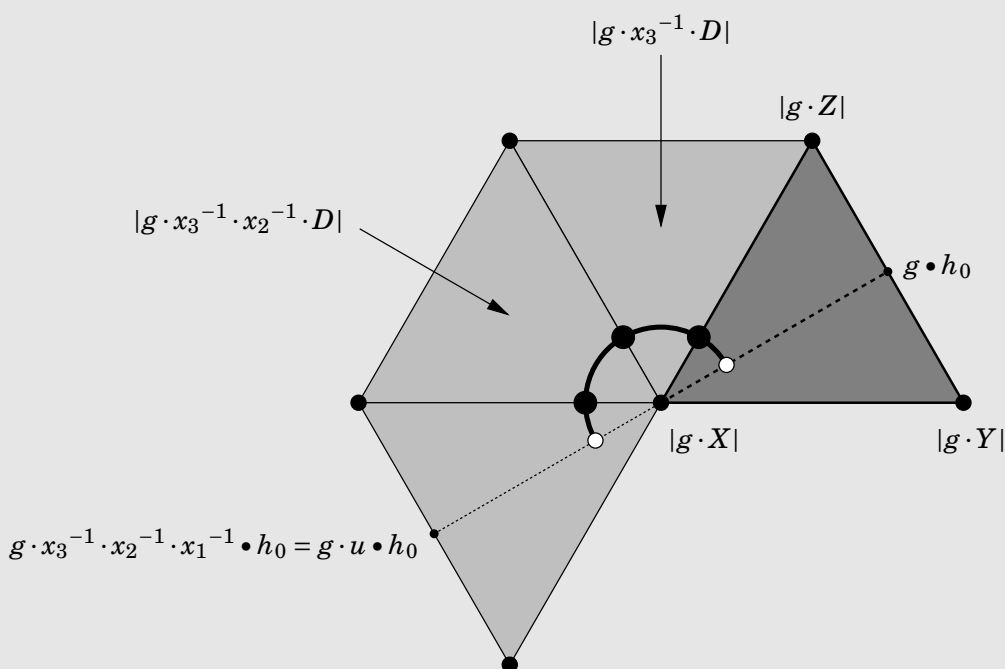
Dies verdient eine Begründung: Die Folge der 2-Simplizes $g \cdot D$, $g \cdot x_1 \cdot D$, $g \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot D$, $g \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot D$ induziert eine 6-Kette \mathcal{C}_1 der Länge $\lambda(\mathcal{C}_1) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \pi$ zwischen den beiden Richtungen. Wenn der Abstand der beiden Richtungen nun echt kleiner als π wäre, dann könnten wir auch eine m -Kette \mathcal{C}_2 mit $\lambda(\mathcal{C}_2) < \pi$ zwischen den beiden Richtungen finden und, wovon man sich leicht überzeugen kann, unter Verwendung von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 einen einfach geschlossenen PL-Weg, dessen Länge kleiner als 2π ist, konstruieren. Das steht im Widerspruch zur Linkbedingung. ζ

Die folgende Abbildung illustriert den Fall, in dem wir uns, was uns natürlich freisteht, dazu entschlossen haben, die Faktoren x_1 und x_3 aus $B - D$ und den Faktor x_2 aus $A - D$ zu wählen:



Das bedeutet aber, dass $\mathcal{C} := (g \bullet h_0, |g \cdot X|, g \cdot u \bullet h_0)$ eine lokal geodätische 3-Kette ist und der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$, der die Strecken $g \bullet h$ und $g \cdot u \bullet h$ von $|g \bullet h_0|$ nach $|g \cdot u \bullet h_0|$ durchläuft, eine lokale Geodäte ist.

Beobachtung 3. Wenn $u = x^{-1} \in X$ ist, dann zeigen wir, wie gerade in Beobachtung 2 beschrieben, dass $\mathcal{C} := (g \bullet h_0, |g \cdot X|, g \cdot u \bullet h_0)$ eine lokal geodätische 3-Kette ist, wobei nun die Folge der 2-Simplizes $g \cdot D, g \cdot x_3^{-1} \cdot D, g \cdot x_3^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot D, g \cdot x_3^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot x_1^{-1} \cdot D$ die 6-Kette \mathcal{C}_1 induziert.



Nach diesen Beobachtungen können wir, wie in Abschnitt 4.6.5 beschrieben, einsehen, dass w tatsächlich nicht das neutrale Element der Gruppe G beschreibt:

„Die Präfixe $g_0 := 1, g_1 := u_1, g_2 := u_1 \cdot u_2, \dots, g_n := u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ operieren so auf $|K|$, dass die Bilder $g_0 \bullet h, g_1 \bullet h, g_2 \bullet h, \dots, g_n \bullet h$ von einem PL-Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ mit zugrundeliegender $(n + 2)$ -Kette \mathcal{C} durchlaufen werden.“

Die vorbereitenden Beobachtungen garantieren nun, dass \mathcal{C} an jeder Stelle und somit auch insgesamt eine lokal geodätische $(n + 2)$ -Kette ist. Also ist $\tilde{\mathcal{C}}$ nach Lemma 4.35 eine lokale Geodäte in $|K|$ und nach Satz 4.33 eine Geodäte in $|K|$.

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

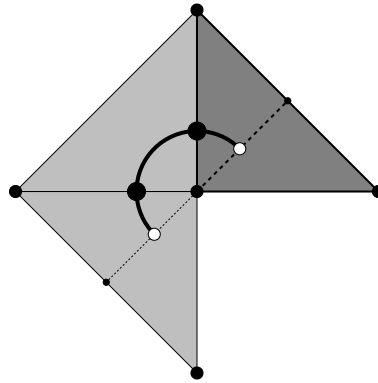
„Angenommen, es ist $w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1$, $\Rightarrow g_n =_G 1$. Dann ist $g_0 \cdot h = g_n \cdot h$ und die Geodäte $\tilde{\mathcal{C}}$ enthält mindestens einen Doppelpunkt. \nmid Also ist $w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \neq_G 1$.“

Fall 2: Ein Winkel von Δ beträgt $\frac{\pi}{2}$, zwei Winkel betragen $\frac{\pi}{4}$.

Fall 2.1: Es gilt $\sphericalangle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{2}$.

Die Argumentation verläuft wie in Fall 1, mit Elementen $x_1, x_2 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, und $x := x_1 \cdot x_2 \in X$.

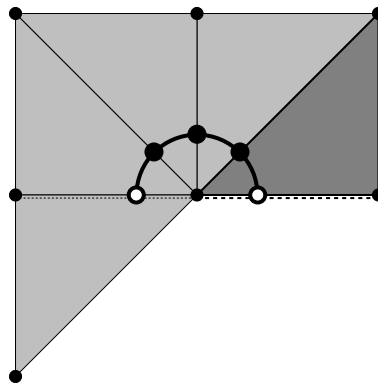
Dies ist die entsprechende Zeichnung zu Beobachtung 2:



Fall 2.2: Es gilt $\sphericalangle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{4}$ und o. B. d. A. $\sphericalangle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{4}$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{2}$.

Die Argumentation verläuft wie in Fall 1, mit Elementen $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, und $x := x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \in X$.

Dies ist die entsprechende Zeichnung zu Beobachtung 2:

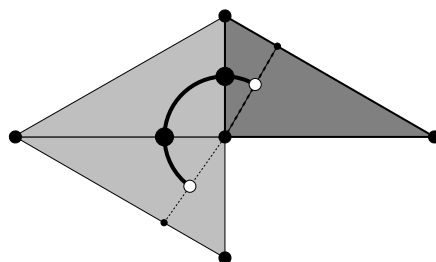


Fall 3: Die drei Winkel von Δ betragen $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$.

Fall 3.1: Es gilt $\sphericalangle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{2}$ und o. B. d. A. $\sphericalangle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{6}$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{3}$.

Die Argumentation verläuft wie in Fall 1, mit Elementen $x_1, x_2 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, und $x := x_1 \cdot x_2 \in X$.

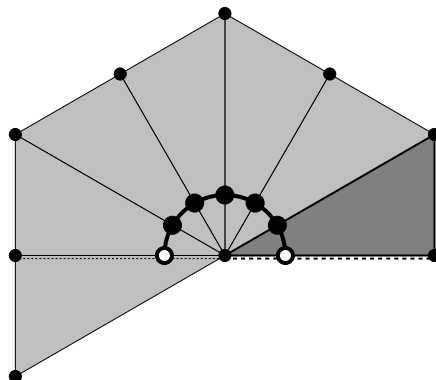
Dies ist die entsprechende Zeichnung zu Beobachtung 2:



Fall 3.2: Es gilt $\sphericalangle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{6}$ und o. B. d. A. $\sphericalangle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{2}$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{3}$.

Die Argumentation verläuft wie in Fall 1, mit Elementen $x_1, \dots, x_6 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, und $x := x_1 \cdot \dots \cdot x_6 \in X$.

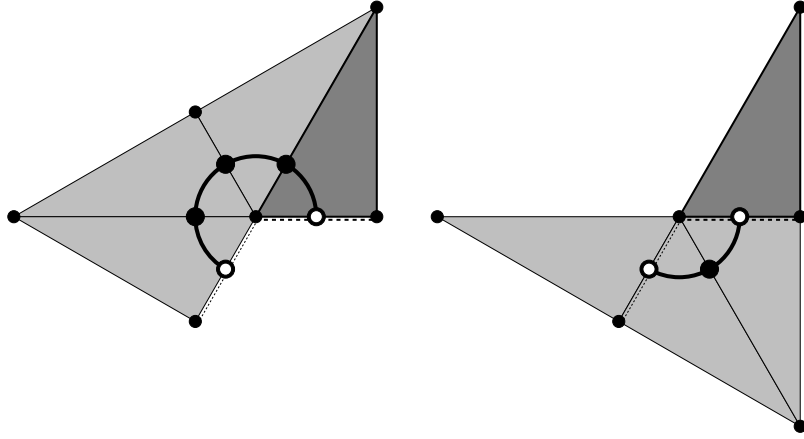
Dies ist die entsprechende Zeichnung zu Beobachtung 2:



Fall 3.3: Es gilt $\sphericalangle_X(A, B; D) = \frac{\pi}{3}$ und o. B. d. A. $\sphericalangle_Y(A, C; D) = \frac{\pi}{2}$ und $\sphericalangle_Z(B, C; D) = \frac{\pi}{6}$.

Dieser Fall ist etwas knackiger! Wählt man hier Elemente $x_1, x_2, x_3 \in X$, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind, und $x := x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \in X$, so können wir weder in dem Fall, in dem wir uns dazu entschlossen haben, x_1 und x_3 aus $B - D$ und x_2 aus $A - D$ zu wählen (in der linken Abbildung), noch in dem Fall, in dem wir uns dazu entschlossen haben, x_1

und x_3 aus $A - D$ und x_2 aus $B - D$ zu wählen (in der rechten Abbildung), zeigen, dass $\mathcal{C} := (g \cdot h_0, |g \cdot X|, g \cdot x \cdot h_0)$ eine lokal geodätische 3-Kette ist.



Dies ist der Grund, für die Gleichschenklighkeitsbedingung in Satz 4.18. Wir werden in unserem speziellen Fall, in dem wir die Winkel von Δ genau kennen, in der Lage sein, sie wie folgt zu umgehen:

Da $|C : D| \geq 3$ ist, gibt es mindestens zwei echte Rechtsnebenklassen von $D \leq C$. Seien $c_1, c_2 \in C$ aus verschiedenen echten Rechtsnebenklassen. Dann gilt $c_1 \in C - D$, $c_2 \in C - D$ und $c_2 \cdot c_1^{-1} \in C - D$. Seien außerdem $a \in A - D$ und $b \in B - D$. Schließlich wählen wir das folgende Element:

$$x := a \cdot b \cdot a \cdot c_1 \cdot b \cdot c_1 \cdot b \cdot c_1 \cdot a \cdot b \cdot a \in G$$

Wir betrachten nun, wie in Fall 1, die von den beiden folgenden Elementen $g_1, g_2 \in G$ erzeugte Untergruppe $U := \langle g_1, g_2 \rangle \leq G$:

$$\begin{aligned} g_1 &:= c_1^{-1} \cdot x \cdot c_2 & \Rightarrow & \quad g_1^{-1} = c_2^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c_1 \\ g_2 &:= x^{-1} \cdot c_1^{-1} \cdot x \cdot c_2 \cdot x & \Rightarrow & \quad g_2^{-1} = x^{-1} \cdot c_2^{-1} \cdot x^{-1} \cdot c_1 \cdot x \end{aligned}$$

Behauptung: $U \leq G$ ist eine freie Untergruppe mit Basis $\{g_1, g_2\}$.

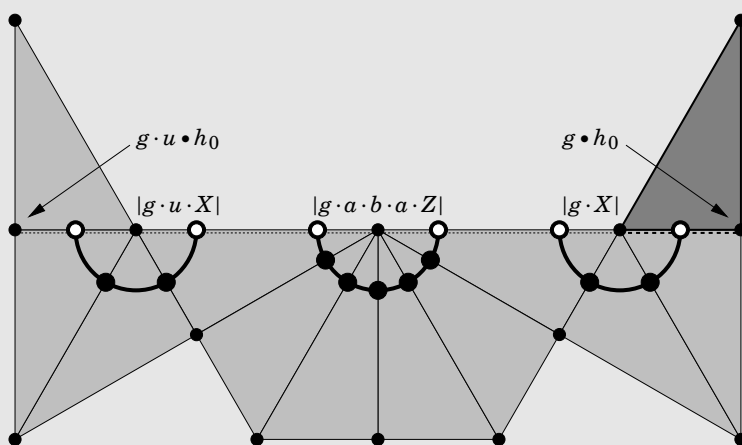
Sei $w \neq e$ ein frei reduziertes Wort über g_1 und g_2 sowie deren Inversen. Wir müssen uns nun davon überzeugen, dass w nicht das neutrale Element der Gruppe G beschreibt. Wenn wir in w , das wir von nun an als Produkt in G auffassen, jedes $g_1^{\pm 1}$ und jedes $g_2^{\pm 1}$ durch das oben angegebene Produkt ersetzen und anschließend, wo immer es möglich ist, je zwei benachbarte Faktoren $x \cdot x^{-1}$ gegeneinander kürzen und je zwei benachbarte Faktoren $c_2 \cdot c_1^{-1}$ und $c_1 \cdot c_2^{-1}$ zu einem Faktor in $C - D$ zusammenfassen, dann erhalten

wir ein Produkt mit $n \in \mathbb{N}$ Faktoren, die abwechselnd entweder gleich $x^{\pm 1} \in G$ sind oder in $C - D$ enthalten sind:

$$w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

Wir passen die beiden Beobachtungen 2 und 3 der neuen Situation an! Dabei seien das 2-Simplex δ und die Höhe h wie in Abschnitt 4.6.5 definiert. Den Fußpunkt der Höhe h bezeichnen wir mit $h_0 \in |\bar{\delta}|$. Schließlich sei $g \in G$ beliebig.

Neue Beobachtung 2:



Wenn $u = x \in G$ ist, dann ist der Abstand zwischen den von den Strecken $[|g \cdot X|, g \cdot h_0]$ und $[|g \cdot X|, |g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|]$ repräsentierten Richtungen in $Lk(|g \cdot X|, |K|)$ mindestens π . Aber nicht nur er ist mindestens π , sondern auch der Abstand zwischen den von den Strecken $[|g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|, |g \cdot X|]$ und $[|g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|, |g \cdot u \cdot X|]$ repräsentierten Richtungen in $Lk(|g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|, |K|)$ und der Abstand zwischen den von den Strecken $[|g \cdot u \cdot X|, |g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|]$ und $[|g \cdot u \cdot X|, g \cdot u \cdot h_0]$ repräsentierten Richtungen in $Lk(|g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|, |K|)$. Man kann diese drei Aussagen jeweils wie in der ursprünglichen Beobachtung 2 begründen!

Das bedeutet aber, dass $\mathcal{C} := (g \cdot h_0, |g \cdot X|, |g \cdot a \cdot b \cdot a \cdot Z|, |g \cdot u \cdot X|, g \cdot u \cdot h_0)$ eine lokal geodätische 5-Kette ist und der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ von $|g \cdot h_0|$ nach $|g \cdot u \cdot h_0|$, der zu Beginn die Strecke $g \cdot h$ und zum Schluss die Strecke $g \cdot u \cdot h$ durchläuft, eine lokale Geodäte ist.

Neue Beobachtung 3: Wenn $u = x^{-1} \in G$ ist, dann verläuft die Argumentation analog. Wir zeigen, dass dann $\mathcal{C} := (g \cdot h_0, |g \cdot X|, |g \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot Z|, |g \cdot u \cdot X|, g \cdot u \cdot h_0)$ eine lokal

geodätische 5-Kette ist und der von \mathcal{C} induzierte Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ von $|g \cdot h_0|$ nach $|g \cdot u \cdot h_0|$, der zu Beginn die Strecke $g \cdot h$ und zum Schluss die Strecke $g \cdot u \cdot h$ durchläuft, eine lokale Geodäte ist.

Nach diesen Beobachtungen können wir wie in Fall 1 einsehen, dass w tatsächlich nicht das neutrale Element der Gruppe G beschreibt:

Die Präfixe $g_0 := 1, g_1 := u_1, g_2 := u_1 \cdot u_2, \dots, g_n := u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ operieren so auf $|K|$, dass die Bilder $g_0 \cdot h, g_1 \cdot h, g_2 \cdot h, \dots, g_n \cdot h$, inklusive der in den neuen Beobachtungen 2 und 3 definierten Zwischenstücke, von einem PL-Weg $\tilde{\mathcal{C}}$ mit zugrundeliegender m -Kette \mathcal{C} durchlaufen werden. Die ursprüngliche Beobachtung 1 sowie die neuen Beobachtungen 2 und 3 garantieren nun, dass \mathcal{C} an jeder Stelle und somit auch insgesamt eine lokal geodätische m -Kette ist. Also ist $\tilde{\mathcal{C}}$ nach Lemma 4.35 eine lokale Geodäte in $|K|$ und nach Satz 4.33 eine Geodäte in $|K|$.

Nun das vertraute Argument: „Angenommen, es ist $w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_G 1, \Rightarrow g_n =_G 1$. Dann ist $g_0 \cdot h = g_n \cdot h$ und die Geodäte $\tilde{\mathcal{C}}$ enthält mindestens einen Doppelpunkt. \nexists Also ist $w =_G u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \neq_G 1$.“ Es folgt die Behauptung. \square

4.7.2 Das erste positive Resultat

Satz 4.37 Die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-winkel-ausgearteter Dreiecke von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D erfüllt die Tits-Alternative.

Beweis. Sei Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G und trivialer Zweizellengruppe D (genau wie in Definition 1.9).

Wie bereits angedeutet, können wir unsere Untersuchung dank unserer bisherigen Arbeit auf wenige Dreiecke von Gruppen beschränken:

- Zunächst beobachten wir: Wenn es eine Eckengruppe gibt, die nicht von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird, dann enthält G nach Satz 4.20 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede Eckengruppe von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird.
- Da Δ ein nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen ist, ist es nach Satz 4.11 auch nicht-kanten-ausgeartet. Wenn Δ hyperbolisch ist, dann enthält sein Colimes

G nach Satz 3.11 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass Δ euklidisch ist.

- Da Δ nicht-kanten-ausgeartet ist, enthält jede Kantengruppe neben dem neutralen Element noch mindestens ein weiteres Element. Wenn eine Kantengruppe mehr als 2 Elemente enthält, dann enthält G nach Lemma 4.36 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede Kantengruppe genau 2 Elemente enthält und somit isomorph zu \mathbb{Z}_2 ist.

Nun stellt sich die Frage, wie das Dreieck Δ überhaupt noch beschaffen sein kann. Und tatsächlich bleiben nicht mehr viele Möglichkeiten übrig!

Lemma 4.38 Sei G eine Gruppe. Seien außerdem $\alpha, \beta \in G$ zwei Elemente der Ordnung 2, die die Gruppe G erzeugen, d. h. $G = \langle \alpha, \beta \rangle$. Wenn $\langle_G(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle; \{1\}) \neq 0$ ist, wenn es also ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n_G(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle; \{1\}) = 2k$ ist, dann gilt:

$$X := \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^k = 1 \rangle \cong G$$

Ein Isomorphismus $\varphi : X \rightarrow G$ ist dabei durch die Zuordnungen $a \mapsto \alpha$ und $b \mapsto \beta$ gegeben.

Beweis. Wenn wir Elemente u_1, u_2, \dots, u_{2k} suchen, die abwechselnd in $\langle \alpha \rangle - \{1\} = \{\alpha\}$ und $\langle \beta \rangle - \{1\} = \{\beta\}$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{2k} =_X 1$ ist, dann gibt es dafür nur die beiden Möglichkeiten $\alpha, \beta, \alpha, \dots, \beta$ und $\beta, \alpha, \beta, \dots, \alpha$. Es gilt jedoch:

$$(\alpha\beta)^k =_X 1 \Leftrightarrow (\alpha\beta)^{-k} =_X 1 \Leftrightarrow (\beta\alpha)^k =_X 1$$

Also wissen wir, dass sowohl $(\alpha\beta)^k =_X 1$ als auch $(\beta\alpha)^k =_X 1$ ist. Da auch $a^2 =_X 1$ und $\beta^2 =_X 1$ ist, lassen sich die Zuordnungen $a \mapsto \alpha$ und $b \mapsto \beta$ nach dem Satz von Dyck zu einem Homomorphismus $\varphi : X \rightarrow G$ fortsetzen. Er ist nach Voraussetzung surjektiv.

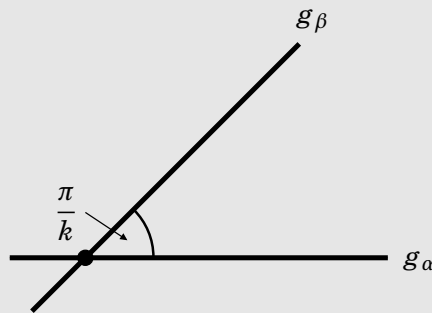
Wir können uns leicht davon überzeugen, dass er auch injektiv ist: Angenommen, es gibt ein Element $g \in \ker(\varphi) - \{1\}$. Nun können wir dieses Element g unter Verwendung der drei definierenden Relationen durch ein Wort $w = w_1 w_2 \dots w_n$ über a und b beschreiben, dessen Buchstaben einander abwechseln und dessen Länge gleich $n \in \{1, 2, \dots, 2k - 1\}$ ist. Die Bilder $\varphi(w_1), \varphi(w_2), \dots, \varphi(w_n)$ sind abwechselnd in $\langle \alpha \rangle - \{1\} = \{\alpha\}$ und $\langle \beta \rangle - \{1\} = \{\beta\}$ enthalten und ihr Produkt ist:

$$\varphi(w_1) \cdot \varphi(w_2) \cdot \dots \cdot \varphi(w_n) =_X \varphi(w) =_X \varphi(g) =_X 1$$

Also ist $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) \leq n < 2k$. ∇ Wir haben somit gezeigt, dass φ nicht nur surjektiv sondern auch injektiv ist, es handelt sich also um einen Isomorphismus. \square

Zusatz 4.39 Wenn $X \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^k = 1 \rangle$ ist, dann ist $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) = 2k$.

Beweis. Die folgende Überlegung haben wir auf den Seiten 80ff. bereits in ähnlicher Weise angestellt. Seien g_α und g_β zwei Geraden in der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 , die sich im Winkel $\frac{\pi}{k}$ schneiden:



Wir bezeichnen die Spiegelungen an den Geraden g_α und g_β mit den Buchstaben α und β , und betrachten die von ihnen erzeugte Untergruppe:

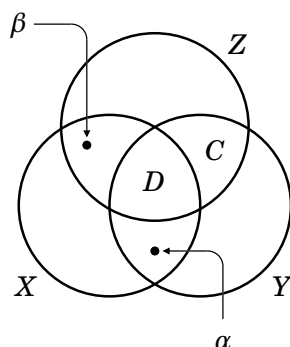
$$U := \langle \alpha, \beta \rangle \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$$

Durch die Zuordnungen $a \mapsto \alpha$ und $b \mapsto \beta$ definieren wir nun einen Homomorphismus $\varphi : X \rightarrow U$. Da $a^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^k = 1$ ist, lassen sich die Zuordnungen nach dem Satz von Dyck zu einem Homomorphismus fortsetzen, vermöge dessen X durch Isometrien auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 operiert.

Da a und b durch Spiegelungen an g_α und g_β und somit nichttrivial auf \mathbb{E}^2 operieren, sind $a \neq_X 1$ und $b \neq_X 1$. Nun ist $(ab)^{2k} =_X 1$, also gilt $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) \leq 2k$.

Dass $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\})$ auch nicht kleiner als $2k$ ist, können wir wie folgt einsehen: Nach Lemma 2.2 ist $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) \in 2 \cdot \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Angenommen, es gibt ein $n \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ mit der Eigenschaft $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) = 2n$. Dann gilt entweder $(ab)^n =_X 1$ oder $(ba)^n =_X 1$. Da ab und ba durch Rotationen mit dem Drehwinkel $\pm \frac{2\pi}{k}$ um den Geradenschnittpunkt auf \mathbb{E}^2 operieren, operieren deren Potenzen $(ab)^n$ und $(ba)^n$ durch Rotationen mit dem Drehwinkel $\pm \frac{2\pi \cdot n}{k}$ um den Geradenschnittpunkt auf \mathbb{E}^2 , und somit nichttrivial. Also sind $(ab)^n \neq_X 1$ und $(ba)^n \neq_X 1$. ∇ Es folgt, dass $n_X(\langle a \rangle, \langle b \rangle; \{1\}) = 2k$ ist. \square

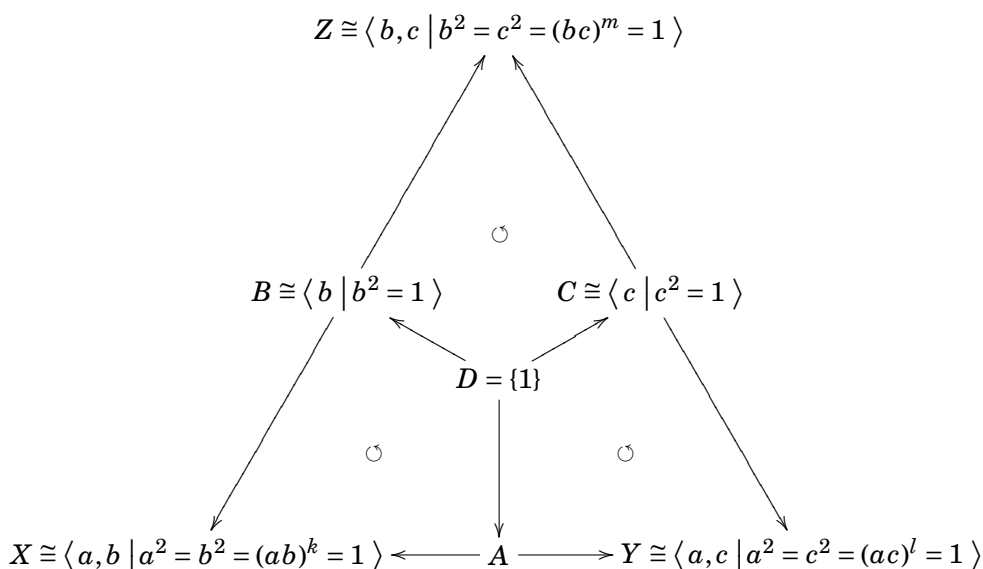
Betrachten wir beispielsweise die Eckengruppe X , dann sehen wir, dass die eindeutig bestimmten Elemente $\alpha \in A - \{1\}$ und $\beta \in B - \{1\}$ jeweils die Ordnung 2 haben und die Gruppe X erzeugen:



Da Δ nicht-winkel-ausgeartet ist, insbesondere also der Winkel $\sphericalangle_X(\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle; \{1\}) \neq 0$ ist, gibt es nach Lemma 4.38 ein $k \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$X \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^k = 1 \rangle$$

Hierbei werden die Elemente $\alpha \in A - \{1\}$ und $\beta \in B - \{1\}$, genauer gesagt: deren Bilder $\varphi_{AX}(\alpha) \in X$ und $\varphi_{BX}(\beta) \in X$, durch a und b beschrieben. Genauso können wir nun auch $l \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ finden und die übrigen Gruppen durch Präsentierungen beschreiben:



Hierbei ist $A \cong \langle a \mid a^2 = 1 \rangle$ zu ergänzen. Die Homomorphismen von Δ lassen sich bezüglich dieser Präsentierungen ganz einfach durch die Zuordnungen $a \mapsto a$, $b \mapsto b$ und $c \mapsto c$ beschreiben.

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

Aus Symmetriegründen können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass $k \leq l \leq m$ ist. Da Δ ein euklidisches Dreieck von Gruppen ist, gilt $(k, l, m) \in \{(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)\}$. Der Colimes G von Δ ist also isomorph zum Colimes von $\Delta_4(k, l, m)$. Er ist nach Lemma 4.43 virtuell polyzyklisch und somit insbesondere virtuell auflösbar.

Damit haben wir schließlich gezeigt, dass der Colimes eines jeden nichtsphärischen nicht-winkel-angestrichelten Dreiecks von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist. \square

Bemerkung. Aus dem Beweis ergibt sich sogar noch eine schärfere Formulierung von Satz 4.37: „Der Colimes eines jeden nichtsphärischen nicht-winkel-angestrichelten Dreiecks von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe D enthält entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe oder ist virtuell polyzyklisch.“ Dabei müssen wir lediglich noch das auf Seite 130 bewiesene Lemma 4.43 verwenden.

4.7.3 Einige weitere vorbereitende Lemmata

Wir werden die Aussage von Satz 4.37 nun auf nichtsphärische nicht-winkel-angestrichelte Dreiecke von Gruppen, bei denen die Zweizellengruppe D nicht unbedingt trivial aber zumindest endlich erzeugt ist und entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist, verallgemeinern.

Die folgenden Lemmata 4.40 bis 4.43 leisten wesentliche Vorarbeit sowohl zum Beweis dieser Verallgemeinerung, d. h. des Satzes 4.44, als auch zum Beweis des Satzes 4.45.

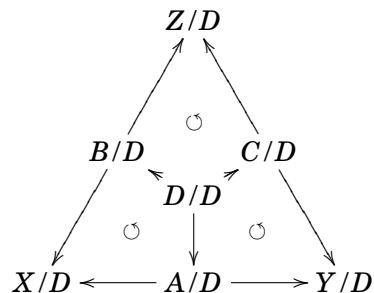
Lemma 4.40 *Es gelten die folgenden beiden Aussagen:*

- Sei $X \leftarrow A \rightarrow Y$ ein Diagramm von Gruppen mit Colimes G , z. B. kann G das freie Produkt mit Amalgam sein. Wenn $\text{im}(\varphi_{AX}) \trianglelefteq X$ und $\text{im}(\varphi_{AY}) \trianglelefteq Y$ ist, dann ist auch $\text{im}(\varphi_A) \trianglelefteq G$ und wir können das Faktordiagramm $X/\text{im}(\varphi_{AX}) \leftarrow \{1\} \rightarrow Y/\text{im}(\varphi_{AY})$ betrachten. Für seinen Colimes H gilt:

$$H \cong (X/\text{im}(\varphi_{AX})) * (Y/\text{im}(\varphi_{AY})) \cong G/\text{im}(\varphi_A)$$

- Sei Δ ein Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9). Wenn die Bilder der Zweizellengruppe D , die wir in diesem Lemma grundsätzlich auch

mit dem Buchstaben D bezeichnen, Normalteiler der Ecken- und Kantengruppen sind, dann ist auch $\text{im}(\varphi_D) \trianglelefteq G$ und wir können das folgende Faktordreieck Δ/D betrachten:



Die Homomorphismen sind die vom Dreieck Δ induzierten Homomorphismen. Dass es sich bei Δ/D tatsächlich um ein Dreieck von Gruppen handelt, kann man leicht einsehen. Für seinen Colimes H gilt:

$$H \cong G/\text{im}(\varphi_D)$$

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage, die zweite beweist man, mit etwas mehr Schreibaufwand, analog. Sei also $A \cong \langle \mathcal{A} | \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \rangle$, $X \cong \langle \mathcal{X} | \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \rangle$ und $Y \cong \langle \mathcal{Y} | \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \rangle$. Dann gilt:

$$G \cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} | \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \} \rangle$$

Wenn nun $\text{im}(\varphi_{AX}) \trianglelefteq X$ und $\text{im}(\varphi_{AY}) \trianglelefteq Y$ ist, dann kann man allein unter Verwendung der folgenden definierenden Relationen:

$$\mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\}$$

einsehen, dass jedes $a \in \mathcal{A}$ auch nach Konjugation mit den Elementen von $\mathcal{A} \cup \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ und deren Inversen als Wort über den Elementen von \mathcal{A} und deren Inversen geschrieben werden kann. Folglich ist $\text{im}(\varphi_A) \trianglelefteq G$.

Wir definieren nun:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{X}} := \{ \overline{\varphi_{AX}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \}$$

$$\Rightarrow \text{im}(\varphi_{AX}) = \langle \langle \mathcal{S}_{\mathcal{X}} \rangle \rangle \trianglelefteq X \Rightarrow X/\text{im}(\varphi_{AX}) \cong \langle \mathcal{X} | \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}} \rangle$$

und analog dazu:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Y}} := \{ \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \}$$

$$\Rightarrow \text{im}(\varphi_{AY}) = \langle \langle \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \rangle \rangle \trianglelefteq Y \Rightarrow Y/\text{im}(\varphi_{AY}) \cong \langle \mathcal{Y} | \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \rangle$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 H &\cong \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \rangle \\
 &\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{A}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \rangle \\
 &\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}} \rangle \\
 &\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{S}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{S}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle \\
 &\cong \langle \mathcal{A}, \mathcal{X}, \mathcal{Y} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \mathcal{R}_{\mathcal{X}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \{a = \overline{\varphi_{AX}(a)}, a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A}\} \rangle \cong G / \langle\langle \mathcal{A} \rangle\rangle
 \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass tatsächlich $H \cong G / \langle\langle \mathcal{A} \rangle\rangle = G / \text{im}(\varphi_A)$ gilt. \square

Lemma 4.41 *In der Situation von Lemma 4.40 sind die Winkel des Dreiecks Δ und des Faktordreiecks Δ/D identisch.*

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, die Winkel in einer der drei Eckengruppen mit dem Winkel in der entsprechenden Eckengruppe des Faktordreiecks zu vergleichen:

Wenn es Elemente $u_1, u_2, \dots, u_n \in X$ gibt, die abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten sind und deren Produkt $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_X 1$ ist, dann sind $u_1 \cdot D, u_2 \cdot D, \dots, u_n \cdot D$ abwechselnd in $(A/D) - (D/D)$ und $(B/D) - (D/D)$ enthalten. Es gilt außerdem:

$$u_1 \cdot D \cdot u_2 \cdot D \cdot \dots \cdot u_n \cdot D =_{X/D} u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot D =_{X/D} D$$

Also ist $n_X(A, B; D) \geq n_{X/D}(A/D, B/D; D/D)$.

Wenn es umgekehrt Nebenklassen U_1, U_2, \dots, U_n gibt, die abwechselnd in $(A/D) - (D/D)$ und $(B/D) - (D/D)$ enthalten sind und deren Produkt $U_1 \cdot U_2 \cdot \dots \cdot U_n =_{X/D} D$ ist, dann wählen wir, für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, einen Repräsentanten $u_i \in U_i$. Diese Repräsentanten u_1, u_2, \dots, u_n sind abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten und es gilt:

$$\begin{aligned}
 &u_1 \cdot D \cdot u_2 \cdot D \cdot \dots \cdot u_n \cdot D =_{X/D} D \\
 &\Rightarrow u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \cdot D =_{X/D} D \\
 &\Rightarrow u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \in D \\
 &\Rightarrow \exists d \in D : u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n =_X d
 \end{aligned}$$

Wenn wir nun $\tilde{u}_n := u_n \cdot d^{-1}$ wählen, dann sind auch $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, \tilde{u}_n$ abwechselnd in $A - D$ und $B - D$ enthalten und es gilt:

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \cdot \tilde{u}_n =_X 1$$

Also ist auch $n_X(A, B; D) \leq n_{X/D}(A/D, B/D; D/D)$. \square

Lemma 4.42 Sei G eine Gruppe und $H \trianglelefteq G$ ein endlich erzeugter Normalteiler. Wenn H virtuell auflösbar und G/H virtuell polyzyklisch ist, wenn es also eine Untergruppe $U \leq G/H$ mit endlichem Index $|(G/H):U| < \infty$ und eine erweiterte Normalreihe \mathfrak{N} :

$$G/H \geq U = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \dots \triangleright N_{n-1} \triangleright N_n = \{1\}$$

mit der Eigenschaft gibt, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe N_i/N_{i+1} zyklisch ist, dann ist G virtuell auflösbar.

Beweis. Sei $\pi : G \rightarrow G/H$ die kanonische Projektion. Für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ betrachten wir die Untergruppe $\tilde{N}_i := \pi^{-1}(N_i) \leq G$. Nach dem Korrespondenzsatz, siehe zum Beispiel [Rot95, Theorem 2.28], ist $\tilde{U} := \tilde{N}_0 \leq G$ eine Untergruppe mit endlichem Index $|G : \tilde{U}| < \infty$ und die erweiterte Normalreihe \mathfrak{N} induziert eine erweiterte Normalreihe $\tilde{\mathfrak{N}}$:

$$G \geq \tilde{U} = \tilde{N}_0 \triangleright \tilde{N}_1 \triangleright \tilde{N}_2 \triangleright \dots \triangleright \tilde{N}_{n-1} \triangleright \tilde{N}_n = H$$

Nun können wir den dritten Isomorphiesatz, siehe zum Beispiel [Rot95, Theorem 2.27], anwenden und beobachten, dass auch die erweiterte Normalreihe $\tilde{\mathfrak{N}}$ die Eigenschaft hat, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe $\tilde{N}_i/\tilde{N}_{i+1} \cong N_i/N_{i+1}$ zyklisch ist.

Da der Normalteiler $H \trianglelefteq G$ endlich erzeugt ist und, wovon man sich leicht überzeugen kann, zyklische Erweiterungen von endlich erzeugten Gruppen wieder endlich erzeugt sind, können wir schrittweise einsehen, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, die Untergruppe \tilde{N}_i endlich erzeugt ist.

Wir setzen nun voraus, dass H virtuell auflösbar ist. Es gibt also auch eine Untergruppe $V \leq H$ mit endlichem Index $|H : V| < \infty$ und eine erweiterte Normalreihe \mathfrak{M} :

$$H \geq V = M_0 \triangleright M_1 \triangleright M_2 \triangleright \dots \triangleright M_{m-1} \triangleright M_m = \{1\}$$

mit der Eigenschaft, dass, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, auch die Faktorgruppe M_i/M_{i+1} abelsch ist. Wenn wir die beiden erweiterten Normalreihen $\tilde{\mathfrak{N}}$ und \mathfrak{M} zusammensetzen, dann erhalten wir die folgende Reihe \mathfrak{R} :

$$G \geq \tilde{U} = \tilde{N}_0 \triangleright \tilde{N}_1 \triangleright \dots \triangleright \tilde{N}_{n-1} \triangleright \tilde{N}_n = H \geq V = M_0 \triangleright M_1 \triangleright \dots \triangleright M_m = \{1\}$$

Da H endlich erzeugt ist und $V \leq H$ eine Untergruppe mit endlichem Index $|H : V| < \infty$ ist, gibt es nach einem Satz von Hall eine Untergruppe $\tilde{V} \leq V \leq H$, die ebenfalls endlichen

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

Index $|H : \tilde{V}| < \infty$ hat und außerdem noch charakteristisch in H ist, siehe zum Beispiel [CgRR08, Satz 1.15].

Wenn wir in \mathfrak{A} , für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, die Gruppe M_i durch $\tilde{M}_i := M_i \cap \tilde{V}$ ersetzen, dann erhalten wir:

$$G \geq \tilde{U} = \tilde{N}_0 \triangleright \tilde{N}_1 \triangleright \dots \triangleright \tilde{N}_{n-1} \triangleright \tilde{N}_n = H \geq \tilde{V} = \tilde{M}_0 \triangleright \tilde{M}_1 \triangleright \dots \triangleright \tilde{M}_m = \{1\}$$

Nun ist, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, die Faktorgruppe $\tilde{N}_i / \tilde{N}_{i+1}$ zyklisch und, für jedes $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, die Faktorgruppe $\tilde{M}_i / \tilde{M}_{i+1}$ abelsch. Wenn nun auch die Faktorgruppe H / \tilde{V} abelsch wäre, dann wäre G virtuell auflösbar und der Beweis wäre fertig.

Jedoch wissen wir nur, dass es sich um eine endliche Gruppe handelt. Daher betrachten wir den folgenden Ausschnitt genauer:

$$\underbrace{\tilde{N}_{n-1} \triangleright \tilde{N}_n}_{\text{zyklisch}} = \underbrace{H \geq \tilde{V}}_{\text{endlich}}$$

Sei $t \in \tilde{N}_{n-1}$ so gewählt, dass $t \cdot \tilde{N}_n$ die zyklische Gruppe $\tilde{N}_{n-1} / \tilde{N}_n$ erzeugt. Insbesondere gibt es für jedes $g \in \tilde{N}_{n-1}$ ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass $g \cdot \tilde{N}_n = t^k \cdot \tilde{N}_n$, $\Rightarrow g \in t^k \cdot \tilde{N}_n$, gilt. Wir betrachten nun die von t erzeugte Untergruppe $T := \langle t \rangle \leq \tilde{N}_{n-1}$ und die Teilmenge $T \cdot \tilde{V} \subseteq \tilde{N}_{n-1}$.

1. Behauptung: \tilde{V} ist ein Normalteiler von \tilde{N}_{n-1} .

Für jedes $g \in \tilde{N}_{n-1}$ sei $\varphi_g : \tilde{N}_{n-1} \rightarrow \tilde{N}_{n-1}$ der durch die Konjugation $n \mapsto g^{-1} \cdot n \cdot g$ gegebene innere Automorphismus. Nun können wir für jedes $g \in \tilde{N}_{n-1}$ die folgenden Beobachtungen machen: Da $H = \tilde{N}_n \trianglelefteq \tilde{N}_{n-1}$ ein Normalteiler ist, gilt $\varphi_g(H) = H$ und die Einschränkung $\varphi_g|_H : H \rightarrow H$ ist ein Automorphismus. Da aber $\tilde{V} \trianglelefteq H$ charakteristisch ist, gilt sogar $\varphi_g(\tilde{V}) = \tilde{V}$. Daraus folgt $\forall g \in \tilde{N}_{n-1} : \varphi_g(\tilde{V}) = g^{-1} \cdot \tilde{V} \cdot g = \tilde{V}$, $\Rightarrow \tilde{V} \trianglelefteq \tilde{N}_{n-1}$.

2. Behauptung: $T \cdot \tilde{V}$ ist eine Untergruppe von \tilde{N}_{n-1} .

Seien $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ und $v_1, v_2 \in \tilde{V}$ beliebig. Dann gilt:

$$\left(t^{k_1} \cdot v_1 \right) \cdot \left(t^{k_2} \cdot v_2 \right) = t^{k_1} \cdot t^{k_2} \cdot \underbrace{t^{-k_2} \cdot v_1 \cdot t^{k_2}}_{\in \tilde{V}} \cdot v_2 \in T \cdot \tilde{V}$$

Seien nun $k \in \mathbb{Z}$ und $v \in \tilde{V}$ beliebig. Dann gilt:

$$\left(t^k \cdot v \right)^{-1} = v^{-1} \cdot t^{-k} = t^{-k} \cdot \underbrace{t^k \cdot v^{-1} \cdot t^{-k}}_{\in \tilde{V}} \in T \cdot \tilde{V}$$

Die Teilmenge $T \cdot \tilde{V} \subseteq \tilde{N}_{n-1}$ ist abgeschlossen unter Verknüpfung und Inversenbildung, also eine Untergruppe.

3. *Behauptung:* Der Index $|\tilde{N}_{n-1} : (T \cdot \tilde{V})|$ ist endlich.

Da der Index $|H : \tilde{V}| < \infty$ ist, gibt es ein endliches vollständiges Repräsentantensystem $\{h_1, h_2, \dots, h_p\} \subseteq H$ der Rechtsnebenklassen von $\tilde{V} \leq H$. Für jedes $g \in \tilde{N}_{n-1}$ gilt also:

$$\begin{aligned} \exists k \in \mathbb{Z} : g \in t^k \cdot \tilde{N}_n &= t^k \cdot H \\ \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \exists i \in \{1, 2, \dots, p\} : g &\in t^k \cdot \tilde{V} \cdot h_i \\ \Rightarrow \exists i \in \{1, 2, \dots, p\} : g \in T \cdot \tilde{V} \cdot h_i \end{aligned}$$

Folglich ist der Index $|\tilde{N}_{n-1} : (T \cdot \tilde{V})| \leq p < \infty$.

Nun können wir den eigentlichen Beweis fortsetzen: Da \tilde{V} ein Normalteiler der Gruppe \tilde{N}_{n-1} ist, ist es insbesondere auch ein Normalteiler der Untergruppe $T \cdot \tilde{V} \leq \tilde{N}_{n-1}$. Die Faktorgruppe $(T \cdot \tilde{V})/\tilde{V}$ wird von $t \cdot \tilde{V}$ erzeugt und ist daher zyklisch. Unseren Ausschnitt ersetzen wir schließlich wie folgt:

$$\underbrace{\tilde{N}_{n-1} \supseteq \tilde{N}_n}_{\text{zyklisch}} = \underbrace{H \supseteq \tilde{V}}_{\text{endlich}} \rightsquigarrow \underbrace{\tilde{N}_{n-1} \supseteq T \cdot \tilde{V}}_{\text{endlich}} \supseteq \underbrace{\tilde{V}}_{\substack{\text{zyklisch} \\ \Rightarrow \text{abelsch}}}$$

Wir erhalten somit die folgende Reihe $\tilde{\mathfrak{K}}$:

$$G \geq \tilde{U} = \tilde{N}_0 \supseteq \tilde{N}_1 \supseteq \dots \supseteq \tilde{N}_{n-1} \supseteq T \cdot \tilde{V} \supseteq \tilde{V} = \tilde{M}_0 \supseteq \tilde{M}_1 \supseteq \dots \supseteq \tilde{M}_m = \{1\}$$

Die Reihe $\tilde{\mathfrak{K}}$ unterscheidet sich im Wesentlichen nur dadurch von der ursprünglichen Reihe \mathfrak{K} , dass die zweite kritische Stelle, also die zweite Stelle, an der eine Gruppe die nachfolgende Gruppe nicht zwangsläufig als Normalteiler mit zyklischer oder abelscher Faktorgruppe sondern als Untergruppe mit endlichem Index enthält, um eine Stelle nach links verschoben wurde.

Wenn wir nun die oben beschriebene Prozedur wiederholt anwenden, dann erhalten wir nach genau n Schritten eine Reihe $\tilde{\mathfrak{K}}'$, an der die beiden kritischen Stellen gleich zu Anfang auftreten:

$$G \geq \tilde{U} = \tilde{N}_0 \supseteq T' \cdot \tilde{V}' \supseteq \dots \supseteq \{1\}$$

Doch in diesem Fall gilt $|G : (T' \cdot \tilde{V}')| = |G : \tilde{U}| \cdot |\tilde{N}_0 : (T' \cdot \tilde{V}')| < \infty$. Wir haben also eine auflösbare Untergruppe $T' \cdot \tilde{V}' \leq G$ mit endlichem Index $|G : (T' \cdot \tilde{V}')| < \infty$ gefunden. Es folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.43 *Es gelten die folgenden beiden Aussagen:*

- Die Gruppe $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ist virtuell zyklisch, insbesondere also virtuell polyzyklisch.
- Wenn $(k, l, m) \in \{(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)\}$ ist, dann ist auch der Colimes von $\Delta_4(k, l, m)$ virtuell polyzyklisch.

Beweis. Im Beweis der Behauptung im grauen Kästchen auf Seite 95 haben wir gesehen, dass die Gruppe $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ einen zyklischen Normalteiler $N \trianglelefteq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ mit endlichem Index $|(\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2) : N| = 2 < \infty$ enthält, d. h. $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ist virtuell zyklisch, insbesondere also virtuell polyzyklisch.

Sei $(k, l, m) \in \{(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)\}$. Da der Colimes von $\Delta_4(k, l, m)$ zu einer Untergruppe $U \leq \text{Isom}(\mathbb{E}^2)$ isomorph ist, genügt es, zu zeigen, dass U virtuell polyzyklisch ist. Wir betrachten die folgende induzierte Normalreihe:

$$U = (\text{Isom}(\mathbb{E}^2) \cap U) \supseteq (\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U) \supseteq (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U) \supseteq \dots$$

1. *Behauptung:* Der Index $|(\text{Isom}(\mathbb{E}^2) \cap U) : (\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U)|$ ist endlich.

Wir wissen, dass der Index $|\text{Isom}(\mathbb{E}^2) : \text{Isom}^+(\mathbb{E}^2)| = 2$ ist. Nun haben wir im Beweis der Behauptung im grauen Kästchen auf Seite 96 gesehen, dass sich der Index nicht erhöht, wenn wir beide Gruppen mit einer Untergruppe schneiden. Daraus folgt die Behauptung, und sogar $|(\text{Isom}(\mathbb{E}^2) \cap U) : (\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U)| \leq 2$.

2. *Behauptung:* Der Index $|(\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U) : (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U)|$ ist endlich.

Wir betrachten zunächst die Elemente der Menge $R := (\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U) - (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U)$, hierbei handelt es sich um Rotationen mit nichttrivialem Drehwinkel.

Seien $\rho_1, \rho_2 \in R$ zwei Rotationen mit demselben Drehwinkel. Es ist nun eine geometrische Fingerübung, sich zu überlegen, dass $\rho_1 \cdot \rho_2^{-1}$ eine Translation ist. Dann gilt jedoch:

$$\begin{aligned} \rho_1 \cdot \rho_2^{-1} &\in \text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U \\ \Rightarrow (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U) \cdot \rho_1 &= (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U) \cdot \rho_2 \end{aligned}$$

Wir können also ein Repräsentantensystem $\{\rho_i \mid i \in I\}$ der nichttrivialen Nebenklassen von $(\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U) \trianglelefteq (\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U)$ angeben, in dem je zwei verschiedene Elemente ρ_i und ρ_j Rotationen mit verschiedenen Drehwinkeln sind.

Jedes $\rho \in R$ ist nach Definition orientierungserhaltend und lässt sich folglich als Produkt einer geraden Anzahl von Faktoren aus der Erzeugendenmenge $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ darstellen. Wenn

wir je zwei dieser Faktoren zusammenfassen, dann erkennen wir, dass sich ρ auch als Produkt von Rotationen mit den Drehwinkeln $\pm \frac{2\pi}{k}$, $\pm \frac{2\pi}{l}$ und $\pm \frac{2\pi}{m}$ darstellen lässt.

Wieder ist es eine geometrische Fingerübung, sich zu überlegen, dass es $\lambda_k, \lambda_l, \lambda_m \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass ρ eine Rotation mit dem Drehwinkel $\lambda_k \cdot \frac{2\pi}{k} + \lambda_l \cdot \frac{2\pi}{l} + \lambda_m \cdot \frac{2\pi}{m}$ ist. Die Menge der so beschreibbaren Drehwinkel ist aber endlich!

Es folgt $|I| < \infty$ und somit auch $|I| + 1 = |(\text{Isom}^+(\mathbb{E}^2) \cap U) : (\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U)| < \infty$.

3. *Behauptung:* Die Gruppe $\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U$ ist polyzyklisch.

Auf den Seiten 80ff. haben wir ein Dreieck Δ betrachtet, das ein Fundamentalbereich der Operation von U auf der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 ist. Wir wählen nun einen beliebigen Punkt p im Innern dieses Dreiecks. Seine Bahn $(\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U) \cdot p$ ist eine diskrete Menge von Punkten in der euklidischen Ebene \mathbb{E}^2 . Wenn wir also $\text{Trans}(\mathbb{E}^2)$ auf die kanonische Weise mit dem \mathbb{R}^2 identifizieren, dann ist $\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U$ eine diskrete Untergruppe des \mathbb{R}^2 , d. h. ein Gitter, und als solches isomorph zu $\{1\}$ oder \mathbb{Z} oder \mathbb{Z}^2 . In den ersten beiden Fällen ist $\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U$ offensichtlich polyzyklisch. Aber auch im dritten Fall ist $\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U$ dank der Normalreihe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supseteq \mathbb{Z} \times \{0\} \supseteq \{0\} \times \{0\}$ polyzyklisch.

Daraus folgt: Die Gruppe $U = \text{Isom}(\mathbb{E}^2) \cap U$ enthält mit $\text{Trans}(\mathbb{E}^2) \cap U$ eine polyzyklische Untergruppe von endlichem Index. Sie ist also virtuell polyzyklisch. \square

4.7.4 Das zweite und dritte positive Resultat

Die Beweise der folgenden Sätze bestehen im Wesentlichen aus der Zusammenfügung von bisher bewiesenen Sätzen und Lemmata. Sie wirken daher sehr technisch, sind aber nicht sonderlich geistreich.

Satz 4.44 *Die Klasse der Colimites nichtsphärischer nicht-winkel-ausgearteter Dreiecke von Gruppen, bei denen die Zweizellengruppe D endlich erzeugt ist und entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist, erfüllt ebenfalls die Tits-Alternative.*

Beweis. Sei Δ ein nichtsphärisches nicht-winkel-ausgeartetes Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9), bei dem die Zweizellengruppe D endlich erzeugt ist und entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist. Wir können unsere Arbeit erneut auf wenige Dreiecke von Gruppen beschränken:

Kapitel 4 Nichtsphärische Dreiecke von Gruppen und die Tits-Alternative

- Zunächst beobachten wir: Wenn es eine Eckengruppe gibt, die nicht von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird, dann enthält G nach Satz 4.20 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede Eckengruppe von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird.
- Da Δ ein nicht-winkel-angestricheltes Dreieck von Gruppen ist, ist es nach Satz 4.11 auch nicht-kanten-angestrichelt. Wenn Δ hyperbolisch ist, dann enthält sein Colimes G nach Satz 2.9 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass Δ euklidisch ist.
- Da Δ nicht-kanten-angestrichelt ist, enthält jede Kantengruppe neben dem neutralen Element noch mindestens ein weiteres Element. Es gilt also $|A : D| \geq 2$, $|B : D| \geq 2$ und $|C : D| \geq 2$. Wenn einer der drei Indizes größer als 2 ist, dann enthält G nach Lemma 4.36 eine nichtabelsche freie Untergruppe. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass $|A : D| = |B : D| = |C : D| = 2$ ist.
- Wenn die Zweizellengruppe D eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält, dann enthält nach Satz 2.12 auch $\text{im}(\varphi_D)$ und G eine solche. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass die Zweizellengruppe D virtuell auflösbar ist.

Da $|A : D| = |B : D| = |C : D| = 2$ ist, ist die Zweizellengruppe D ein Normalteiler in jeder Kantengruppe und, da jede Eckengruppe von den beiden angrenzenden Kantengruppen erzeugt wird, ist die Zweizellengruppe D sogar ein Normalteiler in jeder Eckengruppe. Nach Lemma 4.40 ist also $\text{im}(\varphi_D) \trianglelefteq G$ und es gilt $\text{colim}(\Delta/D) \cong G/\text{im}(\varphi_D)$.

Nach Lemma 4.41 sind die Winkel des Dreiecks Δ und des Faktordreiecks Δ/D identisch: Es handelt sich bei Δ/D also auch um ein euklidisches nicht-winkel-angestricheltes Dreieck von Gruppen mit trivialer Zweizellengruppe. Nach der im Anschluss an den Beweis von Satz 4.37 gemachten Bemerkung enthält $\text{colim}(\Delta/D)$ also entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe oder ist virtuell polyzyklisch.

Wenn $\text{colim}(\Delta/D)$ eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält, dann enthält G nach Lemma 4.3 ebenfalls eine solche. Wenn $\text{colim}(\Delta/D)$ hingegen virtuell polyzyklisch ist, dann können wir verwenden, dass $D \cong \text{im}(\varphi_D)$ endlich erzeugt und virtuell auflösbar ist, um schließlich mit Lemma 4.42 zu zeigen, dass auch G virtuell auflösbar ist.

Damit haben wir gezeigt, dass der Colimes eines jeden nichtsphärischen nicht-winkel-angestrichelten Dreiecks von Gruppen, bei dem die Zweizellengruppe D die oben genannten

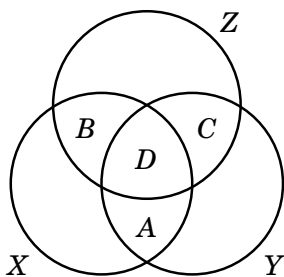
Eigenschaften hat, entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist. □

Satz 4.45 *Die Klasse der Colimites nichtsphärischer Dreiecke von Gruppen, bei denen jede einzelne der beteiligten Gruppen endlich erzeugt ist und entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist, erfüllt die Tits-Alternative.*

Beweis. Sei Δ ein nichtsphärisches Dreieck von Gruppen mit Colimes G (genau wie in Definition 1.9), bei dem jede einzelne der beteiligten Gruppen endlich erzeugt ist und entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist. Auch in dieser Situation können wir uns etwas Arbeit ersparen:

- Zunächst beobachten wir: Wenn Δ nicht-winkel-augeartet ist, dann enthält G nach Satz 4.44 entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe oder ist virtuell auflösbar. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass Δ winkel-augeartet ist. Mehr noch, aus Symmetriegründen können wir o. B. d. A. davon ausgehen, dass $\langle_X(A, B; D) = 0$ ist.
- Wenn eine der beteiligten Gruppen eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält, dann enthält nach Satz 2.12 auch G eine solche. Wir können also o. B. d. A. davon ausgehen, dass jede einzelne der beteiligten Gruppen virtuell auflösbar ist.

Als nichtsphärisches Dreieck von Gruppen ist Δ nach Satz 2.12 realisierbar. Wir können es uns daher in diesem Beweis erlauben, die Abbildung φ_M nicht explizit anzugeben und die Menge $M = X \cup Y \cup Z$ (mit $X \cap Y = A$, $X \cap Z = B$, $Y \cap Z = C$ und $X \cap Y \cap Z = D$) als Teilmenge des Colimes G aufzufassen:



Man kann leicht einsehen, dass der Colimes G wie folgt als freies Produkt mit Amalgam aufgefasst werden kann:

$$G \cong X *_{\langle A, B \rangle} \langle Y, Z \rangle$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1: $|X : \langle A, B \rangle| = 1$

Wenn die Gruppe X von den beiden angrenzenden Kantengruppen A und B erzeugt wird, wenn also der Index $|X : \langle A, B \rangle| = 1$ ist, dann betrachten wir den durch die Zuordnungen $\forall a \in A : a \mapsto a$ und $\forall b \in B : b \mapsto b$ gegebenen Homomorphismus ψ vom freien Produkt mit Amalgam $A *_D B$ in die Eckengruppe X , nach dem Satz von Dyck können wir diese Zuordnungen tatsächlich zu einem Homomorphismus fortsetzen.

Da $\triangleleft_X(A, B; D) = 0$ ist, kann man mit Hilfe des Satzes 1.7, des Normalformensatzes für freie Produkte mit Amalgam, leicht einsehen, dass der Homomorphismus $\psi : A *_D B \rightarrow X$ injektiv ist. Da die Gruppe X von den beiden angrenzenden Kantengruppen A und B erzeugt wird, ist er auch surjektiv. Der Homomorphismus ψ ist also ein Isomorphismus. Wenn $A \cong \langle \mathcal{A} | \mathcal{R}_{\mathcal{A}} \rangle$, $B \cong \langle \mathcal{B} | \mathcal{R}_{\mathcal{B}} \rangle$ und $D \cong \langle \mathcal{D} | \mathcal{R}_{\mathcal{D}} \rangle$ sind, dann ist also:

$$X \cong A *_D B \cong \left\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}, \left\{ \overline{\varphi_{DA}(d)} = \overline{\varphi_{DB}(d)} \mid d \in \mathcal{D} \right\} \right\rangle$$

Mit den entsprechenden Präsentierungen $C \cong \langle \mathcal{C} | \mathcal{R}_{\mathcal{C}} \rangle$, $Y \cong \langle \mathcal{Y} | \mathcal{R}_{\mathcal{Y}} \rangle$ und $Z \cong \langle \mathcal{Z} | \mathcal{R}_{\mathcal{Z}} \rangle$ können wir den Colimes G wie folgt beschreiben:

$$G \cong \left\langle \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{A}}, \mathcal{R}_{\mathcal{B}}, \left\{ \overline{\varphi_{DA}(d)} = \overline{\varphi_{DB}(d)} \mid d \in \mathcal{D} \right\}, \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \right. \\ \left. \left\{ a = \overline{\varphi_{AY}(a)} \mid a \in \mathcal{A} \right\}, \left\{ b = \overline{\varphi_{BZ}(b)} \mid b \in \mathcal{B} \right\}, \left\{ \overline{\varphi_{CY}(c)} = \overline{\varphi_{CZ}(c)} \mid c \in \mathcal{C} \right\} \right\rangle$$

Mit Hilfe von Tietze-Transformationen können wir diese Präsentation noch ein wenig vereinfachen und erhalten schließlich:

$$G \cong \langle \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \mid \mathcal{R}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{R}_{\mathcal{Z}}, \left\{ \overline{\varphi_{CY}(c)} = \overline{\varphi_{CZ}(c)} \mid c \in \mathcal{C} \right\} \rangle \cong Y *_C Z$$

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 1.1: Wenn die Eckengruppe Y von der Kantengruppe C erzeugt wird, wenn also der Index $|Y : C| = 1$ ist, dann ist $G = Z$ und somit virtuell auflösbar.

Fall 1.2: Wenn die Eckengruppe Z von der Kantengruppe C erzeugt wird, wenn also der Index $|Z : C| = 1$ ist, dann ist $G = Y$ und somit virtuell auflösbar.

Fall 1.3: Wenn $|Y : C| \geq 2$ und $|Z : C| \geq 2$ ist, und nicht beide Indizes gleich 2 sind, dann enthält G nach Lemma 4.13 eine nichtabelsche freie Untergruppe.

Fall 1.4: Wenn $|Y : C| = |Z : C| = 2$ ist, dann ist $C \trianglelefteq Y$ und $C \trianglelefteq Z$. Nach Lemma 4.40 ist $C \trianglelefteq G$ und es gilt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong G/C$, nach Lemma 4.43 ist G/C also virtuell polyzyklisch. Da $C \trianglelefteq G$ endlich erzeugt und virtuell auflösbar ist, ist nach Lemma 4.42 auch G virtuell auflösbar.

Fall 2: $|\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| = 1$

Wenn die Gruppe $\langle Y, Z \rangle$ von den beiden Kantengruppen A und B erzeugt wird, wenn also der Index $|\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| = 1$ ist, dann ist $G = X$ und somit virtuell auflösbar.

Fall 3:

$|X : \langle A, B \rangle| \geq 2$ und $|\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| \geq 2$
und nicht $|X : \langle A, B \rangle| = |\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| = 2$

Wenn $|X : \langle A, B \rangle| \geq 2$ und $|\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| \geq 2$ ist, und nicht beide Indizes gleich 2 sind, dann enthält G nach Lemma 4.13 eine nichtabelsche freie Untergruppe.

Fall 4: $|X : \langle A, B \rangle| = |\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| = 2$

Wenn $|X : \langle A, B \rangle| = |\langle Y, Z \rangle : \langle A, B \rangle| = 2$ ist, dann betrachten wir $\langle A, B \rangle \leq G$ genauer:

- Da $\langle A, B \rangle \trianglelefteq X$ und $\langle A, B \rangle \trianglelefteq \langle Y, Z \rangle$ ist, ist nach Lemma 4.40 auch $\langle A, B \rangle \trianglelefteq G$ und es gilt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong G/\langle A, B \rangle$, nach Lemma 4.43 ist $G/\langle A, B \rangle$ also virtuell polyzyklisch.
- Wie im ersten Fall können wir einsehen, dass $A *_D B \cong \langle A, B \rangle$ ist, d. h. dass der Homomorphismus $\psi : A *_D B \rightarrow \langle A, B \rangle \leq X \leq G$ ein Isomorphismus ist.

Wir unterscheiden nun die folgenden Fälle:

Fall 4.1: Wenn die Kantengruppe A nur die Elemente der Zweizellengruppe D enthält, wenn also der Index $|A : D| = 1$ ist, dann ist $\langle A, B \rangle = B$ und somit endlich erzeugt und virtuell auflösbar. Nach Lemma 4.42 ist also auch G virtuell auflösbar.

Fall 4.2: Wenn die Kantengruppe B nur die Elemente der Zweizellengruppe D enthält, wenn also der Index $|B : D| = 1$ ist, dann ist $\langle A, B \rangle = A$ und somit endlich erzeugt und virtuell auflösbar. Nach Lemma 4.42 ist also auch G virtuell auflösbar.

Fall 4.3: Wenn $|A : D| \geq 2$ und $|B : D| \geq 2$ ist, und nicht beide Indizes gleich 2 sind, dann enthalten $\langle A, B \rangle \leq G$ und somit auch G nach Lemma 4.13 eine nichtabelsche freie Untergruppe.

Fall 4.4: Wenn $|A : D| = |B : D| = 2$ ist, dann ist $D \trianglelefteq A$ und $D \trianglelefteq B$. Nach Lemma 4.40 ist $D \trianglelefteq \langle A, B \rangle$ und es gilt $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 \cong \langle A, B \rangle / D$, nach Lemma 4.43 ist $\langle A, B \rangle / D$ also virtuell polyzyklisch. Da $D \trianglelefteq \langle A, B \rangle$ endlich erzeugt und virtuell auflösbar ist, ist nach Lemma 4.42 auch $\langle A, B \rangle$ virtuell auflösbar. Da $\langle A, B \rangle$ außerdem endlich erzeugt ist und, wie wir oben gesehen haben, $G / \langle A, B \rangle$ virtuell polyzyklisch ist, ist wiederum nach Lemma 4.42 auch G virtuell auflösbar.

Damit sind wir am Ziel: Wir haben eine erschöpfende Fallunterscheidung durchgeführt und uns davon überzeugt, dass der Colimes G in jedem einzelnen der untersuchten Fälle entweder eine nichtabelsche freie Untergruppe enthält oder virtuell auflösbar ist. Es folgt die Behauptung. \square

AUSBLICK

Nach dieser doch erschreckend umfangreich gewordenen Diplomarbeit, möchte ich Ihnen, lieber Leser, dafür danken, dass Sie es bis hierhin durchgehalten haben. Zu guter Letzt weise ich noch auf ein paar weiterführende Ansätze hin:

- **Normalformensatz**

Wie auf Seite 43 bereits erwähnt, stellt Bridson in [Bri91] eine Arbeit mit dem Titel „Normal forms in triangles of groups“ in Aussicht, hat diese aber bis heute noch nicht publiziert.

Um einen solchen Normalformensatz zu finden, könnte man die Konstruktion des Simplicialkomplexes K , wie in [Bri91] beschrieben, auf beliebige nichtsphärische nicht-winkel-ausgeartete Dreiecke von Gruppen übertragen.

Wenn G der Colimes eines solchen Dreiecks von Gruppen ist, dann könnte man, für jedes $g \in G$, die eindeutig bestimmte Geodäte betrachten, die einen Punkt im Dreieck $|\bar{\delta}|$, beispielsweise $|1 \cdot X|$, mit einem Punkt im Dreieck $g \cdot |\bar{\delta}|$, beispielsweise $g \cdot |1 \cdot X| = |g \cdot X|$, verbindet. Schließlich könnte man die Geodäte in eine Galerie übersetzen und aus der Galerie eventuell eine Normalform ableiten.

- **Schwache Nichtsphärizität**

Chermak führt in [Che95] den Begriff der „schwachen Nichtsphärizität“ ein und verallgemeinert Satz 2.9 auf schwach nichtsphärische Dreiecke von Gruppen.

Ausblick

Man könnte nun untersuchen, inwiefern sich auch die anderen Eigenschaften auf schwach nichtsphärische Dreiecke von Gruppen übertragen lassen.

- **Klassen bestimmter Dreiecke von Gruppen**

Obwohl gerade die sphärischen Dreiecke schwer zugänglich sind, gibt es Erfolge bei der Untersuchung von Klassen bestimmter Dreiecke von Gruppen. Dazu zählen z. B. die Arbeiten [gR06] über verallgemeinerte Tetraedergruppen und [All10] über Dreiecke von Baumslag-Solitar-Gruppen. Schließlich ist in diesem Zusammenhang auch die Diplomarbeit [Bre04] von Dirk Brendel zu nennen, in der Beispiele von Dreiecken nilpotenter Gruppen studiert werden.

ERKLÄRUNG

Im Sinne von § 18 Absatz 6 der Ordnung der Johann Wolfgang Goethe-Universität für die Diplomprüfung in Mathematik vom 6. Juli 1992 erkläre ich hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Frankfurt am Main
Januar 2011

Johannes Cuno

Erklärung

LITERATURVERZEICHNIS

- [All10] Daniel Allcock, *Triangles of Baumslag-Solitar groups*, submitted, 2010.
- [Beh75] Helmut Behr, *Explizite Präsentation von Chevalleygruppen über \mathbb{Z}* , Math. Z. **141** (1975), 235–241.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bre04] Dirk Brendel, *Nichtsphärische und sphärische Dreiecke nilpotenter Gruppen*, Diploma thesis, Goethe-Universität Frankfurt, 2004.
- [Bri91] Martin R. Bridson, *Geodesics and curvature in metric simplicial complexes*, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 373–463.
- [CgRR08] Thorsten Camps, Volkmar große Rebel, and Gerhard Rosenberger, *Einführung in die kombinatorische und die geometrische Gruppentheorie*, Berliner Studienreihe zur Mathematik [Berlin Study Series on Mathematics], vol. 19, Heldermann Verlag, Lemgo, 2008.
- [Che95] Andrew Chermak, *Triangles of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 11, 4533–4558.

Literaturverzeichnis

- [ERST00] Martin Edjvet, Gerhard Rosenberger, Michael Stille, and Richard M. Thomas, *On certain finite generalized tetrahedron groups*, Computational and geometric aspects of modern algebra (Edinburgh, 1998), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 275, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, pp. 54–65.
- [gR06] Volkmar große Rebel, *Die Tits-Alternative für verallgemeinerte Tetraedergruppen*, Ph.D. thesis, Universität Dortmund, 2006.
- [HK06] James Howie and Natalia Kopteva, *The Tits alternative for generalized tetrahedron groups*, J. Group Theory **9** (2006), no. 2, 173–189.
- [KW08] Natalia Kopteva and Gerald Williams, *The Tits alternative for non-spherical Pride groups*, Bull. Lond. Math. Soc. **40** (2008), no. 1, 57–64.
- [Lor95] Steffen Lorenz, *Freie Untergruppen in Dreiecken von Gruppen*, Diploma thesis, Goethe-Universität Frankfurt, 1995.
- [LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.
- [Mun84] James R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [Rot95] Joseph J. Rotman, *An introduction to the theory of groups*, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 148, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Ser80] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980, Translated from the French by John Stillwell.
- [Sta91] John R. Stallings, *Non-positively curved triangles of groups*, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 491–503.
- [Tit72] Jacques Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra **20** (1972), 250–270.

INDEX

Beispiele

Δ_1	5
Δ_2	15
Δ_3	44
$\Delta_4(k, l, m)$	80
$\Delta_5(\mathcal{P}_G)$	89
Δ_6	94
Δ_7	95
Δ_8	97

A

auflösbare Gruppe	85
-------------------------	----

B

Block	48
gleich benachbart	49
verschieden benachbart	49

C

Charakteristik	49 f.
Colimes	1, 8, 14

D

Diagramm von Gruppen	1
Dreieck von Gruppen	12
euklidisch	21
hyperbolisch	21
nicht-ecken-ausgeartet	91
nicht-kanten-ausgeartet	14, 91
nicht-winkel-ausgeartet	91
nichtausgeartet	14, 91
realisierbar	38
sphärisch	21

E

ε -speziell	50
Eckengruppe	12

F

Farbwechsel	29, 58
genügend	29, 60
Freies Produkt mit Amalgam	9
Freiheitssatz	21

Index

Fundamentalebene 11	
G	
Galerie 82	
geometrischer Link 105 f.	
Gersten-Stallings-Winkel 19, 47	
Variante 47	
Gewichtslemma 50	
Gruppenoperation 7, 11, 84	
H	
HNN-Erweiterung 15	
I	
Insel 28	
intrinsische Pseudometrik 104, 108	
K	
Kantengruppe 12	
Krümmung 21	
kritische Γ -Ecke 76	
L	
Linkbedingung 108	
$Lk(x, K)$ 106	
$Lk(x, \bar{\sigma})$ 105	
M	
m -Kette 104	
induzierter Weg 104	
Länge 104	
lokal geodätisch 110	
Meer 28	
	N
	Nahtstelle 76
	Normalformensatz 10, 43, 137
	P
	Ping-Pong-Argument 7
	PL-Weg 104
	Q
	Quasischeibe 58
	R
	Richtung 105
	S
	schwache Nichtsphärität 137
	schwache Topologie 102, 105
	$Sk(x, K)$ 108
	$Sk(x, \bar{\sigma})$ 105
	$SL_2(\mathbb{Z})$ 5
	Stabilisator 11
	Standardbaum 11
	T
	Thompsons Gruppe \mathfrak{F} 93
	Tits-Alternative 88
	U
	Universalitätsbedingung 1
	V
	van-Kampen-Diagramm 24
	Randwort 26

Index

Relatorzelle.....	26
Verträglichkeitsbedingung.....	1
virtuell auflösbare Gruppe.....	85
virtuell polyzyklische Gruppe	124
VTG.....	89
Tetraederpräsentierung.....	89

Z

Zweizellengruppe.....	12
-----------------------	----