Über P.A.M. Diracs Elektronentheorie

Frank Linhard

Institut für Geschichte der Naturwissenschaften
Johann Wolfgang Goethe–Universität
Frankfurt am Main

> »Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnio discerni non posse, cum ex determinantibus caetera omnia oriantur.«
> Leibniz 1962, [16], De Analysi Situs

1 Introductio

Untersucht man die Besonderheiten, die ein Elektron in seiner theoretischen Beschreibung auszeichnen, so stellen im wesentlichen diejenigen Aspekte, die gewissermaßen *klassisch unvorstellbar* sind, den menschlichen Verstand vor die größten Rätsel. Das Elektron ist durch drei Eigenschaften wesentlich ausgezeichnet:

- Es ist ein Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen.
- Es ist von anderen Elektronen nicht zu *unterscheiden*.
- Es ist punktförmig.

Der letzte Punkt geht auf den Umstand zurück, daß bislang keine Substruktur des Elektrons nachgewiesen werden konnte. In den Zwanziger und Dreißiger Jahren dieses Jahrhunderts, die für unser heutiges Bild vom Elektron prägend waren, war die Bereitschaft noch sehr ausgeprägt, subatomare Teilchen als wirklich fundamental aufzufassen. Der „Teilchenstrom“ der subatomaren Vielfalt setzte erst zwanzig Jahre später ein. Dementsprechend ging auch Dirac davon aus, daß es keinen zureichenden Grund gäbe, nicht von einem punktförmigen Elektron auszugehen und auch die in Diracs Nachfolge einsetzende QED übernimmt das Punktteilchenkonzept. Ausgangspunkt ist der Umstand, daß in der klassischen Theorie die Abstoßungskräfte auf einem ausgedehnten Partikel nicht erklärt werden können.
Pauli[1] hatte im Jahre 1925 aus Gründen, die durch spektroskopische Daten motiviert waren, eine »...klassisch nicht beschreibbare Zweideutigkeit der quantentheoretischen Eigenschaften des Leuchtelektrons...« gefordert. Dirac seinerseits war an Versuchen, den Spin in eine Beschreibung des Elektrons einzubauen, nicht unmittelbar interessiert. Die Klein-Gordon-Gleichung lag als Spin-0-Gleichung vor, war aber als unzureichend verstanden worden, weil sie das Wasserstoffproblem nicht beschreiben konnte. Außerdem muß bedacht werden, daß eine Interpretation der Klein-Gordon-Gleichung als Feldgleichung des Spin-0-Feldes noch in weiter Ferne lag. Man besaß also eine anscheinend physikalisch belanglose, aber formal einwandfreie Gleichung, die offenbar das Elektron nicht beschrieb.

[1] Pauli 1925, [18]

In seinem Aufsatz für die Festschrift zu Diracs 70. Geburtstag stellt Arthur S. Wightman[2] zwei Aspekte der Diracgleichung heraus, die sie für den weiteren Fortgang der theoretischen Physik im 20. Jahrhundert so bedeutsam machen: Sie liefert eine Elektronentheorie als relativistische Beschreibung von Spin–$\frac{1}{2}$–Teilchen und sie erlaubt ihre Reinterpretation als Feldgleichung. Die Diracgleichung ermöglicht den Übergang von den Ein-Teilchen-Theorien der Quantenmechanik zu den Vielteilchenkonzepten der Quantenfeldtheorie. Letztlich führt sie zur Quantenelektrodynamik.

Dirac ist — wie bereits angedeutet — bei seinem Beschreibungsansatz nicht vom Spin ausgegangen. Freilich war er sich der Existenz des Spins wohl bewußt. Die Beschreibung des physikalischen Spins folgt dann aber aus der formalen Struktur, sprich aus dem Ansatz, den Dirac gewählt hatte, um den Forderungen der relativistischen, sowie seiner eigenen quantenmechanischen Transformationstheorie nach zu kommen. Das Denken Diracs war wesentlich an Prinzipien orientiert und das Festhalten an diesen Prinzipien ließ ihn ein Konzept vorschlagen, das zunächst auch unerwünschte Effekte mit sich brachte, obwohl es nach seiner Veröffentlichung 1928[3] von allen mit der Problematik befaßten Physikern als Lösung des Problemes der relativistischen Spin–$\frac{1}{2}$–Beschreibung erkannt wurde.

Das Ψ in Diracs Gleichung muß ein 4-komponentiger Spinor sein, um den Transformationseigenschaften, die Dirac als verbindliche Prinzipien auffaßte, zu gehorchen. Der *Spin* ist dann eine Konsequenz des Transformationsgesetzes der Lösungen der Diracgleichung (Ψ) unter Rotationen. Damit ist er letztlich durch das Transformationsgesetz unter *homogenen Lorentztransformationen* bestimmt[4]. *Spin* ist also eine Folge der *relativistischen Invarianz* der Diracgleichung.

Zu Beginn des Jahres 1926 hatte die moderne Quantenmechanik gerade erst begonnen, sich zu entwickeln. Heisenbergs fundamentale Arbeit[5] war im September 1925 erschienen und Born und Jordan hatten eine Ausarbeitung[6], sowie zusammen mit Heisenberg die geschlossene Darstellung des Formalismus[7] im Februar 1926 vorgelegt. Dirac stellte unmittelbar nach Heisenbergs Entdeckung einen eigenen Zugang vor[8]. 1926 setzte er die Entwicklung mit weiteren Arbeiten fort, von denen eine im Zentrum unserer Betrachtungen stehen soll. Im selben Jahre legte Schrödinger[9] seinen wellenmechanischen Formalismus vor. Die Schrödingersche Arbeit, die die Äquivalenz mit Heisenbergs Formalismus zeigte, erschien im Mai.

Bezüglich der Statistik-Thematik erschienen drei Papiere, die weitgehend unabhängig voneinander waren. Fermis Zugang[10] hatte die thermodynamische Gastheorie zum Ausgangspunkt. Heisenberg[11] und Dirac[12] gingen vom Problem mehrerer Elektronen im Atom aus. Durch diesen Zugang bedingt, drängt sich der Aspekt der Ununterscheidbarkeit der Elektronen beinahe von selbst auf. Beide Arbeiten entwickeln diese Eigenschaft

[2] Wightman 1972, [29]
[3] Dirac 1928, [6], [7]
[4] In E. P. Wigners klassischer Arbeit: *On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group*, [31], werden diese Zusammenhänge erst mehr als 10 Jahre später, nämlich 1939, klar gesehen.
[5] Heisenberg 1925, [11]
[6] Born und Jordan 1925, [1]
[7] Heisenberg, Born und Jordan 1926, [2]
[8] Dirac 1925, [4]
[9] Schrödinger 1926, [21], [22], [23], [24]
[10] Fermi 1926, [8], [9]
[11] Heisenberg 1926, [12]
[12] Dirac 1926, [5]

als wesentlich für die theoretische Beschreibung. Diracs Arbeit leifert eine Ableitung des Zusammenhanges zwischen Ununterscheidbarkeit, Fermi-Dirac– und Bose-Einstein-Statistik und zeigt die Gültigkeit des Pauli-Prinzipes für Fermionen. Fermis und Diracs Arbeiten von 1926 stellen den Grund für die Benennung der Statistik nach diesen beiden Physikern dar.

2 Diracs Betrachtung ununterscheidbarer Teilchen

Beschreibt man ein System, das mehrere identische Teilchen enthält, durch eine Wellenfunktion Ψ, so ist diese eine Funktion der Teilchenkoordinaten x, die Ort und Spin enthalten.[13] Bei N Teilchen also:

$$\Psi \;=\; \Psi(x_1 ... x_j ... x_k ... x_N).$$

Der Erwartungswert eines (einer Observablen zugeordneten) Operators $\hat{O}$ berechnet sich dann zu

$$\langle O \rangle \;=\; \langle \Psi(x_1 ... x_j ... x_k ... x_N) | \hat{O} | \Psi(x_1 ... x_j ... x_k ... x_N) \rangle.$$

Wenn Teilchen im strengen Sinne ununterscheidbar sind, folgt, daß der quantenmechanische Erwartungswert einer Observablen invariant unter Koordinatenvertauschung sein muß[14]: Ein nicht invarianter Erwartungswert wäre nämlich genau das Unterscheidungsmerkmal für die ausgetauschten Teilchen, also:

$$\begin{aligned} &\langle \Psi(x_1 ... x_j ... x_k ... x_N) | \hat{O} | \Psi(x_1 ... x_j ... x_k ... x_N) \rangle \\ &= \langle \Psi(x_1 ... x_k ... x_j ... x_N) | \hat{O} | \Psi(x_1 ... x_k ... x_j ... x_N) \rangle \qquad \forall j, k \end{aligned} \tag{1}$$

So findet die Ununterscheidbarkeit von Teilchen ihren formalen Ausdruck für ein System von N solchen Teilchen. Beliebige Teilchenvertauschungen lassen sich auf der Basis von obiger Zweiervertauschung konstruieren.

In seiner Arbeit von 1926, in der er auch den Formalismus der 1. Quantisierung einführt, betrachtet Dirac[15] folgendes Problem:

> »In §3 the problem is considered of a system containing several similar particles, such as an atom with several electrons. If the positions of two of the electrons are interchanged, the new state of the atom is physically indistinguishable from the original one. In such a case one would expect only symmetrical functions of the co-ordinates of all the electrons to be capable of being represented by matrices. It is found that this allows one to obtain two solutions of the problem satisfying all the necessary conditions, and the theory is incapable of deciding which is the correct one. One of the solutions leads to Pauli's principle that not more than one electron can be in any given orbit, and the other, when applied to the analogous problem of the ideal gas, leads to the Einstein-Bose statistical mechanics.«[16]

[13] Also $x := (\vec{r}, s)$, wenn $\vec{r}$ der Ortsvektor und s die Spinvariable sind.

[14] Dieser Umstand ist unmittelbarer Ausdruck der Ununterscheidbarkeit als *physikalischer Symmetrie*.

[15] Dirac 1926, [5]

[16] Dirac 1926, [5], p.662

Soweit also Diracs Zusammenfassung: Der Formalismus der Quantenmechanik führt bei Vielteilchensystemen ununterscheidbarer Teilchen auf zwei Klassen von Lösungsfunktionen. Diese 'symmetrischen' und 'antisymmetrischen' Lösungen lassen sich nicht in einander überführen und bilden vielmehr abgeschlossene, vollständige Systeme. Die Symmetrieeigenschaften sind *erhalten*.
Dirac diskutiert im weiteren am Beispiel eines 2-Elektronen Systemes die Vertauschung der ununterscheidbaren Elektronen. Entsprechend wird hier von der Wechselwirkung zwischen den Elektronen abgesehen und er gelangt zu den symmetrischen und antisymmetrischen 2-Elektronen-Funktionen, die dann jeweils allein eine komplette Lösung des Problemes darstellen. Folglich erhält er die bekannten Darstellungen der symmetrischen Eigenfunktionen als Summe über ein Produkt von Orbitalen und der antisymmetrischen als Slater-Determinante. Zu diesen Darstellungen heißt es dann:

> »If there is interaction between the electrons, there will still be symmetrical and antisymmetrical eigenfunctions, although they can no longer be put in these simple forms. In any case the symmetrical ones alone or the antisymmetrical ones alone give a complete solution of the problem.
>
> An antisymmetrical eigenfunction vanishes identically when two of the electrons are in the same orbit. This means that in the solution of the problem with antisymmetrical eigenfunctions there can be no stationary states with two or more electrons in the same orbit, which is just Pauli's exclusion principle. The solution with symmetrical eigenfunctions, on the other hand, allows any number of electrons to be in the same orbit, so that this solution cannot be the correct one for the problem of electrons in an atom.«[17]

Der Formalismus hat also zwei unabhängige Klassen von Lösungen geliefert, deren eine dadurch ausgezeichnet ist, daß sie auf das *Pauli-Prinzip* führt. Dirac formuliert hier natürlich sehr vorsichtig — bekanntlich wurden die Verhältnisse letztlich erst durch Paulis Spin-Statistik-Theorem 1940[18] geklärt — und spricht in beiden Fällen von Elektronen. Nachdem im Falle von *Elektronen im Atom* das Pauli-Prinzip gilt, schließt er aber, daß diese zumindest hier die antisymmetrischen Lösungen zugeordnet bekommen müssen.
Im §4 der Arbeit führt Dirac den Übergang zur entsprechenden Statistik auf einer intuitiven Basis durch:

> »The results of the preceding section apply to any system containing several similar particles, in particular to an assembly of gas molecules. There will be two solutions of the problem, in one of which the eigenfunctions are symmetrical functions of the co-ordinates of all the molecules, and in the other antisymmetrical.«[19]

Die Ergebnisse der Ununterscheidbarkeitsbetrachtung sollen also auf ein anderes System ununterscheidbarer Teilchen übertragen werden, nämlich auf das ideale Gas. Die Gastheorie führt klassischerweise zur statistischen Mechanik und Dirac zeigt im weiteren Verlauf, wie die entsprechenden Statistiken mit den beiden Lösungsklassen, nämlich den symmetrischen und antisymmetrischen Eigenfunktionen verknüpft sind:

[17] Dirac 1926, *op.cit.*, p.669/70
[18] Pauli 1940, [19]
[19] Dirac 1926, *op.cit.*, p.670

Nach einer formalen Darstellung der Problematik beim idealen Gas, geht Dirac zu den Eigenfunktionen für das Ensemble von Molekülen über:

> »To pass to the eigenfunctions for the assembly of molecules, between which there is assumed to be no interaction, we multiply the eigenfunctions for the separate molecules, and then take either the symmetrical eigenfunctions, of the form (14), or the antisymmetrical ones, of the form (15). [Diracs (14) und (15) entsprechen den Darstellungen für die beiden Lösungsklassen.] We must now make the new assumption that all stationary states of the assembly (each represented by one eigenfunction) have the same *a priori* probability. If now we adopt the solution of the problem that involves symmetrical eigenfunctions, we should find that all values for the number of molecules associated with any wave have the same *a priori* probability, which gives just the Einstein-Bose statistical mechanics. On the other hand, we should obtain a different statistical mechanics if we adopted the solution with antisymmetrical eigenfunctions, as we should than have either 0 or 1 molecule associated with each wave. The solution with symmetrical eigenfunctions must be the correct one when applied to light quanta, since it is known that the Einstein-Bose statistical mechanics leads to Planck's law of black-body radiation. The solution with antisymmetrical eigenfunctions, though is probably the correct one for gas molecules, since it is known to be the correct one for electrons in an atom, and one would expect molecules to resemble electrons more closely than light quanta.«[20]

Hierbei ist der letzte Satz natürlich im historischen Kontext zu betrachten: 1926 stand Dirac die Terminologie von Bosonen und Fermionen noch nicht zur Verfügung und man sieht schon an der Art der Formulierung, daß der Satz wesentlich spekulativen Charakter hat.
Interessant wird indes der weitere Fortgang von Diracs §4, wenn er die Statistiken in Verbindung mit der jeweiligen symmetrischen oder antisymmetrischen Lösung ableitet:

> »Divide the waves into a number of sets such that the waves in each set are associated with molecules of about the same energy. Let A_s be the number of waves in the sth set, and let E_s be the kinetic energy of a molecule associated with one of them. [...] N_s molecules are associated with waves in the sth set [...]«[21]

Er leitet den Ausdruck für die Energieverteilung ab zu:

$$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha+E_s/kT}+1}$$

> »This formula gives the distribution in energy of the molecules. On the Einstein-Bose theory the orresponding formula is
>
> $$N_s = \frac{A_s}{e^{\alpha+E_s/kT}-1}$$
>
> [...]«[22]

[20] Dirac 1926, *op.cit.*, p.672
[21] Dirac 1926, *loc.cit.*
[22] Dirac 1926, *op.cit.*, p.673

Diese Arbeit Diracs führte dazu, daß die Fermi-Dirac-Statistik seinen Namen erhielt. Abgesehen von der systematischen Deduktion des Zusammenhanges von Ununterscheidbarkeit, Bosonen-Fermionen, sowie den Statistiken, führt er auch den Formalismus der 1. Quantisierung ein. Neben den Arbeiten von 1928[23], die die Diracgleichung vorstellen, stellt dieses Papier einen wesentlichen Beitrag zum theoretischen Verständnis der Beschreibungsweise eines Elektrons dar.

3 Was ist ein Elektron?

Herrmann Weyl[24] hat die Bezeichnung *Leibniz-Pauli-Verbot* eingeführt.
Ist es möglich, einem ontologischen Verständnis des Pauli-Prinzipes näher zu kommen? Ist der Name *Leibniz-Pauli-Verbot* gerechtfertigt, so müßte die Ableitung desselben für alle ununterscheidbaren quantenmechanischen Objekte gelten. Formal folgt es aber nur für Fermionen, also für quantenmechanische Objekte deren Wellenfunktion *antisymmetrisch* ist. Warum eine Gültigkeit des Pauli-Prinzipes nicht für z. B. Photonen gegeben ist, ist formal klar, Weyl sieht aber deutlich, daß es hier dann bezüglich des Zusammenhanges mit der Ununterscheidbarkeit Probleme gibt:

> »Da Photonen entstehen und vergehen, emittiert und absorbiert werden, sind sie Individuen ohne Identität. [...] Das Ende von alledem ist, daß die Elektronen Leibnizens *principium identitatis indiscernibilium* befriedigen, oder daß das Elektronengas ein „monomisches Aggregat“ ist (Fermi-Dirac-Statistik). In einem tiefen und präzisen Sinn bestätigt die Physik die Mutakallimun: weder dem Photon, noch dem (positiven und negativen) Elektron kann man Individualität zuschreiben. Es hat sich herausgestellt, daß das Leibniz-Pauli-Verbot für Elektronen, doch nicht für Photonen gilt.«

Bei Leibniz ist zu sehen, daß die Bezeichnungen *groß* oder *klein* innerhalb der klassischen Domäne rein relative Konzepte sind. Etwas erscheint groß oder klein einzig in bezug auf seine Umgebung. Gerade das illustriert Leibniz ja in *De Analysi Situs*[25] durch sein Tempelbeispiel. Um die letztliche Struktur der Materie zu erkunden, ist es jedoch nötig, sich von klassischen Vorstellungen frei zu machen. Paul A. M. Dirac hat seinem Lehrbuch *The Principles of Quantum Mechanics*[26] einen ersten Paragraphen vorangestellt, in dem er über die Notwendigkeit einer Quantentheorie handelt. Folgerichtig geht er im hier zu diskutierenden Kontext auf die Kontinuums-Atomismus-Auseinandersetzung ein:

> »In a classical explanation of the constitution of matter, one would assume it to be made up of a large number of small constituent parts and one would postulate laws for the behaviour of these parts, from which the laws of the matter in bulk could be deduced. This would not complete the explanation, however, since the question of the structure and stability of the constituent parts is left untouched. To go into this question, it becomes necessary to postulate that each constitutent part is itself made up of smaller parts, in terms of which its behaviour is to be explained. There is clearly no end to

[23] Dirac 1928, [6], [7]
[24] Weyl 1966, [28], Anhang B: Ars combinatoria, p.314ff
[25] Leibniz 1962, [16]
[26] Dirac 1947, [3]

> this procedure, so that one can never arrive at the ultimate structure of matter on these lines.«[27]

Weil man also sozusagen in ein reduktionistisches Kontinuum fallen würde, sofern man beim klassischen, relationalen Größenbegriff verbliebe, fordert Dirac eine absolute Definition von Größe:

> »So long as *big* and *small* are merely relative concepts, it is no help to explain the big in terms of the small. It is therefore necessary to modify classical ideas in such a way as to give an absolute meaning to size.«[28]

Dieser Übergang von der klassischen in die quantenmechanische Domäne erzwingt schließlich das Konzept der Ununterscheidbarkeit in der Physik. Der Grund dafür liegt in den oben formal gezeigten Umständen. Elektronen sind als solche *ununterscheidbar*; d.h., sie sind *wesentlich ununterscheidbar*.
Ebenso wie die methodologische Basis des „Physiktreibens auf Symmetriebasis" im Denken von Leibniz angelegt ist, so findet sich hier auch ein methodisches Prinzip, das bereits qua Deduktion und Anwendung auf den Zugang zu den mathematisch-physikalischen Symmetrieformulierungen verweist: Gemeint ist das Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren. Bei Leibniz wird dieses Prinzip im Rahmen seiner Betrachtungen zum Ähnlichkeitsbegriff in der Geometrie eingeführt, nämlich in der Analysis situs. Dort heißt es: »Quae ex determinantibus (seu datis sufficientibus) discerni non possunt, ea omnio discerni non posse, cum ex determinantibus caetera omnia oriantur.«[29]
Wie gesagt handelt es sich bei Leibniz zunächst um ein rein methodisches Prinzip, das er ganz folgerichtig auch in einem mathematischen Kontext formuliert. An anderen Stellen und vor allem in der Auseinandersetzung mit Clarke, versucht Leibniz darzulegen, daß ununterscheidbare Entitäten als *realia* nicht vorkommen können. Ununterscheidbarkeit bleibt also eine auf *abstracta* beschränkte mögliche Eigenschaft. Das Prinzip von der Identität des Ununterscheidbaren ist auf der Logik basiert: Ununterscheidbarkeit bedeutet, daß keine Eigenschaft, oder kein Merkmal zweier (oder entsprechend erweitert: beliebig vieler) Größen angegeben — und damit getestet — werden kann, das eine Unterscheidung erlauben würde. Physikalisch bedeutet das, daß zwei ununterscheidbare Entitäten als ein– und dieselbe erscheinen müssen. Und daß somit die beiden Entitäten auch ein– und dieselbe *sind*. Zur Verdeutlichung der Leibnizschen Differenzierung zwischen *realia* und *abstracta* sei ein Beispiel aus dem Leibniz-Clarke-Briefwechsel aufgegriffen: Clarke führt als ein Beispiel für die Existenz ununterscheidbarer Größen — deren Befürworter er aus seinem atomistischen Kontext heraus ist — zwei gleich große Segmente des leeren Raumes an. Sind diese Raumsegmente gleichförmig und gleich groß, so gibt es keinen Unterschied zwischen ihnen. Die Antwort Leibnizens belegt genau die oben dargelegten Umstände: Er gibt die Ununterscheidbarkeit für die Raumsegmente als abstrakte Konzepte zu, stellt jedoch seinen relationalen Raumbegriff[30] dagegen, der zeigt, daß bloßen Raumsegmenten keine Existenz zukommen kann. Leibniz geht von einem kontinuierlichen Aufbau der Welt aus und läßt die Separation einzelner Weltsegmente nur qua Abstraktion zu.

---

[27] Dirac 1947, [3], §1, p.3

[28] Dirac 1947, [3], *loc.cit.*

[29] »Was aus seinen Bestimmungsstücken (oder zureichend definierenden Daten) nicht unterschieden werden kann, das kann überhaupt nicht unterschieden werden, weil von den Bestimmungsstücken alles andere (unterschiedene) herrührt.« Leibniz: De Analysi Situs, in: Leibniz 1962, [16]

[30] Den er in Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica, in: Leibniz 1962, [16] expliziert.

4 Die Bedeutung der neuen Statistiken

In einer Arbeit, die das Wesen der Elemtarteilchen thematisiert[31], geht Erwin Schrödinger auch auf die verschiedenen Statistiken ein, die für das Verhalten unterschiedlicher Teilchenklassen charakteristisch sind. Hier soll untersucht werden, inwieweit diese *Charakteristik* Aufschluß über den ontischen Status — oder das Wesen — des Elektrons geben kann.
Er führt ein klassisches Beispiel an, das den unterschiedlichen Charakter der drei in der Natur bekannten Statistiken herausstellt. Ich will das Beispiel kurz zitieren, um die Implikationen im Anschluß zu diskutieren:

> »Drei Schuljungen, Hans, Heinz und Kurt, haben eine Belohnung verdient. Der Lehrer hat zwei Preise unter sie zu verteilen. Bevor er es tut, will er sich klarmachen, *wie viele verschiedene Verteilungen überhaupt möglich sind*. Dies ist die einzige Frage, die wir hier untersuchen — wofür er sich entscheidet, interessiert uns nicht. Es ist eine statistische Frage: Abzählen der Anzahl verschiedener Verteilungsmöglichkeiten. Der springende Punkt ist, daß die Antwort davon abhängt, worin die Preise bestehen. Drei verschiedene Arten von Preisen sollen uns die drei Arten von Statistik vor Augen führen.
>
> a) Die zwei Preise sind zwei Denkmünzen mit dem Bild Newtons beziehungsweise Shakespeares. Der Lehrer kann dann „Newton" entweder dem Hans oder dem Heinz oder dem Kurt geben und er kann „Shakespeare" entweder dem Hans oder dem Heinz oder dem Kurt geben. Das gibt drei mal drei, also neun Verteilungen (klassische Statistik).
>
> b) Die zwei Preise sind zwei, als unteilbar anzusehende Schillinge. Diese können dann zwei verschiedenen Jungen gegeben werden, wobei der dritte, Hans, Heinz oder Kurt, leer ausgeht. Neben diesen drei Möglichkeiten gibt es drei weitere: entweder Hans oder Heinz oder Kurt erhält zwei Schillinge. Also gibt es jetzt insgesamt sechs verschiedene Verteilungen (Bose-Einstein-Statistik).
>
> c) Die zwei Preise bestehen darin, daß in der Fußballmannschaft, die für die Schule spielen soll, zwei Mann fehlen. Für sie können zwei von den Jungen eintreten, der dritte geht leer aus. Also gibt es hier drei verschiedene Verteilungen (Fermi-Dirac-Statistik).
>
> Vorab sei bemerkt: die *Preise* stellen Teilchen vor, zwei Teilchen derselben Sorte in jedem Falle; die Knaben stellen Zustände vor, in denen sich so ein Teilchen befinden kann. „Newton" wird dem Hans gegeben heißt also: das Teilchen „Newton" hat den Zustand Hans.«[32]

An der Wahl ist natürlich zunächst einmal auffällig, daß das Beispiel c) sich von a) und b) massiv darin unterscheidet, daß hier kein „Ding" übergeben wird. a) und b) sind aus der Wahrscheinlichkeitslehre, der Kombinatorik, bekannt: Die Denkmünzen sind unterscheidbar, oder farbige Kugeln in einer Urne, und die Schillinge sind es nicht, alle Kugeln derselben Farbe. Natürlich entsprechen die Beschreibungsgegenstände der klassischen Theorien den Denkmünzen. Klassische Objekte sind im allgemeinen komplex

[31]Schrödinger 1950, [25]
[32]Schrödinger 1950, [25], 10.

und damit unterscheidbar. Gibt man die Unterscheidbarkeit auf — wie auch in der klassischen Kombinatorik, wo auf eine abstrakte Unterscheidbarkeit durch die klassische Bahn verzichtet wird, so kommt man zur Version b), der Bose-Einstein-Statistik.
Anders liegt der Fall bei c). Diese Art der statistischen Verteilung läßt sich in der Kombinatorik nicht durch Kugeln darstellen. Schrödinger verwendet „Mitgliedschaften", um den Sachverhalt zu verdeutlichen: Selbstverständlich sind Mitgliedschaften werder körperlich noch stofflich. Sie existieren nur in einem abstrakten Sinne. Die Denkmünzen aus a) sind Individuen, sie sind wohlunterscheidbar. Die Schillinge aus b) sollen das nicht sein. Dennoch kann man mehrere besitzen. Wer zwei Schillinge besitzt, hat mehr als jemand der nur einen hat. Tauschen zwei Besitzer ihre Schillinge, so macht das keinen Unterschied (im Gegensatz zu den Denkmünzen). Von gänzlich anderer Beschaffenheit ist die Mitgliedschaft: Eine Doppel-Mitgliedschaft in der Mannschaft ist sinnlos.

5 Conclusio

Wir haben gesehen, daß man zur Versinnbildlichung des Charakters der Fermi-Dirac-Statistik ein abstraktes Konzept benötigt. Folgt daraus, daß die Fermi-Dirac-Statistik *nur für abstrakte Konzepte* gelten kann? Schrödinger suggeriert etwas in der Art:

> »Wenn früher ein Physiker gefragt wurde, aus welchem Stoff denn die Atome selbst bestünden, durfte er lächeln und ausweichend antworten. Wenn aber der Frager durchaus wissen wollte, ob er sie sich als kleine unveränderliche Stückchen von gewöhnlicher Materie vorstellen dürfe, so wie sie sich dem vorwissenschaftlichen Denken darstellten, durfte man ihm sagen, das habe zwar wenig Sinn, aber es könne nichts verschlagen. Die ehedem bedeutungslose Frage hat heute Sinn bekommen. Die Antwort ist ein entschiedenes Nein. Dem Atom fehlt das allerprimitivste Merkmal, an das wir bei einem Stück Materie im gewöhnlichen eben denken.
>
> Manche älteren Philosophen würden, wenn ihnen der Fall vorgelegt werden könnte, sagen: eure neumodischen Atome bestehen überhaupt aus keinem Stoff, sie sind reine Form.«[33]

Ebenso wie das Denken Leibnizens auf allgemeinen Prinzipien des Verstandes aufgebaut ist, so ist Diracs Zugang zur Physik auf deren Prinzipien basiert. Durch dieses „Ernstnehmen" der Grundlagen, sowohl der philosophisch-metaphysischen bei Leibniz, als auch der formal-physikalischen bei Dirac, erhalten beide, auf ihre Theorien gestützt, einen Zugang zur Welt, der über die bloße „Anschauung" hinausreicht.
Was lernt man daraus über das Wesen des Elektrons? Schrödingers Schluß aus den Diracschen Ergebnissen und Leibniz' Folgerungen aus seinen Betrachtungen über *Ununterscheidbarkeit* führen auf ähnliche Ergebnisse: In der Form, wie wir Elektronen in unseren Theorien beschreiben sind sie *abstrakte Konzepte*. Ihnen Realität im klassisch anschaulichen Sinne zuzuschreiben, führt unweigerlich auf Schwierigkeiten unseres nicht durch Formalismus gestützten Verständnisses.

[33] Schrödinger 1950, [25]

Danksagung

Bei Herrn Prof. Dr. Walter G. Saltzer bedanke ich mich für zahlreiche auf die Leibniztexte bezogene Diskussionen, die meinem diesbezüglichen Verständnis weiterhalfen. Herrn Dipl.-Phys. Thorsten Gluth danke ich für seine stete Bereitschaft, sowohl die formalen, als auch die philosophischen Implikationen der Problematik zu diskutieren. Teile der Arbeit wurden während meiner Zeit als Stipendiat des Landes Hessen angefertigt.

Literatur

[1] Max Born, Pascual Jordan: Z. Physik **34** (1925), p.858

[2] Max Born, Werner Heisenberg, Pascual Jordan: Zur Quantenmechanik II, Z. Physik **35** (1926), p.557-615

[3] Paul A. M. Dirac: The Principles of Quantum Mechanics, 3$^{\text{rd}}$ Edition, Oxford 1947

[4] Paul A. M. Dirac: The Fundamental Equations of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. London A109 (1925) p.642

[5] Paul A. M. Dirac: On the Theory of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. London A112 (1926) p.661–677

[6] Paul A. M. Dirac: The Quantum Theory of the Electron I, Proc. Roy. Soc. London A117 (1928) p.610–624

[7] Paul A. M. Dirac: The Quantum Theory of the Electron II, Proc. Roy. Soc. London A118 (1928) p.351–361

[8] Enrico Fermi: Atti Accad. Lincei **3** (1926), p.145

[9] Enrico Fermi: Z. Physik **36** (1926), p.902

[10] Werner Heisenberg: Gesammelte Werke, W. Blum, H. P. Dürr, H. Rechenberg, (ed.), München 1984

[11] Werner Heisenberg: Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Z. Physik **33** (1925), p.879-893

[12] Werner Heisenberg: Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik, Z. Physik **38** (1926), p.411-426

[13] Helge S. Kragh: Dirac – A Scientific Biography, Cambridge 1990

[14] Helge S. Kragh: The Genesis of Dirac's Relativistic Theory of Electrons, Arch. Hist. of Exact Sciences, Vol. 24 (1981), p.31–67

[15] Helge S. Kragh: Erwin Schrödinger and the Wave Equation: The Crucial Phase, Centaurus 1982: Vol. 26, p.154–197

[16] Gottfried W. Leibniz: Mathematische Schriften, C. I. Gerhardt, (ed.), Hildesheim 1962

[17] Jagdish Mehra, Helmut Rechenberg: The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 4, Berlin/New York 1982

[18] Wolfgang Pauli: Z. Physik **31** (1925), p.765

[19] Wolfgang Pauli: The Connection Between Spin and Statistics, Phys. Rev. **58** (1940), p.716-722

[20] Abdus Salam, Eugene P. Wigner: Aspects of Quantummechanics, Cambridge 1972

[21] Erwin Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung), Ann. Physik **79** (1926), p.361–76

[22] Erwin Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung), Ann. Physik **79** (1926), p.489–527

[23] Erwin Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung), Ann. Physik **80** (1926), p.437–490

[24] Erwin Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung), Ann. Physik **81** (1926), p.109–139

[25] Erwin Schrödinger: Was ist ein Elementarteilchen?, Endeavour IX/35 (1950), sowie in [26]

[26] Erwin Schrödinger: Was ist ein Naturgesetz?, München 1987

[27] Hermann Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 2. unv. Aufl., München 1928

[28] Hermann Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 3. erw. Aufl., Darmstadt 1966

[29] Arthur S. Wightman: The Dirac Equation, in: [20]

[30] Eugene P. Wigner: Collected Works, A. Wightman, (ed.), Part A, Vol. I, Berlin/Heidelberg/New York 1993

[31] Eugene P. Wigner: On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz-group, Ann. of Mathematics **40** (1939) p.149, sowie p.334 in [30]