

**Ein verallgemeinerter Plastizitätsalgorithmus  
zur numerischen Behandlung von elasto-plastischen  
Materialmodellen unter großen Deformationen**  
mit Anwendungen für metallische Werkstoffe  
und biologische Gewebe

**Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Informatik und Mathematik  
der Johann Wolfgang Goethe - Universität  
in Frankfurt am Main

von

**Raphael-Alexander Prohl**

aus Dernbach

Frankfurt, 2015  
D 30

vom Fachbereich Informatik und Mathematik der  
Johann Wolfgang Goethe - Universität als Dissertation angenommen.

Dekan:

**Prof. Dr. Uwe Brinkschulte**

Gutachter:

**Prof. Dr. Gabriel Wittum**

**Prof. Dr. Alfio Grillo**

Datum der Disputation: 29. Januar 2016

# Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der numerischen Behandlung elasto-plastischer Materialmodelle unter großen Deformationen. Elasto-plastisches Materialverhalten zeichnet sich dadurch aus, dass neben den reversiblen (elastischen) Deformationen auch irreversible (plastische) Deformationen betrachtet werden, die einem Evolutionsgesetz folgen. Ein numerischer Algorithmus der Elasto-Plastizität muss daher dieses plastische Evolutionsgesetz zusammen mit den klassischen Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik lösen und geeignet behandeln. Der prominenteste Vertreter eines elasto-plastischen Algorithmus<sup>7</sup> ist der sogenannte Return-Mapping-Algorithmus (RMA). Neben seiner Funktionalität werden allerdings auch die einschränkenden Modellannahmen beleuchtet, auf denen der RMA gründet. Diese beschränkte Anwendungsmöglichkeit motiviert die Entwicklung eines neuen Plastizitätsalgorithmus<sup>7</sup>. Der in dieser Arbeit entwickelte *Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus* (GPA: Generalised Plasticity Algorithm) führt eine zusätzliche Linearisierung bezüglich der plastischen Variable ein, in der das plastische Evolutionsgesetz formuliert ist. In der vorliegenden Arbeit ist diese Variable durch den plastischen Deformationstensor gegeben, der die Inverse des plastischen rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors beschreibt. Somit erlaubt der GPA eine Behandlung von allgemeineren und komplexeren elasto-plastischen Modellen als der RMA.

Anhand von bekannten Benchmark-Problemen werden die beiden Algorithmen in dieser Arbeit validiert und verglichen. Ein numerischer Test zur Poroplastizität unter großen Deformationen dient schließlich als Beleg dafür, dass der GPA auf Modelle anwendbar ist, die durch komplexes elasto-plastisches Materialverhalten charakterisiert sind und für die der RMA in seiner klassischen Form nicht als Lösungsstrategie gewählt werden kann.

Neben der Entwicklung des Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus<sup>7</sup> hat diese Arbeit das Ziel industrielle Anwendungen effizient zu lösen. Dazu wird für ein Problem der linearen Elastizität der effiziente Einsatz des Mehrgitterlösers bis zu einer viertel Million Prozessoren gezeigt und es werden elasto-plastische Rechnungen für zwei industrielle Beispiele mit einer anspruchsvollen Geometrie durchgeführt.

# Danksagung

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis mich am Anfang bei einigen Personen zu bedanken, die maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Zuerst möchte ich meinem Betreuer Prof. Dr. Gabriel Wittum für die Überlassung des Themas, die finanzielle Unterstützung und das stetige Vertrauen in mich und in diese Arbeit danken. Ein ganz besonderer Dank gilt Prof. Dr. Alfio Grillo, mit dem ich eng zusammengearbeitet habe. Die zahlreichen Gespräche und Diskussionen zu Themen dieser Arbeit waren stets sehr bereichernd für mich. Er erleichterte mir dadurch das Verständnis der Theorie der Elasto-Plastizität in erheblichem Maße. Meinen Kollegen des Goethe-Center for Scientific Computing der Universität Frankfurt danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die gute Zusammenarbeit. Besonders möchte ich mich bei Dr. Arne Nägel, Dr. Sebastian Reiter, Martin Rupp und Dr. Andreas Vogel für viele Diskussionen zu numerischen Themen und zur programmtechnischen Umsetzung der Plastizitätsalgorithmen in der Simulationssoftware UG 4 bedanken. Dr. Andreas Vogel und Dr. Christoph Weiler danke ich für die Durchsicht dieser Arbeit. Meiner Familie, insbesondere meiner Frau Rabea, danke ich von ganzem Herzen dafür, dass sie mir während meiner ganzen Promotionszeit eine so starke Stütze waren und sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Einführung in die Kontinuumsmechanik</b>	<b>4</b>
1.1 Notation . . . . .	4
1.1.1 Kontinuumsmechanische Notation . . . . .	4
1.1.2 Algebraische Notation . . . . .	6
1.2 Kinematik . . . . .	9
1.2.1 Verzerrungsmaße . . . . .	12
1.3 Erhaltungsgesetze . . . . .	14
1.3.1 Massenerhaltung . . . . .	14
1.3.2 Impulserhaltung und das Prinzip der virtuellen Leistungen . . . . .	16
1.3.3 Transformation zwischen den Konfigurationen . . . . .	19
1.4 Konstituierende Theorie . . . . .	22
1.4.1 Nichtlineare Elastizität . . . . .	26
1.4.2 Lineare Elastizität . . . . .	26
<b>2 Theorie der Elasto-Plastizität</b>	<b>29</b>
2.1 Kinematik . . . . .	30
2.1.1 Verzerrungsmaße . . . . .	32
2.2 Erhaltungsgleichungen, das Prinzip der virtuellen Leistungen und Dissipation	34
2.2.1 Massenerhaltung . . . . .	35
2.2.2 Prinzip der virtuellen Leistungen . . . . .	35
2.2.3 Dissipation . . . . .	37
2.3 Konstituierende Theorie . . . . .	38
2.3.1 Ratenunabhängige Plastizität und Fließkriterien . . . . .	42
2.3.2 Prinzip der maximalen plastischen Dissipation und Fließregeln . . . . .	43
2.3.3 Phänomenologische Fließregeln . . . . .	46
2.4 Vollständige Formulierung des klassischen Problems . . . . .	47
2.5 Vollständige Formulierung des phänomenologischen Problems . . . . .	48
2.6 Infinitesimale Elasto-Plastizität . . . . .	49
<b>3 Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität</b>	<b>53</b>
3.1 Der klassische Plastizitätsalgorithmus: der Return-Mapping-Algorithmus . . . . .	53
3.1.1 Algorithmische Bestimmung des KKT-Multiplikators . . . . .	55
3.1.2 Zeitdiskrete Formulierung . . . . .	58
3.1.3 Technische Beschränkungen des Return-Mapping-Algorithmus' . . . . .	59
3.2 Der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus . . . . .	59
3.2.1 Zeitdiskrete Formulierung . . . . .	60

3.2.2	Erste Stufe des GPA: Linearisierung bezüglich des plastischen Deformationstensors $\mathbf{B}_p$ . . . . .	60
3.3	Linearisierung bezüglich der Bewegungsvariablen $\chi_n$ . . . . .	62
3.3.1	Linearisierungsprozess im RMA . . . . .	62
3.3.2	Zweite Stufe des GPA: Linearisierung bezüglich $\chi_n$ . . . . .	64
3.4	Zeit-Raum-diskrete-Formulierung . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Numerische Tests zur Elasto-Plastizität</b>	<b>68</b>
4.1	Validierung der Plastizitätsalgorithmen anhand von klassischen Benchmark-Problemen . . . . .	68
4.1.1	Schub-Kompressionstest . . . . .	68
4.1.2	Necking-Problem . . . . .	75
4.2	Löser-Performance auf massiv-parallelen Systemen . . . . .	83
4.3	Anwendungsbeispiele mit komplexer Geometrie . . . . .	87
4.3.1	Pleuelstange aus Gusseisen . . . . .	87
4.3.2	Bauteil einer Vorderwagenstruktur . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Theorie der Poroplastizität</b>	<b>93</b>
5.1	Kinematik von biphasischen Mischungen . . . . .	93
5.2	Dynamiken von biphasischen Mischungen . . . . .	95
5.3	Konstituierender Rahmen und Dissipation unter Berücksichtigung der inneren Umstrukturierung . . . . .	96
5.3.1	Dissipationsungleichung . . . . .	97
5.3.2	Darcys Gesetz und die finale Fassung der Impulsbilanz . . . . .	98
5.4	Fließregel für die Adaption der inneren Struktur . . . . .	99
5.5	Zusammenfassung des Modells und numerische Methoden . . . . .	101
5.5.1	Numerische Behandlung des poroplastischen Problems . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Numerische Tests zur Poroplastizität</b>	<b>104</b>
<b>7</b>	<b>Implementierung</b>	<b>109</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>115</b>
A.1	Differentialgeometrie . . . . .	115
A.2	Hilfsmittel aus der Vektoranalysis . . . . .	115
A.3	Mehrschicht-Kinematik . . . . .	116
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>121</b>

# Einleitung

Die Modellierung und Simulation von inelastischen Phänomenen, wie beispielsweise elasto-plastischem Materialverhalten, bildet einen wichtigen Zweig der Mechanik und des Wissenschaftlichen Rechnens. Neben experimentellen und theoretischen Aspekten müssen vor allem mathematische und numerische Aspekte berücksichtigt werden, um wohl definierte mathematische Modelle sowie geeignete numerische Algorithmen und effiziente Löser zu entwickeln. Viele Autoren haben zu der Theorie der Elasto-Plastizität beigetragen, siehe z.B. [77][80][83] und die Referenzen darin. Ebenso viele Arbeiten beschäftigen sich mit der Entwicklung numerischer Methoden in diesem Bereich, siehe z.B. [2][4][56][98][99][120][123]. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst der klassische numerische Algorithmus der Elasto-Plastizität vorgestellt. Es wird aufgezeigt, welche Modellannahmen getroffen werden müssen, damit dieser Algorithmus angewendet werden kann. Dadurch wird ein neuer Plastizitätsalgorithmus motiviert, der einige dieser Beschränkungen aufhebt und welcher somit auf allgemeinere Plastizitätsmodelle anwendbar ist. Diese verallgemeinerte Methode wird in der vorliegenden Arbeit entwickelt.

Die bekannteste numerische Methode zur Lösung von elasto-plastischen Problemstellungen ist der Return-Mapping-Algorithmus (RMA). In seiner klassischen Form ist der RMA ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren, das unter der Annahme von assoziativem plastischen Fließen und isotropem elasto-plastischen Materialverhalten aufgesetzt wird [122][137]. Der RMA ist ein sehr effizienter Algorithmus, der in Forschung und Industrie weit verbreitet ist. Allerdings ist er in seiner klassischen Form auf spezielle Materialmodelle beschränkt (siehe zum Beispiel die oben genannten Modellannahmen).

Viele moderne Lösungsalgorithmen nutzen aus, dass sich das elasto-plastische Problem in ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen umformulieren lässt, so dass ein System von Optimalitätsbedingungen, den sogenannten Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingungen, aufgestellt werden kann. Somit lassen sich auch Algorithmen auf diese Problemklasse anwenden, die ihren Ursprung in der Optimierungstheorie haben. Beispiele für solche Vertreter sind Varianten von Aktive-Mengen-Methoden, von Innere-Punkte-Methoden oder von SQP (Sequential Quadratic Programming)-Verfahren [55][69][112][136]. In [136] wird beispielsweise ein SQP-Algorithmus für das duale Problem der infinitesimalen perfekten Plastizität vorgestellt (die duale Formulierung ist die Formulierung, in der neben den Verschiebungen die Spannungen die gesuchten Variablen sind), welcher entlang einer Sequenz von linearisierten quadratischen Teilproblemen iteriert. Diese Teilprobleme bestehen dabei aus der linearisierten Fließregel und den linearisierten KKT-Bedingungen.

Im Rahmen dieser Doktorarbeit wird ein neuer Plastizitätsalgorithmus entwickelt, der *Verallgemeinerter Plastizitätsalgorithmus* (GPA: Generalised Plasticity Algorithm) ge-

nannt wird. Der GPA ist durch zwei Fragestellungen motiviert. Die erste Frage, die sich stellt, ist, wie einige der technischen Beschränkungen und Modellannahmen des klassischen RMA behoben werden können. Um eine flexiblere Wahl einer Verzerrungsenergie-dichte und einer komplexeren Fließregel zu ermöglichen, wird daher im GPA eine zusätzliche Linearisierung bezüglich des plastischen Deformationstensors eingeführt (innerhalb des klassischen RMA werden die Modellgleichungen lediglich bezüglich der Deformation linearisiert). Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass der GPA nicht wie die SQP-Methode aus [136] durch eine Sequenz von linearisierten Teilproblemen charakterisiert ist. Vielmehr wird das zugrundeliegende KKT-System bezüglich der Deformation und des plastischen Deformationstensors im voll nichtlinearen elasto-plastischen Regime linearisiert. Die zusätzliche Linearisierung ermöglicht somit die Anwendung des GPA auf anspruchsvolle Materialmodelle wie beispielsweise eines, welches die Adaption eines biologisch weichen Gewebes unter Berücksichtigung der inneren plastischen Strukturänderung beschreibt. Die zweite Fragestellung ist, wie ein effizienter numerischer Algorithmus entworfen werden muss, der auf der recht jungen Theorie der Mehrschicht-Kinematik [17][26] aufbaut. In der Tat ist der GPA von dieser Theorie inspiriert worden, in der die Bewegung und die plastischen Verzerrungen als ‘gleichwertige’ kinematische Deskriptoren betrachtet werden, im Gegensatz zu der klassischen Sichtweise, die das elasto-plastische Problem in einen kinematischen Deskriptor (Bewegung) und eine Menge von internen Variablen (plastischer Verzerrungstensor, Verhärtungsparameter) aufteilt. Diese ‘gleichwertige’ Behandlung der Variablen erfordert eine Umformulierung des Modells und führt Nicht-Standardkräfte in das Prinzip der virtuellen Leistungen ein. Insbesondere wird das Evolutionsgesetz für die plastischen Verzerrungen nicht mehr punktweise, wie in der klassischen Plastizitätstheorie, formuliert. Somit ist eine Anpassung und Weiterentwicklung der numerischen Methoden für inelastische Prozesse hin zu allgemeineren Lösungsstrategien notwendig, die auch neue Diskretisierungsschemata und Linearisierungsalgorithmen umfassen. Der in dieser Arbeit vorgestellte GPA ist ein erster Schritt in diese Richtung.

Der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus stellt nach bestem Wissen des Autors einen neuen Ansatz zur Lösung von komplexen elasto-plastischen Modellen unter großen Deformationen dar. Allerdings sei an dieser Stelle auf zwei Arbeiten hingewiesen, in denen ähnliche Ideen zur Entwicklung eines Plastizitätsalgorithmus’ verfolgt werden. Eve und Reddy stellen in [35] einen Algorithmus vor, der im Gegensatz zum GPA das Evolutionsgesetz der plastischen Verzerrungen bereits in einer schwachen Formulierung berücksichtigt. Der wesentliche Unterschied dieser Methode zum GPA ist allerdings, dass sie der Prädiktor-Korrektor-Struktur folgt, die auch dem klassischen Plastizitätsalgorithmus, dem RMA, zugrundeliegt. Der GPA hingegen ist ein reines Linearisierungsschema in zwei Unbekannten: der Bewegung und dem plastischen Deformationstensor. Nichtsdestotrotz bringt die Methode von Eve und Reddy ebenfalls wie der GPA einen Ansatz mit sich, um die Variablen in gewisser Weise ‘gleichwertig’ zu behandeln. Als zweites sei die Arbeit von Seitz, Popp und Wall [118] genannt, die ebenfalls eine zusätzliche Linearisierung bezüglich einer plastischen Variablen durchführen. Sie wählen allerdings den plastischen Geschwindigkeitsgradienten als zusätzliche Variable, die unter Zuhilfenahme einer nicht-linearen Komplementaritätsfunktion in einer semi-glatte Newton-Methode auf Elementebene auskondensiert wird. Im GPA hingegen wird keine Komplementaritätsfunktion zur Beschreibung der plastischen Entwicklung benutzt. Vielmehr wird neben der Impulserhal-

tung das plastische Evolutionsgesetz, die sogenannte Fließregel, bezüglich der führenden plastischen Variablen (dem plastischen Deformationstensor) linearisiert.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt unterteilt. Kapitel 1 gibt einen Überblick über die Theorie der Kontinuumsmechanik. Es wird die verwendete Notation erläutert und die Gleichungen der Elastizität aus grundlegenden Prinzipien und Axiomen hergeleitet. Dabei wird dem allgemeinen nichtlinearen Rahmen, der Theorie für große Deformationen, gefolgt. In Abschnitt 1.4.2 hingegen werden auch die Gleichungen der linearen Elastizität kurz erläutert. Kapitel 2 stellt die Theorie der Elasto-Plastizität vor, die auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten nach Bilby [12], Lee [72] und Kröner [70] basiert. Es wird der konstituierende Rahmen und insbesondere die für die Plastizitätstheorie zentrale Dissipationsungleichung vorgestellt. Analog zu Abschnitt 1.4.2 wird in Abschnitt 2.6 auf die vereinfachten Modellgleichungen unter Annahme von kleinen Deformationen eingegangen. Der Kern dieser Arbeit stellt Kapitel 3 dar, welches sich der numerischen Behandlung der elasto-plastischen Modelle für große Deformationen widmet. Zunächst wird der klassische Plastizitätsalgorithmus, der Return-Mapping-Algorithmus, in Abschnitt 3.1 vorgestellt. Abschnitt 3.2 widmet sich dann der Beschreibung der Funktionsweise des Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus' (GPA). In Kapitel 4 werden einige numerische Tests zur Validierung der beiden Plastizitätsalgorithmen vorgestellt. Dass der GPA auf eine größere Klasse von elasto-plastischen Modellen anwendbar ist, wird anhand eines Beispiels der Poroplastizität gezeigt. Dazu wird in Kapitel 5 zunächst die Theorie der porösen Medien unter Berücksichtigung von plastischem Verhalten eingeführt. Schließlich wird in Kapitel 6 ein numerischer Test zur Poroplastizität präsentiert: anhand eines Kompressionstests wird die Adaption eines biologisch weichen Gewebes untersucht. Kapitel 7 widmet sich der Implementierung der elasto-plastischen Algorithmen in der Simulationssoftware UG 4 [133]. Schließlich werden in Kapitel 8 die Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst und diskutiert sowie sinnvolle Weiterentwicklungen des GPA vorgeschlagen.

# 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik, als Teilgebiet der technischen Mechanik, untersucht die Bewegung deformierbarer Körper in Folge von äußeren Belastungen. Neben der Festkörpermechanik fallen auch das Strömungsverhalten von Fluiden und Gasen in das Gebiet der Kontinuumsmechanik. Diese Arbeit konzentriert sich allerdings auf die Festkörpermechanik, die *Strukturmechanik*.

Dieses Kapitel definiert die kontinuumsmechanischen Notationen und Formalismen, die in dieser Arbeit verwendet werden. Es werden grundlegende Begriffe und fundamentale Konzepte der Kontinuumsmechanik präsentiert. Die Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Körpern im rein mechanischen Rahmen werden erläutert und grundlegende Prinzipien der konstituierenden Theorie eingeführt. Das Kapitel schließt mit der Vorstellung der konstituierenden Gesetze für elastische Materialien unter großen (*nichtlineare Elastizität*) beziehungsweise kleinen Deformationen (*lineare Elastizität*).

Der Formalismus folgt im Wesentlichen den Arbeiten von Truesdell & Noll [129], Marsden & Hughes [79] und Epstein [30]. Für weitere, detaillierte kontinuumsmechanische und mathematische Ausführungen wird auf die klassische Literatur verwiesen [19][50][78][79][129].

## 1.1. Notation

### 1.1.1. Kontinuumsmechanische Notation

Die Kontinuumsmechanik befasst sich mit differenzierbaren Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{B}$ , sogenannten *Körpern*, im drei-dimensionalen euklidischen Raum  $\mathcal{S}$ , die als zusammenhängende Menge ihrer (unendlich vielen) Massepunkte aufgefasst werden. Zusammenhängend meint hier, dass  $\mathcal{B}$  nicht in zwei disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen aufgeteilt werden kann. Die Elemente  $X \in \mathcal{B}$  werden als *Partikel* bezeichnet. Nach Festlegung eines Koordinatensystems in  $\mathcal{B}$  können die Partikel durch ein Tripel aus reellen Zahlen

$$\mathbf{X} \equiv \{X^A\}_{A=1}^3 \quad (1.1)$$

identifiziert werden, welche *materielle Koordinaten* genannt werden. Das heißt, die geometrischen Orte der Partikel  $X \in \mathcal{B}$  des undeformierten Körpers in seiner Ausgangslage werden in dieser Arbeit mit  $\mathbf{X}$  bezeichnet.

Der geometrische Ort  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , der durch ein Partikel  $X$  während einer Deformation des Körpers eingenommen wird, wird erst durch den Begriff der Konfiguration  $\mathcal{C}$  eines

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Körpers  $\mathcal{B}$  verständlich [129]. Unter einer Konfiguration  $\mathcal{C}$  eines Körpers  $\mathcal{B}$  wird ein  $C^1$ -Homöomorphismus von  $\mathcal{B}$  in einen Teilraum von  $\mathcal{S}$  verstanden, das heißt

$$\mathbf{x} = \mathcal{C}(X), \quad X = \mathcal{C}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Mithilfe eines Koordinatensystems des euklidischen Raums  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathbf{x} \equiv \{x^a\}_{a=1}^3 \text{ für } \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \quad (1.3)$$

kann ein Partikel  $X$  damit auch über die sogenannten **räumlichen Koordinaten**  $\{x^a\}_{a=1}^3$  beschrieben werden. Physikalische Betrachtungen werden also nicht auf einem Körper direkt, sondern nur in einer bestimmten Konfiguration des Körpers vorgenommen. Unter einer **Referenzkonfiguration**  $\mathcal{C}_R$  wird diejenige Konfiguration verstanden, die durch Einführung eines Koordinatensystems auf der Körpermannigfaltigkeit  $\mathcal{B}$  entsteht. Insbesondere wird die Bewegungsabbildung bezüglich dieser Referenzkonfiguration definiert. Einige Bemerkungen zu einem möglicherweise missverständlichen Gebrauch des Begriffs der Referenzkonfiguration finden sich in [26][30][33].

Wesentlich in der Kontinuumsmechanik ist die Vorstellung einer kontinuierlich verteilten Menge von Massepunkten, deren Verhalten durch eine Dichtefunktion wie die Massendichte beschrieben werden. Ein Körper wird also als ein Maßraum angenommen, dessen nicht-negatives skalares Maß die Massenverteilung ist. Dies motiviert die Bezeichnung *physikalische Massekontinua* für solche Körper.

Damit ist es nun möglich einige Begriffe aus der Differentialgeometrie einzuführen, die für das Verständnis der Kontinuumsmechanik unerlässlich sind.  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  und  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  bezeichne die Tangentialräume von  $\mathcal{B}$  respektive  $\mathcal{S}$  an den Punkten  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{x}$ . Unter dem Tangentialraum  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  wird ein Vektorraum verstanden, der eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $\mathcal{B}$  am Punkt  $\mathbf{X}$  linear approximiert.

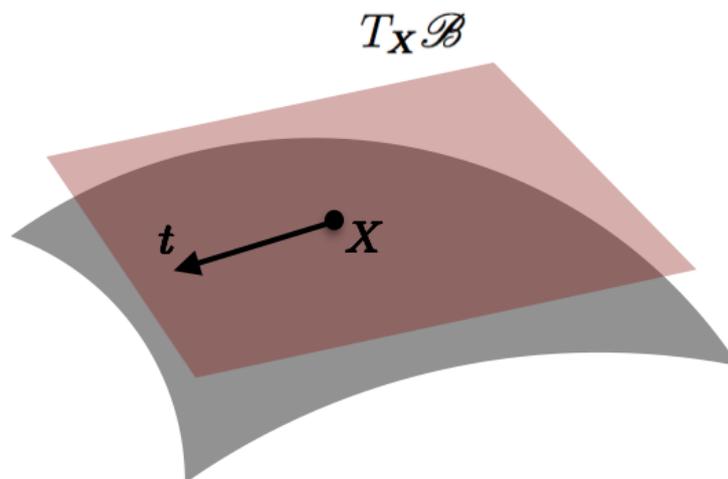


Abbildung 1.1.: Tangentialraum  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  am Punkt  $\mathbf{X}$  (rot). In grau ist ein Ausschnitt des Randes der Körpermannigfaltigkeit  $\mathcal{B}$  dargestellt.

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Dieser Vektorraum wird durch sogenannte Tangentialvektoren aufgespannt. Ein Vektor  $\mathbf{t}$  heißt Tangentialvektor an  $\mathcal{B}$  im Punkt  $\mathbf{X}$ , wenn es eine  $C^\infty$ -differenzierbare Kurve  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt mit  $\alpha(0) = \mathbf{X}$  und  $\dot{\alpha}(0) = \mathbf{t}$ , siehe Abbildung 1.1. Für zwei vektorielle Basen  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^3 \subset T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  und  $\{\mathbf{E}_A\}_{A=1}^3 \subset T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  der Tangentialräume  $T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  und  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  sowie Vektoren  $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  und  $\mathbf{V} \in T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  gilt, dass  $\mathbf{v} = v^a \mathbf{e}_a$  und  $\mathbf{V} = V^A \mathbf{E}_A$ . In dieser Arbeit wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, sofern nicht anders angemerkt. Die dualen Räume  $T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$  und  $T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{S}$  sind die Kotangentialräume. Unter dem dualen Raum  $T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$  wird ein Vektorraum aller linearer Abbildungen von  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  in den Raum der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  verstanden. Die Elemente der Dualräume werden in der vorliegenden Arbeit Kovektoren genannt. Bezüglich der Kovektorbasen  $\{\mathbf{e}^a\}_{a=1}^3 \subset T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{S}$  und  $\{\mathbf{E}^A\}_{A=1}^3 \subset T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$  gilt  $\boldsymbol{\beta} = \beta_a \mathbf{e}^a$  und  $\boldsymbol{\Phi} = \Phi_A \mathbf{E}^A$  für alle  $\boldsymbol{\beta} \in T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{S}$  und für alle  $\boldsymbol{\Phi} \in T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$ . Die Vereinigungen  $T\mathcal{B} = \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathcal{B}} T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  und  $T\mathcal{S} = \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$  werden Tangentialbündel genannt. Die Kotangentialbündel  $T^*\mathcal{B}$  und  $T^*\mathcal{S}$  sind die Vereinigungen aller  $T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B}$  und  $T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{S}$  mit  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  und  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ . Der Raum  $T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}$  wird gelegentlich auch als *Körperelement* am Punkt  $\mathbf{X}$  bezeichnet [26].

In dieser Arbeit werden Größen der Körpermannigfaltigkeit beziehungsweise aus der Referenzkonfiguration mit großen und Größen aus der deformierten, aktuellen Konfiguration mit kleinen Buchstaben gekennzeichnet. Tensoren werden fett geschrieben.

### 1.1.2. Algebraische Notation

Aus Gründen der Allgemeinheit wird in dieser Arbeit der kovariante Tensorformalismus verwendet. Nach der Einsteinschen Notation werden die kovarianten Komponenten mit tiefgestellten und die kontravarianten mit hochgestellten Indizes bezeichnet [79]. Dieser allgemeine Ansatz erlaubt es, die Gleichungen unabhängig von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems zu formulieren.

#### Tensoralgebra

Seien  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  zwei Vektorräume. Dann beschreibt  $\text{Lin}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  den Raum aller Tensoren, die von  $\mathcal{M}$  nach  $\mathcal{N}$  abbilden. Außerdem bezeichnen  $\text{Sym}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  und  $\text{Skew}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  die Teilräume von  $\text{Lin}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ , die aus allen symmetrischen und schief-symmetrischen Tensoren bestehen. Es gilt  $\text{Lin}(\mathcal{M}; \mathcal{N}) = \text{Sym}(\mathcal{M}; \mathcal{N}) \oplus \text{Skew}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$ . Demnach ist die Zerlegung  $\mathbf{T} = \text{sym}(\mathbf{T}) + \text{asym}(\mathbf{T})$  für alle  $\mathbf{T} \in \text{Lin}(\mathcal{M}; \mathcal{N})$  in ihren symmetrischen,  $\text{sym}(\mathbf{T}) := \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)$ , und schiefsymmetrischen oder anti-symmetrischen Anteil,  $\text{asym}(\mathbf{T}) := \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)$ , eindeutig. Darin bezeichnet  $\mathbf{T}^T$  den zu  $\mathbf{T}$  transponierten Tensor.  $\text{Lin}(\mathcal{M}; \mathcal{N})^+$  sei die Menge der Tensoren  $\mathbf{T}$ , für die  $\det(\mathbf{T}) > 0$  gilt. Die Determinante eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{T}$  sei verstanden als die Determinante der zu  $\mathbf{T}$  assoziierten Matrix.  $\text{Sym}_>$  beschreibe die Menge der symmetrischen, positiv definiten Matrizen.  $\text{Orth}$  sei die Menge der orthogonalen Tensoren und  $\text{Orth}^+$  die Menge der Rotationen.

Die Tensoren  $\mathbf{g} \in \text{Sym}(T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}; T_{\mathbf{x}}\mathcal{S})$  und  $\mathbf{G} \in \text{Sym}(T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}; T_{\mathbf{X}}\mathcal{B})$  seien der räumliche und der materielle metrische Tensor. Es gilt  $\mathbf{g} = g_{ab} \mathbf{e}^a \otimes \mathbf{e}^b$  und  $\mathbf{G} = G_{AB} \mathbf{E}^A \otimes \mathbf{E}^B$ . Eine Erläuterung des Begriffs des metrischen Tensors findet sich im Anhang A.1.

Die Skalarprodukte  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  und  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$  seien für alle Paare von Tangentenvektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

und  $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in T_{\mathbf{x}}\mathcal{B}$  definiert als  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^a g_{ab} v^b$  beziehungsweise  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = U^A G_{AB} V^B$ .

**Identitätstensoren** Mit dem Kronecker-Delta  $\delta$

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (1.4)$$

lauten die Identitätstensoren zweiter und vierter Stufe

$$\mathbf{I}_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j, \quad (1.5)$$

$$\mathbb{I}_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l. \quad (1.6)$$

Für vierstufige Tensoren existiert außerdem auch eine symmetrische Variante von (1.6),

$$\mathbb{I}_{ijkl}^{sym} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l. \quad (1.7)$$

**Spur und Deviator** Unter der Spur (tr stehe hier für ‘trace’) eines zweistufigen Tensors  $\mathbf{T}$  wird der skalare Wert

$$\text{tr}(\mathbf{T}) := T^i_i \quad (1.8)$$

verstanden. Damit lässt sich der deviatorische Anteil eines Tensors  $\mathbf{T}$  definieren als,

$$\text{dev}(\mathbf{T}) := \mathbf{T} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad (1.9)$$

wobei  $\mathbf{I}$  der zweistufige Identitätstensor (1.5) ist. Aus (1.9) folgt, dass sich jeder Tensor  $\mathbf{T}$  in seinen *deviatorischen* und *volumetrischen Anteil* zerlegen lässt,

$$\mathbf{T} = \text{dev}(\mathbf{T}) + \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}. \quad (1.10)$$

Zudem wird die Notation für das *dyadische Produkt* und die *Doppelkontraktion* für Tensoren höherer Stufe eingeführt.

**Dyadisches Produkt** Seien  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  im Folgenden Tensoren zweiter Stufe. Dann werden folgende dyadische Produkte definiert,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} := A^{ij} B^{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B} := A^{il} B^{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B} := A^{ik} B^{jl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad (1.13)$$

$$\mathbf{A} \overline{\underline{\otimes}} \mathbf{B} := \frac{1}{2} (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B} + \mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}) = \frac{1}{2} (A^{il} B^{jk} + A^{ik} B^{jl}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l. \quad (1.14)$$

Die hier verwendete Notation orientiert sich an [23] und den darin enthaltenen Referenzen.

**Doppelkontraktion** Für Tensoren höherer Stufe ist zudem die Doppelkontraktion definiert.  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$  seien im Folgenden Tensoren vierter Stufe, siehe z.B. [66],

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} := A^{ij} B_{ij}, \quad (1.15)$$

$$\mathbb{C} : \mathbf{A} := C^{ijkl} A_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (1.16)$$

$$\mathbb{C} : \mathbb{D} := C^{ijmn} D_{mnkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^l. \quad (1.17)$$

Wird in dieser Arbeit das Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe in der Form  $\mathbf{AB}$  dargestellt, ist damit das klassische Matrizenprodukt gemeint, das heißt

$$\mathbf{AB} := A^{ik} B^{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.18)$$

### Tensoranalysis

Die zeitliche Ableitung eines Tensors  $\mathbf{T}$  ist in dieser Arbeit über die Bezeichnung  $\dot{\mathbf{T}}$  beschrieben.

Bezüglich der räumlichen Ableitung werden der Gradient und die Divergenz für skalare ( $\phi$  bzw.  $\Phi$ ) sowie vektor- ( $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{U}$ ) und tensorwertige ( $\mathbf{t}$  bzw.  $\mathbf{T}$ ) Funktionen im Folgenden definiert. Die Groß- und Kleinschreibung der Funktionen trägt hier ihrer Definition in der Referenz- beziehungsweise in der aktuellen Konfiguration Rechnung. Sei  $d$  im Folgenden die Dimension.

**Gradientenoperator**  $\text{Grad}(\cdot)$  bezeichne den *materiellen Gradienten*, das heißt den Gradienten bezüglich der materiellen Koordinate  $\mathbf{X}$ .  $\text{grad}(\cdot)$  bezeichne hingegen den *räumlichen Gradienten*, das heißt den Gradienten bezüglich der räumlichen Koordinate  $\mathbf{x}$ . Damit ergeben sich für die skalaren Funktionen  $\phi$  und  $\Phi$  folgende Definitionen der Gradienten in Komponentenschreibweise

$$\text{grad}(\phi) := \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_{i=1}^d, \quad (1.19)$$

$$\text{Grad}(\Phi) := \left( \frac{\partial \Phi}{\partial X_I} \right)_{I=1}^d. \quad (1.20)$$

Für die vektorwertigen Funktionen lauten die Definitionen der Gradientenoperatoren

$$\text{grad}(\mathbf{u}) := \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^d, \quad (1.21)$$

$$\text{Grad}(\mathbf{U}) := \left( \frac{\partial U_I}{\partial X_J} \right)_{I,J=1}^d. \quad (1.22)$$

Auf die Einführung des Gradienten eines zweistufigen Tensors wird an dieser Stelle verzichtet, da dieser in der vorliegenden Arbeit keine Verwendung findet.

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

**Divergenzoperator** Analog zum Gradienten beschreibt  $\text{Div}(\cdot)$  den Divergenzoperator bezüglich der Referenzkonfiguration. Der Divergenzoperator bezüglich der aktuellen Konfiguration sei mit  $\text{div}(\cdot)$  bezeichnet. Die Divergenz ist für vektor- und tensorwertige Funktionen definiert.

Für die vektorwertigen Funktionen liefern die Definitionen des Divergenzoperators einen skalaren Wert

$$\text{div}(\mathbf{u}) := \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (1.23)$$

$$\text{Div}(\mathbf{U}) := \frac{\partial U_I}{\partial X_I}. \quad (1.24)$$

Für die zweistufigen Tensoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{T}$  ergeben sich folgende Definitionen

$$\text{div}(\mathbf{t}) := \left( \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \right)_{j=1}^d, \quad (1.25)$$

$$\text{Div}(\mathbf{T}) := \left( \frac{\partial T_{IJ}}{\partial X_J} \right)_{J=1}^d. \quad (1.26)$$

## 1.2. Kinematik

Die Kinematik ist der Zweig der klassischen Mechanik, der sich mit der Beschreibung von Punkten und Körpern im Raum beschäftigt, ohne dabei die Ursachen der Bewegung (die Kräfte) in die Betrachtung mit einzubeziehen.

Die **Bewegung** eines Körpers wird als eine zeitabhängige Familie von Konfigurationen beschrieben. Die aktuelle Konfiguration des Körpers  $\mathcal{B}$  zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $\mathcal{C}_t(\mathcal{B})$  bezeichnet.

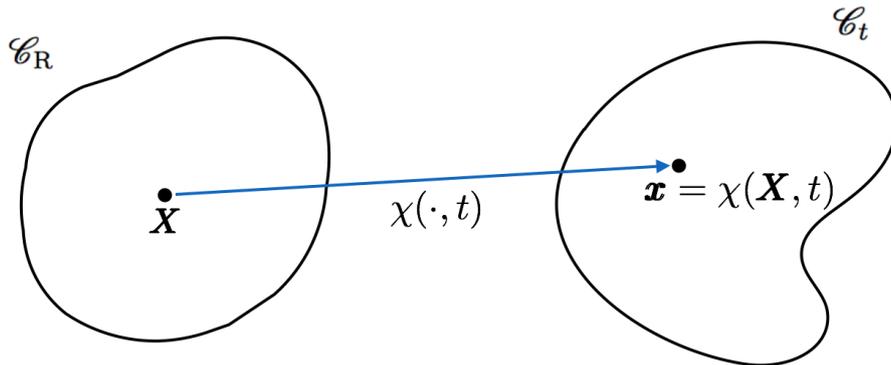


Abbildung 1.2.: Bewegungsabbildung eines Körpers aus der Referenzkonfiguration des Körpers in die aktuelle Konfiguration.

Mithilfe dieser Terminologie ist die Bewegung eine injektive, zeitabhängige  $C^2$ -Abbildung

$$\chi : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S} \quad (1.27)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

über das Zeitintervall  $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ . Für jedes Partikel  $X \in \mathcal{B}$  existiert dabei ein Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , so dass

$$\mathbf{x} = \chi(X, t) \tag{1.28}$$

gilt.  $\mathbf{x}$  beschreibt also den geometrischen Ort, den das Partikel  $X$  nach einer Zeit  $t$  einnimmt, siehe Abbildung 1.2. Die Injektivität von  $\chi$  stellt sicher, dass ein Körper sich nicht selbst durchdringen kann. Für die aktuelle Konfiguration gilt mit der Definition der Bewegungsabbildung (1.27), dass  $\mathcal{C}_t = \chi(\mathcal{B}, t) \subset \mathcal{S}$  ist. Eine verkürzte Notation, die in der Literatur für die Bewegungsabbildung auch üblich ist, ist  $\chi_t(\mathcal{B}) = \chi(\mathcal{B}, t)$ . Diese Notation unterstreicht die Charakterisierung der Bewegungsabbildung als Familie von Konfigurationen.

Es wird unterschieden zwischen der Lagrangeschen (materiellen) und der Eulerschen (räumlichen) Beschreibung der Bewegung  $\chi$  beziehungsweise eines Feldes, das mit der Bewegung assoziiert ist. Erstere beschreibt die Bewegung mittels Größen aus der Referenzkonfiguration und letztere mithilfe von Größen aus der aktuellen Konfiguration. Im Lagrangeschen Formalismus wird der Verlauf eines materiellen Punktes über die Zeit beobachtet. Die Eulersche Sichtweise beschreibt die Feldgröße mittels Raum und Zeit. Unter einem materiellen Punkt (oder *Massepunkt*)  $\mathbf{X}$  wird der geometrische Ort des Partikels  $X$  verstanden, der mit dem Körper  $\mathcal{B}$  verbunden ist. Die Koordinaten der Punkte  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  und  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  werden somit auch **Lagrangesche Koordinaten** beziehungsweise **Eulersche Koordinaten** genannt. Lagrangesche Koordinaten werden vor allem verwendet, um die Form- und Lageänderung deformierbarer Körper unter äußeren Belastungen in einen neuen Gleichgewichtszustand zu beschreiben. Eulersche dagegen zur Beschreibung von Vorgängen, bei denen die momentane Geschwindigkeit eines Teilchens von Interesse ist. Die Eulersche Betrachtungsweise ist für solche Vorgänge vorteilhaft, welche bezüglich des räumlichen Koordinatensystems stationär verlaufen. Das heißt, die Eulersche Betrachtungsweise wird klassischerweise bei strömungsmechanischen Vorgängen herangezogen und die Lagrangesche bei strukturmechanischen [103].

Die Lageänderung eines Massepunktes  $\mathbf{X}$  des Körpers  $\mathcal{B}$  in die aktuelle Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  führt auf die Definition der Verschiebungsabbildung.

**Verschiebung** Mithilfe der Bewegungsabbildung (1.27) wird die Verschiebung des Punktes  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  bezüglich eines Zeitintervalls  $\mathcal{I}$  definiert als

$$\mathbf{u} : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}, \tag{1.29}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, 0) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{S}\mathbf{X}, \tag{1.30}$$

in Komponentenschreibweise  $u^a = \chi^a - \mathbf{S}^a_A X^A$ , wobei sich  $\mathbf{S}$  auf den sogenannten *Shifter* aus [79] bezieht.  $\mathbf{S}$  ist ein orthogonaler Tensor, der Vektoren von  $T\mathcal{B}$  nach  $T\mathcal{S}$  ‘verlagert’, d.h. für ein gegebenes  $\mathbf{Z} \in T\mathcal{B}$  ist  $\mathbf{z} := \mathbf{S}\mathbf{Z} \in T\mathcal{S}$  der zugehörige Vektor in  $T\mathcal{S}$ .

**Geschwindigkeit und Beschleunigung** Weil die Bewegung als eine zeitabhängige Abbildung eingeführt wurde, lassen sich auch Geschwindigkeit und Beschleunigung eines

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Partikels beschreiben. Die Geschwindigkeit des Partikels am Punkt  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  zur Zeit  $t$  wird durch  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ausgedrückt und erfüllt die Gleichung

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t), \quad (1.31)$$

wobei  $\mathbf{V} := \dot{\chi}$  die partielle Ableitung von  $\chi$  nach der Zeit bezeichnet.

Die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  ist die substantielle Ableitung von  $\mathbf{v}$ , das heißt

$$\mathbf{a} := D_t \mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} + \text{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}), \quad (1.32)$$

wobei  $\text{grad}_{\mathbf{v}}(\mathbf{v}) = \mathbf{l}\mathbf{v}$  gilt.  $\mathbf{l} := \text{grad}(\mathbf{v})$  ist darin die räumliche kovariante Ableitung von  $\mathbf{v}$ . Der Begriff der kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes wird in Anhang A.1 kurz erläutert. Unter der substantiellen Ableitung versteht man also eine materielle, zeitliche Ableitung, die die Änderung einer Größe für einen Beobachter beschreibt, der sich mit der Substanz bewegt. Damit fließt auch ein konvektiver Term (der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (1.32)) in die substantielle Ableitung mit ein.

**Deformation und Deformationsgradient** Die Bewegungsabbildung  $\chi : \mathcal{B} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{S}$  über ein Zeitintervall  $\mathcal{I}$  wird **Deformationsabbildung** genannt, wenn  $\det(T\chi) > 0$  für alle  $t \in \mathcal{I}$  gilt.  $T\chi$  beschreibt hier die Tangentialabbildung von  $\chi$ . Die Bezeichnung Deformationsabbildung soll darauf hinweisen, dass Teilmengen mit positivem Volumen wieder in solche mit positivem Volumen abgebildet werden.

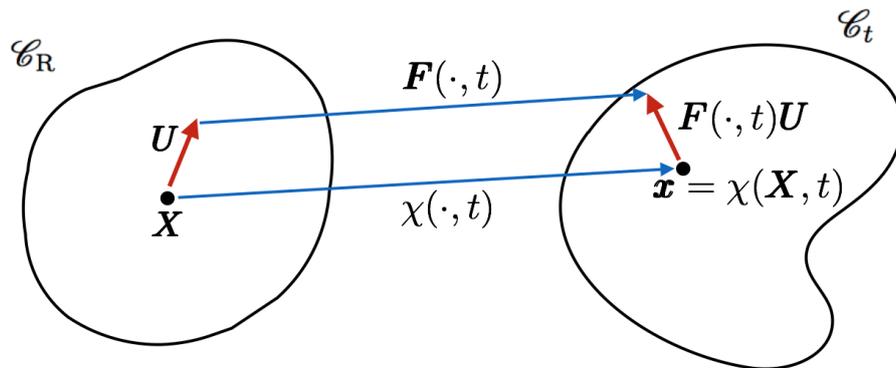


Abbildung 1.3.: Wirkungsweise des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ .

Wie Vektoren unter der Deformationsabbildung  $\chi$  transformiert werden, beschreibt der **Deformationsgradient**. Dieser ist definiert als

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) : T_{\mathbf{X}}\mathcal{B} \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}, \quad (1.33)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := T\chi(\mathbf{X}, t), \quad (1.34)$$

in Komponenten  $F^a_A = \chi^a_{,A}$ . Das heißt der Deformationsgradient ist die Tangentialabbildung von  $\chi(\cdot, t)$  am Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_R$  und stellt eine tensorielle Abbildung des Tangentialraums der Referenzkonfiguration in den Tangentialraum der aktuellen Konfiguration dar,

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

siehe Abbildung 1.3. Das tiefgestellte Komma steht für die Richtungsableitung entlang von  $\mathbf{E}^A$ .  $\mathbf{F}$  bildet also Vektoren aus der Referenzkonfiguration ( $\mathbf{U}$  in Abbildung 1.3) auf Vektoren in der aktuellen Konfiguration ( $\mathbf{F}\mathbf{U}$ ) ab.

Mithilfe der Definition der Verschiebungsabbildung (1.30) kann der Deformationsgradient auch über die Verschiebung beschrieben werden,

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{Grad}(\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)). \quad (1.35)$$

Insbesondere beschreibt die Determinante des Deformationsgradienten,

$$J := \det(\mathbf{F}) > 0, \quad (1.36)$$

die Änderung des Volumens unter der Abbildung  $\chi$ . Nach [38][95] lässt sich damit  $\mathbf{F}$  in seinen volumetrischen Anteil  $J$  und seinen isochoren Anteil  $\overline{\mathbf{F}}$  zerlegen. Es gilt

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \overline{\mathbf{F}}. \quad (1.37)$$

Der Spezialfall  $J = 1$  wird dementsprechend als *isochore (volumenerhaltende) Deformation* bezeichnet.

### 1.2.1. Verzerrungsmaße

Aufgrund von äußeren Belastungen verschieben sich einzelne Massepunkte. Geometrische Deformationen beziehungsweise Verzerrungen eines Massevolumens entstehen. Unter einem Massevolumen wird hier eine zusammenhängende Menge von Massepunkten des Körpers  $\mathcal{B}$  verstanden. Eine *Verzerrung* ist eine Verformung eines Massevolumens aufgrund von Längen- (Dehnungen) und Winkeländerungen (Gleitungen).

Mithilfe des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  können nun verschiedene Verzerrungsmaße als Deformationstensor definiert werden.

**Deformationstensoren** Die Änderung eines Linienelementes unter der Abbildung  $\chi$  verdeutliche nun, welches Maß für die Beschreibung der Deformation ausschlaggebend ist [14]. Seien  $\mathbf{X}, \mathbf{Z} \in \mathcal{B}$  zwei Massepunkte. Dann kann der euklidische Abstand der Bildpunkte aufgrund von

$$\chi(\mathbf{X} + \mathbf{Z}, t) - \chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Z} + o(\mathbf{Z}) \quad (1.38)$$

über

$$\|\chi(\mathbf{X} + \mathbf{Z}, t) - \chi(\mathbf{X}, t)\|^2 = \|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Z}\|^2 + o(\|\mathbf{Z}\|^2) \quad (1.39)$$

$$= \langle \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Z}, \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Z} \rangle + o(\|\mathbf{Z}\|^2) \quad (1.40)$$

$$= \mathbf{Z}^T \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)^T \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \mathbf{Z} + o(\|\mathbf{Z}\|^2) \quad (1.41)$$

beschrieben werden.  $o$  steht hier für das Landau-Symbol *klein-o*. Für die lokale Änderung des Linienelementes ist also die Matrix  $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$  entscheidend. Dies führt nun auf die Definition des *rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors*  $\mathbf{C}$ . Des Weiteren werden an dieser Stelle gleich auch der *linke Cauchy-Greensche Deformationstensor*  $\mathbf{b}$  und der *Green-Lagrangesche Verzerrungstensor*  $\mathbf{E}$  eingeführt. Sie sind durch

1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}, \quad C_{AB} = (F^T)_A{}^a g_{ab} F^b{}_B, \quad (1.42a)$$

$$\mathbf{b} := \mathbf{F} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T, \quad b^{ab} = F^a{}_A (G^{-1})^{AB} (F^T)_B{}^b, \quad (1.42b)$$

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}), \quad E_{AB} = \frac{1}{2} \left( (F^T)_A{}^a g_{ab} F^b{}_B - G_{AB} \right), \quad (1.42c)$$

definiert. Daraus folgt, dass  $\mathbf{C}, \mathbf{E} \in \text{Sym}(T_{\mathbf{X}}\mathcal{B}; T_{\mathbf{X}}^*\mathcal{B})$  sind und  $\mathbf{b} \in \text{Sym}(T_{\mathbf{x}}\mathcal{S}; T_{\mathbf{x}}^*\mathcal{S})$  ist. Der Pullback (oder auch Rücktransport) des metrischen Tensors  $\mathbf{g}$  entlang  $\chi$  definiert also den rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensor und der Pushforward von  $\mathbf{G}$  entlang  $\chi$  den linken Cauchy-Greenschen Deformationstensor  $\mathbf{b}$ , siehe Abbildung 1.4.

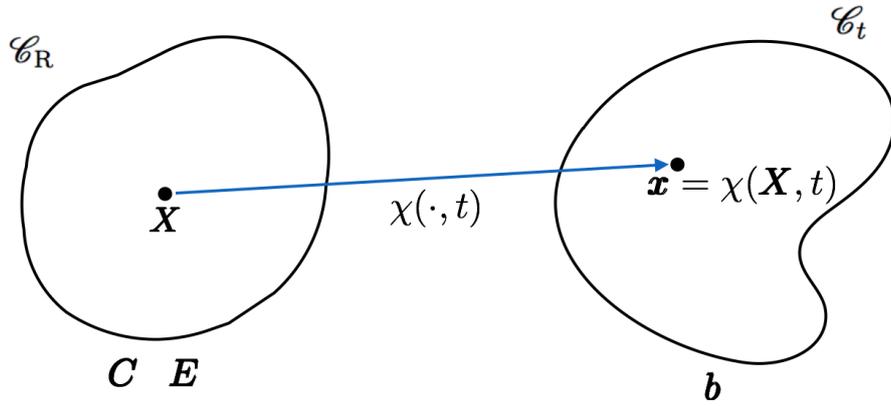


Abbildung 1.4.: Definitionsbereiche der Deformationstensoren  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{b}$ .

$\mathbf{E}$  beschreibt die Abweichung der für die Deformation ausschlaggebenden Matrix  $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  von der Identität. Mittels der Definition des Deformationsgradienten (1.33) und des Verschiebungsvektors (1.30) kann nun  $\mathbf{E}$  auch über den Verschiebungsgradienten ausgedrückt werden,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\text{Grad}(\mathbf{u}))^T + \text{Grad}(\mathbf{u}) + \text{Grad}(\mathbf{u})(\text{Grad}(\mathbf{u}))^T \right). \quad (1.43)$$

**Raten der Deformationstensoren** Im Folgenden werden die Raten des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  und des rechten Cauchy-Greenschen Deformationsgradienten  $\mathbf{C}$  erläutert, die später in der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen und der Dissipationsungleichung Verwendung finden.

Dazu sei der Tensor zweiter Stufe

$$\mathbf{l} := \text{grad}(\mathbf{v}) : T\mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S} \quad (1.44)$$

eingeführt, der die räumliche kovariante Ableitung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  darstellt. Er wird im Folgenden *räumlicher Geschwindigkeitsgradient* genannt. Die Ableitung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  nach der Zeit lautet damit

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad}(\mathbf{V}) = \mathbf{L}\mathbf{F}, \quad (1.45)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

wobei  $\mathbf{L}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$  gilt und  $\text{Grad}(\mathbf{V})$  der *materielle Geschwindigkeitsgradient* ist.

Die zeitliche Ableitung des rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors  $\mathbf{C}$ , (1.42a), lautet

$$\dot{\mathbf{C}} = \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial t} \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = \mathbf{F}^T \mathbf{2D} \mathbf{F}, \quad (1.46)$$

wobei

$$\mathbf{D} := \text{sym}(\mathbf{g}\mathbf{L}) : T\mathcal{S} \rightarrow T^*\mathcal{S} \quad (1.47)$$

den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bezeichnet. Insbesondere ist  $\mathbf{2D} = 2\text{sym}(\mathbf{g}\mathbf{L}) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}}\mathbf{g}$  die Lie-Ableitung des metrischen Tensors  $\mathbf{g}$ , siehe Anhang A.1 zur Erläuterung der Lie-Ableitung. Der anti-symmetrische Anteil des Geschwindigkeitsgradienten  $\mathbf{L}$  wird mit  $\mathbf{W} := \text{asym}(\mathbf{g}\mathbf{L})$  bezeichnet und Drehgeschwindigkeitstensor genannt.

### 1.3. Erhaltungsgesetze

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik in einem abgeschlossenen physikalischen System vorgestellt. Es wird hier von einem isothermen Prozess ausgegangen, d.h. die Deformation des Körpers aus der Referenzkonfiguration erfolge so, dass keine durch Temperaturgradienten bedingten mechanischen Effekte auftreten. Somit wird die Energieerhaltungsgleichung an dieser Stelle vernachlässigt.

Die Basis der Erhaltungsgleichungen liefert das folgende *Reynoldsche Transporttheorem* [108].

**Satz 1.1** (Reynoldsche Transporttheorem). *Sei  $f$  eine reellwertige  $C^1$ -Funktion der Zeit  $t$  und des Ortes  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$  und  $\mathbf{v}$  der räumliche Geschwindigkeitsvektor (1.31). Dann gilt für jedes materielle Volumen  $V_t \subset \mathcal{C}_t$ ,*

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} f \, dv = \int_{V_t} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}(f\mathbf{v}) \right) dv, \quad (1.48)$$

wobei auf die Darstellung der Argumente  $(\mathbf{x}, t)$  hier verzichtet wird.

Den Beweis des Reynoldschen Transporttheorems liefert die Variablentransformation in die Referenzkonfiguration und die anschließende zeitliche Differentiation des Integranden. Die rechte Seite von (1.48) folgt schließlich durch Transformation zurück in die aktuelle Konfiguration, siehe z.B. [79][103].

#### 1.3.1. Massenerhaltung

Eine wichtige Eigenschaft von kontinuumsmechanischen Körpern ist, dass ihre Masse unter Deformationen erhalten bleibt. In dieser Arbeit werden ausschließlich Körper betrachtet, deren Masse stetig verteilt ist.

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Sei  $V_t$  ein beliebiges Massenvolumen der Konfiguration  $\mathcal{C}_t$ . Sei  $\varrho(\mathbf{x}, t)$  eine stetig verteilte, positive Massendichte. Dann ist die  **Masse**   $m$  des Teilvolumens  $V_t$  beschrieben über

$$m(V_t) := \int_{V_t} \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{V_t} \varrho_t dv. \quad (1.49)$$

In der Abwesenheit von Quellen, Senken und Massenflüssen besagt das Gesetz der Massenerhaltung, dass der Masseninhalt eines materiellen Volumens  $V_t$  in der Zeit erhalten bleibt, das heißt

$$\frac{d}{dt} m(V_t) = 0, \quad (1.50)$$

was nach Setzen von  $f \equiv \varrho$  in (1.48) äquivalent zu

$$\int_{V_t} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) \right) dv = 0 \quad (1.51)$$

ist und nichts anderes bedeutet, als dass für ein Volumen  $V_t$  die zeitliche Änderung der Masse in  $V_t$  dem Massenstrom über den Rand dieses Volumens entspricht, siehe Gaußscher Integralsatz im Anhang A.2.

Im Gegensatz zur strömungsmechanischen Sichtweise, bei der mithilfe des Reynoldsschen Transporttheorems die Gleichgewichtsbedingungen in der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  beschrieben werden, werden in der strukturmeechanischen Betrachtung die Gleichungen zunächst in die Referenzkonfiguration transformiert. Folgender Satz zeigt dann, dass jede Dichteverteilung einer Konfiguration  $\mathcal{C}_t$ , die aus der Lageänderung des Körpers  $\mathcal{B}$  unter  $\chi$  entsteht, durch die Massendichte in der Referenzkonfiguration,  $\varrho_R(\mathbf{X}, 0)$ , bestimmt ist.

**Satz 1.2.** *Sei  $\chi$  eine Deformationsabbildung des Körpers  $\mathcal{B}$ , sei  $\mathbf{F}$  der Deformationsgradient zum Zeitpunkt  $t$  und  $V_t$  das Massenvolumen in  $\mathcal{C}_t$ , das durch die Deformationsabbildung aus  $V_R$  hervorgegangen ist. Dann gilt,*

$$\int_{V_t} \varrho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{V_R} \varrho_R(\mathbf{X}, 0) dV, \quad t \geq 0, \quad (1.52)$$

und insbesondere

$$\varrho(\mathbf{x}, t) = \det(\mathbf{F})^{-1} \varrho_R(\mathbf{X}, 0). \quad (1.53)$$

Der Beweis des Satzes folgt direkt aus der Identität  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ , der Transformationsregel für Volumenintegrale und dem Lokalisierungstheorem [50], siehe auch Anhang A.2. Aus (1.52) kann insbesondere gefolgert werden, dass  $\dot{\varrho}_R = 0$  gelten muss [34].

Somit ist die momentane Massendichte  $\varrho_t \equiv \varrho(\mathbf{x}, t)$  nach (1.53) bestimmt durch die als bekannt angenommene Referenzdichte  $\varrho_R(\mathbf{X}, 0)$  und die gesuchte Deformation. Das heißt, die Massenerhaltungsgleichung (1.50) ist für eine gegebene Referenzdichte automatisch erfüllt und  $\varrho_t$  wird daher nicht als eigenständige Unbekannte des Problems behandelt [103].

### 1.3.2. Impulserhaltung und das Prinzip der virtuellen Leistungen

Die mechanische Interaktion von Teilen des Körpers  $\mathcal{B}$  untereinander und die Interaktion des Körpers mit seiner Umgebung werden durch Kräfte beschrieben. Im Folgenden werden drei Typen von Kräften unterschieden, siehe [50],

- Kontaktkräfte zwischen verschiedenen Teilen des Körpers, (*innere Kräfte*),
- Kontaktkräfte zwischen dem Körper und seiner Umgebung, (*äußere Kontaktkräfte*),
- und Volumenkräfte, die auf die inneren Punkte des Körpers aufgrund seiner Umgebung wirken, (*äußere Volumenkräfte*).

Der Einfachheit halber werden die beiden Arten von Kontaktkräften in dem Begriff *Flächenkräfte* zusammengefasst. Somit kann die Kraft-Wechselwirkung vollständig auf Flächen- und Volumenkräfte zurückgeführt werden.

Die folgende Darstellung dieser Kräfte orientiert sich an der Arbeit von Braess [14]. Bereits 1822 führte Cauchy eines der wichtigsten und weitreichendsten Axiome der Kontinuumsmechanik ein, welches bezüglich der Flächenkräfte für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$  und jeden Normalenvektor  $\mathbf{n}$  eines Oberflächenelementes  $da$  die Existenz von Oberflächenkraftdichten

$$\mathbf{t} : \mathcal{C}_t \times S^2 \rightarrow \mathcal{S} \quad (1.54)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \quad (1.55)$$

postuliert, siehe auch [19].  $S^2$  bezeichnet dabei die Einheitssphäre im drei-dimensionalen euklidischen Raum  $\mathcal{S}$ . Insbesondere gilt dieses Axiom für jeden Zeitpunkt  $t$  und damit für jede Konfiguration  $\mathcal{C}_t = \chi(\mathcal{B}, t) \subset \mathcal{S}$ . Es wird darauf hingewiesen, dass  $\mathbf{x}$  und  $da$  nicht notwendigerweise Teil des Randes einer Konfiguration,  $\partial\mathcal{C}_t$ , sein müssen.  $da$  beschreibt vielmehr ein Oberflächenelement eines beliebigen, hinreichend glatt berandeten Massenvolumens  $V_t \subset \overline{\partial\mathcal{C}_t}$ . Aufgrund dieser Tatsache wird das Axiom in der technischen Literatur auch *Schnittprinzip* genannt.

**Welche Kraftbeiträge leisten Volumen- und Flächenkräfte?** Sei  $dv$  ein Massenvolumenelement. Dann liefert eine Volumenkraft  $\mathbf{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  eine Kraft  $\mathbf{f} dv$ . Flächenkräfte, die durch  $\mathbf{t}$  gegeben sind, liefern für ein Oberflächenelement  $da$  mit der Normalen  $\mathbf{n}$  einen Kraftbeitrag  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) da$ , der auch von der Richtung  $\mathbf{n}$  abhängen kann. Der Vektor  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  heißt *Cauchy'scher Spannungsvektor*.

Beschreibe  $\mathbf{f}$  die Volumenkräfte und  $\mathbf{t}$  das in (1.54) definierte Vektorfeld. Dann lassen sich alle Kräfte (Volumen- und Oberflächenkräfte) als

$$\mathbf{f}_{total}(V, t) := \int_{V_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial V_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) da \quad (1.56)$$

und alle Momente als

$$\mathbf{m}_{total}(V, t) := \int_{V_t} \mathbf{r} \times \mathbf{f}(\mathbf{x}) dv + \int_{\partial V_t} \mathbf{r} \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) da \quad (1.57)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

zusammenfassen, wobei  $\mathbf{r}$  den Ortsvektor  $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{o}$  mit dem Ursprung  $\mathbf{o}$  darstellt.  $\times$  bezeichnet hier das Kreuzprodukt im euklidischen Raum  $\mathcal{S}$ .

Um das zentrale Axiom der Mechanik im Folgenden zu formulieren, werden zunächst noch die darin vorkommenden Erhaltungsgrößen **Impuls** und **Drehimpuls** eingeführt.

**Definition 1.3** (Impuls und Drehimpuls). *Sei  $V_t$  ein Teilvolumen von  $\mathcal{C}_t$ ,  $\mathbf{v}$  der räumliche Geschwindigkeitsvektor und  $\rho$  die Massendichte. Dann ist der Impuls  $I$  definiert als*

$$I(V, t) := \int_{V_t} \rho \mathbf{v} \, dv. \quad (1.58)$$

Der Drehimpuls  $L$  um den Ursprung  $\mathbf{o}$  ist definiert als

$$L(V, t) := \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv. \quad (1.59)$$

**Satz 1.4.** *Für jedes Teilvolumen  $V_t$  zur Zeit  $t$  gilt:*

$$\dot{I}(V, t) := \int_{V_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv, \quad (1.60)$$

$$\dot{L}(V, t) := \int_{V_t} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv. \quad (1.61)$$

*Beweis.* siehe Seite 92 in [50].

Somit lautet der Erhaltungssatz für Impuls und Drehimpuls, [50],

**Axiom 1.5** (Impulserhaltungsgesetze/Schnittprinzip). *Es befinde sich der Körper  $\mathcal{B}$ , der zu einer aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  assoziiert ist, unter den Kräften und Momenten im Gleichgewicht. Dann gilt für jedes Teilvolumen  $V$  der Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  zum Zeitpunkt  $t$*

$$\mathbf{f}_{total}(V, t) = \dot{I}(V, t), \quad (1.62)$$

$$\mathbf{m}_{total}(V, t) = \dot{L}(V, t). \quad (1.63)$$

(1.62) beschreibt die Impulserhaltung und (1.63) die Drehimpulserhaltung.

Das zentrale Axiom der Mechanik, welches die Bewegung mit den Kräften in Verbindung setzt, besagt also, dass alle Kräfte (sowohl Flächen- als auch Volumenkräfte), (1.62), und alle Momente, (1.63), sich im Gleichgewichtszustand zu Null addieren.

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 1.3.1 wird in der strukturmechanischen Sichtweise die Impulserhaltung in die Referenzkonfiguration transformiert. Die Beschleunigung  $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  ergibt sich dann zu  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)$ . Diese Arbeit konzentriert sich allerdings auf die statischen Gleichgewichtsbedingungen, so dass im Folgenden die Beschleunigung a priori aus der Betrachtung ausgeschlossen wird und somit die rechten Seiten der Impuls-, (1.62), und Drehimpulserhaltung, (1.63), verschwinden. Die Transformation der verbleibenden Terme in die Referenzkonfiguration wird in Abschnitt 1.3.3 beschrieben.

Vorher wird noch ein wichtiges Theorem von Cauchy zitiert, welches die lineare Abhängigkeit des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  von der Normalen  $\mathbf{n}$  zeigt. Dies lässt die Darstellung von  $\mathbf{t}$  über einen Tensor zweiter Stufe,  $\boldsymbol{\sigma}$ , zu. Unter Berücksichtigung der Impulserhaltungsgesetze (1.62) und (1.63) in ihrer statischen Variante ergibt sich damit *Cauchys Theorem*,

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

**Satz 1.6** (Cauchys Theorem). Sei  $\mathbf{t}(\cdot, \mathbf{n}) \in C^1(\mathcal{C}_t, \mathcal{S})$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \cdot) \in C^0(S^2, \mathcal{S})$  und  $\mathbf{f} \in C(\mathcal{C}_t, \mathcal{S})$  im statischen Gleichgewicht. Dann ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Einhaltung der Impulsgesetze, dass ein symmetrisches Tensorfeld  $\boldsymbol{\sigma} \in C^1(\mathcal{C}_t, \text{Sym}(T^*\mathcal{S}, T\mathcal{S}))$  existiert, so dass

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{n}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \mathbf{n} \in S^2, \quad (1.64)$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t, \quad (1.65)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}_t. \quad (1.66)$$

Der symmetrische Tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  wird *Cauchyscher Spannungstensor* genannt.

*Beweis.* siehe Seite 101 in [50].

Die Gleichungen (1.65) und (1.66) in Satz 1.6 sind eine Folge der Impuls- und Drehimpulserhaltung. Mit den statischen Varianten der Impuls-, (1.62), und Drehimpulserhaltung, (1.63), dem Divergenztheorem (*Gaußscher Integralsatz*, siehe Anhang A.2) und der Tatsache, dass das Axiom der Impulserhaltung 1.5 für jedes Teilvolumen  $V_t$  gilt, können aus der Existenz des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  mit der Eigenschaft (1.64) die Feldgleichungen (1.65) und (1.66) gewonnen werden.

**Prinzip der virtuellen Leistungen** Das Prinzip der virtuellen Leistungen, auch *Prinzip von d'Alembert*, stellt eine allgemeine Form der Impulserhaltungsgleichungen dar, welche eine geeignete Basis für die spätere Behandlung mit der Finiten-Elemente-Methode ist. Es entspricht der schwachen Formulierung des lokalen Impulsgleichgewichts.

Um das Prinzip zu formulieren, wird zunächst der Begriff der *virtuellen Geschwindigkeit* eingeführt. Unter einer virtuellen Geschwindigkeit  $\tilde{\mathbf{v}}$  wird eine gedachte Geschwindigkeit verstanden, die zunächst keinerlei physikalische Bedeutung hat. Virtuelle Geschwindigkeiten sind von der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  unabhängige, gedachte und weitgehend beliebige Geschwindigkeiten, die allerdings mit den vorgeschriebenen Randbedingungen des Problems verträglich sein müssen. Das heißt, dass die virtuellen Geschwindigkeiten verschwinden müssen, wo immer Positions-Randbedingungen des Körpers vorgegeben sind. Der Raum solcher virtuellen Geschwindigkeiten wird im Folgenden mit  $\tilde{V}$  bezeichnet,

$$\tilde{V} := \{\tilde{\mathbf{v}} : \mathcal{C}_t \rightarrow T\mathcal{S} \mid \tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\mathcal{C}_t^D} = \mathbf{0}\}. \quad (1.67)$$

Darin ist  $\partial\mathcal{C}_t^D$  der Dirichlet-Rand von  $\mathcal{C}_t$ , das heißt der Teil von  $\partial\mathcal{C}_t$ , auf dem Positions-Randbedingungen vorgegeben werden, und  $\tilde{\mathbf{v}}|_{\partial\mathcal{C}_t^D}$  ist die Restriktion von  $\tilde{\mathbf{v}}$  auf  $\partial\mathcal{C}_t^D$ .

Sei nun angenommen, dass die aktuelle Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  einer solchen virtuellen Geschwindigkeit ausgesetzt ist. Dann produziert diese Geschwindigkeit eine externe virtuelle Leistung. Das Prinzip der virtuellen Leistungen besagt nun, dass die interne virtuelle Leistung der externen virtuellen Leistung entsprechen muss, das heißt für eine gegebene Kontaktkraft  $\mathbf{t}$  und eine Volumenkraft  $\mathbf{f}$  gilt

$$\int_{\mathcal{C}_t} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{d}} = \int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \int_{\partial\mathcal{C}_t^N} \mathbf{t} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{V}, \quad (1.68)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  der Cauchysche Spannungstensor und  $\tilde{\mathbf{d}}$  der symmetrische Anteil des Gradienten der virtuellen Geschwindigkeit ist, das heißt  $\tilde{\mathbf{d}} = \text{sym}(\text{grad}(\tilde{\mathbf{v}}))$ .  $\partial\mathcal{C}_t^N$  bezeichnet den Rand von  $\mathcal{C}_t$ , auf dem Neumann-Randbedingungen vorgegeben sind. Die linke Seite der Gleichung (1.68) beschreibt die **interne virtuelle Leistung**, die rechte Seite die **externe virtuelle Leistung**. Die Bedingung (1.68) ist somit Ausdruck des Prinzips der virtuellen Leistungen, welche aus der lokalen Impulsbilanz (1.64)–(1.66) durch Multiplikation mit den virtuellen Geschwindigkeiten, der anschließenden Integration über die aktuelle Konfiguration des Körpers und der Anwendung des Divergenztheorems entstanden ist. Die Gleichung (1.68) wird auch **schwache Formulierung** der Impulsbilanz genannt.

### 1.3.3. Transformation zwischen den Konfigurationen

In Cauchys Theorem, Satz 1.6, wurde bereits die erste tensorielle Größe eingeführt, die dazu dient, Kontaktkräfte bezüglich einer Fläche zu messen. Der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma} : T^*\mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$  ist in der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  definiert und wird daher in der Literatur auch *wahrer Spannungstensor* genannt. In vielen strukturmechanischen Anwendungen ist es jedoch nicht zweckmäßig mit  $\boldsymbol{\sigma}$  zu arbeiten, weil die aktuelle Konfiguration a priori unbekannt ist. Insbesondere für Berechnungen mit der Finiten-Elemente-Methode ist es sinnvoller, den Cauchyschen Spannungstensor in die bekannte, undeformierte Referenzkonfiguration  $\mathcal{C}_R$  zu transformieren und die Erhaltungsgleichungen entsprechend in  $\mathcal{C}_R$  zu formulieren. Eine solche Transformation zwischen Konfigurationen ist unter der Bezeichnung *Piola-Transformation* bekannt.

**Piola-Transformation** Es wird zunächst betrachtet, wie sich die Oberflächenkräfte, die über den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  beschrieben werden, siehe (1.54) und (1.56), transformieren. Unter Anwendung von Cauchys Theorem 1.6 lassen sich diese als

$$\int_{\partial v_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da \tag{1.69}$$

mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  des Oberflächenelementes  $da$  in der aktuellen Konfiguration schreiben.

Der Definition des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ , (1.33), folgend, beschreibt  $\mathbf{F}$ , wie Vektoren der Referenzkonfiguration in die aktuelle Konfiguration abgebildet werden.  $\mathbf{F}$  ist also entscheidend für die Piola-Transformation. Es gelten folgende Beziehungen:

**Satz 1.7** (Transformation zwischen den Konfigurationen). *Seien  $dX, dA, dV$  und  $dx, da, dv$  Linienelemente, Flächenelemente und Volumenelemente in der Referenz- beziehungsweise in der aktuellen Konfiguration. Dann gilt*

$$dx = \mathbf{F} dX, \quad dv = \det(\mathbf{F}) dV, \tag{1.70}$$

$$\mathbf{n} da = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA. \tag{1.71}$$

$\mathbf{n}$  und  $\mathbf{N}$  sind dabei die nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektoren auf der Oberfläche der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  beziehungsweise der Referenzkonfiguration  $\mathcal{C}_R$ . Die

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Transformationsregel (1.71) wird auch **Nansons Formel** genannt [88].

Werden die Oberflächenkräfte aus (1.69) also auf ein Flächenelement  $dA$  der Referenzkonfiguration bezogen, so ergibt sich ein Spannungsmaß  $\mathbf{P} : T^*\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{S}$ , welches sowohl auf die Referenz- als auch auf die aktuelle Konfiguration bezogen ist. Die transformierten Oberflächenkräfte ergeben sich mit  $J = \det(\mathbf{F})$  nach Nansons Formel (1.71) zu

$$\int_{\partial V_R} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} \, dA, \quad (1.72)$$

wobei

$$J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} =: \mathbf{P}, \quad J \sigma^{ab} (F^{-T})_b{}^B =: P^{aB}, \quad (1.73)$$

den unsymmetrischen **1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor** zweiter Stufe definiert. Der in (1.73) enthaltene Tensor

$$J \boldsymbol{\sigma} =: \boldsymbol{\tau}, \quad J \sigma^{ab} =: \tau^{ab}, \quad (1.74)$$

wird auch als **Kirchhoffscher Spannungstensor** bezeichnet. Weil dieser nur eine um  $J$ -gewichtete Abwandlung von  $\boldsymbol{\sigma}$  darstellt, erbt  $\boldsymbol{\tau}$  die Symmetrieeigenschaft des Cauchy-schen Spannungstensors. Insbesondere ist  $\boldsymbol{\tau}$  auch bezüglich der aktuellen Konfiguration definiert.

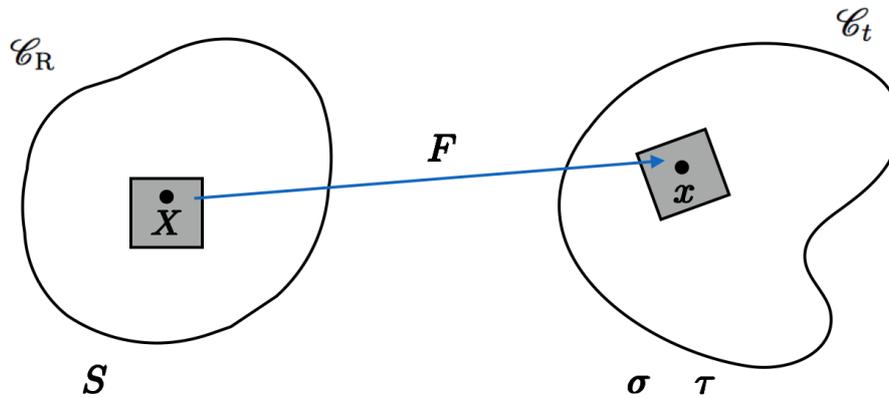


Abbildung 1.5.: Definitionsbereiche der Spannungstensoren  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\tau}$ .  $\mathbf{P}$  fehlt in dieser Darstellung, weil eine Komponente des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{P}$  auf die Referenz- und eine Komponente auf die aktuelle Konfiguration bezogen ist.

Ein Spannungsmaß, das ausschließlich in der Referenzkonfiguration definiert ist, und zudem die Symmetrieeigenschaft besitzt, ist der **2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor**  $\mathbf{S} : T^*\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{B}$ , siehe Abbildung 1.5. Dieser ergibt sich aus  $\mathbf{P}$  über

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}, \quad S^{AB} := (F^{-1})^A{}_a P^{aB}, \quad (1.75)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

beziehungsweise aus  $\boldsymbol{\sigma}$  über

$$\boldsymbol{S} = J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}, \quad S^{AB} = J(F^{-1})^A{}_a\sigma^{ab}(F^{-T})_b{}^B. \quad (1.76)$$

Die zugrundeliegenden Transformationen der genannten Spannungstensoren sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst.

	Cauchy: $\boldsymbol{\sigma}$	Kirchhoff: $\boldsymbol{\tau}$	1. Piola-Kirchhoff: $\boldsymbol{P}$	2. Piola-Kirchhoff: $\boldsymbol{S}$
$\boldsymbol{\sigma} =$	$\boldsymbol{\sigma}$	$J^{-1}\boldsymbol{\tau}$	$J^{-1}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T$	$J^{-1}\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T$
$\boldsymbol{\tau} =$	$J\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\tau}$	$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T$	$\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{F}^T$
$\boldsymbol{P} =$	$J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$	$\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{F}^{-T}$	$\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{F}\boldsymbol{S}$
$\boldsymbol{S} =$	$J\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}$	$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{F}^{-T}$	$\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{S}$

Tabelle 1.1.: Transformation der Spannungstensoren

Wie die Spannungen mit den Verzerrungen zusammenhängen, wird über sogenannte Materialgesetze beschrieben. Bevor auf die Grundlagen für diese Materialgesetze, die sogenannte konstituierende Theorie, eingegangen wird, wird das vollständige Modell bezüglich der Referenzkonfiguration formuliert.

**Zusammenfassung des Modells in materieller Form** Diese Arbeit ist auf den rein mechanischen Rahmen beschränkt, das heißt es werden thermische Effekte a priori vernachlässigt. Dann lässt sich das Modell mit der disjunkten Zerlegung des Randes,  $\partial\mathcal{C}_R = \partial\mathcal{C}_R^N \cup \partial\mathcal{C}_R^D$ ,  $\partial\mathcal{C}_R^N \cap \partial\mathcal{C}_R^D = \emptyset$ , in einen Neumann-Rand  $\partial\mathcal{C}_R^N$  und einen Dirichlet-Rand  $\partial\mathcal{C}_R^D$  und dem Transformationssatz zwischen den Konfigurationen 1.7 wie folgt in der Referenzkonfiguration zusammenfassen,

$$\dot{\varrho}_R = 0, \quad \text{in } \mathcal{C}_R, \quad (1.77a)$$

$$\text{Div}(\boldsymbol{P}) = -\boldsymbol{f}_R, \quad \text{in } \mathcal{C}_R, \quad (1.77b)$$

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N} = Jt\sqrt{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{C}^{-1}\cdot\boldsymbol{N}}, \quad \text{auf } \partial\mathcal{C}_R^N, \quad (1.77c)$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}^T, \quad \text{in } \mathcal{C}_R. \quad (1.77d)$$

Die Felder  $\varrho_R := J(\varrho \circ \chi)$ ,  $\boldsymbol{P} := J(\boldsymbol{\sigma} \circ \chi)\boldsymbol{F}^{-T}$  und  $\boldsymbol{f}_R = J(\boldsymbol{f} \circ \chi)$  sind dabei die Piola-Transformationen der räumlichen Felder  $\varrho$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{f}$ .  $\boldsymbol{f}_R$  beschreibt also die Volumenkräfte, die auf ein Einheitsvolumen des undeformierten Körpers  $\mathcal{B}$  in der Referenzkonfiguration  $\mathcal{C}_R$  wirken. Im Allgemeinen wird das Randwertproblem (1.77) komplettiert durch vorgegebene Dirichlet-Randwerte für die Bewegung  $\chi_b$  auf dem Teilrand  $\partial\mathcal{C}_R^D$ , die auch von der Zeit  $t$  abhängen können.

Dieses System wird im nächsten Abschnitt um die Beschreibung der materiellen Beziehung von Verzerrungs- und Spannungstensor (die konstituierende Gesetze) erweitert und damit zusammen mit der kinematischen Gleichung für den Verzerrungstensor geschlossen. Es wird darauf hingewiesen, dass bisher noch keine vereinfachenden Annahmen eingeführt wurden, die die Gültigkeit dieses Modells für große Deformationen beschränken würden.

**Bemerkung 1.8.** Weil die Dichte  $\varrho_R$  als bekannt vorausgesetzt wird, ist die Massenerhaltungsgleichung nach Piola-Transformation in die Referenzkonfiguration überflüssig und automatisch erfüllt. In Abschnitt 1.4 wird zudem gezeigt, dass die Drehimpulserhaltung, beziehungsweise (1.77d), durch eine geeignete Wahl einer Energiefunktion ebenfalls erfüllt ist, so dass sich das Problem, welches im Folgenden mit einer Finiten-Elemente-Methode behandelt wird, auf die Gleichungen (1.77b) und (1.77c) mit vorgegebenen Dirichlet-Randwerten reduziert.

**Bemerkung 1.9.** Auch aus der materiellen Form der Gleichgewichtsbedingungen (1.77) kann analog zu Abschnitt 1.3.2 eine schwache Formulierung in der Referenzkonfiguration gefunden werden, siehe dazu auch Abschnitt 2.2.2. Diese stellt insbesondere für die nichtlineare Elastizität die Basis für die Behandlung mit Finiten-Elementen dar. In der Theorie der linearen Elastizität wird in Abschnitt 1.4.2 gezeigt, dass eine Unterscheidung der Konfigurationen vernachlässigt werden kann, so dass auch die Gleichgewichtsbedingung, die in der aktuellen Konfiguration formuliert ist (1.68), als grundlegende schwache Form dienen kann.

### 1.4. Konstituierende Theorie

Die konstituierende Theorie liefert funktionale Formen für den Spannungstensor und die freie Energiedichte. Entscheidend dafür ist der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$ . Diese zusätzlichen Beziehungen von Spannungen und Verzerrungen schließen das System an Gleichungen. Somit existieren genauso viele Gleichungen wie Unbekannte. Außerdem werden durch die sogenannten *Materialgesetze*, *Stoffgesetze* oder auch *konstituierende Gesetze* materielle Eigenschaften berücksichtigt. Der prominenteste Vertreter eines Materialgesetzes ist das Hooksche Gesetz, welches das isotrope, homogene, elastische Verhalten eines Körpers für kleine Deformationen beschreibt, siehe Abschnitt 1.4.2.

**Grundlegende Prinzipien der konstituierenden Theorie** Obwohl sie gewissen Regeln gehorchen müssen, wird betont, dass konstituierende Gesetze nicht von physikalischen Gesetzmäßigkeiten hergeleitet werden. Im Wesentlichen sind konstituierende Gesetze mathematische Modelle des realen Materialverhaltens, welche anhand von experimentellen Ergebnissen validiert werden. Die Regeln, denen konstituierende Gesetze gehorchen müssen, sind nach Truesdell und Noll [129] die folgenden drei grundlegenden Prinzipien. Sie bilden die Basis der konstituierenden Theorie in einem rein mechanischen Kontext.

- *Prinzip des Determinismus der Spannung:* Die Spannung in einem Körper ist durch die Historie der Bewegung des Körpers bestimmt.
- *Prinzip der Lokalität:* Zur Bestimmung der Spannung an einem gegebenen Partikel  $X$  kann die Bewegung außerhalb einer beliebigen Nachbarschaft von  $X$  außer Acht gelassen werden.
- *Prinzip der materiellen Objektivität:* Die Materialantwort muss invariant bezüglich der Änderung eines Betrachters sein.

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Alle konstituierenden Gesetze müssen zudem **konsistent**, das heißt physikalisch zulässig, sein. Damit ist gemeint, dass die konstituierenden Gesetze konsistent mit den Massen- und Impulserhaltungen und der Dissipationsungleichung, einer speziellen Form des zweiten Gesetzes der Thermodynamik, formuliert sein müssen, siehe [79][104]. Die Berücksichtigung dieser Prinzipien, der Erhaltungsgleichungen und der Dissipationsungleichung führt darauf, dass der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und die freie Energiedichte  $\psi$  in den konstituierenden Modellen abhängige Variablen sind. Im rein mechanischen Rahmen ergibt sich damit für einen elastischen Festkörper die funktionale Abhängigkeit von  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\psi$  von dem Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  [104],

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad (1.78a)$$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \hat{\psi}(\mathbf{F}, \mathbf{X}), \quad (1.78b)$$

wobei mit  $\hat{(\cdot)}$  eine sogenannte **konstituierende Funktion** bezeichnet wird. Die funktionale Form für einen allgemein thermoelastischen Festkörper findet sich beispielsweise in der Arbeit von Reddy [104].

**Materialeigenschaften** Mit (1.78) lässt sich nun die Definition eines elastischen Materials präzisieren.

**Definition 1.10** (Elastisches Materialverhalten). *Ein Material heißt elastisch, wenn eine glatte konstituierende Funktion (auch: Antwortfunktion)*

$$\hat{\mathbf{T}} : \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{S})^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \text{Sym}(T^*\mathcal{S}, T\mathcal{S}) \quad (1.79)$$

existiert, so dass sich der Spannungstensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  an einem Punkt  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  über

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad (1.80)$$

beschreiben lässt.  $\mathbf{F}$  ist der Deformationsgradient und wird als bekannt vorausgesetzt. (1.80) wird auch als konstituierendes Gesetz bezeichnet [50].

Hinter der Darstellung der Spannungen über eine solche konstituierende Funktion, (1.80), verbirgt sich die Annahme, dass die Spannungen lokal von den Verschiebungen und nur von deren ersten Ableitungen abhängen [14]. Spannungsänderungen werden also als ein Resultat einer kinematischen Änderung verstanden. Die führenden Größen sind daher in dieser Darstellung die kinematischen Variablen.

Dieses Kapitel beschränkt sich auf sogenannte **einfache Materialien** [93]. Einfache Materialien sind solche, deren lokale Spannungsantwort durch die Historie des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  beschrieben werden können. Das heißt im Speziellen, dass elastische Materialien einfache Materialien sind, bei denen die Spannung zum Zeitpunkt  $t$  nur von der lokalen Konfiguration zum Zeitpunkt  $t$  und nicht von der ganzen Historie der Bewegung abhängt. Außerdem seien im Folgenden ausschließlich materiell gleichmäßig verteilte Materialien betrachtet [20][30][33].

**Definition 1.11** (Homogenes Material). *Wenn die konstituierende Funktion und die Dichtefunktion  $\varrho_{\text{R}}(\mathbf{X})$  unabhängig vom materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  definiert sind, das heißt*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \equiv \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}) \text{ und } \varrho_{\text{R}}(\mathbf{X}) \equiv \varrho_{\text{R}} \quad (1.81)$$

gelten, wird das Materialverhalten homogen genannt.

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

Eine weitere Charakterisierung, die Materialien voneinander unterscheidet, ist diejenige, ob eine Richtung im Material ausgezeichnet ist oder nicht. Besteht eine vollkommene Richtungsunabhängigkeit im Material so wird es **isotrop** genannt.

**Definition 1.12** (Isotropes Material). *Ein isotropes Material ist ein Material, für das*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}\mathbf{Q}, \mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{F} \in \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{S})^+, \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+ \quad (1.82)$$

*gilt.*

Mithilfe der Antwortfunktion  $\hat{\mathbf{T}}$  kann das Prinzip der materiellen Objektivität auch über die folgende Bedingung charakterisiert werden [93]. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für diese Invarianz eines elastischen Materials ist, dass die Antwortfunktion  $\hat{\mathbf{T}}$  die Gleichung

$$\mathbf{Q}\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X})\mathbf{Q}^T = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{Q}\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad (1.83)$$

für jedes  $\mathbf{F} \in \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{S})^+$  und jedes  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  erfüllt [14][50].  $\mathbf{Q}$  beschreibt darin die Rotation der aktuellen Konfiguration, so dass  $\mathbf{Q}\mathbf{F}$  den um  $\mathbf{Q}$  gedrehten Deformationsgradienten bezeichnet. Wegen der Rotation transformiert sich dann die Spannungsantwort wie in der linken Seite von (1.83) beschrieben. Dieses Axiom der Koordinatenunabhängigkeit gilt im Unterschied zu den Eigenschaften Isotropie und Homogenität für jedes Material.

**Hyperelastizität** Eine wichtige Klasse von Materialien, insbesondere für die Theorie von großen Deformationen, stellen die hyperelastischen Materialien dar.

**Definition 1.13** (Hyperelastizität). *Ein elastisches Material heißt hyperelastisch, wenn ein Energiefunktional  $\hat{W} : \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{S})^+ \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$  existiert, so dass*

$$\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) \quad (1.84)$$

*für  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$  und  $\mathbf{F} \in \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{S})^+$  gilt.*

$\hat{W}$  wird in der Literatur auch **Verzerrungsenergiedichte** oder **gespeicherte Energiedichte** genannt. Für einen isothermen, elastischen Prozess kann die gespeicherte Energiedichte zu der freien Energiedichte  $\psi$  durch  $W = \rho_{\text{R}}\psi$  in Beziehung gesetzt werden.

Die Abhängigkeit eines hyperelastischen Materials von der gespeicherten Energiedichte  $\hat{W}$  folgt auf natürliche Weise aus der **reduzierten Dissipationsungleichung**,

$$D_{\text{R}} := -\rho_{\text{R}}\dot{\psi} + \mathbf{P} : \mathbf{g}\dot{\mathbf{F}} \geq 0. \quad (1.85)$$

$\mathbf{P}$  ist darin der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und  $\psi$  die freie Energiedichte. Man sagt,  $\mathbf{P}$  ist **energetisch konjugiert** oder **dual** zu  $\dot{\mathbf{F}}$ . (1.85) wird insbesondere reduzierte Dissipationsungleichung genannt, weil sie sich lediglich auf den mechanischen Rahmen konzentriert. Aufgrund der Tatsache, dass die Dissipationsungleichung für elastisches Verhalten mit Gleichheit erfüllt sei und sie für alle zulässigen mechanischen Prozesse gelten muss, kann die Form (1.84) für den Spannungstensor aus (1.85) abgeleitet werden, siehe dazu [129]. In Abschnitt 2.2.3 wird die Dissipationsungleichung näher betrachtet,

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

da sie für die Formulierung des elasto-plastischen Materialmodells entscheidend ist.

Die Bedingung der materiellen Objektivität (1.83) lässt sich für ein hyperelastisches Material auch äquivalent über das Energiefunktional  $\hat{W}$  formulieren [14][79]. Das Prinzip der materiellen Objektivität erzwingt die Abhängigkeit  $\hat{W}(\mathbf{C}, \mathbf{X})$  vom rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , (1.42a).

Analog zur Definition 1.12 gilt für isotrope Materialien

$$\hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X}) = \hat{W}(\mathbf{F}\mathbf{Q}, \mathbf{X}), \quad (1.86)$$

für alle orthogonalen Matrizen  $\mathbf{Q}$  mit positiver Determinante [14][122]. Für ein objektives, isotropes Material hängt  $\hat{W}(\cdot, \mathbf{X})$  nur von den drei Invarianten  $I(\mathbf{C}) = (\hat{I}_1(\mathbf{C}), \hat{I}_2(\mathbf{C}), \hat{I}_3(\mathbf{C}))$  mit

$$\hat{I}_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}), \quad (1.87a)$$

$$\hat{I}_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2} [[\text{tr}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})]^2 - \text{tr}[(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^2]], \quad (1.87b)$$

$$\hat{I}_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}), \quad (1.87c)$$

des rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungstensors  $\mathbf{C}$  ab,  $\hat{W}(I(\mathbf{C}), \mathbf{X})$ .

Eine bedeutende Schlussfolgerung kann außerdem für objektive Materialien gezogen werden,

**Satz 1.14** (Äquivalenz von Objektivität und Drehimpulserhaltung). *Beschreibe  $\hat{W}$  eine gespeicherte Energiedichte und  $\mathbf{P}$  den 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- $\hat{W}(\cdot, \mathbf{X})$  ist objektiv,
- die Drehimpulserhaltung  $\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T$  ist erfüllt,

wobei  $\mathbf{P} = \mathbf{g}^{-1} \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{F}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{F}}$  gilt, siehe [122].

In dieser Arbeit werden ausschließlich hyperelastische Materialien betrachtet, die durch eine objektive, gespeicherte Energiedichte  $\hat{W}$  definiert werden. Dies hat nach Satz 1.14 die Folge, dass automatisch die Erhaltung des Drehimpulses, (1.63) beziehungsweise (1.77d), gewährleistet ist.

**Bemerkung 1.15.** *Die weit verbreiteten hypoelastischen Materialgesetze produzieren im Gegensatz zu hyperelastischen Materialgesetzen auf einem geschlossenen Deformationszyklus eine von null verschiedene Dissipation, siehe dazu zum Beispiel [8][122][129]. Die ersten beiden Referenzen dienen gleichzeitig als Quelle für eine Reihe von Einwänden aus physikalischer Sicht gegenüber hypoelastischen Materialgesetzen. Hypoelastische Materialgesetze werden daher in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.*

### 1.4.1. Nichtlineare Elastizität

Die Vorarbeiten aus den vorherigen Abschnitten 1.1-1.4 dienen der Formulierung eines Modells der nichtlinearen Elastizität (auch: *finiten Elastizität*). Dabei wurde bisher weder eine kinematische noch eine materielle Linearisierung vorgenommen. Die Gleichgewichtsbedingungen in der Referenzkonfiguration (1.77) werden also durch ein allgemein nichtlineares, hyperelastisches konstituierendes Gesetz der Form

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \quad (1.88)$$

mit dem Cauchy-Greenschen Verzerrungstensor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ , (1.42a), komplettiert. Aufgrund der Tatsache, dass ausschließlich objektive Materialien betrachtet werden, stellt  $\hat{W}$  dabei ein Energiefunktional in  $\mathbf{C}$  dar. Mithilfe der Transformation des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors, (1.75), erhält man dann aus (1.88) den für die materielle Formulierung (1.77) erforderlichen Ausdruck für den 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor. Oft findet sich auch die räumliche Formulierung des konstituierenden Gesetzes,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \mathbf{F} \frac{\partial \hat{W}}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T. \quad (1.89)$$

Mit entsprechender Piola-Transformation, siehe Abschnitt 1.3.3, können die Formulierungen (1.88) und (1.89) allerdings äquivalent ineinander überführt werden.

Es sei an dieser Stelle betont, dass in der nichtlinearen Elastizität keine geometrische Linearisierung in Form einer Identifizierung von Referenz- und aktueller Konfiguration vorgenommen wird. Die materielle Formulierung wird also von der räumlichen Formulierung der Gleichungen unterschieden. Wie bereits in Abschnitt 1.3.3 erwähnt, bringt die räumliche Formulierung die Schwierigkeit mit sich, dass die Gleichungen in der aktuellen und a priori unbekanntenen Konfiguration formuliert sind. Daher werden die Gleichungen unter Ausnutzung der Piola-Transformation in die bekannte Referenzkonfiguration transformiert.

**Bemerkung 1.16.** *Ein weiterer Nachteil der Formulierung der Feldgleichungen in der aktuellen Konfiguration ist, dass sich orthogonale Transformationen, sogenannte Starrkörperbewegungen, aus den Gleichungen herausdividieren lassen müssen, siehe [14]. Durch die Formulierung der Gleichungen in einem festen, mit dem unverformten Körper verbundenen Koordinatensystem (Referenzkonfiguration) können diese Starrkörperbewegungen allerdings eliminiert werden.*

### 1.4.2. Lineare Elastizität

Die in vielen Anwendungen verbreitete Theorie der linearen Elastizität stützt sich auf zwei entscheidende Vereinfachungen der allgemeinen, nichtlinearen Theorie, die in den vorherigen Abschnitten vorgestellt wurde: der linearen Abhängigkeit der Spannungen von den Verzerrungen und der Linearisierung des Verzerrungstensors.

**Lineare Beziehung von Spannungen und Verzerrungen zueinander** Das wesentliche Merkmal der Theorie der linearen Elastizität ist ein lineares Materialgesetz, das bedeutet, dass sich die Spannungen proportional zu den Verzerrungen verhalten. Es gilt also eine lineare Beziehung der Spannungen  $\mathbf{S}$  zu dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ , (1.42c),

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (1.90)$$

wobei  $\mathbb{C}$  einen vierstufigen Materialtensor mit  $d^4$  Einträgen beschreibt,  $d$  steht hier für die Dimension. Üblicherweise wird  $\mathbb{C}$  auch **Elastizitätstensor** genannt.

**Linearisierung des Verzerrungstensors** Eine weitere charakteristische Eigenschaft der linearen Elastizität ist die Linearisierung des Verzerrungstensors. Wenn für einen Deformationsprozess davon ausgegangen werden kann, dass der Gradient der Verschiebungen,  $\text{Grad}(\mathbf{u})$ , klein ist, ist es plausibel, die quadratischen Terme des Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  zu vernachlässigen,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left( (\text{Grad}(\mathbf{u}))^T + \text{Grad}(\mathbf{u}) + \text{Grad}(\mathbf{u})(\text{Grad}(\mathbf{u}))^T \right) \\ &\approx \frac{1}{2} \left( (\text{Grad}(\mathbf{u}))^T + \text{Grad}(\mathbf{u}) \right) =: \boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Der zweistufige, symmetrische Tensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  wird daher auch **linearisierter Verzerrungstensor** genannt. Aufgrund dessen wird die Theorie der linearen Elastizität auch als *kinematisch linear* bezeichnet.

Die Annahme von kleinen Verschiebungsgradienten impliziert weiter, dass alle physikalischen Größen und Erhaltungsgleichungen direkt auf ein festes Koordinatensystem bezogen werden können. Die Piola-Transformation von Spannungs- und Verzerrungsmaßen, siehe Paragraph 1.3.3, spielt also keine Rolle mehr. Die verschiedenen Spannungs- und Verzerrungsmaße fallen zu einem Spannungsmaß  $\boldsymbol{\sigma}$  und einem Verzerrungsmaß  $\boldsymbol{\epsilon}$  zusammen. Der Operator  $\text{Grad}(\cdot)$  kann also in der Definition des Verzerrungstensors (1.91) auch durch  $\text{grad}(\cdot)$  ersetzt werden. Daher wird die Theorie auch als *geometrisch linear* charakterisiert. Das Materialgesetz (1.90) lässt sich damit zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{c} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad (1.92)$$

mit dem Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem linearisierten Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  umschreiben.  $\mathbb{c}$  ist hier im Unterschied zu (1.90) ein Tensor, der ein konstituierendes Gesetz in der aktuellen Konfiguration beschreibt. Deshalb wird dieser mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet.

Da sowohl der linearisierte Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  als auch der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  symmetrische Tensoren sind, besitzen die materiellen Koeffizienten von  $\mathbb{c}$  sogenannte *untergeordnete Symmetrien*,

$$\mathbb{c}_{ijkl} = \mathbb{c}_{jikl} = \mathbb{c}_{ijlk}. \quad (1.93)$$

Wenn außerdem die Spannungs-Verzerrungsbeziehung von einem Energiefunktional  $\hat{W}$  abgeleitet werden kann, enthalten die materiellen Koeffizienten auch *wesentliche Symmetrien*,

$$\mathbb{c}_{ijkl} = \mathbb{c}_{klij}, \quad (1.94)$$

## 1. Einführung in die Kontinuumsmechanik

d.h. die Zahl der freien Parameter in  $\mathfrak{c}$  wird durch diese beiden Symmetrien z.B. in 3D von 81 auf 21 eingeschränkt, siehe [56][103].

**Hookesches Gesetz** Für den speziellen Fall eines homogenen, isotropen Materials beschreibt das sogenannte *Hookesche Gesetz* die lineare Spannungs-Verzerrungsbeziehung. Durch die Isotropie, die als eine materielle Symmetrie zu verstehen ist, verbleiben nur noch zwei unabhängige materielle Parameter zur Beschreibung des Elastizitätstensors  $\mathfrak{c}$ . Aufgrund der Annahme der Homogenität des Materials sind diese zudem konstant. Sie werden **Lamé Konstanten**  $(\lambda, \mu)$  genannt. Es gilt

$$\mathfrak{c} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I}^{sym}, \quad \mathfrak{c}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1.95)$$

womit sich die Spannungs-Verzerrungsbeziehung (1.92) in Komponenten als

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (1.96)$$

schreiben lässt. Da  $(\epsilon_{kk})_{k=1}^d = \operatorname{div}(\mathbf{u})$  gilt, lässt sich (1.96) auch umschreiben zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu (\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + (\operatorname{grad}(\mathbf{u}))^T), \quad (1.97)$$

was auf die **Verschiebungsformulierung** der linearen Elastizität führt [50].

Es sei an dieser Stelle betont, dass das Hookesche Gesetz nicht axiomatischer Natur ist, sondern vielmehr ein Resultat der linearisierten Theorie unter bestimmten materiellen Eigenschaften ist.

**Bemerkung 1.17.** Die Lamé Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  stehen im Zusammenhang mit anderen physikalischen Kenngrößen. Für das Kompressionsmodul  $\kappa$ , das Elastizitätsmodul  $E$  und die Poisson-Zahl (Querkontraktionszahl)  $\nu$  gilt,

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (1.98)$$

$\mu$  wird auch Schubmodul genannt. Der ersten Lamé Konstanten  $\lambda$  wird in der Literatur allerdings keine physikalische Bedeutung beigemessen.  $\lambda$  ist aber gewissermaßen ein Indikator dafür, wie kompressibel ein Material ist. Tendiert  $\lambda$  gegen unendlich, wird das Materialverhalten inkompressibel genannt. Dies ist der Fall, wenn  $\nu \rightarrow \frac{1}{2}$  gilt. Das Materialgesetz in seiner ursprünglichen Form (1.96) muss dann durch eine entsprechende Form ersetzt werden, in der eine zusätzliche Unbekannte für den hydrostatischen Druck eingeführt wird, siehe dazu [65]. Für den Fall der inkompressiblen linearen Elastizität bekommt man dann ein Gleichungssystem, das dem der Stokes-Gleichungen für Fluide entspricht. Lediglich die Variablen haben dann eine andere Bedeutung. In dieser Arbeit wird sich allerdings auf den kompressiblen Fall beschränkt.

**Bemerkung 1.18.** Des Weiteren charakterisieren  $\lambda$  und  $\mu$  die Elliptizität des Elastizitätstensors  $\mathfrak{c}$ . Es kann gezeigt werden, dass die starke Elliptizität von  $\mathfrak{c}$  äquivalent zu  $\mu > 0$  und  $\lambda + 2\mu > 0$  ist, siehe [79].

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

Die Elastizitätstheorie stellt ein Teilgebiet der Kontinuumsmechanik dar, das sich mit dem Zustand von Körpern unter Kräfteinwirkungen beschäftigt. Elastische Deformationen sind dadurch charakterisiert, dass das Material nach Wegfallen dieser Kräfte in seine ursprüngliche Form zurückkehrt (*reversible Formänderung*). Überschreiten die Spannungen allerdings einen gewissen Schwellenwert, die sogenannte **Fließspannung** (englisch: ‘yield stress’), beginnt das Material zu fließen und es entstehen plastische Verzerrungen. Plastische Deformationen sind im Gegensatz zu elastischen Deformationen solche, die zu einer bleibenden (*irreversiblen*) Formänderung beitragen. Metallische Werkstoffe, wie z.B. Stahl oder Aluminium, aber auch viele kohäsive Reibungsmaterialien wie z.B. Beton lassen eine Beschreibung mittels eines phänomenologischen elasto-plastischen Materialmodells zu. Einen detaillierten Einblick in die Plastizitätstheorie geben unter Anderem die Arbeiten von Hill [61], Lemaître und Chaboche [73], Lubliner [77], Maugin [80] und Miehe [84].

Eine klassische Plastizitätstheorie besteht nach Bertram & Glüge [11] aus folgenden Anteilen:

- einer **Zerlegungsannahme**, nach der sich der Deformationstensor in einen elastischen und plastischen Anteil zerlegen lässt,
- einem **elastischen Gesetz**, das das Materialverhalten innerhalb des elastischen Bereichs beschreibt,
- einer **Fließbedingung**, die den elastischen vom plastischen Bereich abgrenzt,
- und einer **Fließregel**, die die Entwicklung der plastischen Deformationen angibt.
- Im Allgemeinen wird zudem eine **Verhärtungsregel** formuliert, die die Entwicklung der materiellen Verhärtung beschreibt.

Diese Anteile finden sich auch in diesem Kapitel wieder. Im Folgenden wird nun dieser Unterteilung folgend die klassische Plastizitätstheorie zur Modellierung von elasto-plastischem Materialverhalten für große Deformationen, die **finite Elasto-Plastizität**, erläutert. Dazu werden zunächst zusätzliche kinematische Größen eingeführt, die nötig sind, um die plastischen Deformationen zu erfassen. Zentral für die Formulierung des Modells der finiten Elasto-Plastizität wird die Zerlegung des Deformationsgradienten nach Bilby [12], Kröner [70] und Lee [72] in seinen elastischen und plastischen Anteil sein. Diese Zerlegung ermöglicht es, elasto-plastische Verzerrungsmaße zu formulieren. Außerdem wird betrachtet, welche Auswirkungen die Zerlegung des Deformationsgradienten auf die

Erhaltungsgesetze aus Abschnitt 1.3 haben. Es wird die Dissipationsungleichung vorgestellt, um dem dissipativen Charakter der plastischen Deformationen im Modell Rechnung zu tragen. Klassische Annahmen der konstituierenden Theorie werden erläutert und eine Fließbedingung eingeführt. Aus dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation wird schließlich die Fließ- und Verhärtungsregel abgeleitet. Damit lässt sich in Abschnitt 2.4 das elasto-plastische Problem vollständig formulieren. Neben dieser klassischen Formulierung wird in Abschnitt 2.5 eine weitere Problemformulierung vorgestellt, die auf einer Fließregel phänomenologischer Natur basiert. Das Kapitel schließt mit der kurzen Erläuterung der Modellformulierung für kleine elasto-plastische Verzerrungen, der sogenannten *infinite-simalen Elasto-Plastizität*, welche auf einigen vereinfachenden Annahmen basiert. Die Beschreibung der Theorie der finiten Elasto-Plastizität in diesem Kapitel orientiert sich an der Arbeit [46].

## 2.1. Kinematik

Entscheidend für die kinematische Beschreibung der Elasto-Plastizität ist die Zerlegung des Deformationsgradienten in seinen elastischen und plastischen Anteil. Die Idee und die physikalische Bedeutung dieser Zerlegung werden daher im Folgenden näher erläutert.

Bereits im frühen 20. Jahrhundert zeigten Burgers und Bragg [15][16], dass es gewisse flächenhafte Anordnungen von sogenannten Versetzungen gibt, die keine makroskopischen Spannungsfelder hervorrufen, sondern nur Orientierungsänderungen zwischen benachbarten Kristallbereichen vermitteln. Kröner [70] bezeichnete diese Versetzungen als innere Gitterfehler und führte zu deren Beschreibung einen natürlichen, ‘gedachten’ Zustand des Materials ein. Dieser natürliche Zustand wird von dem Idealzustand, welcher der initialen Konfiguration des Körpers aus Abschnitt 1.2 entspricht, wie folgt erreicht [70]:

„Es wird zunächst jedem Massenelement des Körpers eine spannungsfreie eingeprägte oder plastische Distorsion [...] zugeordnet, die durch eine Versetzungsbildung und -wanderung zu realisieren sei. Vor der Durchführung der Distorsionen sollen die Massenelemente numeriert und auseinandergeschnitten werden. Lässt man beliebige Variation der [Distorsion] von Element zu Element zu, so werden die Massenelemente i. allg. nach der Distorsion nicht mehr lückenlos aneinander passen“.

Das Erreichen der aktuellen Konfiguration (bei Kröner: ‘deformierter Zustand’) aus diesem natürlichen Zustand  $\mathcal{C}_\kappa$  wird durch einen Tensor  $\mathbf{F}_e(x_\kappa)$  mit  $x_\kappa \in \mathcal{C}_\kappa$  beschrieben, so dass sich der Deformationsgradient multiplikativ zerlegen lässt,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p, \quad (2.1)$$

siehe Abbildung 2.1. Darin repräsentiert  $\mathbf{F}_p$  die lokale Deformation des Materials aufgrund von inneren Gitterfehlern (plastische Deformationen) und  $\mathbf{F}_e$  dient der Beschreibung der

elastischen Deformationen.

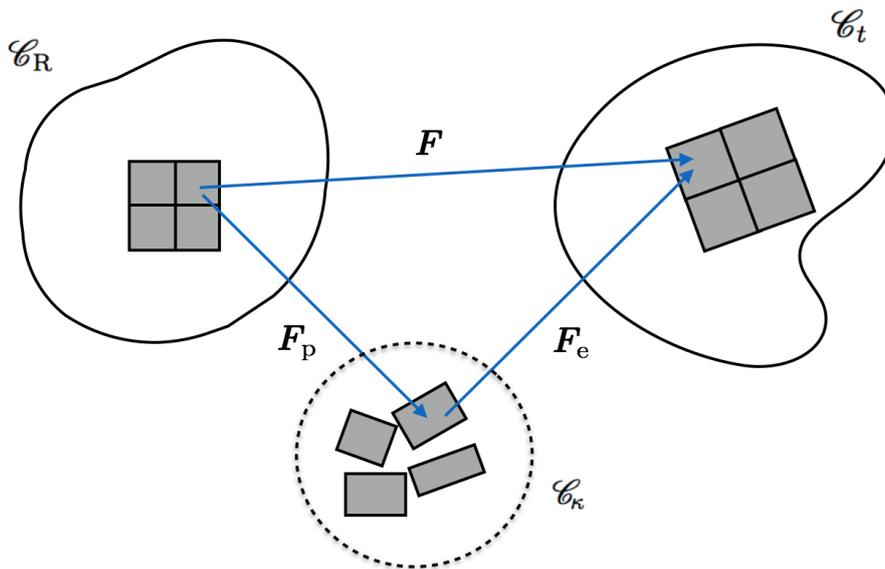


Abbildung 2.1.: Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ .

Nach Mićunović [83] wird die Wirkung von  $\mathbf{F}_p$  physikalisch greifbar, indem zunächst alle externen thermomechanischen Kräfte, die auf den Körper wirken, gedanklich entfernt werden. Es verbleiben sogenannte Residualspannungen. Um diese zu eliminieren, ist es notwendig die Struktur des Körpers isotherm aufzubrechen und in eine Kollection von spannungsfreien Körperelementen zu zerreißen.  $\mathbf{F}_p$  dient nun dazu, eine Relaxierung eines Körperelementes von  $T\mathcal{B}$  in einen solchen spannungsfreien Zustand zu modellieren. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Zerlegung des Körpers in eine Kollection von spannungsfreien Körperelementen nur eindeutig bis auf eine beliebige orthogonale Transformation ist. Zudem sind weder  $\mathbf{F}_e$  noch  $\mathbf{F}_p$  durch ein ähnliches Feld induziert wie  $\mathbf{F}$  durch  $\chi$ , d.h. weder  $\mathbf{F}_e$  noch  $\mathbf{F}_p$  sind echte Gradienten. Dennoch wird in dieser Arbeit eine solche Kollection mit  $T\mathcal{C}_k$  bezeichnet und für  $\mathcal{C}_k$  von einer **spannungsfreien, natürlichen** oder **relaxierten ‘Konfiguration’** gesprochen.

Aus der Zerlegung (2.1) folgt, dass  $\mathbf{F}_e \in \text{Lin}(T\mathcal{C}_k, T\mathcal{S})$  und  $\mathbf{F}_p \in \text{Lin}(T\mathcal{B}, T\mathcal{C}_k)$  ist, wobei  $T\mathcal{C}_k$  der zu  $\mathcal{C}_k$  assoziierte Tangentialraum ist. Außerdem hängt  $\mathcal{C}_k$  von der Zeit ab, weil sich plastische Verzerrungen in der Zeit entwickeln.

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (2.1) beruht auf den Arbeiten von Bilby [12], Lee [72] und Kröner [70]. In den letzten Dekaden diente sie in verschiedenen Gebieten der Mechanik zur Modellierung von großen inelastischen Deformationen. Lubarda stellt beispielsweise in [75] Anwendungen der multiplikativen Zerlegung (2.1) in der Thermoelastizität, Elasto-Plastizität und Biomechanik vor. [3][25][44] liefern Beispiele, in denen  $\mathbf{F}_p$  zur Beschreibung eines Wachstumstensors (englisch: ‘remodelling tensor’) benutzt wird.

Aufgrund von (2.1) zerlegt sich die Determinante des Deformationsgradienten  $J$  in

$$J = J_e J_p, \quad (2.2)$$

wobei  $J_e := \det(\mathbf{F}_e)$  und  $J_p := \det(\mathbf{F}_p)$  den volumetrischen Anteil der elastischen beziehungsweise der plastischen Deformationen beschreiben. Konsistent zu der Annahme  $J = \det(\mathbf{F}) > 0$ , (1.36), wird in dieser Arbeit angenommen, dass

$$J_e = \det(\mathbf{F}_e) > 0, \quad J_p = \det(\mathbf{F}_p) > 0 \quad (2.3)$$

gilt, so dass sowohl  $\mathbf{F}_e$  als auch  $\mathbf{F}_p$  invertierbar sind.

Analog zu (1.37) spaltet sich der volumenerhaltende Teil des Deformationsgradienten  $\bar{\mathbf{F}} := J^{-1/3} \mathbf{F}$  unter Berücksichtigung der multiplikativen Zerlegung (2.1) auf in

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}_e \bar{\mathbf{F}}_p, \quad (2.4)$$

mit  $\bar{\mathbf{F}}_e = J_e^{-1/3} \mathbf{F}_e$  und  $\bar{\mathbf{F}}_p = J_p^{-1/3} \mathbf{F}_p$ .

### 2.1.1. Verzerrungsmaße

Aufgrund der Zerlegung des Deformationsgradienten (2.1) ist es nun möglich, neue zusätzliche Verzerrungstensoren einzuführen, die als Maß für elastische beziehungsweise plastische Verzerrungen dienen.

Mithilfe von  $\mathbf{F}_e : T\mathcal{C}_\kappa \rightarrow T\mathcal{S}$  und  $\mathbf{F}_p : T\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{C}_\kappa$  lassen sich folgende symmetrische Tensoren zweiter Stufe formulieren,

$$\mathbf{b}_e := \mathbf{F}_e \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{F}_e^T, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{C}_e := \mathbf{F}_e^T \mathbf{g} \mathbf{F}_e, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}_p := \mathbf{F}_p^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{F}_p^{-T}. \quad (2.7)$$

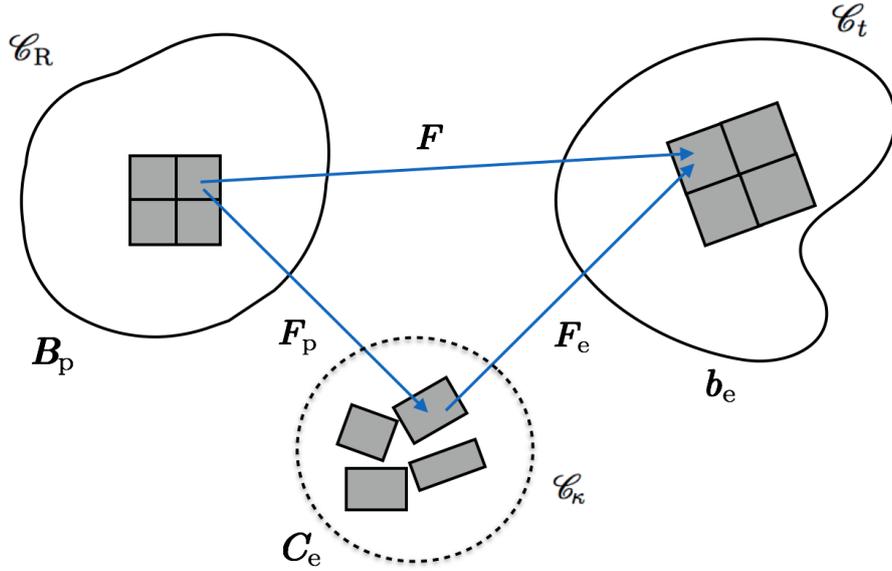
$\boldsymbol{\eta}$  ist dabei der metrische Tensor, der mit  $T\mathcal{C}_\kappa$  assoziiert ist.  $\mathbf{b}_e$  und  $\mathbf{C}_e$  beschreiben also den elastischen Anteil der in (1.42b) beziehungsweise (1.42a) eingeführten Verzerrungstensoren. Dementsprechend werden sie auch *elastischer linker Cauchy-Greenscher Deformationstensor* beziehungsweise *elastischer rechter Cauchy-Greenscher Deformationstensor* genannt, siehe auch Abbildung 2.2. Mit  $\mathbf{B}_p$  sei die *Inverse des plastischen rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors*  $\mathbf{C}_p$  bezeichnet, das heißt  $\mathbf{B}_p = \mathbf{C}_p^{-1}$ . Der plastische rechte Cauchy-Greensche Deformationstensor ist analog zu seinem elastischen Pendant (2.6) definiert,

$$\mathbf{C}_p := \mathbf{F}_p^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_p. \quad (2.8)$$

Die Bezeichnung  $\mathbf{B}_p$  für die Inverse von (2.8) wird an dieser Stelle eingeführt, um die Notation zu vereinfachen, weil im Folgenden hauptsächlich mit  $\mathbf{C}_p^{-1}$  gearbeitet wird.

Mit diesen Definitionen und (2.1) kann folgende Beziehung von  $\mathbf{b}_e$  und  $\mathbf{B}_p$  gefolgert werden,

$$\mathbf{b}_e = \mathbf{F}_e \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{F}_e^T = \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1} \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{B}_p \mathbf{F}^T. \quad (2.9)$$


 Abbildung 2.2.: Definitionsbereiche der Deformationstensoren  $\mathbf{B}_p$ ,  $\mathbf{C}_e$  und  $\mathbf{b}_e$ .

**Raten der Deformationstensoren** Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (2.1) impliziert weiter, dass sich der Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$ , (1.45), additiv zerlegen lässt,

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_e\mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e\dot{\mathbf{F}}_p\mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_e^{-1}. \quad (2.10)$$

Mit dem sogenannten *elastischen Geschwindigkeitsgradienten*  $\mathbf{L}_e := \dot{\mathbf{F}}_e\mathbf{F}_e^{-1}$  und dem *plastischen Geschwindigkeitsgradienten*  $\mathbf{L}_p := \dot{\mathbf{F}}_p\mathbf{F}_p^{-1}$  lässt sich (2.10) umschreiben zu,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e\mathbf{L}_p\mathbf{F}_e^{-1}. \quad (2.11)$$

Um die Änderungen der plastischen Deformationen im Modell zu erfassen, werden die Raten der soeben eingeführten Deformationstensoren wichtig sein. Die Raten von  $\mathbf{b}_e$  und  $\mathbf{B}_p$  sind durch

$$\mathcal{L}_v\mathbf{b}_e = \mathbf{F}[\overline{\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}_e\mathbf{F}^{-T}}]\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\dot{\mathbf{B}}_p\mathbf{F}^T, \quad (2.12a)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}_e(\eta^{-1}2\mathbf{D}_p\eta^{-1})\mathbf{F}_e^T\mathbf{F}^{-T}, \quad (2.12b)$$

miteinander verbunden. Dabei bezeichnet  $\mathcal{L}_v\mathbf{b}_e$  die Lie-Ableitung des elastischen linken Cauchy-Greenschen Deformationstensors  $\mathbf{b}_e$  und  $\mathbf{D}_p := \text{sym}(\boldsymbol{\eta}\mathbf{L}_p)$  den symmetrischen Anteil des plastischen Deformationsratentensors. Die Definition und eine Erläuterung der Lie-Ableitung finden sich in Anhang A.1. Nach Konstruktion ist die Lie-Ableitung von  $\mathbf{b}_e$  invariant unter Rotationen von  $\mathcal{C}_t$ . Der Ausdruck in (2.12b) für  $\dot{\mathbf{B}}_p$  wird durch zeitliche Differentiation der Definition von  $\mathbf{B}_p$  (2.7) erhalten.

Die Zeitableitungen von  $J_e$  und  $J_p$  sind durch

$$\dot{J}_e = J_e \text{tr}[\mathbf{L}_e] \quad (2.13)$$

und

$$\dot{J}_p = J_p \operatorname{tr}[\mathbf{L}_p] \quad (2.14)$$

gegeben.

**Isochore plastische Deformationen** Eine gängige Annahme in der plastischen Beschreibung von Metallen ist, dass sich die plastischen Verzerrungen isochor verhalten [122], das heißt, dass die Determinante des plastischen Anteils des Deformationsgradienten  $J_p$ , (2.2), der Bedingung

$$J_p = 1 \quad (2.15)$$

gehört. Dies führt zu

$$\dot{J}_p = J_p \operatorname{tr}[\mathbf{L}_p] = 0, \quad (2.16)$$

was impliziert, dass  $\operatorname{tr}[\mathbf{L}_p] = 0$  gelten muss. Des Weiteren kann die zeitliche Ableitung von  $J_p$  auch mit  $\dot{\mathbf{B}}_p$  in Verbindung gebracht werden, indem die Determinante des plastischen Deformationsgradienten als  $J_p = [\det(\mathbf{B}_p)]^{-1/2}$  aufgefasst wird. Somit folgt eine äquivalente Formulierung von (2.16),

$$\dot{J}_p = \frac{\partial J_p}{\partial \mathbf{B}_p} \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial t} = -\frac{1}{2} [\det(\mathbf{B}_p)]^{-1/2} \operatorname{tr}[\mathbf{B}_p^{-1} \dot{\mathbf{B}}_p] = 0. \quad (2.17)$$

Außerdem kann für  $J_p = 1$  der Ausdruck für die Rate von  $\mathbf{B}_p$  (2.12b) ersetzt werden durch

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}}_p = -\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}_e (\boldsymbol{\eta}^{-1} 2\tilde{\mathbf{D}}_p \boldsymbol{\eta}^{-1}) \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.18)$$

mit dem deviatorischen Anteil  $\tilde{\mathbf{D}}_p$  von  $\mathbf{D}_p$ ,  $\tilde{\mathbf{D}}_p \equiv \operatorname{dev}[\mathbf{D}_p] = \mathbf{D}_p - \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{D}_p] \boldsymbol{\eta}$  und dem volumenerhaltenden Tensor  $\bar{\mathbf{B}}_p := J_p^{2/3} \mathbf{B}_p$ .

## 2.2. Erhaltungsgleichungen, das Prinzip der virtuellen Leistungen und Dissipation

Dieser Abschnitt widmet sich einerseits den Auswirkungen auf die Massenerhaltung (1.77a), die mit der Berücksichtigung von plastischen Deformationen, insbesondere der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten, einhergehen, und andererseits dem grundlegenden *Prinzip der virtuellen Leistungen* (PVL) für einfache Materialien [93]. Zudem wird die Dissipationsungleichung vorgestellt, die für die Formulierung eines elasto-plastischen Materialmodells essenziell ist. Die Darstellung ist auf einen rein mechanischen Rahmen beschränkt. Thermische Effekte werden also a priori von den Gleichungen ausgeschlossen.

### 2.2.1. Massenerhaltung

Es sei an dieser Stelle an die Transformation des Dichtefeldes,  $\varrho_{\mathbf{R}} := J(\varrho \circ \chi)$ , erinnert. Mithilfe der Zerlegung der Determinante des Deformationsgradienten  $J = J_e J_p$ , (2.2), lässt sich die Dichte in der Referenzkonfiguration  $\varrho_{\mathbf{R}}$  umschreiben zu,

$$\varrho_{\mathbf{R}} = J_p \varrho_{\kappa}, \quad (2.19)$$

wobei  $\varrho_{\kappa} := J_e \varrho$  mit  $\mathcal{C}_{\kappa}$  assoziiert ist [17][79]. Damit kann die Bedingung der Massenerhaltung  $\dot{\varrho}_{\mathbf{R}} = 0$  nun auch formuliert werden als

$$\dot{\varrho}_{\kappa} + \text{tr}[\mathbf{L}_p] \varrho_{\kappa} = 0. \quad (2.20)$$

Das heißt, die zeitliche Änderung von  $\varrho_{\kappa}$  wird durch die Rate der plastischen Deformation bestimmt. Die Annahme von isochorem plastischen Verhalten,  $J_p = 1$ , führt nach (2.20) also zu der Bedingung, dass  $\text{tr}[\mathbf{L}_p]$  verschwindet und dass  $\varrho_{\kappa}$  unabhängig von der Zeit ist.

### 2.2.2. Prinzip der virtuellen Leistungen

In der klassischen Theorie der finiten Elasto-Plastizität wird das elasto-plastische Verhalten eines Körpers durch seine Bewegung  $\chi$ , den plastischen Anteil der Deformation  $\mathbf{F}_p$  und einem Verhärtungsparameter  $\alpha$ , der entweder skalar- oder tensorwertig sein kann, beschrieben. In der Standardtheorie, der *Theorie der internen Variablen*, werden diese drei Typen von Variablen jedoch konzeptionell nicht auf gleiche Art und Weise behandelt. Während  $\chi$  die Lösung der Gleichungen ist, die die Dynamik des Körpers erfassen, werden  $\mathbf{F}_p$  und  $\alpha$  als sogenannte interne Variablen betrachtet, die durch Evolutionsgesetze bestimmt werden. Dem gegenüber steht ein Ansatz von Cermelli et. al [17] und Di Carlo und Quiligotti [26], in dem die innere Struktur über eine sogenannte *Mehrschicht-Kinematik* beschrieben wird. In diesem Ansatz werden auch für  $\mathbf{F}_p$  und  $\alpha$  Erhaltungsgleichungen formuliert, so dass man von einer ‘gleichberechtigten’ Behandlung der Variablen sprechen kann. Für eine detailliertere Ausführung der Mehrschicht-Kinematik wird auf Anhang A.3 verwiesen. Im Folgenden wird in einem kurzen Exkurs die Theorie der internen Variablen näher beleuchtet, da die plastischen Variablen in dieser Arbeit als solche behandelt werden.

**Interne Variablen** Inelastisches Materialverhalten wie z.B. Plastizität zeichnet sich dadurch aus, dass sich neben der beobachtbaren Änderung der Konfiguration durch eine Deformation auch die innere Struktur des Materials ändert. Deshalb werden in der Plastizitätstheorie neben den beobachtbaren Zustandsvariablen wie z.B. der Deformation (*OSV: observable state variables*) auch zusätzliche innere Zustandsvariablen (*ISV: internal state variables*) eingeführt, um den irreversiblen Prozess zu beschreiben.

Die ISV-Theorie ist nach Horstemeyer und Bammann [64] im Wesentlichen ein Materialmodell, das die mechanische Historie eines Materials erfassen kann und welches benutzt werden kann, um mechanische Eigenschaften wie Festigkeit oder Versagen eines Materials vorherzusagen. Insbesondere in den Gebieten der Plastizität, der Viskoelastizität, der Viskoplastizität, dem Kriechen und der Schädigung findet diese Theorie Anwendung. Die

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

Arbeit von Horstemeyer und Bammann [64] liefert zudem einen ausführlichen historischen Überblick über die ISV-Theorie. Zunächst von Coleman und Gurtin 1967 [21] aufgestellt, wurde die ISV-Formulierung von Rice 1971 [109] und Kestin und Rice 1970 [67] weiterentwickelt. In deren Ansatz wurde der aktuelle Zustand eines inelastischen deformierten Festkörpers bestimmt durch die aktuellen Werte des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  und einer Menge von internen Variablen. Die Deformationshistorie wird dabei indirekt in der Evolution der internen Variablen berücksichtigt. Die internen Variablen können sowohl Skalare, Vektoren als auch Tensoren sein.

In [1] charakterisiert Alber die Materialien, deren Verhalten über interne Variablen beschrieben werden, als ‘Materialien mit Gedächtnis’. Es wird in [1] ausführlich erläutert, wie konstituierende Gesetze mit internen Variablen formuliert werden können.

In dieser Arbeit wird die plastische Verzerrung mithilfe eines internen plastischen Verzerrungstensors und der Verhärtungsparameter als eine interne skalare Variable modelliert. Dies entspricht dem klassischen Ansatz der Plastizitätstheorie.

**Prinzip der virtuellen Leistungen** Durch die Behandlung der plastischen Variablen  $\mathbf{F}_p$  und  $\alpha$  als interne Variablen werden diese nicht auf gleicher Basis wie die Bewegungsabbildung  $\chi$  eingeführt. Weder  $\mathbf{F}_p$  noch  $\alpha$  tauchen damit explizit in der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen (PVL) auf. Damit kann das Prinzip analog zu der rein elastischen Theorie in Abschnitt 1.3.2 formuliert werden. In der folgenden Darstellung wird sich aber im Unterschied zu Abschnitt 1.3.2 direkt auf die Referenzkonfiguration bezogen.

Durch die Definition der Menge der virtuellen Geschwindigkeiten, der Test-Geschwindigkeiten, als die Menge aller zulässigen Realisierungen des Typs

$$\tilde{\mathcal{H}} := \{\tilde{\mathbf{V}} : \mathcal{C}_R \rightarrow T\mathcal{S} \mid \tilde{\mathbf{V}}|_{\partial\mathcal{C}_R^D} = \mathbf{0}\} \quad (2.21)$$

wird die Basis für die Formulierung des PVL gelegt. Darin ist  $\partial\mathcal{C}_R^D$  der Dirichlet-Rand von  $\mathcal{C}_R$ , das heißt der Teil von  $\partial\mathcal{C}_R$ , auf dem Positions-Randbedingungen vorgegeben werden, und  $\tilde{\mathbf{V}}|_{\partial\mathcal{C}_R^D}$  ist die Restriktion von  $\tilde{\mathbf{V}}$  auf  $\partial\mathcal{C}_R^D$ . Unter einer virtuellen Geschwindigkeit wird keine reale physikalische Geschwindigkeit verstanden, sondern vielmehr eine gedachte Geschwindigkeit, die dementsprechend eine sogenannte virtuelle Leistung hervorruft, siehe Abschnitt 1.3.2.

In dieser Arbeit werden Materialien ersten Grades betrachtet, das heißt Materialien, die sich über erste Ableitungen der Unbekannten beschreiben lassen. Für ein Material ersten Grades lautet das Prinzip der virtuellen Leistungen

$$\int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{P} : \mathbf{g}\text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = \int_{\mathcal{C}_R} \mathbf{f}_R \cdot \tilde{\mathbf{V}} + \int_{\partial\mathcal{C}_R^N} \mathbf{t}_R \cdot \tilde{\mathbf{V}}, \quad (2.22)$$

das für alle  $\tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}$  gelten muss und die schwache Formulierung der lokalen Impulserhaltung ausdrückt. In (2.22) bezeichnet  $\mathbf{P} : T^*\mathcal{B} \rightarrow T\mathcal{S}$  den ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor,  $\mathbf{f}_R$  ist die Piola-Transformation der Volumenkräfte  $\mathbf{f}$ , welche pro Einheitsvolumen der aktuellen Konfiguration des Körpers definiert sind, das heißt  $\mathbf{f}_R(\mathbf{X}, t) =$

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

$J(\mathbf{X}, t)\mathbf{f}(\chi(\mathbf{X}, t), t)$ ,  $\mathbf{t}_R$  beschreibt die Kontaktkräfte  $\mathbf{t}$ , die auf dem Rand der aktuellen Konfiguration pro Einheitsfläche von  $\mathcal{C}_R$  wirken, und  $\partial\mathcal{C}_R^N$  ist schließlich der Neumann-Rand von  $\mathcal{C}_R$ . Die Kräfte  $\mathbf{t}_R$  und  $\mathbf{t}$  sind durch folgenden Ausdruck miteinander verbunden [13],

$$\mathbf{t}_R(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t)\mathbf{t}(\chi(\mathbf{X}, t), t)\sqrt{\mathbf{N}(\mathbf{X})\cdot\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X}, t)\cdot\mathbf{N}(\mathbf{X})}, \quad (\mathbf{X}, t) \in \partial\mathcal{C}_R^N \times \mathcal{I}. \quad (2.23)$$

Die linke und rechte Seite von (2.22) werden mit  $\mathcal{P}_{\text{int}}(\tilde{\mathbf{V}})$  und  $\mathcal{P}_{\text{ext}}(\tilde{\mathbf{V}})$  bezeichnet. Sie sind definiert über  $\tilde{\mathcal{H}}$  und werden *virtuelle interne Leistung* beziehungsweise *virtuelle externe Leistung* genannt. Es sei bemerkt, dass das Prinzip der virtuellen Leistungen (2.22) auch äquivalent durch Piola-Transformation in seine räumliche Version überführt werden kann, welches für den rein elastischen Rahmen eingeführt wurde (1.68), weil die plastischen Variablen aufgrund der Theorie der internen Variablen nicht explizit in der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen auftauchen. Der Unterschied zur rein elastischen Theorie aus Abschnitt 1.3.2 ergibt sich somit erst in der konstituierenden Form des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{P}$ .

Aufgrund der Tatsache, dass (2.22) für alle  $\tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}$  gilt und auch für alle Teilvolumina von  $\mathcal{C}_R$  formuliert werden kann, kann die schwache Form (2.22) unter entsprechenden Differenzierbarkeitsannahmen mit der folgenden starken Form assoziiert werden, siehe z.B. Kapitel 2 in dem Lehrbuch von Marsden und Hughes [79],

$$\text{Div}(\mathbf{P}) = -\mathbf{f}_R, \quad \text{in } \mathcal{C}_R \times \mathcal{I}, \quad (2.24a)$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{t}_R, \quad \text{auf } \partial\mathcal{C}_R^N \times \mathcal{I}, \quad (2.24b)$$

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T, \quad \text{in } \mathcal{C}_R \times \mathcal{I}. \quad (2.24c)$$

In (2.24b) ist  $\mathbf{N}$  der Normaleneinheitsvektor bezüglich  $\partial\mathcal{C}_R^N$ . Gleichung (2.24c) folgt aus der physikalischen Bedingung, dass die virtuelle interne Leistung dem Prinzip der materiellen Objektivität gehorchen muss [34], siehe auch Abschnitt 1.4.

### 2.2.3. Dissipation

Tritt in einem Material plastisches Fließen auf, so wird ein Großteil der mechanischen Arbeit dissipiert, das heißt die Arbeit wird durch Änderung der Mikrostruktur verbraucht. Dieser dissipative Charakter wird durch die Dissipationsungleichung berücksichtigt, die im Folgenden erläutert wird. Sie stellt eine spezielle Formulierung des zweiten Satzes der Thermodynamik dar. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich allerdings auf den rein mechanischen Rahmen der Kontinuumsmechanik und somit werden thermische Aspekte aus der Betrachtung ausgeschlossen.

**Dissipationsungleichung** Sei  $V_R \in \mathcal{C}_R$  eine feste Teilmenge der Referenzkonfiguration. Dann ist die *Dissipation*, die mit  $V_R$  assoziiert ist, definiert als [17][51]

$$\int_{V_R} D_R = -\int_{V_R} \dot{\psi}_R + \mathcal{P}_{\text{net}}(V_R) \geq 0, \quad (2.25)$$

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

wobei  $D_R$  die Dissipationsdichte und  $\psi_R$  die freie Energiedichte des Körpers ist. Die Notation  $\overline{(\cdot)}$  bedeutet für den ersten Term, dass die zeitliche Ableitung des Integrals gebildet wird. Die Netto-Leistung  $\mathcal{P}_{\text{net}}(V_R)$  ist definiert als

$$\mathcal{P}_{\text{net}}(V_R) = \int_{\partial V_R} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{V} + \int_{V_R} \mathbf{f}_R \cdot \mathbf{V} = \int_{V_R} \mathbf{P} : \mathbf{g} \text{Grad}(\mathbf{V}), \quad (2.26)$$

so dass die Impulserhaltung in (2.25) berücksichtigt wird. Ebenso wird auch die Energieerhaltung in der Dissipationsungleichung beachtet. Für Ausführungen zu diesem Aspekt wird auf die Arbeit von Truesdell und Noll verwiesen [129]. Durch Einsetzen der Netto-Leistung (2.26) in die Dissipationsungleichung (2.25) und durch Anwendung eines gängigen Lokalisierungsarguments, siehe Anhang A.2, ergibt sich die lokale Form der Dissipation zu

$$D_R = -\dot{\psi}_R + \mathbf{S} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \geq 0, \quad (2.27)$$

wobei  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} : T^* \mathcal{B} \rightarrow T \mathcal{B}$  der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor ist. Die Definitionen der Raten des Deformationsgradienten (1.45) und des rechten Cauchy-Greenschen Deformationstensors (1.46) sind darin benutzt worden, um den zweiten Term in (2.27) zu erhalten.

Durch die Einführung der Größen  $\psi_\kappa = J_p^{-1} \psi_R$  und  $D_\kappa = J_p^{-1} D_R$ , die beide pro Einheitsvolumen der Zwischenkonfiguration gemessen werden, kann die Dissipationsungleichung (2.27) wie folgt in einen Ausdruck der Zwischenkonfiguration transformiert werden

$$D_\kappa = -\dot{\psi}_\kappa + \mathbf{S}_\kappa : \mathbf{F}_p^{-T} \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \mathbf{F}_p^{-1} \geq 0, \quad (2.28)$$

wobei  $\mathbf{S}_\kappa = J_p^{-1} \mathbf{F}_p \mathbf{S} \mathbf{F}_p^T$  den zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor bezeichnet, der mit dem natürlichen Zustand des Körpers assoziiert ist. Die Formulierung der Dissipationsungleichung bezüglich der Zwischenkonfiguration  $\mathcal{C}_\kappa$  ist einerseits wichtig, um den konstituierenden Ausdruck des Spannungstensors im Folgenden zu definieren und andererseits, um die Evolutionsgesetze für die plastischen Verzerrungen und die Verhärtungsvariable aufzustellen.

### 2.3. Konstituierende Theorie

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Formulierung von elasto-plastischen Materialgesetzen, die physikalisch konsistent, das heißt konsistent zu den Erhaltungsgleichungen und der thermodynamischen Dissipationsungleichung sind. Es werden zunächst einige übliche Annahmen der konstituierenden Theorie vorgestellt, eine Fließbedingung zur Unterscheidung des elastischen und plastischen Bereichs eingeführt und schließlich auf Basis des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation die Evolutionsgesetze der plastischen Variablen hergeleitet.

In dieser Arbeit werden ausschließlich *gleichmäßige Materialien* betrachtet. Damit sind solche Materialien gemeint, die nach Epstein und Maugin [31] in jedem materiellen Punkt aus dem gleichen Material sind. Somit kann die konstituierende Beschreibung des

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

plastischen Verhaltens der Materialien unter der Berücksichtigung des Prinzips der materiellen Gleichmäßigkeit [20][30][31][32][33][81][82] erfolgen.

Weil in dieser Arbeit der Theorie der internen Variablen gefolgt wird, tauchen die plastischen Variablen, das heißt der plastische Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_p$  und die Verhärtungsvariable  $\alpha$ , erstmals explizit in der Formulierung der konstituierenden Gesetze anstatt in der schwachen Formulierung der Erhaltungsgleichungen auf.

In Übereinstimmung mit der klassischen Theorie der Elasto-Plastizität, siehe z.B. [20], kann die freie Energie  $\psi_\kappa$  für einen materiell gleichmäßigen Körper konstituierend ausgedrückt werden als eine Funktion, die allein vom elastischen Deformationstensor  $\mathbf{F}_e$  und dem Verhärtungsparameter  $\alpha$  abhängt. Weil außerdem konstituierende Gesetze objektiv sein müssen, siehe Abschnitt 1.4, gilt

$$\hat{\psi}_R(\mathbf{F}, \mathbf{F}_p, \alpha, X) = J_p \hat{\psi}_\kappa(\mathbf{C}_e, \alpha), \quad (2.29)$$

wobei  $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \mathbf{g} \mathbf{F}_e$  den elastischen Cauchy-Greenschen Deformationstensor beschreibt [20]. Dass  $\mathbf{C}_e$  ein objektives Verzerrungsmaß ist, kann leicht gezeigt werden: Sei  $\mathbf{Q}$  eine orthogonale Matrix, so dass  $\mathbf{Q}\mathbf{F}$  der gedrehte Deformationsgradient ist. Dann gilt für den transformierten elastischen Cauchy-Greenschen Deformationstensor  $\mathbf{C}_e^*$  unter Zuhilfenahme der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.1),

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_e^* &= \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1} \\ &= \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}_p^{-1} \\ &= \mathbf{C}_e. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Das heißt unter Berücksichtigung der Objektivität hängt  $\psi_\kappa$  konstituierend von  $\mathbf{C}_e$  und  $\alpha$  ab. Die Notation  $\hat{f}$  bedeutet, dass hier für eine gegebene abhängige konstituierende Variable  $f$  ein konstituierender Ausdruck von  $f$  gemeint ist.

### Entkopplung der freien Energiefunktion

Um einerseits der klassischen Theorie der Elasto-Plastizität zu folgen und andererseits die weiteren Rechnungen zu vereinfachen, sei die freie Energiefunktion  $\hat{\psi}_\kappa(\mathbf{C}_e, \alpha)$  in der entkoppelten Form [122]

$$\hat{\psi}_\kappa(\mathbf{C}_e, \alpha) = \hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e) + \hat{\mathfrak{H}}_\kappa(\alpha), \quad (2.31)$$

gegeben, wobei  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa(\alpha)$  ein Verhärtungspotential bezeichnet.

Durch Einsetzen der Zeitableitung von  $\hat{\psi}_\kappa$  in den Ausdruck der Dissipationsungleichung bezüglich der Zwischenkonfiguration (2.28) und unter der Annahme, dass das Material hyperelastisches Verhalten aus seinem natürlichen Zustand heraus erfährt, kann gezeigt werden, dass die Dissipationsungleichung erfüllt wird, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

$$\mathbf{S}_\kappa = 2 \frac{\partial \hat{\psi}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e} = 2 \frac{\partial \hat{W}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e}, \quad (2.32a)$$

$$D_\kappa = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\eta} \mathbf{L}_p + q \dot{\alpha} \geq 0, \quad (2.32b)$$

mit

$$\boldsymbol{\Sigma} := \boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e \mathbf{S}_\kappa, \quad (2.33a)$$

$$q := -\frac{\partial \hat{\psi}_\kappa}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \hat{\mathfrak{H}}_\kappa}{\partial \alpha}. \quad (2.33b)$$

Für eine gegebene explizite Form von  $\hat{W}_\kappa$  und  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa$  drücken die Gleichungen (2.32a) und (2.33b)  $\mathbf{S}_\kappa$  beziehungsweise  $q$  konstituierend und in Einklang mit der Dissipationsungleichung (2.28) aus.

In den Gleichungen (2.33) bezeichnen  $\boldsymbol{\Sigma}$  und  $q$  den Mandelschen Spannungstensor beziehungsweise die verallgemeinerte Kraft, die dual zu der Verhärtungsrate  $\dot{\alpha}$  ist. Aufgrund der Annahme von isochoren plastischen Deformationen verschwindet die Spur von  $\mathbf{L}_p$ , siehe (2.17), was bedeutet, dass nur der deviatorische Anteil von  $\boldsymbol{\Sigma}$  durch die residuale Dissipationsungleichung (2.32b) eingeschränkt wird. Zudem hängt die Spannung nicht von der Verhärtungsfunktion und, analog dazu, die kraft-ähnliche Variable  $q$  nicht von der Deformation ab, was eine Konsequenz aus der Entkopplung der freien Energiefunktion ist.

### Isotropie

Obwohl auch einige Algorithmen für anisotropes, elasto-plastisches Materialverhalten unter großen Deformationen existieren, siehe z.B. [41][87], basieren die meisten numerischen Methoden, die in der Literatur zu finden sind, auf der Annahme von isotropem Materialverhalten [83][91][119][122][136].

Die Annahme von Isotropie impliziert zumindest zwei große Vorteile neben anderen offensichtlichen Vereinfachungen, die direkt auf diese materielle Symmetrie zurückzuführen sind: Der erste Vorteil ist, dass der plastische Drall in den Gleichungen nicht auftritt, siehe z.B. [82] für einige Bemerkungen zu diesem Thema. Der zweite Vorteil ist, dass die Fließregel vollständig durch den symmetrischen Tensor  $\mathbf{B}_p$ , (2.7), beschrieben werden kann, welcher die Inverse des plastischen metrischen Tensors  $\mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}_p$  darstellt. Damit wird also kein Evolutionsgesetz für  $\mathbf{F}_p$  benötigt. Aufgrund der genannten Vorteile wird in dieser Arbeit ausschließlich isotropes Materialverhalten betrachtet. Dies hat zur Folge, dass  $\mathbf{B}_p$  als interne plastische Variable gewählt wird anstelle des plastischen Anteils des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_p$ .

Im Folgenden werden einige Konsequenzen aus der Annahme von isotropem Materialverhalten erläutert, die für die Beschreibung des Materialmodells von Bedeutung sind. Für ein hyperelastisches, isotropes Material hängt die gespeicherte Energiefunktion  $\hat{W}_\kappa$  von  $\mathbf{C}_e$  allein durch dessen Invarianten ab, das heißt

$$I_1 = \hat{I}_1(\mathbf{C}_e) = \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e), \quad (2.34a)$$

$$I_2 = \hat{I}_2(\mathbf{C}_e) = \frac{1}{2} \{ [\hat{I}_1(\mathbf{C}_e)]^2 - \text{tr}[(\boldsymbol{\eta}^{-1} \mathbf{C}_e)^2] \}, \quad (2.34b)$$

$$I_3 = \hat{I}_3(\mathbf{C}_e) = \det(\mathbf{C}_e). \quad (2.34c)$$

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

Dieser Schluss kann hier analog zu Abschnitt 1.4 gezogen werden, siehe auch [14][75]. Diese Eigenschaft impliziert notwendigerweise, dass der Mandelsche Spannungstensor  $\boldsymbol{\Sigma}$ , welcher nach Definition der Gleichung  $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1} = \boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\Sigma}^T$  gehorchen muss, selbst symmetrisch ist, das heißt

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}^T. \quad (2.35)$$

Allerdings erhält man durch Setzen von  $\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e) = \hat{W}_\kappa(\hat{I}_1(\mathbf{C}_e), \hat{I}_2(\mathbf{C}_e), \hat{I}_3(\mathbf{C}_e))$ , dass

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\beta_1\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1} + 2\beta_2[I_1\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1} - \boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1}\mathbf{C}_e\boldsymbol{\eta}^{-1}] + 2\beta_3I_3\boldsymbol{\eta}^{-1}. \quad (2.36)$$

Darin wird die Notation  $\{\beta_i = \frac{\partial \hat{W}_\kappa}{\partial I_i}\}_{i=1}^3$  verwendet. Damit wird die Symmetrie des Mandelschen Spannungstensors (2.35) direkt ersichtlich, weil  $\mathbf{C}_e$  ein symmetrischer Tensor ist. Die Invarianten  $\{I_i\}_{i=1}^3$ , die in (2.34) als Funktionen von  $\mathbf{C}_e$  ausgedrückt werden, können äquivalent als Funktionen von  $\mathbf{b}_e$  geschrieben werden. Zudem sei darauf hingewiesen, dass  $\{\beta_i\}_{i=1}^3$  konstituierende Funktionen allein von den Invarianten sind und dass mithilfe der kinematischen Beziehung von  $\mathbf{b}_e$  und  $\mathbf{B}_p$  (2.9) jede Abhängigkeit von  $\mathbf{b}_e$  auch durch  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{B}_p$  ausgedrückt werden kann.

Aufgrund der Symmetrie von  $\boldsymbol{\Sigma}$  wird der erste Summand der rechten Seite der Dissipationsungleichung (2.32b) zu

$$\boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{\eta}\mathbf{L}_p = \boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{D}_p, \quad (2.37)$$

was bedeutet, dass nur der symmetrische Anteil der plastischen Deformationsrate,  $\mathbf{D}_p := \text{sym}(\boldsymbol{\eta}\mathbf{L}_p)$ , zur Dissipation beiträgt. Dieses Resultat schließt also den plastischen Drall, das heißt den anti-symmetrischen Anteil von  $\boldsymbol{\eta}\mathbf{L}_p$  aus, welcher daher nicht durch thermodynamische Argumente bestimmt werden kann [82]. Durch Anwendung der kinematischen Beziehungen (2.12) und aufgrund der Tatsache, dass die Spur von  $\mathbf{L}_p$  für isochore plastische Deformationen verschwindet, kann die Dissipationsungleichung (2.32b) umgeschrieben werden zu

$$D_\kappa = -\frac{1}{2}(\mathbf{g} \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa)\mathbf{b}_e^{-1}) : \mathcal{L}_v\mathbf{b}_e + q\dot{\alpha} \geq 0, \quad (2.38)$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}_\kappa = \mathbf{F}_e\mathbf{S}_\kappa\mathbf{F}_e^T = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{F}_e^{-T}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}_e^T$  der Kirchhoffsche Spannungstensor ist, der mit dem natürlichen Zustand des Körpers assoziiert ist.

Des Weiteren ist es auch sinnvoll den materiellen Mandelschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\Sigma}_R = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$  einzuführen, wobei  $\boldsymbol{\tau} = J_p\boldsymbol{\tau}_\kappa$  (mit  $J_p = 1$ ) gesetzt wird. Der materielle Mandelsche Spannungstensor wird insbesondere in der Formulierung einer phänomenologischen Fließregel in Abschnitt 2.3.3 wichtig sein. Die konstituierenden Ausdrücke von  $\boldsymbol{\tau}_\kappa$  und  $\boldsymbol{\Sigma}_R$  lauten

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_\kappa(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = 2\beta_1\mathbf{b}_e + 2\beta_2(I_1\mathbf{b}_e - \mathbf{b}_e\mathbf{g}\mathbf{b}_e) + 2\beta_3I_3\mathbf{g}^{-1}, \quad (2.39a)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_R(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = (2\beta_1 + 2\beta_2I_1)\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}_p - 2\beta_2\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}_p\mathbf{C}\mathbf{B}_p + 2\beta_3I_3\mathbf{G}^{-1}. \quad (2.39b)$$

Diese beiden Ausdrücke erhält man über die Beziehungen  $\boldsymbol{\tau}_\kappa = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{F}_e^{-T}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F}_e^T$  und  $\boldsymbol{\Sigma}_R = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{g}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T}$  sowie der speziellen Form des Mandelschen Spannungstensors für ein hyperelastisches, isotropes Material (2.36). Im Gegenteil zu  $\boldsymbol{\Sigma}$  ist  $\boldsymbol{\Sigma}_R$  im Allgemeinen jedoch

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

nicht symmetrisch, das heißt  $\Sigma_{\mathbf{R}} \neq \Sigma_{\mathbf{R}}^{\mathbf{T}}$ . Allerdings erfüllt er die Eigenschaften

$$\Sigma_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1} = (\Sigma_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \mathbf{G}^{-1})^{\mathbf{T}}, \quad (2.40a)$$

$$\mathbf{G} \Sigma_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{p}}^{-1} = (\mathbf{G} \Sigma_{\mathbf{R}} \mathbf{B}_{\mathbf{p}}^{-1})^{\mathbf{T}}, \quad (2.40b)$$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{p}} \mathbf{G} \Sigma_{\mathbf{R}} = (\mathbf{B}_{\mathbf{p}} \mathbf{G} \Sigma_{\mathbf{R}})^{\mathbf{T}}. \quad (2.40c)$$

Die erste Gleichung folgt direkt aus seiner Definition, während die zweite und die dritte aus der Isotropie folgen und ein Ausdruck des Prinzips der *G-Kovarianz* [82] sind.

### 2.3.1. Ratenunabhängige Plastizität und Fließkriterien

In der ratenunabhängigen Plastizität werden Rateneffekte in den plastischen Gleichungen vernachlässigt. Es wird angenommen, dass sich plastische Verzerrungen instantan und unabhängig von der Zeit auf eine bestimmte Art und Weise entwickeln. Dem gegenüber steht die ratenabhängige Plastizität, deren zugrundeliegende Theorie üblicherweise Visko-plastizitätstheorie genannt wird [5][51][68][76][83][97][126].

In dieser Arbeit wird die Annahme von ratenunabhängiger Plastizität getroffen. Dies erfordert die Einführung eines Fließkriteriums [17][54][122], welches zur Unterscheidung von elastischem und plastischem Materialverhalten dient. Zu diesem Zweck seien  $\mathcal{T}_{\tau}$  und  $\mathcal{T}_q$  die Räume der Kirchhoffschen Spannungen und der spannungsähnlichen Verhärtungsfunktion  $q$ , siehe (2.33b), und  $f_{\tau} : \mathcal{T}_{\tau} \times \mathcal{T}_q \rightarrow \mathbb{R}$  sei ein **Fließkriterium** (auch: Fließfunktion), die durch

$$f_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) = \varphi_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}) + \sqrt{\frac{2}{3}}[q - \tau_y], \quad (2.41)$$

definiert ist. In (2.41) ist der positive Parameter  $\tau_y$  die sogenannte **Fließspannung** (englisch: ‘yields stress’) und die Funktion  $\varphi_{\tau}$  hängt von  $\boldsymbol{\tau}_{\kappa}$  durch den deviatorischen Anteil von  $\boldsymbol{\tau}_{\kappa}$  ab, siehe (2.43), um konsistent mit dem Ausdruck der Dissipationsungleichung (2.38) zu bleiben.

Die Menge

$$\mathcal{A} = \{(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) \in \mathcal{T}_{\tau} \times \mathcal{T}_q : f_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) \leq 0\} \quad (2.42)$$

wird **Menge der zulässigen Spannungen** genannt. Die Ungleichung  $f_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) < 0$  definiert den instantanen elastischen Bereich des Materials. Plastisches Fließen tritt ein, wenn der Rand von  $\mathcal{A}$  erreicht wird, das heißt, wenn  $f_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) = 0$  gilt. Der Rand von  $\mathcal{A}$  wird **Fließfläche** (englisch: ‘yield surface’) genannt. Der Bereich  $f_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) > 0$  definiert in der ratenunabhängigen Plastizität einen physikalisch unzulässigen Zustand. In Übereinstimmung mit der klassischen **von Mises  $J_2$ -Plastizitätstheorie** [85] wird die Funktion  $\varphi_{\tau}$  definiert als

$$\varphi_{\tau}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa})\| = \sqrt{\text{tr}[(\mathbf{g} \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}))^2]}. \quad (2.43)$$

Damit erhält man

$$\frac{\partial f_{\tau}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\kappa}}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa}, q) = \mathbf{g} \mathbf{n} \mathbf{g} \equiv \mathbf{n}^{\flat}, \quad \mathbf{n} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa})\|}, \quad (2.44)$$

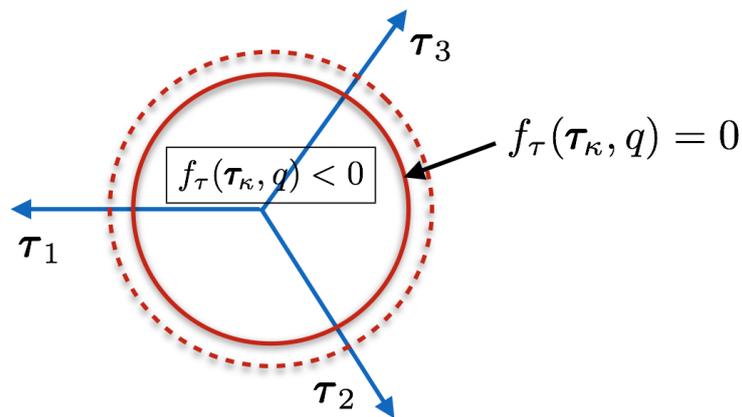


Abbildung 2.3.: Menge der zulässigen Spannungen  $\mathcal{A}$  für ein von Mises  $J_2$ -Plastizitätsmodell. Das Innere des rot berandeten Kreises stellt den elastischen Bereich,  $f_\tau(\tau_\kappa, q) < 0$ , dar. Der Kreisrand beschreibt die Fließfläche,  $f_\tau(\tau_\kappa, q) = 0$ , auf der plastisches Fließen eintritt. Die gestrichelte Kreislinie steht für eine veränderte Fließfläche nach plastischem Fließen mit isotropem Verhärtungsverhalten.

mit  $\|\mathbf{n}\| = 1$ , wobei  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor zur Fließfläche bezeichnet. Geschieht das plastische Fließen entlang dieser Normalen, wird von **assoziativer Plastizität** gesprochen. Insbesondere zur Modellierung des elasto-plastischen Materialverhaltens von Metallen wird der von Mises  $J_2$ -Plastizitätstheorie gefolgt. Aufgrund der Konvexität der Fließfunktion (2.41) ist die Menge der zulässigen Spannungen  $\mathcal{A}$  (2.42) in der von Mises  $J_2$ -Plastizität eine konvexe Menge im Spannungsraum, der durch die Hauptspannungen aufgespannt wird, siehe z.B. [122] und Abbildung 2.3. Unter den Hauptspannungen  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  sind die drei reellen Eigenwerte des symmetrischen Kirchhoffschen Spannungstensors  $\tau$  verstanden.

### 2.3.2. Prinzip der maximalen plastischen Dissipation und Fließregeln

Das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation (PMPD) geht auf von Mises [86] zurück. Es wurde 1948 von Hill [60] aufgegriffen und bildet seitdem die Grundlage der assoziativen Plastizität. Es ist zentral in der klassischen mathematischen Formulierung der Plastizität [28][127].

**PMPD:** Das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation besagt, dass sich für jeden gegebenen plastischen Verzerrungszustand von allen möglichen Spannungen diejenigen einstellen, bei denen bei der Dissipation ein Maximum zu finden ist. Die Fließbedingung darf dabei als Nebenbedingung nicht verletzt werden.

Aufgrund des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation werden in der klassischen Formulierung der Plastizität die Formen der Evolutionsgesetze für die plastischen Verzer-

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

rungen und die Verhärtungsvariable aufgestellt.

Um das Prinzip zu formulieren, muss die Dissipation  $D_\kappa$  als eine nicht-negative, reellwertige Funktion über der Menge  $\mathcal{A}$  definiert sein. Dem Prinzip der maximalen plastischen Dissipation folgend erreicht  $D_\kappa$  sein Maximum, wenn es für die Spannung  $\boldsymbol{\tau}_\kappa$  und den Verhärtungsparameter  $q$  berechnet wird, welche das Material charakterisieren. In Formeln lässt sich dies wie folgt ausdrücken,

$$D_\kappa(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = \max_{(\boldsymbol{r}, \vartheta) \in \mathcal{A}} \{D_\kappa(\boldsymbol{r}, \vartheta)\}, \quad (2.45)$$

mit der bezüglich des natürlichen Zustandes definierten Dissipation  $D_\kappa$ , siehe (2.38). Diese Maximierung muss unter der Nebenbedingung durchgeführt werden, dass sowohl  $\boldsymbol{r}$  als auch  $\vartheta$  zulässig sind. Das PMPD ist somit ein Optimierungsproblem unter Nebenbedingungen, welches mithilfe der Lagrangemethode behandelt werden kann [92]. Dazu sei die Lagrangefunktion

$$L_\kappa(\boldsymbol{r}, \vartheta, \gamma_\tau) = D_\kappa(\boldsymbol{r}, \vartheta) - \gamma_\tau f_\tau(\boldsymbol{r}, \vartheta), \quad (\boldsymbol{r}, \vartheta) \in \mathcal{A}, \quad (2.46)$$

eingeführt, wobei  $\gamma_\tau \in \mathbb{R}$  ein noch unbekannter Lagrange-Multiplikator, der sogenannte **plastische Multiplikator**, ist. Die Maximierung der Lagrangefunktion (2.46) führt für das von Mises  $J_2$ -Fließkriterium, (2.41) und (2.43), auf das folgende Sattelpunktproblem, welches die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung bezüglich  $L_\kappa$  bestimmt [119][122], d.h.

$$\frac{\partial L_\kappa}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\nu \boldsymbol{b}_e = -2\gamma_\tau \boldsymbol{n} \boldsymbol{g} \boldsymbol{b}_e, \quad (2.47a)$$

$$\frac{\partial L_\kappa}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = \gamma_\tau \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (2.47b)$$

$$\gamma_\tau \geq 0, \quad f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) \leq 0, \quad \gamma_\tau f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0. \quad (2.47c)$$

Die Gleichungen (2.47) bilden das Karush-Kuhn-Tucker (KKT) System. Sie werden demzufolge auch als KKT-Bedingungen bezeichnet [92].

**Fließregel & Verhärtungsregel** Mithilfe der Definition der Lie-Ableitung von  $\boldsymbol{b}_e$  (2.12a) kann die Optimalitätsbedingung (2.47a) durch  $\dot{\boldsymbol{B}}_p$  ausgedrückt werden, das heißt

$$\dot{\boldsymbol{B}}_p = -2\gamma_\tau \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{n} \boldsymbol{g} \boldsymbol{b}_e) \boldsymbol{F}^{-T}. \quad (2.48)$$

Eine Konsequenz aus der Darstellung des konstituierenden Ausdrucks von  $\boldsymbol{\tau}_\kappa$  (2.39a) ist, dass das Produkt  $\boldsymbol{n} \boldsymbol{g} \boldsymbol{b}_e$  kommutiert. Mit dieser Tatsache und unter Ausnutzung der Identitäten  $\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{g}^{-1} \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{G} \text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}_R) \boldsymbol{F}^T$  kann der Ausdruck für die Rate von  $\boldsymbol{B}_p$  (2.48) äquivalent umgeschrieben werden zu

$$\dot{\boldsymbol{B}}_p = -2\gamma_\tau \boldsymbol{B}_p \boldsymbol{G} \frac{\text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}_R)}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|}. \quad (2.49)$$

Dazu sei an dieser Stelle noch einmal daran erinnert, dass in der vorliegenden Arbeit die Annahme von isochorem plastischen Deformationsverhalten (2.15) getroffen wird, was zu

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

der Identität  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\kappa$  führt. Gemäß der KKT-Bedingungen (2.47c) ist  $\gamma_\tau$  in der Fließregel (2.49) null, wenn sich das Material im elastischen Bereich befindet, das heißt, wenn  $f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) < 0$  gilt, und  $\gamma_\tau$  ist größer als null, wenn die sogenannte Fließfläche erreicht wird, das heißt, wenn  $f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0$  ist. Für den Fall, dass  $\gamma_\tau$  positiv ist, wird der Multiplikator durch die Konsistenzbedingung

$$\gamma_\tau \dot{f}(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0 \quad (2.50)$$

bestimmt [122]. Die Konsistenzbedingung gewährleistet, dass die Spannung für positives  $\gamma_\tau$  auf der Fließfläche verharret. Aufgrund der Konsistenzbedingung (2.50) ist  $\gamma_\tau$  durch den folgenden Ausdruck bestimmt

$$\gamma_\tau = \frac{\mathbf{n}^b : J_e \mathbf{a} : \mathbf{d}}{\mathbf{n}^b : J_e \mathbf{a} : \mathbf{n}^b + (2/3) \partial_\alpha^2 \hat{\mathfrak{H}}_\kappa} = \frac{-\mathbf{n}^b : J_e \mathbb{b}_p : \frac{1}{2} \mathcal{L}_v \mathbf{b}_e}{\mathbf{n}^b : J_e \mathbf{a} : \mathbf{n}^b}, \quad (2.51)$$

mit

$$J_e \mathbf{a} = J_e \mathbf{c} + \boldsymbol{\tau}_\kappa \otimes \bar{\mathbf{g}}^{-1} + \mathbf{g}^{-1} \otimes \boldsymbol{\tau}_\kappa, \quad (2.52a)$$

$$J_e \mathbf{c} = \mathbf{F}_e \otimes \mathbf{F}_e : \mathbf{C}_\kappa : \mathbf{F}_e^T \otimes \mathbf{F}_e^T, \quad \mathbf{C}_\kappa = 4 \frac{\partial^2 \hat{W}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e^2}(\mathbf{C}_e), \quad (2.52b)$$

$$J \mathbb{b}_p = \mathbf{F} \otimes \mathbf{F} : \mathbb{B}_p : \mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbb{B}_p = 2 \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{B}_p}(\mathbf{C}, \mathbf{B}_p), \quad (2.52c)$$

und  $\mathbf{d}$  dem symmetrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten. Die Tensoren vierter Stufe  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{c}$  werden Tensor der effektiven elastischen Moduli beziehungsweise räumlicher Elastizitätstensor genannt. Außerdem ist  $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}, \mathbf{B}_p) = J_p \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{S}_\kappa \mathbf{F}_p^{-T}$  der konstituierende Ausdruck des materiellen zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors. Gemäß (2.51) ist der Multiplikator  $\gamma_\tau$  (wenn er nicht null ist) definiert als eine Funktion von  $\mathbf{F}$ ,  $\dot{\mathbf{F}}$ ,  $\mathbf{B}_p$  und  $\alpha$ , das heißt

$$\gamma_\tau = \hat{\gamma}_\tau(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha). \quad (2.53)$$

Es sei bemerkt, dass  $\hat{\gamma}_\tau$  nicht von  $\alpha$  abhängt, wenn  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa$  eine quadratische Funktion von  $\alpha$  ist (das heißt im Falle von linearer Verhärtung), weil sich dann der Term  $\partial_\alpha^2 \hat{\mathfrak{H}}_\kappa$  zu einer Konstanten reduziert.

Zusammenfassend können die KKT-Gleichungen (2.47a) und (2.47b), die in dieser Form oft in der von Mises  $J_2$ -Plastizitätstheorie verwendet werden, als Evolutionsgesetze für die plastischen Variablen  $\mathbf{B}_p$  und  $\alpha$  umgeschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{B}}_p = \begin{cases} -\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha), & \text{wenn } \gamma_\tau = \hat{\gamma}_\tau(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha) > 0, \quad (f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0), \\ \mathbf{0} & \text{wenn } \gamma_\tau = 0, \quad (f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) < 0), \end{cases} \quad (2.54a)$$

$$\dot{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\gamma}_\tau(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha), & \text{wenn } \gamma_\tau = \hat{\gamma}_\tau(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha) > 0, \quad (f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0), \\ 0 & \text{wenn } \gamma_\tau = 0, \quad (f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) < 0), \end{cases} \quad (2.54b)$$

wobei die negative tensorwertige Funktion  $\hat{\mathbf{R}}$  durch die rechte Seite von (2.49) definiert ist. Die Definition von  $\hat{\mathbf{R}}$  hängt dabei vom Modell ab, das heißt von der Wahl der gespeicherten Energiedichtefunktion  $\hat{W}_\kappa$ , welche die Spannung und den Elastizitätstensor bestimmt, und von der Wahl des Verhärtungspotentials  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa$ , welches zur Bestimmung von  $\gamma_\tau$  beiträgt. Für den Fall, dass keine Verhärtung betrachtet wird, wird die Abhängigkeit von  $\hat{\mathbf{R}}$  von  $\alpha$  von vornherein vernachlässigt. Dieser Fall wird *perfekte Plastizität* genannt [91][122][137].

### 2.3.3. Phänomenologische Fließregeln

Phänomenologische Fließregeln erlauben größere Freiheiten bei der Formulierung der Evolutionsgesetze. Zentral ist es, das in Experimenten beobachtete Materialverhalten geeignet zu beschreiben. Dazu können auch mehr Variablen benutzt werden als dies im klassischen Modell der Fall ist. Es muss jedoch gewährleistet sein, dass die auf diese Weise gefundenen phänomenologischen Fließregeln der Dissipationsungleichung gehorchen. Hingegen muss das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation nicht notwendigerweise unter der Nebenbedingung einer Fließfunktion betrachtet werden. Vielmehr kann eine Fließfunktion auch durch die Wahl eines speziellen plastischen Multiplikators berücksichtigt werden. Wenn ein solcher Ansatz verfolgt wird, wird also keine Lagrangemethode zur Bestimmung der Optimalitätsbedingungen wie im vorherigen Abschnitt 2.3.2 angewendet. Es werden somit auch keine KKT-Bedingungen in das System eingeführt. Einige Beispiele für phänomenologische Fließregeln finden sich z.B. in [83]. Die in [83] präsentierten Fließregeln werden unter anderem zur Modellierung von plastischen Wellen im sogenannten Hopkinson Stab verwendet.

**Beispiel einer phänomenologischen Fließregel aus der Biomechanik** In einigen biomechanischen Anwendungen, wie zum Beispiel in solchen, die sich mit der strukturellen Adaption von Zellaggregaten befassen, wurden plastizitätsähnliche Modelle entwickelt, in denen für gewöhnlich keine Verhärtung berücksichtigt wird. Außerdem wird in diesen Modellen der symmetrische Anteil der plastischen Deformationsrate  $\mathbf{D}_p$  von einer Spannung bedingt, welche einem Gesetz der Form aus [42] gehorcht,

$$\mathbf{D}_p = \zeta_p \boldsymbol{\eta} \text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}) \boldsymbol{\eta} = \zeta_p \mathbf{F}_e^T \mathbf{g} \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa) \mathbf{F}_e^{-T} \boldsymbol{\eta}, \quad (2.55)$$

wobei  $\zeta_p$  ein plastischer Multiplikator ist. Mithilfe der Definition der Rate von  $\mathbf{B}_p$  (2.12b) und der Identität  $\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa) = J_p^{-1} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G} \text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}_R) \mathbf{F}^T$  wird die Fließregel (2.55) zu

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -2 (J_p^{-1} \zeta_p) \mathbf{B}_p \mathbf{G} \text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}_R). \quad (2.56)$$

In (2.55) und (2.56) ist  $\zeta_p$  durch <sup>1</sup>

$$\zeta_p = J_p \tilde{\lambda} \left[ \frac{\varphi(\boldsymbol{\tau}) - \sqrt{(2/3)} \tau_y}{\varphi(\boldsymbol{\tau})} \right]_+ \quad (2.57)$$

definiert, wobei  $\tilde{\lambda}$  ein nicht-negativer phänomenologischer Koeffizient mit Einheiten  $[\tilde{\lambda}] = (\text{s} \cdot \text{N}/\text{mm}^2)^{-1}$  und  $\varphi(\boldsymbol{\tau}) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|$  ist. Die Notation  $[f]_+$  bedeutet, dass  $[f]_+$  gleich  $f$  ist,

<sup>1</sup>Es sei angemerkt, dass sich die Definition von  $\gamma_p$  in [42] leicht von der Definition hier unterscheidet, wobei der Ausdruck für  $\gamma_p$  in (2.57) zur Konsistenz mit der restlichen Arbeit eingeführt wurde.

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

wenn  $f > 0$ , und ansonsten  $[f]_+ = 0$  gilt. Weil in dieser Arbeit die Bedingung  $J_p = 1$  angewendet wird, gilt, dass  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_\kappa$  ist, und (2.56) wird zu

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -2\gamma_p \mathbf{B}_p \mathbf{G} \frac{\text{Dev}(\boldsymbol{\Sigma}_R)}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|}, \quad (2.58a)$$

$$\gamma_p := \tilde{\lambda} \left[ \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| - \sqrt{(2/3)\tau_y} \right]_+, \quad (2.58b)$$

mit Einheiten  $[\gamma_p] = [\gamma_\tau] = \text{s}^{-1}$ .

Auch wenn  $\gamma_p$  nicht als ein Lagrange-Multiplikator betrachtet werden kann (wie im Falle von  $\gamma_\tau$ ), weil er nicht einer Konsistenzbedingung des Typs (2.51) gehorchen muss, erfüllt die Fließregel (2.58a) (oder ihre äquivalente Form (2.55)) die residuale Dissipationsungleichung. Durch Vergleich der rechten Seite von (2.58a) mit der Fließregel der klassischen Theorie (2.49) kann allerdings gezeigt werden, dass die beiden Fließregeln bis auf eine spezielle Angabe von  $\gamma_\tau$  und  $\gamma_p$  formal identisch sind. Deshalb kann auch in diesem Fall die rechte Seite der Fließregel (2.58a) durch eine tensorwertige Funktion  $\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p)$  ausgedrückt werden. Die Abhängigkeit von  $\dot{\mathbf{F}}$  tritt darin nicht auf, weil der Faktor  $\gamma_p$  nicht durch eine KKT-Konsistenzbedingung des Typs (2.51) beschränkt ist.

## 2.4. Vollständige Formulierung des klassischen Problems

Von nun an werden die externen Kräfte  $\mathbf{f}_R$  und  $\mathbf{t}_R$ , die in (2.22) zur allgemeinen Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen eingeführt wurden, zu null gesetzt. Dies bedeutet, dass auf dem Neumann-Rand des Körpers  $\partial\mathcal{B}_N \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$  gilt, siehe (2.24b), und die rechte Seite der Impulserhaltungsgleichung (2.24a) verschwindet. Damit kann das klassische Problem  $\mathbb{P}_1$ , d.h. die Problemformulierung, die aus der Behandlung des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation mittels der Lagrangemethode hervorgeht und somit einen Lagrangeparameter  $\gamma_\tau$  enthält, wie folgt angegeben werden:

### Problem $\mathbb{P}_1$

Seien  $\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e)$ ,  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa(\alpha)$ ,  $f_\tau$ ,  $\gamma_\tau$  und  $\mathcal{R}$  gegeben, so dass

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = J_p \hat{\boldsymbol{\tau}}_\kappa(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \mathbf{F}^{-T} = J_p \left[ \mathbf{F}_e \left( 2 \frac{\partial \hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e)}{\partial \mathbf{C}_e} \right) \mathbf{F}_e^T \right] \mathbf{F}^{-T}, \quad (\mathbb{P}_1a)$$

$$q = -K(\alpha) = -\frac{\partial \hat{\mathfrak{H}}_\kappa(\alpha)}{\partial \alpha}(\alpha), \quad (\mathbb{P}_1b)$$

$$\gamma_\tau = \begin{cases} 0, & \text{wenn } f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) < 0, \\ \hat{\gamma}_\tau(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha) > 0, & \text{wenn } f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0, \end{cases} \quad (\mathbb{P}_1c)$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{wenn } f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) < 0, \\ \hat{\mathcal{R}}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{F}}, \mathbf{B}_p, \alpha), & \text{wenn } f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0, \end{cases} \quad (\mathbb{P}_1d)$$

wobei  $\hat{\gamma}_\tau$  und  $\hat{\mathcal{R}}$  bekannte Funktionen ihrer Argumente sind und  $\hat{\mathcal{R}}$  insbesondere durch (2.48) gegeben ist.

Finde  $\chi \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{B}_p \in \mathbf{L}^2(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B})$  und  $\alpha \in L^2(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, \mathbb{R})$  so dass

$$\mathcal{P}(\chi, \mathbf{B}_p, \tilde{\mathbf{V}}) := \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) : \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (\mathbb{P}_{1e})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -\mathcal{R}, \quad \mathbf{B}_p(X, 0) = \mathbf{B}_{p0}(X) \text{ in } \mathcal{B}, \quad (\mathbb{P}_{1f})$$

$$\dot{\alpha} = \gamma_\tau \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \alpha(X, 0) = \alpha_0(X) \text{ in } \mathcal{B}. \quad (\mathbb{P}_{1g})$$

Hier bezeichnet  $\mathbf{L}^2(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B})$  und  $L^2(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, \mathbb{R})$  den Raum der tensorwertigen beziehungsweise skalarwertigen Funktionen, die (Lebesgue)-quadratintegrierbar in  $\mathcal{B}$  sind.  $\mathcal{H}$  ist die Teilmenge des Sobolev-Raums  $(H^1(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, \mathcal{S}))^3$ , der durch die folgende Eigenschaft charakterisiert ist,

$$\mathcal{H} = \left\{ \chi \in (H^1(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, \mathcal{S}))^3 : \chi(X, t) = \chi_b(t), \forall (X, t) \in \partial\mathcal{B}_D \times \mathcal{I} \right\}, \quad (2.59)$$

wobei  $(H^1(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, \mathcal{S}))^3$  der Sobolev-Raum der Funktionen  $\chi(\cdot, t)$ ,  $t \in \mathcal{I}$  mit Werten in dem dreidimensionalen euklidischen Raum  $\mathcal{S}$  ist, die quadratintegrierbar in  $\mathcal{B}$  sind und deren schwache Ableitung  $D^k \chi(\cdot, t)$ , mit  $|k| \leq 1$ , ebenfalls quadratintegrierbar in  $\mathcal{B}$  sind,  $k$  bezeichnet hier einen Multiindex [18][111]. Des Weiteren ist  $\chi_b$  in (2.59) der vorgeschriebene Wert der Bewegung auf dem Dirichlet-Rand des Körpers  $\partial\mathcal{B}_D$ . Der Raum der virtuellen Geschwindigkeiten  $\tilde{\mathcal{H}}$  kann nun mit dem funktionalen Raum  $(H_0^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$ , das heißt  $\tilde{\mathcal{H}} = (H_0^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$  identifiziert werden. Dieser ist der Hilbert-Teilraum von  $(H^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$ , der als der Abschluss des Test-Funktionenraums in  $(H^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$  definiert ist, mit der Eigenschaft, dass alle Funktionen  $\tilde{\mathbf{V}} \in (H_0^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$  auf dem Dirichlet-Rand von  $\mathcal{B}$  verschwinden [111].

## 2.5. Vollständige Formulierung des phänomenologischen Problems

Das Problem  $\mathbb{P}_1$ , welches durch  $(\mathbb{P}_{1a})$ – $(\mathbb{P}_{1g})$  formuliert wird, stammt von der von Mises  $J_2$ -Theorie der isochoren und assoziativen Plastizität. Dies kann daran gesehen werden, dass die Rate der plastischen Verzerrungen deviatorisch und proportional zum assoziierten Spannungsmaß ist. Andererseits, unter der Annahme von Isotropie und vorausgesetzt, dass  $\mathcal{R}$  einige Restriktionen bezüglich der Dissipation erfüllt (z.B. die residuale Dissipationsungleichung [122] oder die Maximierung der plastischen Arbeit [83]), kann die Gleichung für das plastische Evolutionsgesetz  $(\mathbb{P}_{1f})$  auch verallgemeinert werden, so dass weit mehr Typen von Fließregeln erfasst werden, die beispielsweise voll phänomenologischer Natur und im Allgemeinen nicht assoziativ sind. Siehe dazu z.B. solche Fließregeln, die quasi ratenunabhängiges, viskoplastisches Fließverhalten modellieren, die zur Modellierung von plastischen Wellen im sogenannten Hopkinson Stab verwendet werden [83] oder solche, die in biomechanischen Fragestellungen betrachtet werden, siehe zum Beispiel die phänomenologische Fließregel (2.58). Zu diesem Zweck ist es nützlich, modifizierte Versionen des Problems  $\mathbb{P}_1$  zu betrachten, die nicht strikt den KKT-Bedingungen (2.47) folgen. Ein Beispiel dafür stellt das folgende Problem  $\mathbb{P}_2$  dar.

**Problem  $\mathbb{P}_2$**

Seien  $\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e)$  und  $\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p)$  gegeben, so dass

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = J_p \hat{\boldsymbol{\tau}}_\kappa(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \mathbf{F}^{-\text{T}} = J_p \left[ \mathbf{F}_e \left( 2 \frac{\partial \hat{W}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e}(\mathbf{C}_e) \right) \mathbf{F}_e^{\text{T}} \right] \mathbf{F}^{-\text{T}}. \quad (\mathbb{P}_{2a})$$

Finde  $\chi \in \mathcal{H}$  und  $\mathbf{B}_p \in \mathbf{L}^2(\mathcal{B} \times \mathcal{I}, T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B})$  so dass

$$\mathcal{P}(\chi, \mathbf{B}_p, \tilde{\mathbf{V}}) := \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) : \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (\mathbb{P}_{2b})$$

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -\hat{\mathcal{R}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p), \quad \mathbf{B}_p(X, 0) = \mathbf{B}_{p0}(X) \text{ in } \mathcal{B}. \quad (\mathbb{P}_{2c})$$

Die tensorwertige Funktion  $\hat{\mathcal{R}}$  der Fließregel ( $\mathbb{P}_{2c}$ ) kann beispielsweise durch die rechte Seite von (2.58a) gegeben sein, wobei  $\gamma_p$  in (2.58b) definiert ist [42].  $\hat{\mathcal{R}}$  kann darin allerdings auch allgemeinere Ausdrücke umfassen, die beispielsweise auf die nicht-assoziative Plastizität führen [83].

## 2.6. Infinitesimale Elasto-Plastizität

Die bisher vorgestellten Gleichungen der Elasto-Plastizität behalten auch für große Deformationen ihre Gültigkeit. Vereinfachte Modelle, die lediglich unter der Annahme von kleinen Deformationen plausible Ergebnisse liefern, lassen sich jedoch auch formulieren. Die dazugehörige Theorie nennt sich *infinitesimale Elasto-Plastizitätstheorie*. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Charakteristika eines infinitesimalen elasto-plastischen Materialmodells erwähnt. Für ein tiefergehendes Studium dieser Theorie wird jedoch auf die klassische Literatur verwiesen [28][56][76][122][127].

**Kinematik** Die Kinematik eines elasto-plastischen Modells für kleine Verzerrungen basiert auf der additiven Zerlegung des linearisierten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  (1.91) in seinen elastischen  $\boldsymbol{\epsilon}_e$  und plastischen  $\boldsymbol{\epsilon}_p$  Anteil [56][76],

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_e + \boldsymbol{\epsilon}_p. \quad (2.60)$$

Im Gegensatz zur multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten (2.1) wird hier aber kein zusätzlicher mittlerer Zustand eingeführt, welcher der Wirkung der plastischen Verzerrungen Rechnung trägt. Vielmehr wird in der infinitesimalen Elasto-Plastizitätstheorie wie in der linearen Elastizitätstheorie, siehe Abschnitt (1.4.2), nicht zwischen der aktuellen und der Referenzkonfiguration unterschieden. Die infinitesimale Elasto-Plastizität kann also als eine natürliche Erweiterung der linearen Elastizität verstanden werden, die nun auch plastische Verzerrungen berücksichtigt.

**Konstituierendes elastisches Gesetz** Im elastischen Bereich wird der linearen Elastizitätstheorie folgend eine lineare Beziehung von Spannungen und Verzerrungen angenommen,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}_e = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_p), \quad (2.61)$$

## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

wobei  $\boldsymbol{\sigma}$  der Cauchysche Spannungstensor und  $\mathfrak{c}$  der vierstufige Elastizitätstensor ist, siehe (1.95), der durch homogenes, isotropes Materialverhalten charakterisiert ist.

**Fließbedingung, Prinzip der maximalen Dissipation und Fließregel** Um den Beginn des plastischen Fließens zu erfassen und um den elastischen vom plastischen Bereich zu unterscheiden, wird eine Fließbedingung eingeführt, die von der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  und einer spannungsähnlichen Verhärtungsfunktion  $q$  abhängt,  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q)$ . Die Menge der zulässigen Spannungen  $\mathcal{A}_\sigma$  sei durch

$$\mathcal{A}_\sigma = \{(\boldsymbol{\sigma}, q) \in \mathcal{T}_\sigma \times \mathcal{T}_q : f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0\} \quad (2.62)$$

gegeben, wobei  $\mathcal{T}_\sigma$  den Raum der Cauchyschen Spannungen und  $\mathcal{T}_q$  den Raum der Verhärtungsfunktion  $q$  bezeichnet. Der Bereich  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) < 0$  charakterisiert den elastischen Bereich. Für  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$  ist die Fließfläche erreicht und plastisches Fließen tritt ein.

Analog zu Abschnitt 2.3.2 kann das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation unter der Nebenbedingung, dass die Fließbedingung  $f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0$  erfüllt sein muss, aufgestellt werden. Die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung führen auf die Fließregel, die Verhärtungsregel und die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen [122]. Im assoziativen Fall ergibt sich eine Fließregel in der folgenden Form,

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \gamma_\sigma \frac{\partial f_\sigma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.63)$$

mit einem Lagrange-Multiplikator  $\gamma_\sigma$ . Die Verhärtungsregel lautet

$$\dot{q} = -\gamma_\sigma \mathbf{D} \frac{\partial f_\sigma}{\partial q}, \quad (2.64)$$

wobei  $\mathbf{D}$  die Matrix der verallgemeinerten plastischen Moduli beschreibt [122]. Das KKT-System wird komplettiert durch die KKT-Bedingungen

$$\gamma_\sigma \geq 0, \quad f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) \leq 0, \quad \gamma_\sigma f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0. \quad (2.65)$$

Der noch unbekannte plastische Multiplikator wird hier analog zur klassischen Theorie für große elasto-plastische Deformationen durch die Konsistenzbedingung

$$\gamma_\sigma \dot{f}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \quad (2.66)$$

bestimmt, siehe Abschnitt 2.3.2.

**Von Mises  $J_2$ -Theorie mit isotroper Verhärtung** Ein klassisches Modell der infinitesimalen Elasto-Plastizität findet sich durch die Wahl des folgenden Fließkriteriums,

$$f_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, q) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\| + \sqrt{\frac{2}{3}} [q - \sigma_y], \quad (2.67)$$

wobei  $q = -K(\alpha)$  gesetzt wird, mit einer im Allgemeinen nichtlinearen Verhärtungsfunktion  $K(\alpha)$ . Ein möglicher Ausdruck für  $K(\alpha)$  ist beispielsweise das nichtlineare, isotrope Verhärtungsgesetz nach Voce [132],

$$K(\alpha) := H\alpha + (H_\infty - \sigma_y)[1 - \exp(-\omega\alpha)], \quad (2.68)$$

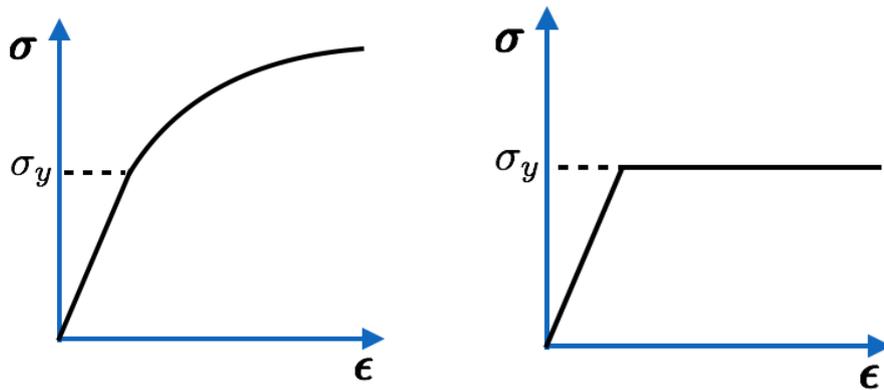
## 2. Theorie der Elasto-Plastizität

wobei  $\sigma_y$  die Fließspannung,  $H$  das lineare Verhärtungsmodul,  $H_\infty$  die Sättigungsspannung und  $\omega$  der Verhärtungsexponent ist. Durch die Wahl der Fließbedingung (2.67) ist die sogenannte **von Mises-Fließfläche** definiert. Aufgrund der Definition von  $K(\alpha)$  wird zudem isotrope Verhärtung berücksichtigt [122]. Damit ergeben sich folgende explizite Formen für die Fließ- und Verhärtungsregel

$$\dot{\epsilon}_p = \gamma_\sigma \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|}, \quad (2.69)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma_\sigma \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (2.70)$$

Für den Fall, dass die Verhärtung von vornherein aus der Betrachtung ausgeschlossen wird, wird von **perfekter Plastizität** gesprochen, was im Falle von kleinen Deformationen und isotroper, linearer Materialantwort im elastischen Bereich zum Beispiel auf das Modell von Prandtl und Reuss der perfekten Plastizität führt [100][105][122][137].



(a) Plastisches Verhalten mit Verhärtung      (b) Perfekt plastisches Verhalten

Abbildung 2.4.: Spannungs-Verzerrungsbeziehung für elasto-plastisches Materialverhalten mit Verhärtung, Abb. 2.4a, und ohne Verhärtung, Abb. 2.4b.  $\sigma_y$  beschreibt die Fließspannung, ab der plastisches Materialverhalten eintritt. Der elastische Bereich ist hier über die lineare Beziehung des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  und des linearisierten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\epsilon}$  charakterisiert.

Im folgenden Kapitel wird nun die numerische Behandlung des klassischen und des phänomenologischen Problems aus Abschnitt 2.4 beziehungsweise 2.5 vorgestellt. Auf die Erläuterung der numerischen Behandlung des Modells der infinitesimalen Elasto-Plastizität wird verzichtet und auf das Lehrbuch von Simo und Hughes verwiesen [122]. Klassischerweise wird dieses Modell auch mit dem Return-Mapping-Algorithmus gelöst, welcher in Abschnitt 3.1 für das Problem  $\mathbb{P}_1$  unter der Berücksichtigung von großen Verzerrungen erläutert wird. Dass dies möglich ist, ist insbesondere darauf zurückzuführen, dass in der klassischen infinitesimalen Elasto-Plastizitätstheorie das Prinzip der maximalen plas-

## 2. Theorie der *Elasto-Plastizität*

tischen Dissipation auch mittels der Lagrangemethode behandelt und somit ein Lagrangeparameter  $\gamma_\sigma$  in die Modellgleichungen eingeführt wird. Die Vorgehensweise aus Abschnitt 3.1 kann also auf das Modell für kleine Verzerrungen übertragen werden.

# 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

Dieses Kapitel widmet sich der numerischen Behandlung der beiden elasto-plastischen Modellformulierungen für große Deformationen aus Kapitel 2. Zunächst wird der sehr populäre und sowohl in der Industrie als auch in der Forschung weit verbreitete **Return-Mapping-Algorithmus (RMA)** in Abschnitt 3.1 vorgestellt, um das klassische Problem  $\mathbb{P}_1$  zu lösen. Als Lösungsalgorithmus für das phänomenologische Problem  $\mathbb{P}_2$  wird der sogenannte **Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus (GPA = Generalised Plasticity Algorithm)** in Abschnitt 3.2 entwickelt.

Für beide Algorithmen wird zuerst die zeitdiskrete Version der Probleme  $\mathbb{P}_1$  beziehungsweise  $\mathbb{P}_2$  formuliert. Sowohl der RMA als auch der GPA führen auf eine nichtlineare Gleichung in der Bewegungsvariablen  $\chi_n$ , welche durch ein Newton-Verfahren gelöst wird, siehe Abschnitt 3.3. Innerhalb des RMA können die Gleichungen des Problems  $\mathbb{P}_1$  aufgrund einiger vereinfachenden Modellannahmen, die in Abschnitt 3.1.3 näher beleuchtet werden, so umformuliert werden, dass lediglich die Nichtlinearität bezüglich  $\chi_n$  verbleibt. Der GPA hingegen führt einen zusätzlichen Linearisierungsprozess in dem plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  durch, was dazu führt, dass der Algorithmus auch auf Modelle mit komplexerem plastischen Fließverhalten angewendet werden kann. Somit können mittels des GPA einige Beschränkungen des RMA aufgehoben werden.

Schließlich müssen für beide Verfahren die linearisierten Gleichungen noch räumlich diskretisiert werden. Dies geschieht in Abschnitt 3.4 mithilfe der Finiten-Elemente-Methode. Die Darstellung dieses Kapitels folgt der Arbeit [46].

## 3.1. Der klassische Plastizitätsalgorithmus: der Return-Mapping-Algorithmus

Der RMA ist ein spezielles Prädiktor-Korrektor-Verfahren, welches durch Einführung eines elastischen Versuchszustandes (Prädiktor-Schritt) eine Versuchsspannung berechnet. Für diese Versuchsspannung wird dann überprüft, ob sie in der Menge der zulässigen Spannungen liegt. Falls dies nicht der Fall ist, wird die Versuchsspannung auf die Menge der zulässigen Spannungen projiziert. Diese Projektion entspricht dem Korrektor-Schritt. Dieses Prädiktor-Korrektor-Verfahren wird detailliert in Abschnitt 3.1.1 beschrieben. Zunächst werden aber zwei Modellannahmen eingeführt, die die Anwendung des klassischen Return-Mapping-Verfahrens erst möglich machen.

Wie einige Arbeiten belegen, siehe z.B. [62][119][122], wird der Return-Mapping-Algorithmus (RMA) gewöhnlicherweise unter zwei Annahmen formuliert, die zu denen, die bereits

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

in den Abschnitten 2.3–2.3.2 getroffen wurden, hinzukommen.

**Annahme: Entkopplung der gespeicherten Energiedichte** Die erste Annahme ist, dass die gespeicherte Energiedichte  $\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e)$ , die in  $\mathbb{P}_1$  benutzt wird, in seinen rein volumetrischen Anteil  $\hat{U}_\kappa(J_e)$  und seinen rein isochoren Anteil  $\overline{W}_\kappa(\overline{\mathbf{C}}_e)$  entkoppelt. Im Besonderen wird in vielen Fällen eine Energiedichte eines quasi-inkompressiblen Neo-Hooke Materials gewählt, siehe z.B. [122], das heißt

$$\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e) = \hat{U}_\kappa(J_e) + \overline{W}_\kappa(\overline{\mathbf{C}}_e), \quad (3.1a)$$

$$\hat{U}_\kappa(J_e) = \frac{1}{2}\kappa \left\{ \frac{1}{2}(J_e^2 - 1) - \ln(J_e) \right\}, \quad (3.1b)$$

$$\overline{W}_\kappa(\overline{\mathbf{C}}_e) = \frac{1}{2}\mu \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\overline{\mathbf{C}}_e) - 3 \right\}, \quad (3.1c)$$

wobei  $\kappa$  und  $\mu$  das Kompressions- beziehungsweise Schubmodul sind und  $\mathbf{C}_e = J_e^{2/3}\overline{\mathbf{C}}_e$  mit  $\det(\overline{\mathbf{C}}_e) = 1$  gilt [38][95]. In (3.1a)–(3.1c) als auch in den folgenden Rechnungen werden sowohl  $J_e = \sqrt{\det(\mathbf{C}_e)}$  als auch  $\overline{\mathbf{C}}_e$  als Funktionen von  $\mathbf{C}_e$  betrachtet.

Eine direkte Konsequenz dieser ersten Annahme sind die Gleichungen  $\beta_1 = \frac{\mu}{2}J_e^{-2/3}$  und  $\beta_2 = 0$  für den konstituierenden Ausdruck von  $\boldsymbol{\tau}_\kappa$  (2.39a), die dazu führen, dass  $\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa) = \mu \text{dev}(\overline{\mathbf{b}}_e)$  mit  $\overline{\mathbf{b}}_e = J_e^{-2/3}\mathbf{b}_e$  gilt.

Die gespeicherte Energiedichte (3.1) reduziert den Rechenaufwand erheblich, weil dadurch ein Material modelliert wird, dessen hyperelastisches Verhalten unabhängig von der zweiten Invarianten von  $\mathbf{C}_e$  ist (weil  $\beta_2 = 0$  gilt). Diese Form von  $\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e)$  kann aber in einigen Situationen auch unrealistisch sein. Die Energiedichte wird zwar zur Modellierung für elastisch quasi-inkompressibles Materialverhalten verwendet, was bedeutet, dass der volumetrische Anteil der elastischen Deformationen  $J_e$  nahe der Identität ist, aber für Materialien, für die diese Annahme nicht getroffen werden kann, gibt die Dichte nicht die korrekte elastische Materialantwort wider. Wie in [36][131] bewiesen und vor Kurzem in [37] herausgestellt, unterdrückt die Wahl von (3.1) ungerechtfertigterweise einige unabhängige elastische Parameter des Elastizitätstensors für ein Material, welches die Quasi-Inkompressibilität nicht erfüllt.

**Annahme: rein volumetrisches plastisches Fließen** Die zweite Annahme ist, dass die rechte Seite der KKT-Bedingung (2.47a) durch  $\frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{g}\mathbf{b}_e)\mathbf{n}$  approximiert wird, so dass die Fließregel zu

$$\mathcal{L}_\nu \mathbf{b}_e = -\frac{2}{3}\gamma_\tau \text{tr}(\mathbf{g}\mathbf{b}_e)\mathbf{n} \quad (3.2)$$

umgeschrieben werden kann. Diese Formulierung basiert auf der Zerlegung von  $\mathbf{b}_e = \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{g}\mathbf{b}_e)\mathbf{g}^{-1} + \text{dev}(\mathbf{b}_e)$  in seinen volumetrischen und deviatorischen Anteil und der Vernachlässigung des Terms  $\mathbf{n}\mathbf{g}\text{dev}(\mathbf{b}_e)$  bezüglich der rechten Seite der KKT-Bedingung (2.47a).

Um diese Approximation zu rechtfertigen, genügt es zu betrachten, dass, wenn plastisches Fließen auftritt (d.h. wenn die Bedingung  $f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = 0$  erfüllt ist),  $\mathbf{n}\mathbf{g}\text{dev}(\mathbf{b}_e)$  zu

$$\mathbf{n}\mathbf{g}\text{dev}(\mathbf{b}_e) = J_e^{2/3} \frac{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa)\|}{\mu} \mathbf{n}\mathbf{g}\mathbf{n} = J_e^{2/3} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}(K(\alpha) + \tau_y)}{\mu} \mathbf{n}\mathbf{g}\mathbf{n} \quad (3.3)$$

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

wird. Dieses Resultat liefert ein Argument dafür, dass der Term  $\mathbf{ngdev}(\mathbf{b}_e)$  vernachlässigt werden kann, weil er von der gleichen Größenordnung wie das Verhältnis zwischen der Fließspannung unter Berücksichtigung der Verhärtung,  $\sqrt{\frac{2}{3}}(K(\alpha) + \tau_y)$ , und dem Schubmodul ist und dieses Verhältnis für gewöhnlich klein für die meisten Metalle ist [119]. Hinzu kommt, dass  $\mathbf{ngn}$  per Definition (2.44) beschränkt ist. Auch wenn die Approximation des plastischen Evolutionsgesetzes (3.2) nicht essenziell ist, wie Simo [119] schreibt, vereinfacht sie doch erheblich die numerische Behandlung der Fließregel und die Bestimmung des KKT-Multiplikators  $\gamma_\tau$ .

#### 3.1.1. Algorithmische Bestimmung des KKT-Multiplikators

Der Kern des RMA ist die Behandlung der zeitdiskreten Entwicklung von  $\mathbf{B}_p$  und  $\alpha$  zusammen mit den diskretisierten KKT-Bedingungen (2.47c) und der schwachen Form der Gleichgewichtsbedingung ( $\mathbb{P}_1e$ ). Zu diesem Zweck wird angenommen, dass der Körper an jedem Zeitpunkt  $t_n$  durch zwei Zustände charakterisiert ist: Der **aktuelle Zustand** ist derjenige, der durch Funktionen  $\chi_n$ ,  $\mathbf{B}_{pn}$  und  $\alpha_n$  bestimmt ist und die aktuelle Lösung von  $\mathbb{P}_1$  zur Zeit  $t_n$  repräsentiert. Der sogenannte **Versuchszustand** dagegen ist derjenige, in dem sich der Körper befinden würde, wenn keine plastische Evolution in dem Zeitschritt  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  stattfinden würde. Der Definition zufolge wird der Versuchszustand durch Funktionen  $\chi_n^{\text{trial}}$ ,  $\mathbf{B}_{pn}^{\text{trial}} = \mathbf{B}_{p(n-1)}$  und  $\alpha_n^{\text{trial}} = \alpha_{n-1}$  bestimmt, wobei  $\chi_n^{\text{trial}}$  die Lösung der Impulserhaltungsgleichung ( $\mathbb{P}_1e$ ) zum Zeitpunkt  $t_n$  darstellt, wenn  $\mathbf{B}_{pn}$  in dem konstituierenden Ausdruck des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors mit der stückweise konstanten Funktion  $\mathbf{B}_{p(n-1)}$  ersetzt würde. Der Versuchszustand ist also ein rein theoretischer Zustand, der keinem physikalischen Zustand entsprechen muss. Der Versuchszustand definiert den **Prädiktor-Schritt** des Verfahrens.

Die Einführung des Versuchszustands, die besonders einfache gespeicherte Energiedichte (3.1) und die approximierte Fließregel (3.2) erlauben es, die zeitdiskrete Version von (3.2) mittels Spannungen auszudrücken und die Spannung zum Zeitpunkt  $t_n$  als eine Funktion zu betrachten, die allein vom Deformationsgradienten und den Größen des Versuchszustandes abhängt.

Die folgende Umformung der Fließregel und die Darstellung der algorithmischen Bestimmung des KKT-Multiplikators orientiert sich an dem grundlegenden Lehrbuch für Rechner-unterstützte Plastizitätstheorie von Simo und Hughes [122]. Unter Berücksichtigung der Definition der Lie-Ableitung von  $\mathbf{b}_e$  (2.12a) kann dieselbige zum Zeitpunkt  $t_n \in \mathcal{I}$  approximiert werden durch

$$(\mathcal{L}_v \mathbf{b}_e)_n = \mathbf{F}_n \frac{\mathbf{B}_{pn} - \mathbf{B}_{p(n-1)}}{\Delta t_n} \mathbf{F}_n^T, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad (3.4)$$

wobei  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  der Zeitschritt und  $\mathbf{F}_n$  die tangentielle Abbildung von  $\chi_n$  ist. Darin wurde die Zeitableitung  $\dot{\mathbf{B}}_p$  durch eine finite Differenz approximiert. Des Weiteren führt das Einsetzen von (3.4) in die zeitdiskrete Version der linken Seite der approximierten Fließregel (3.2) auf

$$\bar{\mathbf{b}}_{en} = \bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}} - \frac{2}{3} \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g} \bar{\mathbf{b}}_{en}) \mathbf{n}_n, \quad (3.5)$$

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

mit  $\bar{\mathbf{b}}_{en} = J_{en}^{-2/3} \mathbf{b}_{en}$ ,  $\mathbf{b}_{en} = \mathbf{F}_n \mathbf{B}_{pn} \mathbf{F}_n^T$ ,  $\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}} = J_{en}^{-2/3} \mathbf{b}_{en}^{\text{trial}}$  und  $\mathbf{b}_{en}^{\text{trial}} = \mathbf{F}_n \mathbf{B}_{p(n-1)} \mathbf{F}_n^T$ , was impliziert, dass  $\text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}) = \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}})$  gilt. Im Folgenden wird dieser Ausdruck der Fließregel in eine Gleichung umgeschrieben, die die plastische Entwicklung über Spannungen beschreibt. Diese Umformung ist wichtig, um danach mittels der Konsistenzbedingung (2.50) den KKT-Multiplikator bestimmen zu können. Dazu wird der deviatorische Anteil beider Seiten von (3.5) genommen und das Resultat mit dem Schubmodul  $\mu$  multipliziert,

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n^{\text{trial}} - \frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) \mathbf{n}_n, \quad (3.6)$$

wobei die Notation  $\mathbf{s}_n = \text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\kappa n}) = \mu \text{dev}(\bar{\mathbf{b}}_{en})$  und  $\mathbf{s}_n^{\text{trial}} = \mu \text{dev}(\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}})$  verwendet wird. Schließlich kann die Gleichung (3.6) durch das Setzen von  $\mathbf{s}_n = \|\mathbf{s}_n\| \mathbf{n}_n$  und  $\mathbf{s}_n^{\text{trial}} = \|\mathbf{s}_n^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_n^{\text{trial}}$  umgeschrieben werden zu

$$\left[ \|\mathbf{s}_n\| + \frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) \right] \mathbf{n}_n = \|\mathbf{s}_n^{\text{trial}}\| \mathbf{n}_n^{\text{trial}}. \quad (3.7)$$

Weil die Summe in den Klammern auf der linken Seite von (3.7) ein nicht-negativer Skalar ist, sind die Tensoren  $\mathbf{n}_n$  und  $\mathbf{n}_n^{\text{trial}}$  parallel zueinander. Weil sie zudem auch die gleiche Norm haben, muss gelten, dass

$$\mathbf{n}_n = \mathbf{n}_n^{\text{trial}} \quad (3.8)$$

ist. Deshalb impliziert die Gleichung (3.7) auch

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}_n^{\text{trial}} - \frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) \mathbf{n}_n^{\text{trial}}, \quad (3.9a)$$

$$\|\mathbf{s}_n\| = \|\mathbf{s}_n^{\text{trial}}\| - \frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}). \quad (3.9b)$$

Gleichung (3.9a) ist die zeitdiskrete Fließregel, die nun in Spannungen ausgedrückt ist, während durch die Einführung der Fließfunktionen

$$f_{\tau n} := \|\mathbf{s}_n\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( K(\alpha_n) + \tau_y \right), \quad (3.10a)$$

$$f_{\tau n}^{\text{trial}} := \|\mathbf{s}_n^{\text{trial}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( K(\alpha_{n-1}) + \tau_y \right), \quad (3.10b)$$

die Gleichung (3.9b) umgeschrieben werden kann zu

$$f_{\tau n} = f_{\tau n}^{\text{trial}} - \frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) - \sqrt{\frac{2}{3}} \left( K(\alpha_n) - K(\alpha_{n-1}) \right). \quad (3.11)$$

Darin beschreibt  $K(\alpha)$  ein im Allgemeinen nichtlineares Verhärtungsgesetz. Ein Beispiel für ein solches Verhärtungsgesetz ist in (2.68) angegeben. Mit (3.11) kann nun die Bedingung, dass plastisches Fließen zum Zeitpunkt  $t_n$  auftritt, in eine Gleichung transformiert werden, die implizit  $\gamma_{\tau n}$  definiert. Dies geschieht durch Setzen von  $f_{\tau n} = 0$  in (3.11), um die Konsistenz mit den diskreten Versionen der KKT-Bedingungen (2.47c) und der Konsistenzbedingung (2.50) zu gewährleisten,

$$\frac{2}{3} \mu \gamma_{\tau n} \Delta t_n \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( K \left( \alpha_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{\tau n} \Delta t_n \right) - K(\alpha_{n-1}) \right) = f_{\tau n}^{\text{trial}}. \quad (3.12)$$

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

In (3.12) wird  $f_{\tau n}^{\text{trial}}$  als bekannt aufgefasst. Außerdem wurde die zeitdiskrete Version der Verhärtungsregel ( $\mathbb{P}_1\text{g}$ ) benutzt, um  $\alpha_n$  als eine Funktion von  $\alpha_{n-1}$  und  $\gamma_{\tau n}$  auszudrücken. Es sei angemerkt, dass, wenn die Bedingung  $f_{\tau n}^{\text{trial}} \leq 0$  erfüllt ist,  $\gamma_{\tau n} = 0$  die Gleichung (3.12) identisch löst. Im Falle einer nichtlinearen Verhärtungsfunktion  $K(\alpha)$ , wie z.B.

$$K(\alpha) := H\alpha + (H_\infty - \tau_y)[1 - \exp(-\omega\alpha)], \quad (3.13)$$

mit der Fließspannung  $\tau_y$ , dem linearen Verhärtungsmodul  $H$ , der Sättigungsspannung  $H_\infty$  und dem Verhärtungsexponenten  $\omega$ , ist die Gleichung (3.12) nichtlinear in  $\gamma_{\tau n}$  und wird numerisch durch eine lokale Newton-Methode gelöst. Für Details zu diesem lokalen Newton-Verfahren wird auf Kapitel 9 von [122] verwiesen. Für den Fall von linearer Verhärtung, das heißt für  $\omega = 0$  in (3.13), erhält man den folgenden expliziten Ausdruck für  $\gamma_{\tau n}$  [122],

$$\gamma_{\tau n} \Delta t_n = \begin{cases} \frac{f_{\tau n}^{\text{trial}}}{\frac{2}{3}\mu \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) + \frac{2}{3}H}, & \text{wenn } f_{\tau n}^{\text{trial}} > 0, \\ 0, & \text{wenn } f_{\tau n}^{\text{trial}} \leq 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

wobei  $H$  das lineare Verhärtungsmodul ist, das die gleichen Einheiten wie das Schubmodul  $\mu$  hat und durch

$$H = \frac{\partial K}{\partial \alpha}(\alpha) = \frac{\partial^2 \hat{\mathfrak{H}}_\kappa}{\partial \alpha^2}(\alpha) \quad (3.15)$$

definiert ist. Wenn die Verhärtung linear ist, ist das Verhärtungspotential  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa$  quadratisch in  $\alpha$  und  $H$  ist konstant. Sowohl (3.12) als auch (3.14) bestimmen  $\gamma_{\tau n}$  als eine Funktion von  $\mathbf{F}_n$  (oder äquivalenterweise als ein Funktional von  $\chi_n$ ). Außerdem erhält man den Verhärtungsparameter  $\alpha_n$ , sobald  $\gamma_{\tau n}$  berechnet wurde, durch

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{\tau n} \Delta t_n, \quad (3.16)$$

was die zeitdiskrete Version der Verhärtungsregel ( $\mathbb{P}_1\text{g}$ ) ist. Das bedeutet, dass die Verhärtungsregel ( $\mathbb{P}_1\text{g}$ ) von der Impulserhaltungsgleichung ( $\mathbb{P}_1\text{e}$ ) und der Fließregel ( $\mathbb{P}_1\text{f}$ ) entkoppelt ist.

Die soeben vorgestellte Bestimmung des Multiplikators  $\gamma_{\tau n}$ , so dass die KKT-Bedingungen (2.47c) und die Konsistenzbedingung (2.50) erfüllt sind, stellt den sogenannten **Return-Map** (oder auch: die **Projektion**) auf die Menge der zulässigen Spannungen (2.42) dar. Dies entspricht dem **Korrektor-Schritt** des Verfahrens.

Die in diesem Abschnitt diskutierten Modellannahmen sind entscheidend für die algorithmische Bestimmung des KKT-Multiplikators in der vorgestellten Form. Die wichtigste Konsequenz der Annahmen ist, dass es die approximierte Fließregel (3.5) erlaubt,  $\mathbf{B}_{pn}$  als eine explizite nichtlineare Funktion von  $\chi_n$  allein auszudrücken, weil  $\mathbf{n}_n = \mathbf{n}_n^{\text{trial}}$  und  $\text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}) = \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{en}^{\text{trial}}) = \text{tr}(\mathbf{B}_{p(n-1)}\mathbf{C}_n)$  gelten und keine dieser Größen von  $\mathbf{B}_{pn}$  abhängt, das heißt es kann

$$\mathbf{B}_{pn} = \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_n) := \mathbf{B}_{p(n-1)} - \frac{2}{3}\Delta t_n \gamma_{\tau n}(\chi_n) \text{tr}(\mathbf{B}_{p(n-1)}\mathbf{C}_n) \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{n}_n^{\text{trial}} \mathbf{F}_n^{-\text{T}}, \quad (3.17)$$

mit  $\gamma_{\tau n}(\chi_n) > 0$  geschrieben werden. Hier gilt, dass  $\mathbf{C}_n = \mathbf{F}_n^{\text{T}} \mathbf{g} \mathbf{F}_n$  ist.

### 3.1.2. Zeitdiskrete Formulierung

Die Anwendung eines impliziten Euler-Verfahrens in der Zeit erlaubt es mit den Resultaten aus dem vorherigen Abschnitt das Problem  $\mathbb{P}_1$  wie folgt in der zeitdiskreten Form zu schreiben:

Seien Anfangswerte  $\mathbf{B}_{p0}(X)$  und  $\alpha_0(X)$  für alle  $X \in \mathcal{B}$  und die Dirichlet-Randbedingung  $\chi_{bn}(X)$  für alle  $X \in \partial\mathcal{B}_D$  gegeben.

Dann finde  $\chi_n \in (H^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$ ,  $\mathbf{B}_{pn} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{B}, T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{S})$  und  $\alpha_n \in L^2(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ , so dass  $\chi_n = \chi_{bn}$  für alle  $n \geq 0$  und  $X \in \partial\mathcal{B}_D$  und für alle  $n \geq 1$ ,

$$\mathbf{B}_{pn} = \begin{cases} \mathbf{B}_{p(n-1)}, & \text{wenn } \gamma_{\tau n} = 0, \\ \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_n) = \mathbf{B}_{p(n-1)} - \hat{\mathbf{R}}_n(\chi_n), & \text{wenn } \gamma_{\tau n} > 0, \end{cases} \quad (\text{RMA-zd-a})$$

$$\alpha_n = \begin{cases} \alpha_{n-1}, & \text{wenn } \gamma_{\tau n} = 0, \\ \alpha_{n-1} + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{\tau n}(\chi_n) \Delta t_n, & \text{wenn } \gamma_{\tau n} > 0, \end{cases} \quad (\text{RMA-zd-b})$$

$$\mathcal{P}'(\chi_n, \tilde{\mathbf{V}}) = \begin{cases} \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{p(n-1)}) : \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = 0, & \text{wenn } \gamma_{\tau n} = 0, \\ \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{P}}(\chi_n, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_n)) : \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = 0, & \text{wenn } \gamma_{\tau n} > 0, \end{cases} \quad (\text{RMA-zd-c})$$

wobei (RMA-zd-c) für alle  $\tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}$  gelten muss und  $\gamma_{\tau n}(\chi_n)$  entweder durch (3.12) oder durch (3.14) bestimmt wird.  $\hat{\mathbf{R}}_n(\chi_n)$  ist definiert als

$$\hat{\mathbf{R}}_n(\chi_n) = \frac{2}{3} \Delta t_n \gamma_{\tau n}(\chi_n) \text{tr}(\mathbf{B}_{p(n-1)} \mathbf{C}_n) \mathbf{F}_n^{-1} \mathbf{n}_n^{\text{trial}} \mathbf{F}_n^{-T}. \quad (3.18)$$

Das Funktional  $\mathcal{P}'(\chi_n, \tilde{\mathbf{V}})$  ist nichtlinear in  $\chi_n$ , unabhängig davon, ob  $\gamma_{\tau n}$  null oder positiv ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\hat{\mathbf{P}}$  im Rahmen von großen Deformationen ein nichtlineares konstituierendes Funktional von  $\chi_n$  ist. Somit werden iterative Methoden wie z.B. die Newton-Methode benötigt, um die Impulserhaltungsgleichung (RMA-zd-c) zu lösen. Das **Newton-Verfahren** ist eine iterative Methode, die eine nichtlineare Gleichung bis auf eine vorgegebene Toleranz löst. Dazu wird in jeder Iteration eine Korrektur berechnet, die dazu beiträgt, dass sich die aktuelle Iterierte schrittweise der Lösung annähert. Die Korrektur ist dabei die Lösung eines linearen Systems, deren Matrix klassischerweise durch die Ableitung des zu lösenden nichtlinearen Funktionals gegeben ist. Diese Ableitung wird Jacobi-Matrix genannt, siehe z.B. [92]. Die Newton-Methode zur Lösung von (RMA-zd-c) wird in Abschnitt 3.3.1 beschrieben.

Es sei angemerkt, dass die Formulierung des RMA, die zu der approximierten, zeitdiskreten Fließregel (3.17) führt, so ist, dass  $\mathbf{B}_{pn}$  als eine explizite Funktion von  $\chi_n$  ausgedrückt werden kann. Das heißt, die zeitdiskrete Fließregel (3.17) kann umgeschrieben werden zu

$$\mathcal{G}_n(\chi_n, \mathbf{B}_{pn}) = \mathbf{B}_{pn} - \mathbf{B}_{p(n-1)} + \hat{\mathbf{R}}_n(\chi_n) = \mathbf{0}, \quad (3.19)$$

wobei  $\mathcal{G}_n$  nichtlinear in  $\chi_n$  und affin in  $\mathbf{B}_{pn}$  ist. Konsequenterweise ist keine Linearisierung der Fließregel bezüglich  $\mathbf{B}_{pn}$  notwendig. Allerdings kann diese Vereinfachung nicht durch-

geführt werden, wenn die Annahmen, die in Abschnitt 3.1 diskutiert werden (die Entkopplung der gespeicherten Energiedichtefunktion und die Approximation der Fließregel) nicht getroffen werden können. Dies kann zum Beispiel für solche Modelle der Fall sein, die durch die Problemformulierung  $\mathbb{P}_2$  beschrieben werden und bei denen keine Annahmen zur rechten Seite der Fließregel ( $\mathbb{P}_2c$ ) getroffen werden. Dies motiviert die Untersuchung von Problemen des Typs  $\mathbb{P}_2$  durch den Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus (GPA), der in dem folgenden Abschnitt 3.2 entwickelt wird.

#### 3.1.3. Technische Beschränkungen des Return-Mapping-Algorithmus'

Die Formulierung des RMA basiert auf einigen vereinfachenden Modellannahmen:

- rein volumetrischem plastischen Fließen,
- Entkopplung der Verzerrungsenergiefunktion in ihren volumetrischen und isochoren Anteil,
- isotropem Materialverhalten
- und einer assoziativen plastischen Entwicklung.

Diese Annahmen sind essenziell für die Anwendung des RMA. Sie führen dazu, dass die Spannungen als alleinige Funktion von der Bewegungsabbildung, insbesondere des Deformationsgradienten, geschrieben werden können. Indem ein Versuchszustand eingeführt wird, der nur von den bekannten Werten des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_{p(n-1)}$  abhängt, und dadurch, dass anschließend dieser Versuchszustand auf die Menge der zulässigen Spannungen projiziert wird, kann die globale Impulserhaltungsgleichung in alleiniger Abhängigkeit von der Bewegungsabbildung  $\chi$  geschrieben werden. Dies ermöglicht eine besonders effiziente Behandlung solcher Modelle mittels des RMA. Die Effizienz des RMA zeichnet sich dadurch aus, dass das Prädiktor-Korrektur-Verfahren aus Versuchszustand und Projektion (Return-Map) lokal an jedem Integrationspunkt vorgenommen werden kann und global nur die Impulserhaltungsgleichung gelöst werden muss.

## 3.2. Der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus

Um diese Beschränkungen des Return-Mapping-Algorithmus' zu vermeiden, wird in diesem Abschnitt ein Verfahren vorgestellt, welches nach Konstruktion auch auf Modelle anwendbar ist, die nicht auf Annahmen wie z.B. dem rein volumetrischen plastischen Fließen basieren. Dies hat zur Folge, dass die Fließregel nicht als eine Funktion geschrieben werden kann, die allein von der Bewegung  $\chi$  abhängt. Vielmehr bleibt eine Abhängigkeit vom plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  bestehen. Somit kann die Fließregel nicht von der Impulserhaltungsgleichung entkoppelt werden. Stattdessen muss  $\mathbf{B}_p$  als eine Variable verstanden werden, die zumindest grundsätzlich die gleiche 'Wertigkeit' wie die Bewegungsvariable  $\chi$  besitzt. Einerseits verkompliziert dies die numerische Behandlung des elasto-plastischen Problems, andererseits entsteht so ein Algorithmus, der flexibler

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

und auf eine größere Klasse von elasto-plastischen Problemen anwendbar ist. Aus diesem Grund wird dieser Algorithmus *Verallgemeinerter Plastizitätsalgorithmus* (GPA: Generalised Plasticity Algorithm) genannt. Modelle, die auf der Problemformulierung  $\mathbb{P}_2$  basieren, das heißt solche Modelle, bei denen der plastische Multiplikator nicht notwendigerweise einem KKT-Multiplikator entsprechen muss, siehe Abschnitt 2.5, sind geeignet, um mithilfe des GPA behandelt zu werden. Die Annahme von isotropem Materialverhalten wird für die ganze vorliegende Arbeit beibehalten.

Die diskrete, linearisierte Version des Problems  $\mathbb{P}_2$ , siehe  $(\mathbb{P}_2a)$ – $(\mathbb{P}_2c)$ , entsteht in drei Schritten. Zuerst wird ein implizites Euler-Verfahren für die zeitliche Diskretisierung der Fließregel  $(\mathbb{P}_2c)$  benutzt. Dann wird die zeitdiskrete Version der Gleichungen  $(\mathbb{P}_2a)$ – $(\mathbb{P}_2c)$  zunächst bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  und dann bezüglich der Bewegungsvariablen  $\chi$  linearisiert. Schließlich wird die Finite-Elemente-Methode zur räumlichen Diskretisierung angewendet.

#### 3.2.1. Zeitdiskrete Formulierung

Die zeitdiskrete Version des Problems  $\mathbb{P}_2$  lautet in einem Zeitschritt  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  wie folgt:

Finde  $\chi_n \in (H^1(\mathcal{B}, \mathcal{S}))^3$  und  $\mathbf{B}_{pn} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{B}, T\mathcal{B} \otimes T\mathcal{B})$ , so dass  $\chi_n = \chi_{bn}$  für alle  $n \geq 0$  und  $X \in \partial\mathcal{B}_D$  und für alle  $n \geq 1$ ,

$$\mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn}, \tilde{\mathbf{V}}) := \int_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn}) : \mathbf{g}\text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in \tilde{\mathcal{H}}, \quad (\text{GPA-zd-a})$$

$$\mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn}) = \mathbf{B}_{pn} - \mathbf{B}_{p(n-1)} + \hat{\mathcal{R}}_n(\chi_n, \mathbf{B}_{pn}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_p(X, 0) = \mathbf{B}_{p0}(X) \text{ in } \mathcal{B}. \quad (\text{GPA-zd-b})$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal explizit darauf hingewiesen, dass in dieser Formulierung das Funktional  $\hat{\mathcal{R}}_n$  von dem zum Zeitpunkt  $t_n$  noch unbekanntem plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_{pn}$  abhängt, im Gegensatz zu der zeitdiskreten Problemformulierung innerhalb des Return-Mapping-Algorithmus’.

#### 3.2.2. Erste Stufe des GPA: Linearisierung bezüglich des plastischen Deformationstensors $\mathbf{B}_p$

Die zeitdiskrete Impulserhaltungsgleichung (GPA-zd-a) und die zeitdiskrete Fließregel (GPA-zd-b) sind im Allgemeinen miteinander gekoppelt und stark nichtlinear in  $\chi_n$  und  $\mathbf{B}_{pn}$ . Um Lösungen zu bestimmen, werden daher (GPA-zd-a) und (GPA-zd-b) in jedem Zeitschritt linearisiert. Dies geschieht in einem zweistufigen Verfahren gemäß der Newton-Methode. Die erste Stufe des Linearisierungsverfahrens besteht aus der Linearisierung der Impulserhaltungsgleichung und der Fließregel, welche zunächst nur bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  durchgeführt wird.

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

In der  $l$ -ten Iteration kann die Unbekannte  $\mathbf{B}_{pn,l}$  geschrieben werden als

$$\mathbf{B}_{pn,l} = \mathbf{B}_{pn,l-1} + \mathbf{\Phi}_{n,l}, \quad l \geq 1, \quad (3.20)$$

wobei  $\mathbf{\Phi}_{n,l-1}$  das Inkrement des plastischen Deformationstensors ist.

Um den Linearisierungsprozess im Detail zu beschreiben, ist es sinnvoll, die folgende Notation für die im Newton-Verfahren auftretenden Ableitungen einzuführen:

$$D_{\mathbf{B}_p} \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{\Phi}_{n,l}] = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \mathbb{B}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) : \mathbf{\Phi}_{n,l}, \quad (3.21a)$$

$$D_{\mathbf{B}_p} \mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})[\mathbf{\Phi}_{n,l}] = \mathbb{Y}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) : \mathbf{\Phi}_{n,l}, \quad (3.21b)$$

mit

$$\mathbb{B}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) : \mathbf{\Phi}_{n,l} = D_{\mathbf{B}_p} \hat{\mathcal{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})[\mathbf{\Phi}_{n,l}]. \quad (3.22)$$

Es sei angemerkt, dass die Ausdrücke für  $\mathbb{B}$  und  $\mathbb{Y}$  explizit vom konstituierenden Modell und der Fließregel abhängen.

Diese Notation definiert zwei approximierte Ausdrücke der Funktionale  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{G}$  aus (GPA-zd-a) und (GPA-zd-b), die in der  $l$ -ten Iteration

$$\Delta_{\mathcal{P}} := \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) + D_{\mathbf{B}_p} \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{\Phi}_{n,l}], \quad (3.23a)$$

$$\Delta_{\mathcal{G}} := \mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) + \mathbb{Y}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) : \mathbf{\Phi}_{n,l}, \quad (3.23b)$$

lauten.  $\Delta_{\mathcal{P}}$  und  $\Delta_{\mathcal{G}}$  sind dabei ein Skalar beziehungsweise ein Tensor zweiter Stufe, weil sie durch Linearisierung der internen virtuellen Leistung (GPA-zd-a) und der Fließregel (GPA-zd-b) nach  $\mathbf{B}_p$  erhalten werden.

Die Abhängigkeit der Fließregel  $\mathcal{G}$  von  $\mathbf{B}_{pn}$ , siehe (GPA-zd-b), ist so, dass  $\mathbb{Y}$  invertierbar ist. Daher ist es möglich, das Inkrement  $\mathbf{\Phi}_{n,l}$  als eine Funktion von  $\chi_n$  auszudrücken, indem (3.23b) zu null gesetzt wird, das heißt

$$\mathbf{\Phi}_{n,l} = -[\mathbb{Y}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})]^{-1} : \mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}). \quad (3.24)$$

Durch das Einsetzen der rechten Seite von (3.24) in (3.23a) wird  $\mathbf{\Phi}_{n,l}$  statisch von der linearisierten internen virtuellen Leistung  $\Delta_{\mathcal{P}}$  eliminiert. Dieses Vorgehen ähnelt hier einem Algorithmus vom Gauß-Seidel Typ. Damit wird  $\Delta_{\mathcal{P}}$  zu

$$\Delta_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) - D_{\mathbf{B}_p} \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) [[\mathbb{Y}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})]^{-1} : \mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})] \quad (3.25)$$

und das System (GPA-zd-a)–(GPA-zd-b) reduziert sich zu dem Problem in jedem Zeitschritt die Gleichung  $\Delta_{\mathcal{P}} = 0$  für die Bewegung  $\chi_n$  zu lösen. Allerdings ist  $\Delta_{\mathcal{P}}$  in (3.25) als ein stark nichtlineares Funktional in  $\chi_n$  definiert,  $\Delta_{\mathcal{P}} \equiv \Delta_{\mathcal{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})$ . Die zweite Stufe des GPA besteht daher aus der Linearisierung von  $\Delta_{\mathcal{P}}$  bezüglich der Bewegungsvariablen  $\chi_n$  und dem Null-Setzen des erhaltenen linearisierten Ausdrucks, siehe Abschnitt 3.3.2.

### 3.3. Linearisierung bezüglich der Bewegungsvariablen $\chi_n$

Wie in den vorherigen Abschnitten erläutert, liegt der Unterschied von RMA und GPA also in der Behandlung der Modellgleichungen bezüglich der Variablen, die die plastischen Verzerrungen im Modell erfasst, das heißt bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$ . Während innerhalb des RMA eine Linearisierung bezüglich  $\mathbf{B}_p$  aufgrund von vereinfachenden Modellannahmen vermieden wird, wird diese Linearisierung im GPA durchgeführt.

Eine Gemeinsamkeit des Return-Mapping-Algorithmus' und des Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus' besteht allerdings darin, dass beide Ansätze auf eine nichtlineare Gleichung in  $\chi_n$  führen. Für den RMA erfordert die Tatsache, dass das Funktional  $\mathcal{P}'(\chi_n, \tilde{\mathbf{V}})$  sowohl für positives  $\gamma_{\tau n}$  als auch für den Fall  $\gamma_{\tau n} = 0$  nichtlinear in  $\chi_n$  ist, die Anwendung eines Newton-Verfahrens zur Lösung der nichtlinearen Impulserhaltungsgleichung (RMA-zd-c). Innerhalb des GPA muss der durch die statische Elimination des Inkrementes des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  erhaltene Ausdruck  $\Delta_{\mathcal{P}}$  bezüglich der Bewegungsabbildung  $\chi_n$  linearisiert werden. Die Linearisierung bezüglich der Bewegung  $\chi_n$  wird im Folgenden sowohl für den RMA in Abschnitt 3.3.1 als auch für den GPA in Abschnitt 3.3.2 beschrieben.

In der  $k$ -ten Iteration kann die Unbekannte  $\chi_{n,k}$  geschrieben werden als

$$\chi_{n,k} = \chi_{n,k-1} + \mathbf{h}_{n,k}, \quad k \geq 1, \quad (3.26)$$

wobei  $\mathbf{h}_{n,k} \in T_{\chi_{n,k-1}}\mathcal{S}$  das Inkrement der Bewegung ist. Aufgrund von (3.26) wird der Deformationsgradient als ein Funktional der Bewegung betrachtet, so dass  $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{F}(\chi_{n,k})$  und  $\mathbf{F}_{n,k-1} = \mathbf{F}(\chi_{n,k-1})$  sowie  $\mathbf{H}_{n,k} = D_{\chi}\mathbf{F}_{n,k-1}[\mathbf{h}_{n,k}]$  geschrieben werden kann, wobei letzteres die Gâteaux-Ableitung des Funktionals  $\mathbf{F}$  bezüglich der Bewegung ist, welche bei  $\chi_{n,k-1}$  ausgewertet und in Richtung des Inkrementes  $\mathbf{h}_{n,k}$  ausgeführt wird. Es folgt, dass  $D_{\chi}\mathbf{F}_{n,k-1}[\mathbf{h}_{n,k}] = \text{Grad}(\mathbf{h}_{n,k})$  gilt.

#### 3.3.1. Linearisierungsprozess im RMA

Um den Linearisierungsprozess des RMA im Detail zu beschreiben, ist es sinnvoll, die folgende Notation einzuführen:

$$D_{\chi}\mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \mathbb{A}'(\chi_{n,k-1}) : \mathbf{H}_{n,k}, \quad (3.27)$$

mit

$$\mathbb{A}'(\chi_{n,k-1}) : \mathbf{H}_{n,k} = \begin{cases} D_{\chi}\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})[\mathbf{h}_{n,k}], & \text{wenn } \gamma_{\tau n} = 0, \\ D_{\chi}\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1}))[\mathbf{h}_{n,k}], & \text{wenn } \gamma_{\tau n} > 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Der Tensor vierter Stufe  $\mathbb{A}'$  ist der sogenannte algorithmische erste Elastizitätstensor. Algorithmisch meint hier, dass der Tensor auf dem zeitdiskreten Level und nicht auf der kontinuierlichen Ebene aufgesetzt wird. Dies ist nach Simo und Taylor [124] eine wichtige

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

Voraussetzung, um quadratische Konvergenz des Newton-Lösers in der Nähe der Lösung zu erhalten. Simo und Taylor sprechen jedoch in diesem Kontext vom sogenannten *konsistenten Tangentenoperator*, was bedeutet, dass der Operator konsistent zu dem gewählten Plastizitätsalgorithmus, also hier zu dem Return-Mapping-Algorithmus, formuliert ist. Für ein Modell der infinitesimalen Elasto-Plastizität führten sie 1985 einen solchen konsistenten Tangentenoperator ein, der die quadratische Konvergenz des Newton-Lösers erhielt [124].

Mit der Notation (3.27) und (3.28) ist im  $k$ -ten Iterationsschritt somit das folgende linearisierte Problem nach  $\mathbf{h}_{n,k}$  zu lösen,

$$\mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}}) + D_\chi \mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = 0, \quad (3.29)$$

das heißt,

Finde  $\mathbf{h}_{n,k} \in (H_0^1(\mathcal{B}, T\mathcal{S}))^3$ , so dass, für alle  $n \geq 1$  und  $k \geq 1$ ,

$$c(\mathbf{h}_{n,k}, \tilde{\mathbf{V}}) = g(\tilde{\mathbf{V}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in (H_0^1(\mathcal{B}, T\mathcal{S}))^3, \quad (\text{RMA-lin-a})$$

wobei

$$c(\mathbf{h}_{n,k}, \tilde{\mathbf{V}}) := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \mathbb{A}'_{n,k-1} : \text{Grad}(\mathbf{h}_{n,k}), \quad (\text{RMA-lin-b})$$

$$g(\tilde{\mathbf{V}}) := -\mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}}), \quad (\text{RMA-lin-c})$$

ist.

Die Notation  $\mathbb{A}'_{n,k-1} = \mathbb{A}'(\chi_{n,k-1})$  wird darin verwendet. Die Inkremente  $\mathbf{h}_{n,k}$  gehören dabei für alle  $n$  und alle  $k$  zu dem gleichen funktionalen Raum wie die Testgeschwindigkeiten  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Allerdings müssen sie auf dem Dirichlet-Rand von  $\mathcal{B}$  verschwinden, weil die Bewegung in jeder Iteration und zu jedem Zeitpunkt kompatibel mit den Randbedingungen  $\chi_b$  sein müssen.

Das aus Problem (RMA-lin-a)–(RMA-lin-c) resultierende  $\mathbf{h}_{n,k}$  wird genutzt, um die gegenwärtige Iterierte  $\chi_{n,k-1}$  des Newton-Verfahrens zu aktualisieren. Diese Iteration wird solange durchgeführt bis ein  $\chi_{n,k}$  gefunden ist, für das die nichtlineare Impulserhaltungsgleichung (RMA-zd-c) bis auf eine vorgeschriebene Toleranz  $\epsilon_F$  erfüllt ist, das heißt solange bis

$$\|\mathcal{P}'(\chi_{n,k}, \tilde{\mathbf{V}})\| \leq \epsilon_F \quad (3.30)$$

gilt.

**Approximation des Tangentenoperators** In dieser Arbeit wird der algorithmische erste Elastizitätstensor  $\mathbb{A}'$  numerisch approximiert. Dazu werden die Gâteaux-Ableitungen  $D_\chi \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})[\mathbf{h}_{n,k}]$  beziehungsweise  $D_\chi \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1}))[\mathbf{h}_{n,k}]$  für ein hinrei-

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

chend kleines  $\epsilon > 0$  wie folgt angenähert,

$$D_{\chi} \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})[\mathbf{h}_{n,k}] \approx \frac{\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}^{\epsilon}, \mathbf{B}_{p(n-1)}) - \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})}{\epsilon}, \quad (3.31)$$

$$D_{\chi} \hat{\mathbf{P}}\left(\chi_{n,k-1}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1})\right)[\mathbf{h}_{n,k}] \approx \frac{\hat{\mathbf{P}}\left(\chi_{n,k-1}^{\epsilon}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1}^{\epsilon})\right) - \hat{\mathbf{P}}\left(\chi_{n,k-1}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1})\right)}{\epsilon}, \quad (3.32)$$

wobei  $\chi_{n,k-1}^{\epsilon} := \chi_{n,k-1} + \epsilon \mathbf{h}_{n,k}$  ist.

Die Güte dieser Approximation hängt stark von der Wahl des Parameters  $\epsilon > 0$  ab. Ist  $\epsilon$  zu groß, sind die Differenzenquotienten, das heißt die rechten Seiten von (3.31) und (3.32), eine schlechte Approximation der Gâteaux-Ableitungen  $D_{\chi} \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})[\mathbf{h}_{n,k}]$  beziehungsweise  $D_{\chi} \hat{\mathbf{P}}\left(\chi_{n,k-1}, \hat{\mathbf{B}}_{pn}(\chi_{n,k-1})\right)[\mathbf{h}_{n,k}]$ . Ist  $\epsilon$  jedoch zu klein, so gilt beispielsweise in (3.31), dass  $\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}^{\epsilon}, \mathbf{B}_{p(n-1)}) \approx \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})$  ist, und Auslöschung tritt auf. Ein bewährtes Kriterium zur Bestimmung von  $\epsilon$  findet sich in [40]. Demnach soll  $\epsilon$  in (3.31) beispielsweise so gewählt werden, dass

$$\epsilon \left\| \frac{\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}^{\epsilon}, \mathbf{B}_{p(n-1)}) - \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})}{\epsilon} \right\| \approx \sqrt{\epsilon ps} \|\hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})\| \quad (3.33)$$

gilt, wobei  $eps$  die Maschinengenauigkeit ist. In den numerischen Tests in Kapitel 4 und 6 wird dieses Kriterium zur Bestimmung von  $\epsilon$  verwendet. Es sei an dieser Stelle bereits angemerkt, dass trotz dieser Approximation die quadratische Konvergenz des Newton-Lösers erhalten bleibt.

#### 3.3.2. Zweite Stufe des GPA: Linearisierung bezüglich $\chi_n$

Um die zweite Stufe des GPA zu beschreiben, welche durch die Linearisierung des Ausdrucks  $\Delta_{\mathcal{P}}$  (3.25) bezüglich der Bewegung definiert ist, sei folgende Notation eingeführt:

$$D_{\chi} \mathcal{P}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \mathbb{A}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn}) : \mathbf{H}_{n,k}, \quad (3.34)$$

mit

$$\mathbb{A}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn}) : \mathbf{H}_{n,k} = D_{\chi} \hat{\mathbf{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn})[\mathbf{h}_{n,k}], \quad (3.35)$$

Der Tensor vierter Stufe  $\mathbb{A}$  ist der algorithmische erste Elastizitätstensor.

In der  $k$ -ten Iteration dieser Subroutine des Linearisierungsprozesses des GPA muss die folgende Gleichung gelöst werden

$$\Delta_{\mathcal{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) + D_{\chi} \Delta_{\mathcal{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = 0. \quad (3.36)$$

Durch Einführung eines Hilfsfunktionals

$$g(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) := D_{\mathbf{B}_p} \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) \left[ [\mathbb{Y}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1})]^{-1} : \mathcal{G}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}) \right], \quad (3.37)$$

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

wird  $\Delta_{\mathcal{P}}$  zu

$$\Delta_{\mathcal{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) = \mathcal{P}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) - g(\chi_n, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}), \quad (3.38)$$

und (3.36) kann zu

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{P}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}) \\ + D_{\chi} \mathcal{P}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] - D_{\chi} g(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

umgeschrieben werden. Die Gâteaux-Ableitung von  $g$  wird nun durch einen vierstufigen Tensor  $\tilde{\mathbb{A}}$  ausgedrückt, so dass

$$D_{\chi} g(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \tilde{\mathbb{A}}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}) : \mathbf{H}_{n,k}, \quad (3.40)$$

gilt, was, unter Benutzung der Notation aus (3.34), erlaubt (3.39) wie folgt umzuformulieren:

Finde  $\mathbf{h}_{n,k} \in (H_0^1(\mathcal{B}, T\mathcal{S}))^3$ , so dass, für alle  $n \geq 1$  und  $k \geq 1$ ,

$$\bar{c}(\mathbf{h}_{n,k}, \tilde{\mathbf{V}}) = \bar{g}(\tilde{\mathbf{V}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{V}} \in (H_0^1(\mathcal{B}, T\mathcal{S}))^3, \quad (\text{GPA-lin-a})$$

wobei

$$\bar{c}(\mathbf{h}_{n,k}, \tilde{\mathbf{V}}) := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \bar{\mathbb{A}}_{n,k-1,l-1} : \text{Grad}(\mathbf{h}_{n,k}), \quad (\text{GPA-lin-b})$$

$$\bar{\mathbb{A}}_{n,k-1,l-1} := \mathbb{A}_{n,k-1,l-1} - \tilde{\mathbb{A}}_{n,k-1,l-1}, \quad (\text{GPA-lin-c})$$

$$\bar{g}(\tilde{\mathbf{V}}) := -\mathcal{P}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}) \quad (\text{GPA-lin-d})$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : (\mathbb{B}_{n,k-1,l-1} : \mathbb{Y}_{n,k-1,l-1}^{-1}) : \mathbf{g}_{n,k-1,l-1},$$

ist.

Die Notation  $\mathbb{A}_{n,k-1,l-1} = \mathbb{A}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1})$ ,  $\mathbb{B}_{n,k-1,l-1} = \mathbb{B}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1})$  und  $\mathbb{Y}_{n,k-1,l-1} = \mathbb{Y}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1})$  wird darin verwendet. Die Inkremente  $\mathbf{h}_{n,k}$  gehören dabei für alle  $n$  und alle  $k$  zu dem gleichen funktionalen Raum wie die Testgeschwindigkeiten  $\tilde{\mathbf{V}}$ . Allerdings müssen sie auf dem Dirichlet-Rand von  $\mathcal{B}$  verschwinden, weil die Bewegung in jeder Iteration und zu jedem Zeitpunkt kompatibel mit den Randbedingungen  $\chi_b$  sein müssen. In (GPA-lin-c) und (GPA-lin-d) wird durch Vergleich mit (RMA-lin-a)–(RMA-lin-c) ersichtlich, dass die zweiten Terme auf den rechten Seiten von (GPA-lin-c) beziehungsweise (GPA-lin-d) durch die Linearisierung der Gleichungen bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  entstanden sind.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass auch für den GPA in den numerischen Rechnungen eine Approximation des vierstufigen Tensors  $\bar{\mathbb{A}}_{n,k-1,l-1}$  verwendet wird. Diese Approximation folgt dem Kriterium, welches in (3.33) eingeführt wurde. Dieser approximierte Tangentenoperator wird dadurch bestimmt, dass die numerische Ableitung der

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

rechten Seite von (GPA-lin-d) bezüglich der Bewegungsabbildung  $\chi_n$  gebildet wird. Dies wird durchgeführt, weil der explizite mathematische Ausdruck des Funktionals  $g$ , siehe (3.37), beziehungsweise der zweite Term in (GPA-lin-d) sehr umständlich ist. Trotz dieser Approximation bleibt auch für den GPA die quadratische Konvergenz des nichtlinearen Verfahrens in der Nähe der Lösung erhalten.

Es sei angemerkt, dass im elastischen Bereich, das heißt in dem Bereich, der dadurch charakterisiert ist, dass die rechte Seite der Fließregel ( $\mathbb{P}_2c$ ) verschwindet, die Berechnung des plastischen Inkrementes  $\Phi_{n,l}$  in (3.24) redundant ist, weil kein plastisches Fließen auftritt. Damit verschwindet der zweite Term der rechten Seite von (GPA-lin-d) und somit auch der vierstufige Tensor  $\hat{\mathbb{A}}$  in (GPA-lin-c). Im elastischen Bereich wird also nur dieses reduzierte Problem gelöst.

## 3.4. Zeit-Raum-diskrete-Formulierung

Nach der zeitlichen Diskretisierung in Abschnitt 3.1.2 beziehungsweise 3.2.1 werden die Probleme (RMA-lin-a)–(RMA-lin-c) und (GPA-lin-a)–(GPA-lin-d), die durch Anwendung des RMA beziehungsweise des GPA erhalten wurden, nun auch räumlich diskretisiert. Dies geschieht in dieser Arbeit mit der populären **Finiten-Elemente-Methode (FEM)**. Erste Beschreibungen der Finiten-Elemente-Methode finden sich in der Arbeit von Schellbach [113] aus dem Jahre 1851. Inzwischen ist die FEM sowohl in der Forschung als auch in industriellen Anwendungen weit verbreitet und stellt heutzutage ein Standardwerkzeug zur Lösung verschiedenster partieller Differentialgleichungen dar. Diese partiellen Differentialgleichungen können Probleme der Strömungs- und Strukturmechanik, der Akustik, der Geophysik und weitere natur- und ingenieurwissenschaftliche Phänomene beschreiben. Neben Mathematikern haben sich jeher auch Ingenieure mit der Finiten-Elemente-Methode auseinandergesetzt. Einige grundlegende Arbeiten zur FEM aus Ingenieurssicht sind die Arbeiten von Hughes [65] und Zienkiewicz [139] und aus mathematischer Sicht die Arbeiten von Braess [14], Ciarlet [18], Courant [22], Schwarz [116] und Szabó & Babuška [125]. Die Idee und die wesentlichen Schritte des Finite-Elemente-Verfahrens sind in den Büchern von Braess [14] und Ciarlet [18] gut dargestellt. Im Folgenden werden die wichtigsten Aspekte der FEM beschrieben.

Sei  $\mathcal{T}$  eine reguläre **Triangulierung** von  $\overline{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \cup \partial\mathcal{B}$  in  $N^h \in \mathbb{N}$  nicht-überlappende Elemente  $\{T_i\}_{i=1}^{N^h}$ , wobei  $h > 0$  die charakteristische Gitterweite ist. Auf dieser Triangulierung  $\mathcal{T}$  des Gebiets  $\overline{\mathcal{B}}$  wird ein endlich-dimensionaler Finite-Elemente-Raum aufgesetzt. Sei dazu  $\mathbb{P}_m(T_i)$  der Raum der Polynome vom Grad  $m$  über  $T_i$  für alle  $i = 1, \dots, N^h$ . Zur Vereinfachung der Notation sei  $\mathcal{V} \equiv (H_0^1(\mathcal{B}, \mathcal{T}))^3$  gesetzt, wobei  $H_0^1(\mathcal{B}, \mathcal{T})$  der Teilraum des Sobolev-Raums  $H^1(\mathcal{B}, \mathcal{T})$  ist, mit der Eigenschaft, dass alle Funktionen auf dem Dirichlet-Rand von  $\mathcal{B}$  verschwinden [14][18][111]. Damit wird der folgende **lineare Finite-Elemente-Raum** eingeführt

$$\mathcal{V}_m^h := \{\tilde{\mathbf{V}}^h \in \mathcal{V} : \tilde{\mathbf{V}}_{|T_i}^h \in (\mathbb{P}_m(T_i))^3, \forall T_i \in \mathcal{T}, \tilde{\mathbf{V}}_{|\partial\mathcal{B}_D}^h = \mathbf{0}\}, \quad (3.41)$$

wobei die Notation  $(\mathbb{P}_m(T_i))^3$  bedeutet, dass jede Komponente der vektorwertigen Funk-

### 3. Numerische Behandlung der Elasto-Plastizität

tion  $\tilde{\mathbf{V}}_{|T_i}^h$ , die Restriktion von  $\tilde{\mathbf{V}}^h$  auf das Element  $T_i$ , ein Polynom vom Grad  $m$  ist. Im Folgenden ist  $m$  entweder 1 oder 2. Der Raum  $\mathcal{V}_m^h$  wird durch die **Lagrange-Basisfunktionen**  $\{\boldsymbol{\varphi}^q\}_{q=1}^M$  mit  $M = \dim(\mathcal{V}_m^h)$  aufgespannt [65][139], das heißt solchen Basisfunktionen, die durch Lagrange-Polynome gegeben sind. Mithilfe dieser Basisfunktionen können die Approximationen der Testgeschwindigkeiten  $\tilde{\mathbf{V}}$  und des Inkrementes  $\mathbf{h}_{n,k}$  zu jedem Zeitpunkt  $t_n$  und in jedem Newton-Iterationsschritt  $k$  geschrieben werden als

$$\tilde{\mathbf{V}}^h = \sum_{q=1}^M \tilde{V}^q \boldsymbol{\varphi}^q, \quad \mathbf{h}_{n,k}^h = \sum_{q=1}^M h_{n,k}^q \boldsymbol{\varphi}^q \in \mathcal{V}_m^h. \quad (3.42)$$

Darüber hinaus wird die Approximation von  $\chi_{n,k} \in \mathcal{H}$  wie in (3.26) durchgeführt. Zu jedem Zeitpunkt  $t_n$  ist die Folge  $\{\chi_{n,k}^h\}_{k \in \mathbb{N}}$  in der Menge  $\mathcal{H}^h \subset \mathcal{H}$  enthalten, welche durch

$$\mathcal{H}^h := \{\chi_n^h \in \mathcal{H} : \chi_n^h|_{\partial \mathcal{B}_D} = \chi_{bn}^h\} \quad (3.43)$$

definiert ist, wobei  $\chi_{bn}^h$  die Approximation der Randbedingung  $\chi_b$  zum Zeitpunkt  $t_n$  repräsentiert und  $k$  den Index für die Newton-Iteration bezüglich der Bewegungsvariablen darstellt.

Die approximierte Bewegung  $\chi_{n,k-1}^h$ , welche benutzt wird, um die rechte Seite von (3.26) zu bestimmen, wird geschrieben als

$$\chi_{n,k-1}^h = y_n^h + \mathbf{h}_{n,k-1}^h \quad (3.44)$$

mit  $\mathbf{h}_{n,k-1}^h \in \mathcal{V}_m^h$  und  $y_n^h|_{\partial \mathcal{B}_D} = \chi_{bn}^h$ .

Unter Berücksichtigung der obigen Definitionen lautet schließlich die Finite-Elemente-Version des linearisierten Problems (RMA-lin-a)–(RMA-lin-c), welches aus der Anwendung des RMA hervorgegangen ist:

Finde  $\mathbf{h}_{n,k}^h \in \mathcal{V}_m^h$ , so dass für alle  $n \geq 1$  und  $k \geq 1$ ,

$$c(\mathbf{h}_{n,k}^h, \boldsymbol{\varphi}^q) = g(\boldsymbol{\varphi}^q), \quad \forall q = 1, \dots, M. \quad (\text{RMA-zrd})$$

Analog dazu lautet die Finite-Elemente-Version des linearisierten Problems (GPA-lin-a)–(GPA-lin-d), welches aus der Anwendung des GPA hervorgegangen ist:

Finde  $\mathbf{h}_{n,k}^h \in \mathcal{V}_m^h$ , so dass für alle  $n \geq 1$  und  $k \geq 1$ ,

$$\bar{c}(\mathbf{h}_{n,k}^h, \boldsymbol{\varphi}^q) = \bar{g}(\boldsymbol{\varphi}^q), \quad \forall q = 1, \dots, M. \quad (\text{GPA-zrd})$$

Die Integrale, die in den Definitionen von  $c(\cdot, \cdot)$ ,  $\bar{c}(\cdot, \cdot)$ ,  $g(\cdot)$  und  $\bar{g}(\cdot)$  auftreten, werden durch numerische Quadratur approximiert [18][65]. In dieser Arbeit werden **Gauß-Quadraturregeln** verwendet.

# 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

In diesem Kapitel werden zunächst die Plastizitätsalgorithmen RMA und GPA anhand von klassischen Benchmark-Problemen verglichen. In Abschnitt 4.1 wird gezeigt, dass mit beiden Algorithmen Ergebnisse erzielt werden, die in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen sind. Des Weiteren wird in Abschnitt 4.2 der effiziente Einsatz des geometrischen Mehrgitterlösers in massiv-parallelen Rechnungen aufgezeigt. Schließlich werden in Abschnitt 4.3 zwei numerische Tests präsentiert, die in ihrer Komplexität und aufgrund der anspruchsvolleren Geometrie den Anforderungen einer industriellen Anwendung gerecht werden.

## 4.1. Validierung der Plastizitätsalgorithmen anhand von klassischen Benchmark-Problemen

Ziel dieses Abschnittes ist die Validierung des Return-Mapping-Algorithmus' aus Abschnitt 3.1 und des Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus' aus Abschnitt 3.2 anhand einiger numerischer Tests aus der Literatur. Es wird zunächst gezeigt, dass für klassische elasto-plastische Modelle, das heißt Probleme vom Typ  $\mathbb{P}_1$ , beide Algorithmen einerseits die gleichen Ergebnisse liefern und andererseits experimentelle Testergebnisse reproduziert werden können.

### 4.1.1. Schub-Kompressionstest

Als erstes Benchmark-Problem wird ein Schub-Kompressionstest des Einheitswürfels betrachtet, der von Neff und Wieners eingeführt wurde [91]. Dieser Test dient der Evaluierung der Implementierung des GPA und zum Vergleich der Ergebnisse mit denen, die mit dem RMA erhalten wurden. In dem Schub-Kompressionstest wird das klassische von Mises  $J_2$ -Plastizitätsmodell für große Deformationen ( $\mathbb{P}_1\text{a}$ )–( $\mathbb{P}_1\text{g}$ ) mit der Neo-Hooke Energie (3.1) verwendet. Zudem wird die Annahme von rein volumetrischem plastischen Fließen (3.2) getroffen.

Der Einheitswürfel besteht aus einem Material, für das angenommen wird, dass es sich perfekt plastisch verhält, das heißt es wird keine Verhärtung in den elasto-plastischen konstituierenden Gleichungen des Materials berücksichtigt. Dies bedeutet, dass das Verhärtungspotential  $\hat{\mathfrak{H}}_\kappa$  unabhängig von  $\alpha$  und die Fließfunktion  $f_\tau$  unabhängig von  $q$  ist. Konsequenterweise unterscheiden sich die Energiedichten  $\hat{\psi}_\kappa$  und  $\hat{W}_\kappa$  additiv durch eine Konstante,

**Neo-Hooke Energie:**

$$\boldsymbol{\tau}_\kappa = 2\mathbf{F}_e \frac{\partial \hat{W}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_e^\top,$$

$$\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e) = \hat{U}_\kappa(J_e) + \bar{W}_\kappa(\bar{\mathbf{C}}_e),$$

$$\hat{U}_\kappa(J_e) = \frac{1}{2}\kappa \left\{ \frac{1}{2}(J_e^2 - 1) - \ln(J_e) \right\},$$

$$\bar{W}_\kappa(\bar{\mathbf{C}}_e) = \frac{1}{2}\mu \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1}\bar{\mathbf{C}}_e) - 3 \right\},$$

**von Mises-Fließfunktion:**

$$f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa)\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \tau_y,$$

**Fließregel:**

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -\frac{2}{3}\gamma_\tau(\chi)\text{tr}(\mathbf{B}_p\mathbf{C})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}\mathbf{F}^{-\top}.$$

Abbildung 4.1.: Von Mises  $J_2$ -Plastizitätsmodell mit einer Neo-Hooke Energie ohne Verhärtung [122]

siehe (2.31), und die kraft-ähnliche Variable  $q$ , die in (2.33b) definiert wurde, verschwindet identisch. Deshalb ist das Modell vollständig durch die Verzerrungsenergiedichte, die in (3.1) gegeben ist, und die Fließfunktion  $f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa)\| - \sqrt{\frac{2}{3}}\tau_y$  beschrieben. Außerdem liefert die Gleichung (3.12)

$$\gamma_{\tau n} \Delta t_n = \begin{cases} \frac{f_{\tau n}^{\text{trial}}}{\frac{2}{3}\mu \text{tr}(\mathbf{g}\bar{\mathbf{b}}_{\tau n}^{\text{trial}})}, & \text{wenn } f_{\tau n}^{\text{trial}} > 0, \\ 0, & \text{wenn } f_{\tau n}^{\text{trial}} \leq 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

weil  $q = -K(\alpha) = 0$  für perfekte Plastizität gilt. Die Materialgleichungen sind in Abbildung 4.1 noch einmal zusammengefasst.

Üblicherweise erschwert die Betrachtung von perfekt plastischem Materialverhalten die numerische Analyse, weil die Bewegungsabbildung in Modellen mit Verhärtung glatter ist [71]. Die Elliptizität des Problems geht bei perfekt plastischem Materialverhalten verloren [56]. Allerdings sollte ein robuster Löser auch in der Lage sein, ein Problem der perfekten Plastizität zu lösen.

In einem orthonormalen kartesischen Koordinatensystem werden die Dirichlet-Randbedingungen des Schub-Kompressionstests wie folgt geschrieben:

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

Für alle  $t \in \mathcal{I} \equiv [0, T]$  gilt,

$$\chi_b^1(\mathbf{X}, t) = X^1 + 0.3 \frac{t}{T}, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}, t) = X^2 - 0.3 \frac{t}{T}, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}, t) = X^3, \quad \text{auf } [X^1, 1, X^3], \quad (4.3a)$$

$$\chi_b^1(\mathbf{X}, t) = X^1, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}, t) = X^2, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}, t) = X^3, \quad \text{auf } [X^1, 0, X^3], \quad (4.3b)$$

mit  $[X^1, 1, X^3] = [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$ ,  $[X^1, 0, X^3] = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]$ . Die Bedingungen (4.3) beschreiben einen Würfel, der an der unteren Fläche,  $X^2 = 0$ , eingespannt ist, und auf den an der oberen Fläche,  $X^2 = 1$ , eine Deformation in Schub- und Kompressionsrichtung bis zu 30% erfolgt.

Die Materialparameter, die in diesem Test verwendet werden, sind in Tabelle 4.1 aufgelistet (auch wenn keine Verhärtung in diesem Beispiel betrachtet wird, sind auch solche Materialparameter dort aufgelistet, die die Verhärtung charakterisieren, das heißt  $H_\infty$ ,  $H$  und  $\omega$ , weil diese Parameter in späteren Benchmark-Beispielen benutzt werden). Sie entsprechen der Charakteristik von Stahl.

Kompressionsmodul	$\kappa$	164206.00 N/mm <sup>2</sup>
Schubmodul	$\mu$	80193.80 N/mm <sup>2</sup>
Fließspannung	$\tau_y$	450.00 N/mm <sup>2</sup>
Sättigungsspannung	$H_\infty$	715.00 N/mm <sup>2</sup>
lineares Verhärtungsmodul	$H$	129.24 N/mm <sup>2</sup>
Verhärtungsexponent	$\omega$	16.93

Tabelle 4.1.: Materialparameter für Stahl

Um zu überprüfen, ob der GPA gleiche Resultate liefert wie der klassische RMA, wird der maximale Eigenwert des Kirchhoffschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\tau}_\kappa$  am Mittelpunkt des Einheitswürfels berechnet, siehe Abbildung 4.2. Man sieht, dass der RMA und der GPA auf gleiche Ergebnisse führen. Abbildung 4.3 zeigt die Deformation des Würfels im Schub-Kompressionstest zum Zeitpunkt  $t = T = 300$  s. Außerdem sind in Tabelle 4.2 die gerechneten Werte der Invarianten des Mandelschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\Sigma}$  für verschiedene Deformationen zusammengefasst, um eine Vergleichsmöglichkeit zu den Modellen und numerischen Ergebnissen aus der Arbeit von Neff und Wieners [91] herzustellen. Dabei ist zu erkennen, dass die Invarianten des Neo-Hooke Modells, das in dieser Arbeit betrachtet wird, in einem vergleichbaren Wertebereich wie die Invarianten der Modelle aus [91] liegen. Die Abweichung der Invarianten des Neo-Hooke Modells zu den Werten von Neff und Wieners ist ähnlich groß wie die Unterschiede der Invarianten der Modelle in [91] zueinander.

**Struktureller Aufbau** Auch wenn GPA und RMA für klassische Modelle, siehe  $(\mathbb{P}_{1a})$ – $(\mathbb{P}_{1g})$ , gleiche Ergebnisse liefern, ist es wichtig, die strukturellen Unterschiede der beiden Methoden in einem Zeitschritt  $[t_{n-1}, t_n] \subset \mathcal{I}$  herauszustellen.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

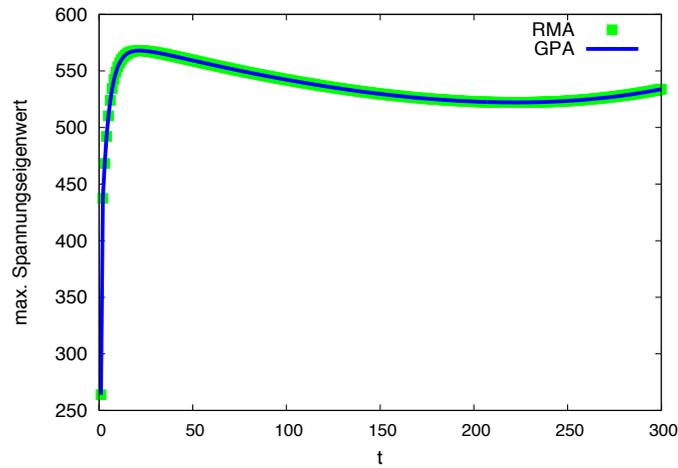


Abbildung 4.2.: Maximaler Eigenwert von  $\tau_{\kappa}$  [in N/mm<sup>2</sup>] am Punkt  $\mathbf{X} = (0.5, 0.5, 0.5)$  über den zeitlichen Verlauf  $t$  [in s] unter Anwendung des RMA (grün) und des GPA (blau) mit  $T = 300$  s.

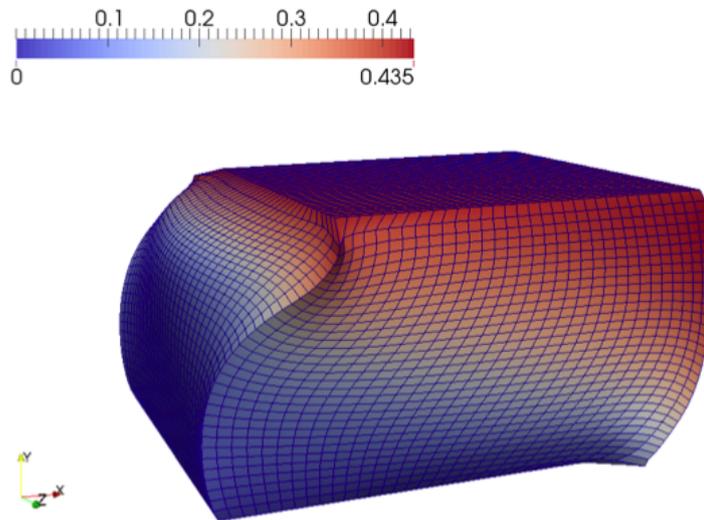


Abbildung 4.3.: Deformation des Einheitswürfels in einem Schub-Kompressionstest zum Zeitpunkt  $t = T = 300$  s. Farblich ist die euklidische Norm des Verschiebungsvektors dargestellt. Zur Visualisierung wurde die Software ParaView verwendet [59].

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

	M1(10%)	M1(30%)	M2(10%)	M2(30%)	$\widetilde{M4}(10\%)$	$\widetilde{M4}(30\%)$
$\bar{I}_1(\boldsymbol{\Sigma})$	-9.485e+02	-9.977e+02	-9.251e+02	-9.190e+02	-9.218e+02	-9.141e+02
$\bar{I}_2(\boldsymbol{\Sigma})$	1.984e+05	2.257e+05	1.840e+05	1.803e+05	1.826e+05	1.786e+05
$\bar{I}_3(\boldsymbol{\Sigma})$	-1.161e+07	-1.473e+07	-1.013e+07	-9.936e+06	-1.002e+07	-9.944e+06
	M2(0.1%)	M3(0.1%)	M4(0.1%)	M5(0.1%)	$\widetilde{M4}(0.1\%)$	
$\bar{I}_1(\boldsymbol{\Sigma})$	-2.557e+02	-2.550e+02	-2.560e+02	-2.563e+02	-2.560e+02	
$\bar{I}_2(\boldsymbol{\Sigma})$	-2.205e+03	-2.253e+03	-2.207e+03	-2.210e+03	-2.213e+03	
$\bar{I}_3(\boldsymbol{\Sigma})$	3.228e+04	3.201e+04	3.232e+04	3.235e+04	3.232e+04	

Tabelle 4.2.: Vergleich der Invarianten des Mandelschen Spannungstensors zu den Zeitpunkten  $t = T/300$ ,  $t = T/3$  und  $t = T$ . Dies entspricht einer Deformation des Würfels um 0.1%, 10% beziehungsweise 30%. Die Modelle M1, M2, M3, M4, M5 sind in [91] erläutert. In der vorliegenden Arbeit wurden die Rechnungen mit einer modifizierten Version des Modells M4 durchgeführt, welches im Folgenden mit  $\widetilde{M4}$  bezeichnet wird. Die Ergebnisse aus [91] dienen als Vergleichsreferenz.  $\widetilde{M4}$  kombiniert das Energiepotential von Modell M4 [91] mit der Fließregel (3.2). Die Deformation zum Zeitpunkt  $t = T/300$  dient als Check für die nichtlineare Elastizität, weil bei diesem Deformationszustand noch keine plastischen Verzerrungen auftreten.

*RMA*: Sei  $\mathbf{P}_n = \hat{\mathbf{P}}(\chi_n, \mathbf{B}_{pn})$  die Spannungsantwort, die dadurch erhalten wurde, dass  $\mathbf{B}_{pn}$  zunächst nach der zeitdiskreten Fließregel (3.17) berechnet wurde und das Resultat in den konstituierenden Ausdruck von  $\mathbf{P}$  ( $\mathbb{P}_{2a}$ ) eingesetzt wurde. Wie bereits in Abschnitt 3.1.2 erwähnt, ist das Funktional  $\mathcal{P}'(\chi_n, \tilde{\mathbf{V}})$  nichtlinear in  $\chi_n$ . Deshalb muss ein iteratives Verfahren angewendet werden, welches  $\chi_n$  an jedem Zeitschritt bestimmt. Sei dann  $\chi_{n,k} = \chi_{n,k-1} + \mathbf{h}_{n,k}$ ,  $k \geq 1$ , die Bewegungsabbildung in der  $k$ -ten Newton-Iteration, wobei das Inkrement  $\mathbf{h}_{n,k}$  die linearisierte Gleichung

$$\mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}}) + D_{\chi} \mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}] = 0 \quad (4.4)$$

löst. In den Rechnungen, die in dieser Arbeit durchgeführt werden, wird die Gâteaux-Ableitung  $D_{\chi} \mathcal{P}'(\chi_{n,k-1}, \tilde{\mathbf{V}})[\mathbf{h}_{n,k}]$  numerisch approximiert. Mit dieser Notation kann die Funktionsweise des RMA in Algorithmus 1 skizziert werden.

*GPA*: Die Funktionalität des GPA wird in Algorithmus 2 beschrieben, wobei die Notation

$$\mathcal{P}_{n,k-1,l-1} = \mathcal{P}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}, \tilde{\mathbf{V}}), \quad \mathcal{G}_{n,k-1,l-1} = \mathcal{G}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}), \quad (4.5a)$$

$$\mathbb{B}_{n,k-1,l-1} = \frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial \mathbf{B}_p}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}), \quad \mathbb{Y}_{n,k-1,l-1} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{B}_p}(\chi_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l-1}), \quad (4.5b)$$

benutzt wird. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, trägt der Index  $l$  in jedem Zeitschritt den Iterationen zur Linearisierung der Gleichungen bezüglich  $\mathbf{B}_{pn}$  Rechnung. In der  $l$ -ten

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

Iteration wird  $\mathbf{B}_{pn,l}$  so berechnet wie in (3.20) gezeigt und das plastische Inkrement  $\Phi_{n,l}$  wird durch (3.24) bestimmt. Um den Linearisierungsfehler, der durch dieses Vorgehen eingeführt wird, zu kontrollieren, ist der Check in Zeile 17 des Algorithmus' 2 notwendig. Wie für den RMA, wird die Gâteaux-Ableitung in Zeile 25 des Algorithmus' 2 durch die Berechnung der numerischen Ableitung des Defekts aus Zeile 9 approximiert.

---

#### Algorithmus 1 Lösen der elasto-plastischen Gleichungen mittels des RMA

---

```

1: if  $X \in \partial\mathcal{B}_D$  then
2:    $\mathbf{F}_{n,0} = T\chi_{bn}$ ;
3: else
4:    $\mathbf{F}_{n,0} = \mathbf{F}(\chi_{n-1}(X))$ ;
5: end if
6:  $k = 1$ ;
7:
8:  $(\mathbf{P}_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn}) = \text{RMA}(\mathbf{F}_{n,k-1}, \mathbf{B}_{p(n-1)})$ ;
9:
10:  $r_{n,k-1} := -\mathcal{P}'_{n,k-1} = -\int_{\mathcal{B}} \mathbf{P}_{n,k-1} : \mathbf{g}\text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}})$ ;
11:
12: if  $\|r_{n,k-1}\| \leq \epsilon_F$  then
13:    $(\mathbf{F}_n, \mathbf{B}_{pn}) = (\mathbf{F}_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn})$ ;
14: else
15:   bestimme  $\mathbf{h}_{n,k}$  durch:
16:    $D_{\chi}\mathcal{P}'_{n,k-1}[\mathbf{h}_{n,k}] = r_{n,k-1}$ ;
17:
18:    $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{F}_{n,k-1} + D_{\chi}\mathbf{F}_{n,k-1}[\mathbf{h}_{n,k}]$ ;
19:    $k = k + 1$ ;
20:   gehe zu 8;
21: end if

```

---



---

#### Algorithmus 2 Lösen der elasto-plastischen Gleichungen mittels des GPA

---

```

1: if  $X \in \partial\mathcal{B}_D$  then
2:    $\mathbf{F}_{n,0} = T\chi_{bn}$ ;
3: else
4:    $\mathbf{F}_{n,0} = \mathbf{F}(\chi_{n-1}(X))$ ;
5: end if
6:  $l = 1$ ;  $\mathbf{B}_{pn,0} = \mathbf{B}_{p(n-1)}$ ;
7:  $k = 1$ ;
8:
9:  $r_{n,k-1,l-1} := -\mathcal{P}_{n,k-1,l-1} + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g}\text{Grad}(\tilde{\mathbf{V}}) : \mathbb{B}_{n,k-1,l-1} :$   

 $(\mathbb{Y}_{n,k-1,l-1})^{-1} : \mathcal{G}_{n,k-1,l-1}$ ;
10:
11: if  $\|r_{n,k-1,l-1}\| \leq \epsilon_F$  then
12:
13:   berechne  $\Phi_{n,l}$ :
14:    $\Phi_{n,l} = -(\mathbb{Y}_{n,k-1,l-1})^{-1} : \mathcal{G}_{n,k-1,l-1}$ ;
15:    $\mathbf{B}_{pn,l} = \mathbf{B}_{pn,l-1} + \Phi_{n,l}$ ;
16:
17:   if  $\|\mathcal{G}(\mathbf{F}_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l})\| \leq \epsilon_{B_p}$  then
18:      $(\mathbf{F}_n, \mathbf{B}_{pn}) = (\mathbf{F}_{n,k-1}, \mathbf{B}_{pn,l})$ ;
19:   else
20:      $l = l + 1$ ;
21:     gehe zu 9;
22:   end if
23: else
24:   bestimme  $\mathbf{h}_{n,k}$  durch:
25:    $D_{\chi}r_{n,k-1,l-1}[\mathbf{h}_{n,k}] = -r_{n,k-1,l-1}$ .
26:
27:    $\mathbf{F}_{n,k} = \mathbf{F}_{n,k-1} + D_{\chi}\mathbf{F}_{n,k-1}[\mathbf{h}_{n,k}]$ ;
28:    $k = k + 1$ ;
29:   gehe zu 9;
30: end if

```

---

**Lösungsverfahren für RMA und GPA** Sowohl im RMA als auch im GPA entstehen letztendlich nichtlineare Gleichungen in  $\chi_n$ , siehe (RMA-zd-c) beziehungsweise (3.25), welche durch ein Newton-Verfahren gelöst werden. Im RMA gelangt man zu dieser nichtlinearen Gleichung, indem an jedem Integrationspunkt das Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus Abschnitt 3.1.1 durchgeführt wird und die damit erhaltene Spannungsantwort in die Impulserhaltungsgleichung eingesetzt wird. Beim GPA hingegen entsteht die nichtlineare Gleichung in  $\chi_n$  durch die Linearisierung der zeitdiskreten Impulserhaltungsgleichung (GPA-zd-a) und der zeitdiskreten Fließregel (GPA-zd-b) bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_{pn}$  plus der anschließenden Elimination des plastischen Inkrementes. Für beide Verfahren ist es nun notwendig diese nichtlineare Gleichung noch bezüglich  $\chi_n$  zu lösen. Durch die Anwendung eines Newton-Verfahrens wird dazu entlang von linearisierten Teilproblemen iteriert bis eine vorgegebene Fehler-Toleranz bezüglich der Linearisierung

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

erreicht ist. Die linearen Teilprobleme werden darin durch geometrisches Mehrgitterverfahren [14][52][134] gelöst, welches durch ein Bi-CGSTAB-Verfahren [130] beschleunigt wird. Ein Gauß-Seidel-Verfahren dient als Glätter im geometrischen Mehrgitter und der Grobgitterlöser ist durch eine LU-Zerlegung gegeben. Das Buch von Hackbusch [53] liefert wie das Buch von Saad [110] einen guten Überblick über gängige iterative Löser von großen Gleichungssystemen. In [110] wird zudem das Bi-CGSTAB-Verfahren von Van der Vorst [130] erläutert.

Aufgrund der hohen Nichtlinearität der betrachteten Probleme wird die Belastung, die mit dem Dirichlet-Rand verbunden ist, inkrementell aufgebracht [13], das heißt die totale Belastung, die in der Problembeschreibung auf den Dirichlet-Rand wirken soll, wird in kleine Teillasten unterteilt, die in jedem inkrementellen Schritt aufgebracht werden. Beispielsweise beschreibt in der Dirichlet-Randbedingung des Schub-Kompressionstests (4.3)  $T$  die Anzahl der inkrementellen Schritte und  $t$  den Parameter, der schrittweise inkrementiert wird. Diese Aufteilung der totalen Randbelastung führt auf bessere Startwerte für die Newton-Methode in jedem inkrementellen Schritt.

Zusätzlich zu dem inkrementellen Ansatz wird eine Linesearch-Methode angewendet, um die globale Konvergenz der nichtlinearen Iterationen sicherzustellen [92].

	Level 1	Level 2	Level 3	Level 4
RMA	0.010	0.111	0.950	9.042
GPA	0.040	0.429	3.281	33.172

Tabelle 4.3.: Rechenzeit (in CPU-h), die durch den Return-Mapping-Algorithmus (RMA) beziehungsweise den Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus (GPA) in dem Schub-Kompressionstest benötigt wird.

**Problemgröße und Rechenaufwand** Sogar für den einfachen Fall des Einheitswürfels, ist eine gute Gitterauflösung notwendig, um verlässliche Ergebnisse zu erzielen [91]. Zu diesem Zweck werden 32768 trilineare Hexaeder-Elemente verwendet, die dazu führen, dass 262144 nichtlineare Probleme in  $\mathbb{R}^7$  für die Auswertung des Defektes und der Berechnung der konsistenten Tangente an den Integrationspunkten gelöst werden müssen. Der Raum  $\mathbb{R}^7$  setzt sich hier aus den sechs unabhängigen Komponenten von  $\mathbf{B}_p$  und dem Lagrange-Multiplikator  $\gamma_\tau$  zusammen. Diese werden an den Integrationspunkten eines jeden Elementes berechnet. Mit einer 8-Punkt-Gauß-Quadraturregel ergeben sich somit für 32768 Hexaeder-Elemente 262144 nichtlineare Probleme, die zu lösen sind. Mit ‘Level 4’ wird das feinste Gitter mit 32768 Hexaeder-Elementen bezeichnet, welches durch ein dreifaches, uniformes Verfeinern des größten Gitters, ‘Level 1’, mit 64 Hexaeder-Elementen entstanden ist. Das nichtlineare variationelle Problem in  $\chi_n$  umfasst somit 107811 Unbekannte für die drei Komponenten der Bewegung.

Für den GPA muss zusätzlicher Aufwand aufgebracht werden, um die Inkremente  $\Phi_{n,t}$  zu berechnen, was eine Inversion eines vierstufigen Tensors an jedem Integrationspunkt

erfordert, siehe (3.24). Zudem muss der Linearisierungsfehler bezüglich der Fließregel, Zeile 17 in Algorithmus 2, kontrolliert werden. Deshalb benötigt der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus mehr Rechenzeit als der klassische RMA (siehe Tabelle 4.3). Andererseits kann dieser Zuwachs der Rechenzeit als Maß für die ‘Bedeutung’ der vereinfachenden Modellannahmen (3.1) und (3.2) angesehen werden. Es sei bemerkt, dass für das von Mises  $J_2$ -Plastizitätsmodell, das in Problem  $\mathbb{P}_1$  präsentiert wurde, lediglich ein Iterationsschritt in  $l$ , siehe Algorithmus 2, notwendig ist, um die vorgeschriebene Toleranz von  $\epsilon_{B_p} = 1.0e^{-08}$  in den Rechnungen dieser Arbeit zu erreichen.

### 4.1.2. Necking-Problem

Ein weiteres gut dokumentiertes Testbeispiel stellt das sogenannte Necking-Problem dar. Es beschreibt das Einschnürverhalten eines Zylinders in einem elasto-plastischen Zugtest [89][91][94][121][122]. In der Praxis dient der Zugversuch der Ermittlung des Werkstoffverhaltens bei einachsiger, gleichmäßiger und über den Querschnitt des Zylinders gleichmäßig verteilter Zugbeanspruchung. Dazu wird ein Testkörper gleichmäßig und stoßfrei bis zum Bruch gedehnt. Wenn die aufgebrachte Kraft, die Verlängerung und der Querschnitt des Testkörpers gemessen und aufgezeichnet werden, erhält man daraus ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm, ein  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm, das auch das Einschnürverhalten des Testkörpers nach dem Erreichen der sogenannten Zugfestigkeit  $R_m$  [117] berücksichtigt, siehe Abbildung 4.4. Unter der Zugfestigkeit wird der maximale Spannungswert des  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramms verstanden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Bruchmechanik außer Acht gelassen.

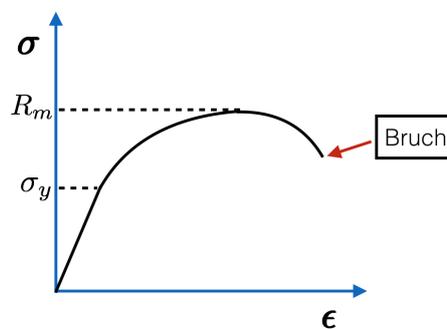


Abbildung 4.4.: Beispiel eines  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramms inklusive Zugfestigkeit  $R_m$  und Bruch. Bis zu der Fließspannung  $\sigma_y$  wird in diesem Beispiel linear elastisches Materialverhalten angenommen. Danach setzt plastisches Fließen ein. Sobald die Zugfestigkeit  $R_m$  erreicht wird, kommt es zur Einschnürung des Testkörpers (englisch: ‘necking’) bis hin zum Bruch. Diese Abbildung dient ausschließlich zur Illustration des Einschnürverhaltens. Die numerischen Tests dieses Abschnittes werden mit einem komplexeren Materialmodell, siehe Abbildung 4.5, durchgeführt.

Der Testkörper des Necking-Problems, welches unter Anderem in [89][91][121][122] be-

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

schrieben wird, ist ein Zylinder aus Stahl. Die Zylinder-Geometrie hat eine Anfangslänge von  $L_0 = 26.667$  mm und einen anfänglichen Radius von  $R_0 = 6.413$  mm. In Zylinder-Koordinaten  $\mathbf{X} = (R, \Theta, Z)$ , wobei  $R$  die radiale Koordinate,  $\Theta$  der Winkel und  $Z$  die Symmetrieachse beziehungsweise die axiale Koordinate sind, kann die Originalgeometrie (die initiale Konfiguration) des Testkörpers durch  $R \in [0, R_0]$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi)$ ,  $Z \in [-L_0/2, L_0/2]$  beschrieben werden. Der Necking-Test wird durchgeführt, indem eine axiale Verschiebung bis zu

$$\chi_b^z(\mathbf{X}_r, t) - L_0/2 = 7.0 \text{ mm}, \quad (4.6)$$

$$\chi_b^z(\mathbf{X}_l, t) + L_0/2 = -7.0 \text{ mm} \quad (4.7)$$

(was einer Ausdehnung um 26% der originalen Länge des Testkörpers entspricht) für alle  $\mathbf{X}_r \in [0, R_0] \times [0, 2\pi) \times \{L_0/2\}$  und  $\mathbf{X}_l \in [0, R_0] \times [0, 2\pi) \times \{-L_0/2\}$  aufgebracht wird. Diese beiden Punktmenge definieren den Dirichlet-Rand an den beiden Enden des zylindrischen Testkörpers. Die totale Belastung wird dabei durch mehrere inkrementelle Belastungsschritte erreicht, das heißt (4.6) wird durch  $\chi_b^z(\mathbf{X}_r, t) - L_0/2 = 7.0 \frac{t}{T}$  mm ersetzt, wobei  $T = 280$  s gewählt wird und  $t \in [0, T]$  gilt. Analoges gilt für (4.7).

##### Neo-Hooke Energie:

$$\boldsymbol{\tau}_\kappa = 2\mathbf{F}_e \frac{\partial \hat{W}_\kappa}{\partial \mathbf{C}_e} \mathbf{F}_e^T,$$

$$\hat{W}_\kappa(\mathbf{C}_e) = \hat{U}_\kappa(J_e) + \overline{W}_\kappa(\overline{\mathbf{C}}_e),$$

$$\hat{U}_\kappa(J_e) = \frac{1}{2}\kappa \left\{ \frac{1}{2}(J_e^2 - 1) - \ln(J_e) \right\},$$

$$\overline{W}_\kappa(\overline{\mathbf{C}}_e) = \frac{1}{2}\mu \left\{ \text{tr}(\boldsymbol{\eta}^{-1} \overline{\mathbf{C}}_e) - 3 \right\},$$

##### von Mises-Fließfunktion:

$$f_\tau(\boldsymbol{\tau}_\kappa, q) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_\kappa)\| + \sqrt{\frac{2}{3}} [q - \tau_y],$$

##### Verhärtungsfunktion:

$$q = -K(\alpha) = -[H\alpha + (H_\infty - \tau_y)(1 - \exp(-\omega\alpha))],$$

##### Fließ- und Verhärtungsregel:

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -\frac{2}{3}\gamma_\tau(\chi) \text{tr}(\mathbf{B}_p \mathbf{C}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{n} \mathbf{F}^{-T},$$

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_\tau(\chi).$$

Abbildung 4.5.: Von Mises  $J_2$ -Plastizitätsmodell mit einer Neo-Hooke Energie und nicht-linearer isotroper Verhärtung [122].

Aufgrund der Symmetrie des Zylinders können die Berechnungen unter geeigneten Sym-

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

metrierandbedingungen auf einem Achtel der Originalgeometrie durchgeführt werden. Das Rechengitter wird allerdings in der Region, in der das Einschnürverhalten auftritt, stärker verfeinert als im Rest des Testkörpers, siehe Abbildung (4.6a). Das größte Gitterlevel, Level 1, besteht somit aus 120 Hexaeder-Elementen. Die feineren Gitterlevel werden durch reguläre Verfeinerung des groben Gitters erzeugt. Zum Beispiel entspricht damit Level 2 dem Gitter, welches in [121] vorgestellt wurde.

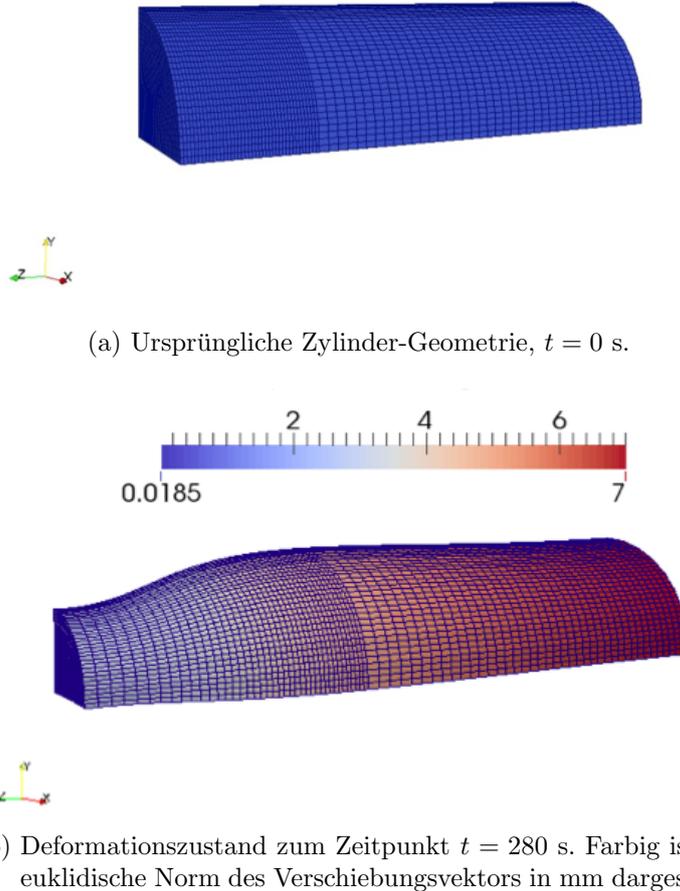


Abbildung 4.6.: Deformation des Zylinders ( $\frac{1}{8}$  der Originalgeometrie) in einem Zugtest mit  $\chi_b^z(\mathbf{X}_l, t) + L_0/2 = -7.0 \frac{t}{T}$  mm,  $\mathbf{X}_l \in [0, R_0] \times [0, 2\pi) \times \{-L_0/2\}$ ,  $T = 280$  s. Die Zug-Randbedingung wirkt in dieser Abbildung auf der hinteren Viertelkreisfläche.

Wie der Schub-Kompressionstest wird auch der Necking-Test unter den vereinfachten Modellannahmen aus Abschnitt 3.1 durchgeführt. Die klassische Problemformulierung  $\mathbb{P}_1$  der von Mises  $J_2$ -Plastizität für große Deformationen ( $\mathbb{P}_{1a}$ )–( $\mathbb{P}_{1g}$ ) wird durch die Neo-Hooke Energie (3.1) komplettiert. Das Materialmodell ist in der Abbildung 4.5 zusammengefasst. Es werden in diesem Test die gleichen Materialparameter wie im Schub-Kompressionstest gewählt, siehe Tabelle 4.1. Wie in [122] wird hier allerdings ein nicht-lineares, exponentielles Verhärtungsgesetz gewählt. Im Speziellen ist das Verhärtungspo-

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

tential durch

$$\hat{\mathfrak{H}}_\kappa(\alpha) = \frac{1}{2}H\alpha^2 + (H_\infty - \tau_y)\alpha - (H_\infty - \tau_y)\frac{1}{\omega} [1 - \exp(-\omega\alpha)], \quad (4.9a)$$

$$q = -K(\alpha) = -\frac{\partial \hat{\mathfrak{H}}_\kappa}{\partial \alpha}(\alpha) = -[H\alpha + (H_\infty - \tau_y)(1 - \exp(-\omega\alpha))], \quad (4.9b)$$

gegeben. Daher ist es notwendig, ein lokales Newton-Verfahren zur Bestimmung des plastischen Multiplikators  $\gamma_{\tau n}$  in (3.12) in jeder globalen Newton-Iteration für  $\chi_n$  durchzuführen [122]. Weil allerdings  $\gamma_{\tau n}$  aufgrund von  $\mathbf{F}_n$  als ein Funktional von  $\chi_n$  gesehen werden kann, siehe (3.12), und um den Rechenaufwand zu reduzieren, wird  $\gamma_{\tau n}$  in jedem lokalen Newton-Schritt explizit bezüglich  $\chi_n$  berechnet.

Um Ergebnisse zu erzielen, die in guter Übereinstimmung mit denen aus [122] sind, ist ein feines Rechengitter mit 61440 Hexaeder-Elementen nötig. Solch ein feines Gitter ist notwendig, um das physikalische Verhalten und die geometrische Veränderung des Testkörpers adäquat zu approximieren, siehe Abbildungen 4.6a, 4.6b und 4.7a. Ein Grund für die Notwendigkeit einer solchen Verfeinerung ist die Tatsache, dass **volumetrische Locking-Effekte** vermieden werden müssen, welche als Konsequenz der Annahme von isochorem plastischen Fließen (2.15) auftreten können. Der Begriff des *Lockings* wird im Ingenieurbereich oft verwendet, wenn Finite-Elemente-Rechnungen wesentlich kleinere Verschiebungen liefern als die wahren [14].

Ein weiterer gängiger Ansatz, um volumetrisches Locking-Verhalten zu eliminieren, ist die Ordnung des Polynomraums im Finite-Elemente-Raum zu erhöhen anstatt die Gitterweite zu verkleinern [27][58]. Abbildung 4.8b zeigt, dass die experimentellen Daten mit einer guten Genauigkeit bereits auf Gitterlevel 2 approximiert werden können, sofern quadratische Finite-Elemente-Ansatzfunktionen verwendet werden, das heißt, wenn  $m = 2$  in (3.41) gesetzt wird.

**Konvergenz** In Tabelle 4.4 sind punktweise Änderungen in den Komponenten des Verschiebungsvektors und der normalen Komponente des Cauchyschen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T$  unter uniformer Gitterverfeinerung abgebildet. Obwohl fast 200000 Freiheitsgrade auf Level 4 verteilt sind, ist die Region, in der die plastische Evolution stattfindet, noch nicht korrekt erfasst, siehe Tabelle 4.4. Dies ist daran zu erkennen, dass die Anzahl der plastischen Integrationspunkte, das heißt derjenigen Integrationspunkte, an denen eine plastische Evolution stattfindet, nicht mit dem gleichen Faktor steigt wie die Anzahl der Elemente unter Gitterverfeinerung. Bei einer Wahl einer 8-Punkt-Gauß-Quadratur für Hexaeder-Elemente ist dies ein Indikator dafür, ob die plastische Region korrekt erfasst wird. Trotzdem kann für die Beispielpunkte lineare Konvergenz in den Verschiebungen und in den Normalspannungen beobachtet werden.

Tabelle 4.5 zeigt, dass die nichtlinearen Konvergenzraten des RMA und des GPA vergleichbar sind. Für beide Algorithmen ist allerdings eine Linesearch-Methode evident, um in den ersten nichtlinearen Iterationsschritten Konvergenz zu erreichen.

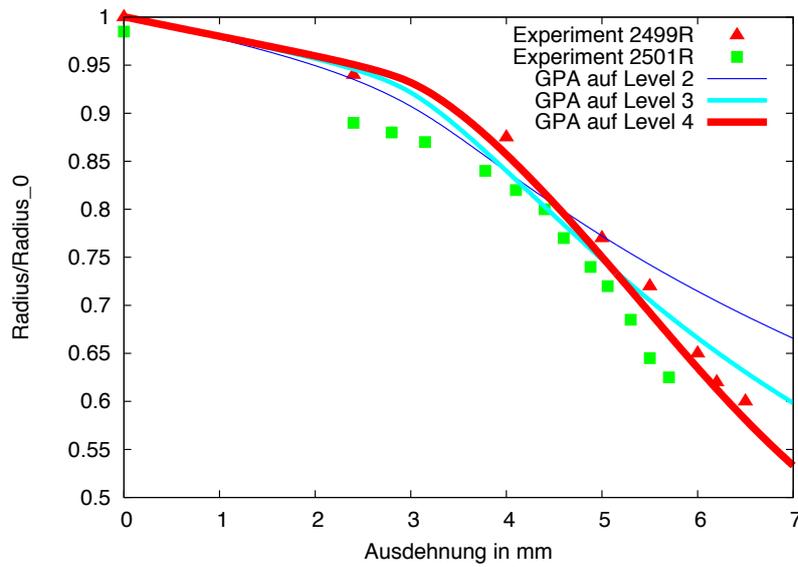
**Einfluss einer geometrischen Imperfektion** In vielen numerischen Studien des Necking-Problems wird eine geometrische Imperfektion eingeführt. Dies geschieht dadurch, dass die

4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

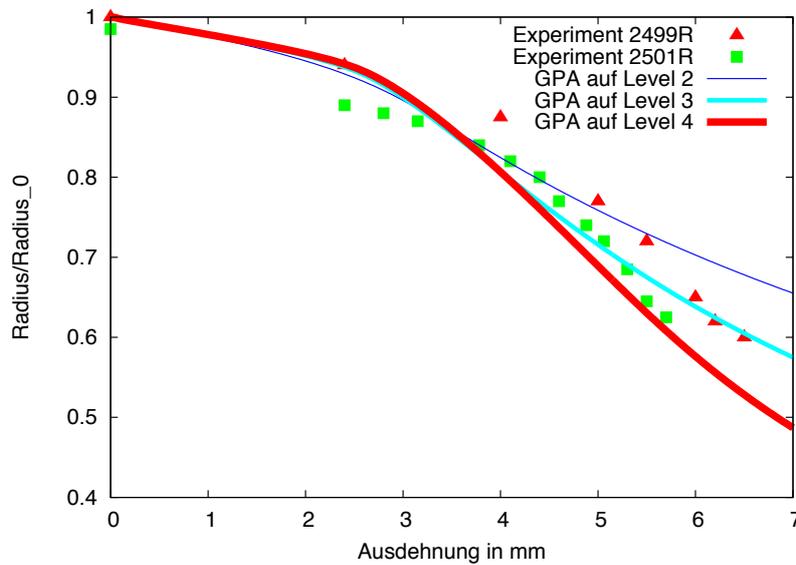
	Elemente	DoFs	plastische IPs	$\mathbf{u}_r(\mathbf{P}_1)$	diff.	$\mathbf{u}_r(\mathbf{P}_2)$	diff.	$\mathbf{u}_z(\mathbf{P}_3)$	diff.
Level 1	120	627	960	-1.548		-0.794		-1.815	
Level 2	960	3843	4709	-2.138	0.590	-0.600	0.194	-2.812	0.997
Level 3	7680	26691	25539	-2.561	0.423	-0.530	0.170	-3.281	0.469
Level 4	70080	198531	110908	-2.973	0.412	-0.541	0.009	-3.381	0.100
	$\sigma_{rr}(\mathbf{P}_1)$	diff.	$\sigma_{rr}(\mathbf{P}_2)$	diff.	$\sigma_{zz}(\mathbf{P}_3)$	diff.			
Level 1	3.646e+03		5.734e+03		3.860e+03				
Level 2	2.547e+03	1.099e+03	8.031e+03	2.297e+03	12.137e+03	8.277e+03			
Level 3	2.058e+03	0.489e+03	3.473e+03	4.558e+03	8.662e+03	3.475e+03			
Level 4	1.742e+03	0.316e+03	2.786e+03	0.687e+03	7.952e+03	0.710e+03			

Tabelle 4.4.:  $\mathbf{P}_1 = (6.413, 0, 13.334)$ ;  $\mathbf{P}_2 = (6.413, 0, 10)$ ;  $\mathbf{P}_3 = (6.406, 0.785, 12)$  sind drei Beispielpunkte in Zylinder-Koordinaten;  $\mathbf{u}_r := \chi^r(\mathbf{P}, t) - \chi^r(\mathbf{P}, 0)$  ist die radiale Verschiebung und  $\mathbf{u}_z := \chi^z(\mathbf{P}, t) - \chi^z(\mathbf{P}, 0)$  die axiale Verschiebung an den Punkten  $\mathbf{P} \in \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3\}$  zum Zeitpunkt  $t = 280$  s. Mit *DoFs* seien hier Freiheitsgrade (degrees of freedom) und mit *IPs* Integrationspunkte (integration-points) bezeichnet.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität



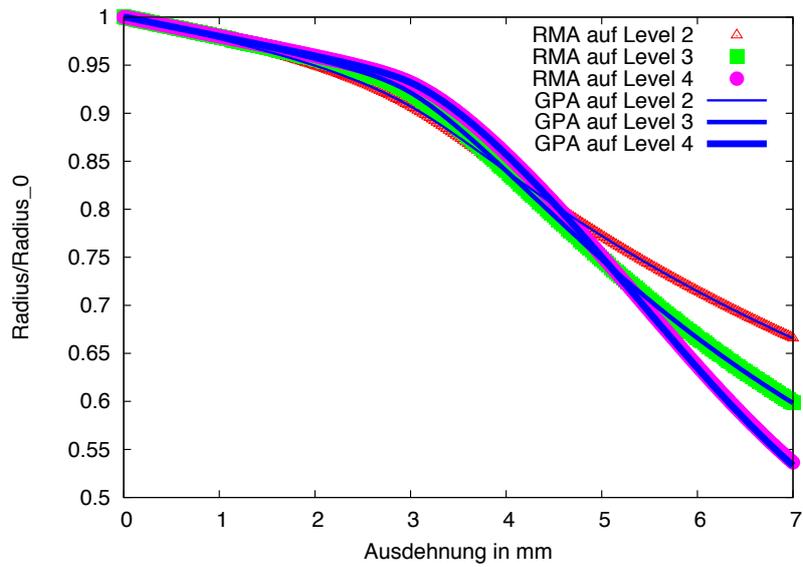
(a) Resultate auf verschiedenen Verfeinerungsstufen



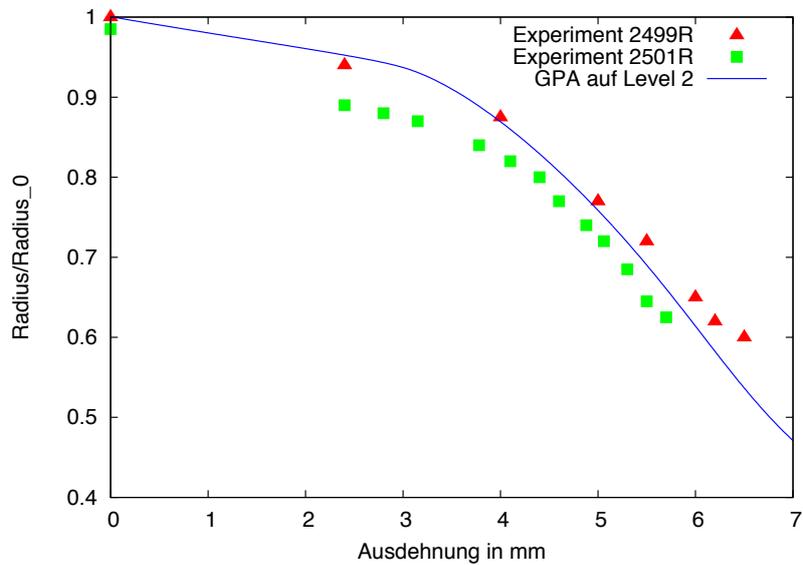
(b) Resultate für Tests mit einer initialen geometrischen Imperfektion

Abbildung 4.7.: Vergleich der numerischen Ergebnisse für den Necking-Test, die mit dem GPA berechnet sind, mit experimentellen Daten aus [94]. Die Experimente 2499R (21 °C) und 2501R (71 °C) unterscheiden sich dabei in der Temperatur der Probekörper. Geplottet ist die Änderung der Schnittfläche, wo das Necking auftritt, gegen die Ausdehnung des Zylinders in mm.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität



(a) Vergleich der Resultate des RMA mit denen des GPA



(b) Rechnung mit quadratischen Finite-Elemente-Ansatzfunktionen

Abbildung 4.8.: Vergleich der numerischen Ergebnisse für den Necking-Test mit experimentellen Daten aus [94]. Die Experimente 2499R (21 °C) und 2501R (71 °C) unterscheiden sich dabei in der Temperatur der Probekörper. Geplottet ist die Änderung der Schnittfläche, wo das Necking auftritt, gegen die Ausdehnung des Zylinders in mm.

	RMA		GPA	
	$t = 1 \text{ s}$	$t = 280 \text{ s}$	$t = 1 \text{ s}$	$t = 280 \text{ s}$
nichtlinearer Iterationsschritt: 1	1.08e <sup>+04</sup>	1.05e <sup>+04</sup>	1	1.07e <sup>+04</sup>
2	6.81e <sup>+02</sup>	6.34e <sup>+02</sup>	2	1.07e <sup>+03</sup>
3	5.51e <sup>+02</sup>	5.48e <sup>+02</sup>	3	3.20e <sup>+02</sup>
4	5.50e <sup>+00</sup>	4.37e <sup>+02</sup>	4	7.72e <sup>+01</sup>
5	5.26e <sup>-02</sup>	2.70e <sup>+02</sup>	5	7.63e <sup>-01</sup>
6	4.63e <sup>-04</sup>	2.15e <sup>+01</sup>	6	5.42e <sup>-03</sup>
7	2.86e <sup>-06</sup>	1.01e <sup>+01</sup>	7	3.91e <sup>-05</sup>
8	2.54e <sup>-08</sup>	7.64e <sup>-01</sup>	8	3.53e <sup>-07</sup>
9	3.53e <sup>-10</sup>	5.99e <sup>-02</sup>	9	2.39e <sup>-09</sup>
10		3.04e <sup>-03</sup>	10	6.04e <sup>-04</sup>
11		4.11e <sup>-05</sup>	11	9.79e <sup>-06</sup>
12		1.40e <sup>-06</sup>	12	8.67e <sup>-08</sup>
13		1.55e <sup>-08</sup>		7.12e <sup>-09</sup>
14		6.58e <sup>-09</sup>		

Tabelle 4.5.: Vergleich der nichtlinearen Reduktion der Defektnorm mithilfe des

RMA und des GPA für den Necking-Test auf Level 4. Der Defekt ist definiert als die negative rechte Seite von Zeile 10 des Algorithmus' 1 beziehungsweise der Zeile 9 des Algorithmus' 2. Die Zeitvariable  $t$  definiert die Belastung, die an dem Dirichlet-Rand des Zylinders aufgebracht wird:  $\chi_b^z(\mathbf{X}, t) - Z = 7.0 \frac{t}{T}$  mm mit  $T = 280 \text{ s}$ .

kreisförmige Schnittfläche der Mittelachse des undeformierten Testkörpers durch den reduzierten Radius  $r_0^{\text{red}} = cr_0$  mit  $0 < c \leq 1$  charakterisiert ist. Im Folgenden wird  $c = 0.982$  gesetzt [114][121]. Der reduzierte Radius unterstützt den Beginn des Einschnürprozesses. Der Einfluss dieser Imperfektion auf den Einschnürprozess wird durch das Lösen der Modellgleichungen mit  $c = 0.982$  und dem anschließenden Vergleich der Ergebnisse mit denen, die mit  $c = 1$  erhalten wurden, untersucht. Der Fall  $c = 1$  beschreibt hier den Fall, dass keine geometrische Imperfektion vorliegt. Obwohl der initiale Radius nur um 1.8% reduziert wurde, hat die Imperfektion eine signifikante Auswirkung auf die relative Änderung des Radius' in der Necking-Region. Für die Zylindergeometrie ohne geometrische Imperfektion, das heißt für den Fall, in dem  $c = 1$  gesetzt wird und der initiale Radius durch  $r_0 = 6.413$  mm gegeben ist, liefern die numerischen Testrechnungen eine relative Reduktion von  $r_0$  um 46.5%. Für die Fälle, in denen eine initiale Imperfektion betrachtet wird, reduziert sich  $r_0^{\text{red}}$  um 51.3%, siehe Abbildung 4.7b.

## 4.2. Löser-Performance auf massiv-parallelen Systemen

In diesem Abschnitt wird die Effizienz des geometrischen Mehrgitterverfahrens [107] in massiv-parallelen Rechnungen für das Problem der linearen Elastizität untersucht. Dazu wurde eine Skalierungsstudie auf dem Supercomputer *Juqueen* des Forschungszentrums Jülich durchgeführt. *Juqueen* ist ein BlueGene/Q-System mit 28672 Rechenknoten à 16 Prozessorkernen mit 1.6 GHz und 16 GB Speicher.

Durch die Parallelisierung eines Problems erhofft man sich ein schnelleres Lösen des Problems bei zunehmender Prozessorzahl. Um die Parallelisierung zu bewerten, wird der Begriff der schwachen Skalierung eingeführt. Bei der **schwachen Skalierung** wird die *Problemgröße pro Prozessor konstant* gehalten und dann betrachtet, wie die Zeit für den Lösungsprozess variiert. Dem gegenüber steht die **starke Skalierung**, bei der die Änderung der Löserzeit untersucht wird, während die *totale Problemgröße konstant* gehalten wird. In diesem Abschnitt wird die schwache Skalierung des geometrischen Mehrgitterverfahrens analysiert. Zur Untersuchung der schwachen Skalierbarkeit wird bei Erhöhung der Prozessorzahl das Rechengitter verfeinert, um die Problemgröße zu erhöhen. Dabei steigt die Anzahl der Gitterelemente um den gleichen Faktor wie die Anzahl der Prozessoren. Im Idealfall bleibt also die Rechenzeit für größer werdende Probleme unter einer steigenden Anzahl von Prozessoren konstant.

Die Skalierbarkeit eines Systems wird mit einem Skalierungsfaktor, dem sogenannten **Speedup**, angegeben.

**Definition 4.1** (Speedup). *Es sei ein Referenzproblem  $R$  mit der Problemgröße  $G_r$  gewählt. Dieses wird auf  $N_r$  Prozessoren in der Zeit  $T_r$  gelöst. Außerdem sei ein Problem  $P$  der Problemgröße  $G_p$  betrachtet, welches auf  $N_p$  Prozessoren in der Zeit  $T_p$  gelöst wird. Hierbei gelte, dass  $N_p > N_r$  ist. Dann ist der Speedup der Parallelisierung unter*

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

Erhöhung der Prozessorzahl von  $N_r$  auf  $N_p$  als das Verhältnis

$$S(N_r, N_p) := \frac{\frac{T_r}{G_r}}{\frac{T_p}{G_p}} = \frac{T_r}{T_p} \frac{G_p}{G_r} \quad (4.10)$$

gegeben.

Der ideale Speedup  $S_{ideal}(N_r, N_p)$  entspricht also dem Faktor, um den die Problemgröße des Referenzproblems R zu Problem P zunimmt.

Mithilfe des Speedups kann nun die **Effizienz** der Parallelisierung quantifiziert werden.

**Definition 4.2** (Effizienz). *Unter der Effizienz  $E$  wird der Quotient aus tatsächlichem und idealem Speedup, das heißt*

$$E(N_r, N_p) := \frac{S(N_r, N_p)}{S_{ideal}(N_r, N_p)}, \quad (4.11)$$

verstanden.

Diese Begriffe der Effizienz und des Speedups erlauben es nun, die Güte der Parallelisierung des Assemblierungsprozesses und des geometrischen Mehrgitterlösers anhand einer Testrechnung der linearen Elastizität in 3D zu quantifizieren.

**Schub-Kompressionstest der linearen Elastizität** Die Skalierungsstudie wird anhand eines Schub-Kompressionstests, siehe Abschnitt 4.1.1, durchgeführt. Der Einheitswürfel dient als Rechengebiet für diesen Test. In einem orthonormalen kartesischen Koordinatensystem können die Dirichlet-Randbedingungen des Schub-Kompressionstests wie folgt geschrieben werden:

$$\chi_b^1(\mathbf{X}) = X^1 + 0.3, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}) = X^2 - 0.3, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}) = X^3, \quad \text{auf } [X^1, 1, X^3], \quad (4.12a)$$

$$\chi_b^1(\mathbf{X}) = X^1, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}) = X^2, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}) = X^3, \quad \text{auf } [X^1, 0, X^3], \quad (4.12b)$$

mit  $[X^1, 1, X^3] = [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$ ,  $[X^1, 0, X^3] = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]$ . Die Bedingungen (4.12) beschreiben einen Würfel, der an der unteren Fläche,  $X^2 = 0$ , eingespannt ist, und auf den an der oberen Fläche,  $X^2 = 1$ , eine Deformation in Schub- und Kompressionsrichtung bis zu 30% erfolgt. Im Vergleich zu (4.3) wurden hier die Dirichlet-Randbedingungen zeitunabhängig formuliert, das heißt die Schub-Kompressionsbelastung wird direkt und nicht in mehreren inkrementellen Schritten aufgebracht.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

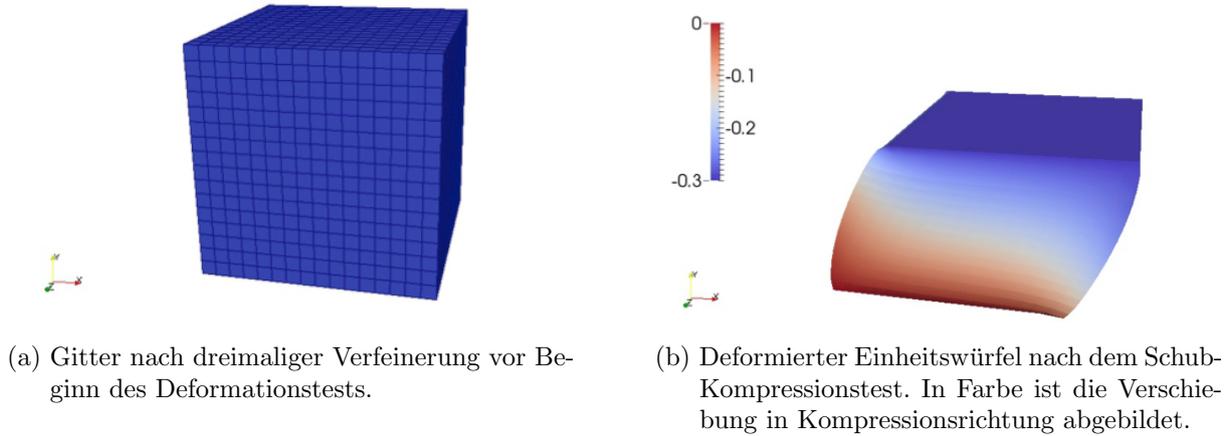


Abbildung 4.9.: Schub-Kompressionstest der linearen Elastizität

Das Modell besteht aus den Gleichungen der linearen Elastizität, siehe Abschnitt 1.4.2. Sei dazu  $\boldsymbol{\sigma}$  der symmetrische Cauchysche Spannungstensor und  $\chi$  die Bewegungsabbildung. Es werden die Volumenkräfte  $\mathbf{f}$  und die Flächenkräfte  $\mathbf{t}$  von vornherein auf Null gesetzt. Dann lautet die Impulserhaltungsgleichung mit den Dirichlet-Randbedingungen (4.12)

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t, \quad (4.13a)$$

$$\chi(\mathbf{X}) = \chi_b(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in [X^1, 1, X^3] \cup [X^1, 0, X^3]. \quad (4.13b)$$

Der Cauchysche Spannungstensor sei dabei durch das Hooksche Gesetz für homogene, isotrope Materialien bestimmt, das heißt mit dem linearisierten Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  ergibt sich folgender linearer Zusammenhang von Spannungen und Verzerrungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{c} : \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{d.h. } \sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (4.14a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}(\mathbf{u}) + (\operatorname{grad}(\mathbf{u}))^T), \quad (4.14b)$$

mit dem Elastizitätstensor  $\mathbb{c} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I}^{sym}$ ,  $c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$  und den Lamé Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ .  $\delta$  steht hier für das Kronecker- $\delta$ , siehe (1.4). Die Materialparameter werden in diesem Test wie folgt gewählt:

$$\lambda = 110743.82 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2},$$

$$\mu = 80193.80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

Zur Diskretisierung werden lineare Hexaeder-Elemente mit einer 8-Punkt-Gauß-Quadraturregel genutzt.

Als Löser wird das geometrische Mehrgitterverfahren mit einem V-Zyklus und 2 Vor- und 2 Nachglättungsschritten mittels eines gedämpften Jacobi-Verfahrens gewählt. Der Dämpfungsparameter wird auf 0.6 gesetzt. Als Grobgitterlöser wird eine LU-Zerlegung gewählt. Die Iteration terminiert, sobald der Defekt die absolute Größe von  $1.0e^{-09}$  in der

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

euklidischen Norm unterschritten hat.

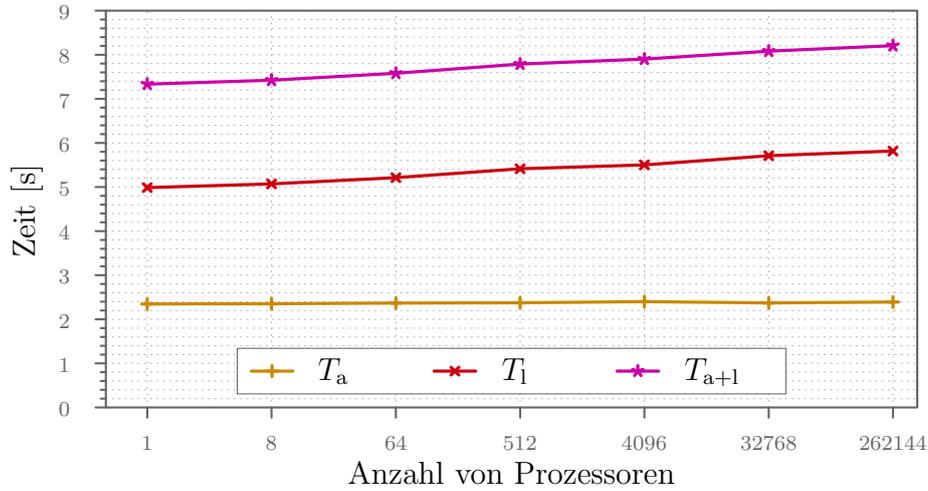


Abbildung 4.10.: Rechenzeit für die Matrixassemblierung ( $T_a$ ), für den geometrischen Mehrgitterlöser ( $T_l$ ) sowie für den Assemblierungsprozess und den Löser ( $T_{a+l}$ ) bei steigender Anzahl von Prozessoren.

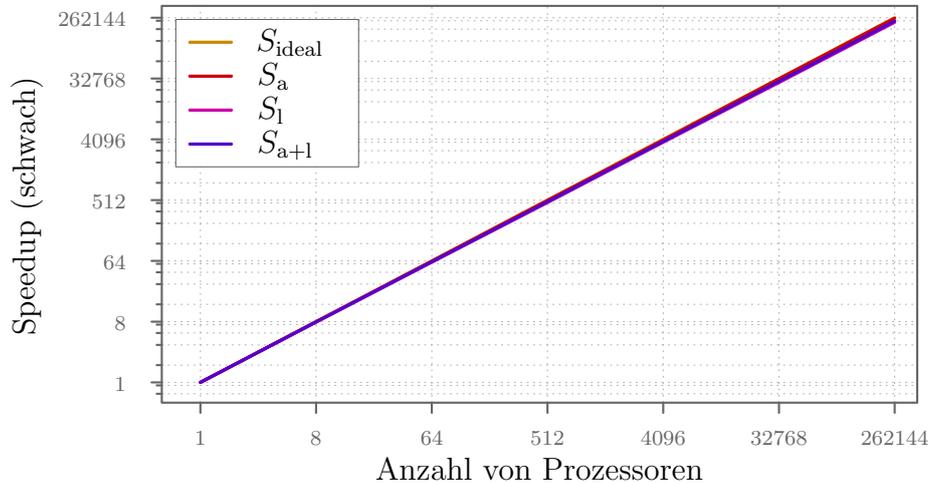


Abbildung 4.11.: Erzielter Speedup der Matrixassemblierung ( $S_a$ ), des geometrischen Mehrgitterlösers ( $S_l$ ) sowie des Assemblierungsprozesses und des Lösers ( $S_{a+l}$ ) im Vergleich zum idealen Speedup ( $S_{ideal}$ ) bei steigender Anzahl von Prozessoren.

Die Abbildungen 4.10 und 4.11 sowie die Tabelle 4.6 zeigen das exzellente Skalierungsverhalten der Assemblierung und des geometrischen Mehrgitterlösers für das Problem der linearen Elastizität. Es ist ersichtlich, dass die Assemblierung perfekt skaliert. Lediglich

## 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

pe	Level	DoFs	$T_a$	$T_l$	$T_{a+l}$	$E_{a+l}$	$S_{a+l}$	$S_{ideal}$
1	3	14'739	2.347	4.987	7.334	-	-	-
8	4	107'811	2.352	5.070	7.422	98.8	7.9	8
64	5	823'875	2.368	5.212	7.580	96.8	62.0	64
512	6	6'440'067	2.375	5.414	7.789	94.2	482.3	512
4'096	7	50'923'779	2.400	5.502	7.902	92.8	3'801.1	4'096
32'768	8	405'017'091	2.371	5.711	8.082	90.7	29'720.6	32'768
262'144	9	3'230'671'875	2.391	5.816	8.207	89.4	234'356.7	262'144

Tabelle 4.6.: Lineare Elastizität in 3D auf Jukeen. 3-9 Verfeinerungen. pe: Prozesse, Level: Verfeinerungsstufe, DoFs: Freiheitsgrade,  $T_a$ : Zeit für die Assemblierung,  $T_l$ : Zeit für das Lösen,  $T_{a+l}$ ,  $E_{a+l}$ ,  $S_{a+l}$ : Zeit, Effizienz und Speedup für Assemblierung und Lösen,  $S_{ideal}$ : idealer Speedup. Die Zeiten sind in Sekunden und die Effizienz in Prozent angegeben.

ein leichter Anstieg in der Zeit, die der Löser benötigt, ist zu erkennen. Für Details zu dem geometrischen Mehrgitterverfahren sowie zu der Parallelisierungsbibliothek pcl (Parallel Communication Layer) und dem Gittermanager sei auf [134] beziehungsweise [107] verwiesen. Ähnliche Skalierungsergebnisse des geometrischen Mehrgitterlösers wurden auch bereits für das Laplace-Problem erzielt, siehe [107].

### 4.3. Anwendungsbeispiele mit komplexer Geometrie

Dieser Abschnitt widmet sich numerischen Tests, bei denen eine komplexere, realitätsnahe Geometrie verwendet wird. Es wird ein Bauteil vorgestellt, das in einem Motor die Verbindung der Kurbelwelle zu einem Kolben bildet, und ein weiteres, welches in Crash-testsimulationen einer Vorderwagenstruktur in der Automobilindustrie von Bedeutung ist. Die Materialmodelle für beide Bauteile können so formuliert werden, dass sie ein Problem der Problemklasse  $\mathbb{P}_1$  beschreiben. Als plastischer Algorithmus kann somit das Return-Mapping-Verfahren aus Abschnitt 3.1 angewendet werden.

#### 4.3.1. Pleuelstange aus Gusseisen

Als erstes Beispiel wird das Deformationsverhalten einer Pleuelstange aus Gusseisen untersucht. Gusseisen wird im Gegensatz zu beispielsweise Stahl als ein sprödes Material charakterisiert [7]. Spröde Materialien zeichnen sich unter Anderem dadurch aus, dass sie sehr geringe inelastische Deformationen hervorrufen. Oder anders ausgedrückt, es tritt bei solchen Materialien schon bei relativ geringen Verzerrungswerten Versagen auf. Aus diesem Grund wird für die Pleuelstange ein Modell der infinitesimalen Elasto-Plastizität angenommen, siehe Abschnitt 2.6, so dass dieser Test zur Validierung der Implementierung der infinitesimalen Modellformulierung dient. Materialversagen wird nicht berücksichtigt.

Die gewählten Materialparameter, die das Verhalten von Gusseisen modellieren, sind in Tabelle 4.7 zusammengefasst, siehe [140]. Es wird lineares Verhärtungsverhalten mit ei-

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

Kompressionsmodul	$\kappa$	82500.00 N/mm <sup>2</sup>
Schubmodul	$\mu$	50500.00 N/mm <sup>2</sup>
Fließspannung	$\sigma_y$	130.00 N/mm <sup>2</sup>
lineares Verhärtungsmodul	$H$	129.24 N/mm <sup>2</sup>
Verhärtungsexponent	$\omega$	0.00

Tabelle 4.7.: Materialparameter für Gusseisen

nem Verhärtungsmodul  $H = 129.24 \text{ N/mm}^2$  angenommen, das heißt in dem nichtlinearen Verhärtungsgesetz (2.68) wird  $\omega = 0$  gewählt.

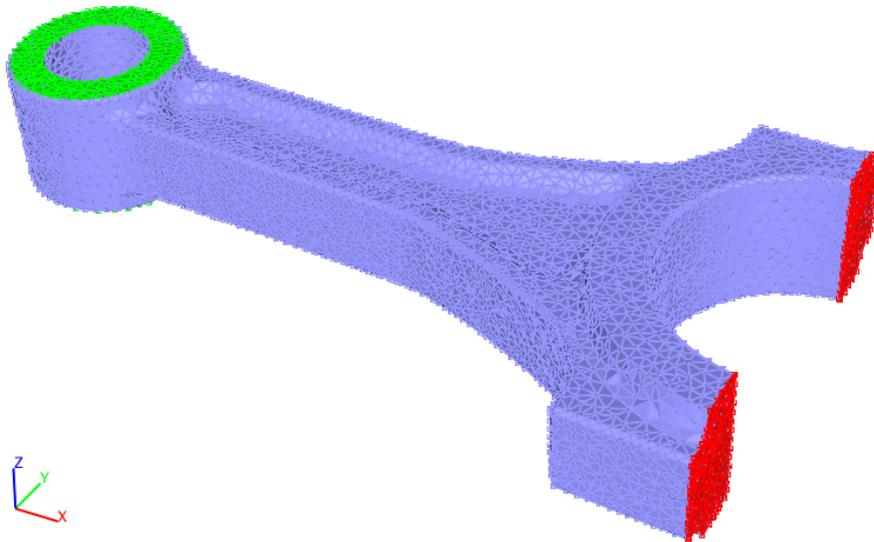


Abbildung 4.12.: Pleuelstangen-Geometrie mit 170480 Tetraeder-Elementen. Im roten Randbereich wird eine Kompressionsrandbedingung vorgegeben, während der grüne Randbereich in allen drei Raumrichtungen fixiert wird. Auch der untere (hier nicht sichtbare) Ring zählt zu der grünen Randfläche hinzu und wird fixiert.

Auf der Geometrie aus Abbildung 4.12 wird ein Belastungstest in Form eines Kompressionsversuchs durchgeführt. Dazu wird auf der roten Randfläche eine inkrementelle Last von

$$\chi_b^1(\mathbf{X}, t) = X^1 - 0.05 \frac{t}{T}, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}, t) = X^2, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}, t) = X^3, \quad (4.15a)$$

für alle  $t \in \mathcal{I} \equiv [0, T]$  vorgegeben. Es wird  $T = 100 \text{ s}$  gesetzt, wodurch die Kompressionslast in insgesamt 100 Inkremente unterteilt wird. Damit deformiert die Pleuelstange wie in Abbildung 4.13 gezeigt.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

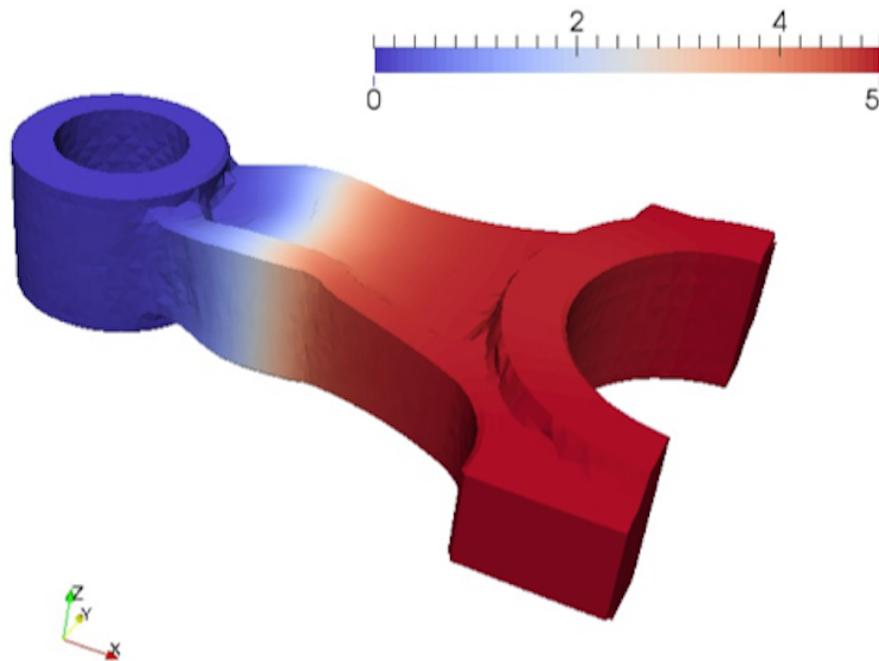


Abbildung 4.13.: Deformierte Pleuelstange zum Zeitpunkt  $t = 100$  s. Farblich ist die euklidische Norm des Verschiebungsvektors dargestellt.

In den Abbildungen 4.14a und 4.14b wird außerdem deutlich, wo die plastischen Verzerrungen beziehungsweise die größten Spannungen auftreten. Dazu wird die Frobenius-Norm des Cauchy'schen Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  beziehungsweise die äquivalente plastische Verzerrung  $\boldsymbol{\epsilon}_p^{eq}$ , die als

$$\boldsymbol{\epsilon}_p^{eq}(t) := \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_\sigma dt \quad (4.16)$$

definiert ist [122], an jedem Integrationspunkt gebildet und anschließend der Mittelwert über diese Integrationspunktdaten für jeden Gitterknoten bestimmt. Diese Mittelwerte sind in 4.14a und 4.14b abgebildet.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

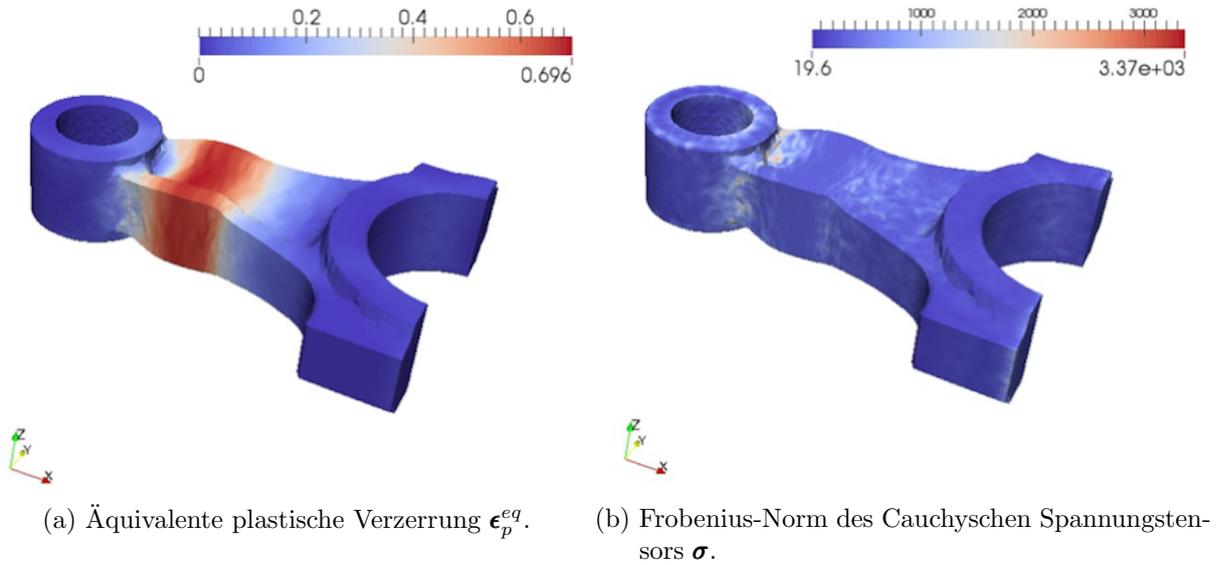


Abbildung 4.14.: Plastische Verzerrungen und Spannungen in der deformierten Geometrie zum Zeitpunkt  $t = 100$  s.

#### 4.3.2. Bauteil einer Vorderwagenstruktur

Im Rahmen des Projektes „Reduzierung numerischer Sensitivitäten in der Crashsimulation auf HPC-Rechnern“ [29] wurde ein Bauteil aus einem Teilfahrzeugmodell extrahiert, welches genau so auch in der Automobilindustrie verwendet wird. Die Geometrie des Bauteils mit dem verwendeten Rechengitter ist in Abbildung 4.15a und 4.15b gezeigt. Auf dieser dünnwandigen Struktur wird in diesem Abschnitt das elasto-plastische Materialmodell gerechnet, welches durch die Energie des quasi-inkompressiblen Neo-Hooke Modells (3.1) und die Fließregel (3.2) gegeben ist und somit auch für große Deformationen Gültigkeit besitzt. Das elasto-plastische Modell entspricht also dem klassischen Modell  $\mathbb{P}_1$ , so dass der Return-Mapping-Algorithmus aus Abschnitt 3.1 anwendbar ist. Die Materialparameter werden so gewählt, dass sie das Verhalten von Stahl modellieren, siehe Tabelle 4.1. Dazu wird exponentielles Verhärtungsverhalten angenommen.

Die grüne Randfläche, siehe Abbildung 4.15b, sei fixiert, d.h.

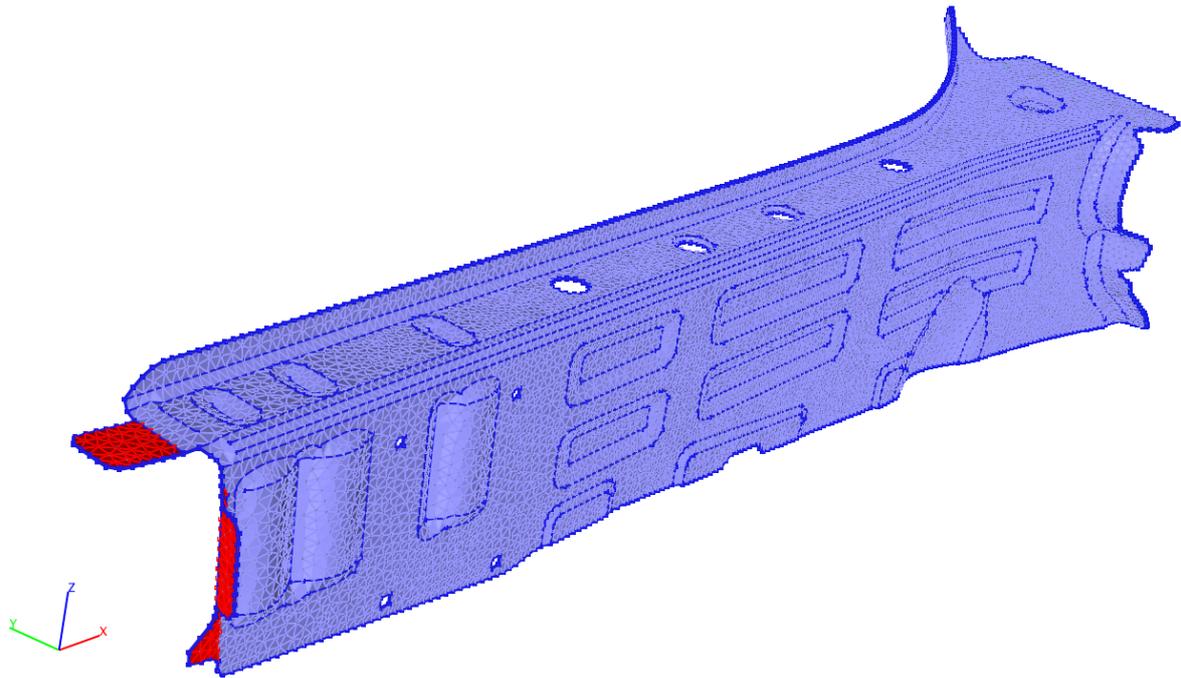
$$\chi_b^1(\mathbf{X}, t) = X^1, \quad \chi_b^2(\mathbf{X}, t) = X^2, \quad \chi_b^3(\mathbf{X}, t) = X^3, \quad (4.17)$$

und auf der roten Randfläche, siehe Abbildung 4.15a, wird eine Kompressionsrandbedingung der folgenden Form,

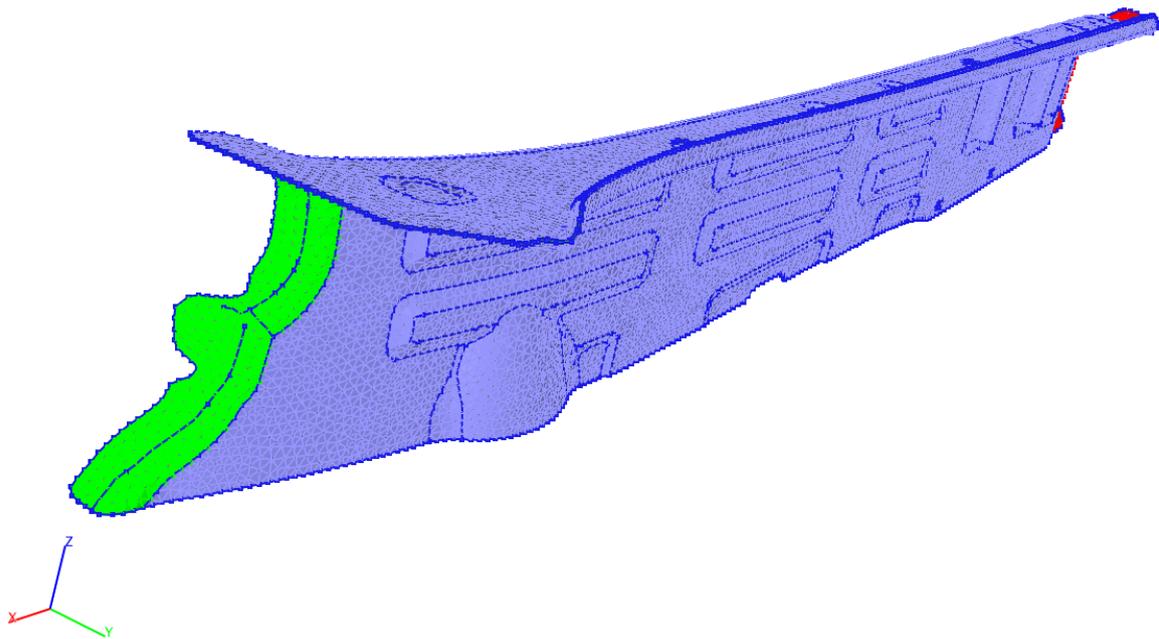
$$\chi_b^1(\mathbf{X}, t) = X^1 + 0.1 \frac{t}{T}, \quad (4.18a)$$

für alle  $t \in \mathcal{I} \equiv [0, T]$  vorgegeben.  $\chi_b^2(\mathbf{X}, t)$  und  $\chi_b^3(\mathbf{X}, t)$  sind freie Variablen auf der roten Randfläche. Es wird  $T = 74$  s gesetzt, was 74 inkrementellen Belastungsschritten entspricht.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität



(a) Vorderansicht des Bauteils.



(b) Rückansicht des Bauteils.

Abbildung 4.15.: Vorder- und Rückansicht der Geometrie mit einem Rechengitter aus 13737 Prismen. Auf der roten Randfläche wird eine Kompressionsrandbedingung vorgeschrieben. Die grüne Fläche stellt den Rand mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen dar. Die Konvertierung des Rechengitters in ein UG 4-kompatibles Format wurde mit ProMesh [106] vorgenommen.

#### 4. Numerische Tests zur Elasto-Plastizität

Um die Konvergenz der Methode sicherzustellen, musste das Rechengitter aus Abbildung 4.15a und 4.15b zweimal anisotrop verfeinert werden, so dass das feinste Gitter aus 219792 Prisma-Elementen besteht, was 666354 Verschiebungs-Freiheitsgraden entspricht. Somit müssen 1318752 nichtlineare Probleme in  $\mathbb{R}^8$  (das heißt für die sechs unabhängigen Komponenten von  $\mathbf{B}_p$ , den Verhärtungsparameter  $\alpha$  und den Lagrange-Multiplikator  $\gamma_\tau$ , die durch eine 6-Punkt-Gauß-Quadraturregel berechnet werden) für die Auswertung des Defektes und für die Berechnung der konsistenten Tangente an den Integrationspunkten gelöst werden.

Als linearer Löser wird ein geometrisches Mehrgitterverfahren [14][52][134] gewählt, welches durch ein Bi-CGSTAB-Verfahren [130] beschleunigt wird. Das geometrische Mehrgitterverfahren wird als V-Zyklus mit einem gedämpften Jacobi-Glätter und dem SuperLU-Löser [74] als Grobgitterlöser aufgesetzt. Jeweils 3 Vor- und 3 Nachglättungsschritte werden durchgeführt. Der Dämpfungsparameter wird auf 0.4 gesetzt. Die Wahl des SuperLU-Lösers als Grobgitterlöser ist notwendig, weil bei diesem Beispiel das größte Gitter mit 42924 DoFs relativ viele Freiheitsgrade besitzt.

Diese anspruchsvolle Rechnung dauerte 11:42 CPU-h, wobei 64 Prozessoren genutzt wurden. 1600 Newton-Schritte waren dabei insgesamt in allen 74 inkrementellen Schritten nötig. Die deformierte Geometrie zum Endzeitpunkt ist in Abbildung 4.16 gezeigt.

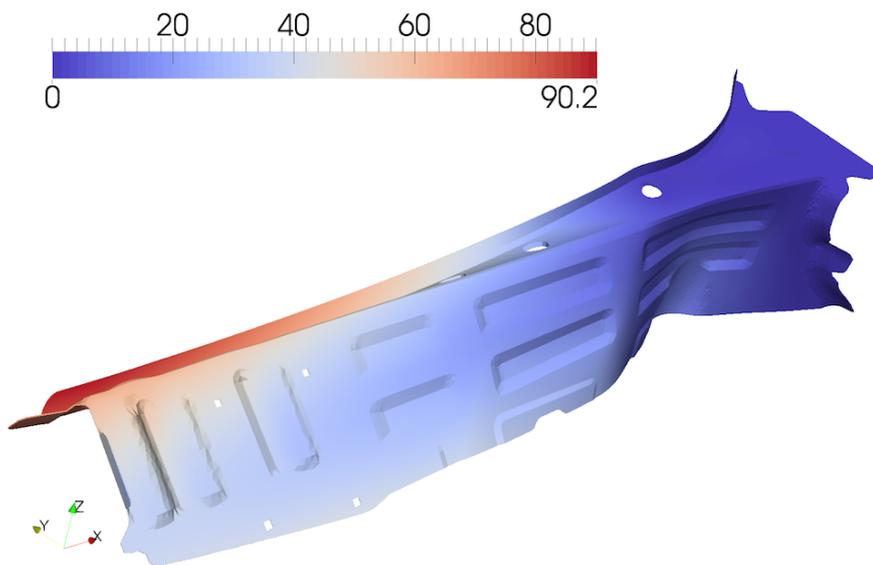


Abbildung 4.16.: Deformiertes Bauteil zum Zeitpunkt  $t = 74$  s. Hier wurde die Deformation in der Abbildung um den Faktor 2 skaliert. Farbig ist die euklidische Norm des Verschiebungsvektors dargestellt.

## 5. Theorie der Poroplastizität

In diesem Kapitel wird das Problem  $\mathbb{P}_2$ , siehe  $(\mathbb{P}_2a)$ – $(\mathbb{P}_2c)$ , für ein biomechanisches Modell formuliert, um die strukturelle Adaption und die Deformation eines weichen biologischen Gewebes unter Belastung in einem physikalischen Rahmen zu untersuchen. Diese strukturelle Adaption ist unter dem englischen Begriff ‘remodelling’ bekannt und bedeutet, dass das Gewebe seine innere Struktur als Reaktion auf mechanische Anregungen umorganisiert. Dieser Prozess wird durch plastische Verzerrungen beschrieben, deren Entwicklung einer phänomenologischen Fließregel gehorchen, welche von den Spannungen angetrieben werden.

Die numerischen Tests im folgenden Kapitel dienen einerseits dazu, die Bedeutung der strukturellen Adaption auf das mechanische und hydraulische Verhalten des Gewebes zu quantifizieren und andererseits die Notwendigkeit eines Algorithmus’ wie der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus (GPA) aus Abschnitt 3.2 zur Lösung eines solchen biomechanischen Modells zu unterstreichen. Die folgende Darstellung der Theorie der Poroplastizität zur Beschreibung der biphasischen Mischung folgt der Arbeit [47][48].

Das binäre System, welches in diesem Kapitel betrachtet wird, ist ein vereinfachtes Modell eines biologischen Gewebes. Gelenkknorpel könnte beispielsweise ein solches Gewebe sein. Das binäre System beinhaltet ein Fluid und einen porösen Festkörper, der im Folgenden auch als *Matrix* bezeichnet wird. Das Gebiet, welches von dem ganzen System eingenommen wird, kann in zwei komplementäre Teilgebiete aufgeteilt werden. Eines davon wird von den Festkörperpartikeln belegt, welche die Matrix ausmachen, während das andere von den Poren der Matrix erzeugt wird und komplett mit Flüssigkeit gefüllt ist. Wenn das letztere Teilgebiet im topologischen Sinne verbunden ist, wird es *Porenraum* genannt und das Fluid kann darin zirkulieren. Von einer hinreichend großen Betrachtungsskala aus betrachtet kann ein solches binäres System als eine biphasische Mischung gesehen werden, was bedeutet, dass zugelassen ist, dass sowohl die Matrix als auch das Fluid zusammen an einem Raumpunkt der Mischung existieren dürfen. Im Folgenden werden die Matrix und das Fluid auch als *Phase* bezeichnet.

### 5.1. Kinematik von biphasischen Mischungen

Die kinematische Beschreibung von biphasischen Mischungen, die in dieser Arbeit präsentiert wird, wurde in [101][102] entwickelt und vor Kurzem in [128] zusammengefasst.

Seien  $\mathcal{M}_s$  und  $\mathcal{M}_f$  die zwei glatten drei-dimensionalen materiellen Mannigfaltigkeiten, die mit der Festkörpermatrix (‘solid’) beziehungsweise der Flüssigkeit (‘fluid’) assoziiert sind. Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_s$  ist in den drei-dimensionalen euklidischen Raum  $\mathcal{S}$  durch eine

## 5. Theorie der Poroplastizität

glatte Lokalisierungsfunktion  $\kappa_s : \mathcal{M}_s \rightarrow \mathcal{S}$  eingebettet, so dass für jeden Festkörperpartikel  $\mathfrak{X}_s \in \mathcal{M}_s$  eine Referenzplatzierung  $\mathbf{X} = \kappa_s(\mathfrak{X}_s) \in \mathcal{S}$  existiert. Die Menge  $\mathcal{C}_R = \kappa_s(\mathcal{M}_s)$  wird als Referenzkonfiguration der Matrix gewählt.

Die **Bewegung** der Festkörperkomponente wird über die ein-parametrische Familie der glatten Abbildungen  $\chi(\cdot, t) : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathcal{S}$  mit  $t \in \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$  beschrieben.  $\mathcal{I}$  ist dabei das Zeitintervall, über das die binäre Mischung betrachtet wird. Die Menge  $\chi(\mathcal{C}_R, t) \subset \mathcal{S}$  definiert die aktuelle Konfiguration der festen Phase. Für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \chi(\mathcal{C}_R, t) \subset \mathcal{S}$  gilt, dass  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  mit  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_R$  und  $t \in \mathcal{I}$  ist. Analog dazu beschreibt die ein-parametrische Familie von glatten Abbildungen  $\mathfrak{f}(\cdot, t) : \mathcal{M}_f \rightarrow \mathcal{S}$  mit  $t \in \mathcal{I}$  die Bewegung der flüssigen Phase. Zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t$  setzt die Abbildung  $\mathfrak{f}(\cdot, t)$  einen Fluidpartikel  $\mathfrak{X}_f \in \mathcal{M}_f$  an den räumlichen Punkt  $\mathbf{x} = \mathfrak{f}(\mathfrak{X}_f, t) \in \mathfrak{f}(\mathcal{M}_f, t)$ , wobei  $\mathfrak{f}(\mathcal{M}_f, t)$  die aktuelle Konfiguration des Fluids zur Zeit  $t$  ist. Zum Zeitpunkt  $t \in \mathcal{I}$  belegt die binäre Mischung also das Gebiet  $\mathcal{C}_t = \chi(\kappa_s(\mathcal{M}_s), t) \cap \mathfrak{f}(\mathcal{M}_f, t) \subset \mathcal{S}$ . Nach Konstruktion existieren somit an jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_t$  Festkörper- und Fluidpartikel.

Die räumliche **Geschwindigkeit** eines Festkörperpartikels  $\mathfrak{X}_s$ , welches zum Zeitpunkt  $t$  den Punkt  $\mathbf{x} = \chi(\kappa_s(\mathfrak{X}_s), t) \in \mathcal{C}_t$  passiert, ist durch  $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi}(\kappa_s(\mathfrak{X}_s), t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t)$  gegeben. Analog ist die Geschwindigkeit eines Fluidpartikels  $\mathfrak{X}_f$ , welches den Punkt  $\mathbf{x} = \mathfrak{f}(\mathfrak{X}_f, t) \in \mathcal{C}_t$  passiert, definiert durch  $\mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathfrak{f}}(\mathfrak{X}_f, t)$ . Des Weiteren ist  $\mathbf{v}_{fs}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_f(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t)$  mit  $\mathbf{x} = \chi(\kappa_s(\mathfrak{X}_s), t) = \mathfrak{f}(\mathfrak{X}_f, t)$  die relative Geschwindigkeit des Fluids zum Festkörper.

Das Vektorfeld  $\mathbf{a}_\alpha(\cdot, t) : \mathcal{S} \rightarrow T\mathcal{S}$  mit  $\alpha = s, f$  bezeichnet die **Beschleunigung** der  $\alpha$ -ten Phase der binären Mischung. Sie ist durch  $\mathbf{a}_\alpha(\mathbf{x}, t) = D_\alpha \mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}, t)$  gegeben, wobei der substantielle Ableitungsoperator  $D_\alpha$  durch

$$D_\alpha \mathfrak{f} = \partial_t \mathfrak{f} + \text{grad}(\mathfrak{f}) \mathbf{v}_\alpha, \quad \alpha = s, f, \quad (5.1)$$

für jede differenzierbare Funktion  $\mathfrak{f}$  definiert ist. Um die Einführung weiterer Symbole zu vermeiden, sei  $\mathbf{v}_\alpha$  mit  $\alpha = s, f$  auch für den Fall verwendet, wenn  $\mathbf{v}_\alpha(\cdot, t)$  als eine Funktion der Punkte  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_R$  der Referenzkonfiguration betrachtet wird.

Der zweistufige Tensor des Deformationsgradienten der Festkörperbewegung,  $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = T\chi(\mathbf{X}, t)$ , ist analog zu (1.33) als die Tangentialabbildung von  $\chi(\cdot, t)$  am Punkt  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_R$  definiert. Damit die Bewegung  $\chi(\cdot, t)$  zulässig ist, muss die Bedingung  $J = \det(\mathbf{F}) > 0$  an allen Punkten für jeden Zeitpunkt gewährleistet sein. Schließlich sind für  $\alpha = s, f$  die Geschwindigkeitsgradienten der Fest- und Flüssigphase  $\boldsymbol{\ell}_\alpha = \text{grad}(\mathbf{v}_\alpha)$  eingeführt. Sofern  $\mathbf{v}_s$  als auch  $\mathbf{v}_f$  als Funktionen der Punkte  $\mathbf{X} \in \mathcal{C}_R$  ausgedrückt werden, lässt sich die folgende Beziehung von  $\boldsymbol{\ell}_s$  und  $\boldsymbol{\ell}_f$  zu den materiellen Geschwindigkeitsgradienten  $\text{Grad}(\mathbf{v}_s)$  und  $\text{Grad}(\mathbf{v}_f)$  aufstellen, nämlich  $\text{Grad}(\mathbf{v}_s) \equiv \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\ell}_s \mathbf{F}$  und  $\text{Grad}(\mathbf{v}_f) = \boldsymbol{\ell}_f \mathbf{F}$ .

Um den inelastischen Verzerrungen im Modell Rechnung zu tragen, die durch die strukturelle Adaption des Gewebes hervorgerufen werden, wird die **multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten** nach Bilby [12], Lee [72] und Kröner [70],

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p, \quad (5.2)$$

siehe (2.1), verwendet. Im Kontext von porösen Medien beschreibe  $\mathbf{F}_e$  die elastischen Verzerrungen der festen Phase und  $\mathbf{F}_p$  bestimme die plastischen Verzerrungen, die mit den strukturellen Änderungen der festen Phase aufgrund der Adaption einhergehen. Im Folgenden wird wie in Kapitel 2 angenommen, dass die plastischen Verzerrungen volumenerhaltend sind, das heißt, dass die Bedingung

$$J_p := \det(\mathbf{F}_p) = 1 \quad (5.3)$$

für alle Punkte und zu jedem Zeitpunkt gilt. Diese Annahme ist insbesondere dadurch gerechtfertigt, dass in dieser Arbeit kein biologisches Wachstum betrachtet wird. Somit verschwindet die Spur von  $\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1}$  respektive von  $\boldsymbol{\ell}_p := \mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1}$ . Die Bedingung (5.3) bedeutet also, dass die Adaption die innere Struktur des Gewebes verändert ohne dabei Veränderungen der Massendichte der festen Phase auszulösen.

## 5.2. Dynamiken von biphasischen Mischungen

Unter Vernachlässigung von externen Volumenkräften und Prozessen, die Masse zwischen der Fest- und Flüssigphase austauschen, können die lokalen Formen der Massen- und Impulserhaltung für die  $\alpha$ -te Phase der biphasischen Mischung ( $\alpha = s, f$ ) als

$$\partial_t(\phi_\alpha \varrho_\alpha) + \operatorname{div}(\phi_\alpha \varrho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}, \quad (5.4a)$$

$$\phi_\alpha \varrho_\alpha \mathbf{a}_\alpha = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_\alpha) + \mathbf{m}_\alpha, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}, \quad (5.4b)$$

$$\mathbf{m}_s + \mathbf{m}_f = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}, \quad (5.4c)$$

geschrieben werden. In (5.4) bezeichnen  $\phi_\alpha$  und  $\varrho_\alpha$  den volumetrischen Anteil beziehungsweise die wahre Massendichte der jeweiligen Phase,  $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$  ist der Cauchy'sche Spannungstensor und  $\mathbf{m}_\alpha$  ist die Rate des Impulsaustauschs zwischen der  $\alpha$ -ten Phase und ihrer komplementären Phase. Die Bedingung (5.4c) drückt aus, dass die Mischung bezüglich des Impulses geschlossen sein muss, weil weder Quellen noch Senken dieser thermodynamischen Größe in der vorliegenden Theorie berücksichtigt werden.

Da angenommen wird, dass der Porenraum der Matrix komplett mit Fluid gefüllt ist, müssen die volumetrischen Anteile  $\phi_s$  und  $\phi_f$  der **Sättigungsbedingung**

$$\phi_s + \phi_f = 1 \quad (5.5)$$

gehörchen, welche an allen Punkten der Mischung und zu jedem Zeitpunkt gelten muss.

Im Folgenden seien  $\varrho_s$  und  $\varrho_f$  gegebene Konstanten. Ferner wird angenommen, dass Trägheitsterme  $\phi_\alpha \varrho_\alpha \mathbf{a}_\alpha$  vernachlässigbar sind. Diese letzte Annahme führt zu einer quasi-statischen Formulierung des Problems, in welcher die einzigen Quellen der zeitlichen Entwicklung des Systems die zeitlich variierenden Randbedingungen, eine (langsame) zeitentwickelnde Deformation und vor allem die Berücksichtigung der zeitabhängigen Adaption der inneren Struktur des Gewebes sind. Unter Beachtung von (5.4c) und durch Hinzufügen von (5.4b) für  $\alpha = s, f$  erhält man

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_f) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}, \quad (5.6a)$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_f) + \mathbf{m}_f = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}. \quad (5.6b)$$

Durch Transformation der Massenerhaltungsgleichung (5.4a) mittels der Piola-Transformation, welche durch die Festkörperbewegung  $\chi(\cdot, t)$  induziert wird, siehe Abschnitt 1.3.3, und durch das getrennte Aufschreiben der transformierten Gleichung einmal für  $\alpha = s$  und einmal für  $\alpha = f$  reduzieren sich die Massenerhaltungsgleichungen für die Fest- und die Flüssigphase zu [43][45],

$$\phi_s(\chi(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\phi_{sR}(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X}, t)}, \quad \text{in } \mathcal{C}_R \times \mathcal{I}, \quad (5.7a)$$

$$\dot{J} + \text{Div} [(J - \phi_{sR})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{v}_{fs}] = 0, \quad \text{in } \mathcal{C}_R \times \mathcal{I}, \quad (5.7b)$$

wobei  $\phi_{sR}$  den volumetrischen Anteil der festen Phase in der Referenzkonfiguration beschreibt. Der Einfachheit halber sei im Folgenden angenommen, dass  $\phi_{sR}$  eine gegebene Modellkonstante ist. Damit wird die Betrachtung auf eine homogene feste Phase beschränkt. Diese Annahme erlaubt es alle konstituierenden Gesetze im folgenden Abschnitt unabhängig von  $\phi_{sR}$  zu formulieren.

### 5.3. Konstituierender Rahmen und Dissipation unter Berücksichtigung der inneren Umstrukturierung

Falls die feste Phase hyperelastisches Materialverhalten aus seinem natürlichen Zustand heraus erfährt und die flüssige Phase als makroskopisch reibungsfrei betrachtet werden kann, erlaubt es die Dissipationsungleichung, welche das betrachtete biphasische System charakterisiert, die Cauchyschen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_s$  und  $\boldsymbol{\sigma}_f$  wie folgt auszudrücken,

$$\boldsymbol{\sigma}_s = -\phi_s p \mathbf{g}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_{sc}, \quad (5.8a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -\phi_f p \mathbf{g}^{-1}, \quad (5.8b)$$

wobei  $p$  den Druck und  $\mathbf{g}$  den metrischen Tensor beschreibt, der mit  $\mathcal{S}$  assoziiert ist.  $\boldsymbol{\sigma}_{sc}$  ist durch

$$\boldsymbol{\sigma}_{sc} = \frac{1}{J_e} \mathbf{F}_e \left( 2 \frac{\partial \hat{W}_{s\kappa}}{\partial \mathbf{C}_e}(\mathbf{C}_e) \right) \mathbf{F}_e^T, \quad (5.9)$$

bestimmt und repräsentiert den konstituierenden Anteil der Cauchyschen Spannung, welcher mit der festen Phase assoziiert ist.  $\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_p^{-T} \mathbf{C} \mathbf{F}_p^{-1}$  ist dabei der elastische Cauchy-Greensche Deformationstensor mit  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{F}$ , siehe (2.6) und (1.42a).  $\hat{W}_{s\kappa}$  ist in (5.9) durch die Verzerrungsenergiedichte nach Holmes und Mow [63] gegeben, welche im Folgenden pro Einheitsvolumen des natürlichen Zustandes der festen Phase ausgedrückt ist:

$$\hat{W}_{s\kappa}(\mathbf{C}_e) = \alpha_0 \left( [\hat{I}_3(\mathbf{C}_e)]^{-\beta} \exp \left\{ \alpha_1 [\hat{I}_1(\mathbf{C}_e) - 3] + \alpha_2 [\hat{I}_2(\mathbf{C}_e) - 3] \right\} - 1 \right). \quad (5.10)$$

$\alpha_0$  ist in (5.10) ein Referenzwert der Verzerrungsenergiedichte,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\beta$  sind Modellparameter, während  $\hat{I}_1$ ,  $\hat{I}_2$  und  $\hat{I}_3$  die Invarianten von  $\mathbf{C}_e$  darstellen, die in (2.34a)–(2.34c) definiert sind. Offensichtlich beschreibt  $\hat{W}_{s\kappa}$  ein Material, das isotrope elastische Eigenschaften bezüglich seines natürlichen Zustandes aufweist. Wie in der Problembeschreibung

$\mathbb{P}_2$  ist  $\hat{W}_{sk}$  hier eine Funktion, die allein von  $\mathbf{C}_e$  abhängt. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass in dieser Theorie keine Verhärtung betrachtet wird.

Durch Einsetzen der Definitionen der Cauchyschen Spannungen (5.8a) und (5.8b) in (5.6a) und (5.6b) werden letztere zu

$$\operatorname{div}(-p\mathbf{g}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}_{sc}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}, \quad (5.11a)$$

$$-\phi_f\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(p) + (\mathbf{m}_f - p\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(\phi_f)) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \times \mathcal{I}. \quad (5.11b)$$

### 5.3.1. Dissipationsungleichung

Die Änderung der inneren Struktur aufgrund der Adaption des biologischen Systems wird über plastische Verzerrungen beschrieben und ist somit ein dissipativer Prozess. Daher bildet die Dissipationsungleichung die theoretische Grundlage, um ein Entwicklungsgesetz für die plastischen Verzerrungen im Folgenden aufzustellen. Zudem umfasst die Dissipationsungleichung die dissipativen Kräfte, die zu der Austauschrate des Impulses zwischen der flüssigen und der festen Phase  $\mathbf{m}_f$  beitragen.

Die lokale Form der Dissipationsungleichung, die das biphasische System charakterisiert, kann wie folgt geschrieben werden

$$D_m = -\{\mathbf{m}_f - p\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(\phi_f)\} \cdot \mathbf{v}_{fs} + \boldsymbol{\sigma}_s : \mathbf{g}\boldsymbol{\ell}_p \geq 0, \quad (5.12)$$

wobei  $D_m$  die Dissipationsfunktion der ganzen Mischung ist, formuliert pro Einheitsvolumen der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  [45].  $\boldsymbol{\ell}_p = \mathbf{F}_e\mathbf{L}_p\mathbf{F}_e^{-1}$  mit  $\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p\mathbf{F}_p^{-1}$  ist die Rate der inelastischen Verzerrungen aufgrund der Umstrukturierung. Es sei bemerkt, dass nur der deviatorische Anteil von  $\boldsymbol{\sigma}_{sc}$  zur Dissipation beiträgt, was eine Konsequenz daraus ist, dass die Spur von  $\boldsymbol{\ell}_p$  verschwindet und die Verzerrungen nach (5.3) isochor sind, die die Adaption der inneren Struktur beschreiben. Den Arbeiten [9][57][128] folgend kann  $\mathbf{m}_f$  als

$$\mathbf{m}_f = \mathbf{m}_{fd} + p\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(\phi_f), \quad (5.13)$$

geschrieben werden, wobei  $\mathbf{m}_{fd}$  und  $p\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(\phi_f)$  die dissipativen und nicht-dissipativen Beiträge zu  $\mathbf{m}_f$  repräsentieren. Durch Einsetzen von (5.13) in (5.11b) erhält man das Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{m}_{fd} = \phi_f\mathbf{g}^{-1}\operatorname{grad}(p). \quad (5.14)$$

Außerdem nimmt mit (5.13) die Dissipationsungleichung (5.12) die Form

$$D_m = D_{\text{flow}} + D_{\text{rem}} = \underbrace{-\mathbf{m}_{fd} \cdot \mathbf{v}_{fs}}_{D_{\text{flow}}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{sc} : \mathbf{g}\boldsymbol{\ell}_p}_{D_{\text{rem}}} \geq 0 \quad (5.15)$$

an. Das Ergebnis (5.15) sagt aus, dass in einem rein mechanischen Rahmen in einem biphasischen System, welches eine feste und eine flüssige Phase umfasst und dessen feste Phase eine Umstrukturierung erfährt, lediglich zwei Quellen von Dissipation auftreten. Die erste Quelle ist durch  $D_{\text{flow}}$  gegeben, d.h. durch die Leistung, die durch die dissipativen Kräfte  $\mathbf{m}_{fd}$  aufgewendet wird, welche konjugiert zu der relativen Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{fs}$  sind.  $D_{\text{rem}}$  ist die zweite Dissipationsquelle. Sie beschreibt die Leistung, die durch Veränderung der inneren Struktur der festen Phase aufgebracht wird.

### 5.3.2. Darcys Gesetz und die finale Fassung der Impulsbilanz

Eine gängige Annahme in der Theorie der porösen Medien ist, dass die dissipative Kraftdichte  $\mathbf{m}_{\text{fd}}$  konstituierend als eine lineare Funktion des spezifischen Durchflusses  $\mathbf{q} := \phi_{\text{f}}\mathbf{v}_{\text{fs}}$  ausgedrückt werden kann [6], d.h.

$$\mathbf{m}_{\text{fd}} = -\mathbf{r}\cdot\mathbf{q} = -\mathbf{r}\cdot(\phi_{\text{f}}\mathbf{v}_{\text{fs}}), \quad (5.16)$$

wobei  $\mathbf{r}$  ein Tensor zweiter Stufe ist, der die Widerstandsfähigkeit des porösen Mediums bezüglich des Flusses repräsentiert, siehe z.B. [57]. Durch Einsetzen von (5.16) in (5.15) erhält man den folgenden Dissipationsausdruck

$$D_{\text{m}} = D_{\text{flow}} + D_{\text{rem}} = \underbrace{\text{sym}(\mathbf{r}) : \phi_{\text{f}}\mathbf{g}(\mathbf{v}_{\text{fs}} \otimes \mathbf{v}_{\text{fs}})\mathbf{g}}_{D_{\text{flow}}} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_{\text{sc}} : \mathbf{g}\boldsymbol{\ell}_{\text{p}}}_{D_{\text{rem}}} \geq 0. \quad (5.17)$$

Eine direkte Konsequenz von (5.17) ist, dass, falls  $\text{sym}(\mathbf{r})$  positiv semi-definit ist,  $D_{\text{flow}}$  immer nicht-negativ für jede mögliche relative Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{fs}}$  ist. Typischerweise wird angenommen, dass der Resistenztensor  $\mathbf{r}$  symmetrisch und positiv definit ist, so dass  $\mathbf{m}_{\text{fd}}$  genau dann verschwindet, wenn die relative Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{fs}}$  null ist. Diese Annahmen führen auf **Darcys Gesetz**. Allerdings kann durch Einsetzen von (5.16) in (5.14) und durch Lösen nach  $\mathbf{v}_{\text{fs}}$  der spezifische Durchfluss als

$$\phi_{\text{f}}\mathbf{v}_{\text{fs}} = -\mathbf{k}\text{grad}(p) \quad (5.18)$$

ausgedrückt werden, wobei  $\mathbf{k}$  die hydraulische Leitfähigkeit des porösen Mediums ist. In dem vorliegenden Rahmen gilt, dass  $\mathbf{k} = \phi_{\text{f}}(\mathbf{g}\mathbf{r}\mathbf{g})^{-1}$  ist.

Die Piola-Transformation des spezifischen Durchflusses bestimmt unter Berücksichtigung von (5.5) und (5.7a) die materielle Form von Darcys Gesetz:

$$J\mathbf{F}^{-1}(\phi_{\text{f}}\mathbf{v}_{\text{fs}}) = (J - \phi_{\text{sR}})\mathbf{F}^{-1}\mathbf{v}_{\text{fs}} = -\mathbf{K}\text{Grad}(p), \quad (5.19)$$

wobei  $\mathbf{K} = J\mathbf{F}^{-1}\mathbf{k}\mathbf{F}^{-\text{T}}$  der materielle hydraulische Konduktivitätstensor, d.h. die Piola-Transformierte von  $\mathbf{k}$  bezüglich der Bewegung der festen Phase ist. Durch Ausnutzen des Resultats (5.19) wird die Massenerhaltungsgleichung (5.7b) zu

$$\dot{J} - \text{Div}[\mathbf{K}\text{Grad}(p)] = 0. \quad (5.20)$$

Falls die hydraulische Antwort der Mischung isotrop ist (im Allgemeinen ist dies nicht der Fall, weil Kollagenfasern existieren), können der Konduktivitätstensor  $\mathbf{k}$  und seine Piola-Transformierte  $\mathbf{K}$  konstituierend wie in dem Modell von Holmes und Mow [63] ausgedrückt werden

$$\mathbf{k} = \hat{\mathbf{k}}(J, \phi_{\text{sR}}) = \hat{k}_0(J, \phi_{\text{sR}})\mathbf{g}^{-1}, \quad (5.21a)$$

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{C}, \phi_{\text{sR}}) = J\hat{k}_0(J, \phi_{\text{sR}})\mathbf{C}^{-1}, \quad (5.21b)$$

wobei die skalare hydraulische Leitfähigkeitsfunktion  $\hat{k}_0$  durch

$$\hat{k}_0(J, \phi_{\text{sR}}) = \hat{k}_{0\text{R}}(\phi_{\text{sR}}) \left( \frac{J - \phi_{\text{sR}}}{1 - \phi_{\text{sR}}} \right)^{m_0} \exp \left[ \frac{m_1}{2}(J^2 - 1) \right], \quad (5.22)$$

## 5. Theorie der Poroplastizität

gegeben ist.  $m_0$  und  $m_1$  sind darin Materialparameter. Wenn sich das Gewebe nicht deformiert, d.h. für  $J = 1$ , erhält man die Identität  $\hat{k}_0(1, \phi_{sR}) = \hat{k}_{0R}(\phi_{sR})$ , die bedeutet, dass die skalare hydraulische Leitfähigkeitsfunktion der hydraulischen Referenz-Leitfähigkeit  $\hat{k}_{0R}(\phi_{sR})$  gleicht. Letztere hängt von dem volumetrischen Anteil der festen Phase in der Referenzkonfiguration  $\phi_{sR}$  ab und kann daher nicht uniform sein, wann immer  $\phi_{sR}$  keine Modellkonstante ist. Außerdem sei erwähnt, dass aufgrund der Wahl des hydraulischen Konduktivitätstensors  $D_{\text{flow}}$  auch konstituierend als  $D_{\text{flow}} = \hat{D}_{\text{flow}}(\mathbf{F}, \phi_{sR}, \mathbf{v}_{fs}) \geq 0$  geschrieben werden kann, wobei  $\hat{D}_{\text{flow}}$  quadratisch in  $\mathbf{v}_{fs}$  und hochgradig nichtlinear in  $\mathbf{F}$  und  $\phi_{sR}$  ist.

Durch Einführung der ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensoren

$$\mathbf{P}_s = J\boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{F}^{-T} = -\phi_{sR} p \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{sc}, \quad (5.23a)$$

$$\mathbf{P}_f = J\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{F}^{-T} = -(J - \phi_{sR}) p \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.23b)$$

mit  $\mathbf{P}_{sc} = J\boldsymbol{\sigma}_{sc} \mathbf{F}^{-T}$  wird die Piola-Transformation der Impulserhaltungsgleichung (5.11a) zu

$$\text{Div}(-Jp \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{P}_{sc}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{C}_R \times \mathcal{I}. \quad (5.24)$$

Die Verzerrungsenergiedichte (5.10) erlaubt es  $\mathbf{P}_{sc}$  als eine Funktion von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{B}_p$ , d.h.  $\mathbf{P}_{sc} = \hat{\mathbf{P}}_{sc}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p)$ , zu bestimmen. Diese funktionale Abhängigkeit kann mithilfe der Definition des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors über eine Verzerrungsenergiedichte wie in (P<sub>2</sub>a) hergeleitet werden, indem darin  $\hat{W}_\kappa$  mit dem Ausdruck von  $\hat{W}_{s\kappa}$  aus (5.10) ersetzt wird. Daher ist die gesamte Spannung  $\mathbf{P} := \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_f$ , welche in (5.24) eingesetzt wurde, durch

$$\mathbf{P} = \hat{\mathbf{P}}(p, \mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = -Jp \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-T} + \hat{\mathbf{P}}_{sc}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \quad (5.25)$$

gegeben.

### 5.4. Fließregel für die Adaption der inneren Struktur

Nach einigen algebraischen Umformungen unter Zuhilfenahme der Definition der Rate von  $\mathbf{B}_p$  (2.12b) und der Bedingung, dass die plastischen Verformungen volumenerhaltend sind (5.3), kann  $D_{\text{rem}} = \boldsymbol{\sigma}_{sc} : \mathbf{g} \dot{\mathbf{l}}_p$  wie folgt geschrieben werden,

$$D_{\text{rem}} = -\frac{1}{2J} (\mathbf{G} \boldsymbol{\Sigma}_{sc} \mathbf{B}_p^{-1}) : \dot{\mathbf{B}}_p, \quad (5.26)$$

wobei  $\boldsymbol{\Sigma}_{sc} := \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{g} \mathbf{P}_{sc}$  der konstituierende Teil des Mandelschen Spannungstensors der festen Phase ist. Weil die Bedingung der volumenerhaltenden plastischen Verzerrungen  $J_p = 1$  äquivalent zu  $\mathbf{B}_p^{-1} : \dot{\mathbf{B}}_p = 0$  ist, siehe (2.17), trägt nur der deviatorische Anteil von  $\boldsymbol{\Sigma}_{sc}$  zu der Dissipationsquelle  $D_{\text{rem}}$  bei, die aufgrund der strukturellen Adaption entsteht. Demnach wird (5.26) zu

$$D_{\text{rem}} = -\frac{1}{2J} [\mathbf{G} \text{dev}(\boldsymbol{\Sigma}_{sc}) \mathbf{B}_p^{-1}] : \dot{\mathbf{B}}_p, \quad (5.27)$$

## 5. Theorie der Poroplastizität

mit

$$\operatorname{dev}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}}) = \boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}[\mathbf{G}\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}}]\mathbf{G}^{-1}. \quad (5.28)$$

Aufgrund der formalen Analogie zwischen der Theorie der Adaption der inneren Struktur und der Theorie der Elasto-Plastizität wird die Entwicklung der plastischen Verzerrungen, die mit der strukturellen Adaption des betrachteten Gewebes einhergehen, durch eine verallgemeinerte plastische Fließregel beschrieben. Es sei bemerkt, dass eine direkte Konsequenz aus der Annahme von isotropem, hyperelastischem Materialverhalten ist, dass die plastische Fließregel durch  $\mathbf{B}_p$  anstelle von  $\mathbf{F}_p$  ausgedrückt werden kann. Dies ermöglicht die Beschreibung der plastischen Entwicklung im bewährten konstituierenden Rahmen aus Kapitel 2.

Die Bestimmung des Evolutionsgesetzes der plastischen Variable  $\mathbf{B}_p$  orientiert sich an der Arbeit von Givero und Preziosi [42]. Darin wird die strukturelle Adaption von Zellaggregaten modelliert, indem die Theorie der assoziativen, ratenunabhängigen elasto-plastischen Materialien [20][122] nachgeahmt wird. Dazu wird der konstituierende Anteil des Kirchhoffschen Spannungstensors der festen Phase  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}} := \mathbf{P}_{\text{sc}}\mathbf{F}^T$  eingeführt. [42] folgend kann eine Fließregel der Form (2.58) formuliert werden, wobei hier  $\boldsymbol{\Sigma}_R$  durch  $\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  durch  $\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}$  ersetzt werden,

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -2\gamma_p \mathbf{B}_p \mathbf{G} \frac{\operatorname{dev}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}})}{\|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\|} = -2\gamma_p \mathbf{B}_p \mathbf{G} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}), \quad (5.29a)$$

$$\gamma_p := \tilde{\lambda} \left[ \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\| - \sqrt{(2/3)\tau_y} \right]_+ = \tilde{\lambda} [f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})]_+. \quad (5.29b)$$

$\gamma_p$  ist darin ein nicht-negativer plastischer Multiplikator, der die physikalischen Einheiten  $[\gamma_p] = \text{s}^{-1}$  hat.  $\tilde{\lambda}$  ist ein strikt positiver Modellkoeffizient mit Einheiten  $[\tilde{\lambda}] = (\text{s} \cdot \text{N}/\text{mm}^2)^{-1}$ . Der Operator  $[\cdot]_+$  besagt, dass für jede reellwertige Zahl  $A$ ,  $[A]_+ = A$  gilt, falls  $A > 0$  ist, und ansonsten  $[A]_+ = 0$  gilt. Außerdem wurde in (5.29) die Notation so gewählt, dass eine Fließfunktion  $f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})$  explizit in der Fließregel auftaucht. Diese ist durch

$$f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}) = \varphi(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}) - \sqrt{(2/3)\tau_y}, \quad (5.30)$$

gegeben, wobei  $\varphi(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})$  als  $\varphi(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}) := \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\|$  definiert ist.

Durch Einsetzen von (5.29a) in den Dissipationsausdruck (5.27) erhält man

$$D_{\text{rem}} = \hat{D}_{\text{rem}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = \frac{\gamma_p}{J} \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\| \geq 0. \quad (5.31)$$

Falls für gegebene  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{B}_p$  gilt, dass  $\|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\| \leq \sqrt{(2/3)\tau_y}$  ist (was  $f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}) \leq 0$  entspricht), verschwindet der plastische Multiplikator  $\gamma_p$  in (5.29b) aufgrund von  $[f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})]_+ = 0$ , so dass dadurch  $D_{\text{rem}} = 0$  impliziert wird. In dieser Situation tritt keine Umstrukturierung auf, das heißt, dass sich das Material deformiert, während die innere Struktur unverändert bleibt. Wenn allerdings  $\|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\|$  die äquivalente Spannung  $\sqrt{(2/3)\tau_y}$  übertrifft, d.h. wenn  $f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}}) > 0$  gilt, tritt Umstrukturierung ein und der plastische Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  entwickelt sich wie in der Fließregel (5.29a) beschrieben. In diesem Fall gilt

$$D_{\text{rem}} = \frac{\tilde{\lambda} [f(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})]_+}{J} \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\| > 0. \quad (5.32)$$

## 5.5. Zusammenfassung des Modells und numerische Methoden

Somit lässt sich das mathematische Modell, welches in den vorherigen Abschnitten hergeleitet wurde, wie folgt zusammenfassen:

$$\dot{J} - \text{Div} \left[ \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{F}) \text{Grad}(p) \right] = 0, \quad (5.33a)$$

$$\text{Div} \left( -Jp \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}} + \hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \right) = \mathbf{0}, \quad (5.33b)$$

$$\dot{\mathbf{B}}_p + \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = \mathbf{0}, \quad (5.33c)$$

wobei der Konduktivitätstensor  $\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{F})$  in (5.21b) und  $\hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p)$  durch

$$\hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = \mathbf{F}_e \left( 2 \frac{\partial \hat{W}_{\text{sk}}}{\partial \mathbf{C}_e}(\mathbf{C}_e) \right) \mathbf{F}_e^{\text{T}} \mathbf{F}^{-\text{T}} \quad (5.34)$$

definiert sind.  $\hat{W}_{\text{sk}}$  sei durch die Verzerrungsenergiedichte von Holmes und Mow [63] aus (5.10) gegeben. Die Fließregel sei durch

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) := 2\gamma_p \mathbf{B}_p \mathbf{G} \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\|} \quad (5.35)$$

spezifiziert. Damit wurde in (5.33a)–(5.33c) die Problemformulierung  $\mathbb{P}_2$ , ( $\mathbb{P}_{2a}$ )–( $\mathbb{P}_{2c}$ ), um die Massenerhaltungsgleichung (5.33a) erweitert und der konstituierende Anteil des Spannungstensors der festen Phase  $\hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}$  um den Druckterm  $-Jp \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}}$  ergänzt. Das Problem (5.33a)–(5.33c) besteht damit aus drei Gleichungen, von denen eine skalar-, eine vektor- und eine tensorwertig ist. Die Unbekannten lassen sich als  $\mathcal{U} = \{\chi, p, \mathbf{B}_p\}$  zusammenfassen. Somit ist das Problem geschlossen. In einem gegebenen Koordinatensystem besteht  $\mathcal{U}$  aus zehn skalaren Unbekannten: aus drei Komponenten der Bewegungsabbildung der festen Phase  $\chi$ , einer Druckkomponente  $p$ , und sechs unabhängigen Komponenten des symmetrischen Tensors  $\mathbf{B}_p$  der zweiten Stufe. Die Problemformulierung wird durch die folgenden Rand- und Anfangsbedingungen komplettiert.

**Randbedingungen** Es werden die folgenden Randbedingungen betrachtet,

$$\chi = \chi_b, \quad \text{auf } \Gamma_{\text{D}}^{\chi}, \quad (5.36a)$$

$$\left( -Jp \mathbf{g}^{-1} \mathbf{F}^{-\text{T}} + \hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \right) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{t}_R, \quad \text{auf } \Gamma_{\text{N}}^{\chi}, \quad (5.36b)$$

$$p = p_b, \quad \text{auf } \Gamma_{\text{D}}^p, \quad (5.36c)$$

$$\left( -\hat{\mathbf{K}}(\mathbf{F}) \text{Grad}(p) \right) \cdot \mathbf{N} = Q_b, \quad \text{auf } \Gamma_{\text{N}}^p. \quad (5.36d)$$

Für  $\chi$  und  $p$  ist  $\partial \mathcal{C}_R$  die disjunkte Vereinigung aus Dirichlet- und Neumann-Rand, das heißt  $\partial \mathcal{C}_R = \Gamma_{\text{D}}^{\chi} \cup \Gamma_{\text{N}}^{\chi} = \Gamma_{\text{D}}^p \cup \Gamma_{\text{N}}^p$ . Auf  $\Gamma_{\text{D}}^{\chi}$  und  $\Gamma_{\text{D}}^p$  werden die Deformation beziehungsweise der Druck auf ihre vorgeschriebenen Randwerte  $\chi_b$  und  $p_b$  gesetzt. Des Weiteren werden

auf den Neumann-Rändern  $\Gamma_N^x$  und  $\Gamma_N^p$  die Kontaktkraft  $\mathbf{t}_R$  und der Fluss der Flüssigkeit  $Q_b$  angegeben.  $\mathbf{N}$  beschreibt in (5.36) den Einheitsvektor, der normal zu  $\partial\mathcal{C}_R$  steht. Im Folgenden wird die Formulierung jedoch auf Probleme beschränkt, für die  $Q_b = 0$  und  $\mathbf{t}_R = \mathbf{0}$  gelten.

**Anfangsbedingungen** Obwohl das Problem (5.33) quasi-statisch ist, treten in dem Massenerhaltungsgesetz (5.33a) und der plastischen Fließregel Ableitungen bezüglich der Zeit auf. Zudem kann die Zeit explizit in den Randbedingungen auftreten. Weil das Problem Zeitableitungen für die volumetrische Deformation  $J$  und für den plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  enthält, müssen Anfangsbedingungen für diese vorgeschrieben werden. Hier sei angenommen, dass

$$J(\mathbf{X}, t_0) = 1, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{C}_R, \quad (5.37a)$$

$$\mathbf{B}_p(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{B}_{p0}(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{C}_R, \quad (5.37b)$$

gilt.

### 5.5.1. Numerische Behandlung des poroplastischen Problems

Die numerische Behandlung dieses Modells der Poroplastizität ähnelt dem Vorgehen, welches in Abschnitt 3.2–3.4 für den Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus vorgestellt wurde. Deshalb wird an dieser Stelle auf eine ausführliche Darstellung verzichtet. Vielmehr werden nur die wesentlichen Schritte erläutert. Für eine detaillierte Beschreibung sei auf [47][48] verwiesen.

Als numerisches Verfahren zur räumlichen Diskretisierung wird wie in Abschnitt 3.4 die Finite-Elemente-Methode gewählt. Daher wird die lokale Problemformulierung (5.33) zunächst schwach formuliert. Allerdings müssen nun neben den Testfunktionen für die Geschwindigkeit auch Testfunktionen für den Druck eingeführt werden,

$$\tilde{\mathcal{P}} \times \tilde{\mathcal{V}} := \{(\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}) \in H_0^1(\mathcal{C}_R) \times \mathbf{H}_0^1(\mathcal{C}_R) : \tilde{p}|_{\Gamma_D^p} = 0, \tilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma_D^x} = \mathbf{0}\}. \quad (5.38)$$

Darin beschreiben  $\tilde{p}$  und  $\tilde{\mathbf{v}}$  den Test- oder virtuellen Druck beziehungsweise die Test- oder virtuelle Geschwindigkeit. Beide müssen homogene Dirichlet-Randbedingungen erfüllen.  $H_0^1(\mathcal{C}_R)$  und  $\mathbf{H}_0^1(\mathcal{C}_R)$  sind die Sobolev-Räume der skalarwertigen und vektorwertigen Funktionen, die quadratintegrierbar in  $\mathcal{C}_R$  sind, auf  $\Gamma_D^x$  und  $\Gamma_D^p$  verschwinden und deren schwache Ableitungen der Ordnung  $m \leq 1$  ebenfalls alle quadratintegrierbar sind.

Um die zeitdiskrete Formulierung des Systems zu erhalten, wird auch hier ein implizites Eulerverfahren verwendet. Diese muss schließlich noch linearisiert werden. Dazu werden die Impulserhaltungsgleichung (5.33b) und die Fließregel (5.33c) mithilfe des Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus (GPA) aus Abschnitt 3.2 behandelt. Innerhalb des GPA werden die Modellgleichungen (5.33b) und (5.33c) zunächst bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  linearisiert. Das Inkrement dieser Linearisierung wird statisch eliminiert, wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben, so dass der GPA die Impulserhaltungsgleichung (5.33b) und die Fließregel (5.33c) zu einer nichtlinearen Gleichung reduziert, die nur vom

## 5. Theorie der Poroplastizität

Druck und der Deformation abhängt. Diese nichtlineare Gleichung zusammen mit der Bedingung der Massenerhaltung (5.33a) bildet ein System in den Unbekannten  $\chi$  und  $p$ , welches durch eine klassische Linearisierung, wie z.B. in [45] gezeigt, gelöst werden kann.

Die Zeit-Raum-diskrete-Formulierung des Problems wird schließlich mithilfe der Finiten-Elemente-Methode erhalten. Sowohl für den Druck als auch für die Bewegung werden im Folgenden lineare Ansatzfunktionen gewählt.

## 6. Numerische Tests zur Poroplastizität

Das biomechanische Modell zur Beschreibung der Adaption eines biologischen Gewebes (5.33) dient als Grundlage für den folgenden numerischen Test der Poroplastizität. Es basiert auf der Problemformulierung  $\mathbb{P}_2$ , siehe  $(\mathbb{P}_2\text{a})$ – $(\mathbb{P}_2\text{c})$ . Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass durch die Wahl einer Nicht-Standard-Energie (5.10) die vereinfachenden Modellannahmen für das Modell der Poroplastizität nicht mehr gelten, die für die Anwendung des Return-Mapping-Algorithmus' essenziell sind, so dass für dieses Beispiel nur der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus (GPA) angewendet werden kann. Dieser Test dient somit als Beleg dafür, dass mit dem Verallgemeinerten Plastizitätsalgorithmus (GPA) eine größere Klasse von Problemen gelöst werden kann.

Für die Massenerhaltungsgleichung (5.33a) wird eine Finite-Elemente-Diskretisierung von UG 4 verwendet [133]. Die Kopplung der Impulserhaltungsgleichung, die die Bewegung bestimmt (5.33b), und der Massenerhaltungsgleichung, welche den Druck festlegt (5.33a), wurde über das Import/Export-System von UG 4 realisiert [134]. Die Impulserhaltungsgleichung (5.33b) und die Fließregel (5.33c), welche der inneren Umstrukturierung des Gewebes Rechnung tragen, werden mithilfe des GPA behandelt, siehe Abschnitt 3.2.

Ein bekanntes Benchmark-Problem, um die mechanischen und hydraulischen Eigenschaften eines hydratisierten, weichen biologischen Gewebes zu bestimmen, ist der einaxiale Kompressionstest. Dazu wird ein Zylinder der Höhe  $H_0 = 1$  mm und mit anfänglichem Radius von  $R_0 = 1.5$  mm betrachtet, der aus einem biphasischen Material mit einer homogenen, isotropen festen Phase besteht [49]. In Zylinder-Koordinaten  $\mathbf{X} = (R, \Theta, Z)$ , wobei  $R$  die radiale Koordinate,  $\Theta$  der Winkel und  $Z$  die Symmetrieachse beziehungsweise die axiale Koordinate sind, kann die Originalgeometrie (die initiale Konfiguration) des Testkörpers durch  $R \in [0, R_0]$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi)$ ,  $Z \in [-H_0/2, H_0/2]$  beschrieben werden. Der Kompressionstest wird durchgeführt, indem eine zeitabhängige axiale Verschiebung

$$\chi_b^z(\mathbf{X}, t) - H_0/2 = 0.15 \frac{t}{T} \text{ mm}, \quad t \in [0, T], \quad T = 30 \text{ s}, \quad (6.1)$$

für alle  $\mathbf{X} \in [0, R_0] \times [0, 2\pi) \times \{H_0/2\}$  aufgebracht wird. Diese Punktmenge definiert den Dirichlet-Rand an der oberen Kreisfläche des Zylinders. Die totale Belastung  $\chi_b^z(\mathbf{X}, T)$  wird dabei durch mehrere inkrementelle Belastungsschritte aufgebracht.

Die untere Kreisfläche des Zylinders, die Punktmenge  $\mathbf{X} \in [0, R_0] \times [0, 2\pi) \times \{-H_0/2\}$ , wird fixiert, das heißt, dass dort homogene Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben werden. Bezüglich der flüssigen Phase wird angenommen, dass die obere und untere Kreisfläche undurchlässig sind, das heißt homogene Neumann-Randbedingungen werden für den Druck gesetzt. Zudem wird der Druck auf der Mantelfläche des Zylinders durch homogene Dirichlet-Randbedingungen eingeschränkt.

**Holmes-Mow Energie:**

$$\mathbf{P}_{\text{sc}} = \hat{\mathbf{P}}_{\text{sc}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sk}}(\mathbf{F}, \mathbf{B}_p) \mathbf{F}^{-\text{T}} = \mathbf{F}_e \left( 2 \frac{\partial \hat{W}_{\text{sk}}}{\partial \mathbf{C}_e}(\mathbf{C}_e) \right) \mathbf{F}_e^{\text{T}} \mathbf{F}^{-\text{T}},$$

$$\hat{W}_{\text{sk}}(\mathbf{C}_e) = \alpha_0 \left( [\hat{I}_3(\mathbf{C}_e)]^{-\beta} \exp \left\{ \alpha_1 [\hat{I}_1(\mathbf{C}_e) - 3] + \alpha_2 [\hat{I}_2(\mathbf{C}_e) - 3] \right\} - 1 \right),$$

**Fließregel:**

$$\dot{\mathbf{B}}_p = -2\gamma_p \mathbf{B}_p \mathbf{G} \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\Sigma}_{\text{sc}})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\|},$$

$$\gamma_p := \tilde{\lambda} \left[ \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau}_{\text{sc}})\| - \sqrt{(2/3)\tau_y} \right]_+.$$

Abbildung 6.1.: Materialgleichungen zur Beschreibung des elasto-plastischen Verhaltens der festen Phase der biphasischen Mischung zur Modellierung eines biologischen Gewebes

Die Materialgleichungen, die das elasto-plastische Verhalten der festen Phase eines biologischen Gewebes modellieren, sind in Abbildung 6.1 noch einmal zusammengefasst. Die gewählten Materialparameter sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Wahl der Parameter zur Charakterisierung des Konduktivitätstensors orientiert sich dabei an [45]. Die elastischen Koeffizienten der Holmes und Mow Energie werden so gewählt, dass die Bedingung  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$  aus [63] gewährleistet ist.

elastischer Koeffizient	$\alpha_0$	0.125
elastischer Koeffizient	$\alpha_1$	0.78
elastischer Koeffizient	$\alpha_2$	0.11
elastischer Koeffizient	$\beta$	1.0
hydraulische Konduktivität	$k_0$	$3.7729e^{-03} \text{ mm}^4/(\text{N} \cdot \text{s})$
Materialparameter	$m_0$	0.0848
Materialparameter	$m_1$	4.638
volumetrischer Anteil (solid)	$\phi_{\text{sR}}$	0.6
Fließspannung	$\tau_y$	$0.002 \text{ N/mm}^2$
Fließregel-Koeffizient	$\tilde{\lambda}$	$0.5 \text{ mm}^2/(\text{N} \cdot \text{s})$

Tabelle 6.1.: Materialparameter

Das größte Rechengitter des Zylinders umfasst 144 Prisma-Elemente. Nach zweifacher regulärer Verfeinerung ergeben sich somit 22516 Freiheitsgrade. Sowohl für die Verschiebungen als auch für den Druck werden lineare Ansatzfunktionen verwendet. Als Löser wird eine Newton-Methode gewählt, wobei ein ILU-Verfahren [110] beschleunigt durch eine Bi-CGSTAB-Methode die linearisierten Teilprobleme innerhalb der Newton-Iteration

## 6. Numerische Tests zur Poroplastizität

löst. Die nichtlineare Konvergenz wird durch eine Linesearch-Methode gewährleistet.

Die Abbildungen 6.2a-6.2f zeigen Ergebnisse des numerischen Tests der Poroplastizität, wobei die Größen auf einer Schnittebene geplottet sind, die durch den Ursprung des Zylinders verläuft. Um den Einfluss der plastischen Deformationen auf die Verschiebung und den Druck zu quantifizieren, werden die Ergebnisse in den Abbildungen 6.2a-6.2f mit solchen verglichen, die man erhält, wenn kein plastisches Fließen auftritt. Dazu wird ein weiterer Test durchgeführt, bei dem die Fließspannung  $\tau_y$ , die das Einsetzen des plastischen Fließens bestimmt, erhöht wird. Im Speziellen wird  $\tau_y$  auf  $\tau_y = 2000.00 \text{ N/mm}^2$  gesetzt. Für diese Wahl von  $\tau_y$  ist die Materialantwort des Kompressionstests rein elastisch und der plastische Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  entspricht dem Identitätstensor. Die Abbildungen 6.3a-6.3c zeigen die Ergebnisse, die mit diesem poroelastischen Test erzielt werden. Somit unterstreicht der Vergleich der Abbildungen 6.2a-6.2f mit 6.3a-6.3c den Einfluss der Berücksichtigung der inneren Umstrukturierung der festen Phase in dem biomechanischen Modell z.B. anhand der veränderten Verteilung des Porendrucks und der Verringerung des konstituierenden Teils der Spannung der festen Phase. Wenn im Speziellen Abb. 6.2a mit Abb. 6.3a und Abb. 6.2b mit Abb. 6.3b verglichen wird, kann festgestellt werden, dass sowohl der Wert des radialen als auch des axialen spezifischen Durchflusses, welcher mit der Darcy Geschwindigkeit  $-\mathbf{k}\text{grad}(p)$  identifiziert wird, für den poroplastischen Fall geringer ausfällt. In diesen Abbildungen beziehen sich die Farben der Pfeile auf den Wert der Komponente der Darcy Geschwindigkeit, die geplottet wird. Zum Beispiel bedeutet der rote Pfeil am rechten unteren Rand der Abbildung 6.2a, dass die radiale Komponente des spezifischen Durchflusses nahe  $0.000178 \text{ mm/s}$  ist.

Die Reduktion der Darcy Geschwindigkeit im poroplastischen Fall steht in Verbindung mit der Verringerung des Porendrucks (siehe Abb. 6.2c für das poroplastische Modell und 6.3c für das poroelastische) und der Verringerung der Spannung (welche hier durch die erste Invariante des konstituierenden Teils des Mandelschen Spannungstensors der festen Phase repräsentiert wird, siehe Abb. 6.2d für das poroplastische Modell und Abb. 6.3d für das poroelastische). Außerdem sind die erste und zweite Invariante von  $\mathbf{B}_p$  in den Abbildungen 6.2e und 6.2f geplottet, so dass zu erkennen ist, dass die größten plastischen Verzerrungen an jenen Punkten des seitlichen Zylindermantels (welcher durchlässig und frei bezüglich der Deformation ist) erzielt werden, an denen der fixierte, undurchlässige untere Rand des Testkörpers anliegt.

## 6. Numerische Tests zur Poroplastizität

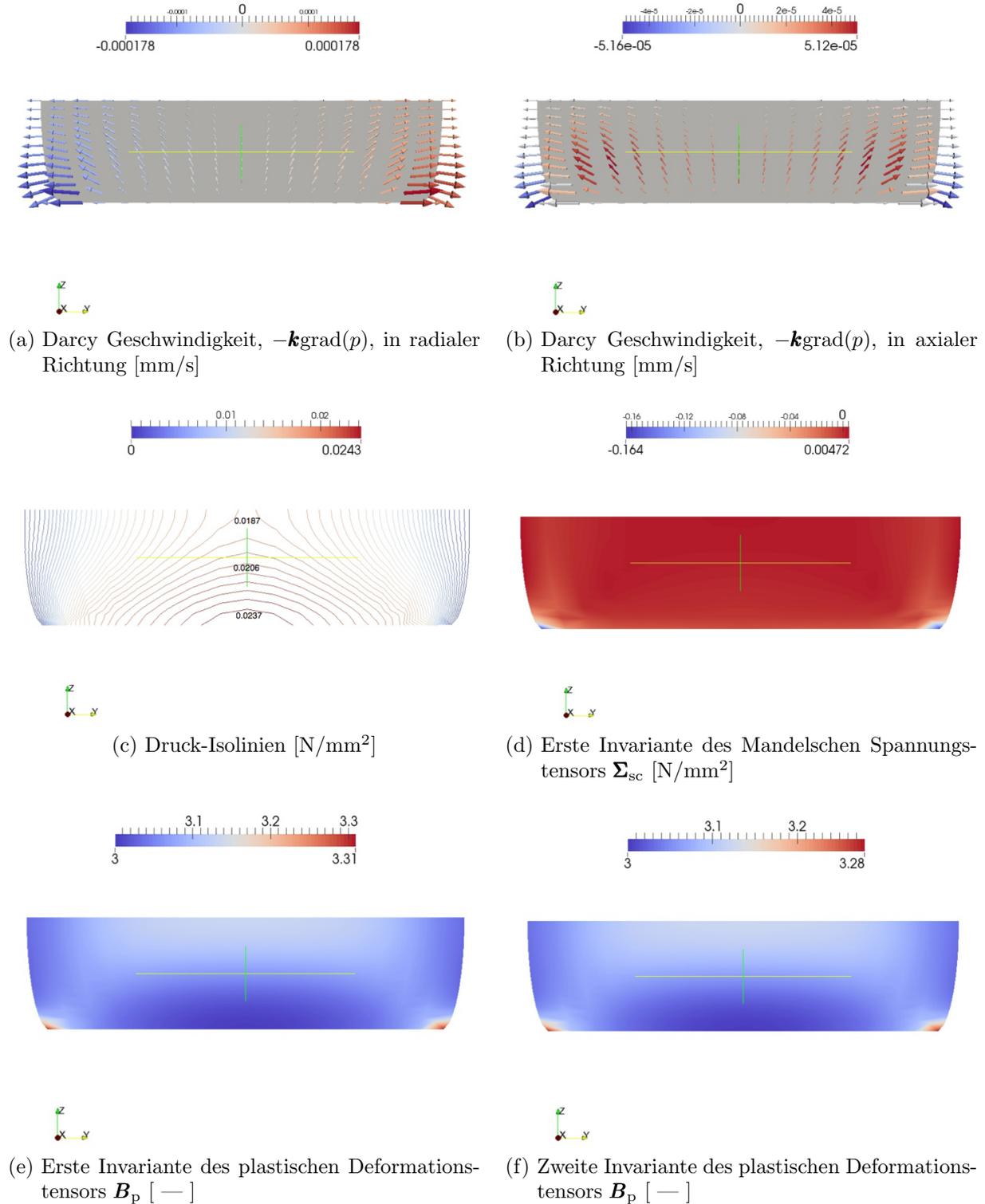


Abbildung 6.2.: Poroplastischer Fall: Ergebnisse für den Kompressionstest, bei dem poroplastisches Verhalten berücksichtigt wird. Die Größen sind in der deformierten Konfiguration zum Zeitpunkt  $t = 30$  s geplottet.

## 6. Numerische Tests zur Poroplastizität

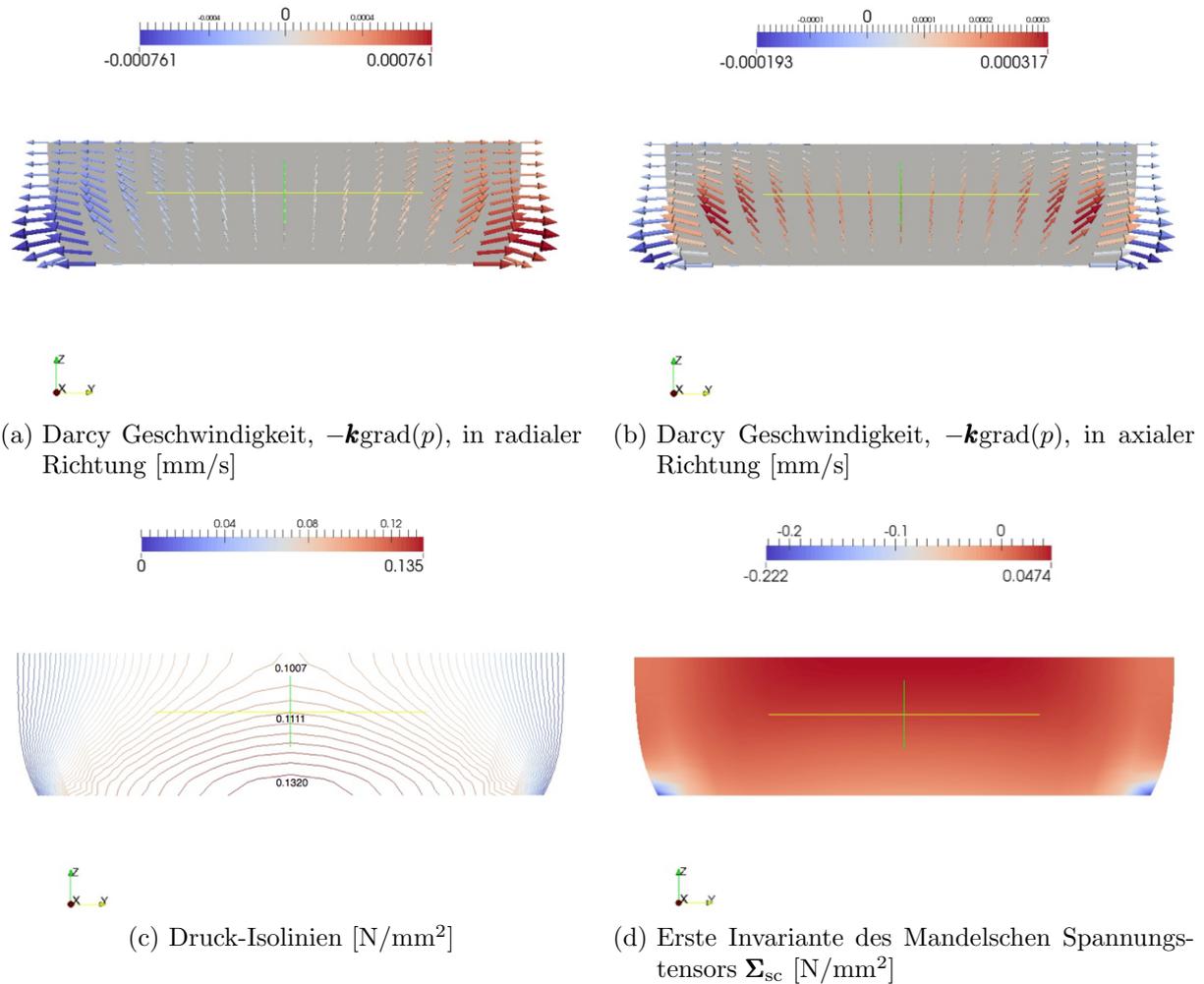


Abbildung 6.3.: Poroelastischer Fall: Ergebnisse für den Kompressionstest, bei dem rein poroelastisches Verhalten berücksichtigt wird. Die Größen sind in der deformierten Konfiguration zum Zeitpunkt  $t = 30$  s geplottet.

## 7. Implementierung

Sowohl der Return-Mapping-Algorithmus als auch der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus wurden in der Simulationssoftware UG 4 [133] implementiert. Dazu konnte das Interface der Element-Diskretisierung genutzt werden. Im Folgenden werden die wichtigsten Methoden erläutert, die für die Implementierung des RMA und des GPA nötig sind.

Die Zeit-Raum-diskreten-Gleichungen, die unter Anwendung des RMA beziehungsweise des GPA schließlich gelöst werden müssen, sind diejenigen, die in der Problemformulierung (RMA-zrd) respektive (GPA-zrd) zu finden sind. Die zugehörigen Bilinearformen,  $c(\cdot, \cdot)$  und  $\bar{c}(\cdot, \cdot)$ , und die Linearformen,  $g(\cdot)$  und  $\bar{g}(\cdot)$ , sind in (RMA-lin-b) und (RMA-lin-c) beziehungsweise (GPA-lin-b) und (GPA-lin-d) explizit aufgeschrieben. Im Rahmen einer Newton-Methode wird die Matrix, die mit den Bilinearformen  $c(\cdot, \cdot)$  und  $\bar{c}(\cdot, \cdot)$  assoziiert ist, **Jacobi-Matrix** genannt. Diese entspricht in der vorliegenden Arbeit der Ableitung des sogenannten **Defekts** nach der Unbekannten. Unter dem Defekt werden die Linearformen  $g(\cdot)$  und  $\bar{g}(\cdot)$  verstanden. Das Herzstück der Methode zur Berechnung des Defektes wird im Folgenden kurz erläutert, siehe Algorithmus 7.1. Der Defektvektor wird dabei elementweise aufgebaut, das heißt, dass für jedes Element die Defekt-Beiträge berechnet und aufaddiert werden. Dieses Vorgehen ist unter dem Begriff **Assemblierung** bekannt. Für jedes Element werden Quadraturregeln angewendet, um die Integrale, die in  $c(\cdot, \cdot)$  und  $g(\cdot)$  beziehungsweise  $\bar{c}(\cdot, \cdot)$  und  $\bar{g}(\cdot)$  auftreten, numerisch zu approximieren. Ein solcher Integrationspunkt ist in den Algorithmen 7.1 und 7.2 mit  $ip$  bezeichnet. Die Anzahl der Integrationspunkte pro Element liefert  $geo.num\_ip()$ . Die zugehörigen Gewichte der Quadraturregel sind durch  $geo.weight(ip)$  ausgedrückt. Mithilfe einer Schleife über alle Ansatzfunktionen,  $geo.num\_sh()$ , und über alle Komponenten des Unbekanntenvektors,  $num\_fct()$ , werden in Algorithmus 7.1 die inneren Kräfte aufsummiert. Dazu ist die Berechnung des ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{P}$  (hier:  $P$ ) wesentlich. Dieser wird an jedem Integrationspunkt durch die Methode  $stressTensor(P, \text{“PK1“}, ip, F)$  der Interface-Klasse eines Materialgesetzes ermittelt. Eine spezielle Realisierung der Methode  $stressTensor(P, \text{“PK1“}, ip, F)$  bestimmt nun, ob rein elastisches oder elasto-plastisches Materialverhalten betrachtet wird. Zudem wird in dieser Methode die Berechnung der Spannungsantwort unterschiedlich durchgeführt, je nachdem, ob der RMA oder der GPA als Plastizitätsalgorithmus dienen soll.

Algorithmus 7.1: Defekt-Berechnung für finite Elasto-Plastizität

```
1 // loop all integration-points (ip)
2 for (size_t ip = 0; ip < geo.num_ip(); ++ip)
3 {
4     // compute the deformation gradient at the ip: -> F
5     m_spMatLaw->template DeformationGradient<TFEGeom>(F, ip, geo, u);
```

## 7. Implementierung

```

6
7 // formulation in the reference configuration
8 // compute 1.Piola Kirchhoff stress-tensor at the ip: -> P
9 m_spMatLaw->stressTensor(P, "PK1", ip, F);
10
11 // loop shape-functions
12 for (size_t sh = 0; sh < geo.num_sh(); ++sh)
13 {
14 // loop components
15 for (size_t i = 0; i < num_fct(); ++i)
16 {
17 number innerForcesIP = 0.0;
18
19 // compute i-th comp. of internal forces for shape-function sh:
20 for (size_t J = 0; J < (size_t) dim; ++J)
21 {
22 innerForcesIP += P[i][J] * geo.global_grad(ip, sh)[J];
23 }
24
25 // add the contribution to the defect-vector
26 d(i, sh) += geo.weight(ip) * innerForcesIP;
27 }
28 }
29 }

```

Ehe auf die Berechnung des Spannungstensors näher eingegangen wird, wird zunächst noch die elementweise Assemblierung der Jacobi-Matrix erläutert. Essenziell zur Aufstellung der Jacobi-Matrix ist die Berechnung des Elastizitätstensors  $\mathbb{A}'_{n,k-1}$  in (RMA-lin-b) beziehungsweise des modifizierten Elastizitätstensors  $\bar{\mathbb{A}}_{n,k-1,l-1}$  in (GPA-lin-b) durch die Methode *elasticityTensor(ip, F)*, siehe Algorithmus 7.2. Sowohl für den RMA als auch für den GPA wird darin der vierstufige Elastizitätstensor durch numerische Differentiation der Spannungsantwort bestimmt, die durch *stressTensor(P, "PK1", ip, F)* berechnet werden kann. Die numerische Differentiation wird in (3.31)-(3.33) erklärt. Dadurch hängt auch die Berechnung der Jacobi-Matrix von der Methode *stressTensor(P, "PK1", ip, F)* ab, die im Algorithmus 7.3 für den Return-Mapping-Algorithmus kurz erläutert ist.

Algorithmus 7.2: Jacobi-Matrix-Berechnung für finite Elasto-Plastizität

```

1 // loop all integration-points (ip)
2 for (size_t ip = 0; ip < geo.num_ip(); ++ip)
3 {
4 // compute the deformation gradient at the ip: -> F
5 m_spMatLaw->template DeformationGradient<TFEGeom>(F, ip, geo, u);
6
7 // compute the elasticity-tensor at the ip: -> m_spElastTensor
8 m_spElastTensor = m_spMatLaw->elasticityTensor(ip, F);
9
10 // loop shape-functions & components
11 for (size_t a = 0; a < geo.num_sh(); ++a)
12 for (size_t i = 0; i < num_fct(); ++i)
13 for (size_t b = 0; b < geo.num_sh(); ++b)
14 for (size_t j = 0; j < num_fct(); ++j)

```

## 7. Implementierung

```

15     {
16         number integrandIP = 0.0;
17
18         for (size_t K = 0; K < (size_t) dim; ++K)
19             for (size_t L = 0; L < (size_t) dim; ++L)
20                 {
21                     integrandIP += geo.global_grad(ip, a)[K]
22                                 * (*m_spElastTensor)[i][K][j][L]
23                                 * geo.global_grad(ip, b)[L];
24                 }
25
26         J(i, a, j, b) += integrandIP * geo.weight(ip);
27     }
28 }
29

```

Um den plastischen Variablen, das heißt dem plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  und der Verhärtungsvariable  $\alpha$ , Rechnung zu tragen, werden in einem Preprozess an alle Integrationspunkte eines Elementes eine  $d \times d$ -Matrix für  $\mathbf{B}_p$  ( $d$  steht hier für die Dimension) und eine skalare Variable für  $\alpha$  angehängt. Dies geschieht über das Attachment-System von Reiter [106].  $Bp\_n$  und  $alpha\_n$  beschreiben im Algorithmus 7.3 die schon bekannten plastischen Verzerrungen bzw. die schon bekannte Verhärtungsvariable. Mittels der Methode  $Flowrule(Bp\_new, F, Bp\_n, alpha\_n, detF, J23)$  werden dann die ‘neuen’ plastischen Variablen berechnet, so dass die Fließregel und die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind. Insbesondere wird in der Methode  $Flowrule(Bp\_new, F, Bp\_n, alpha\_n, detF, J23)$  der plastische Multiplikator, der KKT-Multiplikator  $\gamma_\tau$ , des Return-Mapping-Verfahrens ermittelt. Mit den so gewonnenen plastischen Variablen wird schließlich der aktuelle Spannungstensor  $stressTens$  über das konstituierende Gesetz  $ConstLaw(stressTens, StressMeasure, F, Bp\_new, detF, J2, J23)$  berechnet. Der Spannungstensor fließt dann in die Berechnung des Defektes und der Jacobi-Matrix ein.

Um die modifizierte Spannungsantwort des GPA für die rechte Seite von (GPA-lin-d) zu bestimmen, muss im Preprozess eine weitere Variable in Form einer  $d \times d$ -Matrix an die Integrationspunkte angehängt werden, die der zusätzlichen Linearisierung im GPA bezüglich  $\mathbf{B}_p$  Rechnung trägt. Die Methode  $stressTensor(P, "PK1", ip, F)$  umfasst im Falle des GPA die Funktionen, mit denen die modifizierte Spannungsantwort

$$- \hat{\mathbf{P}}_{n,k-1,l-1} + (\mathbb{B}_{n,k-1,l-1} : \mathbb{Y}_{n,k-1,l-1}^{-1}) : \mathcal{G}_{n,k-1,l-1} \quad (7.1)$$

für die rechte Seite von (GPA-lin-d) berechnet werden. Die Inversion des vierstufigen Tensors  $\mathbb{Y}$  wird dadurch realisiert, dass ein vierstufiger Tensor der Form  $d \times d \times d \times d$ , wobei  $d$  die Dimension ist, mit einer Matrix der Form  $d^2 \times d^2$  assoziiert wird. Somit wird die Inversion des vierstufigen Tensors auf eine klassische Inversion einer Matrix zurückgeführt.

Algorithmus 7.3: Berechnung der Spannungsantwort für den RMA

```

1 {
2 // get internal variables: 'Bp_n': plastic deformation tensor,
3 // 'alpha_n': hardening-variable

```

## 7. Implementierung

```
4  MathMatrix<dim, dim>& Bp_n = m_pElemData->internalVars[ip].PStrain_n;  
5  number alpha_n = m_pElemData->internalVars[ip].alpha;  
6  
7  // compute some kinematic measures  
8  number detF, J2, J23;  
9  kinematicMeasures(detF, J2, J23, F);  
10  
11 // compute inner evolution of strains, hardening variable by return-map  
12 MathMatrix<dim, dim> Bp_new;  
13 Flowrule(Bp_new, F, Bp_n, alpha_n, detF, J23);  
14  
15 // compute stored energy functional and stress-tensor 'stressTens'  
16 ConstLaw(stressTens, StressMeasure, F, Bp_new, detF, J2, J23);  
17 }
```

Die Beschreibung der wichtigsten Methoden der Implementierung des RMA und des GPA verdeutlicht, dass beide Algorithmen auf den Integrationspunkten arbeiten. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass die Fließ- und Verhärtungsregel in den in dieser Arbeit präsentierten Modellen der Elasto-Plastizität lokal formuliert sind. Die Tatsache, dass die plastischen Variablen über das Attachment-System an den Integrationspunkten angeheftet werden, unterstreicht die Charakterisierung als *interne Variablen*, siehe Abschnitt 2.2.2, im Gegensatz zu der Bewegungsvariablen, die mit den Freiheitsgraden eines Elementes assoziiert ist.

**Bemerkung 7.1.** Für die Gleichungen der linearen Elastizität aus Abschnitt 1.4.2 kann bei der Berechnung der Matrix in Algorithmus 7.2 eine Vereinfachung vorgenommen werden, da der Elastizitätstensor konstant ist und damit unabhängig von den Integrationspunkten formuliert ist. Somit kann in diesem Fall der Elastizitätstensor außerhalb der Schleife über alle Integrationspunkte berechnet werden.

## 8. Zusammenfassung, Diskussion und Ausblick

Die vorliegende Arbeit betrachtet numerische Algorithmen zur Behandlung von elasto-plastischem Materialverhalten unter großen Deformationen. Dazu werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik eingeführt, die nötig sind, um das klassische Modell der finiten Elasto-Plastizität,  $\mathbb{P}_1$ , zu formulieren. Außerdem wird eine weitere Modellformulierung  $\mathbb{P}_2$  vorgestellt, die keiner Einführung eines plastischen Lagrange-Multiplikators bedarf. Sie kann als Basis für die Behandlung von allgemeinerem, beispielsweise phänomenologischem Fließverhalten dienen.

Der in Industrie und Forschung weit verbreitete Return-Mapping-Algorithmus (RMA) [122] ist der klassische Lösungsalgorithmus für das Modell  $\mathbb{P}_1$ . Für die Problemformulierung  $\mathbb{P}_2$  wird ein neuer Plastizitätsalgorithmus entwickelt und präsentiert, der einige technische Beschränkungen des RMA aufhebt, siehe Abschnitt 3.1.3. Anhand von numerischen Tests zur Elasto-Plastizität wird gezeigt, dass beide Algorithmen für die klassische Problemformulierung  $\mathbb{P}_1$  gleiche Ergebnisse liefern, siehe Abschnitt 4.1. Das bekannte Necking-Problem aus Abschnitt 4.1.2 dient als Test, um nachzuweisen, dass auch experimentelle Ergebnisse mit dem RMA und GPA reproduziert werden können. Der effiziente Einsatz des geometrischen Mehrgitterlösers in massiv-parallelen Rechnungen wird in Abschnitt 4.2 für das Problem der linearen Elastizität anhand einer Skalierungsstudie bis zu einer Prozessoranzahl von 262144 belegt. In Abschnitt 4.3 wird gezeigt, dass auch komplexe, industrielle Anwendungsbeispiele mit den vorgestellten Methoden gerechnet werden können. Schließlich liefert das Beispiel der Poroplastizität aus Abschnitt 6 den Beleg dafür, dass der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus (GPA) auf eine größere Klasse von elasto-plastischen Modellen als der RMA anwendbar ist.

Einige Modellannahmen wie beispielsweise rein volumetrisches plastisches Fließen oder die Entkopplung der Verzerrungsenergiegedichte in ihren volumetrischen und isochoren Anteil sind essenziell, um den RMA anwenden zu können. Für komplexere elasto-plastische Modelle, die nicht auf diesen Annahmen basieren, ist somit ein alternativer Plastizitätsalgorithmus nötig. Dies motiviert die Entwicklung des GPA. Mithilfe des GPA können insbesondere phänomenologische Modelle oder solche Modelle numerisch behandelt werden, die nicht der klassischen Theorie und der Einführung eines plastischen Lagrange-Multiplikators folgen. Ausgangspunkt des GPA ist dabei eine recht einfache, aber auch sehr allgemeine Betrachtungsweise: Als führende Variablen der elasto-plastischen Modelle werden neben den Bewegungsvariablen auch die plastischen Verzerrungen in Form des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  gesehen. Der klassische Ansatz des RMA hingegen reduziert das zu lösende Problem mittels des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens und die Einführung des Lagrange-Multiplikators zu einem nichtlinearen Problem in den Bewe-

gungsvariablen. Ein gewisses nichtlineares Verhalten in den plastischen Verzerrungen und somit eine allgemeine Wahl einer Fließregel wird durch dieses Vorgehen im RMA ausgeschlossen. Damit ist die Anwendung des klassischen RMA für komplexe elasto-plastische Modelle nicht möglich. Der RMA ist vielmehr für klassische Modelle entwickelt worden, das heißt für solche, bei denen die plastische Entwicklung explizit in den plastischen Variablen beschrieben werden kann. Für diese Modelle ist der RMA effizienter als der GPA, weil er weniger Rechenzeit benötigt, siehe Tabelle 4.3. Dies ist darauf zurückzuführen, dass innerhalb des GPA unter Anderem eine Inversion eines vierstufigen Tensors  $d \times d \times d \times d$  notwendig ist, welche an jedem Integrationspunkt durchgeführt werden muss ( $d$  beschreibt hier die Dimension). Zudem muss der Linearisierungsfehler der eingeführten Linearisierung bezüglich des plastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_p$  kontrolliert werden, was zu einer zusätzlichen Schleife über alle Elemente innerhalb des Lösungsprozesses führt.

Der Verallgemeinerte Plastizitätsalgorithmus ist außerdem ein geeigneter Algorithmus, um die noch junge Theorie der Mehrschicht-Kinematik nach Cermelli, Fried und Sellers [17] und Di Carlo und Quiligotti [26] zu verfolgen, siehe Anhang A.3. In gewisser Weise behandelt der GPA den plastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_p$  und die Bewegungsabbildung  $\chi$  als ‘gleichberechtigte’ Variablen. Allerdings wird in der präsentierten Form des Algorithmus’ noch eine hierarchische Lösungsstrategie verfolgt, die darauf zurückzuführen ist, dass die schwache Form der Impulserhaltungsgleichung mittels der Finiten-Elemente-Methode gelöst wird, während die Fließregel punktweise definiert ist und keiner räumlichen Diskretisierung bedarf. Somit werden die plastischen Deformationstensoren im Gegensatz zu der Bewegungsabbildung nur an den Integrationspunkten der Elemente berechnet.

Die Theorie der Mehrschicht-Kinematik kann außerdem als Ausgangspunkt dazu dienen, ein Modell der Gradientenplastizität [10][24][39][90] zu formulieren. Um einen effizienten numerischen Algorithmus zur Behandlung der Gradientenplastizität aufzusetzen, bedarf es einer entsprechenden Weiterentwicklung des GPA, beispielsweise müssen auch Ansatzfunktionen für die plastischen Variablen formuliert werden. Dieser Algorithmus ist dann kombinierbar mit effizienten Lösern, wie beispielsweise geometrischen Mehrgitterverfahren, die durch die Wahl eines transformierenden Glätters [115][138] das simultane Lösen der Gleichungen der Gradientenplastizität erlauben.

# A. Anhang

## A.1. Differentialgeometrie

An dieser Stelle werden nur einige wenige Definitionen aus dem Bereich der Differentialgeometrie erwähnt, die in dieser Arbeit Anwendung finden. Eine gut geschriebene Einführung in die Differentialgeometrie bietet die Arbeit von Epstein [30]. Außerdem fassen Marsden und Hughes für die Elastizitätstheorie wichtige Konzepte in [79] zusammen.

**Metrischer Tensor** In der analytischen Geometrie werden für Vektorräume oft Skalarprodukte eingeführt, welche durch die Eigenschaften Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit charakterisiert sind. Mithilfe von Skalarprodukten lassen sich Längen und Winkel bestimmen. Die Metrik beziehungsweise der metrische Tensor ist nun eine Vorschrift, die in jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt definiert [135].

Es sei darauf hingewiesen, dass im euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten der metrische Tensor durch die Einheitsmatrix gegeben ist.

**Kovariante Ableitung** Zur Definition der kovarianten Ableitung wird an dieser Stelle nur eine anschauliche Beschreibung gegeben: Unter der kovarianten Ableitung im Falle einer gekrümmten Fläche im  $\mathbb{R}^3$  wird die orthogonale Projektion der Richtungsableitung im Sinne von  $\mathbb{R}^3$  auf die Tangentialebene verstanden. Für mathematisch präzisere Ausführungen wird beispielsweise auf [96] verwiesen.

**Lie-Ableitung** Unter der Lie-Ableitung eines Tensors  $\mathbf{t}$  entlang einer Abbildung  $\phi$  wird

$$\mathcal{L}_\phi \mathbf{t} := \phi_\star \left[ \frac{d}{dt} (\phi_\star^{-1}[\mathbf{t}]) \right] \quad (\text{A.1})$$

verstanden, wobei  $\phi_\star$  den Pushforward und  $\phi_\star^{-1}$  den Pullback beschreiben.

Die Lie-Ableitung einer tensoriellen Größe aus der aktuellen Konfiguration wird also so berechnet, dass der Tensor zunächst in die Referenzkonfiguration zurückgezogen und dort die zeitliche Ableitung gebildet wird. Schließlich wird dieser wieder mittels des Pushforwards in die aktuelle Konfiguration abgebildet, siehe [13].

## A.2. Hilfsmittel aus der Vektoranalysis

Dieser Abschnitt widmet sich zwei zentralen Sätzen der Vektoranalysis, die in dieser Arbeit an verschiedenen Stellen Anwendung finden. Zunächst wird der Gaußsche Integralsatz eingeführt, siehe z.B. [103]:

## A. Anhang

**Satz A.1** (Gaußscher Integralsatz). *Für ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und ein Vektorfeld  $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega})$  gilt*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, do, \quad (\text{A.2})$$

wobei  $\mathbf{n} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  der äußere Normaleneinheitsvektor ist.

Dieses Ergebnis beinhaltet insbesondere die Formel der partiellen Integration im  $\mathbb{R}^n$ . Außerdem können analoge Formulierungen dieses Satzes für ein skalares Feld und ein Tensorfeld aufgestellt werden [50].

Des Weiteren ist es in dieser Arbeit an einigen Stellen erforderlich lokale Feldgleichungen aus global formulierten Erhaltungsgleichungen abzuleiten. Dies geschieht unter Zuhilfenahme des folgenden Lokalisierungstheorems [50],

**Satz A.2** (Lokalisierungstheorem). *Sei  $\phi$  ein Skalar- oder Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge  $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$  des euklidischen Raums. Dann gelte für ein  $x_0 \in \mathcal{U}$ ,*

$$\phi(x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathcal{B}_{\delta})} \int_{\mathcal{B}_{\delta}} \phi \, dx, \quad (\text{A.3})$$

wobei  $\mathcal{B}_{\delta}$  der abgeschlossene Ball mit Radius  $\delta$  um das Zentrum  $x_0$  ist. Wenn dann

$$\int_{\mathcal{B}} \phi \, dx = 0 \quad (\text{A.4})$$

für jeden abgeschlossenen Ball  $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$  gilt, folgt

$$\phi = 0. \quad (\text{A.5})$$

Für den Beweis dieses Theorems wird auf die Arbeit von Gurtin [50] verwiesen.

### A.3. Mehrschicht-Kinematik

Der klassische Ansatz zur Behandlung der plastischen Variablen ist die Theorie der internen Variablen, siehe Abschnitt 2.2.2. Dieser Theorie folgend tauchen die plastischen Variablen zunächst nicht in der schwachen Formulierung des Impulsgleichgewichts, dem Prinzip der virtuellen Leistungen, auf. Vielmehr werden sie auf der konstituierenden Ebene eingeführt, was die Namensgebung ‘interne Variablen’ motiviert.

Ein dazu konträrer Ansatz ist die sogenannte Theorie der Mehrschicht-Kinematik nach Cermelli, Fried und Sellers [17] und Di Carlo und Quiligotti [26]. Die Theorie aus [17][26] basiert auf dem fundamentalen Konzept, nach dem die Deformation eines Körpers und seiner inneren Struktur über eine **Mehrschicht-Kinematik** [26] beschrieben wird. Dies bedeutet, dass es kinematische Größen (z.B. die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$ ) zur Erfassung der ‘sichtbaren’ Bewegung des Körpers gibt und andere kinematische Größen (z.B.  $\mathbf{F}_p$  oder

die Verhärtungsvariable  $\alpha$ ), die den Veränderungen des Körpers auf einer anderen Ebene, der inneren Struktur, Rechnung tragen.

Im Folgenden wird diese Theorie kurz erläutert und das Prinzip der virtuellen Leistungen für die Mehrschicht-Kinematik hergeleitet. Thermische Effekte werden an dieser Stelle vernachlässigt. Die Theorie aus [17][26] wird minimal erweitert, indem auch der isotrope Verhärtungsparameter  $\alpha$  in die Betrachtung mit einbezogen wird.

Sei  $\mathcal{G}$  nun die Menge von kinematischen Größen, die die verallgemeinerten Geschwindigkeiten repräsentieren, die mit den Freiheitsgraden des Körpers assoziiert sind. Weil sich ein Körper bei inelastischem Verhalten einerseits in seiner globalen Form und andererseits in seiner inneren Struktur verändert (bedingt durch plastische Verzerrungen und isotrope Verhärtung), werden drei voneinander unabhängige *verallgemeinerte Geschwindigkeiten* eingeführt. Dementsprechend sei  $\mathcal{G}$  als

$$\mathcal{G} := \{(\mathbf{v}, \mathbf{L}_p, \dot{\alpha}) \in T\mathcal{S} \times \text{Lin}(T\mathcal{C}_\kappa, T\mathcal{C}_\kappa) \times \mathbb{R}\} \quad (\text{A.6})$$

definiert. Die Menge aller zulässiger Variationen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten wird *Raum der virtuellen Geschwindigkeiten* genannt. Dieser sei mit

$$\mathcal{G}_v := \{(\hat{\mathbf{v}}, \mathbf{\Lambda}_p, \zeta) \in T\mathcal{S} \times \text{Lin}(T\mathcal{C}_\kappa, T\mathcal{C}_\kappa) \times \mathbb{R}\}, \quad (\text{A.7})$$

bezeichnet, wobei  $\hat{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{\Lambda}_p$  und  $\zeta$  die virtuellen Gegenstücke zu  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{L}_p$ , und  $\dot{\alpha}$  sind.

Der Arbeit von Di Carlo und Quiligotti [26] folgend ist eine Kraft ein lineares, stetiges, reellwertiges Funktional über  $\mathcal{G}_v$ . Den Wert, den dieses Funktional annimmt, wird *virtuelle Leistung* genannt. In Übereinstimmung zu Abschnitt 1.3.2 werden auch hier externe und innere Kräfte unterschieden, die auf einen Körper wirken. Die externen Kräfte, die durch  $\hat{\mathbf{v}}$  eine virtuelle Leistung aufbringen, sind mit  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{t}$  bezeichnet. Die Volumenkraft  $\mathbf{f}$  fasst sowohl Trägheitskräfte als auch alle anderen Kräfte zusammen, die in Folge von entfernten äußeren Interaktionen wie z.B. Gravitation auftreten. Die Kraft  $\mathbf{t}$  repräsentiert eine Kraftdichte pro Einheitsfläche, die Kontaktinteraktionen des Körpers mit seiner Umgebung erfasst. Die Kontaktinteraktionen treten am Rand der aktuellen Konfiguration  $\mathcal{C}_t$  auf, welcher als disjunkte Vereinigung von zwei Mengen, d.h.  $\partial\mathcal{C}_t = \partial\mathcal{C}_t^N \cup \partial\mathcal{C}_t^D$  mit  $\partial\mathcal{C}_t^N \cap \partial\mathcal{C}_t^D = \emptyset$  geschrieben werden kann.  $\partial\mathcal{C}_t^N$  ist der Teil von  $\partial\mathcal{C}_t$ , auf dem die Kräfte  $\mathbf{t}$  vorgeschrieben werden. Dieser wird Neumann-Rand genannt, wobei  $\partial\mathcal{C}_t^D$  der Teil von  $\partial\mathcal{C}_t$  ist, auf dem die Positions-Randbedingungen vorgegeben werden (Dirichlet-Rand). Für die virtuelle Geschwindigkeit  $\hat{\mathbf{v}}$  gilt,

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{C}_t^D \quad \text{und } \forall t. \quad (\text{A.8})$$

Die externen Kräfte, die konjugiert zu  $\mathbf{\Lambda}_p$  und  $\zeta$ , d.h. zu der Evolution der plastischen Verzerrungen beziehungsweise zu der Verhärtung, sind, werden mit  $\mathbf{M}_\kappa^e \in \text{Lin}(T^*\mathcal{C}_\kappa, T\mathcal{C}_\kappa)$  und  $\theta^e$  bezeichnet. Im Folgenden werden diese Kräfte *plastische Kräfte* genannt.

Die *totale externe virtuelle Leistung* ist definiert als

$$\hat{\mathcal{W}}^e := \int_{\mathcal{C}_t} (\mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}) + \int_{\partial\mathcal{C}_t^N} (\mathbf{t}, \hat{\mathbf{v}}) + \int_{\mathcal{C}_t} J_e^{-1} \{(\mathbf{M}_\kappa^e, \mathbf{\Lambda}_p) + \theta^e \zeta\}, \quad (\text{A.9})$$

## A. Anhang

mit  $(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{v}}) = f^a g_{ab} \hat{v}^b$ ,  $(\mathbf{t}, \hat{\mathbf{v}}) = t^a g_{ab} \hat{v}^b$  und  $(\mathbf{M}_\kappa^e, \mathbf{\Lambda}_p) = (M_\kappa^e)^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} (\Lambda_p)^\gamma{}_\beta$ .

Die *totale interne virtuelle Leistung*, die von den Standard- und Nicht-Standardkräften erbracht wird, ist definiert als

$$\hat{\mathcal{W}}^i := \int_{\mathcal{C}_t} (\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{l}}) + \int_{\mathcal{C}_t} J_e^{-1} \{ (\mathbf{M}_\kappa^i, \mathbf{\Lambda}_p) + \theta^i \zeta \}, \quad (\text{A.10})$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Lin}(T^*\mathcal{S}, T\mathcal{S})$  der Cauchysche Spannungstensor und  $\hat{\mathbf{l}} := \text{grad}(\hat{\mathbf{v}})$  seine konjugierte verallgemeinerte Geschwindigkeit ist. Mit Nicht-Standardkräften ist hier der zweite Term in (A.10) gemeint, da damit Kräfte beschrieben werden, die in der klassischen Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen nicht berücksichtigt werden. Die Terme  $\mathbf{M}_\kappa^i \in \text{Lin}(T^*\mathcal{C}_\kappa, T\mathcal{C}_\kappa)$  und  $\theta^i$  in (A.10) sind die internen Gegenstücke von  $\mathbf{M}_\kappa^e$  und  $\theta^e$ . Es gilt, dass  $(\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{l}}) = \sigma^{ab} g_{ac} \hat{l}^c{}_b$  und  $(\mathbf{M}_\kappa^i, \mathbf{\Lambda}_p) = (M_\kappa^i)^{\alpha\beta} \eta_{\alpha\gamma} (\Lambda_p)^\gamma{}_\beta$  ist.

Der fundamentale Unterschied zwischen dem ersten und dem zweiten Term der rechten Seite von (A.10) ist, dass der zweite keinen Gradienten von  $\mathbf{\Lambda}_p$  und  $\zeta$  enthält, wobei der erste von  $\text{grad}(\hat{\mathbf{v}})$  abhängt. Nach der Terminologie von [26] werden solche Materialien als Materialien vom Grad 1 bezüglich  $\hat{\mathbf{v}}$  und vom Grad 0 bezüglich  $\mathbf{\Lambda}_p$  und  $\zeta$  klassifiziert.

**Satz A.3** (Prinzip der virtuellen Leistungen). *Das PVL besagt nun (analog zu Abschnitt 2.2.2 beziehungsweise 1.3.2), dass für alle Elemente von  $\mathcal{G}_v$  die totale externe virtuelle Leistung gleich der totalen internen Leistung ist, d.h.*

$$\hat{\mathcal{W}}^e = \hat{\mathcal{W}}^i. \quad (\text{A.11})$$

*Aus Übersichtsgründen wird hier die Abhängigkeit der virtuellen Leistungen von seinen Argumenten vernachlässigt.*

Durch Einsetzen der Ausdrücke der externen (A.9) und der internen virtuellen Leistung (A.10) in das Prinzip der virtuellen Leistungen (A.11), durch Berechnung des ersten Terms der rechten Seite von (A.10), durch Anwenden des Gaußschen Theorems auf den resultierenden Ausdruck, durch Zusammenfassen der Volumen- und Oberflächenterme, die mit der gleichen konjugierten verallgemeinerten Geschwindigkeit multipliziert werden, und durch Anwendung des bekannten Lokalisierungsargumentes, welches auf der Beliebigkeit der Teilvolumina basiert, erhält man das folgende System von Gleichungen

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = -\mathbf{f}, \quad \text{in } \mathcal{C}_t, \quad (\text{A.12a})$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \quad \text{auf } \partial\mathcal{C}_t^N, \quad (\text{A.12b})$$

$$\mathbf{M}_\kappa^i = \mathbf{M}_\kappa^e, \quad \text{in } \mathcal{C}_t \quad (\text{A.12c})$$

$$\theta^i = \theta^e, \quad \text{in } \mathcal{C}_t, \quad (\text{A.12d})$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor bezeichnet, der normal zu  $\partial\mathcal{C}_t^N$  steht.

Die ersten beiden Gleichungen des Systems repräsentieren das Standard-Kräftegleichgewicht, siehe Satz 1.6. Die letzten beiden Gleichungen hingegen drücken das Gleichgewicht der plastischen Kräfte aus, das heißt der verallgemeinerten Kräfte, die mit den plastischen

## A. Anhang

Freiheitsgraden assoziiert sind. Die Gleichungen (A.12a) und (A.12b) können analog zu (1.77b) und (1.77c) auch in der Referenzkonfiguration formuliert werden, d.h.

$$\operatorname{Div}(\mathbf{P}) = -J\mathbf{f}, \quad \text{in } \mathcal{C}_R, \quad (\text{A.13a})$$

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{N} = Jt\sqrt{\mathbf{N}\cdot\mathbf{C}^{-1}\cdot\mathbf{N}}, \quad \text{auf } \partial\mathcal{C}_R^N, \quad (\text{A.13b})$$

wobei  $\mathbf{P} := J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \in \operatorname{Lin}(T^*\mathcal{C}_R, T\mathcal{S})$  der erste Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und  $\mathbf{N}$  der Normaleneinheitsvektor zum Neumann-Rand  $\partial\mathcal{C}_R^N$  von  $\partial\mathcal{C}_R$  ist.



# Literaturverzeichnis

- [1] H.-D. ALBER, *Materials with memory: initial-boundary value problems for constitutive equations with internal variables*, (1998), Springer, Berlin.
- [2] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN UND D. ZARRABI, *Adaptive numerical analysis in primal elastoplasticity with hardening*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 171 (1999), S. 175–204.
- [3] D. AMBROSI, L. PREZIOSI UND G. VITALE, *The insight of mixtures theory for growth and remodeling*, *Z. Angew. Math. Phys.*, 61 (2010), S. 177–191.
- [4] F. ARMERO, *Formulation of finite element implementation of multiplicative model of coupled poro-plasticity at finite strains under fully saturated conditions*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 171 (1999), S. 205–241.
- [5] D.J. BAMMANN, *Modeling temperature and strain rate dependent large deformations of metals*, *Appl. Mech. Rev.*, 43(5S) (1990), S. 312–319.
- [6] J. BEAR, *Dynamics of Fluids in Porous Media* Dover Publications Inc., (1972), New York.
- [7] F. BEER, R. JOHNSTON, J. DEWOLF UND D. MAZUREK, *Mechanics of materials*, (2009), McGraw-Hill, New York.
- [8] T. BELYTSCHKO, W.K. LIU UND B. MORAN, *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, (2000), John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.
- [9] L.S. BENNETHUM, M.A. MURAD UND J.H. CUSHMAN, *Macroscale thermodynamics and the chemical potential for swelling porous media*, *Transport in Porous Media*, 39 (2000), S. 187–225.
- [10] A. BERTRAM UND S. FOREST, *The thermodynamics of gradient elastoplasticity*, *Continuum Mech. Thermodyn.*, 26 (2014), S. 269–286.
- [11] A. BERTRAM UND R. GLÜGE, *Festkörpermechanik*, Lehrbuch, (2013), Universität Magdeburg.
- [12] B.A. BILBY, L.R.T. GARDNER UND A.N. STROH, *Continuous distribution of dislocations and the theory of plasticity*, *Proc. XIth ICTAM*, 8 (1957), S. 35–44.
- [13] J. BONET UND R.D. WOOD, *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, (2008), Cambridge University Press, Cambridge New York.

- [14] D. BRAESS, *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*, (2007), Springer, Heidelberg.
- [15] W. BRAGG, *Internal strains in solids*, Diskussion. Proc. Phys. Soc. London, 52 (1940), S. 54–55.
- [16] J.M. BURGERS, *Some considerations of the field of stress connected with dislocations in a regular crystal lattice*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch., 42 (1939), S. 293–325.
- [17] P. CERMELLI, E. FRIED UND S. SELLERS, *Configurational stress, yield and flow in rate-independent plasticity*, Proc. R. Soc. A., A457 (2001), S. 1447–1467.
- [18] P.G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, (1978), North-Holland, Amsterdam.
- [19] P.G. CIARLET, *Mathematical Elasticity; Volume 1: Three-Dimensional Elasticity*, Volume 20, Studies in Mathematics and its Applications, (1988), North-Holland, Amsterdam.
- [20] S. CLEJA-TIGOIU UND G.A. MAUGIN, *Eshelby’s stress tensors in finite elastoplasticity*, Acta Mech., 139 (2000), S. 231–249.
- [21] B.D. COLEMAN UND M.E. GURTIN, *Thermodynamics with internal state variables*, J. Chemical Phys., 47(2) (1967), S. 597–613.
- [22] R. COURANT, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bulletin AMS, 49 (1943), S. 1–23.
- [23] A. CURNIER, Q.C. HE UND P. ZYSSET, *Conewise linear elasticity materials*, J. Elasticity, 37 (1995), S. 1–38.
- [24] R. DE BORST UND H.-B. MÜHLHAUS, *Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects*, Int. J. Num. Meth. Eng., 35 (1992), S. 521–539.
- [25] H. DEMIRKOPARAN, T.J. PENCE UND H. TSAI, *Hyperelastic Internal Balance by Multiplicative Decomposition of the Deformation Gradient*, Arch. Rational Mech. Anal., (2014), S. 923–970.
- [26] A. DI CARLO UND S. QUILIGOTTI, *Growth and Balance*, Mech. Res. Commun., 29 (2002), S. 449–456.
- [27] A. DÜSTER UND E. RANK, *A  $p$ -version finite element approach for two- and three dimensional problems of the  $J_2$  flow theory with non-linear isotropic hardening*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 53 (2002), S. 49–63.
- [28] G. DUVAUT UND J.L. LIONS, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, (1972), Dunod, Paris.

- [29] C. ECK, Y. KOVALENKO, O. MANGOLD, R. PROHL, A. TKACHUK UND V. TRICKOV, *Reduction of Numerical Sensitivities in Crash Simulations on HPC-Computers (HPC-10)*, In: Nagel, Wolfgang E.; Kröner, Dietmar H.; Resch, Michael M. (Eds.): *High Performance Computing in Science and Engineering' 13*, (2013), Springer, S. 679–697.
- [30] M. EPSTEIN, *The Geometrical Language of Continuum Mechanics*, (2010), Cambridge University Press.
- [31] M. EPSTEIN UND G.A. MAUGIN, *The energy-momentum tensor and material uniformity in finite elasticity*, *Acta Mechanica*, 83 (1990), S. 127–133.
- [32] M. EPSTEIN UND G.A. MAUGIN, *On the geometrical material structure of anelasticity*, *Acta Mechanica*, 115(1/4) (1996), S. 119–131.
- [33] M. EPSTEIN UND G.A. MAUGIN, *Thermomechanics of volumetric growth in uniform bodies*, *International Journal of Plasticity*, 16 (2000), S. 951–978.
- [34] E.C. ERINGEN, *Mechanics of Continua*, (1980), Krieger, Melbourne, FL.
- [35] R.A. EVE UND B.D. REDDY, *The variational formulation and solution of problems of finite-strain elastoplasticity based on the use of a dissipation function*, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 37 (1994), S. 1673–1695.
- [36] S. FEDERICO, *Volumetric-Distortional Decomposition of Deformation and Elasticity Tensor*, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 15 (2010), S. 672–690.
- [37] S. FEDERICO, A. GRILLO UND S. IMATANI, *The linear elasticity tensor of incompressible materials*, *Mathematics and Mechanics of Solids*, (2014), doi: 10.1177/1081286514550576.
- [38] P.J. FLORY, *Thermodynamic relations for high elastic materials*, *Trans. Faraday Soc.*, 41 (1961), S. 829–838.
- [39] S. FOREST UND A. BERTRAM, *Formulations of Strain Gradient Plasticity*, *Mechanics of Generalized Continua*, 7 (2011), S. 137–149.
- [40] R.W. FREUND UND R.H.W. HOPPE, *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*, (2007), Springer, Berlin.
- [41] G. GABRIEL UND K.-J. BATHE, *Some Computational Issues in Large Strain Elastoplastic Analysis*, *Computers and Structures*, 56(2/3) (1995), S. 249–267.
- [42] C. GIVERSO UND L. PREZIOSI, *Modelling the compression and reorganization of cell aggregates*, *Math. Med. Biol.*, 29 (2012), S. 181–204.
- [43] A. GRILLO, S. FEDERICO UND G. WITTUM, *Growth, mass transfer and remodeling in fiber-reinforced, multi-constituent materials*, *Int. J. Nonlinear. Mech.*, 47 (2012), S. 388–401.

- [44] A. GRILLO, S. FEDERICO, G. WITTUM, S. IMATANI, G. GIAQUINTA UND M.V. MIĆUNOVIĆ, *Evolution of a fibre-reinforced growing mixture*, Nuovo Cimento C, 32 (2009), S. 97–119.
- [45] A. GRILLO, C. GIVERSO, M. FAVINO, R. KRAUSE, M. LAMPE UND G. WITTUM, *Mass Transport in Porous Media with Variable Mass*, Numerical Analysis of Heat and Mass Transfer in Porous Media, Advanced Structured Materials, Delgado, J.M.P.Q., et al. (eds.), (2012), Springer, S. 27–61.
- [46] A. GRILLO, R. PROHL UND G. WITTUM, *A Generalised Algorithm for Anelastic Processes in Elastoplasticity and Biomechanics*, Mathematics and Mechanics of Solids, (2015), doi:10.1177/1081286515598661.
- [47] A. GRILLO, R. PROHL UND G. WITTUM, *A poroplastic model of structural reorganisation in porous media of biomechanical interest*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, (2015), Springer, doi:10.1007/s00161-015-0465-y.
- [48] A. GRILLO, R. PROHL UND G. WITTUM, *Erratum To: A poroplastic model of structural reorganisation in porous media of biomechanical interest*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, (2015), Springer.
- [49] F. GUILAK, A. RATCLIFFE UND V.C. MOW, *Chondrocyte deformation and local tissue straining articular cartilage: A confocal microscopy study*, Journal of Orthopaedic Research, 13(3), (1995), S. 410-421.
- [50] M.E. GURTIN, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 158 (1981), Academic Press, New York.
- [51] M.E. GURTIN, E. FRIED UND L. ANAND, *The Mechanics and Thermodynamics of Continua*, (2009), Cambridge University Press, Cambridge, New York.
- [52] W. HACKBUSCH, *Multi-grid methods and applications*, Bd. 4 (1985), Springer, Berlin.
- [53] W. HACKBUSCH, *Iterative Lösung großer linearer Gleichungssysteme*, (1991), BG Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [54] K. HACKL UND F.D. FISCHER, *On the relation between the principle of maximum dissipation and inelastic evolution given by dissipation potentials*, Proc. R. Soc. Lond., A464 (2007), S. 117–132.
- [55] C. HAGER UND B.I. WOHLMUTH, *Nonlinear complementarity functions for plasticity problems with frictional contact*, Preprint Series Stuttgart Research Centre for Simulation Technology, (2008).
- [56] W. HAN UND B.D. REDDY, *Plasticity - mathematical theory and numerical analysis*, (2013), Springer-Verlag, New York.
- [57] M.S. HASSANIZADEH, *Derivation of basic equations of mass transport in porous media. Part II. Generalized Darcy's and Fick's Laws*, Advances in Water Resources, 9 (1986), S. 208–222.

- [58] U. HEISSERER, S. HARTMANN, A. DÜSTER UND Z. YOSIBASH, *On volumetric locking-free behaviour of p-version finite elements under finite deformations*, Commun. Numer. Meth. Engng., 24 (2008), S. 1019–1032.
- [59] A. HENDERSON, J. AHRENS UND C. LAW, *The ParaView Guide*, Kitware Inc., (2004), Clifton Park, New York.
- [60] R. HILL, *A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1 (1948), S. 18–28.
- [61] R. HILL, *The Mathematical Theory of Plasticity*, (1950), Clarendon Press, Oxford.
- [62] G. HOFSTETTER UND R.L. TAYLOR, *Non-Associative Drucker-Prager Plasticity at Finite Strains*, Communications in Applied Numerical Methods, 6 (1990), S. 583–589.
- [63] M.H. HOLMES UND V.C. MOW, *The nonlinear characteristics of soft gels and hydrated connective tissues in ultrafiltration*, J. Biomechanics, 23(11) (1990), S. 1145–1156.
- [64] M.F. HORSTEMEYER UND D.J. BAMMANN, *Historical review of internal state variable theory for inelasticity*, International Journal of Plasticity, 26 (2010), S. 1310–1334.
- [65] T.J.R. HUGHES, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, (2012), Courier Dover Publications.
- [66] M. ITSKOV, *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers*, (2007), Springer-Verlag.
- [67] J. KESTIN UND J.R. RICE, *Paradoxes in the application of thermodynamics to strained rods*, Stuart, E.B. (ed.), A Critical Review of Thermodynamics, (1970), Mono Book Corp., Baltimore.
- [68] R.D. KRIEG, J.C. SWEARENGEN UND W.B. JONES, *A physically based internal variable model for rate dependent plasticity*, Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity, (1987), S. 245–271.
- [69] K. KRABBENHOFT, A.V. LYAMIN, S.W. SLOAN UND P. WRIGGERS, *An interior-point algorithm for elastoplasticity*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 69 (2007), S. 529–626.
- [70] E. KRÖNER, *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 4(1) (1959), S. 273–334.
- [71] S. LANG, C. WIENERS UND G. WITTUM, *The application of adaptive parallel multigrid methods to problems in nonlinear solid mechanics*, Error-controlled adaptive finite element methods in solid mechanics, Stein, E. (ed.) (2000), John Wiley & Sons Ltd.
- [72] E.H. LEE, *Elastic-Plastic Deformations at Finite Strains*, J. Appl. Mech., 36 (1969), S. 1–6.

## Literaturverzeichnis

- [73] J. LEMAÎTRE UND J. CHABOCHE, *Mécanique des Matériaux Solids*, (1985), Dunod, Paris.
- [74] X.S. LI, *An Overview of SuperLU: Algorithms, Implementation, and User Interface*, toms, 31 (2005), S. 302–325.
- [75] V.A. LUBARDA, *Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics*, Appl. Mech. Rev., 57(2) (2004), S. 95–108.
- [76] J. LUBLINER, *On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics*, International Journal of Non-linear Mechanics, 7 (1972), S. 237–254.
- [77] J. LUBLINER, *Plasticity Theory*, (2008), Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- [78] L.E. MALVERN, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, (1969), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York.
- [79] J.E. MARSDEN UND T.J.R. HUGHES, *Mathematical Foundations of Elasticity*, (1983), Dover Publications Inc., New York.
- [80] G.A. MAUGIN, *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, (1992), Cambridge University Press.
- [81] G.A. MAUGIN, *Material Inhomogeneities in Elasticity*, (1993), Chapman and Hall, London.
- [82] G.A. MAUGIN UND M. EPSTEIN, *Geometrical material structure of elastoplasticity*, Int. J. Plasticity, 14 (1998), S. 109–115.
- [83] M.V. MIĆUNOVIĆ, *Thermomechanics of Viscoplasticity. Fundamentals and Applications*, (2009), Springer-Verlag, Heidelberg.
- [84] C. MIEHE, *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität - Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*, Habilitationsschrift, (1993), Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 93/1.
- [85] R. VON MISES, *Mechanik der festen Körper im plastischen deformablen Zustand*, Göttin. Nachr. Math. Phys., 1 (1913), S. 582–592.
- [86] R. VON MISES, *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 8(3) (1928), S. 161–185.
- [87] F.J. MONTÁNS UND K.-J. BATHE, *Computational issues in large strain elastoplasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 63 (2005), S. 159–196.

- [88] E.J. NANSON, *Note on hydrodynamics*, Messenger of Mathematics, 3 (1874), S. 120–121.
- [89] A. NEEDLEMAN, *A numerical study of necking in circular cylindrical bars*, J. Mech. Phys. Solids, 20 (1972), S. 111–127.
- [90] P. NEFF, *Remarks on Invariant Modelling in Finite Strain Gradient Plasticity*, Technische Mechanik, 28 (2008), S. 13–21.
- [91] P. NEFF UND C. WIENERS, *Comparison of models for finite plasticity: A numerical study*, Comput. Visual. Sci., 6 (2003), S. 23–25.
- [92] J. NOCEDAL UND S.J. WRIGHT, *Numerical Optimization*, (2006), Springer, New York.
- [93] W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2 (1958), S. 197–226.
- [94] D.M. NORRIS, B. MORAN, J.K. SCUDDER UND D.F. QUINONES, *A computer simulation of the tension test*, J. Mech. Phys. Solids, 26 (1978), S. 1–19.
- [95] R.W. OGDEN, *Nearly isochoric deformations: Application to rubberlike solids*, J. Mech. Phys. Solids, 26 (1978), S. 37–57.
- [96] R. OLOF, *Die kovariante Ableitung von Vektorfeldern*, Geometrie der Raumzeit (1999), S. 79–87.
- [97] P. PERZYNA, *Thermodynamic theory of viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, 11 (1971), S. 313–354.
- [98] P.M. PINSKY, M. ORTIZ UND K.S. PISTER, *Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 40 (1983), S. 137–158.
- [99] P.M. PINSKY, M. ORTIZ UND R.L. TAYLOR, *Operator split methods in the numerical solution of the finite deformation elastoplastic dynamic problem*, Comput. Struct., 17(3) (1983), S. 345–359.
- [100] L. PRANDTL, *Spannungsverteilung in plastischen Körpern*, Proc. Int. Congr. Appl. Mech. Delft 1924, (1925), S. 43–45.
- [101] S. QUILIGOTTI, *On bulk mechanics of solid-fluid mixtures: kinematics and invariance requirements*, Theor. Appl. Mech., 28, (2002), S. 1–11.
- [102] S. QUILIGOTTI, G.A. MAUGIN UND F. DELL’ISOLA, *An Eshelbian approach to the nonlinear mechanics of constrained solid-fluid mixtures*, Acta Mech., 160, (2003), S. 45–60.
- [103] R. RANNACHER, *Numerische Mathematik 3: Numerik von Problemen der Kontinuumsmechanik*, Vorlesungsskriptum, (2008), Universität Heidelberg.

- [104] J.N. REDDY, *An Introduction to Continuum Mechanics*, (2007), Cambridge University Press.
- [105] A. REUSS, *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*, Z. Angew. Math. Mech., 10 (1930), S. 266–274.
- [106] S. REITER, *Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen für die Realisierung von adaptiven hierarchischen Gittern auf massiv parallelen Systemen*, Dissertation, (2014), Universität Frankfurt am Main.
- [107] S. REITER, A. VOGEL, I. HEPPNER, M. RUPP UND G. WITTUM, *A Massively Parallel Geometric Multigrid Solver in Hierarchically Distributed Grids*, Comput. Visual. Sci., 4 (2013), S. 151–164.
- [108] O. REYNOLDS, *Papers on Mechanical and Physical Subjects*, The Sub-Mechanics of the Universe, 3 (1903), Cambridge University Press.
- [109] J.R. RICE, *Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 19 (1971), S. 433–455.
- [110] Y. SAAD, *Iterative methods for sparse linear systems*, (2003), SIAM, Philadelphia.
- [111] S. SALSA, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, (2008), Springer, Milan, Heidelberg, New York.
- [112] M. SAUTER, *Numerical analysis of algorithms for infinitesimal associated and non-associated elasto-plasticity.*, Dissertation (2010), Institut für Angewandte und Numerische Mathematik, KIT Karlsruhe.
- [113] K. SCHELLBACH, *Probleme der Variationsrechnung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 41 (1851), S. 293–363.
- [114] J. SCHRÖDER, F. GRUTTMANN UND J. LÖBLEIN, *A Simple Orthotropic Finite Elasto-Plasticity Model Based on Generalized Stress-Strain Measures*, Comput. Mech., 30 (2002), S. 48–64.
- [115] V. SCHULZ UND G. WITTUM, *Transforming smoothers for PDE constrained optimization problems*, Comput. Visual. Sci., 11 (2008), S. 207–219.
- [116] H. SCHWARZ, *Methode der finiten Elemente*, (1991), B.G. Teubner, Stuttgart.
- [117] W. SEIDEL, *Werkstofftechnik. Werkstoffe-Eigenschaften-Prüfung-Anwendung*, (2008), Carl Hanser Verlag, München.
- [118] A. SEITZ, A. POPP UND W.A. WALL, *A semi-smooth Newton method for orthotropic plasticity and frictional contact at finite strains*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 285 (2015), S. 228–254.
- [119] J.C. SIMO, *A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum Formulation*, Comput. Mech. Appl. M., 66 (1988), S. 199–219.

- [120] J.C. SIMO, *Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV. (1998), Elsevier Science.
- [121] J.C. SIMO UND F. ARMERO, *Geometrically nonlinear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 33 (1992), S. 1413–1449.
- [122] J.C. SIMO UND T.J.R. HUGHES, *Computational Inelasticity*, (1998), Springer-Verlag, New York.
- [123] J.C. SIMO UND M. ORTIZ, *A unified approach to finite deformation elastoplasticity based on the use of hyperelastic constitutive equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 49 (1985), S. 221–245.
- [124] J.C. SIMO UND R.L. TAYLOR, *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 48 (1985), S. 101–118.
- [125] B. SZABÓ UND I. BABUŠKA, *Finite Element Analysis*, (1991), John Wiley & Sons, Chichester.
- [126] L.M. TAYLOR UND E.B. BECKER, *Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 41(3) (1983), S. 251–277.
- [127] R. TEMAM, *Mathematical problems in plasticity*, (1985), Gauthier-Villars, Paris.
- [128] A. TOMIC, A. GRILLO UND S. FEDERICO, *Poroelastic materials reinforced by statistically oriented fibres—numerical implementation and application to articular cartilage*, IMA Journal of Applied Mathematics, (2014), doi:10.1093/imamat/hxu039.
- [129] C. TRUESDELL UND W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, (1965), 3rd Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [130] H.A. VAN DER VORST, *Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems*, SIAM J. Sci. and Stat. Comput., 13(2) (1992), S. 631–644.
- [131] L. VERGORI, M. DESTRADE, P. MCGARRY, R.W. OGDEN, *On anisotropic elasticity and questions concerning its finite element implementation*, Comput. Mech., 52 (2013), S. 1185–1197.
- [132] E. VOCE, *A practical strain hardening function*, Metallurgica, 51 (1955), S. 219–226.
- [133] A. VOGEL, S. REITER, M. RUPP, A. NÄGEL UND G. WITTUM, *UG 4 - A Novel Flexible Software System for Simulating PDE Based Models on High Performance Computers*, Comput. Visual. Sci., (2013), doi: 10.1007/s00791-014-0232-9.
- [134] A. VOGEL, *Finite-Volumen-Verfahren höherer Ordnung*, Dissertation (2014), Universität Frankfurt am Main.

## Literaturverzeichnis

- [135] R.M. WALD, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984), Chicago.
- [136] C. WIENERS, *Nonlinear solution methods for infinitesimal perfect plasticity*, Z. angew. Math. Mech., 87 (2007), S. 643–660.
- [137] C. WIENERS, *Multigrid methods for finite elements and the application to solid mechanics. Theorie und Numerik der Prandtl-Reus Plastizität.*, Habilitationsschrift (2000), Universität Heidelberg.
- [138] G. WITTUM, *On the convergence of multigrid methods with transforming smoothers, theory with application to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math., 54 (1989), S. 543–563.
- [139] O.C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method*, (1977) McGraw-Hill, London, 3. Auflage.
- [140] <http://www.engineeringtoolbox.com>