Kinderzeichnungen und Uniformisierungstheorie

Jürgen Wolfart
Mathematisches Seminar der J.W.Goethe–Universität,
Robert–Mayer–Str. 6–10, D–60054 Frankfurt a.M.
wolfart@math.uni-frankfurt.de

28. März 2001

Zusammenfassung: Es wird eine Einführung in den Satz von Belyi und Grothendiecks *Dessins d'enfants* gegeben, hier *Kinderzeichnungen* genannt. Dieses Arbeitsgebiet ist in den letzten zwanzig Jahren entstanden und weist viele reizvolle Querverbindungen auf von der inversen Galoistheorie über die Teichmüllerräume bis hin zur Mathematischen Physik. Das Schwergewicht des folgenden Beitrags liegt in den Beziehungen zu den Fuchsschen Gruppen und der Uniformisierungstheorie: Kinderzeichnungen bieten die Möglichkeit, für arithmetisch interessante Riemannsche Flächen — die als algebraische Kurven über Zahlkörpern definiert sind — Überlagerungsgruppen explizit zu beschreiben und umgekehrt aus gewissen Typen von Überlagerungsgruppen Kurvengleichungen zu gewinnen.
Was hier aufgeschrieben ist, behandelt eigentlich nur bekanntes Material, gelegentlich mit neuen Beweisvarianten und Beispielen. Da aber noch keine zusammenfassende Einführung in das Thema existiert, hoffe ich, dass es als Vorlage für ein Seminar oder eine fortgeschrittene Vorlesung nützlich sein mag.

Danksagung: Herrn F. Berg verdanke ich instruktive Serien von Beispielen, denen ich die Beispiele 4 und 4' entnommen habe; Herr B. Köck hat mich auf eine Beweislücke in einer alten Version [Wo1] von Satz 3 aufmerksam gemacht, und Herr M. Streit hat eine wichtige Idee dazu beigetragen, wie man diese Lücke füllen kann. Schließlich verdanke ich Herrn R. Remmert Aufklärung über die historischen Wurzeln des GAGA–Prinzips.

1 Kinderzeichnungen auf Riemannschen Flächen

1.1 Der Satz von Belyi

Dass nichtsinguläre algebraische Kurven in einem projektiven $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kompakte Riemannsche Flächen sind, gehört seit 1857, nämlich durch Riemanns Arbeit [R] über die abelschen Funktionen, zum Grundbestand der Funktionentheorie. Dass die Umkehrung ebenfalls richtig ist, dass also jede kompakte Riemannsche Fläche zu einer glatten projektiven algebraischen Kurve über $\mathbb{C}$ isomorph ist, hat Riemann gewusst, aber bis zu einem schlüssigen Beweis in einem angemessenen begrifflichen Rahmen war es noch ein weiter Weg: Immerhin handelt es sich um eine Äquivalenz von Kategorien, die man als einen Spezialfall des GAGA–Prinzips von Serre ansehen kann. Wir werden von dieser Äquivalenz im folgenden freien Gebrauch machen und z.B. holomorphe Abbildungen zwischen kompakten Riemannschen Flächen ohne weitere Vorwarnung als rationale Abbildungen zwischen projektiven algebraischen Kurven ansehen. In dieser Äquivalenz stecken allerdings auch einige neuere gelöste und ungelöste Probleme, und von diesen handelt der vorliegende Aufsatz.

Ein einfaches Grundproblem kann man folgendermaßen beschreiben. Kann man einer solchen Riemannschen Fläche X mit funktionentheoretischen Mitteln ansehen, ob sie als algebraische Kurve über einem Zahlkörper definiert ist? Damit ist gemeint, dass sie bei geeigneter Koordinatenwahl im $\mathbb{P}^n$ durch Gleichungen mit Koeffizienten in $\overline{\mathbb{Q}}$ definierbar ist oder anders gesagt, dass der Funktionenkörper von X sich schreiben lässt als $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C} \otimes_F F(X)$ für einen Funktionenkörper $F(X)$ mit Konstantenkörper $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ (natürlich möchte man den Zahlkörper F möglichst klein wählen, doch von diesen Feinheiten soll erst später die Rede sein). Seit 1979 ist zu dieser Frage eine erstaunlich einfache Antwort bekannt (Belyi [B1]).

Satz 1 *Sei K eine glatte algebraische Kurve im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*
A) K ist über einem Zahlkörper definiert.
B) Auf K existiert eine nichtkonstante meromorphe Funktion $\beta \in \mathbb{C}(K)$, die höchstens über drei Punkten verzweigt ist.

Solche Funktionen β, von denen hier die Rede ist, wollen wir im folgenden *Belyifunktionen* nennen. Durch eine Möbiustransformation kann man erreichen, dass die kritischen Werte von β gerade die Punkte $0, 1, \infty$ der Riemannschen Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}}$ sind oder, um in der Sprache der algebraischen Kurven zu bleiben, des $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. In der Regel werden wir diese Normalisierung vornehmen, also voraussetzen, dass die Verzweigungspunkte von Belyifunktionen in $\beta^{-1}\{0,1,\infty\}$ liegen. Auf den Beweis von Satz 1 werden wir noch zu sprechen kommen, zunächst soll von Beispielen die Rede sein.

1.2 Beispiele

Da der $\mathbb{P}^1$ über $\mathbb{Q}$ definiert ist, sollte man nach Theorem 1 dort Belyifunktionen finden können. In der Tat findet man dort viele Serien von Belyifunktionen, von denen hier nur drei erwähnt seien.

Beispiel 1. $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $\beta(z) := z^n$ für eine beliebige natürliche Zahl n. Das topologische Verhalten von β mache man sich am einfachsten durch Bestimmung des β–Urbilds des reellen Intervalls $[0,1]$ klar, wie es in Abbildung 1 am Beispiel $n = 6$ beschrieben ist.

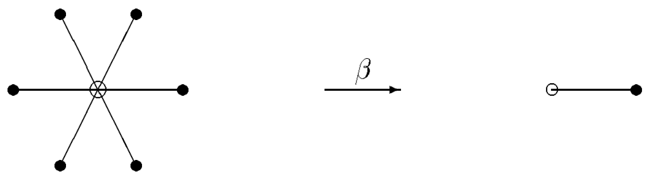

Abbildung 1: $[0,1]$–Urbild von $\beta(z) = z^6$

Beispiel 2. $\beta : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sei hier durch

$$\beta(z) \;:=\; T_n^2(z)$$

definiert, wobei T_n das durch $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ gegebene n–te Tschebyscheffpolynom ist. Schematisch sieht hier $\beta^{-1}[0,1]$ wie in Abbildung 2 aus, wobei die schwarzen Punkte die Urbilder $\cos k\pi/n$ von 1 und die weißen Punkte die Urbilder $\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ bezeichnen. Die Zeichnung ist insofern nicht maßstabsgetreu, als die schwarzen und weißen Punkte zu den Intervallenden ± 1 hin dichter liegen als hier gezeichnet; wir werden allerdings noch sehen (Proposition 1), dass es nur auf die topologische Struktur dieses Graphen und seiner Einbettung in die Fläche ankommt.

Abbildung 2: Schematisches $[0,1]$–Urbild von $\beta(z) = T_5^2(z)$

Beispiel 3. Als Belyifunktionen auf $\mathbb{P}^1$ treten natürlich nicht nur Polynome auf. Aus der Theorie der Modulfunktionen ist die Funktion

$$\beta(z) \;:=\; \frac{4}{27}\,\frac{(1-z+z^2)^3}{z^2\,(1-z)^2}$$

wohlbekannt, die dort die Beziehung zwischen der j–Funktion und der Legendrefunktion λ beschreibt. Abbildung 3 beschreibt wieder $\beta^{-1}[0,1]$. Verzweigungspunkte von β sind hier die doppelten Pole in $0, 1, \infty$, die beiden dreifachen Nullstellen in $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$ und die jeweils doppelten 1–Stellen in $-1, \frac{1}{2}, 2$.

An diesen einfachen Beispielen zeigen sich bereits Prinzipien, die sich ohne große Mühe auch für allgemeinere Belyifunktionen beweisen lassen:

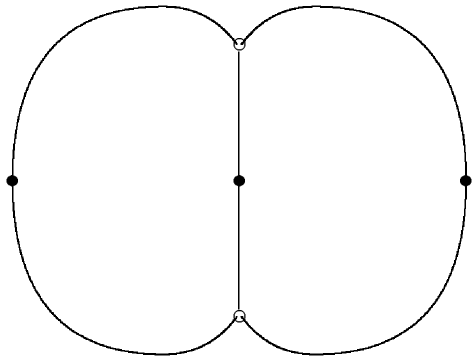

Abbildung 3: $[0,1]$–Urbild von β, Beispiel 3

1. $\beta^{-1}[0,1]$ ist ein zusammenhängender Graph auf der algebraischen Kurve K.
2. Werden die β–Urbilder von 0 als weiße, die β–Urbilder von 1 als schwarze Punkte des Graphen ausgezeichnet, so wird der Graph *bipartit*, d.h. jeder weiße Punkt ist nur zu schwarzen Punkten benachbart und umgekehrt. Kanten sind dann gerade die Zusammenhangskomponenten von $\beta^{-1}]0,1[$.
3. Die Valenzen des Graphen in den Eckpunkten sind genau die Verzweigungsordnungen der Belyifunktion über 0 bzw. 1.
4. Der Graph zerlegt K in offene, einfach zusammenhängende Zellen. Jede dieser Zellen enthält (als „Mittelpunkt") genau einen Pol von β, und die Polordnung m (= Verzweigungsordnung) von β lässt sich an der Valenz $2m$ der Zelle ablesen, d.h. die betreffende Zelle wird von $2m$ Kanten, m weißen und m schwarzen Punkten berandet. Wenn — wie in den Beispielen 1 und 2 — die Kanten auf beiden Seiten an die gleiche Zelle angrenzen, sind sie dabei doppelt zu zählen.

Zur Illustration seien zwei Beispiele für Belyifunktionen auf elliptischen Kurven angefügt.

Beispiel 4. (F. Berg) K sei durch die affine Gleichung

$$y^2 = (x-1)(x+1)(x - \cos\frac{\pi}{10})$$

beschrieben. Dann ist eine Belyifunktion auf K durch $\beta(x,y) = T_5^2(x)$ gegeben, wo T_5 das bereits in Beispiel 2 benutzte Tschebyscheffpolynom ist. Das Verzweigungsverhalten von β mache man sich an Hand der Zusammensetzung der Abbildung

$$(x,y) \mapsto x \mapsto T_5^2(x)$$

klar: Die erste Abbildung ist von Ordnung 2 verzweigt über den Punkten $x = \infty, 1, -1$ und $\cos\frac{\pi}{10}$, und für die zweite Abbildung kann man wieder Beispiel 2 zu Rate ziehen. Der bipartite Graph $\beta^{-1}[0,1]$ hat dann die in Abbildung 4 angegebene Gestalt auf dem Torus K.

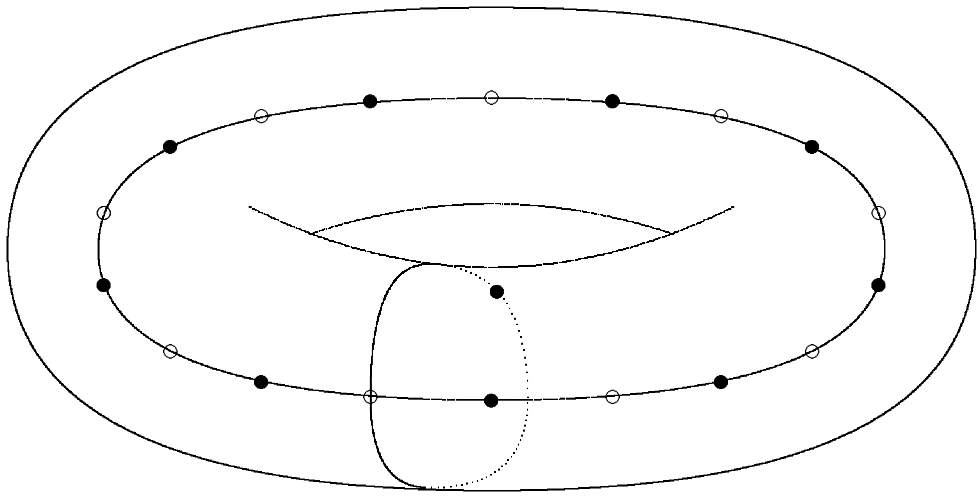

Abbildung 4: $[0,1]$–Urbild von $\beta(x,y) = T_5^2(x)$ auf $y^2 = (x-1)(x+1)(x - \cos\frac{\pi}{10})$

Schneidet man den Torus längs der Kanten auf, so läßt er sich in der in der euklidischen (oder Gaußschen) Zahlenebene realisieren als Fundamentalbereich der universellen Überlagerungsgruppe, hier also eines Translationsgitters. In diesem Bild sieht der bipartite Graph schematisch wie in Abbildung 5 aus, wobei jeweils die gegenüberliegenden Seiten zu identifizieren sind, um wieder einen Graphen auf einem Torus zu erhalten. Außer der vierfachen Nullstelle im Punkt

$$(x,y) = (\cos\frac{\pi}{10}, 0)$$

gibt es hier also nur doppelte Null– und Einsstellen sowie einen Pol der Ordnung 20.

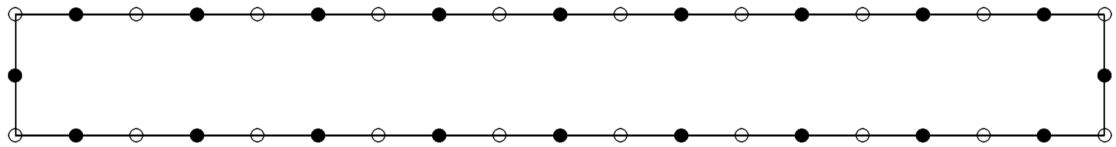

Abbildung 5: $[0,1]$–Urbild von $\beta(x,y) = T_5^2(x)$ auf $y^2 = (x-1)(x+1)(x - \cos\frac{\pi}{10})$

Beispiel 5. Auf der elliptischen Kurve K mit der affinen Gleichung

$$y^2 = x(x-1)(x - \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$$

(reelle Wahl der dritten Wurzel) ist $\beta(x,y) = 4x^3(1-x^3)$ eine Belyifunktion. Das Verzweigungsverhalten studiert man am besten durch Zusammensetzung von β aus den Abbildungen

$$(x,y) \mapsto x \mapsto x^3 \mapsto 4x^3(1-x^3)\ .$$

Bestimmt man das Urbild des reellen $[0,1]$–Intervalls, indem man diese Abbildungen schrittweise zurückverfolgt, so ergibt sich ein bipartiter Graph homöomorph zur Abbildung 6 (wieder sind gegenüberliegende Ränder zu identifizieren). Beispielsweise sind die Nullstelle der Ordnung 6 und die 1–Stelle der Ordnung 4 die Punkte

$$(x,y) \;=\; (0,0) \qquad \text{bzw.} \qquad (\frac{1}{\sqrt[3]{2}},0)\,.$$

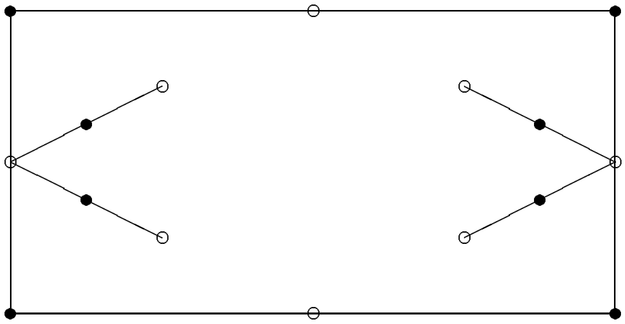

Abbildung 6: $\beta^{-1}[0,1]$ auf dem Torus aus Beispiel 5

1.3 Kinderzeichnungen

Die Struktur der so auftretenden bipartiten Graphen ist so einfach und, wie wir noch sehen werden, ihre Bedeutung für die Kurve K so groß, dass man nach einem Vorschlag Grothendiecks [G] den folgenden Begriff einführt.

Definition. Sei M eine orientierte kompakte 2–Mannigfaltigkeit und D ein bipartiter zusammenhängender Graph auf M mit der Eigenschaft, dass $M-D$ disjunkte Vereinigung einfach zusammenhängender offener Mengen ist. Dann heißt D eine *Kinderzeichnung (Dessin d'enfant)* auf M.

Grothendieck hatte den Begriff eigentlich für eine noch einfachere Klasse von Belyifunktionen und Graphen eingeführt: Wenn β in allen Urbildern der 1 die Verzweigungsordnung 2 besitzt, der Graph also in den schwarzen Eckpunkten generell die Valenz 2 hat, kann man auf diese schwarzen Eckpunkte überhaupt verzichten und kann gewöhnliche zusammenhängende Graphen D auf M betrachten, die M in einfach zusammenhängende Zellen zerlegen. Man nennt dann β eine *saubere* Belyifunktion und entsprechend das Dessin *sauber (clean)*, manchmal auch ein *map* auf der orientierten Mannigfaltigkeit. Diese Vereinfachung kann man immer dadurch erzwingen, dass man β durch $4\beta(1-\beta)$ ersetzt. Da diese Vereinfachung aber auch Nachteile hat wie z.B. die Erhöhung des Grades, wollen wir sie nicht weiter benutzen.
Auch die hier verwendete Version von Kinderzeichnungen als bipartite Graphen hat Schattenseiten, z.B. dass die natürliche Gleichberechtigung der drei Arten von Verzweigungspunkten verschleiert wird: β lässt sich problemlos durch $1-\beta$ oder β^{-1} u.s.w. ersetzen, man kann

also weiße und schwarze Eckpunkte und Zellmittelpunkte permutieren. Diese Gleichberechtigung wird weit besser durch die Sprechweise der *hypermaps* wiedergegeben (vgl. [JS2], [JS3]), die jedoch das Zeichnen der Dessins mühsamer macht. Da noch keine zusammenfassende Monographie zum Thema existiert und sich Mathematiker (und Physiker) sehr unterschiedlicher Herkunft damit befassen, sind überhaupt eine Reihe verschiedener Terminologien im Umlauf. Um Verwirrung zu vermeiden, werde ich mich bis auf die obenstehenden Bemerkungen auf die hier eingeführte Sprechweise beschränken.
Warum ist in der Definition nicht mehr von Riemannschen Flächen, sondern nur noch von orientierten 2–Mannigfaltigkeiten die Rede? Die Erklärung gibt die folgende erstaunliche Aussage, zuerst von Grothendieck [G] formuliert, aber im wesentlichen bereits vorher durch Jones und Singerman [JS1] bzw. Malgoire und Voisin [MV] bewiesen.

Proposition 1 *Sei M eine kompakte orientierte 2–Mannigfaltigkeit mit Kinderzeichnung D. Dann existiert auf M eine eindeutig bestimmte konforme Struktur und eine Belyifunktion β so, dass $D = \beta^{-1}[0,1]$ der zu β gehörige bipartite Graph wird.*

Nach Satz 1 ist M also nicht nur Riemannsche Fläche, sondern sogar eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte glatte projektive algebraische Kurve. Eine Beweisidee werden wir in dem Abschnitt über Uniformisierung nachliefern. Für diesen Teil der Arbeit sind zwei Ergänzungen der Definition wichtig.

Definition. Die Kinderzeichnung D auf der 2–Mannigfaltigkeit M heißt *uniform*, wenn alle weißen Eckpunkte, alle schwarzen Eckpunkte, alle Zellen die gleiche Valenz p bzw. q bzw. $2r$ besitzen. D heißt *regulär*, wenn die Automorphismengruppe von D kantentransitiv operiert. Unter *Automorphismus* von D ist dabei die Restriktion eines orientierungserhaltenden Homöomorphismus von M auf sich zu verstehen, der die Farben der Eckpunkte invariant läßt.

Man überlege sich, dass die oben vorgestellten Beispiele 1 und 3 reguläre Kinderzeichnungen sind. Zur Definition noch einige Erläuterungen: Jeder Automorphismus der Kinderzeichnung ist also ein Graph–Automorphismus von D, die Umkehrung ist aber in der Regel nicht richtig. Reguläre Kinderzeichnungen sind uniform, im allgemeinen aber nicht umgekehrt (für Geschlecht 2 gibt es genau 11 nicht–isomorphe reguläre, aber — nach R. Syddall und C. Mclachlan — 155 verschiedene uniforme Dessins). Proposition 1 läßt sich dahingehend ergänzen, dass jeder Automorphismus von D sogar Restriktion eines Automorphismus der konformen Struktur von M ist und dass zu regulären Kinderzeichnungen genau solche Belyifunktionen gehören, welche normale — natürlich verzweigte — Überlagerungen $\beta : M \to \mathbb{P}^1$ definieren, vergleiche Lemma 4. Man kann sogar zeigen, dass für Riemannsche Flächen M vom Geschlecht $g > 1$ stets eine Kinderzeichnung existiert, welche $\operatorname{Aut} M$ als Automorphismengruppe besitzt.

1.4 Beweis von A) $\Rightarrow$ B)

Lemma 1 *Sei K eine Riemannsche Fläche, $f : K \to \overline{\mathbb{C}}$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion, W die Menge ihrer kritischen Werte, also die Bilder ihrer Verzweigungspunkte, g :*

$\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ *eine nichtkonstante rationale Funktion mit kritischen Werten in der Menge* V *. Dann sind die kritischen Werte der Funktion* $g \circ f$ *in* $V \cup g(W)$ *enthalten.*

Der Beweis dieses Lemmas ist evident. Es wird folgendermaßen eingesetzt: Auf einer Kurve, die über einem Zahlkörper F definiert ist, nehme man eine über F definierte rationale Funktion f und überlege sich, dass die kritischen Werte von f aus endlich vielen algebraischen Zahlen und eventuell dem Punkt ∞ bestehen. Nun wähle man das über $\mathbb{Q}$ definierte Minimalpolynom g dieser endlich vielen algebraischen Zahlen; g besitze den Grad m. Die kritischen Werte von $g \circ f$ sind dann $0, \infty$ und höchstens $m-1$ algebraische Zahlen vom Grad $\leq m-1$. Als g–Bilder der Nullstellen von $g' \in \mathbb{Q}[x]$ ist diese Menge kritischer Werte sogar invariant unter algebraischen Konjugationen, daher hat ihr über $\mathbb{Q}$ definiertes Minimalpolynom ebenfalls einen Grad $\leq m-1$. Der Prozess lässt sich also iterieren, um den Grad der kritischen Werte zu vermindern, und führt zu

Lemma 2 *Sei die algebraische Kurve* K *über einem Zahlkörper definiert. Dann existiert auf* K *eine rationale Funktion, deren kritische Werte in* $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ *liegen.*

Für den nun folgenden Beweisschritt findet sich bei Belyi [B1] eine erneute Induktion, die in praktischen Beispielen zu sehr komplizierten Belyifunktionen führen kann und außerdem den Nachteil hat, in endlicher Charakteristik nicht zu funktionieren. Es gibt für diesen Teil des Beweises jedoch Alternativen wie etwa [B2]; ich folge hier einer solchen Idee von Leonardo Zapponi [Z2]; sie beruht auf einer einfachen Identität zwischen rationalen Funktionen.

Lemma 3 *Seien* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}$ *paarweise verschieden und*

$$y_i \;:=\; \Big(\prod_{j\neq i} (r_i - r_j)\,\Big)^{-1} .$$

Dann gilt

$$\sum_i \frac{y_i}{x - r_i} \;=\; \frac{1}{\prod_i (x - r_i)} .$$

Beweis. Man betrachte die Polynome $p(x) = \prod_i (x - r_i)$ und

$$q(x) \;=\; p(x) \sum_i \frac{y_i}{x - r_i} \;=\; \sum_i y_i \prod_{j\neq i} (x - r_j) \;\in\; \mathbb{Q}[x] .$$

Dann gilt $\mathrm{grad}(q) \leq n-1$ und $q(r_1) = \ldots = q(r_n) = 1$, also $q(x) = 1$.

Zum Beweis des Teils $A) \Rightarrow B)$ von Satz 1 dürfen wir nach Lemma 2 davon ausgehen, dass auf der Kurve K eine meromorphe Funktion f existiert, die höchstens die kritischen Werte ∞

und $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ besitzt. Sei N ein kleinster gemeinsamer Nenner für die y_i, die in Lemma 3 eingeführt wurden, also alle $a_i := N y_i \in \mathbb{Z}$. Die rationale Funktion

$$g(x) := \prod_i (x - r_i)^{a_i} \in \mathbb{Q}(x)$$

ist wegen Lemma 3, nämlich wegen

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \sum_i \frac{a_i}{x - r_i} = \sum_i \frac{N y_i}{x - r_i} = \frac{N}{\prod_i (x - r_i)}$$

höchstens in ∞ und den r_i verzweigt. Nach Lemma 1 sind die kritischen Werte von $g \circ f$ also höchstens $0, \infty, g(\infty)$.

2 Uniformisierung

2.1 Überlagerungsgruppen und Arithmetik

Als Haupsatz der Uniformisierungstheorie wird meistens der verallgemeinerte Riemannsche Abbildungssatz bezeichnet, dass nämlich jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche biholomorph äquivalent ist zu $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder der Einheitskreisscheibe E, die wir ebenso durch die obere Halbebene $\mathcal{H}$ ersetzen dürfen. Da die universelle Überlagerung U einer Riemannschen Fäche K nach Konstruktion die Struktur einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Fläche hat, heißt das, dass wir K als Quotientenraum $\Gamma \backslash U$ schreiben können, wobei Γ die — diskontinuierlich und torsionsfrei auf U operierende — Überlagerungsgruppe von K ist. Im Falle $U = \overline{\mathbb{C}}$ ist Γ trivial, für kompakte Riemannsche Flächen vom Geschlecht 1, also elliptische Kurven, ist $U = \mathbb{C}$ und Γ die Translationsgruppe des Periodengitters, und für kompakte Riemannsche Flächen höheren Geschlechts ist $U = \mathcal{H}$ und $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ eine cokompakte torsionsfreie Fuchssche Gruppe. Wir werden im folgenden dabei häufig auf die Voraussetzung „torsionsfrei" verzichten, also verzweigte Überlagerungen durch die obere Halbebene ebenfalls zulassen.

Die Uniformisierungstheorie Riemannscher Flächen hat den Vorzug, die Funktionentheorie wieder auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet zurückzuführen. Der Nachteil ist, dass sie wenig explizit ist: In der Regel ist es aussichtslos, für eine Kurve vom Geschlecht $g > 1$ die Überlagerungsgruppe etwa durch präzise Angabe ihrer Erzeugenden in Form von Matrizen angeben zu wollen oder umgekehrt für eine in Matrixform gegebene Fuchssche Gruppe Γ ein Modell für die projektive algebraische Kurve $K \cong \Gamma \backslash \mathcal{H}$ in Form von definierenden Gleichungen zu bestimmen. In Spezialfällen wie der Kleinschen Quartik, die in der Entwicklung der Uniformisierungstheorie eine große Rolle gespielt haben, kann man beide Aufgaben lösen. Warum man hier in einer besseren Lage ist, lässt sich aber eigentlich erst mit Hilfe des Satzes von Belyi verstehen. Bevor dieser in einer anderen Version vorgestellt wird, sei noch auf eine damit zusammenhängende arithmetische Frage an die Uniformisierungstheorie glatter projektiver algebraischer K vom Geschlecht $g > 1$ hingewiesen: *In welchen Fällen ist gleichzeitig K über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert und die Überlagerungsgruppe Γ (zumindest nach Konjugation in* $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ *) in* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}\cap\overline{\mathbb{Q}})$ *enthalten?* Die Gebrüder Chudnovsky ([Chu], Section 7) haben hierzu eine sehr allgemeine Vermutung, die in dem hier geschilderten Spezialfall die Antwort geben würde: Es handelt sich genau um die Fälle, in denen Γ arithmetische Fuchssche Gruppe oder Untergruppe einer Dreiecksgruppe ist. Dreiecksgruppen werden wir gleich definieren, und zum Begriff „arithmetische Fuchssche Gruppe" vergleiche etwa [Bo] oder [Ka]. Dreiecksgruppen haben übrigens noch mehr als diese hypothetische Eigenschaft mit den arithmetischen Gruppen gemein, man vergleiche dazu etwa [CoWo].

Zur Illustration, warum diese Fragestellung interessant ist, sei kurz auf den Fall der elliptischen Kurven hingewiesen: Dort ist K über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert und gleichzeitig die Überlagerungsgruppe, hier also das Periodengitter $\Gamma \subset \mathbb{C}$, in $\overline{\mathbb{Q}}$ wählbar genau dann, wenn K komplexe Multiplikation besitzt (Th. Schneider [Schn]).

2.2 Dreiecksgruppen

Seien p, q, r natürliche Zahlen mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 ,$$

dazu ein hyperbolisches Dreieck in $\mathcal{H}$ mit Eckpunkten P, Q, R und Winkeln π/p, π/q, π/r, eindeutig bestimmt bis auf Orientierung und hyperbolische Bewegungen durch die Vorgabe dieser Winkel. (Bei Winkelsumme $= \pi$ bzw. $> \pi$ erhält man entsprechend euklidische bzw. sphärische Dreiecke und kann so euklidische bzw. sphärische Dreiecksgruppen auf $\mathbb{C}$ bzw. $\overline{\mathbb{C}}$ definieren.) Seien γ_0, γ_1, γ_∞ hyperbolische, positiv orientierte Drehungen jeweils um die Punkte P, Q, R mit Drehwinkeln $2\pi/p$, $2\pi/q$, $2\pi/r$. Dann erzeugen diese eine *Dreiecksgruppe* Δ mit der Präsentation

$$< \gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty \mid \gamma_0^p = \gamma_1^q = \gamma_\infty^r = \gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1 > \ .$$

Diese operiert diskontinuierlich auf der oberen Halbebene. Ein Fundamentalbereich von Δ besteht aus der Vereinigung des Dreiecks PQR mit einem an einer beliebigen Seite hyperbolisch gespiegelten Dreieck wie z.B. $P'QR$ in Abbildung 7 (Zeichnung in der Einheitskreisscheibe E anstelle von $\mathcal{H}$, o.B.d.A. ist R als Mittelpunkt von E gewählt).

Die Gruppe Δ ist bis auf $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$–Konjugation durch p, q, r eindeutig bestimmt und wird darum häufig einfach durch ihre *Signatur* $< p, q, r >$ bezeichnet. Man kann auch Dreiecksgruppen zulassen, bei denen z.B. P oder andere Eckpunkte des Fundamentalbereichs auf dem Rand der oberen Halbebene liegen, dann als *Spitze* mit Winkel 0. Man setzt dann z.B. $p = \infty$, streicht die Relation $\gamma_0^p = 1$ aus der Präsentation — γ_0 wird dann ein parabolisches Element mit Fixpunkt P — und verfährt ähnlich wie im Fall $p \in \mathbb{N}$. Man beachte, dass der Quotientenraum $\Delta\backslash\mathcal{H}$ dann nicht mehr kompakt ist und für manche Zwecke kompaktifiziert werden muss. Aus diesem

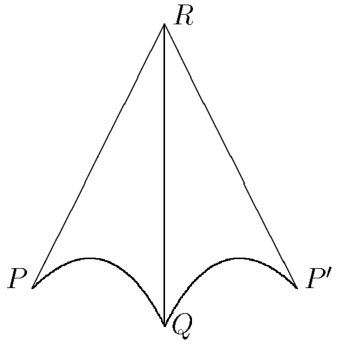

Abbildung 7: Fundamentalbereich einer Dreiecksgruppe im Einheitskreis mit Nullpunkt R, Signatur $< 12, 6, 6 >$

Grund werden wir uns im folgenden auf die *cokompakten* Dreiecksgruppen, also jene ohne Spitzen beschränken.

Wir werden eine klassische Aussage über diesen Quotientenraum benutzen, dass nämlich eine Isomorphie

$$\Delta\backslash\mathcal{H} \;\cong\; \overline{\mathbb{C}}$$

durch die zur Gruppe Δ gehörige j–Funktion vermittelt wird. Diese kann man etwa mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes definieren als biholomorphe Abbildung des offenen Dreiecks PQR auf die obere Halbebene, normalisiert durch die Vorschrift, daß die Ecken P, Q, R jeweils auf $0, 1, \infty$ abgebildet werden. Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip erlaubt es dann, j über die Dreiecksseiten hinaus fortzusetzen und durch sukzessive Spiegelung an den Rändern der Δ–Bilder des Fundamentalbereichs schließlich meromorph auf ganz $\mathcal{H}$ auszudehnen. Dabei ist j eine offensichtlich Δ–automorphe Funktion, d.h. erfüllt

$$j(\gamma z) \;=\; j(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathcal{H}\,,\; \gamma \in \Delta\,,$$

außerdem ist sie überall lokal biholomorph mit Ausnahme der Δ–Bilder von P, Q, R, wo jeweils p–fache Nullstellen, q–fache 1–Stellen bzw. r–fache Pole vorliegen. Die Randstrecken des Dreiecks und alle ihre Δ–Bilder sind dabei genau die j–Urbilder von $\overline{\mathbb{R}}$. Eine andere Möglichkeit, j zu definieren, bietet die hypergeometrische Differentialgleichung mit der Monodromiegruppe Δ: Der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung ist die Schwarzsche Dreiecksfunktion, die bei richtiger Normierung die obere Halbebene biholomorph auf das offene Dreieck PQR abbildet. Dann ist j die Umkehrfunktion. Mit Hilfe dieser Funktion j lässt sich jetzt die folgende nützliche Variante des Satzes von Belyi herstellen (zuerst publiziert in [CoWo], [CIW]).

2.3 Belyifunktionen und Uniformisierung

Satz 2 *Sei K eine glatte algebraische Kurve im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Dann sind die folgenden Aussagen*

äquivalent.
B) Auf K existiert eine nichtkonstante meromorphe Funktion $\beta \in \mathbb{C}(K)$, die höchstens über drei Punkten verzweigt ist.
C) Es gibt eine Untergruppe Γ von endlichem Index in einer Dreiecksgruppe Δ so, dass $K \cong \Gamma\backslash\mathcal{H}$.

Beweis von C) $\Rightarrow$ B). Eine Belyifunktion auf K erhält man durch

$$\Gamma\backslash\mathcal{H} \;\to\; \Delta\backslash\mathcal{H} \;\to\; \overline{\mathbb{C}}\;: \quad \Gamma z \;\mapsto\; j(z)\;.$$

Für $\Delta = < p, q, r >$ sind die Verzweigungsordnungen dieser Funktion über $0, 1, \infty$ offenbar jeweils Teiler von p, q, r .

Beweis von B) $\Rightarrow$ C). Nun sei eine Belyifunktion β auf K gegeben, deren Verzweigungsordnungen über $0, 1, \infty$ Teiler sind der natürlichen Zahlen p, q bzw. r (die Summe der Inversen sei o.B.d.A. < 1). Sei $\Delta = < p, q, r >$ die zugehörige Dreiecksgruppe mit der oben eingeführten j–Funktion. Außerhalb der Verzweigungspunkte ist β lokal biholomorph, es existiert also in einem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\overline{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$ ein holomorpher Zweig von β^{-1} . Dieser ist zwar nicht auf $\overline{\mathbb{C}}$ über die Singularitäten $0, 1, \infty$ holomorph fortsetzbar, wohl aber die Zusammensetzung $\beta^{-1} \circ j$ auf $\mathcal{H}$, da die Multiplizität der Werte von j in den Singularitäten von β^{-1} Vielfache der jeweiligen Verzweigungsordnungen sind. Mit Hilfe des Monodromiesatzes lässt sich $\beta^{-1} \circ j$ sogar global als holomorphe Überlagerungsabbildung $\mathcal{H} \to K$ definieren, deren Überlagerungsgruppe Γ nach Konstruktion in Δ enthalten sein muss. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Die so konstruierte Überlagerungsabbildung ist nur dann unverzweigt, wenn p, q, r in jedem Verzweigungspunkt von β die *genaue* Verzweigungsordnung über jeweils $0, 1, \infty$ sind. Wählt man im Beweis dann $\Delta = < p, q, r >$, so erhält man für Γ gerade die universelle Überlagerungsgruppe von K . Die Konsequenz für das oben geschilderte Problem der Uniformisierungstheorie lässt sich in der Sprache der Dessins also so formulieren:

Proposition 2 *Die universelle Überlagerungsgruppe Γ einer glatten algebraische Kurve K im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ vom Geschlecht $g > 1$ ist genau dann in einer Dreiecksgruppe enthalten, wenn zu K eine uniforme Kinderzeichnung gehört.*

Diese Proposition bleibt entsprechend auch für Geschlecht 1 und 0 richtig: Man beachte, dass für $g = 1$ als Valenztripel uniformer Dessins nur die Signaturen der euklidischen Dreiecksgruppen

$$< 3, 3, 3 > \;,\; < 2, 3, 6 > \;,\; < 2, 4, 4 >$$

auftreten können (zu den zugehörigen K vergleiche [SSy]), und dass für $g = 0$ zu uniformen Kinderzeichnungen die bekannten sphärischen Dreiecksgruppen gehören, die bereits von H.A. Schwarz als Monodromiegruppen der algebraischen hypergeometrischen Funktionen klassifiziert wurden.

2.4 Ein Beispiel

Es wurde bereits erwähnt, dass reguläre Dessins uniform sind. Solche erhält man aus Satz 2 durch die Verwendung torsionsfreier Normalteiler Γ von Δ, da dann die Faktorgruppe $G := \Delta/\Gamma$ als Gruppe biholomorpher Automorphismen auf dem Quotientenraum $K = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ operiert und dabei die Parkettierung von K in sich überführt, die durch die Δ–Fundamentalbereiche auf K induziert wird. Normalteiler von Δ bekommt man natürlich als Kerne von Homomorphismen

$$h : \Delta \to G ,$$

und die Bedingung „torsionsfrei" ist genau dann erfüllt, wenn die Erzeugenden von Δ auf Elemente der gleichen Ordnung abgebildet werden: Aus der Theorie der Fuchsschen Gruppen folgt, dass jedes Element endlicher Ordnung in Δ (also auch in Γ) konjugiert ist zu einer Potenz eines der Erzeugenden $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$. Wenn diese also durch h auf Elemente gleicher Ordnung abgebildet werden, können nur die trivialen Potenzen der Erzeugenden auf 1 abgebildet werden, Γ ist also torsionsfrei. Die Umkehrung folgt entsprechend. Als Anwendung dieser Überlegung betrachten wir

Beispiel 6. Sei h der Homomorphismus von $< 2, 8, 8 >$ auf $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, der durch

$$h(\gamma_0) = 4 , \ h(\gamma_1) = 3 , \ h(\gamma_\infty) = 1$$

definiert ist (die rechten Seiten sind jeweils $\bmod 8$ zu lesen). Dann muss für den Kern Γ von h die Riemannsche Fläche $K = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ das Geschlecht 2 haben, wie man etwa mit Hilfe der Riemann–Hurwitz–Formel oder über eine Berechnung der Fundamentalbereichsvolumina von Δ und Γ einsehen kann. Abbildung 8 gibt einen Fundamentalbereich von Γ wieder (Zeichnung in der Einheitskreisscheibe, der Mittelpunkt ist gleichzeitig der Mittelpunkt R des Fundamentalbereichs) der sich natürlich aus $8 = \operatorname{ord} G$ Fundamentalbereichen von Δ zusammensetzt; diese findet man als die hyperbolischen Vierecke $P_iQP_{i+1}R$, wo $i \bmod 4$ zu lesen ist. Die Buchstaben zeigen an, wie Randkanten und Eckpunkte zu identifizieren sind, um zum Quotienten K überzugehen; die Eulersche Polyederformel liefert hier eine weitere Möglichkeit, $g = 2$ einzusehen.

Der Rand des Polygons wird dabei nach den oben beschriebenen Ideen die zugehörige Kinderzeichnung, hier mit 4 weißen und einem schwarzen Eckpunkt, acht Kanten und einer Zelle. Man beachte, dass die Kanten wieder doppelt zu zählen sind, da sie auf beiden Seiten an die einzige Zelle angrenzen. Die Operation der Automorphismengruppe G von K ist an dem Fundamentalbereichsbild in Abbildung 8 leicht zu erkennen: Es sind die Drehungen um den (Zell–) Mittelpunkt (hier in den Mittelpunkt des Einheitskreises gelegt) mit Winkeln $2\pi k/8,\ k \in \mathbb{Z}$. Als Fixpunkt tritt außerdem noch *der* schwarze Eckpunkt Q des Dessins auf, als Fixpunkt des Automorphismus der Ordnung 2 (= Drehung um π) sogar noch alle vier weißen Eckpunkte P_i. Da eine Kinderzeichnung die konforme und sogar die algebraische Struktur seiner Kurve eindeutig bestimmt, sollte es stets möglich sein, zumindest Gleichungen für K und die zugehörige Belyifunktion zu bestimmen. Dies ist prinzipiell möglich, aber nicht leicht (vgl. [Bi], [Sn2],

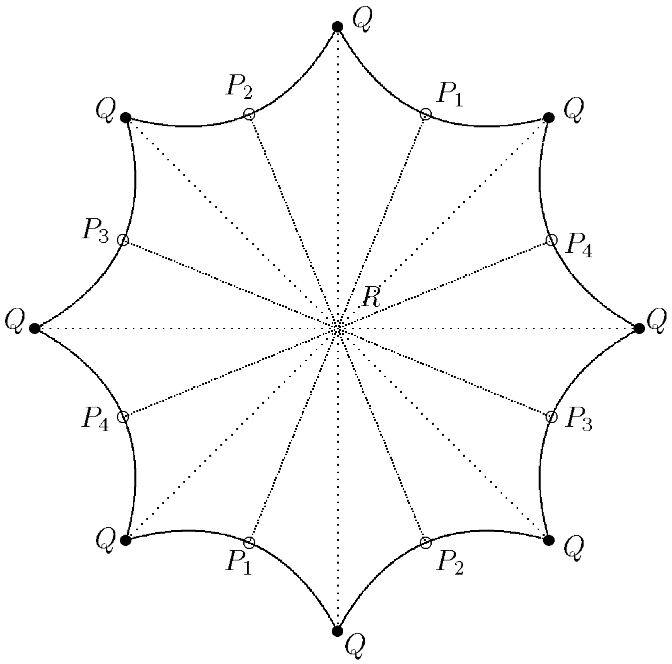

Abbildung 8: Fundamentalbereich von Γ aus Beispiel 6, gezeichnet im Einheitskreis

[St]). In einfachen Fällen wie im vorliegenden Beispiel führt geschicktes Raten zum Ziel: β ist vom Grad 8 und über 1 und ∞ mit Ordnung 8 verzweigt und hat vier doppelte Nullstellen. Außerdem stellt man leicht fest, dass der Quotient $Z_2\backslash K$ von K nach der eindeutig bestimmten Untergruppe der Ordnung 2 in G die Riemannsche Zahlenkugel ist, immer noch mit einem regulären Dessin mit den Valenzen $1, 4, 4$ und zyklischer Automorphismengruppe der Ordnung 4. Wie man leicht sieht, ist $x^4 + 1$ für dieses Dessin eine Belyifunktion. Nun ist einfach noch dafür zu sorgen, dass K eine zweiblättrige Überlagerung des $\mathbb{P}^1$ ist, verzweigt über den Stellen, an denen $x^4 + 1 = 0,\, 1,\, \infty$ ist. Das Ergebnis ist

$$K \;:\; y^2 \;=\; x(x^4+1) \quad , \quad \beta \;:\; (x,y) \mapsto x^4+1\;,$$

und G wird erzeugt von

$$(x,y) \;\mapsto\; (ix\,,\,e^{\pi i/4}y)\;.$$

G ist übrigens nicht *die* Automorphismengruppe von K, denn Γ ist sogar Normalteiler in der Dreiecksgruppe $< 2, 3, 8 >$, welche $< 2, 8, 8 >$ mit Index 6 enthält. Man kann in der Tat den Fundamentalbereich von Γ mit 48 Fundamentalbereichen von $< 2, 3, 8 >$ pflastern, so dass K dadurch eine Automorphismengruppe der Ordnung 48 erhält, isomorph zu $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{F}_3$ (vgl. [Wo2] und die dort angegebene Literatur).

2.5 Die Konstruktion der konformen Struktur

Wir kommen nun zur Beschreibung von zwei möglichen Beweisideen der Proposition 1, wie man also einem Dessin auf einer orientierten kompakten 2–Mannigfaltigkeit eine konforme Struktur zuordnen kann. Wir erläutern diese Ideen anhand von

Beispiel 7. *D* sei eine Kinderzeichnung auf einem Torus mit einer Zelle, 5 Kanten und je zwei weißen und schwarzen Eckpunkten der Valenzen 1 und 4 . Bis auf Isomorphie (also orientierungserhaltende Homöomorphismen der Tori, welche die Farbe der Ecken invariant lassen) gibt es drei solche Kinderzeichnungen. Wir legen uns auf jene Möglichkeit fest, die in Abbildung 9 angegeben ist — gezeichnet wieder in der Ebene anstatt auf dem Torus; gegenüberliegende Kanten sind zu identifizieren, um zum Torus überzugehen. Die Identifizierungen sind auch durch die Nummerierung von Kanten und Punkten angedeutet.

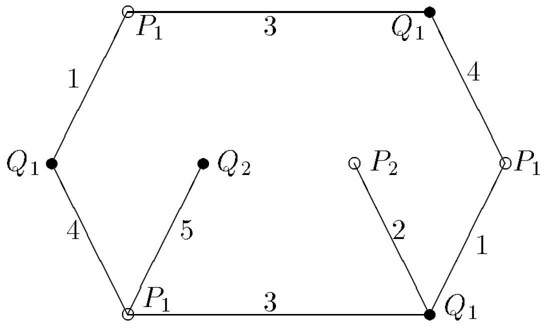

Abbildung 9: Kinderzeichnung auf einem Torus, Beispiel 7

Wenn es eine konforme Struktur auf dem Torus gibt mit einer Belyifunktion, deren zugehörige Kinderzeichnung diese Gestalt hat, dann muss nach dem Beweis von Satz 2 die Mannigfaltigkeit von der Form $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ sein, wo Γ eine Untergruppe der Dreiecksgruppe $\Delta = < p, q, r > = < 4, 4, 5 >$ ist (dabei könnte man 4 bzw. 5 auch durch Vielfache ersetzen), die Belyifunktion wäre von der Form

$$\Gamma\backslash\mathcal{H} \;\to\; \Delta\backslash\mathcal{H} \;\to\; \overline{\mathbb{C}} \;:\quad \Gamma z \;\mapsto\; j(z)\;,$$

und das Dessin müsste man auf der Mannigfaltigkeit $\Gamma\backslash\mathcal{H}$, die natürlich eine eindeutig bestimmte komplexe Struktur besitzt, wiedererkennen können als Teil jenes Dreiecksnetzes, das der Fundamentalbereich von Δ und alle seine Δ–Bilder in der hyperbolischen Ebene definieren, projiziert vermöge

$$\mathcal{H} \;\to\; \Gamma\backslash\mathcal{H} \;:\; z \;\mapsto\; \Gamma z\;.$$

Wie findet man die Untergruppe Γ von Δ ? In Abänderung einer Idee von Shabat und Voevodsky [SV1] zerschneide man die Mannigfaltigkeit solange längs der Kanten des Dessins, bis man ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet erhalten hat; dieser Schnitt muss insbesondere alle Eckpunkte treffen, deren Valenzen echte Teiler von p bzw. q sind, hier ist also auch längs der Kanten 2 und 5 zu den Punkten P_2 und Q_2 aufzuschneiden. Jede Schnittkante (in unserem Beispiel alle fünf Kanten) tritt also zweimal als Randkante des entstehenden Gebietes auf. Nun deformiere man das Gebiet homöomorph so, dass es in das durch Δ auf $\mathcal{H}$ definierte Dreiecksnetz passt; insbesondere sollen alle Kanten in hyperbolische Strecken zwischen Fixpunkten von Δ der Ordnungen p bzw. q übergehen. Man überzeuge sich an Hand der folgenden Abbildung, dass dieses Programm durchführbar ist.

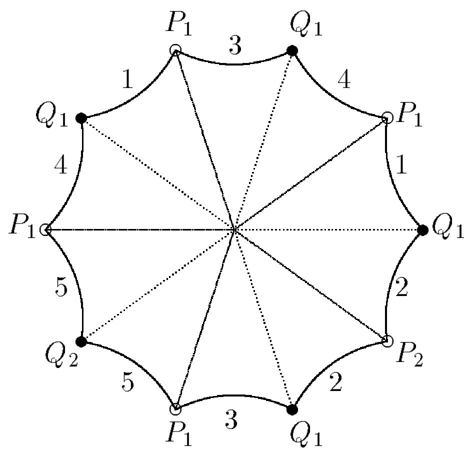

Abbildung 10: Fundamentalbereich für Γ, Beispiel 7

Nun erinnere man sich an den Satz von Poincaré, dass man (unter geeigneten Voraussetzungen an die Winkel) eine Fuchssche Gruppe Γ durch hyperbolische Transformationen erzeugen kann, welche die Seiten eines hyperbolischen Polygons paarweise aufeinander abbilden. Welche Seiten hier zusammengehören, ist durch den Zerschneidungsprozess bzw. in unserem Beispiel durch die Nummerierung eindeutig festgelegt. In unserem Beispiel wird Γ vom Geschlecht 1 mit zwei inäquivalenten Fixpunkten P_2, Q_2 der Ordnung 4, die anderen Eckpunkte gehören zu zwei Orbits zufälliger Ecken. Jedenfalls ist $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ Riemannsche Fläche vom Geschlecht 1 mit genau jener Kinderzeichnung, von der wir ausgingen, damit ist die gesuchte konforme Struktur gefunden.

2.6 Die kartographische Gruppe

Den oben skizzierten Beweis für die allgemeine Situation zu präzisieren, ist natürlich nicht so einfach. In dieser Hinsicht ist ein gruppentheoretisches Verfahren wesentlich bequemer, das auf einer Beschreibung von Kinderzeichnungen durch eine Permutationsgruppe ihrer Kantenmenge beruht ([JS1], [JS2], [BaIt]), und das sich auch für rechnerische Zwecke aller Art weit besser eignet als anschaulich–graphische Verfahren: Man nummeriert die Kanten durch $1, \ldots, n$ und betrachtet die *(hyper)kartographische Gruppe* $G \subseteq S_n$ als das Erzeugnis jener Permutationen w und s, welche für jeden weißen bzw. schwarzen Eckpunkt die dort inzidierenden Kanten zyklisch entgegen dem Uhrzeigersinn vertauscht. Jedem weißen bzw. schwarzen Eckpunkt entspricht also ein Zykel in der Zykelbeschreibung von w bzw. s, im Beispiel 7 also

$$w = (1\,3\,5\,4)\,, \qquad s = (1\,2\,3\,4)$$

(man berücksichtige die Randidentifizierungen in den Abbildungen 9 bzw. 10 und die Tatsache, daß Eckpunkte der Valenz 1 Einerzykeln (2) bzw. (5) ergeben, die in der üblichen Beschreibung von Permutationen nicht auftauchen). Das Element $z = (ws)^{-1} \in G$ beschreibt für jede Zelle des Dessins eine zyklische Vertauschung — wieder gegen den Uhrzeigersinn — jener Kanten, die beim Durchlaufen vom schwarzen zum weißen Randpunkt die Zelle zur Linken haben. Im Beispiel 7 erzeugt

$$z = (1\,3\,4\,5\,2)$$

einen Normalteiler der Ordnung 5 in G und G wird ein semidirektes Produkt $Z_5 \rtimes Z_4$ der Ordnung 20, denn $wzw^{-1} = z^3$. Ganz allgemein wird G eine transitive Permutationsgruppe, weil der Graph der Kinderzeichnung zusammenhängend ist. Dies ist bereits die eine Richtung der folgenden

Proposition 3 *Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen*

1. *Isomorphieklassen von Kinderzeichnungen auf orientierten 2–Mannigfaltigkeiten und*
2. *Konjugationsklassen von* algebraischen Hypermaps, *d.h. Tripeln (G, w, s) von transitiven Permutationsgruppen $G \subseteq S_n$ mit zwei Erzeugenden w und s.*

Konjugationsklassen meint dabei natürlich Konjugation in S_n, d.h. Umnummerierung der Kanten. Wie man einem algebraischen Hypermap eine Kinderzeichnung zuordnet, ist fast evident: Jede Zahl aus $1, \dots, n$ repräsentiert eine Kante, und die Zyklen von w bzw. s die weißen bzw. schwarzen Eckpunkte des Dessins; die Zyklen definieren gleichzeitig die lokale Orientierung der Kanten rund um die Ecken, mit denen sie inzidieren. Auch die Zellen sind durch das Tripel (G, w, s) eindeutig bestimmt bis auf Isomorphie, wie man sich an Hand der Zykelzerlegung von $z = (ws)^{-1} \in S_n$ klarmacht. Die Zellen und ihre lokale Verklebung rund um die Eckpunkte definieren offensichtlich einen Atlas für eine orientierbare kompakte 2–Mannigfaltigkeit M.

Sei $H \subset G$ die Stabilisatoruntergruppe einer fest gewählten Kante von D. Dann lassen sich die Kanten von D mit den Restklassen gH, $g \in G$, identifizieren, und die Operation von G auf der Kantenmenge mit der natürlichen Operation von G auf diesen Restklassen durch Linksmultiplikation. Im Beispiel 7 und für die Kante 5 ist H die von die von $s = (1\,2\,3\,4)$ erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung 4.

Bei der Konstruktion von $\Gamma \subseteq \Delta$, um M mit $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ zu identifizieren und so zu einer Riemannschen Fläche zu machen, kann man sich von folgender Überlegung leiten lassen: Wüssten wir bereits, dass D das Dessin zu der Belyifunktion $\beta : \Gamma\backslash\mathcal{H} \to \Delta\backslash\mathcal{H} \to \mathbb{P}^1$ ist, so spielt die kartographische Gruppe G die Rolle der *Monodromiegruppe* von β. Die Kanten von D repräsentieren nämlich genau die verschiedenen Zweige von β^{-1}, und die Elemente von G beschreiben den

Wechsel der Zweige bei analytischer Fortsetzung von β^{-1} längs Wegen in $\mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$. Diese Wege sind dabei zusammenzusetzen aus den einfachen positiv orientierten Loops um 0 und 1, welche die Erzeugenden w, s von G liefern. Was hat dabei G mit Δ und Γ zu tun?
Sei hierzu N der maximale in Γ enthaltene Normalteiler von Δ, dazu k die hyperbolische Strecke zwischen P und Q, den Fixpunkten der Erzeugenden γ_0 und γ_1 von Δ, vgl. Abschnitt 2.2, Γk ihr Bild auf $\Gamma\backslash\mathcal{H}$. Die Kanten des Dessins sind also die $\Gamma\delta k$, $\delta \in \Delta$, und entsprechen eineindeutig den Rechtsrestklassen $\Gamma\delta \in \Gamma\backslash\Delta$. Dann kann man zeigen, dass

- $G := \Delta/N$ die Monodromiegruppe von β ist und durch Multiplikation von rechts auf den $\Gamma\delta$ operiert und
- G erzeugt ist von $w = \gamma_0 N = N\gamma_0$ und $s = \gamma_1 N = N\gamma_1$, und
- $H := \Gamma/N$ die Stabilisatoruntergruppe der Kante k des zugehörigen Dessins ist.

Diese Überlegung führt zu folgendem Beweisverfahren für Proposition 1. Sei D ein Dessin auf einer kompakten 2–Mannigfaltigkeit M, eindeutig bestimmt durch ein algebraisches Hypermap (G, w, s), und seien p, q, r die Ordnungen von $w, s, z = (ws)^{-1}$; mit H sei die Stabilisatoruntergruppe einer fest gewählten Kante des Dessins bezeichnet. Als Dreiecksgruppe wähle man dann $\Delta = < p, q, r >$, der durch

$$\gamma_0 \mapsto w\,, \quad \gamma_1 \mapsto s$$

eindeutig bestimmte Epimorphismus $\Delta \to G$ sei mit π bezeichnet. Dann ist das Urbild $\Gamma := \pi^{-1}(H)$ gerade der richtige Kandidat, um der Mannigfaltigkeit M die Struktur einer Riemannschen Fläche $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ zu geben.

Übrigens ist in unserem Beispiel 7 die komplexe Struktur von $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ sogar so explizit bekannt, dass man die Kurvengleichung kennt. Ein affines Modell ist nach Birch [Bi]

$$y^2 \;=\; x^3 \;+\; \frac{35}{4}x^2 \;+\; 25x \;+\; 25\,,$$

der dazu auch die Belyifunktion angibt, die *nicht* über $\mathbb{Q}$ definiert ist; die Form der Kinderzeichnung macht plausibel, dass komplexe Konjugation zwar die Kurve invariant läßt, aber die Farben der Dessin–Eckpunkte vertauscht, β also in $1-\beta$ überführt. Betrachtungen dieser Art werden im nächsten Abschnitt eine zentrale Rolle spielen.

3 Galois–Operationen

3.1 Beispiele

Sei eine glatte algebraische Kurve K im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gegeben, definiert über einem Zahlkörper F und mit einer ebenfalls über F definierten Belyifunktion β und zugehöriger Kinderzeichnung D. Was geschieht, wenn man auf die Konstanten der definierenden Gleichungen von K eine algebraische Konjugation $\sigma \in \mathrm{Gal}\,\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ anwendet? Weil Regularitätsvoraussetzungen durch das Nichtverschwinden gewisser Gleichungen kontrolliert werden — und weil die 0 σ–invariant ist — entsteht dabei wieder eine nichtsinguläre Kurve K^σ im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Als Punktmenge gewinnt man diese natürlich auch dadurch, dass man σ zu einem Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ fortsetzt und koordinatenweise auf die Punkte anwendet. Genauso lässt man σ auf den Koeffizienten von β operieren und erhält wieder eine Belyifunktion β^σ auf K^σ, denn $0, 1, \infty$ bleiben invariant und Verzweigungsordnungen sind wieder durch Verschwinden und Nichtverschwinden von Gleichungen definiert. Auf K^σ muss also eine Kinderzeichnung D^σ entstehen.

Beispiel 4'. Es gibt einen Automorphismus σ des Kreisteilungskörpers $\mathbb{Q}(e^{\pi i/10})$, der die elliptische Kurve aus Beispiel 4 überführt in die Kurve mit der Gleichung

$$y^2 \;=\; (x+1)\,(x-1)\,(x\,-\,\cos\frac{3\pi}{10})$$

und dabei die Belyifunktion $\beta(x,y) = T_5^2(x)$ formal ungeändert lässt, da sie rationale Koeffizienten hat. Das entstehende Dessin muss aber anders aussehen, wie wir aus Proposition 1 wissen: Die beiden elliptischen Kurven sind nicht isomorph zueinander, was man mit Hilfe ihrer j–Invariante ausrechnen kann. Der Grund dafür liegt darin, dass die erste der Abbildungen $(x,y) \mapsto x$, aus denen β zusammengesetzt ist, nun über einem anderen Punkt als vorher verzweigt. D^σ hat darum die in Abbildung 11 angegebene Gestalt (gegenüberliegende Randkanten sind wieder zu identifizieren, um ein Dessin auf dem Torus zu erhalten).

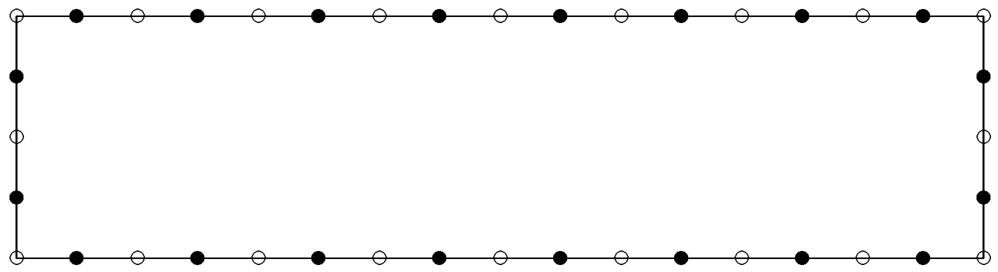

Abbildung 11: $[0,1]$–Urbild von $\beta(x,y) = T_5^2(x)$ auf $y^2 \;=\; (x-1)\,(x+1)\,(x\,-\,\cos\frac{3\pi}{10})$

Beispiel 5'. Übt man auf die elliptische Kurve aus Beispiel 5 eine Konjugation

$$\sigma \in \mathrm{Gal}\,\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q} \quad \text{mit} \quad \sigma\;:\;\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \;\mapsto\; \frac{e^{2\pi i/3}}{\sqrt[3]{2}}$$

aus, so erhält man K^σ mit der Gleichung

$$y^2 \;=\; x\,(x-1)\,(x - \frac{e^{2\pi i/3}}{\sqrt[3]{2}})$$

und der Belyifunktion $\beta(x,y) = 4x^3(1-x^3)$. Wieder kann man sich überlegen, warum die zugehörige Kinderzeichnung anders aussehen muss als in Figur 5. D^σ ist in Abbildung 12 wiedergegeben (natürlich wie immer nur schematisch, d.h. bis auf orientierungserhaltende Homöomorphie); wieder sind gegenüberliegende Randkanten zu identifizieren.

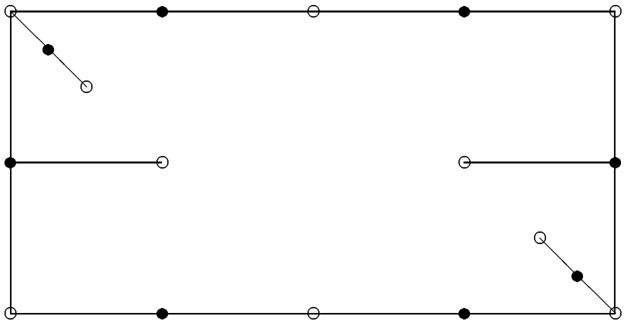

Abbildung 12: $\beta^{-1}[0,1]$ auf dem Torus aus Beispiel 5', schematisch

Was geschieht, wenn man in diesem Beispiel die komplex konjugierte dritte Einheitswurzel verwendet? Man erhält eine elliptische Kurve, die aus der hier gefundenen durch komplexe Konjugation hervorgeht, und es ist keine Überraschung, dass die zugehörige Kinderzeichnung durch Spiegelung an einer der Mittelachsen aus Abbildung 12 hervorgeht.

3.2 Invarianten

An den Beispielen 4' und 5' fällt auf, dass die Kinderzeichnungen D und D^σ zwar nicht isomorph sind, aber offenbar viele gemeinsame Eigenschaften haben, wie etwa die Liste der vorkommenden Valenzen oder die Anzahl der weißen bzw. schwarzen Eckpunkte oder der Zellen. Der Beweis dafür ist naheliegend, wenn man sich das Verhalten der Belyifunktionen unter algebraischer Konjugation der Konstanten überlegt. Es kommt hier übrigens nicht darauf an, dass die Kurve oder die Belyifunktion über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sind, nur ihre Existenz (also Aussage B) in den Sätzen 1 und 2) sind wichtig. Dann lässt sich der Sachverhalt so formulieren:

Proposition 4 *Sei K eine glatte algebraische Kurve im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit Belyifunktion β und zugehörigem Dessin D . Für beliebige Körperautomorphismen σ von $\mathbb{C}$ sind beim Übergang von D zu D^σ invariant:*

- *die vorkommenden Valenzen von weißen Eckpunkten (bzw. von schwarzen Punkten bzw. von Zellen),*

- *die Anzahl der weißen Eckpunkte vorgegebener Valenz (entsprechend: der schwarzen Punkte, der Zellen),*
- *das Geschlecht von* K *,*
- *die Isomorphieklasse der Automorphismengruppe von* D *,*
- *Regularität und Uniformität.*

Den genauen Beweis findet man in [JSt], dort auch eine wesentlich allgemeinere Aussage zu der Invarianz der kartographischen Gruppe. Selbst nach Präzisierung ist die hier gegebene Liste von Galois–Invarianten nicht vollständig (vgl. [Z1], [StWo]). Dass hier nicht von der leeren Menge die Rede ist, zeigt

Proposition 5 *Sei* $\mathcal{D}$ *die Menge der einzelligen Kinderzeichnungen vom Geschlecht* $g \geq 0$ *. Dann operiert* $\mathrm{Gal}\,\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ *treu auf* $\mathcal{D}$ *.*

Die Richtigkeit dieser Aussage für $g = 1$ ist nach den Beispielen 4, 4', 5 und 5' hoffentlich plausibel; sie beruht darauf, dass sich elliptische Kurven immer über dem Körper $\mathbb{Q}(j)$ definieren lassen, der durch den Wert ihrer j–Invariante erzeugt wird, und dass man leicht eine Belyifunktion konstruieren kann, welche ebenfalls über $\mathbb{Q}(j)$ definiert ist und nur einen Pol hat. Leonardo Zapponi hat gezeigt, dass man dieses Faktum durch ein Überlagerungsargument leicht auf höheres Geschlecht ausdehnen kann (unveröffentlicht). Erstaunlich ist aber die Richtigkeit dieser Proposition für $g = 0$, also für Bäume in $\overline{\mathbb{C}}$. Der Beweis, nach einer Idee von H.W.Lenstra jr. aufgeschrieben von Leila Schneps [Sn2], ist trickreich, aber eigentlich nicht schwer.

Damit ist klar, dass Kinderzeichnungen eine wunderbare Spielwiese für die absolute Galoisgruppe werden. Nach Grothendiecks Ideen [G] sind sie, also die Überlagerungen des $\mathbb{P}^1$ minus drei Punkten, nur ein erster Baustein für das heute so genannte ,,Grothendieck–Teichmüller Lego", von dem man sich ein besseres Verständnis von $\mathrm{Gal}\,\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ erhofft, man vergleiche hierzu [Sn], [LoSn1] und [LoSn2]. Auch der Ursprung von Belyi's Satz ist in der Tat die Betrachtung eines Problems der inversen Galoistheorie. Im vorliegenden Aufsatz wollen wir uns allerdings auf die Bedeutung der Kinderzeichnungen für die Kurve K selbst konzentrieren. Auch hierfür spielt die Galoiskonjugation eine wichtige Rolle.

3.3 Modulkörper und Definitionskörper

Definition. Sei eine Kinderzeichnung D auf einer glatten algebraischen Kurve K im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ gegeben. Der *Modulkörper* $M(D)$ von D ist der gemeinsame Fixkörper der Untergruppe $U(K, \beta, \mathrm{id})$ aller Körperautomorphismen σ von $\mathbb{C}$, die D in ein isomorphes D^σ überführen, für die also ein Isomorphismus $f_\sigma : K \to K^\sigma$ und eine Belyifunktion β^σ auf K^σ existieren mit

$$\beta \;=\; \beta^\sigma \circ f_\sigma \;.$$

Analog definiert man Untergruppen $U(K,\pi,\mathrm{id}) \subseteq \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ auch für andere Überlagerungen $\pi : K \to \mathbb{P}^1$ anstelle von β.

Entsprechend ist der Modulkörper $M(K)$ der Kurve K der Fixkörper der Gruppe

$$U(K) \;:=\; \{\,\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C} \,|\, K^\sigma \;\cong\; K\,\}\;.$$

Definitionskörper von K ist jeder Körper F, über dem sich K definieren lässt (s. Abschnitt 1.1) und *Definitionskörper von* D ist jeder Körper, über dem sich K und die zu D gehörige Belyifunktion definieren lassen.

Für das folgende ist es zweckmäßig, noch einen weiteren Modulkörper $M(K,\beta)$ für das *Belyipaar* (K,β) einzuführen als den Fixkörper der Untergruppe $U(K,\beta)$ aller $\sigma \in U(K)$, für die Isomorphismen f_σ und g_σ existieren mit der Eigenschaft

$$f_\sigma \;:\; K \;\to\; K^\sigma\;,\quad g_\sigma \;:\; \mathbb{P}^1 \;\to\; \mathbb{P}^1\;,\quad \beta^\sigma \circ f_\sigma \;=\; g_\sigma \circ \beta\;.$$

Die Belyipaare $(K,\beta),(K^\sigma,\beta^\sigma)$ heißen dann *schwach isomorph.* Man beachte, dass in der Definition von $U(K,\beta,\mathrm{id})$, also von $M(D)$, anstelle von g_σ nur die Identität zugelassen ist.

Proposition 6 *Sei K eine glatte algebraische Kurve K im $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit Kinderzeichnung D und zugehöriger Belyifunktion β. Dann gelten:*

1. *$M(K)$ hängt nur von der Isomorphieklasse von K ab.*
2. *$M(D)$ hängt nur von der Isomorphieklasse von D ab.*
3. *Jeder Definitionskörper von K (bzw. von D) enthält den Modulkörper.*
4. *$M(K) \subseteq M(K,\beta) \subseteq M(D)$*
5. *$M(D)$ und somit auch $M(K)$ sind Zahlkörper.*

1. Sei $i : K \to C$ ein Isomorphismus und $\sigma \in U(K)$, es existiere also ein Isomorphismus $f_\sigma : K \to K^\sigma$, dann ist natürlich $i^\sigma \circ f_\sigma \circ i^{-1}$ ein Isomorphismus $C \to C^\sigma$, also $U(C) \subseteq U(K)$; die umgekehrte Inklusion beweist man ebenso, und daraus folgt $M(K) = M(C)$. Aussage 2 beweist man ähnlich. Für 3. kann man 1. benutzen, um K durch ein über dem Definitionskörper L definiertes Modell zu ersetzen, und $U(K)$ enthält dann alle σ, welche L elementweise festlassen. 4. folgt aus

$$U(K) \;\supseteq\; U(K,\beta) \;\supseteq\; U(K,\beta,\mathrm{id})\;.$$

Für 5. überlege man sich etwa anhand von Proposition 4, dass die Bahn von D unter der Operation von $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ endlich sein muss, weil es nur endlich viele Möglichkeiten gibt, Kinderzeichnungen mit einer gegebenen Liste von Valenzen auf einer orientierten 2–Mannigfaltigkeit gegebenen Geschlechts zu zeichnen. Eine andere Möglichkeit besteht darin, Theorem 2 heranzuziehen: Zu gegebener Dreiecksguppe gibt nach einem Standardresultat der kombinatorischen

Gruppentheorie nur endlich viele Untergruppen von gegebenem Index (= Grad der Belyifunktion, also auch $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$–invariant). Damit muss eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}$ existieren, die D in isomorphe Dessins überführt, und deren Fixkörper $M(D)$ ist ein Zahlkörper.

Wüsste man jetzt, dass der Modulkörper ein Definitionskörper ist, so wäre damit der noch ausstehende Teil des Beweises von Theorem 1, nämlich die Richtung $B) \Rightarrow A)$ bewiesen. Leider ist das nicht so einfach, wie man es, verwöhnt von der Galoistheorie, vermuten könnte.

3.4 Der Satz von Weil

Es gibt im wesentlichen zwei Wege, wie man diesen Teil des Satzes von Belyi beweisen kann. Eine Möglichkeit besteht darin, einen sehr allgemeinen Existenzsatz von Grothendieck über die Existenz verzweigter Überlagerungen zu nutzen ([MM], Prop. 2.1; eine sehr elegante und effektive Version für reguläre Dessins, d.h. normale Übelagerungen — vgl. Lemma 4 unten — enthält [Sa]). Der ältere Weg beruht auf einer Arbeit von André Weil [W] und soll hier in einer neuen Variante beschrieben werden, die Ideen von Coombes, Harbater, Debes, Emsalem benutzt ([CH], [DE]). Die für unsere Zwecke relevanten Teile von [W] kann man folgendermaßen zusammenfassen:

Proposition 7 *Die glatte projektive algebraische Kurve K sei über dem Körper $L \subset \mathbb{C}$ definiert und besitze den Modulkörper $M := M(K)$. Dieses M ist ein Definitionskörper von K genau dann, wenn man zu allen $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}/M$ einen Isomorphismus*

$$f_\sigma \;:\; K \;\to\; K^\sigma$$

so auswählen kann, dass für alle $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}/M$ die Verträglichkeitsbedingung

$$f_{\tau\sigma} \;=\; f_\sigma^\tau \circ f_\tau$$

gültig ist. Eine entsprechende Aussage gilt für Modulkörper und Definitionskörper von Kinderzeichnungen.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist leicht zu zeigen. Dass diese Aussage hinreichend ist, führt man in zwei Schritten auf Weils Sätze zurück: Zunächst zeigt man mit Hilfe von [W], Theorem 4, dass K über dem algebraischen Abschluss $\overline{M}$ definierbar ist (man beachte, dass in [W] die generischen Punkte $t_1, t_2 \in T$ durch ein $\sigma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}/M$ ineinander übergeführt werden können). Dann darf man $L \subset \overline{M}$ annehmen und auf diese Situation Theorem 1 aus [W] anwenden (die $f_{\tau,\sigma}$ dort heißen hier $f_\tau \circ f_\sigma^{-1}$). Die entsprechende Aussage für D anstelle von K erhält man aus den Weilschen Sätzen, indem man die Belyifunktion durch ihren Graphen beschreibt.— Weil's Satz ist deswegen nicht so leicht anzuwenden, weil die f_σ nur eindeutig sind bis auf Kombination mit Automorphismen von K bzw. K^σ . Welche dieser Kombinationen erfüllt dann die Verträglichkeitsbedingung? Die Bedingungen der Proposition sind trivialerweise dann erfüllt, wenn die f_σ durch K, K^σ bzw. D, D^σ eindeutig bestimmt sind:

Proposition 8 *Wenn die Automorphismengruppe von K bzw. D nur aus der Identität besteht, ist der Modulkörper ein Definitionskörper.*

Es gibt weitere Fälle, in denen $M(K)$ ein Definitionskörper ist: Neben dem Fall $g = 0$, also $K = \mathbb{P}^1$, auch noch alle elliptischen Kurven ($g = 1$), für die $M(K) = \mathbb{Q}(j)$ ist, wo j die Invariante der elliptischen Kurve ist [Wo1]. Gegenbeispiele, in denen eine Kurve nicht über ihrem Modulkörper definierbar ist, sind nicht so leicht zu konstruieren. Alle bekannten Beispiele sind von der Bauart, dass $M(K)$ reell ist (also K isomorph zu der komplex konjugierten Kurve $\overline{K}$), aber nicht durch reelle Gleichungen beschrieben werden kann ([Ea], [Sh]). Merkwürdigerweise ist — jedenfalls für Definitionskörper in $\mathbb{C}$ — noch keine Kurve bekannt, für die der Grad eines kleinstmöglichen Definitionskörpers über dem Modulkörper größer als 2 wäre.

3.5 Kurven mit vielen Automorphismen

Auf dem Weg zum Beweis von $B) \Rightarrow A)$ werden wir nun eine Abschweifung einschalten, indem wir ein Analogon von Proposition 8 für den entgegengesetzten Fall zeigen, dass K *viele Automorphismen* besitzt. Für diesen Begriff gibt es einige äquivalente Definitionen, vgl. [StWo], für unsere Zwecke genügen als Definition die im folgenden Lemma genannten Aussagen.

Lemma 4 *Sei $K \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine glatte projektive algebraische Kurve vom Geschlecht $g > 1$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *K besitzt eine reguläre Kinderzeichnung,*
2. *auf K existiert eine Belyifunktion, die eine normale (verzweigte) Überlagerung $\beta : K \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ definiert,*
3. *$(\operatorname{Aut} K)\backslash K \cong \mathbb{P}^1$, und die kanonische Projektion*
$$K \to (\operatorname{Aut} K)\backslash K$$
ist höchstens über drei Punkten verzweigt.

Randbemerkung: Denkt man sich eine solche Kurve gemäß Satz 2 als $N\backslash\mathcal{H}$ geschrieben, wo N torsionsfreier Normalteiler jener Dreiecksgruppe Δ ist, die man der kanonischen Belyifunktion zuordnet, so wird $\operatorname{Aut} K \cong \Delta/N$, wie wir bereits in Abschnitt 2.4 gesehen haben. Die Parkettierung der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ durch den üblichen Fundamentalbereich von Δ und alle seine Δ–Bilder projiziert sich unter der kanonischen Projektion auf eine Parkettierung von K, auf der $\operatorname{Aut} K$ transitiv operiert — analog zu der Operation der Symmetriegruppe eines platonischen Körpers auf dem Dreiecksnetz, das durch diesen der Riemannschen Zahlenkugel einbeschrieben wird. Die Kurven mit vielen Automorphismen kann man also mit gutem Grund als die natürlichen hyperbolischen Verallgemeinerungen der platonischen Körper auf höheres

Geschlecht ansehen. Bekannte Beispiele solcher Kurven mit vielen Automorphismen sind die Fermatkurven zum Exponenten $n > 3$, die als universelle Überlagerungsgruppen N Normalteiler in den Dreiecksgruppen $< 2, 3, 2n >$ besitzen, sowie die *Hurwitzkurven*, deren Automorphismengruppe die nach Hurwitz maximal mögliche Ordnung $84(g-1)$ erreicht; diese sind nämlich gerade dadurch charakterisiert, dass ihre universelle Überlagerungsgruppe N Normalteiler in $< 2, 3, 7 >$ ist.
Zum Beweis des Lemmas sei daran erinnert, dass K als Riemannsche Fläche vom Geschlecht > 1 nur endlich viele Automorphismen besitzt und dass darum $\beta : K \to (\mathrm{Aut}\, K)\backslash K$ eine holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen wird. Wenn Aussage 3) richtig ist, wird β Belyifunktion, und zwar eine normale Überlagerung. 2) $\Rightarrow$ 1) ist evident, und 1) $\Rightarrow$ 3) gewinnen wir aus folgender Überlegung: Wie in Abschnitt 2.4 bedeutet die Existenz eines regulären Dessins auf K, dass die universelle Überlagerungsgruppe Γ von K Normalteiler in einer Dreiecksgruppe Δ ist, und dass die Faktorgruppe Δ/Γ zumindest Untergruppe von $\mathrm{Aut}\, K$ ist. Diese volle Automorphismengruppe ist der Quotient $\overline{\Delta}/\Gamma$ für eine Obergruppe $\overline{\Delta} \supseteq \Delta$ von endlichem Index, und es ist bekannt, dass auch $\overline{\Delta}$ nur eine Dreiecksgruppe sein kann. Somit ist

$$\Gamma\backslash\mathcal{H} \;\to\; \overline{\Delta}\backslash\mathcal{H}$$

die gesuchte kanonische Projektion.

Da diese kanonische Projektion eindeutig bestimmt ist bis auf die Identifikation von $(\mathrm{Aut}\, K)\backslash K$ mit $\mathbb{P}^1$, hat man in diesem Fall eine *kanonische Belyifunktion* β zur Verfügung, und für diese gilt darum

$$M(K) \;=\; M(K, \beta)\,.$$

Der dritte der hier eingeführten Modulkörper hat dann die folgende wichtige Eigenschaft.

Proposition 9 *Die Funktion $\pi : K \to \mathbb{P}^1$ sei eine normale (verzweigte) Überlagerung, M sei wie zu Beginn des Abschnitts 3.3 als Fixkörper von $U(K, \pi, \mathrm{id})$ definiert, und die Menge der kritischen Werte in $\mathbb{P}^1$ (also der π–Bilder der Verzweigungspunkte) sei invariant unter $U(K, \pi, \mathrm{id})$. Dann sind K und π über M definiert.*
Insbesondere sind K und β über $M(D)$ definiert, wenn K viele Automorphismen hat und β die kanonische Belyifunktion ist mit kritischen Werten $0, 1, \infty$.

Zum Beweis wählt man sich ein $x_0 \in \mathbb{P}^1(M)$, das kein kritischer Wert von π ist, dessen π–Urbilder in K also die Bahn Gx eines ebenfalls fest zu wählenden Punktes x unter der Überlagerungsgruppe G von π ausmachen. Nach Definition gibt es zu jedem $\sigma \in U(K, \pi, \mathrm{id})$ einen Isomorphismus

$$f_\sigma \;:\; K \;\to\; K^\sigma \quad \text{mit} \quad \pi^\sigma \circ f_\sigma \;=\; \pi\,.$$

Wegen $x_0 \in \mathbb{P}^1(M)$ und wegen der Transitivität von G auf der Faser $\pi^{-1}(x_0)$ können wir f_σ so wählen, dass $f_\sigma(x) = \sigma(x) \in (\pi^\sigma)^{-1}(x_0) \subset K^\sigma$, und durch diese Vorgabe ist f_σ dann eindeutig festgelegt. Darüber hinaus ist leicht zu überprüfen, dass dann die Verträglichkeitsbedingungen des Weilschen Kriteriums (Proposition 7) erfüllt sind, somit sind K und π über M definierbar.

3.6 Beweis von B) $\Rightarrow$ A)

Dieser lange angekündigte Beweisteil von Satz 1 lässt sich nun in folgenden Schritten führen.

- Für das Geschlecht $g = 0$ ist $K = \mathbb{P}^1$, also über $\mathbb{Q}$ definiert.
- Nach Proposition 6.5 ist $M(D)$ Zahlkörper und enthält $M(K)$. Für Geschlecht $g = 1$ ist die elliptische Kurve K über dem Körper $\mathbb{Q}(j)$ definierbar (j die Invariante von K), und $M(K) = \mathbb{Q}(j)$ ist leicht zu beweisen.
- Für Kurven K vom Geschlecht $g > 1$ mit vielen Automorphismen ist K nach Proposition 9 über $M(D)$ definierbar, wo D das zur kanonischen Belyifunktion gehörige reguläre Dessin ist.
- Unter den gleichen Voraussetzungen sei nun K über dem Zahlkörper $M(D)$ definiert. Dann besteht $\mathrm{Aut}\,K \cong \mathrm{Aut}\,D$ aus birationalen Abbildungen von K auf sich, die ebenfalls über einem Zahlkörper $L \supseteq M(D)$ definiert sind: Weil $\mathrm{Aut}\,K$ invariant unter der Operation von $\mathrm{Aut}\,\mathbb{C}/M(D)$ ist, hätte K andernfalls eine unendliche Automorphismengruppe.
- Jede Untergruppe $H \subseteq \mathrm{Aut}\,K$ lässt sich nun als Automorphismengruppe des Funktionenkörpers $L(K)$ verwenden, die den Konstantenkörper L elementweise festlässt. Übergang zum Fixkörper von H zeigt, dass auch der Quotient $H\backslash K$ als algebraische Kurve über $L \subset \overline{\mathbb{Q}}$ definiert werden kann.
- Nun muss man sich nur noch überlegen, dass jede kompakte Riemannsche Fläche mit Kinderzeichnung und vom Geschlecht > 1 als Quotient $H\backslash K$ geschrieben werden kann, wobei K eine Kurve mit vielen Automorphismen ist und H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}\,K$. Das kann man z.B. durch Normalisierung der gegebenen Belyifunktion tun (ergibt wieder eine Belyifunktion) oder — wenn die Riemannsche Fläche gemäß Satz 2 in der Form $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ gegeben ist mit einer Untergruppe $\Gamma \subset \Delta$ einer Dreiecksgruppe — durch Abstieg zu einem maximalen Normalteiler $N \lhd \Delta$ mit $N \subseteq \Gamma$.

3.7 Der Definitionskörper von Kurven mit vielen Automorphismen

Die im wesentlichen auf [CH] und [DE] zurückgehende Proposition 9 lässt sich zum Beweis einer weiteren wichtigen Eigenschaft von Kurven mit vielen Automorphismen verwenden.

Satz 3 *Sei $K \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine glatte algebraische Kurve mit vielen Automorphismen. Dann ist sie über ihrem Modulkörper $M(K)$ definierbar.*

Wir wissen bereits, dass K über $M(D)$ definiert werden kann, wo D die Kinderzeichnung ist, welche zu der kanonischen Belyifunktion

$$\beta \;:\; K \;\to\; (\mathrm{Aut}\,K)\backslash K \;\cong\; \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

gehört; dabei ist die Identifikation rechts so zu wählen, dass die kritischen Werte gerade $0, 1, \infty$ werden. Außerdem wissen wir bereits (Proposition 6.4 und die Bemerkung vor Proposition 9), dass

$$M(K) \;=\; M(K,\beta) \;\subseteq\; M(D)$$

ist, es ist also nur die Erweiterung $M(D)/M(K,\beta)$ zu untersuchen. „Generisch" ist diese trivial:

Lemma 5 *Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 3 die Verzweigungsordnungen p, q, r von β über $0, 1, \infty$ paarweise verschieden sind, ist $M(D) = M(K)$.*

Nach den Vorbemerkungen über $M(K)$ ist zum Beweis nur $U(K,\beta) = U(K,\beta,\mathrm{id})$ zu zeigen: *Wenn (K,β) und (K^σ,β^σ) schwach isomorph sind, d.h. wenn Isomorphismen f_σ und g_σ existieren mit der Eigenschaft*

$$f_\sigma \;:\; K \;\to\; K^\sigma \;, \quad g_\sigma \;:\; \mathbb{P}^1 \;\to\; \mathbb{P}^1 \;, \quad \beta^\sigma \circ f_\sigma \;=\; g_\sigma \circ \beta \;,$$

dann ist sogar $g_\sigma = \mathrm{id}$. Aus Proposition 4 weiß man, dass β^σ genau die gleichen Verzweigungsordnungen über $0, 1, \infty$ hat wie β ; wegen der Verschiedenheit dieser Verzweigungsordnungen kann f_σ also nur die Nullstellenmenge $\beta^{-1}(0)$ auf die Nullstellenmenge $(\beta^\sigma)^{-1}(0)$ abbilden. Entsprechendes gilt für die Einsstellenmenge $\beta^{-1}(1)$ und die Polmenge $\beta^{-1}(\infty)$. Daher kann g_σ nur eine Möbiustransformation sein, welche $0, 1, \infty$ festlässt.

Wenn andererseits p, q, r nicht paarweise verschieden sind, kann es vorkommen, dass f_σ für $\sigma \in U(K,\beta)$ das Tripel der Fasern kritischer Werte

$$(\beta^{-1}(0), \beta^{-1}(1), \beta^{-1}(\infty)) \qquad \text{in} \qquad ((\beta^\sigma)^{-1}(\tau_\sigma(0)), (\beta^\sigma)^{-1}(\tau_\sigma(1)), (\beta^\sigma)^{-1}(\tau_\sigma(\infty))$$

abbildet, wo τ_σ eine echte Permutation der kritischen Werte ist, für Beispiele vgl. [StWo]. Nach der Definition von $U(K,\beta)$ ist τ_σ also die Restriktion von g_σ auf $\{0, 1, \infty\}$, und g_σ ist durch τ_σ eindeutig bestimmt. Man mache sich klar, dass f_σ bis auf Nachschalten eines Automorphismus $\alpha \in \mathrm{Aut}\, K^\sigma$ eindeutig bestimmt ist, und dass $\beta^\sigma \circ \alpha = \beta^\sigma$ ist; damit erhält man die beiden ersten Aussagen von

Lemma 6 *Sei $\sigma \in U(K,\beta)$, und für K seien die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, β sei die kanonische Belyifunktion.*

1. *Auf der Menge $\{0, 1, \infty\}$ der kritischen Werte gilt*

   $$\tau_\sigma \;=\; \beta^\sigma \circ f_\sigma \circ \beta^{-1} \;.$$

2. *Die Permutation τ_σ hängt nur von $\sigma \in U(K,\beta)$, nicht von der Auswahl von f_σ ab.*

3. *Bezeichnen wir mit S_3 die Permutationsgruppe von $\{0, 1, \infty\}$, so ist die Abbildung*

   $$U(K,\beta) \;\to\; S_3 \;:\; \sigma \;\mapsto\; \tau_\sigma$$

   ein Anti–Homomorphismus mit Kern $U(K,\beta,\mathrm{id})$.

4. *$M(D)/M(K)$ ist Galoiserweiterung.*

5. *τ_σ hängt nur von der Restriktion von σ auf $M(D)$ ab und definiert einen injektiven Anti–Homomorphismus*
$$\mathrm{Gal}\, M(D)/M(K) \;\to\; S_3 \;:\; \sigma \;\mapsto\; \tau_\sigma \;.$$

Zum Beweis von Punkt 3) beachte man wieder, dass τ_σ Restriktion von g_σ ist, und dass g_σ eine gebrochen–lineare Abbildung mit rationalen Koeffizienten ist. Daher gilt für alle $\sigma, \omega \in U(K,\beta)$

$$g_{\sigma\omega} \;=\; g_\omega^\sigma \circ g_\sigma \;=\; g_\omega \circ g_\sigma \;.$$

Wir wissen bereits, dass $M(D)$ und $M(K)$ Zahlkörper sind. Schränkt man alle σ auf $\overline{\mathbb{Q}}$ ein, so ergeben sich 4) und 5) aus der Galoistheorie.

Die Erweiterung $M(D)/M(K)$ ist also entweder trivial, zyklisch von Ordnung 2 oder 3, oder von Ordnung 6 mit Galoisgruppe S_3 (für diese letzte Möglichkeit sind noch keine Beispiele bekannt). Den Beweis von Satz 3 kann man nun so führen, dass man die übliche Normierung der Belyifunktion abändert.

Lemma 7 *Die Kurve K erfülle die Voraussetzungen von Satz 3. O.B.d.A. seien K und β über $M(D)$ definiert. Dann gibt es eine gebrochen–lineare Transformation μ, so dass*

$$(\mu \circ \beta)^\sigma \circ f_\sigma \;=\; \mu^\sigma \circ \beta^\sigma \circ f_\sigma \;=\; \mu \circ \beta$$

ist für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}\, M(D)/M(K)$, und dass die Menge $\mu\{0,1,\infty\}$ der kritischen Werte von $\mu \circ \beta$ invariant ist unter $\mathrm{Gal}\, M(D)/M(K)$.

Da die $g_\sigma = \beta^\sigma \circ f_\sigma \circ \beta$ aus der Definition von $U(K,\beta)$ durch τ_σ bereits eindeutig bestimmt sind, genügt es nach Lemma 6, μ so zu wählen, dass auf den kritischen Werten $0,1,\infty$ die Invarianzbedingung erfüllt ist und dass

$$(\mu \circ \beta)^\sigma \circ f_\sigma \circ \beta^{-1} \;=\; \sigma \circ \mu \circ \beta^\sigma \circ f_\sigma \circ \beta^{-1} \;=\; \sigma \circ \mu \circ \tau_\sigma \;=\; \mu$$

ist. Dazu nimmt man eine Fallunterscheidung nach den Galoisgruppen für $M(D)/M(K)$ vor: Für $M(D) = M(K)$ ist nichts zu zeigen. Für quadratische Erweiterungen sei z.B. für die nichttriviale Konjugation σ die Permutation

$$\tau_\sigma(0,1,\infty) \;=\; (1,0,\infty)\;.$$

Dann wähle man μ so, dass

$$\mu(\infty) \;=\; \infty\;, \quad \sigma(\mu(0)) \;=\; \mu(1) \in M(D)$$

ist. Dann ist die Behauptung des Lemmas erfüllt. Wenn $M(D)/M(K)$ zyklisch kubisch ist, wähle man μ so, dass $\mu(0), \mu(1), \mu(\infty)$ eine Normalbasis der Körpererweiterung werden; die

Reihenfolge lässt sich so festlegen, dass auf $0, 1, \infty$ für alle $\sigma \in \operatorname{Gal} M(D)/M(K)$ die zusammengesetzte Abbildung $\sigma \circ \mu \circ \tau_\sigma = \mu$ ist.
Das gleiche Konstruktionsprinzip gilt auch für den Fall einer S_3–Erweiterung: μ ist so zu wählen, dass $\sigma \circ \mu = \mu \circ \tau_\sigma^{-1}$ auf $0, 1, \infty$ erfüllt ist. Diese Aufgabe ist entweder mit etwas Darstellungstheorie zu lösen (die Galoisoperation von S_3 auf der Normalbasis definiert eine reguläre Darstellung, und diese enthält die Permutationsdarstellung als rationale Unterdarstellung) oder dadurch, dass man $\mu(0), \mu(1), \mu(\infty)$ als Wurzeln eines irreduziblen Polynoms festlegt, welche die (nicht normalen, konjugierten) kubischen Zwischenkörper von $M(D)/M(K)$ erzeugen.

Beweis von Satz 3. Sei π die normale Überlagerung

$$\pi = \mu \circ \beta : K \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

mit dem in Lemma 7 gewonnenen μ. Aus Lemma 7 folgt, dass $M(K)$ der Fixkörper von $U(K, \pi, \mathrm{id})$ ist, und die Menge der kritischen Werte ist nach Konstruktion invariant unter dieser Gruppe. Die Behauptung des Satzes folgt also aus Proposition 9.

Literatur

[BaIt] M.Bauer, Cl.Itzykson: Triangulations, pp.179–236 in [Sn]

[B1] G.V.Belyĭ: On Galois Extensions of a Maximal Cyclotomic Field, Math. USSR Izvestija 14 (1980), 247–265

[B2] G.V.Belyĭ: Another proof of the three points theorem. Preprint Bonn 1997.

[Bi] B.Birch: Noncongruence Subgroups, Coverings and Drawings, pp.25–46 in [Sn]

[Bo] A.Borel: Commensurability classes and volumes of hyperbolic 3–manifolds, Ann. Schuola Norm. Sup. Pisa (Ser. IV) 8 (1981), 1–33

[Chu] D.V.Chudnovsky, G.V.Chudnovsky: Computer algebra in the service of mathematical physics and number theory, pp. 109–232 in Computers and Mathematics, Proceedings Stanford 1986, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 125, Dekker 1990.

[CIW] P.Cohen, Cl.Itzykson, J.Wolfart: Fuchsian Triangle Groups and Grothendieck Dessins: Variations on a Theme of Belyi, Commun. Math. Phys. 163 (1994), 605–627

[CoWo] P.Cohen, J.Wolfart: Dessins de Grothendieck et variétés de Shimura, C.R. Acad. Sci. Paris 315 (Sér.I) (1992), 1025–1028

[CH] K.Coombes, D.Harbater: Hurwitz families and arithmetic Galois groups, Duke Math. J. 52 (1985), 821–839

[DE] P.Dèbes, M.Emsalem: On Fields of Moduli of Curves, J. Algebra 211 (1999), 42–56

[Ea] C.J.Earle: On the Moduli of Closed Riemann Surfaces with Symmetries, pp. 119–130 in L.V.Ahlfors et al.: Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann. of Math. Studies 66, Princeton 1971

[G] A.Grothendieck: Esquisse d'un Programme, pp. 5–48 in [LoSn1]

[JS1] G.Jones, D.Singerman: Theory of maps on orientable surfaces, Proc. London Math. Soc. (3) 37 (1978), 273–307

[JS2] G.Jones, D.Singerman: Maps, hypermaps and triangle groups, pp.115-145 in [Sn]

[JS3] G.Jones, D.Singerman: Belyi Functions, Hypermaps and Galois Groups, Bull. London Math. Soc. 28 (1996), 561–590

[JSt] G.Jones, M.Streit: Galois groups, monodromy groups and cartographic groups, pp.25–65 in [LoSn2]

[Ka] S.Katok: Fuchsian Groups, Chikago 1992

[LoSn1] P.Lochak, L.Schneps: *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 242, Cambridge UP 1997

[LoSn2] P.Lochak, L.Schneps: *Geometric Galois Actions 2. The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 243, Cambridge UP 1997

[MM] G.Malle, B.H.Matzat: Inverse Galois Theory, Springer 1999

[MaVo] J.Malgoire, C.Voisin: Cartes Cellulaires, Cahiers Mathématiques de Montpellier 12 (1977)

[R] B.Riemann: Theorie der abelschen Funktionen, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 54 (1857), 115–155

[Sa] B.Sadi: Descente effective du corps de définition des revêtements, J. Number Th. 77 (1999), 71–82

[Se] J.–P.Serre: *Topics in Galois Theory*, Jones and Bartlett 1992

[Schn] Th.Schneider: Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Ann. 113 (1937), 1–13

[Sn] L.Schneps (ed.): *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 200, Cambridge UP 1994

[Sn2] L.Schneps: Dessins d'enfants on the Riemann sphere, pp.47–77 in [Sn]

[SV1] V.A.Voevodsky, G.Shabat: Equilateral Triangulations of Riemann Surfaces and Curves over Algebraic Number Fields, Soviet Math. Dokl. 39 (1989), 38–41

[SV2] G.Shabat, V.A.Voevodsky: Drawing curves over number fields, pp.199–227 in the Grothendieck Festschrift III (ed. P.Cartier et al.), Birkhäuser 1990

[Sh] G.Shimura: On the Field of Rationality of an Abelian Variety, Nagoya Math. J. 45 (1972), 167–178

[SSy] D.Singerman, R.I.Syddall: Belyi Uniformization of Elliptic Curves, Bull. London Math. Soc. 139 (1997), 443–451

[St] M.Streit: Homology, Belyi Functions and Canonical Curves, Manuscripta Math. 90 (1996), 489–509

[StWo] M.Streit, J.Wolfart: Characters and Galois invariants of regular dessins, Revista Mat. Complutense 13 (2000), 1–33

[W] A.Weil: The field of definition of a variety, Amer. J. Math. 78 (1956), 509–524

[Wo1] J.Wolfart: The 'Obvious' Part of Belyi's Theorem and Riemann Surfaces with Many Automorphisms, pp.97–112 in [LoSn1]

[Wo2] J.Wolfart: Triangle groups and Jacobians of CM type, preprint, http://www.math.uni-frankfurt.de/~sier/aghome.html

[Z1] L.Zapponi: Dessins d'enfants en genre 1, pp. 79–116 in [LoSn2]

[Z2] L.Zapponi: Le théorème de Belyi revisité, preprint