Kinematik diffeomorphismeninarianter quantisierter Eichtheorien

Diplomarbeit vorgelegt von Andreas Döring aus Bad Orb

Johann Wolfgang Goethe-Universität,
Frankfurt am Main
Fachbereich Physik
Juni 2000

26. August 2004

Inhaltsverzeichnis

Meinen Eltern gewidmet

für ihre Liebe und Unterstützung

1 Einleitung

1.1 Einordnung

„Die Mathematiker sind eine Art Franzosen:
redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache,
und dann ist es alsbald etwas ganz anderes.“
Johann Wolfgang von Goethe

Die vorliegende Arbeit ist der mathematischen Physik zuzuordnen und beschäftigt sich mit der Kinematik von diffeomorphismeninvarianten Eichtheorien. Es wird ein Ansatz zur Quantisierung dargestellt, der in der sogenannten Loop-Quantengravitation entwickelt wurde. Da sehr grundlegende Eigenschaften physikalischer Systeme betrachtet werden, besteht die Erwartung, daß die vorgestellten Techniken und Ansätze auch in den quantisierten Yang-Mills-Theorien Bedeutung haben. Dabei ist aber zu beachten, daß die bewußte Berücksichtigung von (zunächst räumlichen) Diffeomorphismen die Anwendung so gut wie aller Standardmethoden, die in den Quantenfeldtheorien üblich sind, unmöglich macht. Das wirft die Frage auf, ob die dargestellten Ansätze überhaupt von Wert sind für die Quantisierung von Yang-Mills-Theorien.

Warum das plausibel erscheint, möchten wir kurz begründen. Die Quantenfeldtheorien sind in ihrer heutigen Form fast immer auf einem festen, zumeist Minkowskischen Raumzeit-Hintergrund formuliert. Im Gegensatz dazu hat die Allgemeine Relativitätstheorie gezeigt, daß die Raumzeit selbst integraler Bestandteil des physikalischen Geschehens ist und nicht gleichsam als Bühne benutzt werden darf. Selbst unter Vernachlässigung der Dynamik der Gravitation, also auf einer statischen Raumzeit, darf nicht ein ausgezeichnetes Koordinatensystem das übrige, nicht-gravitative physikalische Geschehen beherbergen. Die allgemeine Kovarianz bedeutet auch viel mehr als Poincaré-Invarianz: *alle* Koordinatensysteme sind zur Beschreibung des physikalischen Geschehens gleich gut. Hier wird der Standpunkt angenommen, daß das Äquivalenzprinzip in den Quantenfeldtheorien bisher keine angemessene Berücksichtigung findet. Dabei wird die Theorie der Gravitation, die Allgemeine Relativität, als mehr verstanden als eine weitere Feldtheorie auf der Raumzeit, es ist die Theorie der Geometrie der Raumzeit selbst. Daher scheint es erforderlich, die aus der Theorie der Gravitation gewonnenen physikalischen Einsichten auch in den übrigen physikalischen Theorien, insbesondere den Yang-Mills-Theorien und deren Quantisierung, zu berücksichtigen.

In der Loop-Quantengravitation, auf die noch näher eingegangen wird, wurde in den letzten Jahren eine Methode der kanonischen Quantisierung entwickelt, die ausdrücklich die räumliche Kovarianz, also die Invarianz gegenüber dreidimensionalen Diffeomorphismen einbezieht. Der Ausgangspunkt ist hierbei eine Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie in neuen Variablen, den Ashtekar-Variablen. In dieser Formulierung ist die ART den Yang-Mills-Theorien sehr viel ähnlicher. Der kinematische Rahmen beider Theorien ist zunächst sogar gleich. Dies legt nahe, daß ein Quantisierungsschema, das von diesem kinematischen Rahmen ausgeht, in beiden Theorien von Bedeutung sein kann.

Im Hauptteil der Arbeit geht es aber weniger darum, einzelne Theorien (z.B. eine $U(1)$-Theorie) näher zu betrachten. Das Augenmerk liegt auf der Darstellung der grundlegenden Ähnlichkeiten zwischen der ART und den Yang-Mills-Theorien, der Identifikation der zentralen mathematischen Objekte für eine diffeomorphismeninvariante Theorie und deren Untersuchung. Wir werden den Quantenkonfigurationsraum konstruieren, ein diffeomorphismen-invariantes Maß darauf suchen und schließlich den Hilbertraum der Theorie definieren. Im Fall der Loop-Quantengravitation bleibt noch die Frage nach der Implementation der Constraints (Zwangsbedingungen), die aber in dieser Arbeit nicht behandelt wird. Die Lie-Gruppe $SU(2)$ spielt eine wichtige Rolle, weil sie zum einen recht einfach zu behandeln ist und zum anderen als die Eichgruppe in der Loop-Quantengravitation auftaucht.

Die meisten der vorgestellten Ergebnisse sind in der Literatur vorhanden, allerdings oft weit verstreut und mitunter fehlerhaft. Zunächst wurden die Resultate gesammelt, ergänzt und in einen Rahmen gestellt. Dabei konnten viele Beweise gekürzt, korrigiert und klarer dargestellt werden. Auch einige Verallgemeinerungen waren möglich. Weiterhin konnten wir an einigen Stellen wichtige ausstehende Beweise führen (Verhältnis dünne zur Hoop-Äquivalenz, Korrektur und Vervollständigung eines zentralen Beweises von Ashtekar und Isham, Diffeomorphismeninvarianz des Maßes).

Darüber hinaus wird eine neue Sichtweise auf den Quantenkonfigurationsraum vorgestellt, die es in der Literatur bisher nicht gibt. Es wird eine

Verbindung zur gut entwickelten Darstellungstheorie kompakter Gruppen hergestellt. Außerdem behandeln wir die Frage nach einer Ausdehnung des Schemas von analytischen zu glatten Diffeomorphismen auf eine neue Art. Dabei wird eine Vergrößerung des Zustandsraums der Theorie vorgeschlagen.

Der physikalische Ausgangspunkt sind lediglich die Allgemeine Relativitätstheorie, die Quantenmechanik und gewisse Aspekte der klassischen Yang-Mills-Theorie. Man braucht keine höheren Dimensionen, keine Supersymmetrie (beides kann aber einbezogen werden) und keine undefinierten mathematischen Objekte wie Pfadintegrale. Der gesamte Ansatz ist mathematisch streng. Daraus ergibt sich auch der recht formale Charakter dieser Arbeit. Wir haben durchgehend physikalische Deutungen gegeben, wo dies möglich ist.

Diese Arbeit ist nach den Regeln der alten Rechtschreibung verfaßt. Wir behalten die englischen Ausdrücke Loop und Hoop bei, da sich keine deutsche Übersetzung anzubieten scheint, die nicht in Konflikt wäre mit schon definierten Ausdrücken aus der Knotentheorie. Der Ausdruck Constraints (für Zwangsbedingungen) erscheint uns als hinreichend üblich und wird deshalb verwendet.

1.2 Die Situation in der Grundlagenphysik

Die wesentliche Motivation für diese Arbeit stammt aus einem Ansatz zu einer Theorie der Quantengravitation, der sogenannten Loop-Quantengravitation. Wir erläutern in diesem Abschnitt zunächst die Situation in der Grundlagenphysik, die eine Beschäftigung mit Quantengravitation überhaupt nahelegt. Dabei werden kurz die konzeptionellen Schwierigkeiten angesprochen, mit denen sich alle Ansätze konfrontiert sehen. Die wichtigsten Ansätze werden in knapper Form dargestellt und eingeordnet. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich dann speziell mit der Loop-Quantengravitation.

Die Physik hat im vergangenen Jahrhundert zwei große Theoriegebäude hervorgebracht: Quantenmechanik und Allgemeine Relativitätstheorie. Diese Theorien änderten die Naturbeschreibung grundlegend und dehnten sie auf viele bis dahin unzugängliche Bereiche aus. Die Quantenmechanik, ursprünglich entwickelt als Theorie mikroskopischer mechanischer Systeme, wuchs bald zu einer Feldtheorie, die zunächst die elektromagnetische Wechselwirkung beschrieb. Später kamen Feldtheorien für die schwache und die starke Kernkraft hinzu. Es entstanden die Teilchenphysik, Nuklearphysik und Festkörperphysik. Die Allgemeine Relativitätstheorie lieferte eine geometrische Beschreibung der Raumzeit in Wechselwirkung mit Materie. Die Raumzeit wurde als aktiver Bestandteil des physikalischen Geschehens erkannt. Aus der ART erwuchsen Kosmologie und relativistische Astrophysik. Heute gibt es erste Gravitationswellendetektoren, die zu einer Gravitations-Astronomie führen werden.

Der Erfolg dieser Theorien ist enorm: es gibt keinen einzigen experimentellen Befund, der der ART oder dem Standardmodell, in dem die erwähnten Quantenfeldtheorien zusammengefaßt sind, widerspricht. (Einzelne Phänomene sind im Rahmen des Standardmodells schwierig zu erklären, z.B. die Materie-Antimaterie-Asymmetrie im Universum und die endliche Masse der Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung.) Es hat sich jedoch als außerordentlich schwierig erwiesen, eine Theorie der Quantengravitation zu formulieren. Bevor wir einige Ansätze hierzu betrachten, soll kurz beschrieben werden, wozu man eine Theorie der Quantengravitation überhaupt braucht, wobei einige konzeptionelle Probleme angesprochen werden.

Es ist eine naheliegende Vermutung, daß es einen gemeinsamen Rahmen zur Beschreibung aller in der Natur vorkommenden Wechselwirkungen geben sollte. Die vordringlichste Motivation bei der Suche nach einer Theorie der Quantengravitation ist einfach die Tatsache, daß es bisher keine solche Theorie gibt. Der Status Quo ist insofern merkwürdig, als man zwei extrem erfolgreiche Theorien hat, die in ihrem Gültigkeitsbereich sehr genaue Vorhersagen erlauben, die aber sowohl in ihrer mathematischen Struktur als auch in der Interpretation nicht verträglich sind. Die ART als rein klassische Theorie ist deterministisch zu interpretieren, während die Quantenmechanik und ihre Erweiterungen probabilistische Deutungen erfordern. Eine Sonderstellung des Beobachters wie in der Quantenmechanik gibt es in der ART nicht. Ein zentraler Unterschied betrifft den Begriff der Zeit. In der Quantenmechanik tritt sie stets als äußerer Parameter auf, während man in der ART über die Raumzeit spricht, die selbst am physikalischen Geschehen teilnimmt. Innerhalb der Raumzeit gibt es keine kanonisch ausgezeichnete Zeit. Auf weitere konzeptionelle Schwierigkeiten kommen wir unten noch zu sprechen.

Die Erwartungen, was eine Theorie der Quantengravitation leisten soll, sind vielfältig. Viele Physiker teilen die Hoffnung, daß die Synthese von Quantenmechanik und Gravitation grundlegende neue Einsichten über die Begriffe Raum, Zeit, Materie, Kausalität, Messung etc. bringen wird. Die

Vereinigung scheinbar disjunkter Gebiete hat in der Physik stets zu großen Fortschritten geführt: Newton erkannte, daß Gestirne und irdische Objekte denselben Gesetzen gehorchen und schuf die Mechanik, Maxwell vereinigte elektrische und magnetische Phänomene zur Elektrodynamik, Einstein benutzte die Symmetrie (sprich: Lorentz-Invarianz) der Elektrodynamik, um klassische mechanische Begriffe neu zu fassen. Die Quantenmechanik inkorporierte das klassische Teilchen- und Wellenbild, die Quantenfeldtheorie schließlich entstand als Synthese von Quantenmechanik, Elektrodynamik und spezieller Relativitätstheorie. (Interessanterweise schuf Einstein die Allgemeine Relativität weitgehend ohne Vorbild. Als Ausgangspunkt kann die Äquivalenz von träger und schwerer Masse gesehen werden.) Es steht ebenso zu erwarten, daß die Vereinigung von Quantenmechanik und Gravitation weitreichende Konsequenzen für das grundlegende Naturverständnis haben wird.

Um zu verstehen, welche konkreten Hoffnungen an die Quantengravitation geknüpft werden, muß man zunächst etwas über die Energie- und Längenskala sagen, auf der diese Theorie vermutlich wichtig ist. Ein einfaches Argument lautet, daß es eine eindeutige Möglichkeit gibt, die Newtonsche Gravitationskonstante G, das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ und die Lichtgeschwindigkeit c zu einer Größe der Dimension Länge zu kombinieren:

$$L_P := \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-35} m.$$

L_P heißt die *Planck-Länge.* Die zugehörige Energie ist die Planck-Energie E_P von ungefähr $1.3 \cdot 10^{28} eV/c^2$. Diese Größen liefern einen Hinweis auf die natürliche Längen- und Energieskala einer Theorie der Quantengravitation, zumindest wenn man davon ausgeht, daß es eine Störungsentwicklung geben sollte, in der L_P und seine Potenzen eine Rolle spielen. Damit ist man um etliche Größenordnungen von dem entfernt, was heutige Beschleuniger leisten können. Allerdings könnten sich nicht-perturbative Effekte durchaus auch bei niedrigeren Energien bemerkbar machen. Es gibt heute jedoch keinen einzigen experimentellen Befund, der sich eindeutig als Effekt der Quantengravitation ausmachen ließe. Dieser eklatante Mangel an experimentellen Daten hat natürlich dafür gesorgt, daß sehr viele verschiedene Ansätze und Denkschulen in der Quantengravitation entstanden sind. Die zwei wichtigsten Gruppen sind die Teilchenphysiker und die Relativisten.

Die Teilchen- und Hochenergiephysiker beschäftigen sich unter anderem mit Quantengravitation, weil es schon lange die Vermutung gibt, daß eine solche Theorie als Regulator für die übrigen Quantenfeldtheorien dienen könnte. Aus besserer Einsicht über die Struktur der Raumzeit auf sehr kleinen Skalen erhofft man sich, einen natürlichen Cut-Off zu finden, der die Integrale endlich hält. Die wichtigsten Divergenzen, nämlich die sogenannten Ultraviolettdivergenzen, treten gerade dann auf, wenn man in den betreffenden Integralen die Limites $r \to 0$ bzw. $k \to \infty$ betrachtet. In diesem Fall berührt man offenbar Fragen über die Mikrostruktur der Raumzeit, wo der Erwartung nach Gravitation und Quanteneffekte gemeinsam eine Rolle spielen. Grundsätzlicher gesehen ist die Gravitation eine der fundamentalen Wechselwirkungen und zudem die einzige universelle, an der alle massetragenden Teilchen teilnehmen. Teilchen werden aber heute in Quantentheorien beschrieben, und somit hat man eine Schnittstelle zwischen Quanten- und Gravitationstheorie. Darüber hinaus wird oft der Standpunkt vertreten, eine konsistente Behandlung der Quantengravitation sei nur im Rahmen einer viel größeren, alle Wechselwirkungen einbeziehenden Theorie möglich. Dies war eine wesentliche Motivation bei der Entwicklung der String-Theorie in den siebziger und achtziger Jahren. Heute betrachtet man die noch umfassendere M-Theorie (s. unten).

Die andere große Gruppe, die Relativisten, interessieren sich oft deshalb für Quantengravitation, weil unter sehr natürlichen Positivitätsbedingungen an den Energie-Impuls-Tensor in der klassischen ART Singularitäten auftreten. Die ART führt also zu Lösungen, die gewissermaßen ihren eigenen Zusammenbruch anzeigen. Man hofft, daß dieses Verhalten bei der Einbeziehung von Quanteneffekten nicht mehr auftritt. Die von Hawking vorhergesagte Strahlung Schwarzer Löcher [Haw75], die er aus quantenfeldtheoretischen Rechnungen auf klassischen gekrümmten Raumzeiten erhielt, ist ebenfalls ein sehr interessanter Effekt, der einer vollständig quantentheoretischen Behandlung bedarf. Dabei hofft man, etwas über die Thermodynamik Schwarzer Löcher zu lernen. Ein weiteres Ziel ist eine vollständigere Beschreibung des frühen Universums. Auch in diesem Zusammenhang sollte Quantengravitation eine wichtige Rolle spielen. Womöglich liefert sie eine Erklärung für die Vierdimensionalität unserer makroskopischen Welt und die Inflationsphase des frühen Universums.

Die tatsächliche Konstruktion einer Theorie der Quantengravitation ist mit enormen technischen, aber vor allem konzeptionellen Schwierigkeiten verbunden. Diese werden in dem hervorragenden Artikel [Ish95] diskutiert, auf den hier verwiesen sei. Wir erwähnen nur kurz einige zentrale Punkte. Zum ersten ist weitgehend unklar, was überhaupt quantisiert werden soll: "nur" die metrische Struktur, so daß die Quantengravitation mehr oder minder eine weitere Quantenfeldtheorie wäre, oder auch tieferliegende Strukturen wie die Topologie oder die Menge der Raumzeitpunkte selbst? Welche Effekte hat die Quantisierung einer dieser Strukturen auf die anderen? Ist das Kontinuumsbild auch für Abstände in der Größenordnung der Planck-Länge noch zutreffend? Wenn nein, wie allgemein vermutet, ist dann die Verwendung einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Grundobjekt noch gerechtfertigt? Welche Rolle spielt die Diffeomorphismengruppe? Kann man die Vakuum-ART alleine quantisieren oder braucht man mehr Struktur, als anderes Extrem gar eine gemeinsame Theorie aller Wechselwirkungen? In kanonischen Ansätzen, die durch Constraints (Zwangsbedingungen) vollständig beschrieben sind, erhält man typischerweise Ausdrücke wie

$$H = 0,$$

d.h. der Hamiltonsche Constraint, der die Zeitentwicklung kodiert, verschwindet. Die zentrale dynamische Gleichung nimmt somit keinen Bezug auf eine äußere Zeit. Das ist das berühmte *Problem der Zeit* in der Quantengravitation. Erwächst ein Konzept der Zeit aus der Theorie selbst, als Observable etwa? Welche Rolle spielt ein Beobachter? Spätestens bei einer quantentheoretischen Beschreibung des ganzen Universums wird der Begriff eines externen klassischen Beobachters offensichtlich sinnlos. Was ersetzt die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik? Alle diese Fragen sind Gegenstand anhaltender Diskussionen, und über keine einzige Antwort besteht heute Klarheit und Einigkeit. Alle Ansätze, die im folgenden vorgestellt werden, sind natürlicherweise von gewissen Vorurteilen über die Antworten zu den obigen Fragen geprägt.

Einen Überblick über den aktuellen Stand der Forschung und eine Zusammenstellung aller größeren Ansätze bieten [Rov98, Ish95]. Zunächst sollen einige ältere Ansätze erwähnt werden, die zum Teil auch heute noch aktiv verfolgt werden. Auf Triangulierungen der Raumzeit durch einen simplizialen Komplex basieren die Modelle von Regge [WilTuc92] und Ponzano-Regge [PonReg68], letztere haben Bezüge zur Loop-Quantengravitation und zu topologischen Quantenfeldtheorien. Auch dynamische Triangulierungen werden untersucht [ACM98]. Diese diskreten Modelle sollen in einem geeigneten Kontinuumslimes die klassische ART geben.

Andere Ansätze dienen heute eher als Testwerkzeuge für bestimmte Aspekte der Quantengravitation, obwohl sie ursprünglich als potentiell vollständige

Theorien entworfen wurden. Dazu zählt die Euklidische Quantengravitation, die von Hawking initiiert wurde. Ausgangspunkt ist dabei eine Art von Zustandssumme der Form

$$Z(M) := \int \mathcal{D}\gamma e^{-\int_M |\gamma|^{\frac{1}{2}} R(\gamma)},$$

wobei sich das Integral über alle Riemannschen Metriken γ auf einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M erstreckt. Obwohl dieser Ausdruck weit von der Wohldefiniertheit entfernt ist, hat der Ansatz zu einer Reihe interessanter Entwicklungen geführt, siehe z.B. [HarHaw83]. Die Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Räumen hingegen hatte nie den Anspruch, eine vollständige Theorie der Quantengravitation zu sein. Dennoch stammen wertvolle Ergebnisse wie die Erkenntnis, daß Schwarze Löcher thermisch strahlen [Haw75], aus diesem Rahmen.

In der Teilchenphysik sind schon lange perturbative Ansätze beliebt. Als ungestörter Zustand wird meist die flache Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ angenommen. Man betrachtet einen Ausdruck der Form

$$\gamma_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x)$$

Die Kopplungskonstante ist κ, wobei gilt $\kappa^2 = 8\pi G/c^2$ mit der Newtonschen Gravitationskonstante G. Dem physikalischen Feld $h_{\mu\nu}(x)$ kann man in der Quantentheorie ein Boson zuordnen, das die Wechselwirkung vermittelt. Dieses hypothetische Teilchen ist das Graviton, ein masseloses Spin-2-Teilchen. Es zeigte sich schon Anfang der siebziger Jahre, daß solche Ansätze zu nicht renormierbaren Ausdrücken führen [IPS75, IPS81]. Auch die Erweiterungen durch Einschluß von Supersymmetrie und höheren Dimensionen, die schließlich zur 11-dimensionalen Supergravitation führten, die heute im Rahmen der M-Theorie betrachtet wird (siehe unten), brachten keine deutliche Verbesserung in Bezug auf die Divergenzen [Des99]. Diese Art perturbativer Quantengravitation, die sich eng an die üblichen Methoden in der Teilchenphysik anlehnt, scheitert also und wird mittlerweile allenfalls als effektive Theorie betrachtet [Don96].

Der heute populärste und am meisten verfolgte Zugang zu einer Theorie der Quantengravitation ist die String-Theorie [GSW87], die sich mittlerweile zur M-Theorie weiterentwickelt hat. Das Gebiet der String-Theorie ist stark von Methoden und Denkweisen aus der Teilchen- und Hochenergiephysik geprägt. Anfang der siebziger Jahre ursprünglich entworfen als mögliche Theorie der starken Wechselwirkung, zeigte sich bald, daß Strings in ihrem Spektrum das Graviton (und außerdem unendlich viele andere Teilchen) enthalten. Dies führte zu der Hoffnung, daß die String-Theorie als vereinheitlichte Theorie aller Wechselwirkungen dienen könnte. Die ART taucht als kleiner Teil einer viel umfassenderen Struktur auf. Strings sind eindimensionale Objekte, deren Weltflächen in eine Raumzeit mit vorgegebener Metrik, meist der Minkowski-Metrik, eingebettet sind. Auch hier hat man also eine feste Hintergrundstruktur, und es ist fraglich, ob man die Mikrostruktur der Raumzeit auf eine solche Art erfolgreich beschreiben kann. Die meisten Rechnungen in der String-Theorie sind auch heute noch rein perturbativ. Ein Erfolg ist die Ableitung der Entropieformel für extremale Schwarze Löcher [StrVaf96, Mal96]. Die sogenannte M-Theorie ist ein Sammelbegriff für verschiedene Vorschläge, die unterschiedlichen Versionen der String-Theorie in einem noch größeren Rahmen zusammenfassen. Die M-Theorie gilt als mögliche Kandidatin für eine nicht-perturbative Beschreibung aller Wechselwirkungen. Trotz großer Anstrengungen liegt die Bedeutung dieses Ansatzes noch weitgehend im Dunklen.

Der zweite große Zugang zu einer Theorie der Quantengravitation sind Hamiltonsche Ansätze. Diese sind vor allem bei den Relativisten populär. Im Gegensatz zur String-Theorie geht man hierbei davon aus, daß eine Quantisierung der Vakuum-ART allein möglich ist. Die Arbeit, die diesen Zugang begründete, stammt von Arnowitt, Deser und Misner [ADM62]. Zunächst formuliert man die klassische ART in eine Hamiltonsche Form um. Auf einer Raumzeit M mit Lorentz-Metrik wird willkürlich eine Referenz-Blätterung in dreidimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeiten eingeführt, was unter vernünftigen physikalischen Bedingungen immer möglich ist, s. Kapitel 2.A. Auf jeder solchen Untermannigfaltigkeit Σ, die als Raum zu einem festen Zeitpunkt t_0 aufgefaßt wird, führt man kanonisch konjugierte Variablen ein. Arnowitt, Deser und Misner wählten die von der Lorentz-Metrik induzierte Riemannsche Metrik q_{ab} auf Σ als Konfigurationsvariable und $p^{ab} := -\frac{1}{\kappa^2}|q|^{\frac{1}{2}}(K^{ab} - q^{ab}K^c_c)$ als Impulsvariable, wobei K die äußere Krümmung von Σ ist. Diese Variablen sind nicht unabhängig, sondern unterliegen Constraints:

$$\begin{aligned} H_a(x) &= 0, \\ H(x) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \Sigma$. Die H_a sind die drei sogenannten Diffeomorphismen-Constraints, H ist der Hamiltonsche Constraint. Die Constraints entsprechen im wesentlichen der Lie-Algebra von $Diff(M)$, die einmal auf Σ und einmal senkrecht zu Σ projiziert wird. Die Algebra dieser Constraints schließt sich, d.h. sie sind von erster Klasse nach der Definition von Dirac. Sind die Constraints auf jeder raumartigen Hyperfläche erfüllt, so sind damit automatisch alle zehn Einstein-Gleichungen erfüllt. Die Constraints kodieren also den gesamtem dynamischen Gehalt der ART. Es tritt allerdings das Problem der Zeit auf: der Hamiltonsche Constraint, der die "Bewegung durch die Zeit" beinhaltet, nimmt überhaupt keinen Bezug auf irgendeinen Zeitparameter. Dieses konzeptionelle Problem hat zu vielen Diskussionen geführt, siehe z.B. [Ish94].

Um eine Quantentheorie zu konstruieren, kann man das von Dirac vorgeschlagene Verfahren zur Quantisierung von Systemen mit Constraints anwenden [AshTat91]. Dabei wird eine Algebra klassischer Variablen ausgewählt, die durch selbstadjungierte Operatoren auf einem geeigneten Hilbertraum $\mathcal{H}_{aux}$ dargestellt werden. Dieser ist ein Hilfsobjekt, das noch nicht die physikalischen Zustände beherbergt. Die Poissonklammern zwischen den klassischen Observablen müssen in Kommutatoren zwischen den Operatoren übergehen. Anschließend werden die Constraints in selbstadjungierte Operatoren übersetzt oder alternativ ihre exponentierte Wirkung in unitäre Operatoren. Physikalische Zustände der Theorie sind solche, die von allen Constraints annulliert werden, d.h es gilt

$$\hat{C}\psi = 0$$

für einen physikalischen Zustand ψ, wobei $\hat{C}$ ein Constraint-Operator ist. Die physikalischen Zustände liegen typischerweise im Dualraum eines dichten Unterraums des Hilfshilbertraumes $\mathcal{H}_{aux}$. Die Diracsche Prozedur zur Quantisierung von Systemen mit Constraints hat viele hier nicht dargestellte Feinheiten und ist in den letzten Jahren im Rahmen der Loop-Quantengravitation beständig weiterentwickelt worden [AshTat91, ALMMT95, Giu00].

In der ADM-Theorie sind die Constraints von sehr komplizierter, nichtpolynomialer Gestalt in den Variablen q_{ab} und p^{ab}, so daß eine Übersetzung in Operatoren auf einem geeigneten Hilbertraum niemals in befriedigender Form gelang. Die Implementierung der prinzipiell einfacheren Diffeomorphismen-Constraints führte mit einigen technischen Schwierigkeiten zu Lösungen, siehe z.B. [Ish94]. Der quantisierte Hamiltonsche Constraint aber erwies sich als äußerst kompliziertes Objekt. Die Gleichung, die man erhält, ist die berühmte Wheeler-DeWitt-Gleichung, für die lange Zeit keine einzige Lösung bekannt war. Erst durch die Loop-Quantengravitation besserte sich diese Situation etwas. Man hat mit Regularisierungs- und Faktorordnungsproblemen zu kämpfen, und natürlich bleibt das Problem der Zeit erhalten.

1.3 Loop-Quantengravitation

Die Loop-Quantengravitation ist eine *hintergrundfreie, nicht-perturbative, Hamiltonsche Form der Quantengravitation im Vakuum mit nicht-lokalen Variablen.* Hintergrundfreiheit bedeutet, daß keine metrische Struktur auf der Mannigfaltigkeit angenommen wird, nicht einmal zu Hilfszwecken. Dies hat zur Folge, daß man auch keine Kausalstruktur zur Verfügung hat, so daß weitgehend alle Standard-Techniken aus der Quantenfeldtheorie unbrauchbar werden. Man hat insbesondere keinen Minkowskischen Raumzeit-Hintergrund, keine Fockraum-Struktur, keinen Abstandsbegriff, keine Gleichzeitkommutatoren auf der Raumzeit etc. (Auf einer raumartigen Hyperfläche Σ, die als Raum zu einem festen Zeitpunkt interpretiert wird, bilden die klassischen Variablen allerdings eine Poisson-Algebra. Diese Struktur wird dann in die Quantentheorie übersetzt, siehe z.B. [ACZ98]). Die Hintergrundfreiheit erfordert die Entwicklung einer *Quantenfeldtheorie auf einer Mannigfaltigkeit* statt wie sonst auf einer metrischen Mannigfaltigkeit. Somit nimmt die Loop-Quantengravitation die Lehren aus der ART tatsächlich ernst. Eng damit verbunden ist die Nicht-Perturbativität dieses Ansatzes. Die ART wird quantisiert, ohne die gravitative Wechselwirkung als kleine Störung eines ungestörten Zustandes, etwa der flachen, Minkowskischen Raumzeit zu begreifen. Dementsprechend spielen auch Gravitonen, die üblicherweise aus den perturbativen Ansätzen vorhergesagt werden, keine Rolle.

Die Konfigurationsvariablen, die der Quantentheorie zugrunde liegen, sind die Wilson-Loop-Funktionen. Eine Wilson-Loop-Funktion ist die Spur des pfadgeordneten Exponentials. Im wesentlichen wird ein Vektorpotential entlang einer geschlossenen Kurve integriert und dann die Spur gebildet. Diese Variablen sind also nicht-lokal. Da die Wilson-Loop-Funktionen als Zustände aufgefaßt werden können, sind die elementaren Anregungen in der Theorie eindimensional statt nulldimensional wie in Theorien mit Teilchen. Die Loop-Quantengravitation ist entstanden als Vakuum-Theorie. Der Formalismus erweist sich aber als so robust, daß sich auch Materiefelder einbeziehen lassen, siehe z.B. [BaeKra97, Thi97].

Im folgenden geben wir einen kurzen Abriß der historischen Entwicklung der Loop-Quantengravitation. Rovelli, einer der aktivsten Forschenden auf diesem Gebiet, hat mit [Rov97] einen guten Übersichtsartikel veröffentlicht, der eine ausführliche Referenzenliste enthält.

Der Ausgangspunkt der Entwicklung der Loop-Quantengravitation waren die nach ihrem Entdecker benannten Ashtekar-Variablen, siehe [Ash86, Ash87, AshTat91]. Diese stellen einen neuen Satz kanonisch konjugierter Variablen für die Allgemeine Relativität dar. Als Konfigurationsvariable wird ein $SU(2)$-Zusammenhang auf der raumartigen Hyperfläche Σ gewählt, die konjugierte Impulsvariable ist eine gewichtete Triade E auf Σ (für Näheres s. Kapitel 2.A). In ihrer ursprünglichen Form sind die Ashtekar-Variablen komplex. Vielleicht noch ungewöhnlicher ist, daß auch die zugehörige Wirkung S_c komplex ist. S_c läßt sich in einen selbstdualen und einen antiselbstdualen Anteil zerlegen, und man kann zeigen, daß die Variation aller drei Wirkungen dieselben stationären Punkte liefert [Giu94]. Man erhält in allen drei Fällen die Einstein-Gleichungen im Vakuum wieder.

Die neuen Variablen bieten zwei große Vorteile. Zum ersten haben die Constraints eine wesentlich einfachere Gestalt: sie sind Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 in den Ashtekar-Variablen. Diese Tatsache nährte die Hoffnung, eine Übersetzung in wohldefinierte Operatoren sei in dieser Gestalt leichter möglich als bisher. Zum zweiten hat man durch diese Wahl der Variablen den Raum $\mathcal{A}$ der Zusammenhänge auf einem Hauptfaserbündel $P(\Sigma, SU(2))$ als Konfigurationsraum. Durch die Ashtekar-Variablen erhält die ART eine neue Symmetrie, und zwar eine lokale $SU(2)$-Eichsymmetrie. (Die äußere "Symmetrie" gegen Diffeomorphismen bleibt selbstverständlich erhalten.) Fordert man wie üblich, daß physikalische Größen invariant gegen Eichtransformationen sein sollen, so erhält man in natürlicher Weise den Raum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ der Zusammenhänge modulo Eichtransformationen als klassischen Konfigurationsraum. Dies ist *derselbe* Konfigurationsraum wie in der Yang-Mills-Theorie für die Eichgruppe $SU(2)$. In der Physik werden die $A \in \mathcal{A}$ meist auf der Basismannigfaltigkeit Σ statt auf dem Bündel $P(\Sigma, SU(2))$ betrachtet und heißen dann Vektorpotentiale. Alle diese Punkte werden im Hauptteil ausführlich behandelt.

Damit hatte man zum ersten Mal eine Formulierung der ART, die auf dieser grundlegenden Ebene formale Gleichheit zur Yang-Mills-Theorien herstellte. Daher lag es nahe, auch Techniken aus der Yang-Mills-Theorie zu übernehmen. Insbesondere wurden in der zentralen Veröffentlichung [RovSmo90] die sogenannten Wilson-Loop-Funktionen $T_{\tilde{\alpha}}$, die Spuren von Holonomien entlang geschlossener Kurven (Loops) $\tilde{\alpha}$ sind, als Konfigurationsvariablen vorgeschlagen. Die Arbeit von Rovelli und Smolin stieß einen

Hauptzweig der Entwicklung der Loop-Quantengravitation an, die sogenannte *Loop-Darstellung*. Diese wird aber im Gegensatz zu den $T_{\tilde{\alpha}}$ keine große Rolle in dieser Arbeit spielen. Der andere Hauptzweig der Entwicklung, der auch dieser Arbeit zugrunde liegt, ist die von Ashtekar begründete *Zusammenhangs-Darstellung*. Selbstverständlich ist die Trennung nicht sehr eindeutig zu machen, und die beiden Blickwinkel ergänzen sich.

Die Wilson-Loop-Funktionen sind eichinvariante Funktionen auf dem Konfigurationsraum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Ursprünglich wurden sie in der Gitter-QCD eingeführt, um Fragen nach dem Confinement zu behandeln [Wil74], und werden auch heute noch in der Gitter-Eichtheorie verwendet. Gambini und Trias haben die Yang-Mills-Theorie in einer Loop-Darstellung formuliert [GamTri81, GamTri86], wovon später Rovelli und Smolin profitierten [RovSmo90]. Eine gute Übersicht gibt [Lol93]. In der Yang-Mills-Theorie sind die zu den Wilson-Loop-Funktionen gehörigen Operatoren zu singulär, weil sie auf eine Dimension entlang des Loops konzentriert sind, und müssen mit geeigneten Funktionen verschmiert werden. Es zeigt sich aber, daß das in einer diffeomorphismeninvarianten Theorie wie der Gravitation nicht mehr der Fall ist. Die anschauliche Deutung besteht darin, daß die Loops dann nicht mehr lokalisiert sind, sondern durch die Wirkung der Diffeomorphismengruppe über die ganze Mannigfaltigkeit verschmiert werden. Die zu den Wilson-Loop-Funktionen konjugierten Impulsfunktionen enthalten zusätzlich eine Abhängigkeit von den gewichteten Triaden E. Es gibt mehrere Varianten bei der Wahl der Variablen. In [ACZ98] sind die Feinheiten bei der Variablenwahl dargestellt.

Die Arbeit in der Loop-Darstellung zeigte früh, daß Knoten mit gewissen Eigenschaften Lösungen aller Constraints sind und somit prinzipiell als physikalische Zustände der Quantengravitation gelten können [JacSmo88].

Mit der Arbeit [AshIsh92] begann die mathematisch strenge Untersuchung vieler bislang offener Fragen. Die dringlichste war natürlich die nach einem geeigneten Hilbertraum. Dieser wurde mittels Techniken aus der C^*-Algebren-Theorie konstruiert und hat die Gestalt $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. Dabei ist der Quantenkonfigurationsraum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ein echt größerer Raum als der klassische Konfigurationsraum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ (s. Kapitel 3.A). Entsprechendes ist aus skalaren Feldtheorien bekannt [GliJaf87]. Die zentrale Idee war, nach Darstellungen von $C^*(\mathcal{HA})$ zu suchen, der C^*-Algebra, die sich als Vervollständigung der Algebra $\mathcal{HA}$ ergibt, die von den Wilson-Loop-Funktionen $T_{\tilde{\alpha}}$ zu stückweise analytischen Loops α gebildet wird. Das Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ konnte erst in [AshLew94] konstruiert werden. Damit erst hatte man das Skalarprodukt auf $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ gegeben und konnte in mathematisch strenger Weise Zustände der Theorie definieren. Wie im letzten Abschnitt besprochen dient $\mathcal{H}_{aux} := L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ zunächst als Hilfsobjekt, da die Constraints noch nicht implementiert sind. Das Ashtekar-Lewandowski-Maß μ ist invariant gegen analytische Diffeomorphismen ϕ der Mannigfaltigkeit Σ, die physikalisch als der Raum interpretiert wird, d.h. es gilt

$$\int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} f = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \phi(f)$$

für geeignete integrierbare Funktionen f. Es zeigte sich, daß sogenannte Zylinderfunktionen, die nur von endlich vielen Variablen abhängen, integrierbare Funktionen sind. Der wesentliche Trick bei der Definition des Maßes ist, Maße auf bestimmten endlichdimensionalen Räumen X'_S zu definieren und den unendlichdimensionalen Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als einen geeigneten Limes, nämlich als sogenannten projektiven Limes dieser endlichdimensionalen Räume zu erhalten. Unter bestimmten Verträglichkeitsbedingungen an die Maße auf den Räumen X'_S wird dann auch ein Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induziert.

In der Arbeit [AshLew95] wurden projektive Techniken angewandt, um die Konstruktion auf beliebige kompakte Lie-Gruppen als Eichgruppen auszudehnen. Auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ wurden dann auch die notwendigen differentialgeometrischen Strukturen wie Vektorfelder konstruiert, um die Impulsoperatoren zu implementieren [AshLew94b]. Diese technischen Entwicklungen trugen gleichzeitig zu einer deutlichen Klärung des physikalischen Bildes bei und schufen die Voraussetzung für die Implementierung der Diffeomorphismen-Constraints. Die sehr empfehlenswerte Arbeit [ALMMT95] stellt alle wichtigen Punkte zusammen und ist die Standardreferenz für die Entwicklung der Theorie bis einschließlich der Implementierung der Diffeomorphismen-Constraints. Genauer gesagt wird in dieser Arbeit eine deutlich breitere Klasse diffeomorphismeninvarianter Theorien abgedeckt, da die vorgestellten Techniken keinen Bezug auf spezielle Eigenschaften gewisser Theorien nehmen. In [ALMMT95] wird die Quantisierungsstrategie, die ein verfeinertes Diracsches Verfahren ist, ausführlich dargestellt. Es zeigt sich, daß die physikalischen Zustände im Dualraum eines dichten Unterraums von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ liegen. Was 1995 noch ausstand, war die Implementierung des Hamiltonschen Constraints.

In den Anfangsjahren der Entwicklung erwies es sich als schwierig, die sogenannten Realitätsbedingungen in die Quantentheorie zu integrieren, die sicherstellen, daß man trotz der komplexen Wirkung nur reelle, physikalisch sinnvolle Größen als Ergebnisse erhält. Barbero konnte zeigen [Bar95, Imm96], daß man auch mit einer reellen Wirkung arbeiten kann, aber um den Preis, daß der Hamiltonsche Constraint eine kompliziertere, nicht-polynomiale Form annimmt. Heute wird fast ausschließlich diese reelle Form der Ashtekar-Variablen verwendet.

Ein weiteres Problem war, daß die Wilson-Loop-Funktionen eine übervollständige Basis bilden, d.h. sie sind aufgrund von Mandelstam-Identitäten nicht alle linear unabhängig. Für die $SU(2)$ hat man folgende zwei Identitäten:

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\alpha}} T_{\tilde{\beta}} &= \frac{1}{2}(T_{\tilde{\alpha}\circ\tilde{\beta}} + T_{\tilde{\alpha}\circ\tilde{\beta}^{-1}}), \\ T_{\tilde{\alpha}} &= T_{\tilde{\alpha}^{-1}}. \end{aligned}$$

Durch die Einführung einer sogenannten Spin-Netzwerk-Basis konnte das Problem gelöst werden. Ein Spin-Netzwerk ist im wesentlichen ein Graph, dessen Kanten irreduzible Darstellungen der $SU(2)$ und dessen Vertizes zugehörige Intertwiner-Operatoren tragen, die die an einem Vertex einlaufenden Kanten und die auslaufenden Kanten verbinden. Die Menge aller Spin-Netzwerke bildet eine Basis von $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$, und diese Basis kann orthonormal gewählt werden. Die Idee der Spin-Netzwerke geht auf Roger Penrose zurück [Pen71]. Rovelli und Smolin führten die Spin-Netzwerke in die Loop-Quantengravitation ein [RovSmo95], Baez systematisierte und klärte diesen Zugang [Bae96a, Bae96b].

Nach vielen Vorarbeiten anderer Autoren hat Thiemann in einer Reihe von Arbeiten [Thi98a-c] seine Version des quantisierten Hamiltonschen Constraints vorgestellt. Er ging dabei von der reellen Form der Ashtekar-Variablen aus und konnte zeigen, daß gerade wegen der nicht-polynomialen Gestalt des klassischen Hamiltonschen Constraints in diesen Variablen eine Regularisierung des zugehörigen Operators gefunden werden kann. Ob damit allerdings der richtige Operator gefunden ist, der tatsächlich eine Theorie ergibt, die zum einen die ART als klassischen Limes enthält und zum anderen darüber hinaus auch in der Lage ist, neue physikalische Vorhersagen zu liefern, ist unklar und umstritten. Der Operator wirkt nur auf Vertizes von Spin-Netzwerken. Dies deutet auf eine diskrete und kombinatorische Wirkung hin, weshalb man hofft, daß keine Divergenzen in der Theorie auftreten. Allerdings sind viele Aspekte noch nicht hinreichend geklärt, so daß eine abschließende physikalische Beurteilung bisher nicht möglich ist. In

[DGGP99a-c] ist eine alternative Formulierung der Constraints dargestellt.

Einen anderen Weg zu einer vierdimensionalen Theorie der Quantengravitation verspricht man sich von den sogenannten Spin-Schäumen. Diese sind eine Konkretisierung von Wheelers Ideen von einer "schaumigen" Struktur der Raumzeit auf der Planck-Skala. Ein Spin-Schaum besteht aus Flächen, Kanten und Vertizes, und ein Schnitt durch ein solches Gebilde ergibt ein Spin-Netzwerk. Es entstand die Idee, den kanonischen Formalismus weitgehend zu vergessen und nur die Spin-Netzwerke weiter zu verwenden, um einen kovarianten Formalismus aufzuziehen. Die Evolution von einem Spin-Netzwerk zu einem Zeitpunkt zu einem anderen Spin-Netzwerk zu einem anderen Zeitpunkt soll ausgedrückt werden durch eine Summe über alle Spin-Schäume, die die beiden Spin-Netzwerke interpolieren können. Offensichtlich ergibt dies ein höherdimensionales Analogon zu den Feynmanschen Pfadintegralen. Eine der ersten Veröffentlichungen zu diesem Thema ist [ReiRov97]. In der Folgezeit erschienen viele Varianten dieser Modelle, und Verbindungen sowohl zur alten Ponzano-Regge-Theorie als auch zu den topologischen Quantenfeldtheorien taten sich auf. Es ist aber weitgehend unklar, ob diese Ansätze tatsächlich in der Lage sein werden, physikalische Vorhersagen zu liefern.

Eine zentrale offene Frage ist heute, ob die genannten Ansätze die ART als klassischen Limes liefern können. Zu diesem Teilgebiet gibt es erstaunlich wenig Veröffentlichungen [ARS92, VarZap00, ArnGup00]. Diese Arbeiten beschäftigen sich unter anderem mit der Frage, ob man die flache Minkowski-Metrik aus der Quantentheorie wieder erhalten kann. Für die Loop-Quantengravitation ist die flache Metrik nicht etwa ein Vakuum-, sondern ein hoch angeregter Zustand. Viele offene Fragen, gerade über den Hamiltonschen Constraint, lassen sich vermutlich erst klären, wenn man den klassischen Limes besser verstanden hat.

Zum Abschluß dieses Kapitels sollen zwei wesentliche physikalische Vorhersagen der Loop-Quantengravitation erwähnt werden: zum ersten wurde schon 1994 klar, daß man gewisse geometrische Operatoren konstruieren kann, die auf der Planck-Skala Flächen und Volumina messen [RovSmo94, AshLew97, Lew97]. Es zeigte sich, daß diese Operatoren ein diskretes Spektrum haben. Die Loop-Quantengravitation sagt also voraus, daß es eine minimale Fläche und ein minimales Volumen gibt, und daß Flächen und Volumina nur diskrete Werte annehmen können. Daraus ergibt sich ein diskretes Bild für die Mikrostruktur der Raumzeit, das aus einer Theorie, die keinerlei Annahmen über die Hintergrundstruktur macht, vorhergesagt wird. Man spricht in diesem Zusammenhang oft von *Quanten der Geometrie*. Thiemann konnte später auch einen Längenoperator konstruieren [Thi98d].

Eine zweite wichtige Vorhersage betrifft die Entropie und Strahlung Schwarzer Löcher. In [Rov96] ist eine Herleitung der Bekenstein-Hawking-Formel für die Entropie Schwarzer Löcher gegeben, die Argumente aus der Loop-Quantengravitation benutzt. Ein Faktor bleibt allerdings unbestimmt. Eine ausführliche Darstellung dessen, was die Loop-Quantengravitation zur Theorie Schwarzer Löcher beitragen kann, findet sich in [AshKra98]. Unter anderem wird gezeigt, daß aus der Loop-Quantengravitation folgt, daß das Strahlungsspektrum eines Schwarzen Lochs, das nach üblicher Ansicht dem eines Schwarzkörpers entspricht, tatsächlich viele diskrete Linien hat, die von der gewöhnlichen Kurve des Schwarzkörper-Spektrums eingehüllt werden.

Der Formalismus der Loop-Quantengravitation läßt sich prinzipiell auf beliebige höhere Dimensionen erweitern. Auch Supersymmetrie kann einbezogen werden [LinSmo99]. In dieser und anderen Arbeiten (siehe z.B. [Smo97, MarSmo97]) wird durch Erweiterungen des Formalismus eine Verbindung zur String- und M-Theorie hergestellt.

Die Loop-Quantengravitation ist heute eine gut entwickelte Theorie, die als ernsthafte Kandidatin für eine vollständige Theorie der Quantengravitation gelten muß. Das Maß an mathematischer Strenge ist für eine physikalische Theorie ungewöhnlich hoch (aber nicht so hoch, daß es sich nicht lohnte, gewisse Aspekte in einer Diplomarbeit noch einmal gründlich zu durchleuchten). Es gibt verschiedene Ansätze, einen vollständigen vierdimensionalen Formalismus aufzuziehen, doch wie erwartet ist das ein äußerst schwieriges Problem. Möglicherweise hilft die Untersuchung des klassischen Limes weiter, weil der weitgehend fehlende Anschluß an die Alltagsphysik ein zentrales Problem darstellt.

Andererseits ist es sicher nützlich, die mathematischen Strukturen möglichst gründlich zu untersuchen, weil angesichts der fehlenden experimentellen Daten mathematische Konsistenz und Schönheit der Theorie wichtige Leitfäden sind. Heute gibt es keine einzige Theorie der Quantengravitation, die sowohl vollständig als auch mathematisch exakt und ästhetisch ansprechend ist. Gäbe es viele solcher Theorien, ohne daß das Experiment sie verifizieren oder falsifizieren könnte, wäre eine Beschäftigung mit ihnen müßig. Es zeigt sich aber, daß diese drei Forderungen die Auswahl extrem einschränken, so sehr, daß wir bisher keine einzige solche Theorie angeben können. (Das Kriterium der Schönheit ist vielleicht erklärungsbedürftig. Der Erfahrung nach sind erfolgreiche physikalische Theorien stets auch im mathematischen Sinne schön oder ästhetisch ansprechend. Demnach ist es selbst aus der Sicht eines Empirikers durchaus vernünftig, dieses Kriterium heranzuziehen. Das Argument folgt [Bae96b]). Die mathematischen Strukturen, die in der Loop-Quantengravitation auftauchen, sind reichhaltig und ästhetisch ansprechend, und viele elegante Ideen fließen in die Konstruktionen ein. Die Loop-Quantengravitation ist heute vielleicht diejenige Theorie, die der Erfüllung der drei oben genannten Kriterien am nächsten kommt.

1.4 Zur vorliegenden Arbeit

In dieser Arbeit wird ein großer Teil der Kinematik der Loop-Quantengravitation dargestellt. Da der klassische kinematische Rahmen aber genau der $SU(2)$-Yang-Mills-Theorie entspricht, haben die Ergebnisse auch hier Bedeutung. Die Quantisierungsstrategie zielt ausdrücklich auf die Invarianz gegenüber räumlichen Diffeomorphismen ab, man erhält eine in drei Dimensionen kovariante Quantentheorie. Die allgemeine Kovarianz ist natürlich eine Forderung, die man in der gewöhnlichen Yang-Mills- und Quantenfeldtheorie nicht hat. Nimmt man aber die ART ernst, so muß man diese Symmetrie berücksichtigen. Es ist plausibel anzunehmen, daß eine vollständige Theorie, die alle Wechselwirkungen einschließt, auch die Symmetriegruppen aller Teiltheorien berücksichtigen muß.

Die hier vorgestellten Techniken legen die Basis zu einer Quantenfeldtheorie ohne vorgegebene Hintergrundstruktur, also einer *Quantenfeldtheorie auf einer Mannigfaltigkeit* im Gegensatz zu den üblichen *Quantenfeldtheorien auf metrischen Mannigfaltigkeiten*. Die Ergebnisse werden von der $SU(2)$ auf alle in der Physik üblichen Eichgruppen, nämlich die kompakten Lie-Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$, verallgemeinert. Gewisse Resultate gelten sogar für nicht-kompakte Gruppen, Anmerkungen finden sich jeweils im Text. Wir folgen in den Kapiteln 2 bis 4 in großen Teilen den Arbeiten von Ashtekar und Isham [AshIsh92] und Ashtekar und Lewandowski [AshLew94, AshLew95]. Viele Beweise werden klarer dargestellt und gekürzt, einige werden zum Teil deutlich verallgemeinert. Wir schließen vorhandene Beweislücken und führen die einzelnen Arbeiten in einem größeren Rahmen zusammen. Wir geben nach unserem Wissen erstmalig einen Beweis, der das Verhältnis zwischen der dünnen und der Holonomie-Äquivalenz von Loops klärt.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Strukturen definiert. Dazu zählen die Ashtekar-Variablen, Loops, Hoops, Holonomien sowie die Wilson-Loop-Funktionen und deren Algebra, die Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$. Die C^*-Vervollständigung $C^*(\mathcal{HA})$ der Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$ stellt die Algebra der klassischen Konfigurationsvariablen dar.

Grundlegende Überlegungen zur Quantisierung (s. Kapitel 3.A) führen auf den Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ der verallgemeinerten Zusammenhänge modulo Eichtransformationen, der als Quantenkonfigurationsraum identifiziert wird. Ein großer Teil der Arbeit ist diesem Raum und der Konstruktion eines diffeomorphismeninvarianten Maßes μ darauf gewidmet. Damit läßt sich der Hilbertraum der Theorie als $\mathcal{H} := L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ definieren. Wir sprechen von Elementen von $\mathcal{H}$ als Zuständen der Theorie, da wir die Implementation eventuell vorhandener Constraints, wie es sie in der ART gibt, nicht betrachten.

In Kapitel 5 wird zunächst ein neuer Satz bewiesen, der die duale Wirkung von Bündelautomorphismen auf Zusammenhänge und induzierten Diffeomorphismen auf Loops aufzeigt. Anschließend werden einige neue Betrachtungen zu C^∞-Diffeomorphismen angestellt und es wird im Detail geklärt, unter welchen Bedingungen man ein diffeomorphismeninvariantes Maß erhält. Dann geben wir den ersten uns bekannten Beweis für die Diffeomorphismeninvarianz des Ashtekar-Lewandowski-Maßes. Es folgt ein neuer Vorschlag, wie man den Hilbertraum der Theorie erweitern kann, um Invarianz gegenüber beliebigen C^∞-Diffeomorphismen statt nur gegenüber analytischen Diffeomorphismen zu erreichen. Wir diskutieren diesen Vorschlag ausführlich, unter anderem im Verhältnis zu einem weiteren Ansatz aus der Literatur. In Kapitel 6 wird eine kompakte Gruppe $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ vorgestellt, die die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ als dichten Teil enthält. Diese kompakte Gruppe trägt selbst ein Haarsches Maß, das diffeomorphismeninvariant ist. Daraus ergeben sich einige weitere interessante Fragen, die heute noch offen sind.

Jeweils zu Anfang des Kapitels und eines Unterkapitels wird eine Einleitung gegeben, die die wichtigsten Sätze nennt und die physikalische Ideenbildung beschreibt. Neue Ergebnisse und verbesserte Beweise werden erwähnt. Neben der Einleitung sind vor allem die Kapitel 2.A, 2.C, 3.A, 3.D, 4.B, 4.C und 4.D für das physikalische Verständnis wichtig. Dort finden sich längere Erläuterungen. Der Inhalt des Kapitels 5 ist größtenteils, der von Kapitel 6 komplett neu. Wir schlagen Erweiterungen des bestehenden Formalismus vor und präsentieren einige offene Probleme.

In dieser Arbeit werden gewisse Kenntnise der Differentialgeometrie vorausgesetzt, insbesondere der Theorie der Hauptfaserbündel. Die Standardreferenz ist [KobNom63]. Außerdem greifen wir auf die Funktionalanalysis und speziell auf die Gelfandsche Darstellungs- sowie die Maßtheorie zurück [MeiVog92, HewStr69]. Alle wichtigen Ergebnisse werden ausführlich erläutert, aber die grundlegenden Lehrbuchbeweise führen wir nicht an.

Insgesamt sollte die Arbeit sowohl für Physiker als auch für Mathematiker lesbar sein und somit das vorangestellte Goethe-Zitat zumindest teilweise widerlegen helfen.

2 Grundlagen

2.1 Ashtekar-Variablen

In diesem Abschnitt werden die grundsätzlichen Rahmenbedingungen (global hyperbolische Raumzeit in 3 + 1-Zerlegung) für die Entwicklung der Theorie geklärt und eine kurze Definition der Ashtekar-Variablen gegeben. Die Rolle des Immirzi-Parameters wird erwähnt. Der klassische Konfigurationsraum wird identifiziert und als derselbe wie in der Yang-Mills-Theorie erkannt. Dann wird kurz der Übergang zu den Wilson-Loop-Funktionen motiviert, die eichinvariante Größen darstellen.

Im folgenden wird nur eine kurze Definition der Ashtekar-Variablen gegeben. Eine ausführliche Vorstellung findet man in [Giu94]. Standardreferenzen sind die Veröffentlichungen von Ashtekar [Ash86, Ash87, AshLew91]. Für die reelle Version der Ashtekar-Variablen siehe [Bar95], zum Immirzi-Parameter [Imm96]. Es wird hier eine Darstellung in Koordinaten verwendet, die die geometrischen Hintergründe etwas verschleiert. In [BaeMun94] findet man eine mehr geometrisch geprägte Darstellung, die aber deutlich größeren Aufwand erfordert.

Die Ashtekar-Variablen sind neue, kanonisch konjugierte Variablen, die im Klassischen eine neue Hamiltonsche Formulierung der ART erlauben, aber auch als Ansatzpunkt für eine mögliche Quantisierung der Theorie dienen können.

Sei M eine Raumzeit, d.h. eine vierdimensionale, zusammenhängende, orientierbare und zeitorientierbare Lorentz-Mannigfaltigkeit. M sei global hyperbolisch. Das bedeutet im wesentlichen, daß auf M die starke Kausalitätsbedingung gilt. Die starke Kausalitätsbedingung fordert, daß es zu jedem Punkt $p \in M$ und jeder Umgebung U von p eine Umgebung $V \subset U$ gibt, so daß keine kausale Kurve V mehr als einmal durchläuft. Dies ist eine sinnvolle physikalische Forderung.

Nach einem Satz von Geroch [HawEll73] hat M dann die Topologie $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, wobei Σ eine dreidimensionale Riemannsche Hyperfläche ist, die als der Raum eines bestimmten, zu dieser Blätterung gehörenden Beobachters interpretiert wird. Σ sei kompakt, z.B. $\Sigma = S^3$. Die Eigenzeit eines die Blätterung erzeugenden Beobachters nimmt Werte in $\mathbb{R}$ an. Sei $\Theta_t : \Sigma \to M$ eine Einparameter-Familie von Einbettungen, die eine Blätterung von M

erzeugt. Dabei schneidet jede kausale Kurve in M jedes Blatt $\Theta_{t_0}(\Sigma)$ nur genau einmal. Man spricht auch von einer $3+1$-*Zerlegung von* M. Globale Hyperbolizität gestattet die Formulierung der Einsteinschen Gleichungen in Form eines Anfangswertproblems. Dabei werden die Anfangswerte auf einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\Theta_{t_0}(\Sigma)$ vorgegeben. In [SPS00] wird gezeigt, daß unter recht allgemeinen Bedingungen die $3+1$-Zerlegung die vierdimensionale Kovarianz nicht bricht.

Die $3+1$-Zerlegung ist auf viele verschiedene Arten möglich, jeder Beobachter erzeugt eine eigene $3+1$-Zerlegung. Es gibt nicht *den* Raum und *die* Zeit innerhalb der Raumzeit. Wenn in den folgenden Kapiteln von räumlichen Diffeomorphismen gesprochen wird, so sind damit immer die Diffeomorphismen $\phi : \Sigma \to \Sigma$ des als Raum interpretierten Teils Σ einer $3+1$-zerlegten Raumzeit $M = \mathbb{R} \times \Sigma$ gemeint.

Sei g die Metrik auf M, h die induzierte Metrik auf Σ. Da jedes $SO(3)$-Hauptfaserbündel über einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit trivial ist, gibt es eine global definierte Triade auf Σ, die ein globaler Schnitt eines solchen Bündels ist. Nimmt man die Zeitrichtung hinzu, so hat man auf M eine global definierte Tetrade $\{e^I_A\}$. Man wählt diese so, daß

$$g_{AB} = e^I_A e^J_B \eta_{IJ},$$

wobei $\eta_{IJ} := diag(-1, 1, 1, 1)$ die Minkowski-Metrik ist. Man kann die Indizes nach "äußeren" oder Raumzeit-Indizes $(A, B, ...)$ und "inneren" oder Modellraum-Indizes $(I, J, ...)$ unterscheiden. Genauer sind die $A, B, ...$ Indizes, die für Koordinaten der Tangentialräume an M stehen, während die $I, J, ...$ für Koordinaten der Tangentialräume an den Minkowskiraum stehen, der hier als Modellraum fungiert. Alle diese Indizes könne die Werte 0 bis 3 annehmen.

Als nächstes wählt man die Tetrade in Zeiteichung, d.h. $e^0_a = N\partial_a t$, wobei N die Lapse-Funktion ist. Da alle folgenden Betrachtungen auf Σ stattfinden, also einem Blatt der geblätterten Mannigfaltigkeit M, werden zur Unterscheidung vom vierdimensionalen Fall Kleinbuchstaben für die Indizes benutzt. Alle kleingeschriebenen Indizes können Werte von 1 bis 3 annehmen. Physikalisch gesehen betrachtet man den von einem Beobachter gesehenen Raumes zu einem festen Zeitpunkt t_0 (*frozen-time-Formalismus*). Die "Bewegung durch die Zeit" steckt dann im sogenannten Hamiltonschen Constraint, der sich neben anderen Constraints aus den Einstein-Gleichungen ergibt, wenn man diese in einem Hamiltonschen Formalismus (wie hier erst angedeutet) formuliert. Die Triaden e^i_a liegen dann in Σ (genauer: in $\Theta_{t_0}(\Sigma)$). Die von g_{AB} auf Σ induzierte Riemannsche Metrik h_{ab} steht in folgender Beziehung zu den Triaden e^i_a:

$$h_{ab} = \sum_{i=1}^{3} e^i_a e^i_b.$$

Seien Ω^{IJ} der Levi-Civita-Zusammenhang auf M, $\Gamma^i_a := \frac{1}{2} h^b_a \epsilon_{ijk} \Omega^{jk}_b$ sein Pullback auf Σ und $K^i_a := h^b_a \Omega^{0i}_b$ die äußere Krümmung von Σ. Dann definiert man die *Ashtekar-Variablen*

$$\begin{aligned} E^a_i &:= \det(e^i_a) e^a_i, \\ A^i_a(\beta) &:= \Gamma^i_a + \beta K^i_a, \end{aligned}$$

wobei $\beta = \pm i$ den ursprünglichen, komplexen Ashtekar-Variablen entspricht, $\beta = \pm 1$ der heute gebräuchlicheren reellen Version, die von Barbero eingeführt wurde [Bar95]. Tatsächlich ist β bis heute ein freier Parameter in allen auf den Ashtekar-Variablen basierenden Ansätzen zu einer Theorie der Quantengravitation, worauf Immirzi in [Imm96] hingewiesen hat. β heißt der Immirzi-Parameter. Die Festlegung von β ist ein wünschenswertes Ziel, da es sich zeigt, daß verschiedene Wahlen für β zu unitär inäquivalenten Theorien führen [RovThi97]. In dieser Veröffentlichung gibt es eine Andeutung, wie der Parameter β durch Betrachtungen zur Entropie Schwarzer Löcher festgelegt werden könnte. In [CorKra97] wird innerhalb der Loop-Quantisierung der Maxwell-Theorie eine mögliche Verbindung zur Ladungsquantisierung hergestellt. Für unsere Betrachtungen spielt die genaue Festlegung von β aber keine Rolle. Wir wählen ein reelles, positives $\beta \leq 1$.

Die Ashtekar-Variablen sind also eine gewichtete Triade E^a_i und (was hier nicht gezeigt wird) ein $su(2)$-wertiger Zusammenhang A^i_a auf der dreidimensionalen Riemannschen Hyperfläche Σ. (Genauer gesagt handelt es sich bei den A^i_a um die Koordinatenfunktionen einer $su(2)$-wertigen 1-Form auf Σ. Dieser 1-Form läßt sich eindeutig ein Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel $P(\Sigma, SU(2))$ zuordnen. Dies geht, da jedes Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe $SU(2)$ über einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit trivial ist, siehe Bem. 2.16). Die A^i_a und E^a_i sind kanonisch konjugierte Variablen. Die A^i_a sind dabei die Konfigurationsvariablen, die E^a_i die konjugierten Impulse. Seien $x, y \in \Sigma$. Es gelten folgende Beziehungen für die

Poisson-Klammer:

$$\begin{aligned}\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} &= 0 \\ \{E_i^a(x), E_j^b(y)\} &= 0 \\ \{A_a^i(x), E_j^b(y)\} &= 8\pi G_N \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x,y),\end{aligned}$$

wobei G_N die Newtonsche Gravitationskonstante ist. Durch diese Wahl der Variablen hat man für reelles β eine neue $SU(2)$-Symmetrie in der Theorie, die auch einen neuen Constraint erzeugt ($G_i \equiv \nabla_a E_i^a = 0$). Man kann diese $SU(2)$-Eichfreiheit mit der Möglichkeit, in jedem Punkt von Σ ein anderes dreidimensionales Koordinatensystem zu wählen, in Verbindung bringen.

Durch diese Wahl der Variablen wird die Allgemeine Relativität formal sehr viel ähnlicher zu den Yang-Mills-Theorien. In beiden Theorien spielen Zusammenhänge die Rolle von Konfigurationsvariablen. Zwei Zusammenhänge, die durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen, sollen wie üblich physikalisch nicht unterschieden werden. Dadurch wird man auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, den Raum der Zusammenhänge modulo Eichtransformationen, als klassischen Konfigurationsraum geführt. Dies ist gleichzeitig auch der Konfigurationsraum der $SU(2)$-Yang-Mills-Theorie. Die in der Allgemeinen Relativität geforderte Invarianz gegen Diffeomorphismen der Raumzeit (vierdimensionale Kovarianz) bleibt unberührt. Diese kann man als "äußere" Symmetrie betrachten, während die $SU(2)$-Eichfreiheit in dieser Form der ART und die Eichfreiheiten in den Yang-Mills-Theorien (Invarianz gegenüber lokalen $U(1)$- oder $SU(n)$-Transformationen, $n \geq 2$) "innere" Symmetrien sind.

An dieser Stelle bietet sich die Anmerkung zum unterschiedlichen Gebrauch der Begriffe "lokal" und "global" in der mathematischen und der physikalischen Literatur an. Eine von Ort zu Ort variierende, aber auf der ganzen Mannigfaltigkeit definierte (Eich-)Transformation wird in der Physik als *lokale Transformation* bezeichnet. Da diese Transformation aber auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert ist, spricht ein Mathematiker hier von einer *global definierten Transformation*. Unter einer *globalen Transformation* hingegen versteht man in der Mathematik meist eine von Ort zu Ort variierende, auf der ganzen Mannigfaltigkeit wirkende Transformation, während eine *lokale Transformation* in der Mathematik bedeutet, daß diese Transformation nur auf einem Teil der Mannigfaltigkeit, in der Regel lokal in der Nähe eines Punktes, definiert ist. Im folgenden wird die mathematische Sprechweise benutzt.

Bei der Wahl der Zusammenhänge als Konfigurationsvariablen verbleibt der Nachteil, daß die Zusammenhänge keine eichinvarianten Größen sind. Statt der Zusammenhänge selbst kann man die sogenannten Wilson-Loop-Funktionen betrachten. Diese Funktionen auf dem Raum der Zusammenhänge weisen einem Zusammenhang die Spur der Holonomie entlang eines geschlossenen Pfades (Loops) durch die Mannigfaltigkeit zu, siehe Kapitel 2.C. Die Wilson-Loop-Funktionen sind eichinvariante Größen. Es gibt verschiedene Rekonstruktions-Theoreme, die zeigen, daß man aus der Menge der Spuren der Holonomien die Eichäquivalenzklasse des zugehörigen Zusammenhangs wieder erschließen kann. Die mathematisch saubersten Arbeiten sind [Tel69a, Tel69b]. Die stückweise analytischen Loops, die wir verwenden werden, bilden eine gute Familie im Sinne dieser Arbeiten und reichen zur Rekonstruktion aus. Deshalb bietet sich die Wahl der Wilson-Loop-Funktionen als Konfigurationsvariablen an.

Die hier verfolgte Strategie zur Konstruktion einer Quantentheorie besteht also nicht darin, eine bestimmte Eichung willkürlich festzulegen und dann zu quantisieren, sondern vor der Quantisierung zu eichinvarianten Größen überzugehen und anschließend zu versuchen, zugehörige Operatoren zu finden. In dieser Arbeit beschränken wir uns außerdem darauf, die Konfigurationsvariablen zu betrachten. Dies sind die Wilson-Loop-Funktionen. Die Betrachtung der Konfigurationsvariablen reicht aus, um einen Hilbertraum für die Theorie zu konstruieren. Dieser ist zunächst ein Hilfsobjekt, da die Constraints noch nicht implementiert sind. Nicht alle Elemente des (noch zu konstruierenden) Hilbertraums entsprechen also physikalischen Zuständen, sondern nur solche, die von allen Constraints annulliert werden. Die Constraints selbst müssen natürlich zunächst von ihrer klassischen Form in Quanten-Constraints übersetzt werden.

In der vorliegenden Arbeit wird aber ausschließlich der kinematische Rahmen der Theorie vorgestellt. Die Dynamik der Theorie, die in den Constraints kodiert ist, wird nicht das Thema sein. Dieses Vorgehen entspricht der historischen Entwicklung, siehe insbesondere [AshIsh92, AshLew94, AshLew95]. Der $SU(2)$-Constraint, der durch die Ashtekar-Variablen neu in die Theorie kommt, ist durch die Wahl der eichinvarianten Wilson-Loop-Funktionen als Konfigurationsvariablen automatisch erfüllt. Obgleich diese Einschränkung zunächst als Nachteil erscheinen mag, ergibt sich eine äußerst interessante Situation: dieser allgemein gehaltene Ansatz besitzt sowohl für die ART als auch für die Yang-Mills-Theorien Gültigkeit. Eben weil auf einer fundamentalen Ebene der Konstruktion angesetzt wird, lassen sich die Ähnlichkeiten beider Theorien ausnutzen. Der Apparat läßt sich auf $U(n)$, $SU(n)$ oder andere kompakte Gruppen verallgemeinern. An geeigneter Stelle in der Arbeit finden sich Anmerkungen hierzu.

2.2 Loops, Holonomie und Loop-Zerlegung

Es werden die grundlegenden Definitionen zu Loops und Holonomien gegeben. Die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ der stückweise analytischen Hoops wird definiert. Die unterschiedlichen Sprechweisen in Physik und Mathematik (Vektorpotentiale bzw. Zusammenhänge) werden erläutert. In Lemma 2.12 wird das Verhältnis zwischen der dünnen und der Holonomie-Äquivalenz von Loops geklärt. Dieser Beweis ist unseres Wissens neu. Das wichtige Lemma 2.14 stellt den Algorithmus der Loop-Zerlegung vor. Die Bedeutung der stückweise analytischen Loops wird dargestellt. Diese Klasse von Loops ist besonders angenehm, weil die Loops gut kontrollierbare Überschneidungseigenschaften haben. Der Satz 2.17 ist zentral für alles weitere. Er zeigt, daß man zu n beliebigen unabhängigen Hoops und n beliebig vorgegebenen Gruppenelementen immer einen Zusammenhang finden kann, so daß die Holonomien entlang der Hoops bezüglich dieses Zusammenhangs die Gruppenelemente ergeben. Wir konnten diesen Beweis straffen und deutlich verallgemeinern.

Def 2.1.: Ein *Loop in M zum Basispunkt x* ist eine stückweise differenzierbare Kurve

$$\alpha : [0,1] \to M$$

mit $\alpha(0) = \alpha(1) = x,\ x \in M$. Die Menge der Loops zum Basispunkt x wird mit $\mathcal{L}_x$ notiert.

Def. 2.2: Der *konstante Loop in x* ist die konstante Abbildung

$$x_0 : [0,1] \to x, \quad x \in M.$$

Def. 2.3: Seien α, β zwei Loops zum Basispunkt x. Die *Verknüpfung* (das *Produkt*) $\beta \circ \alpha : [0,1] \to M$ ist der Loop

$$(\beta \circ \alpha)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Oft schreibt man nur $\beta\alpha$ statt $\beta \circ \alpha$.

Es handelt sich bei $\beta \circ \alpha$ also nicht um die Hintereinanderausführung von Abbildungen, sondern um das "Aneinanderhängen von Kurvenstücken".

Def. 2.4: Sei α ein Loop in M zum Basispunkt x. Der *rückwärts durchlaufene Loop* α^{-1} ist definiert als:

$$\alpha^{-1} : [0,1] \to M, \quad \alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t).$$

Man nennt α^{-1} auch den *inversen Loop*, die Menge $\mathcal{L}_x$ der Loops zum Basispunkt x ist jedoch keine Gruppe, da $\alpha \circ \alpha^{-1} \neq x_0$.

Def 2.5: Zwei Loops $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_x$ heißen *r-äquivalent*, wenn es eine orientierungserhaltende Reparametrisierung gibt, die α in β überführt, d.h. eine stückweise C^∞-Abbildung

$$\phi : [0,1] \to [0,1]$$

mit $\phi(0) = 0$ und $\phi(1) = 1$, so daß $\beta(t) = \alpha(\phi(t))$ und $\phi'(t) > 0$ für alle $t \in [0,1]$. Eine Äquivalenzklasse $[\alpha]_r$ heißt ein *unparametrisierter Loop*. Die Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{L}_x / \sim_r$ ist eine Halbgruppe, weil die Verknüpfung von unparametrisierten Loops assoziativ ist.

Def. 2.6: Seien $\beta_1, ..., \beta_m$ Loops mit gemeinsamem Basispunkt. $\beta_1, ..., \beta_m$ heißen *unabhängig*, falls jeder Loop β_i ein offenes Kurvenstück enthält, das er selbst nur einmal durchläuft und das von allen anderen $\beta_j, \ j \neq i$ in höchstens endlich vielen Punkten getroffen wird. Sonst heißen diese Loops *abhängig*.

Auch ein einzelner Loop kann abhängig sein, z.B. wenn die Kurve doppelt durchlaufen ist.

Bem. 2.7: Sei G eine lineare Lie-Gruppe, d.h. eine abgeschlossene Untergruppe einer $GL(n,\mathbb{C})$, und sei $\rho : G \to GL(n,\mathbb{C})$ die Darstellung durch Einbettung. Sei A ein Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel (P, π, M, G) mit Strukturgruppe G über M und $\alpha : [0,1] \to M$ eine differenzierbare Kurve. Sei ω die Zusammenhangs-1-Form, also eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf P, wobei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G ist. Sei $U \subset M$ eine offene Menge, über der das Bündel trivial ist und $\theta_U : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ eine Trivialisierung. θ_U definiert durch $\sigma_U(x) := \theta_U^{-1}(x, e)$ einen lokalen Schnitt des Bündels. Durch $\omega_U := \sigma_U^* \omega$ erhält man eine $\mathfrak{g}$-wertige 1-Form auf U. Man hat $A_U = d\rho(\omega_U)$ als lokalen Ausdruck auf U, aber da angenommen war, daß ρ die Darstellung durch Einbettung ist, kann man o.B.d.A. $A_U = \omega_U$ setzen. Falls das Bündel trivial ist, kann man $U = M$ wählen und erhält somit $A_M = \omega$, d.h. bei trivialen Bündeln kann man Zusammenhangs-1-Formen mit $\mathfrak{g}$-wertigen 1-Formen auf der Basismannigfaltigkeit M identifizieren. Die lokalen Ausdrücke A_U sind in der Physik als *Vektorpotentiale* bekannt. In dieser Betrachtungsweise entspricht eine Eichtransformation einer C^∞-Abbildung $\varphi : M \to G$.

Def. 2.8: Die *Holonomie entlang von α bezüglich A* ist definiert durch das pfadgeordnete Exponential

$$H(\alpha, A) := P\exp(-\int_0^1 A_U(\alpha(t))\dot{\alpha}(t)\ dt).$$

Bem. 2.9: 1) Die Holonomie liefert ein Element der Strukturgruppe.
2) Für geschlossene Kurven ist die Holonomie eine Abbildung von der Faser über dem Basispunkt in sich.
3) Sei die fundamentale Darstellung der Strukturgruppe G durch $n \times n$-Matrizen gegeben. Man betrachte das zu P assoziierte Vektorbündel, dessen typische Faser ein n-dimensionaler Vektorraum ($\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$) ist, auf dem G durch diese Darstellung wirkt. Nun kann man die Holonomie als Abbildung von der Faser über $\alpha(0)$ in die Faser über $\alpha(1)$ auffassen. Diese Abbildung ist der Paralleltransport längs α.

Def. 2.10: Zwei Loops α, β heißen *holonomie-äquivalent*, falls

$$H(\alpha, A) = H(\beta, A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Die Äquivalenzklassen nennt man *Hoops* und notiert sie mit einer Tilde: $\tilde{\alpha}$. Die Hoops bilden eine Gruppe. Die Verknüpfung ist die Hintereinanderdurchlaufung, das Inverse eines Hoops ist der rückwärts durchlaufene Hoop und das neutrale Element $\tilde{x}_0$ ist die Äquivalenzklasse des konstanten Loops. Als *Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$* wird die Untergruppe der Gruppe aller Hoops zu einem festen Basispunkt $x \in \Sigma$ bezeichnet, deren Bilder in Σ liegen und deren Elemente stückweise analytisch sind.

Diese Definition der Hoop-Gruppe ist in der Literatur üblich, man vergleiche die grundlegende Veröffentlichung [AshLew94]. Wie man später sehen wird, rührt diese Einschränkung auf analytische Hoops daher, daß sie angenehme Überschneidungseigenschaften haben. Dadurch werden zentrale Beweise erst möglich. Man hat somit aber keine allgemeinen C^∞-Kurven, und wenn in Kapitel 5.C die Wirkung von Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit, in der die Hoops liegen, betrachtet wird, kann man zunächst nur analytische Diffeomorphismen heranziehen (und nicht beliebige C^∞-Diffeomorphis-men), um die angegebene Klasse von Hoops nicht zu verlassen. Wir gehen in Kapitel 5.C detailliert auf die Unterschiede zwischen analytischen und beliebigen C^∞-Diffeomorphismen ein. Hat man nur analytische Diffeomorphismen zur Verfügung, so kann man zum Beispiel keine "lokalen" Transformationen erzeugen, sprich Diffeomorphismen, die außerhalb eines Kompaktums die Identität darstellen. Ein solcher Diffeomorphismus stimmt auf einer offenen nichtleeren Menge mit der Identität überein, und jeder analytische Diffeomorphismus, für den dies gilt, ist bereits die Identität, s. Diskussion in Unterabschnitt 5.C.2. In diesem Abschnitt machen wir einen Vorschlag zur Erweiterung des Formalismus auf beliebige C^∞-Diffeomorphismen.

Def. 2.11: Zwei Loops α, β heißen *dünn äquivalent*, falls α und β sich nur durch eine orientierungserhaltende Reparametrisierung und durch Kurvenstücke der Art $\delta^{-1} \circ \delta$ unterscheiden.

In der Literatur gibt es immer wieder die Vermutung, daß die beiden Begriffe der Holonomie- und der dünnen Äquivalenz gleichwertig seien. Ein Beweis findet sich aber nicht, deswegen soll das folgende Lemma die Situation klären. Insbesondere zeigt es, daß die beiden Äquivalenzbegriffe nur für nicht-abelsche Strukturgruppen, bezüglich derer die Bündel, Zusammenhänge und Holonomien definiert sind, gleich sind.

Lemma 2.12: Für abelsche Strukturgruppen sind die Äquivalenzklassen der Holonomie-Äquivalenz größer als die der dünnen Äquivalenz, für nicht-abelsche Strukturgruppen sind sie gleich, d.h. hier sind zwei Loops genau dann holonomie-äquivalent, wenn sie dünn äquivalent sind.

Bew.: Es sind wohlbekannte Eigenschaften der Holonomie-Abbildung, daß sie invariant gegen eine orientierungserhaltende Reparametrisierung der Kurve ist und daß gilt

$$H(\delta^{-1} \circ \delta, A) = H(\delta^{-1}, A) H(\delta, A) = H(\delta, A)^{-1} H(\delta, A) = e \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Dabei ist $\mathcal{A}$ die Menge der Zusammenhänge auf einem Hauptfaserbündel mit der gewählten Strukturgruppe. Deswegen impliziert die dünne Äquivalenz von Loops die Holonomie-Äquivalenz.

Seien umgekehrt α, β holonomie-äquivalente Loops, d.h.

$$\begin{aligned} & H(\alpha, A) = H(\beta, A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow \quad & H(\alpha \circ \beta^{-1}, A) = e \quad \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Sei $\gamma := \alpha \circ \beta^{-1}$. γ ist also holonomie-äquivalent zum konstanten Loop. Zunächst überlegt man sich, daß jedes Kurvenstück von γ in beiden Richtungen gleich häufig durchlaufen werden muß, damit obige Forderung erfüllt werden kann. Andernfalls gibt es ein Kurvenstück, das in der einen Richtung häufiger durchlaufen wird als in der anderen. Man wähle einen Zusammenhang ω so, daß sich der Träger von ω mit diesem Kurvenstück auf einem Intervall überschneidet, mit den übrigen Kurvenstücken aber nicht. Zur Holonomie tragen also nur die Durchlaufungen dieses Kurvenstücks bei. Es gibt Zusammenhänge, bei denen die Holonomie bei Durchlaufung dieses Kurvenstücks nicht das neutrale Element liefert, also kann ein solches γ nicht holonomie-äquivalent zum konstanten Loop sein.

1. Fall: Abelsche Strukturgruppen

Im abelschen Fall gibt es Loops, die holonomie-äquivalent zum konstanten Loop sind, aber nicht dünn äquivalent. Ein Beispiel ist der Loop in Abb. 1[1], der folgendermaßen zu lesen ist: Man geht zunächst auf α, β und γ in den angegebenen Richtungen, danach auf α, β und γ rückwärts. Man erhält einen Loop, der nur Kurvenstücke enthält, die vorwärts und rückwärts je einmal durchlaufen werden, der aber nicht dünn äquivalent zum konstanten Loop ist. Seien $g_\alpha(\omega) := H(\alpha, \omega),\ g_\beta(\omega) := H(\beta, \omega),\ g_\gamma(\omega) := H(\gamma, \omega)$. Man erhält für die Holonomie des gesamten Loops

$$\begin{aligned} H(\gamma^{-1} \circ \beta^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha, \omega) &= g_{\gamma^{-1}} g_{\beta^{-1}} g_{\alpha^{-1}} g_\gamma g_\beta g_\alpha \\ &= g_{\gamma^{-1}} g_\gamma g_{\beta^{-1}} g_\beta g_{\alpha^{-1}} g_\alpha \\ &= e \quad \forall \omega \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Kommutativität der Gruppe ausgenutzt wurde.

2. Fall: Nicht-abelsche Strukturgruppen

Sei γ so, daß gilt $H(\gamma, \omega) = e\ \forall \omega \in \mathcal{A}$. Dann gibt es γ_1, γ_2 mit $\gamma_1 \gamma_2 = \gamma,\ H(\gamma_1, \omega) = g(\omega),\ H(\gamma_2, \omega) = g(\omega)^{-1}$. γ_1 und γ_2 hängen von ω ab. Sei γ_1' der Loop, der aus γ_1 ensteht, wenn man alle Teilkurven der Gestalt $\delta^{-1} \circ \delta$ entfernt hat. γ_1' ist sowohl holonomie- (wegen $H(\delta^{-1} \circ \delta, A) = e$) als auch

[1] Siehe Datei Abb1.gif

dünn äquivalent zu γ_1. Analog sei γ_2' definiert. Sei

$$\gamma_1' = \gamma_{11} \circ ... \circ \gamma_{1n}.$$

Nach der Bemerkung oben ist γ_2' eine Verknüpfung der Teilkurven $\gamma_{11}^{-1}, ..., \gamma_{1n}^{-1}$, weil jedes Kurvenstück von γ_1' auch rückwärts durchlaufen werden muß. Die Behauptung ist nun, das bei nicht-abelschen Strukturgruppen gelten muß

$$\gamma_2' = \gamma_{1n}^{-1} \circ \gamma_{1(n-1)}^{-1} \circ ... \circ \gamma_{11}^{-1},$$

d.h. $\gamma_1' \circ \gamma_2'$ ist dünn äquivalent zum konstanten Loop.

Dies sieht man wie folgt: Sei $g_i(\omega) := H(\gamma_{1i}, \omega),\ i = 1, ...n$. Falls γ_2' nicht die obige Gestalt hat, so gilt

$$\begin{aligned} H(\gamma_1', \omega) &= g_1(\omega)...g_n(\omega) =: g, \\ H(\gamma_2', \omega) &= g_{P(n)}^{-1}(\omega)...g_{P(1)}^{-1}(\omega) =: g', \end{aligned}$$

wobei $P : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}$ eine Permutation ist, die nicht die Identität darstellt. Wegen der Nichtkommutativität der Strukturgruppe ist g' im allgemeinen nicht das Inverse von g. Daher gilt, daß $H(\gamma, \omega) = H(\gamma_1' \circ \gamma_2', \omega) = gg'$ nicht für alle Zusammenhänge $\omega \in \mathcal{A}$ gleich e ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $H(\gamma, \omega) = e\ \forall \omega \in \mathcal{A}$. $\gamma_1' \circ \gamma_2'$ ist also dünn äquivalent zum konstanten Loop. Da gilt $\gamma_1' \circ \gamma_2' \sim_t \gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma = \alpha \circ \beta^{-1}$, bedeutet das, daß aus der Holonomie-Äquivalenz von α und β die dünne Äquivalenz folgt.

□

Im Fall nicht-abelscher Gruppen stimmen nach dem eben bewiesenen Satz die Begriffe der dünnen und der Holonomie-Äquivalenz überein. Da die Definition der dünnen Äquivalenz keinen Bezug auf irgendeine Gruppe nimmt, bedeutet das, daß die Holonomie-Äquivalenz unabhängig von der Gruppe ist, bezüglich derer das Bündel, der Zusammenhang und die Holonomie definiert sind. Es gibt somit für nicht-abelsche Gruppen nur eine Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$.

Def. 2.13: Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m$ Hoops mit gemeinsamem Basispunkt. $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m$ heißen *unabhängig*, wenn es unabhängige Repräsentanten $\beta_1, ..., \beta_m$ gibt.

Stückweise analytische Hoops sind solche, die sich in eine Potenzreihe entwickeln lassen. Sie können sich nur auf einfache Weise überschneiden.

Das liegt am Identitätssatz für Potenzreihen: Zu jeder endlichdimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit M gibt es einen reell-analytischen Atlas. Betrachtet man nun eine analytische Kurve $\alpha : [0,1] \to U,\ U \subset M$ und das Bild von α unter einer Kartenabbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}$, so hat man in der Zusammensetzung eine analytische Abbildung $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Jede andere analytische Kurve, die unendlich viele gemeinsame Punkte mit α hat, ist aufgrund des Identitätssatzes für Potenzreihen identisch mit α, da sich die gemeinsamen Punkte an wenigstens einer Stelle häufen müssen.

Betrachtet man nun stückweise analytische Hoops, so können diese auf einem Stück entweder übereinstimmen oder sich in höchstens endlich vielen Punkten überschneiden.

Lemma 2.14 (Loop-Zerlegung): Zu jeder endlichen Menge $\{\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m\}$ von stückweise analytischen Hoops gibt es eine endliche Menge $\{\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n\}$ von unabhängigen stückweise analytischen Hoops, so daß sich alle $\tilde{\beta}_i$ als Worte in den $\tilde{\gamma}_j$ und ihren Inversen darstellen lassen.

Bew.: Es wird ein Algorithmus dargestellt, der aus der Menge $\{\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m\}$ die Menge $\{\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n\}$ erzeugt. Man wählt zunächst zu den $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m$ Repräsentanten $\beta_1, ..., \beta_m$, die keine Teilkurven der Gestalt $\delta^{-1} \circ \delta$ ("Stacheln") enthalten. Im gemeinsamen Bild der $\beta_1, ..., \beta_m$ werden jetzt bestimmte Punkte ausgezeichnet, die man *Vertizes* nennt. Als ersten Vertex v_1 nimmt man den gemeinsamen Basispunkt x der β_i, $v_1 := x$. Gibt es im gemeinsamen Bild der Kurven n-fach und m-fach durchlaufene Kurvenstücke, $n \neq m$, so seien die weiteren Vertizes die Punkte, an denen die n- und m-fach durchlaufenen Kurvenstücke aneinanderstoßen. Dabei ist es unerheblich, ob ein Loop dasselbe Stück mehrfach durchläuft oder mehrere Loops zur Zahl der Durchlaufungen des Kurvenstücks beitragen. Vertizes markieren also die Punkte, an denen Kurvenstücke mit einer konstanten Zahl von Durchlaufungen beginnen oder enden.

Die von den Vertizes markierten Kurvenstücke e_j (in einfacher Durchlaufung und beliebig gewählter Orientierung) heißen *Kanten*. Zu jeder Kante gehören somit zwei Vertizes, ihr Anfangs- und ihr Endpunkt. An dieser Stelle kommt die stückweise Analytizität der Hoops ins Spiel, die dafür sorgt, daß je zwei Repräsentanten entweder ein gemeinsames Stück durchlaufen oder sich in höchstens endlich vielen Punkten treffen. Da die Zahl der gemeinsam durchlaufenen Stücke ebenfalls endlich ist, ist auch die Zahl der Vertizes endlich.

Sei $\{v_1, ..., v_r\}$ die Menge der Vertizes. Sie ist wegen $v_1 = x$ nicht leer. Sei ε_{v_1} der konstante Loop. Zu $v_j,\ 2 \leq\ j \leq r$ wählt man nun jeweils eine analytische Kurve ε_{v_j}, die x mit v_j verbindet und dabei alle β_i in höchstens endlich vielen Punkten trifft. Sei $\{e_1, ..., e_n\}$ die Menge der Kanten. Für die k-te Kante e_k sei $v_a(k)$ der Startpunkt und $v_e(k)$ der Endpunkt. Man definiert:

$$\gamma_k := \varepsilon^{-1}_{v_e(k)} \circ e_k \circ \varepsilon_{v_a(k)}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Diese Loops sind unabhängig: Der Loop γ_k enthält die Kante e_k, die einfach durchlaufen wird und von allen anderen γ_j (genauer: von allen ε_v) in höchstens endlich vielen Punkten getroffen wird. Bildet man die zugehörigen Äquivalenzklassen, so erhält man die Menge $\{\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n\}$ von unabhängigen Hoops. Es ist zu zeigen, daß alle Hoops $\tilde{\beta}_i$ sich als Worte in den $\tilde{\gamma}_k$ und ihren Inversen darstellen lassen. Man betrachte wieder die Repräsentanten β_i, die keine Teilkurven der Gestalt $\delta^{-1} \circ \delta$ enthalten. Auf jedem β_i liegen ein oder mehrere Vertizes. Ausgehend vom Vertex $v_1 = x$ bewegt man sich in Durchlaufungsrichtung bis zum nächsten Vertex v_p, der auf β_i liegt. Diese Teilkurve ist offensichtlich eine Kante e_k oder die Inverse e_k^{-1} einer Kante. Von dort läuft man auf $\varepsilon_{v_p}^{-1}$ zurück nach x. Der soeben beschriebene Loop ist äquivalent zu einem der oben definierten Loops, nämlich γ_k, oder zum inversen Loop γ_k^{-1}. Als nächstes läuft man von x auf ε_{v_p} wieder zum Vertex v_p, dann von v_p auf β_i weiter auf der Kante e_l (oder e_l^{-1}) bis zum nächsten Vertex v_q, der auf β_i liegt, und von dort auf $\varepsilon_{v_q}^{-1}$ zurück nach x. Der beschriebene Loop ist γ_l (oder γ_l^{-1}). Man fährt in dieser Art fort, bis die zuletzt durchlaufene Kante wieder den Basispunkt x erreicht (bei n-facher Durchlaufung des Basispunkts zum n-ten Mal erreicht). Die durchlaufenen Kanten ergeben zusammengesetzt β_i. Zwischen den Durchlaufungen der Kanten läuft man vom Vertex, der den Endpunkt der einen Kante bildet, zum Basispunkt, und dann wieder vom Basispunkt zum selben Vertex, der gleichzeitig der Anfangspunkt der nächsten Kante ist. Diese Teilkurven haben also die Gestalt $\delta^{-1} \circ \delta$. Damit ist klar, daß β_i und die Vernüpfung der oben beschriebenen Loops in der selben Äquivalenzklasse liegen. Die oben beschriebenen Loops sind wiederum äquivalent zu den γ_j und ihren Inversen, so daß sich der Hoop $\tilde{\beta}_i$ aus den Hoops $\tilde{\gamma}_j$ und ihren Inversen zusammensetzen läßt. □

Bem. 2.15: Es ist für den vorgestellten Algorithmus allein ausschlaggebend, daß die vorgegebenen Hoops sich nur auf die beschriebene einfache Weise überschneiden. Bei beliebigen stückweise analytischen Hoops ist das immer der Fall. Man könnte aber auch andere Arten von Hoops, insbesondere stückweise C^∞-Kurven, betrachten, wenn man voraussetzt, daß sie die angenehmen Überschneidungseigenschaften analytischer Hoops haben. (Im allgemeinen ist das nicht der Fall, zwei C^∞-Kurven können sich z.B. auf einer Cantor-Menge überschneiden.) Wir werden uns aber zunächst auf stückweise analytische Hoops beschränken. In Kapitel 5 wird die Betrachtung ausgeweitet.

Bem. 2.16: Jedes Hauptfaserbündel über einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit mit einer Lie-Gruppe als Strukturgruppe ist trivial. Dies folgt aus allgemeinen Überlegungen in der Homotopie-Theorie, s. [Ish84], S. 1085. Insbesondere ist jedes Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe $SU(2)$ über einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit trivial. Daher läßt sich über eine Trivialisierung jeder Zusammenhangs-1-Form auf dem Bündel eine 1-Form

$$A := \omega^i \otimes X_i \in \Omega^1(\Sigma) \otimes su(2)$$

zuordnen. Man identifiziert somit $\mathcal{A}$ mit dem Raum der $su(2)$-wertigen 1-Formen auf der Basismannigfaltigkeit Σ (s. auch Bemerkung 2.7).

Nach dieser Bemerkung können wir einen Zusammenhang A auch als $su(2)$-wertige 1-Form auf Σ betrachten. In der Physik ist das die übliche Sichtweise. Während ein Zusammenhang als 1-Form mit bestimmten Eigenschaften auf dem Totalraum eines Hauptfaserbündels definiert ist, sind die in der Physik gebräuchlichen Vektorpotentiale auf der Basismannigfaltigkeit definiert. Ist das Bündel nicht trivial, so gibt es kein global (d.h. auf der ganzen Basismannigfaltigkeit) definiertes Vektorpotential. Im Fall eines $SU(2)$-Hauptfaserbündels über einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit hat man aber gerade die angenehme Eigenschaft, daß das Bündel immer trivial ist, so daß man statt der Zusammenhangs-1-Form auf dem Totalraum das zugehörige Vektorpotential auf der Basismannigfaltigkeit Σ betrachten kann.

Der folgende Satz ist zentral für alle weiteren Konstruktionen. Er wird hier in deutlich größerer Allgemeinheit formuliert als bisher in der Literatur, vgl. die Form in [AshLew94].

Satz 2.17: Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ beliebige unabhängige Hoops in einer Mannigfaltigkeit M beliebiger Dimension und $g_1, ..., g_n \in G$, wobei G eine Gruppe ist, deren zugehörige Exponentialabbildung von der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ in die Gruppe G surjektiv ist. Sei $\mathcal{A}_G$ die Menge der Zusammenhänge auf einem

Hauptfaserbündel $P(M,G)$. Dann gibt es ein $A \in \mathcal{A}_G$, so daß

$$H(\beta_i, A) = g_i \ \forall \ i = 1, ..., n.$$

Bew.: Seien $\beta_1, ..., \beta_n$ Repräsentanten der $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$, die keine Teilkurven der Gestalt $\delta^{-1} \circ \delta$ enthalten. Nach Voraussetzung enthält jeder Loop β_i ein offenes nichtleeres, einmal durchlaufenes Kurvenstück β_i^i, so daß $im\ \beta_i^i \cap im\ \beta_j^j = \emptyset$ für $i \neq j$. Sei $im\ \beta_i^i \subseteq U_i$, wobei $U_i \subset M$ eine offene Menge ist, über der das Bündel trivial ist (gegebenenfalls muß man β_i^i einschränken), und $U_i \cap U_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Zu jedem U_i wählt man eine 1-Form $\omega^i \in \Omega^1(M)$, die auf $im\ \beta_i^i$ nicht verschwindet und deren Träger ganz in U_i enthalten ist. Sei $X_i \in \mathfrak{g}$. Man definiert $A_i = \omega^i \otimes X_i$. (Dabei ist keine Summation über i impliziert, i hat jeweils *einen* festen Wert.) Dann gilt

$$H(\beta_i, A_i) = \exp((\int_{\beta_i} \omega^i) X_i),$$

wobei $\int_{\beta_i} \omega^i \neq 0$ nach Voraussetzung. Das pfadgeordnete Exponential wird hier zu einem gewöhnlichen Exponential, da X_i fest ist und A_i somit Werte in einem eindimensionalen Unterraum von $\mathfrak{g}$ hat. Daher vertauschen $A_i(t)$ und $A_i(t')$. Da weiter vorausgesetzt wurde, daß die Exponentialabbildung surjektiv ist, gibt es ein $Y_i \in \mathfrak{g}$, so daß $g_i = \exp Y_i$. Man wählt demnach ω^i und X_i so, daß gilt

$$Y_i = \frac{1}{\int_{\beta_i} \omega^i} X_i.$$

Die so erhaltenen A_i (Vektorpotentiale) kann man immer zu einer Zusammenhangs-1-Form A auf dem Totalraum P des Bündels zusammenkleben, weil die Träger der A_i disjunkt sind und die Verträglickeitsbedingungen somit trivial erfüllt werden. Offensichtlich gilt $H(\beta_i, A) = g_i$ wie gefordert.

$\square$

Dieser Satz gilt für alle Gruppen, deren Exponentialabbildung surjektiv ist. Dazu gehören insbesondere kompakte zusammenhängende Lie-Gruppen, z.B. die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ [Hoc65]. Damit sind alle Gruppen abgedeckt, die in der Physik üblicherweise eine Rolle als Symmetriegruppe spielen. Bei unseren weiteren Betrachtungen ist vor allem die $SU(2)$ von Bedeutung. Der Satz gilt aber auch für nil-potente Gruppen und gewisse nicht-kompakte Gruppen, z.B. die $GL(n, \mathbb{C})$ (nicht aber die $GL(n, \mathbb{R})$).

2.3 Wilson-Loop-Funktionen und ihre Algebren

In diesem Abschnitt werden die Wilson-Loop-Funktionen eingeführt. Ihre Eichinvarianz wird gezeigt und die Mandelstam-Identitäten werden erläutert. Von diesem Abschnitt an konzentrieren wir uns zunächst auf die Eichgruppe $SU(2)$, die durch die Wahl der Ashtekar-Variablen für die Loop-Quantengravitation vorgegeben ist. In Kapitel 4 wenden wir uns wieder allgemeineren Gruppen zu. Der komplexe Vektorraum über der Menge der Wilson-Loop-Funktionen ist eine Algebra, die sogenannte Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$. Ihre Vervollständigung zu einer kommutativen C^*-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ ist das zentrale Objekt für die weiteren Untersuchungen. $C^*(\mathcal{HA})$ ist die Algebra der klassischen Konfigurationsvariablen.

Def. 2.18: Sei A ein Zusammenhang auf einem Hauptfaserbündel P mit Strukturgruppe G über M und $\alpha : [0,1] \to M$ ein stückweise differenzierbarer Loop zum Basispunkt x. Dann heißt

$$T_\alpha(A) := \frac{1}{n} trH(\alpha, A)$$

die *Wilson-Loop-Funktion bezüglich α und A*. Dabei liefert die Holonomie ein Element von G und die Spur ist in einer n-dimensionalen Matrixdarstellung von G zu bilden.

Bem. 2.19: 1) Die Wilson-Loop-Funktionen sind invariant gegenüber Eichtransformationen: Sei $a : P \to G$ ein zu einer Eichtransformation $\phi : P \to P$ gehöriges Eichfeld. Das Bündel sei über einer Umgebung des Basispunkts $\alpha(0) = \alpha(1)$ des Loops α trivial. Sei $\sigma_U : U \to \pi^{-1}(U)$ der zu einer Trivialisierung θ_U gehörige Schnitt. Man definiert $a_U := a \circ \sigma_U : U \to G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} H(\alpha, A') &= a_U(\alpha(1))^{-1} H(\alpha, A) a_U(\alpha(0)) \\ &= g_0^{-1} H(\alpha, A) g_0, \end{aligned}$$

wobei A' der durch die Eichtransformation aus A hervorgegangene Zusammenhang ist und $g_0 = a_U(\alpha(0))$. Für nicht-abelsche Gruppen ist die Holonomie keine eichinvariante Größe, wohl aber ihre Spur bezüglich einer Darstellung der Gruppe G,

$$trH(\alpha, A') = trH(\alpha, A).$$

2) $T_\alpha(A)$ hängt nur vom Hoop $\tilde{\alpha}$ und der Eichäqivalenzklasse $\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ von A ab. Wir schreiben daher

$$T_{\tilde{\alpha}}(\tilde{A}) : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \mathbb{C}, \quad T_{\tilde{\alpha}}(\tilde{A}) = \frac{1}{n} trH(\alpha, A),$$

wobei α und A Repräsentanten von $\tilde{\alpha}$ bzw. $\tilde{A}$ sind.

Die Wilson-Loop-Funktionen sind nicht alle unabhängig. Je nach Strukturgruppe des zugrunde liegenden Bündels ergeben sich bestimmte Beziehungen zwischen den $T_{\tilde{\alpha}}$, die Spuridentitäten in der jeweiligen Strukturgruppe entsprechen. Wir werden uns jetzt auf den für die Loop-Quantengravitation wichtigen Fall $G = SU(2)$ konzentrieren. Im folgenden ist $SU(2)$ die Strukturgruppe des betrachteten Hauptfaserbündels, Zusammenhänge sind reelle $SU(2)$-Zusammenhänge auf diesem Bündel usw. Die Spur in der Wilson-Loop-Funktion ist zu bilden bezüglich der Fundamentaldarstellung von $SU(2)$, der Vorfaktor $\frac{1}{n}$ wird zu $\frac{1}{2}$.

Def. 2.20: Die Menge der Zusammenhänge auf dem Hauptfaserbündel $P(\Sigma, SU(2))$ wird mit $\mathcal{A}$ bezeichnet, die Menge der Eichäquivalenzklassen von Zusammenhängen mit $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Die wichtigsten Beziehungen zwischen Wilson-Loop-Funktionen sind die *Mandelstam-Identitäten* [Man79, Lol93]. Für $SU(2)$ in der Fundamentaldarstellung durch 2×2-Matrizen gibt es zwei solche Identitäten:

$$T_{\tilde{\alpha}} T_{\tilde{\beta}} = \frac{1}{2}(T_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + T_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}}), \tag{1}$$

$$T_{\tilde{\alpha}} = T_{\tilde{\alpha}^{-1}}. \tag{2}$$

Man erhält diese nichtlinearen Beziehungen als Spur-Identitäten von $SU(2)$. Allgemeiner gilt für 2×2-Matrizen C, D mit $\det D = 1$

$$trC\ trD = trCD + trCD^{-1}$$

und

$$trD = trD^{-1},$$

wie man leicht überprüft. Sei B eine $SU(2)$-Matrix in der Fundamentaldarstellung. B hat die Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, daher gilt

$$|trB| = |a + \overline{a}| = |2\,\mathrm{Re}(a)| \leq 2,$$

also ist

$$-1 \leq T_{\tilde{\alpha}}(\tilde{A}) \leq 1 \quad \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG},\ \tilde{A} \in \mathcal{A}.$$

Die Wilson-Loop-Funktionen für $SU(2)$ sind also reellwertige, beschränkte Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, dem Raum der Zusammenhänge modulo Eichtransformationen. Wegen der Mandelstam-Identität (1), die Geschlossenheit unter der Multiplikation bedeutet, ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum über der Menge der

Wilson-Loop-Funktionen eine Algebra.

Def. 2.21: Die *Holonomie-Algebra* $\mathcal{HA}$ ist der komplexe Vektorraum über der Menge der Wilson-Loop-Funktionen zu stückweise analytischen Hoops. Durch

$$* : \mathcal{HA} \to \mathcal{HA}, \quad *(\sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i}) := \sum_i \overline{a}_i T_{\tilde{\alpha}_i}$$

ist eine Involution auf $\mathcal{HA}$ erklärt. Zusammen mit der Supremums-Norm hat man eine normierte, involutive, kommutative Algebra beschränkter Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Sei $C^*(\mathcal{HA})$ die Vervollständigung von $\mathcal{HA}$ in der Supremumsnorm. $C^*(\mathcal{HA})$ ist eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement und heißt *Ashtekar-Isham-Algebra*.

Das Einselement in $\mathcal{HA}$ und $C^*(\mathcal{HA})$ ist $T_{\tilde{x}_0}$, die Wilson-Loop-Funktion zum konstanten Hoop. Die Algebren $\mathcal{HA}$ und $C^*(\mathcal{HA})$ sind die zentralen Objekte für die weiteren Betrachtungen. $C^*(\mathcal{HA})$ ist die Algebra der klassischen Konfigurationsvariablen. Obgleich $\mathcal{HA}$ von recht einfacher Struktur ist, gilt das für $C^*(\mathcal{HA})$ überhaupt nicht mehr. Der Vervollständigungsprozeß ergibt ein äußerst kompliziertes Objekt, dessen nähere Untersuchung einen großen Teil dieser Arbeit einnimmt. Man hat eine kommutative C^*-Algebra, die eine Unteralgebra der C^*-Algebra $C_b(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ ist, der Algebra der beschränkten Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Es ist nicht klar, ob $C^*(\mathcal{HA})$ eine echte Unteralgebra oder vielleicht schon ganz $C_b(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ ist.

3 Quantisierung

3.1 Vorüberlegungen

Der Ansatz zur Entwicklung einer Quantentheorie wird dargestellt. Die Basis bildet die Veröffentlichung [AshIsh92]. Da man wegen des Fehlens eines festen Raumzeit-Hintergrunds nicht auf die Standardmethoden zurückgreifen kann, werden Techniken aus der C^*-Algebren-Theorie herangezogen, insbesondere der Gelfandsche Darstellungssatz.

Um zu einer Quantentheorie zu gelangen, sollen die klassischen Konfigurationsoperatoren, also die Elemente von $C^*(\mathcal{HA})$, durch beschränkte Operatoren auf einem geeigneten Hilbertraum dargestellt werden. Betrachtet man die Einteilchen-Quantenmechanik in der Ortsdarstellung als einfaches Beispiel, so hat man als Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^3, d\mu)$, den Raum der quadratintegrablen Funktionen (bezüglich des Lebesgue-Maßes) über dem klassischen Konfigurationsraum $\mathbb{R}^3$. Die klassischen Konfigurationsvariablen, sprich die Ortskoordinaten, wirken auf diesem Hilbertraum als multiplikative Operatoren. Diese sind allerdings nicht beschränkt. Wählt man jedoch eine kompakte Mannigfaltigkeit wie Σ als klassischen Konfigurationsraum, so erhält man auch beschränkte Operatoren.

Analog könnte man im hier gegebenen Fall erwarten, einen Hilbertraum der Gestalt $L_2(\mathcal{A}/\mathcal{G}, d\mu_{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ über dem Konfigurationsraum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ der klassischen Theorie zu erhalten. Die Wilson-Loop-Funktionen, die im Klassischen die Konfigurationsvariablen sind, sollten als Multiplikatoren wirken. Das Maß $\mu_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist allerdings nicht a priori bekannt. Seine Konstruktion ist eine wesentliche Aufgabe. Das Maß erlaubt überhaupt erst die Definition eines inneren Produktes und damit des Hilbertraums selbst. Dann erst kann man auch über Zustände sprechen. Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie kommt eine weitere starke Forderung an das Maß: es soll invariant gegenüber Diffeomorphismen der Basismannigfaltigkeit sein. Da die Loops in der Basismannigfaltigkeit liegen, ändern sie sich bei solchen Diffeomorphismen. Diese Wirkung überträgt sich auf die Wilson-Loop-Funktionen und damit auf die Algebren $\mathcal{HA}$ und $C^*(\mathcal{HA})$ und deren Darstellungen, vgl. Kapitel 5.C. Da man ein kanonisches Quantisierungsschema anstrebt, ist es üblich, eine 3+1-Zerlegung der Raumzeit M durchzuführen. Dies ist immer dann möglich, wenn die gegebene Raumzeit global hyperbolisch ist (siehe Kapitel 2.A). Sei $M = \mathbb{R} \times \Sigma$, wobei Σ eine dreidimensionale, orientierte, zeitorientierte, raumartige Hyperfläche mit Riemannscher Metrik ist. Die Loops sind dann definiert auf Σ, und die Diffeomorphismen sind Abbildungen

$$\phi : \Sigma \to \Sigma,$$

also räumliche Diffeomorphismen. Die Forderung nach der Diffeomorphismeninvarianz des Maßes implementiert somit die Kovarianz in den drei räumlichen Koordinaten. Um zu einer vollständigen Theorie der Quantengravitation zu gelangen, die die ART als geeigneten Grenzfall enthält, braucht man natürlich eine in allen vier Koordinaten kovariante Theorie. Eine solche Theorie ist heute erst in Ansätzen vorhanden, siehe z.B. [ReiRov97, DGGP99a-c]. In der vorliegenden Arbeit, die sich mit kinematischen Aspekten der Loop-Quantengravitation beschäftigt, beschränken wir uns auf den durch die $3+1$-Zerlegung vorgezeichneten Rahmen. Schon hier ist es keineswegs trivial, daß diffeomorphismeninvariante Maße überhaupt existieren. Es zeigt sich allerdings, daß der Hilbertraum der Theorie über einem größeren Raum als $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ definiert ist. Dieser größere Raum, der unten definiert wird, enthält $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ als dichten Unterraum. Auch das Maß ist auf diesem größeren Raum definiert, wie wir sehen werden.

Das wesentliche Hilfsmittel zur Konstruktion von Darstellungen der Ashtekar-Isham-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ ist die Gelfand-Theorie. Da $C^*(\mathcal{HA})$ eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement ist, ist sie nach dem Satz von Gelfand [MeiVog92] isometrisch $*$-isomorph zur Algebra $C(X)$ der stetigen Funktionen auf einem (in der Gelfand-Topologie) kompakten Hausdorff-Raum. Als stetige Funktionen auf einem kompaktem Raum sind die Elemente von $C(X)$ beschränkt. Der Raum $X = Spec(C^*(\mathcal{HA}))$ heißt das *Spektrum* der Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ und besteht aus der Menge der Algebrenhomomorphismen $h : C^*(\mathcal{HA}) \to \mathbb{C}$. Alternativ kann man das Spektrum auch als Menge der maximalen Ideale von $C^*(\mathcal{HA})$ betrachten. Diese Ideale sind gerade die Kerne der Algebrenhomomorphismen. Man kann zeigen, daß $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ in X eingebettet ist und dicht liegt (s. [Ren93] und Lemma 3.8). Deswegen schreibt man

$$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} := Spec(C^*(\mathcal{HA})) = X.$$

Zusammenfassend hat man einen isometrischen Isomorphismus

$$C^*(\mathcal{HA}) \to C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}),$$

der die Involution erhält. Dieser Isomorphismus ist folgendermaßen gegeben: Sei $a \in C^*(\mathcal{HA})$. Die *Gelfand-Transformierte* $\hat{a}$ von a ist definiert als

$$\hat{a} : Spec(C^*(\mathcal{HA})) \to \mathbb{C}, \quad \hat{a}(h) := h(a).$$

Die *Gelfand-Darstellung* ist die Abbildung

$$\hat{} : C^*(\mathcal{HA}) \to C(Spec(C^*(\mathcal{HA}))), \quad a \mapsto \hat{a}.$$

Dies ist der gesuchte Isomorphismus. Im folgenden schreiben wir $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ statt $Spec(C^*(\mathcal{HA}))$.

Man braucht noch weitere Resultate aus der Darstellungstheorie von C^*-Algebren. Sei C eine C^*-Algebra, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\hat{D} : C \to B(\mathcal{H})$ eine stetige Darstellung von C auf $\mathcal{H}$ durch beschränkte Operatoren. $\hat{D}$ heißt *zyklische Darstellung*, wenn es ein $\xi \in \mathcal{H}$ gibt, so daß $\hat{D}(C)\xi$ dicht in $\mathcal{H}$ liegt. ξ heißt dann *zyklischer Vektor*. Ein Resultat von Gelfand besagt nun, daß jede Darstellung von C als direkte Summe zyklischer Darstellungen geschrieben werden kann. Es reicht also, zyklische Darstellungen zu betrachten.

Sei $\hat{D} : C^*(\mathcal{HA}) \to B(\mathcal{H})$ eine zyklische Darstellung der Ashtekar-Isham-Algebra auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit zyklischem Vektor ξ. Durch

$$\Gamma(a) := \left\langle \xi, \hat{D}(a)\xi \right\rangle, \quad a \in C^*(\mathcal{HA})$$

ist ein positves lineares Funktional auf $C^*(\mathcal{HA})$ gegeben. Den Ausdruck $\left\langle \xi, \hat{D}(a)\xi \right\rangle$ kann man physikalisch als einen Vakuumerwartungswert interpretieren. Über die Gelfand-Transformation $a \mapsto \hat{a}$ erhält man ein positives lineares Funktional auf $C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ durch

$$\hat{\Gamma}(\hat{a}) := \Gamma(a).$$

Da $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ein kompakter Raum ist, gibt es nach dem Satz von Riesz [HewStr69] zu jedem positiven linearen Funktional auf $C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ ein reguläres Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, so daß

$$\left\langle \xi, \hat{D}(a)\xi \right\rangle = \hat{\Gamma}(\hat{a}) = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} d\mu(h)\hat{a}(h) = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} d\mu(h)h(a).$$

$\hat{D}$ ist nach Voraussetzung eine zyklische Darstellung, also bildet $\{\hat{D}(a)\xi \mid a \in C^*(\mathcal{HA})\}$ einen dichten Unterraum von $\mathcal{H}$. Daher ist diese Darstellung von $C^*(\mathcal{HA})$ unitär äquivalent zu einer Darstellung auf dem Hilbertraum $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ über die Abbildung

$$\mathcal{H} \to L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu), \quad \hat{D}(a)\xi \mapsto \hat{a}.$$

Der zyklische Vektor ξ wird dabei dargestellt durch die konstante Funktion $\xi(h) = 1\ \forall h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Die Elemente von $C^*(\mathcal{HA})$ wirken in der induzierten Darstellung, die mit $\hat{D}'$ bezeichnet sei, als Multiplikatoren. Sei $\psi \in L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ und $\hat{D}'(a)$ die Darstellung von $a \in C^*(\mathcal{HA})$ auf $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. Dann gilt

$$(\hat{D}'(a)\psi)(h) = h(a)\psi(h).$$

Insbesondere wirken auch die Wilson-Loop-Funktionen, die dicht in $C^*(\mathcal{HA})$ liegen, als multiplikative Operatoren. Offensichtlich erzeugt jedes reguläre Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ umgekehrt eine zyklische Darstellung von $C^*(\mathcal{HA})$ auf $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$.

Zusammenfassend hat man: Jede stetige zyklische Darstellung von $C^*(\mathcal{HA})$ auf einem Hilbertraum ist unitär äquivalent zu einer Darstellung auf $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ bezüglich eines regulären Maßes μ, wobei die Elemente von $C^*(\mathcal{HA})$ als Multiplikatoren wirken.

Daß es auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ solche Maße gibt, hängt an der Kompaktheit dieses Raumes. In der Loop-Quantengravitation spielt $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ die Rolle des Quantenkonfigurationsraumes. Dieser ist echt größer als der klassische Konfigurationsraum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, und die Maße sind auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, nicht auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ definiert. Es zeigt sich sogar, daß $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ eine Nullmenge ist bezüglich des wichtigsten dieser Maße [MarMou95], des sogenannten Ashtekar-Lewandowski-Maßes, das wir hier vorstellen werden.

Die bisherigen Argumente zeigen lediglich, daß es reguläre Maße auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ gibt, aber nicht, wie diese aussehen. Außerdem ist nicht klar, ob es Maße gibt, die invariant gegenüber Diffeomorphismen der Mannigfaltigkeit Σ sind, in der die Loops liegen. Es war die wesentliche Leistung von Ashtekar und Lewandowski [AshLew94], die explizite Konstruktion eines solchen Maßes anzugeben. Bemerkenswerterweise findet sich in der Literatur unseres Wissens kein Beweis, daß das Ashtekar-Lewandowski-Maß tatsächlich diffeomorphismeninvariant ist. Wir geben in Kapitel 5 einen Beweis und ein paar Anmerkungen zu den Argumenten in der Literatur. In Kapitel 4.C werden die Zustände der Theorie, also die Elemente von $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$, charakterisiert, wenn man das Ashtekar-Lewandowski-Maß zugrunde legt.

3.2 Struktur von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$

In diesem Abschnitt, der auf [AshIsh92, AshLew94] basiert, wird die Struktur des Quantenkonfigurationsraums $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ untersucht. Man weiß, daß $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$

unendlichdimensional ist, kein Vektor- und kein affiner Raum, kompakt in der Gelfand-Topologie und hausdorffsch. Die Sätze 3.7 und 3.10 geben den ersten Beweis, daß $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ bijektiv abbildbar ist auf $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$, den Raum aller Äquivalenzklassen von Darstellungen der Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ auf $SU(2)$. Die Bijektion wird explizit konstruiert. In Kapitel 4 wird dieser Beweis auf die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ verallgemeinert. Der Beweis 3.7 stellt eine korrigierte und ausführliche Version des ursprünglichen Beweises in [AshIsh92] dar. Zum Beweis von Satz 3.10 benötigt man das wichtige Lemma 3.8 (Interpolationslemma), das auf Satz 2.17 basiert. Außerdem wird in diesem Abschnitt eine neue Charakterisierung der Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$ gegeben.

Am Ende dieses Abschnitts werden die Resultate gedeutet. Es wird dargelegt, warum man $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als Raum der *verallgemeinerten Zusammenhänge modulo Eichtransformationen* betrachten kann.

$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist das Spektrum der C^*-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ und besteht aus den Homomorphismen von $C^*(\mathcal{HA})$ in die C^*-Algebra der komplexen Zahlen.

Die folgenden Betrachtungen dienen der Vorbereitung des wichtigen Satzes 3.7.

Ein $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ definiert eine Funktion auf $\mathcal{L}_x$ mittels

$$h(\tilde{\alpha}) := h(T_{\tilde{\alpha}}),$$

und damit auch auf $\mathcal{HG}$, der Hoop-Gruppe.

Lemma 3.1: Für h gilt

$$\begin{aligned} h(\tilde{\alpha})h(\tilde{\beta}) &= \frac{1}{2}(h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}) \\ h(\tilde{\alpha}) &= h(\tilde{\alpha}^{-1}) \\ h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= h(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}) \end{aligned}$$

Bew.: Die erste Beziehung ist die Mandelstam-Identität, die sich per Homomorphie von den $T_{\tilde{\alpha}}$ überträgt. Die zweite Gleichung erhält man folgendermaßen: Seien $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}$. Setzt man in der ersten Gleichung $\tilde{\alpha} = \tilde{x}_0$, so erhält man

$$\begin{aligned} h(\tilde{\beta}) &= \frac{1}{2}(h(\tilde{\beta}) + h(\tilde{\beta}^{-1})) \\ &= \frac{1}{2}h(\tilde{\beta}) + \frac{1}{2}h(\tilde{\beta}^{-1}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$h(\tilde{\beta}) = h(\tilde{\beta}^{-1}) \quad \forall \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}.$$

Die dritte Beziehung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} h(\tilde{\alpha})h(\tilde{\beta}) &= \frac{1}{2}(h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1})) = h(\tilde{\beta})h(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2}(h(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}) + h(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \;\; h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}) = h(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}) + h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \;\; h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = h(\tilde{\beta}\tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

□

Man setzt h fort auf den freien Vektorraum $\mathcal{FHG}$ über $\mathcal{HG}$ durch

$$h(\sum_k a_k \tilde{\alpha}_k) := \sum_k a_k h(\tilde{\alpha}_k).$$

Die Summe ist endlich. Während $|h(\tilde{\alpha})| \leq 1 \; \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ galt, hat man natürlich keine solche Beziehung auf $\mathcal{FHG}$ mehr. $\mathcal{FHG}$ ist die (algebraische) Gruppenalgebra der Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$. Das Produkt auf $\mathcal{FHG}$ sei definiert durch

$$\left(\sum_k a_k \tilde{\alpha}_k\right)\left(\sum_j b_j \tilde{\beta}_j\right) = \sum_k \sum_j a_k b_j \tilde{\alpha}_k \tilde{\beta}_j.$$

Sei $I_h := \{\sum_k a_k \tilde{\alpha}_k \in \mathcal{FHG} \mid \forall \tilde{\beta} \in \mathcal{HG} : \sum_k a_k h(\tilde{\alpha}_k \tilde{\beta}) = 0\}$.

Bem. 3.2: I_h ist ein Ideal in $\mathcal{FHG}$.

Bew.: Sei $\sum_k a_k \tilde{\alpha}_k \in I_h, \; \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \mathcal{HG}$. Dann folgt

$$h(\sum_k a_k \tilde{\gamma}\tilde{\alpha}_k \tilde{\beta}) = \sum_k a_k h(\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}_k\tilde{\beta}) = \sum_k a_k h(\tilde{\alpha}_k \tilde{\beta}\tilde{\gamma}) = 0.$$

□

Nach Definition von I_h gilt $h|_{I_h} = 0$, deshalb erhält man eine lineare Abbildung $\overline{h} : \mathcal{FHG}/I_h \to \mathbb{C}$. Statt $\overline{h}(a \mod I_h)$ schreiben wir $\overline{h}(a)$ (als Argument von $\overline{h}$ fassen wir $a \in \mathcal{FHG}$ als $a \mod I_h \in \mathcal{FHG}/I_h$ auf).

Def. 3.3: Sei $a \in \mathcal{FHG}, a = \sum_k a_k \tilde{\alpha}_k$. Man definiert

$$\check{a} := \sum_k a_k \tilde{\alpha}_k^{-1}.$$

Bem. 3.4: Im allgemeinen ist $\check{a}$ nicht das Inverse von a. Falls a einfach ein Hoop ist, gilt natürlich $\check{a} = a^{-1}$.

Lemma 3.5: Es gelten die *verallgemeinerten Mandelstam-Identitäten* für h und $\overline{h}$:

$$\begin{aligned} h(a)h(b) &= \frac{1}{2}(h(ab) + h(a\check{b})) \quad \forall a, b \in \mathcal{FHG}, \\ \overline{h}(a)\overline{h}(b) &= \frac{1}{2}(\overline{h}(ab) + \overline{h}(a\check{b})) \quad \forall a, b \in \mathcal{FHG}/I_h. \end{aligned}$$

Bew.: Seien $a, b \in \mathcal{FHG}, a = \sum_j a_j \tilde{\alpha}_j, b = \sum_k b_k \tilde{\beta}_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(a)h(b) &= \sum_{j,k} a_j b_k h(\tilde{\alpha}_j) h(\tilde{\beta}_k) \\ &= \sum_{j,k} a_j b_k (\frac{1}{2} h(\tilde{\alpha}_j \tilde{\beta}_k) + \frac{1}{2} h(\tilde{\alpha}_j \tilde{\beta}_k^{-1})) \\ &= \frac{1}{2}(h(ab) + h(a\check{b})). \end{aligned}$$

Die Übertragung auf $\overline{h}$ ist unmittelbar.

$\square$

Lemma 3.6: Es gelten

$$\begin{aligned} h(a) &= h(\check{a}), \\ h(ab) &= h(ba) \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathcal{FHG}$.

Bew.: Seien $a = \sum_j a_j\tilde{\alpha}_j, \check{a} = \sum_j a_j\tilde{\alpha}_j^{-1}, b = \sum_k b_k\tilde{\beta}_k$. Es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= h(\sum_j a_j\tilde{\alpha}_j) = \sum_j a_j h(\tilde{\alpha}_j) \\ &= \sum_j a_j h(\tilde{\alpha}_j^{-1}) = h(\sum_j a_j\tilde{\alpha}_j^{-1}) \\ &= h(\check{a}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} h(ab) &= h(\sum_{j,k} a_j b_k\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_k) = \sum_{j,k} a_j b_k h(\tilde{\alpha}_j\tilde{\beta}_k) \\ &= \sum_{j,k} a_j b_k h(\tilde{\beta}_k\tilde{\alpha}_j) = h(\sum_{j,k} a_j b_k\tilde{\beta}_k\tilde{\alpha}_j) \\ &= h(ba) \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

□

Es folgt die korrigierte Version eines Beweises aus einer Veröffentlichung von Ashtekar und Isham [AshIsh92], der für das weitere Vorgehen zentral ist. Es wird gezeigt, daß man jedem Element h von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ eine $SU(2)$-Matrix zuordnen kann, so daß h (bis auf Normierung) der Spur dieser Matrix entspricht. Zusammen mit der Umkehrung, die anschließend bewiesen wird (Satz 3.10), erhält man einen Isomorphismus zwischen $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ und $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$, der Menge der Homomorphismen von der Hoop-Gruppe nach $SU(2)$ modulo der adjungierten Operation von $SU(2)$.

Satz 3.7: Zu jedem $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ gibt es eine 2×2-Matrix $V_{\tilde{\alpha}}$ mit komplexen Einträgen, so daß $\tilde{\alpha} \to V_{\tilde{\alpha}}$ eine Matrixdarstellung der Hoop-Gruppe ist und $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ geschrieben werden kann als $h(\tilde{\alpha}) := h(T_{\tilde{\alpha}}) = \frac{1}{2}tr(V_{\tilde{\alpha}})$. Diese Darstellung von $\mathcal{HG}$ ist äquivalent zu einer durch $SU(2)$-Matrizen.

Bew.: Sei $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ beliebig, aber fest, I_h wie oben definiert. Wie oben gezeigt, ist h eine Funktion auf $\mathcal{FHG}$, die eine Funktion $\overline{h} : \mathcal{FHG}/I_h \to \mathbb{C}$ induziert. Im folgenden wollen wir h und $\overline{h}$ nicht mehr unterscheiden. Wir schreiben h. Alle Ergebnisse sind modulo I_h zu verstehen. Zunächst zeigt man, daß

$$\tilde{\alpha}^2 - 2h(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha} + e \in I_h \quad \forall\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}.$$

Dies erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned}
h(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}) - 2h(\tilde{\alpha})h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + h(e\tilde{\beta}) &= h(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}) - 2h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})h(\tilde{\alpha}) + h(e\tilde{\beta}) \\
&= h(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}) - 2(\frac{1}{2}(h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}) + h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\alpha}^{-1})) + h(\tilde{\beta}) \\
&= h(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}) - h(\tilde{\alpha}^2\tilde{\beta}) - h(\tilde{\beta}) + h(\tilde{\beta}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

für alle $\tilde{\beta} \in \mathcal{HG}$. Wegen $\tilde{\alpha}^2 - 2h(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha} + e = 0\ \forall\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ gilt auch

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} - 2h(\tilde{\alpha})e + \tilde{\alpha}^{-1} &= 0 \\
\Leftrightarrow \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha}^{-1} &= 2h(\tilde{\alpha})e \quad \forall\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}.
\end{aligned}$$

Sei $a \in \mathcal{FHG}, a = \sum_j a_j\tilde{\alpha}_j$. Hier ergibt sich

$$\check{a} = \sum_j a_j\tilde{\alpha}_j^{-1} = (\sum_j a_j(2h(\tilde{\alpha}_j)e) - \sum_j a_j\tilde{\alpha}_j) = (2h(a)e - a),$$

also $a + \check{a} = 2h(a)e\ \forall a \in \mathcal{FHG}$. Man schreibt jetzt

$$\tilde{\alpha}^2 - 2h(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha} + e = (\tilde{\alpha} - l_1(\tilde{\alpha})e)(\tilde{\alpha} - l_2(\tilde{\alpha})e),$$

wobei

$$l_1(\tilde{\alpha}) := h(\tilde{\alpha}) + i(1 - h(\tilde{\alpha})^2)^{1/2}, \quad l_2(\tilde{\alpha}) := h(\tilde{\alpha}) - i(1 - h(\tilde{\alpha})^2)^{1/2}.$$

Es gilt $l_1(\tilde{\alpha}) + l_2(\tilde{\alpha}) = 2h(\tilde{\alpha})$ und $l_1(\tilde{\alpha})l_2(\tilde{\alpha}) = 1$. Wegen $|h(\tilde{\alpha})| \leq 1$ ergeben die Wurzelausdrücke reelle Werte. Man wähle nun $\tilde{\gamma} \in \mathcal{HG}$, so daß $l_1(\tilde{\gamma}) \neq l_2(\tilde{\gamma})$. Tauchen im folgenden l_1 und l_2 ohne Argument auf, so sind immer $l_1(\tilde{\gamma})$ bzw. $l_2(\tilde{\gamma})$ gemeint. Man definiert

$$\begin{aligned}
r_1(\tilde{\gamma}) &:= \frac{1}{l_1 - l_2}(\tilde{\gamma} - l_2 e), \\
r_2(\tilde{\gamma}) &:= \frac{1}{l_2 - l_1}(\tilde{\gamma} - l_1 e).
\end{aligned}$$

Das sind Projektionsoperatoren in $\mathcal{FHG}/I_h$, denn

$$\begin{aligned}
r_1(\tilde{\gamma})^2 &= \left(\frac{1}{l_1-l_2}\right)^2 (\tilde{\gamma}-l_2e)(\tilde{\gamma}-l_2e) \\
&= \left(\frac{1}{l_1-l_2}\right)^2 (\tilde{\gamma}-l_2e)(\tilde{\gamma}-l_1e+2i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}) \\
&= \left(\frac{1}{l_1-l_2}\right)^2 ((\tilde{\gamma}-l_2e)(\tilde{\gamma}-l_1e)+(\tilde{\gamma}-l_2e)2i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}) \\
&= \left(\frac{1}{l_1-l_2}\right)^2 (l_1-l_2)(\tilde{\gamma}-l_2e) \\
&= \frac{1}{l_1-l_2}(\tilde{\gamma}-l_2e) \\
&= r_1(\tilde{\gamma})
\end{aligned}$$

und analog $r_2(\tilde{\gamma})^2 = r_2(\tilde{\gamma})$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
r_1(\tilde{\gamma})+r_2(\tilde{\gamma}) &= \frac{1}{l_1-l_2}(\tilde{\gamma}-l_2e-\tilde{\gamma}+l_1e) \\
&= \frac{1}{l_1-l_2}(l_1-l_2)e \\
&= e
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
r_1(\tilde{\gamma})r_2(\tilde{\gamma}) &= -\left(\frac{1}{l_1-l_2}\right)^2 (\tilde{\gamma}-l_2e)(\tilde{\gamma}-l_1e) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Wegen dieser Projektionseigenschaft haben Elemente $r_1(\tilde{\gamma}), r_2(\tilde{\gamma}) \in \mathcal{FHG}$ kein Inverses. Betrachtet man

$$\check{r}_1 = \frac{1}{l_1-l_2}(\tilde{\gamma}^{-1}-l_2e),$$

so ergibt sich wegen $\tilde{\gamma}^{-1} = (2h(\tilde{\gamma})e-\tilde{\gamma})$

$$\begin{aligned}
\check{r}_1 &= \frac{1}{l_1-l_2}((2h(\tilde{\gamma})-l_2)e-\tilde{\gamma}) \\
&= \frac{1}{l_1-l_2}((l_1+l_2-l_2)e-\tilde{\gamma}) \\
&= \frac{1}{l_2-l_1}(\tilde{\gamma}-l_1e) \\
&= r_2
\end{aligned}$$

und ebenso $\check{r}_2 = r_1$.

Man möchte jetzt komplexe 2×2-Matrizen $V_{\tilde{\alpha}}$ konstruieren, so daß einerseits $V_{\tilde{\alpha}} V_{\tilde{\beta}} = V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\ \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}$ und andererseits $h(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2} tr(V_{\tilde{\alpha}})$ gilt. Sei $\tilde{\gamma} \in \mathcal{HG}$ fest mit $l_1(\tilde{\gamma}) \neq l_2(\tilde{\gamma})$. l_1, l_2, r_1 und r_2 ohne Argumente bedeuten stets die Anwendung auf $\tilde{\gamma}$. Ein sinnvoller Ansatz für die Matrizen ist

$$V_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2h(r_1\tilde{\alpha}) & c(\tilde{\alpha}) \\ d(\tilde{\alpha}) & 2h(r_2\tilde{\alpha}) \end{pmatrix},$$

wobei $c(\tilde{\alpha}), d(\tilde{\alpha})$ Abbildungen von $\mathcal{FHG}$ nach $\mathbb{C}$ sind. Es gilt offensichtlich $\frac{1}{2} tr(V_{\tilde{\alpha}}) = h(\tilde{\alpha})$. Man hat

$$V_{\tilde{\alpha}} V_{\tilde{\beta}} = \begin{pmatrix} 4h(r_1\tilde{\alpha})h(r_1\tilde{\beta}) + c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) & 2h(r_1\tilde{\alpha})c(\tilde{\beta}) + 2c(\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}) \\ 2d(\tilde{\alpha})h(r_1\tilde{\beta}) + 2h(r_2\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) & d(\tilde{\alpha})c(\tilde{\beta}) + 4h(r_2\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Aus der Forderung $V_{\tilde{\alpha}} V_{\tilde{\beta}} = V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2h(r_1\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= 4h(r_1\tilde{\alpha})h(r_1\tilde{\beta}) + c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) && (1) \\ 2h(r_2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= d(\tilde{\alpha})c(\tilde{\beta}) + 4h(r_2\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}) && (2) \\ c(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= 2h(r_1\tilde{\alpha})c(\tilde{\beta}) + 2c(\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}) && (3) \\ d(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= 2d(\tilde{\alpha})h(r_1\tilde{\beta}) + 2h(r_2\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}). && (4) \end{aligned}$$

Man nimmt weiter an, daß c und d linear in $\tilde{\alpha}$ sind. Es folgt aus (3):

$$\begin{aligned} c(\tilde{\alpha}^2) &= 2h(r_1\tilde{\alpha})c(\tilde{\alpha}) + 2c(\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\alpha}) \\ &= 2h(\tilde{\alpha})c(\tilde{\alpha}). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\alpha}^2 = 2h(\tilde{\alpha})\tilde{\alpha} - e$ erhält man

$$c(\tilde{\alpha}^2) = 2h(\tilde{\alpha})c(\tilde{\alpha}) - c(e),$$

daher ist $c(e) = 0$. Ebenso erhält man $d(e) = 0$. Es gilt für alle $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}$

$$\begin{aligned}
h(r_1\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}) &= h(\tilde{\alpha}r_1)h(r_2\tilde{\beta}) \\
&= \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}r_1r_2\tilde{\beta}) + \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}^{-1}\check{r}_2) \\
&= \frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}^{-1}\check{r}_2) \\
&= \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}^{-1}\check{r}_2) \\
&= \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}^{-1}r_1) \\
&= \frac{1}{2}h(\tilde{\alpha}\check{r}_2\tilde{\beta}^{-1}\check{r}_2) \\
&= \frac{1}{2}h(r_2\tilde{\beta}r_2\tilde{\alpha}^{-1})
\end{aligned}$$

im Gegensatz zur falschen Formel in [AshIsh92] (dort Nummer 3.19). Sei $k \in \{1, 2\}$. Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned}
h(r_k\tilde{\alpha})h(r_k\tilde{\beta}) &= h(\tilde{\beta}r_k)h(r_k\tilde{\alpha}) \\
&= \frac{1}{2}h(\tilde{\beta}r_k^2\tilde{\alpha}) + \frac{1}{2}h(\tilde{\beta}r_k\tilde{\alpha}^{-1}\check{r}_k) \\
&= \frac{1}{2}h(r_k\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + \frac{1}{2}h(\check{r}_k\tilde{\beta}r_k\tilde{\alpha}^{-1}).
\end{aligned}$$

Damit läßt sich Gleichung (1) des Gleichungssystems umformen zu

$$\begin{aligned}
2h(r_1\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) &= 2h(r_1\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) + 2h(\check{r}_1\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}) + c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) \\
\Leftrightarrow \quad c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) &= -2h(\check{r}_1\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}) \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG} \\
\Leftrightarrow \quad c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) &= -2h(r_2\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}) \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}
\end{aligned}$$

und analog Gleichung (2) zu

$$\begin{aligned}
c(\tilde{\beta})d(\tilde{\alpha}) &= -2h(\check{r}_2\tilde{\beta}r_2\tilde{\alpha}^{-1}) \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG} \\
\Leftrightarrow \quad c(\tilde{\beta})d(\tilde{\alpha}) &= -2h(r_1\tilde{\beta}r_2\tilde{\alpha}^{-1}) \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}
\end{aligned}$$

Vertauscht man in der vorletzten Gleichung $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) &= -2h(r_1\tilde{\alpha}r_2\tilde{\beta}^{-1}) \\
&= -2h(\tilde{\beta}\check{r}_2\tilde{\alpha}^{-1}\check{r}_1) \\
&= -2h(\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}r_2) \\
&= -2h(r_2\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}) \quad \forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathcal{HG}
\end{aligned}$$

also sind die beiden Gleichungen (1) und (2) äquivalent. Wir schreiben diese Bedingung wegen

$$\begin{aligned} h(r_2\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}^{-1}) &= h(r_2\tilde{\beta}r_1(2h(\tilde{\alpha})e - \tilde{\alpha})) \\ &= 2h(\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\beta}r_1)e - h(r_2\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}) \\ &= -h(r_2\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}) \\ &= -h(\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}r_2) \end{aligned}$$

weiter um zu

$$c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\beta}) = 2h(\tilde{\beta}r_1\tilde{\alpha}r_2)$$

Man wähle nun $a, b \in \mathcal{FHG}$, so daß $c(a)d(b) = 2h(br_1ar_2) \neq 0$. Dann sind $c(a), d(b) \neq 0$, und man kann auflösen:

$$\begin{aligned} c(\tilde{\alpha}) &= \frac{2}{d(b)}h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ &= \frac{c(a)}{h(br_1ar_2)}h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d(\tilde{\beta}) &= \frac{2}{c(a)}h(\tilde{\beta}r_1ar_2) \\ &= \frac{d(b)}{h(br_1ar_2)}h(\tilde{\beta}r_1ar_2). \end{aligned}$$

Sei $z := \frac{c(a)}{h(br_1ar_2)}$. Damit überprüft man Gleichung (3):

$$\begin{aligned} & zh(br_1\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2) &= {} & 2h(r_1\tilde{\alpha})zh(br_1\tilde{\beta}r_2) + 2h(r_2\tilde{\beta})zh(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ \Leftrightarrow \; & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1) &= {} & 2h(\tilde{\alpha}r_1)h(\tilde{\beta}r_2br_1) + 2h(\tilde{\beta}r_2)h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ \Leftrightarrow \; & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1) &= {} & h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}r_2br_1) + h(\tilde{\alpha}r_1\check{r}_1\check{b}\check{r}_2\tilde{\beta}^{-1}) \\ & & & +h(\tilde{\beta}r_2br_1\tilde{\alpha}r_2) + h(\tilde{\beta}r_2\check{r}_2\tilde{\alpha}^{-1}\check{r}_1\check{b}) \\ \Leftrightarrow \; & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1) &= {} & h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\beta}r_2br_1) + h(\tilde{\alpha}r_2\tilde{\beta}r_2br_1) \\ \Leftrightarrow \; & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1) &= {} & h(\tilde{\alpha}(r_1 + r_2)\tilde{\beta}r_2br_1) \\ \Leftrightarrow \; & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1) &= {} & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_2br_1). \end{aligned}$$

Die oben angegebene Form für $c(\tilde{\alpha})$ ist also in Ordnung. Man kann $c(\tilde{\alpha})$ bis auf einen Faktor z festlegen, der durch $c(a)$ bestimmt ist.

Sei $z' := \frac{d(b)}{h(br_1ar_2)} = z\frac{d(b)}{c(a)} = \frac{2}{c(a)}$. Damit überprüft man Gleichung (4):

$$
\begin{array}{rcl}
z'h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & 2h(r_1\tilde{\beta})z'h(\tilde{\alpha}r_1ar_2) + 2h(r_2\tilde{\alpha})z'h(\tilde{\beta}r_1ar_2) \\
\Leftrightarrow \quad h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & 2h(\tilde{\beta}r_1)h(ar_2\tilde{\alpha}r_1) + 2h(\tilde{\alpha}r_2)h(\tilde{\beta}r_1ar_2) \\
\Leftrightarrow \quad h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & h(\tilde{\beta}r_1ar_2\tilde{\alpha}r_1) + h(\tilde{\beta}r_1\check{r}_1\tilde{\alpha}^{-1}\check{r}_2\check{a}) \\
 & & +h(\tilde{\alpha}r_2\tilde{\beta}r_1ar_2) + h(\tilde{\alpha}r_2\check{r}_2\check{a}\check{r}_1\tilde{\beta}^{-1}) \\
\Leftrightarrow \quad h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & h(\tilde{\beta}r_1ar_2\tilde{\alpha}r_1) + h(\tilde{\alpha}r_2\tilde{\beta}r_1ar_2) \\
\Leftrightarrow \quad h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & h(\tilde{\alpha}(r_1+r_2)\tilde{\beta}r_1ar_2) \\
\Leftrightarrow \quad h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2) & = & h(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}r_1ar_2).
\end{array}
$$

Auch die oben angegebene Form für $d(\tilde{\beta})$ ist richtig. $d(\tilde{\beta})$ läßt sich bis auf einen Faktor z' festlegen, der ebenfalls durch $c(a)$ bestimmt ist. Insgesamt erhält man

$$
\begin{array}{rcl}
V_{\tilde{\alpha}} & = & \left(\begin{array}{ll} 2h(r_1\tilde{\alpha}) & \frac{c(a)}{h(br_1ar_2)}h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ \frac{d(b)}{h(br_1ar_2)}h(\tilde{\alpha}r_1ar_2) & 2h(r_2\tilde{\alpha}) \end{array} \right) \\
 & = & \left(\begin{array}{ll} 2h(r_1\tilde{\alpha}) & \frac{c(a)}{h(br_1ar_2)}h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ \frac{2}{c(a)}h(\tilde{\alpha}r_1ar_2) & 2h(r_2\tilde{\alpha}) \end{array} \right).
\end{array}
$$

Es gilt dann $V_{\tilde{\alpha}}V_{\tilde{\beta}} = V_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ und $h(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2}tr(V_{\tilde{\alpha}})\ \forall\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. Für $c(a) = 1$ erhält man das Ergebnis von Ashtekar und Isham. Wegen

$$
\begin{array}{rcl}
h(r_1) & = & \frac{1}{l_1 - l_2}(h(\tilde{\gamma}) - l_2h(e)) \\
 & = & \frac{1}{2i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}}(h(\tilde{\gamma}) - h(\tilde{\gamma}) + i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}) \\
 & = & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

und

$$
\begin{array}{rcl}
h(r_2) & = & \frac{1}{l_2 - l_1}(h(\tilde{\gamma}) - l_1h(e)) \\
 & = & \frac{1}{-2i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}}(h(\tilde{\gamma}) - h(\tilde{\gamma}) - i(1-h(\tilde{\gamma})^2)^{1/2}) \\
 & = & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

gilt

$$V_e = I_2 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Weiterhin hat man $V_{\tilde{\alpha}} V_{\tilde{\alpha}^{-1}} = V_{\tilde{\alpha}^{-1}} V_{\tilde{\alpha}} = V_e$, also gilt

$$(V_{\tilde{\alpha}})^{-1} = V_{\tilde{\alpha}^{-1}}.$$

Es bleibt zu zeigen, daß man eine kompakte Darstellung der Hoop-Gruppe erhalten hat und daß $\det(V_{\tilde{\alpha}}) = 1$. Dann kann man schließen, daß diese Darstellung äquivalent zur Fundamentaldarstellung von $SU(2)$ ist. Einfache Abschätzungen unter Ausnutzung von $|h(\tilde{\alpha})| \leq 1 \; \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ und der Linearität von $h : \mathcal{FHG} \to \mathbb{C}$ zeigen, daß alle Matrixelemente für alle $\tilde{\alpha}$ beschränkt sind, also hat man eine kompakte Darstellung. Mittels der fastperiodischen Funktionen (siehe Kapitel 6) erhält man eine Abbildung $f : \mathcal{HG} \to \mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$, wobei $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ eine kompakte Gruppe ist, so daß jede kompakte Darstellung V von $\mathcal{HG}$ über $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ faktorisiert. V induziert also eine Darstellung $\tilde{V}$ von $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ in einen kompakten Teil von $GL(2, \mathbb{C})$. Jede endlichdimensionale Darstellung einer kompakten Gruppe ist wiederum äquivalent zu einer unitären Darstellung, also hat man eine Transformation $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, so daß $T^{-1} \tilde{V} T(m) = T^{-1} \tilde{V}_m T, \; m \in \mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ unitär ist. Wegen

$$T^{-1} V_{\tilde{\alpha}} T = T^{-1} \tilde{V}_{f(\tilde{\alpha})} T$$

ist auch die Darstellung $T^{-1} V T$ unitär, also in $U(2)$ enthalten. Gilt zusätzlich $\det(V_{\tilde{\alpha}}) = 1$, so hat man gezeigt, daß die gefundene Darstellung der Hoop-Gruppe äquivalent zu einer Darstellung durch $SU(2)$-Matrizen ist. Es ist

$$\begin{aligned}
\det V_{\tilde{\alpha}} &= 4h(r_1\tilde{\alpha})h(r_2\tilde{\alpha}) - c(\tilde{\alpha})d(\tilde{\alpha}) \\
&= 4h(\tilde{\alpha}r_1)h(\tilde{\alpha}r_2) - 2h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\alpha}r_2) \\
&= 2h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\alpha}r_2) + 2h(\tilde{\alpha}r_1\check{r}_2\tilde{\alpha}^{-1}) - 2h(\tilde{\alpha}r_1\tilde{\alpha}r_2) \\
&= 2h(\tilde{\alpha}^{-1}\tilde{\alpha}r_1^2) \\
&= 2h(r_1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die Bedingung $\det V_{\tilde{\alpha}} = 1 \; \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ ist also erfüllt. Falls gewünscht, kann man noch a bei festem b so wählen, daß gilt $h(br_1ar_2) = 1$. Das ist wegen der Linearität von h in a immer möglich ist. Die Darstellung

$$V_{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} 2h(r_1\tilde{\alpha}) & c(a)h(br_1\tilde{\alpha}r_2) \\ \frac{2}{c(a)}h(\tilde{\alpha}r_1ar_2) & 2h(r_2\tilde{\alpha}) \end{pmatrix}$$

der Hoop-Gruppe in die komplexen 2×2-Matrizen ist also äquivalent zur Fundamentaldarstellung von $SU(2)$.

$\square$

Der soeben bewiesene Satz zeigt, daß man zu jedem Element h von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ einen Homomorphismus (eine Darstellung) $\hat{H}$ von der Hoop-Gruppe nach $SU(2)$ erhält,

$$\hat{H}_h : \mathcal{HG} \to SU(2), \quad \tilde{\alpha} \mapsto T^{-1} V_{\tilde{\alpha}} T$$

für ein geeignetes T (siehe oben). Da $h = \frac{1}{2} tr(V_{\tilde{\alpha}}) =: \frac{1}{2} tr(\hat{H}_h(\tilde{\alpha}))$ nur von der Spur dieses Homomorphismus abhängt, hat man eine Abbildung

$$\Theta : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad.$$

Θ bildet ein $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ in einen Homomorphismus $\hat{H}_h : \mathcal{HG} \to SU(2)$ modulo der adjungierten Operation von $SU(2)$ ab. Diese Operation entspricht Ähnlichkeitstransformationen mit $SU(2)$-Matrizen, die die Spur nicht ändern. Die Elemente von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ sind also Darstellungen der Hoop-Gruppe in die Eichgruppe $SU(2)$, wobei Darstellungen nicht unterschieden werden, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation mit $SU(2)$-Matrizen verbunden sind. Ein wichtiger Aspekt ist, daß die konstruierten Homomorphismen nicht stetig sein müssen.

Bemerkenswert ist außerdem, daß der obige Beweis keinerlei Bezug auf die Art der Hoops (stückweise analytisch, diffeomorph dazu, allgemeine C^∞-Kurven, stetige Kurven etc.) nimmt. Der Satz gilt also allgemeiner als hier formuliert.

Es bleibt zu zeigen, daß auch die Umkehrung von Satz 3.7 gilt, Θ also eine Bijektion ist. Dazu benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Das folgende Lemma benutzt die Loop-Zerlegung (Lemma 2.14), die nur möglich ist für stückweise analytische Loops. Dies ist die Stelle, an der man sich auf diese Klasse von Loops beschränken muß. Hier ist sicher Raum für Verallgemeinerungen.

Lemma 3.8 (Interpolationslemma) : Zu jedem Homomorphismus $\hat{H}$ von der Hoop-Gruppe nach $SU(2)$ und jeder endlichen Menge $\{\tilde{\alpha}_1, .., \tilde{\alpha}_k\}$ von Hoops gibt es einen $SU(2)$-Zusammenhang A_0, so daß

$$\hat{H}(\tilde{\alpha}_i) = H(\alpha_i, A_0) \quad \forall i = 1, .., k,$$

wobei α_i ein Repräsentant von $\tilde{\alpha}_i$ ist.

Bew.: Sei $\{\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n\}$ eine Menge von unabhängigen Hoops, die man aus $\{\tilde{\alpha}_1, .., \tilde{\alpha}_k\}$ durch die Loop-Zerlegung (Lemma 2.14) erhält. Sei $g_j :=$

$\hat{H}(\tilde{\beta}_j)$, $j = 1, ..., n$. Nach Satz 2.17 gibt es einen Zusammenhang $A_0 \in \mathcal{A}$, so daß $g_j = H(\beta_j, A_0)$, $j = 1, ..., n$, wobei die β_j Repräsentanten der $\tilde{\beta}_j$ sind. Sei weiter $S := \left\langle \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n \right\rangle$ die von den $\tilde{\beta}_j$ erzeugte Untergruppe von $\mathcal{HG}$. Es gilt offensichtlich $\hat{H}(\tilde{\gamma}) = H(\gamma, A_0)$ $\forall \tilde{\gamma} \in S$, wobei γ ein Repräsentant von $\tilde{\gamma}$ ist. Insbesondere sind die $\tilde{\alpha}_i$ Elemente von S, also gilt $\hat{H}(\tilde{\alpha}_i) = H(\alpha_i, A_0)$ $\forall i = 1, .., k$.

□

Dieses Lemma besagt, daß man Elemente von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ auf endlich erzeugten Untergruppen von $\mathcal{HG}$ nicht von der Holonomie-Abbildung, die ebenfalls ein Element von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ ist, unterscheiden kann. Diese Aussage ist stärker als die, daß $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ liegt. Wie oben angemerkt, ist ein Element von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ im allgemeinen nicht stetig. Im Gegensatz dazu ist die Holonomie-Abbildung stetig im Loop-Argument, wenn man eine geeignete Topologie auf $\mathcal{HG}$ wählt [Barr91]. So gesehen besagt das Lemma, daß man beliebige nicht-stetige Homomorphismen $\hat{H} : \mathcal{HG} \to SU(2)$ durch die stetige Holonomie-Abbildung ersetzen kann, wenn man nur endlich erzeugte Untergruppen der Hoop-Gruppe betrachtet.

Eine von endlich vielen unabhängigen Hoops $\tilde{\beta}_j$ erzeugte Untergruppe S ist frei, d.h. jedes Wort in den Hoops und ihren Inversen, das das neutrale Element darstellt, ist trivial.

Für den folgenden Satz braucht man eine andere Charakterisierung der Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$ als bisher. Dazu betrachtet man den freien Vektorraum $\mathcal{FHG}$ über der Hoop-Gruppe, also $\{\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i | a_i \in \mathbb{C}, \tilde{\alpha}_i \in \mathcal{HG}\}$, wobei nur endliche Summen gemeint sind. Man definiert im Gegensatz zu vorher eine Multiplikation in $\mathcal{FHG}$ durch

$$\left(\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i \right) \left(\sum_j b_j \tilde{\beta}_j \right) := \sum_i \sum_j a_i b_j \frac{1}{2} (\tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j + \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j^{-1}).$$

Sei $\hat{A}_\alpha$ eine Operatordarstellung von $\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i$ und $\hat{A}_\beta$ von $\sum_j b_j \tilde{\beta}_j$. Dann gilt wegen dieser Definition der Multiplikation die Mandelstam-Identität

$$\hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta = \frac{1}{2} (\hat{A}_{\alpha\beta} + \hat{A}_{\alpha\beta^{-1}}).$$

Durch

$$\varphi : \mathcal{FHG} \to \mathcal{HA}, \quad \sum_i a_i \tilde{\alpha}_i \mapsto \sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i}$$

ist eine lineare Abbildung vom freien Vektorraum über der Hoop-Gruppe in die Holonomie-Algebra gegeben. Der Kern dieser Abbildung ist

$$K := \{\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i | \sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i}(A) = 0 \ \forall A \in \mathcal{A}\},$$

also hat man einen Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{FHG}/K \to \mathcal{HA}, \quad \left[\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i\right]_K \mapsto \sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i}.$$

Die Algebra $\mathcal{FHG}/K$ hat die K-Äquivalenzklasse $[\tilde{x}]_K$ des konstanten Hoops als neutrales Element. Die Algebra ist assoziativ und abelsch (wie $\mathcal{HA}$). Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die folgende: definiert man auf $\mathcal{HG}$ eine Äquivalenzrelation durch

$$\tilde{\alpha} \sim_R \tilde{\beta} :\Leftrightarrow T_{\tilde{\alpha}}(A) = T_{\tilde{\beta}}(A) \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

so hängt eine Wilson-Loop-Funktion $T_{\tilde{\alpha}}$ nur von der R-Äquivalenzklasse $[\tilde{\alpha}]_R$ von $\tilde{\alpha}$ ab. Sei nun $\tilde{\alpha} \sim_R \tilde{\beta}$, also $T_{\tilde{\alpha}} = T_{\tilde{\beta}}$. Daher gilt $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} \in K$, und jede Operatordarstellung $\hat{T}_{\tilde{\alpha}}$ eines Elements von $\mathcal{FHG}/K$ hängt nur von der R-Äquivalenzklasse von $\tilde{\alpha}$ ab. Außerdem erfüllt jede Operatordarstellung von $\mathcal{FHG}/K$ die Mandelstam-Identitäten. Durch

$$| \left[\sum_k a_k \tilde{\alpha}_k\right]_K | := \sup_{A \in \mathcal{A}/\mathcal{G}} | \sum_k a_k T_{\tilde{\alpha}_k}(A)|$$

ist eine Norm auf $\mathcal{FHG}/K$ definiert und durch

$$\left[\sum_k a_k \alpha_k\right]_K^* := \left[\sum_k \overline{a}_k \alpha_k\right]_K$$

eine Involution. Offensichtlich gehen Norm und Involution auf $\mathcal{FHG}/K$ durch den Isomorphismus Φ in die entsprechenden Abbildungen auf $\mathcal{HA}$ über.

Es folgt der Satz, der Elemente von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als (normierte) Spuren von Homomorphismen von der Hoop-Gruppe nach $SU(2)$ charakterisiert. Zusammen mit der Umkehrung (Satz 3.7) hat man den gewünschten Isomorphismus zwischen $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ und $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$.

Satz 3.10: Zu jedem Homomorphismus $\hat{H} : \mathcal{HG} \to SU(2)$ gibt es ein $h_{\hat{H}} \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, so daß

$$h_{\hat{H}}(T_{\tilde{\alpha}}) =: h_{\hat{H}}(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{2} tr(\hat{H}(\tilde{\alpha})).$$

Zwei Homomorphismen $\hat{H}$ und $\hat{H}'$ definieren genau dann das selbe $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, wenn es ein $g_0 \in SU(2)$ gibt, so daß $\hat{H}'(\tilde{\alpha}) = g_0^{-1} \hat{H}(\tilde{\alpha}) g_0 \; \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$.

Bew.: Man zeigt zunächst, daß durch die rechte Seite ein Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{HA}$ nach $\mathbb{C}$ definiert ist. Sei $\mathcal{FHG}$ wieder der freie Vektorraum über $\mathcal{HG}$ und $h : \mathcal{FHG} \to \mathbb{C}$ die Abbildung

$$h_{\hat{H}}(\sum_i a_i \tilde{\alpha}_i) := \frac{1}{2} \sum_i a_i tr(\hat{H}(\tilde{\alpha}_i)).$$

Aus Satz 2.17 folgt, daß für jede endliche Menge $\{\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_k\}$ von Hoops ein $A_0 \in \mathcal{A}$ existiert mit

$$|h_{\hat{H}}(\sum_{i=1}^k a_i \tilde{\alpha}_i)| = |\sum_{i=1}^k a_i T_{\tilde{\alpha}_i}(A_0)| \leq \sup_{\overline{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}} |\sum_{i=1}^k a_i T_{\tilde{\alpha}_i}(\overline{A})|.$$

Daher gilt

$$\sum_{i=1}^k a_i T_{\tilde{\alpha}_i}(\overline{A}) = 0 \; \forall \overline{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G} \Rightarrow h_{\hat{H}}(\sum_{i=1}^k a_i \tilde{\alpha}_i) = 0,$$

d.h. $h_{\hat{H}}$ faktorisiert über $\mathcal{FHG}/K \simeq \mathcal{HA}$. Somit hat man eine Abbildung $h_{\hat{H}} : \mathcal{HA} \to \mathbb{C}$. $h_{\hat{H}}$ ist offensichtlich linear, stetig (und damit gleichmäßig stetig) und verträgt sich mit der Involution. Die Multiplikativität ergibt sich direkt aus der Definition. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit läßt sich $h_{\hat{H}}$ eindeutig fortsetzen auf $C^*(\mathcal{HA})$.

Für zwei Homomorphismen $\hat{H}, \hat{H}' \in Hom(\mathcal{HG}, SU(2))$ gilt $\hat{H}'(\tilde{\alpha}) = g_0^{-1} \hat{H}(\tilde{\alpha}) g_0 \; \forall \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG},\; g_0 \in SU(2)$ genau dann, wenn ihre Spuren übereinstimmen. Die Darstellungen $\hat{H}$ und $\hat{H}'$ sind in diesem Fall unitär äquivalent, und da die Definition von $h_{\hat{H}}$ nur Bezug auf die Spur nimmt, ist $h_{\hat{H}} = h_{\hat{H}'}$.

□

Damit ist gezeigt, daß man eine injektive Abbildung

$$\Theta' : Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad \to \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, \quad [\hat{H}]_{Ad} \mapsto \frac{1}{2} tr(\hat{H})$$

erhält (lineare Fortsetzung mitgedacht). Dabei ist $[\hat{H}]_{Ad}$ die Äquivalenzklasse von $\hat{H}$ unter Ähnlichkeitstransformationen mit $SU(2)$-Matrizen. Somit gilt insgesamt:

Das Spektrum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ der Ashtekar-Isham-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ ist isomorph zur Menge $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ der unitären Äquivalenzklassen von Darstellungen der Hoop-Gruppe nach $SU(2)$. Die Abbildung Θ (s. Satz 3.7) stellt die gesuchte Bijektion dar. Diese Bijektion erlaubt eine Deutung des Raums $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als Raum von *verallgemeinerten Zusammenhängen modulo Eichtransformationen*. Zu einer Eichäquivalenzklasse eines gewöhnlichen Zusammenhangs, also einem Element von $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, gibt es in kanonischer Weise ein Element von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$:

$$\Theta|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad, \quad \tilde{A} \mapsto \frac{1}{2} tr H(\_, A),$$

wobei $A \in \mathcal{A}$ ein Repräsentant von $\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ ist. Man kann eine Topologie auf $\mathcal{HG}$ wählen, so daß die Abbildung $\Theta|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ stetig im Loop-Argument ist [Barr90]. Man hat also eine Abbildung von den Eichäquivalenzklassen von *gewöhnlichen* Zusammenhängen in die unitären Äquivalenzklassen *stetiger* Darstellungen der Hoop-Gruppe auf $SU(2)$. Jede solche unitäre Aquivalenzklasse von Darstellungen ist eindeutig durch ihre Spur bestimmt. Da man aus den Spuren der Holonomien wieder die Eichäquivalenzklasse eines Zusammenhangs rekonstruieren kann [Tel69a, Tel69b], ist $\Theta|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ eine Bijektion

$$\Theta|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to Hom_c(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad,$$

wobei $Hom_c(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ die Menge der unitären Äquivalenzklassen stetiger Darstellungen bezeichnet.

Die in den Sätzen 3.7 und 3.10 konstruierte Abbildung Θ erweist sich als Erweiterung der kanonischen Abbildung $\Theta|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Man hat jetzt eine Bijektion zwischen $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ und der Menge der unitären Äquivalenzklassen *aller*, auch nicht-stetiger Darstellungen (Homomorphismen) von $\mathcal{HG}$ auf $SU(2)$. Jedes Element von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ läßt sich als Spur eines solchen Homomorphismus auffassen. Dies macht deutlich, in welchem Sinne man Elemente von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$

als verallgemeinerte Zusammenhänge betrachten kann.

$\mathcal{A}/\mathcal{G}$ liegt dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, und $Hom_c(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ liegt dicht in $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$. Der Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist dennoch sehr groß. Er enthält alle Eichäquivalenzklassen von Zusammenhängen auf *allen* Hauptfaserbündeln über der Basismannigfaltigkeit Σ. Dies gilt, weil $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ keinen direkten Bezug auf das Bündel mehr nimmt. Unter den Bündeln gibt es auch manche, die von besonderem physikalischen Interesse sind, z.B. das Bündel, das man zur Beschreibung magnetischer Monopole benutzt.

3.3 Zylinderfunktionen

In diesem Abschnitt definieren wir die Funktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, die integriert werden sollen. Dies sind die sogenannten Zylinderfunktionen, die nur von endlich vielen Variablen abhängen. Als Vorbereitung wird in Def. 3.11 eine zahme Untergruppe S als eine von endlich vielen unabhängigen Hoops erzeugte Untergruppe von $\mathcal{HG}$ definiert. Die Menge L der zahmen Untergruppen von $\mathcal{HG}$ ist eine halbgeordnete, nach oben filtrierte Menge, wobei die Halbordnung $\geq$ durch die Inklusion gegeben ist. Auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ wird eine Äquivalenzrelation bezüglich zahmer Untergruppen vereinbart. Lemma 3.13 stellt Bijektionen zwischen $\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$ und $Hom(S, SU(2))/Ad$ und $SU(2)^n/Ad$ her, die es ermöglichen, Zylinderfunktionen als Funktionen auf $SU(2)^n/Ad$ zu betrachten. In Def. 3.14 werden die Zylinderfunktionen dann eingeführt als Pullbacks stetiger Funktionen auf $X'_S := Hom(S, SU(2))/Ad$. Wenn eine Funktion zylindrisch bezüglich einer zahmen Untergruppe S ist, dann auch bezüglich einer zahmen Untergruppe $S' \geq S$. Lemma 3.16 zeigt, daß die Zylinderfunktionen eine involutive Algebra $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ bilden. Der wichtige Satz 3.18 demonstriert, daß die C^*-Algebra $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ isomorph ist zu $C^*(\mathcal{HA})$, der bisher schon betrachteten C^*-Algebra der Konfigurationsvariablen. Der Beweis zu 3.18 konnte gestrafft werden. Insbesondere sind die Wilson-Loop-Funktionen und ihre Linearkombinationen Zylinderfunktionen. Die Zylinderfunktionen ermöglichen eine andere Betrachtungsweise, die bei der Definition des Ashtekar-Lewandowski-Maßes nützlich ist.

Zylinderfunktionen sind diejenigen Funktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, die wir integrieren werden, und die als quadratintegrable Funktionen Zustände der Theorie darstellen (s. Kapitel 4.C und [ALMMT95]). Sie hängen nur von endlich vielen Variablen (Hoops) ab. Um zu erläutern, daß dies kein Nachteil ist, müssen wir etwas vorgreifen. Die mathematische Begründung findet sich vor allem in Kapitel 4. Unser Ziel ist nach wie vor die Definition eines Maßes μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, um den Hilbertraum $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ der Theorie festlegen zu können. In Kapitel 4 wird bewiesen (Satz 4.11 und Abschnitt 4.B), daß *alle* regulären Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ von Maßen auf den endlichdimensionalen Räumen $X'_S = Hom(S, SU(2))/Ad$ herkommen. In Abschnitt 3.D werden wir Maße auf den Räumen X'_S definieren, um Zylinderfunktionen integrieren zu können. Diese induzieren ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Man verliert somit keine Allgemeinheit, wenn man Zylinderfunktionen benutzt, obwohl sie nur von endlich vielen Variablen abhängen.

Physikalisch gesehen hat man eine Art von Gittertheorie, wie in Kapitel 4.D besprochen. Man kann bedeutsame *feld*theoretische Aussagen gewinnen, weil es einen wohldefinierten Limes zu unendlich vielen Freiheitsgraden gibt, den sogenannten projektiven Limes (s. Kapitel 4). Dabei wird die Anzahl der Argumente von Zylinderfunktionen direkt als Anzahl physikalischer Freiheitsgrade aufgefaßt, was zum jetzigen Zeitpunkt, da die physikalische Bedeutung der Zustände nicht gut verstanden ist, eine starke Annahme bedeutet. Wir werden aber direkt sehen, wie die Zylinderfunktionen als Zustände der Theorie von ihren endlich vielen Hoop-Argumenten abhängen. Man kann allerdings auch die Sichtweise wechseln und die Hoops in den Vordergrund stellen. Dann erhält man ein mehr geometrisches Bild, und Graphen mit bestimmten Eigenschaften können als Zustände der Theorie betrachtet werden. Damit ist der Übergang zu den sogenannten Spin-Netzwerken [Bae96a, Bae96b] angedeutet. In diesem Bild korrespondiert die Anzahl der Kanten eines Graphen zur Zahl der Freiheitsgrade.

Def. 3.11: Eine von endlich vielen unabhängigen Hoops frei erzeugte Untergruppe der Hoop-Gruppe heißt *zahm*. Die Menge der zahmen Untergruppen wird mit L bezeichnet. Durch die Inklusion wird L zu einer halbgeordneten, nach oben filtrierten Menge. Wir schreiben $\geq$ statt $\supseteq$.

Es folgt aus Satz 2.14, daß jede endlich erzeugte Untergruppe R von $\mathcal{HG}$ in einer zahmen Untergruppe S enthalten ist. Man wendet einfach die Loop-Zerlegung auf die Erzeugenden von R an und erhält unabhängige Hoops, die eine zahme Untergruppe S erzeugen, die R enthält.

Def. 3.12: Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ unabhängige Hoops, $S = \left\langle \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n \right\rangle$ die von ihnen erzeugte zahme Untergruppe. Seien $h, h' \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Man definiert die *S-Äquivalenzrelation* auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ durch

$$h \sim_S h' :\Leftrightarrow \exists g_0 \in SU(2) : \hat{H}_{h'}(\tilde{\gamma}) = g_0^{-1} \hat{H}_h(\tilde{\gamma}) g_0 \quad \forall \tilde{\gamma} \in S,$$

wobei $\hat{H}_h, \hat{H}_{h'} \in Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ die h und h' zugeordneten Elemente sind (s. Satz 3.7). Sei

$$\pi_S : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to \left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$$

die kanonische Projektion.

Entscheidend ist hier, daß die Homomorphismen $\hat{H}_h$ und $\hat{H}_{h'}$ nur auf der endlich erzeugten Gruppe S durch eine Ähnlichkeitstransformation verbunden sein müssen und nicht mehr auf ganz $\mathcal{HG}$, wie es bei der Definition von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ gefordert war. Das folgende Lemma ist zentral für die Konstruktion des Ashtekar-Lewandowski-Maßes:

Lemma 3.13: Sei S eine zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}$. Dann gilt
a) Es gibt eine natürliche Bijektion

$$\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S \to Hom(S, SU(2))/Ad$$

b) Für jede Wahl unabhängiger freier Erzeugender $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ von S gibt es eine Bijektion

$$\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S \to SU(2)^n/Ad$$

c) Die von $SU(2)^n/Ad$ auf $\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$ erzeugte Topologie ist unabhängig von der Wahl der unabhängigen freien Erzeugenden von S.

Bew.: a) Man hat nach den Sätzen 3.7 und 3.10 eine Bijektion

$$\Theta : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad.$$

Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ unabhängige Hoops, die S frei erzeugen. Man definiert die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad &\to Hom(S, SU(2))/Ad, \\ [\hat{H}]_{Ad} &\mapsto [\hat{H}|_S]_{Ad}. \end{aligned}$$

Sei $\hat{H}_S : S \to SU(2)$ ein Homomorphismus von der zahmen Untergruppe S nach $SU(2)$ und $g_k := \hat{H}_S(\tilde{\beta}_k),\ k = 1, ..., n$. Dann gibt es nach Satz 2.17 ein $A_0 \in \mathcal{A}$, so daß $H(\beta_k, A_0) = g_k,\ k = 1, ..., n$, wobei die Loops β_k Repräsentanten der $\tilde{\beta}_k$ sind. Man erhält einen Homomorphismus $\hat{H}_{A_0}$ von ganz $\mathcal{HG}$ nach $SU(2)$ durch

$$\hat{H}_{A_0}(\tilde{\alpha}) := H(\alpha, A_0), \quad \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG},$$

wobei α wieder ein Repräsentant von $\tilde{\alpha}$ ist, und es gilt $\hat{H}_{A_0}|_S = \hat{H}_S$. Jeder Homomorphismus von S nach $SU(2)$ läßt sich somit auf ganz $\mathcal{HG}$ erweitern. Daher ist φ surjektiv.

Seien $h_1, h_2 \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}},\ h_1 \sim_S h_2$, d.h. es gibt ein $g_0 \in SU(2)$, so daß $\hat{H}_{h_1}(\tilde{\gamma}) = g_0^{-1}\hat{H}_{h_2}(\tilde{\gamma})g_0\ \forall\tilde{\gamma} \in S$, wobei $\hat{H}_{h_i} = \Theta(h_i),\ i = 1, 2$. Dies notieren wir als

$$[\hat{H}_{h_1}|_S]_{Ad} = [\hat{H}_{h_2}|_S]_{Ad}.$$

Sei $\Phi := \varphi \circ \Theta : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to Hom(S, SU(2))/Ad$. Offensichtlich bildet Φ alle Elemente aus einer S-Äquivalenzklasse auf dasselbe Element von $Hom(S, SU(2))/Ad$ ab, d.h. man hat eine injektive Abbildung

$$\Phi' : \left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S \to Hom(S, SU(2))/Ad,$$

die wegen der Surjektivität von φ auch surjektiv ist. Daher ist Φ' die gesuchte Bijektion.

b) Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ die gewählten freien Erzeugenden von S. Durch Auswertung der Elemente von $Hom(S, SU(2))/Ad$ auf den Erzeugenden erhält man eine Bijektion zwischen $Hom(S, SU(2))/Ad$ und $SU(2)^n/Ad$ und mit der Abbildung aus (a) eine Bijektion zwischen $\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$ und $SU(2)^n/Ad$.

c) Siehe Seite 92f, wo der Beweis für allgemeinere Gruppen geführt wird.

□

Der Beweis von (a) zeigt, daß sich jeder Homomorphismus von S nach $SU(2)$ auf ganz $\mathcal{HG}$ erweitern läßt. Dahinter steckt Satz 2.17, der auch allgemeiner für andere Gruppen gilt, insbesondere die für die Physik interessanten Gruppen $SU(n)$ und $U(n)$.

Dieses Lemma zeigt, daß sich die Situation entscheidend vereinfacht, wenn man die Betrachtung auf endlich erzeugte Untergruppen der Hoop-Gruppe einschränkt. Zu endlich vielen Erzeugenden lassen sich immer endlich viele freie Erzeugende finden (Lemma 2.14), was bedeutet, daß jede endlich erzeugte Untergruppe von $\mathcal{HG}$ in einer zahmen Untergruppe enthalten ist. Faßt man die zu Elementen von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ gehörigen Homomorphismen zusammen, die sich auf einer zahmen Untergruppe nicht unterscheiden (Bildung der S-Äquivalenzklassen), so zeigt sich, daß $\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$ ein endlichdimensionaler Raum ist, der sich zudem als isomorph zu $SU(2)^n/Ad$ erweist.

Es bleibt zu zeigen, daß man einen geeigneten Limes zu unendlich vielen Variablen hat. Dies geschieht in Kapitel 4.

Auf $SU(2)^n/Ad$ kann man in kanonischer Weise ein Maß definieren, das vom Haar-Maß auf $SU(2)$ herkommt. Dies ist der Weg, der in [AshLew94] beschrieben wurde und hier mit einigen Klärungen wiedergegeben wird. Zunächst braucht man den Begriff der Zylinderfunktion:

Def. 3.14: Mittels Lemma 3.13 kann man die in Definition 3.12 eingeführte Projektion π_S als Projektion von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ nach $Hom(S, SU(2))/Ad$ auffassen. Sei $\tilde{f}$ eine stetige komplexwertige Funktion auf $Hom(S, SU(2))/Ad$. Der Pullback f von $\tilde{f}$ unter π_S heißt *Zylinderfunktion auf* $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. f heißt *zylindrisch bezüglich* S. Die Menge der Zylinderfunktionen wird mit $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ bezeichnet. Sei $X'_S := Hom(S, SU(2))/Ad$. Dann gilt

$$Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}) := \bigcup_{S \in L} \pi_S^* C(X'_S).$$

Bem. 3.15: a) Sei $S' \supseteq S,\ f$ zylindrisch bezüglich S. Dann ist f auch zylindrisch bezüglich S'.

b) Eine Zylinderfunktion f ist konstant auf den S-Äquivalenzklassen von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$.

Bew.: a) Da die S-Äquivalenzklassen in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ im allgemeinen größer sind als die S'-Äquivalenzklassen, folgt die Aussage.

b) Sei f eine Zylinderfunktion bezüglich S. f ist insbesondere stetig. Dazu betrachtet man das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_S"] & \mathbb{C} \\
X'_S \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ hat man die Gelfand-Topologie, und da $X'_S \simeq \left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$, wählt man auf X'_S die Quotiententopologie. In dieser Topologie ist π_S stetig, und wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie ist auch $\tilde{f}$

stetig. Also ist $f = \tilde{f} \circ \pi_S$ für stetige Funktionen π_S und $\tilde{f}$.

$\square$

Lemma 3.16: Die Menge $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ der Zylinderfunktionen ist bezüglich der Addition und Multiplikation, der komplexen Konjugation und der Supremums-Norm eine involutive, normierte Algebra.

Bew.: Sei f eine Zylinderfunktion bezüglich S. Offensichtlich sind auch $\lambda f,\ \lambda \in \mathbb{C}$ und die komplex konjugierte Funktion $\overline{f}$ Zylinderfunktionen bezüglich S. Seien f_1, f_2 Zylinderfunktionen bezüglich S_1 bzw. S_2 und seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ unabhängige Erzeugende von S_1, $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_m$ unabhängige Erzeugende von S_2. Aus der Menge $\{\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n, \tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_m\}$ erzeuge man durch die Loop-Zerlegung (Lemma 2.14) unabhängige Hoops $\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_p$. Sei $S := \langle\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_p\rangle$. f_1 und f_2 sind zylindrisch bezüglich S, und damit auch $f_1 + f_2$ und $f_1 f_2$. Zylinderfunktionen sind als Pullbacks stetiger Funktionen auf kompakten Räumen der Gestalt $Hom(S, SU(2))/Ad \simeq SU(2)^n/Ad$ beschränkt. Mit der Supremumsnorm wird $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ daher zu einer involutiven, normierten Algebra.

$\square$

Def. 3.17: $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ ist die C^*-Algebra, die durch Vervollständigung von $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ bezüglich der Supremums-Norm entsteht.

Satz 3.18: $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ ist isomorph zur Ashtekar-Isham-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$.

Bew.: a) $C^*(\mathcal{HA}) \subseteq C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$:

Sei $F \in \mathcal{HA} \subset C^*(\mathcal{HA})$, $F(\tilde{A}) = \sum_{i=1}^m a_i T_{\tilde{\alpha}_i}(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$. Sei $\hat{F} \in C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ die Gelfand-Transformierte von F, $\hat{F}(h) = \sum_{i=1}^m a_i \hat{H}_{\tilde{\alpha}_i}(h)$, wobei $h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, $\hat{H}_h$ das zugehörige Element von $Hom(\mathcal{HG}, SU(2))/Ad$ und $\hat{H}_{\tilde{\alpha}_i}(h) := \frac{1}{2} tr \hat{H}_h(\tilde{\alpha}_i)$ ist. Seien $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n$ durch Loop-Zerlegung aus $\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_n$ erzeugte unabhängige Hoops und $S = \langle\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n\rangle$ die von den $\tilde{\gamma}_i$ erzeugte zahme Untergruppe. $\hat{F}$ ist konstant auf den S-Äquivalenzklassen von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, also ist $\hat{F} \in Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}) \subset C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$.

Es gilt $\hat{F}|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = F$. Die Normen von $F \in \mathcal{HA}$ und $\hat{F} \in C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ sind gegeben durch

$$|F| = \sup_{\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}} |F(\tilde{A})|, \quad |\hat{F}| = \sup_{h \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} |\hat{F}(h)|.$$

Da $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist und $\hat{F}|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = F$ gilt, hat man eine isometrische Einbettung $\mathcal{HA} \subset C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$. Die Norm ist wegen $||x| - |y|| \leq |x - y|$ gleichmäßig stetig und läßt sich daher auf ganz $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ fortsetzen. Deswegen ist auch $C^*(\mathcal{HA})$ als Vervollständigung von $\mathcal{HA}$ in dieser Norm in $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ enthalten.

b) $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})) \subseteq C^*(\mathcal{HA})$:

Durch die Gelfand-Transformation gilt $C^*(\mathcal{HA}) \simeq C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$. Sei $f \in Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$. Dann ist $f : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to \mathbb{C}$ stetig, also $f \in C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$. Über die Gelfand-Isomorphie ist also $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}) \subseteq C^*(\mathcal{HA}) \subseteq C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$, wobei die zweite Inklusion diejenige aus Teil (a) ist. Insgesamt gilt somit $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})) \simeq C^*(\mathcal{HA})$.

□

Die aus den Zylinderfunktionen gebildete C^*-Algebra entspricht also der bisher untersuchten Algebra $C^*(\mathcal{HA})$. Insbesondere sind die Wilson-Loop-Funktionen $T_{\tilde{\alpha}}$ Zylinderfunktionen. In der neuen Betrachtungsweise wird besonders deutlich, daß diese Funktionen nur von endlich vielen Argumenten abhängen, da sie von Funktionen auf endlichdimensionalen Räumen der Gestalt $Hom(S, SU(2))/Ad$ herkommen. Wegen der Isomorphie

$$Hom(S, SU(2))/Ad \simeq SU(2)^n/Ad$$

liegt es nahe, das vom Haar-Maß auf $SU(2)$ induzierte Maß auf $SU(2)^n/Ad$ zu benutzen, um solche Funktionen zu integrieren. Im folgenden soll dieses Maß definiert und seine Eigenschaften untersucht werden.

3.4 Das Ashtekar-Lewandowski-Maß

Das Ashtekar-Lewandowski-Maß wird definiert. Dieses Maß ist von besonderer Bedeutung, weil es durch die sogenannten Realitätsbedingungen in der Loop-Quantengravitation eine besondere Stellung erhält. Bei der Übersetzung der Konfigurationsvariablen in Operatoren könnte man auch andere Wahlen für das Maß treffen, aber die Implementation der Impulsvariablen, die hier nicht betrachtet wird, zeichnet das Ashtekar-Lewandowski-Maß aus [ALMMT95]. Dieses Maß ist das einzige nicht-triviale Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, für das die Realitätsbedingungen erfüllt werden können. Deswegen werden wir ausschließlich dieses Maß betrachten. In Kapitel 5.C gibt es einen Hinweis, wie man auch andere diffeomorphismeninvariante Maße konstruieren kann.

Baez hat sich ausführlich mit diesem Thema beschäftigt [Bae93].

Die Idee bei der Konstruktion des Ashtekar-Lewandowski-Maßes ist auszunutzen, daß Zylinderfunktionen als Funktionen auf $SU(2)^n/Ad$ angesehen werden können. Auf $SU(2)^n/Ad$ hat man ein kanonisches Wahrscheinlichkeitsmaß, nämlich das Maß, das vom Haar-Maß auf $SU(2)$ herkommt. Es wird eine Verträglichkeitsbedingung angegeben, die die Maße auf den endlichdimensionalen Räumen der Gestalt $X'_S := Hom(S, SU(2))/Ad \simeq SU(2)^n/Ad$ erfüllen müssen, um ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ zu induzieren. (Diese Verträglichkeitsbedingung wird in Kapitel 4, Satz 4.11 näher betrachtet.) In Def. 3.19 werden die Maße auf den Räumen X'_S definiert. In Satz 3.20 wird gezeigt, daß diese Maße die Verträglichkeitsbedingung erfüllen und ein reguläres, strikt positives Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induzieren, das sogenannte Ashtekar-Lewandowski-Maß. Mit μ ist auch der Raum $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ definiert, der nach den Betrachtungen aus Kapitel 3.A der Hilbertraum der Theorie ist. Die Elemente von $C^*(\mathcal{HA})$ wirken als multiplikative, beschränkte Operatoren auf $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. Gleichzeitig sind die Zylinderfunktionen, zu denen die Wilson-Loop-Funktionen gehören, (quadrat)integrable Funktionen (siehe Kapitel 4.C) und somit auch Zustände der Theorie.

Um Zylinderfunktionen integrieren zu können, definiert man geeignete Maße auf den endlichdimensionalen Räumen $X'_S = Hom(S, SU(2))/Ad$. Sei $f \in C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ eine Zylinderfunktion bezüglich S, $f = (\pi_S)^* \tilde{f}$. Die Idee besteht darin, durch

$$\int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} d\mu f := \int_{X'_S} d\mu_S \tilde{f}$$

für geeignete Maße μ_S ein Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ zu definieren. Damit dies funktioniert, müssen die Maße μ_S folgende Verträglichkeitsrelation erfüllen: Sei f zylindrisch bezüglich S und S', d.h. $f = (\pi_S)^* \tilde{f} = (\pi_{S'})^* \tilde{f}'$, $\tilde{f} : X'_S \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}' : X'_{S'} \to \mathbb{C}$. Dann soll gelten

$$\int_{X'_S} d\mu_S \tilde{f} = \int_{X'_{S'}} d\mu_{S'} \tilde{f}'.$$

Um zu zeigen, daß auf diese Weise tatsächlich ein eindeutiges Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ definiert werden kann, benötigt man die Theorie der projektiven Limites (s. Kapitel 4, insbesondere Satz 4.11). Wir stellen jetzt das Ashtekar-Lewandowski- oder induzierte Haar-Maß vor und zeigen, daß es die Verträglichkeitsbedingung erfüllt.

Def. 3.19: Sei μ_H das normierte Haar-Maß auf $SU(2)$, μ_H^n das Haar-Maß auf $SU(2)^n$, μ_n das Bildmaß auf $SU(2)^n/Ad$ ($B \subseteq SU(2)^n/Ad$, $\mu_n(B) := \mu_H^n(\rho^{-1}(B))$, wobei ρ die Projektion von $SU(2)^n$ auf $SU(2)^n/Ad$ ist). μ_S ist definiert als das Bildmaß von μ_n auf X'_S bezüglich der Bijektion $SU(2)^n/Ad \to X'_S$ (s. Lemma 3.13).

Satz 3.20: a) Sei $f \in Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ ein Zylinderfunktion bezüglich zweier zahmer Untergruppen S und S', $\quad f = (\pi_S)^* \tilde{f} = (\pi_{S'})^* \tilde{f}'$. μ_S und $\mu_{S'}$ seien die zugehörigen Maße auf X'_S bzw. $X'_{S'}$. Dann gilt $\int_{X'_S} d\mu_S \tilde{f} = \int_{X'_{S'}} d\mu_{S'} \tilde{f}'$.

b) Das Funktional $\upsilon : \mathcal{HA} \to \mathbb{C}$,

$$\upsilon(F) = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} d\mu f, \quad F \in \mathcal{HA} \subset C^*(\mathcal{HA}),$$

wobei f die Gelfand-Transformierte von F ist, läßt sich eindeutig zu einem linearen, strikt positiven Funktional auf $C^*(\mathcal{HA})$ erweitern.

c) Das in (b) definierte Maß μ ist ein reguläres, strikt positives Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$.

Bew.: a) Sei o.B.d.A. $S' \subseteq S$. Seien $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{n'}$ unabhängige Erzeugende von S', $\tilde{\delta}_1, ..., \tilde{\delta}_n$ unabhängige Erzeugende von S. Man benutzt die Loop-Zerlegung, um aus $\{\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_{n'}, \tilde{\delta}_1, ..., \tilde{\delta}_n\}$ unabhängige Hoops $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ zu erhalten, die wieder S (und natürlich auch S') generieren.

Nach Konstruktion läßt sich jedes $\tilde{\gamma}_i$ als Wort in den $\tilde{\beta}_j$ und ihren Inversen darstellen,

$$\tilde{\gamma}_i = \tilde{\beta}_{j_1}^{\epsilon_1} \tilde{\beta}_{j_2}^{\epsilon_2} ... \tilde{\beta}_{j_N}^{\epsilon_N}, \quad \epsilon_k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}.$$

Insbesondere enthält wegen der Unabhängigkeit jedes $\tilde{\gamma}_i$ ein Kurvenstück, das nur einfach durchlaufen wird und von den anderen $\tilde{\gamma}_k$ in höchstens endlich vielen Punkten getroffen wird. Dieses Kurvenstück wird von einem oder mehreren der $\tilde{\beta}_j$ überdeckt. Man wählt zu jedem $\tilde{\gamma}_i$ ein solches $\tilde{\beta}_{K(i)}$ und erhält eine Zuordnung $K : \{1, ..., n'\} \to \{1, ..., n\}$. Da das Kurvenstück von $\tilde{\gamma}_i$, das von $\tilde{\beta}_{K(i)}$ überdeckt wird (evtl. teilweise), nur in $\tilde{\gamma}_i$ auftaucht und in keinem anderen $\tilde{\gamma}_k$, ist K injektiv. Wegen der einfachen Durchlaufung dieses Kurvenstücks ist der Exponent $\epsilon_{K(i)}$ von $\tilde{\beta}_{K(i)}$ entweder 1 oder -1.

Falls $\epsilon_{K(i)} = -1$, ändert man die Erzeugende $\tilde{\beta}_{K(i)}$ in $\tilde{\beta}^{-1}_{K(i)}$. Dann hat $\tilde{\gamma}_i$ die Gestalt

$$\tilde{\gamma}_i = ...\tilde{\beta}_{K(i)}...,$$

wobei ... jeweils für Verknüpfungen von $\tilde{\beta}_l,\ l \neq K(m),\ m = 1, ..., n'$ steht und $\tilde{\beta}_{K(i)}$ in keiner Zerlegung eines anderen $\tilde{\gamma}_k,\ k \neq i$ auftaucht.

Man definiert nun $g_j := H(\tilde{\beta}_j, A),\ j = 1, ..., n$ und $g'_i := H(\tilde{\gamma}_i, A),\ i = 1, ..., n'$ für einen fest gewählten Zusammenhang A. Da für die Holonomie-Abbildung gilt $H(\alpha\beta, A) = H(\alpha, A)H(\beta, A)$, lassen sich die g'_i als Produkte der g_j darstellen. Man erhält

$$g'_i = ...g_{K(i)}...,\quad i = 1, ..., n',$$

wobei ... hier jeweils Produkte von g_l sind, für die gilt $l \neq K(m),\ m = 1, ..., n'$. Außerdem taucht $g_{K(i)}$ nur in der Zerlegung von g'_i auf. Die Holonomie-Abbildung überträgt die obigen Beziehungen zwischen den Erzeugenden zahmer Untergruppen auf die Indizes von Gruppenelementen.

Die zu integrierende Funktion $f : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to \mathbb{C}$ ist der Pullback sowohl von $\tilde{f}$ als auch von $\tilde{f}'$, also gilt

$$\tilde{f}(g_1, ..., g_n) = \tilde{f}'(g'_1, ...g'_{n'}) = \tilde{f}'(...g_{K(1)}..., ..., ...g_{K(n')}...)$$

gemäß der obigen Darstellung der g'_i durch die g_j. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{X'_S} d\mu_S \tilde{f} &= \int d\mu_1 ... \int d\mu_n \tilde{f}(g_1, ..., g_n) \\ &= \int \prod_{m \notin K(1),...,K(n')} d\mu_m (\int d\mu_{K(1)} ... \int d\mu_{K(n')} \tilde{f}'(...g_{K(1)}..., ..., ...g_{K(n')}...)).\end{aligned}$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Definition 3.19 des vom Haar-Maß auf $SU(2)$ herkommenden Maßes μ_S auf X'_S ausgenutzt. Im zweiten Schritt wurde die Integrationsreihenfolge geändert (Satz von Fubini) und $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}'$ ersetzt. Nach obigen Überlegungen kommt der Index $K(n')$ nur im letzten Argument von $\tilde{f}'$ vor, so daß man die Invarianz des Haar-Maßes (hier: $\mu_{K(n')}$) ausnutzen kann, um zu schreiben

$$= \int \prod_{m \notin K(1),...,K(n')} d\mu_m (\int d\mu_{K(1)} ... \int d\mu_{K(n')} \tilde{f}'(...g_{K(1)}..., ..., g_{K(n')})).$$

Ebenso verfährt man mit den übrigen Argumenten $K(1), ..., K(n'-1)$ und erhält

$$= \int \prod_{m \notin K(1),...,K(n')} d\mu_m \Big(\int d\mu_{K(1)} ... \int d\mu_{K(n')} \tilde{f}'(g_{K(1)}, ..., g_{K(n')}) \Big)$$
$$= \int d\mu_{K(1)} ... \int d\mu_{K(n')} \tilde{f}'(g_{K(1)}, ..., g_{K(n')}).$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß die Indizes $\{m \mid m \notin K(1), ..., K(n')\}$ nicht mehr im Integranden auftauchen und daher die Integrationen über die zugehörigen μ_m wegen der Normierung des Haar-Maßes jeweils 1 ergeben. Benennt man die verbleibenden Variablen um, so ergibt sich

$$= \int d\mu_1 ... \int d\mu_{n'} \tilde{f}'(g_1, ..., g_{n'})$$
$$= \int_{X'_{S'}} d\mu_{S'} \tilde{f}',$$

also insgesamt $\int_{X'_S} d\mu_S \tilde{f} = \int_{X'_{S'}} d\mu_{S'} \tilde{f}'$.

b) Das Funktional v ist offensichtlich linear und stetig. Sei $\tilde{f} : X'_S \to \mathbb{C}$ stetig, so daß $f = (\pi_S)^* f$, wobei die Zylinderfunktion f die Gelfandtransformierte von $\mathcal{F} \in \mathcal{HA}$ ist. Da $(\tilde{f})^* \tilde{f}$ für alle $\tilde{f}$ eine nicht-negative Funktion ist, die man als Funktion auf $SU(2)^n/Ad$ auffassen kann, und $v(F^*F)$ sich als Integral über $(\tilde{f})^* \tilde{f}$ bezüglich eines regulären Maßes auf $SU(2)^n/Ad$ ergibt, ist v ein strikt positives lineares Funktional auf $\mathcal{HA}$. Da $\mathcal{HA}$ dicht in $C^*(\mathcal{HA})$ ist, läßt sich v eindeutig zu einem linearen, strikt positiven Funktional auf $C^*(\mathcal{HA})$ erweitern.

c) Die C^*-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ ist nach dem Gelfandschen Darstellungssatz isomorph zur C^*-Algebra $C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ der stetigen Funktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, dem Spektrum von $C^*(\mathcal{HA})$ (siehe Kapitel 3.A). Daher läßt sich v als stetiges lineares Funktional auf dieser Algebra auffassen. Nach dem Satz von Riesz induziert v ein reguläres Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Mit v ist auch μ strikt positiv. μ heißt *Ashtekar-Lewandowski-Maß* oder *induziertes Haar-Maß*.

□

Der Beweis, daß das Ashtekar-Lewandowski-Maß μ invariant gegenüber analytischen Diffeomorphismen der Basismannigfaltigkeit Σ ist, wird in Kapitel 5 geführt. Physikalisch bedeutet dies die Invarianz gegen räumliche Diffeomorphismen, d.h. dreidimensionale Kovarianz.

4 Projektive Techniken

Dieses Kapitel folgt weitgehend [AshLew95]. Die Beweise werden klarer ausgeführt und ergänzt. Im ersten Abschnitt werden die projektiven Techniken vorgestellt, die in Abschnitt 4.B für die Anwendung auf die physikalische Situation gebraucht werden. In den Abschnitten 4.B und 4.C wird die Verbindung zu den vorangegangenen Kapiteln dargestellt, die sich hauptsächlich aus den Arbeiten [AshIsh92, AshLew94] herleiten.

Es wird insbesondere gezeigt, daß der unendlichdimensionale Quantenkonfigurationsraum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als projektiver Limes der endlichdimensionalen Räume $X'_S = Hom(S, SU(2))/Ad$ verstanden werden kann, und wie Maße auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ charakterisiert werden können. Der zentrale Punkt ist, daß aus Strukturen im Endlichdimensionalen (den Räumen X'_S und Maßen darauf) in mathematisch sauberer Weise Strukturen im Unendlichdimensionalen ($\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ und Maße darauf) erwachsen. Der geeignete Limes beim Übergang vom Endlich- zum Unendlichdimensionalen ist der projektive Limes. Damit werden die Techniken aus Kapitel 3, wo man auf Zylinderfunktionen zurückgriff, die nur von endlich vielen Variablen abhängen, mathematisch begründet und auf sichere Füße gestellt. Die Einschränkung auf endlich viele Variablen ist keine echte Einschränkung, weil man einen geeigneten Limes zu einer Feldtheorie mit unendlich vielen Variablen hat. Allerdings muß man sagen, daß die Zustände der Theorie und der klassische Limes, bei dem echte feldtheoretische Aussagen wichtig sind, heute nicht tiefgehend verstanden sind, s. aber [ARS92, VarZap00, ArnGup00].

In Abschnitt 4.C wird dargestellt, warum man Zylinderfunktionen und Wilson-Loop-Funktionen als Zustände der Theorie betrachten kann. Die projektiven Techniken erlauben eine Deutung des Formalismus als eine Art von Gittertheorie. Dies wird in Abschnitt 4.D besprochen.

4.1 Allgemeiner Teil

Im Unterabschnitt 4.A.1 werden projektive Spektren eingeführt und der projektive Limes definiert. Ein projektives Spektrum enthält per definitionem kein größtes Element. Der projektive Limes $\overline{X}$, der ein Teil des kartesischen Produkts der Teilräume X_S des projektiven Spektrums ist, ersetzt ein solches größtes Element in dem Sinne, daß es für jedes S eine surjektive Projektion $p_S : \overline{X} \to X_S$ gibt. Zylinderfunktionen werden in einem abstrakteren Sinne definiert. Auch hier erhält man wieder eine involutive Algebra

$Cyl(\overline{X})$, die man zu einer C^*-Algebra $C^*(Cyl(\overline{X}))$ vervollständigen kann.

Diese C^*-Algebra wird in Unterabschnitt 4.A.2 untersucht. Es zeigt sich, daß der projektive Limes $\overline{X}$ das Spektrum von $C^*(Cyl(\overline{X}))$ ist. In Unterabschnitt 4.A.3 werden in Satz 4.11 die regulären Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\overline{X}$ charakterisiert. Es wird bewiesen, daß *alle* solche Maße von einer Familie von Maßen auf den Räumen X_S, die das projektive Spektrum bilden, herkommen. Damit eine Familie von Maßen auf den X_S ein Maß auf $\overline{X}$ induziert, müssen die Maße eine Verträglichkeitsbedingung erfüllen. Diese Bedingung kennen wir schon aus Kapitel 3.D, wo sie bei der Definition des Ashtekar-Lewandowski-Maßes auftauchte.

Der Unterabschnitt 4.A.4 beschäftigt sich mit der Wirkung einer kompakten Gruppe G auf einem projektiven Spektrum. Unter einer weiteren Verträglichkeitsbedingung wird eine Operation von G auf dem projektiven Limes induziert. In Satz 4.12 wird bewiesen, daß die Bildung des projektiven Limes und die Wirkung von G vertauschen.

4.1.1 Projektive Spektren und die zugehörigen C^*-Algebren von Zylinderfunktionen

Def. 4.1: Sei L eine halbgeordnete und nach oben filtrierte Menge. $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ heißt *projektives Spektrum*, wenn $p_{SS'} : X_{S'} \to X_S$ für $S' \geq S$ eine surjektive Abbildung ist, so daß für $S'' \geq S' \geq S$ gilt

$$p_{SS'} \circ p_{S'S''} = p_{SS''}.$$

Def. 4.2: Sei L eine halbgeordnete, nach oben filtrierte Menge, $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ ein projektives Spektrum. Als *projektiven Limes* $\overline{X}$ der X_S, $S \in L$ bezeichnet man folgende Teilmenge des kartesischen Produkts der X_S:

$$\overline{X} = \varprojlim_{S \in L} X_S := \{(x_S)_{S \in L} \in \prod_{S \in L} X_S \mid S' \geq S \Rightarrow p_{SS'} x_{S'} = x_S\}.$$

Der projektive Limes $\overline{X}$ besteht also aus solchen Familien von Punkten der X_S, die aus jedem X_S genau einen Punkt x_S enthalten und bei denen diese Punkte innerhalb einer solchen Familie $(x_S)_{S \in L}$ miteinander in der durch die Projektionen bestimmten Beziehung $S' \geq S \Rightarrow p_{SS'}x_{S'} = x_S$ stehen.

Im folgenden seien die X_S kompakte Hausdorffräume, die $p_{SS'}$ stetige Surjektionen. $\overline{X}$ trage die von der Produkttopologie induzierte Topologie. $\overline{X}$ ist kompakt in dieser Topologie. Man hat kanonische Projektionen vom kartesischen Produkt auf die einzelnen Räume X_S. Die Einschränkung dieser Projektionen auf $\overline{X}$ ergibt Projektionen

$$p_S : \overline{X} \to X_S.$$

Sei $C(X_S)$ der Raum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf X_S. Auf $\bigcup_{S \in L} C(X_S)$ führt man folgende Äquivalenzrelation ein:

$$f_1 \sim f_2 :\Leftrightarrow \exists S_3 \geq S_1, S_2 : p^*_{S_1S_3} f_{S_1} = p^*_{S_2S_3} f_{S_2},$$

wobei

$$p^*_{SS'} : C(X_S) \to C(X_{S'}), \quad f_S \mapsto f_S \circ p_{SS'}$$

der von der Projektion $p_{SS'}$ erzeugte Pullback ist.

Bem. 4.3: Da $p_{SS'}$ surjektiv ist, ist $p^*_{SS'}$ injektiv.

Bew.: Seien $f_S, f'_S \in C(X_S)$, $f_S \neq f'_S$, d.h. es gibt ein $x_S \in X_S$, so daß $f_S(x_S) \neq f'_S(x_S)$. Da $p_{SS'}$ surjektiv ist, gibt es ein $x_{S'} \in X_{S'}$, so daß gilt $p_{SS'}x_{S'} = x_S$. Dann ist

$$\begin{aligned} p^*_{SS'} f_S(x_{S'}) &= f_S(p_{SS'}x_{S'}) = f_S(x_S) \\ &\neq f'_S(x_S) = f'_S(p_{SS'}x_{S'}) = p^*_{SS'} f'_S(x_{S'}), \end{aligned}$$

also ist $p^*_{SS'} : C(X_S) \to C(X_{S'})$ injektiv.

□

Bem. 4.4: Wenn $p^*_{S_1S_3} f_{S_1} = p^*_{S_2S_3} f_{S_2}$ für ein $S_3 \geq S_1, S_2$, dann auch für alle $S_3 \geq S_1, S_2$.

Def. 4.5: Als *Menge der Zylinderfunktionen* $Cyl(\overline{X})$, die zu dem projektiven Spektrum $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ assoziiert ist, bezeichnet man

$$Cyl(\overline{X}) := (\bigcup_{S \in L} C(X_S))/ \sim .$$

Die Äquivalenzklasse von $f_S \in \bigcup_{S\in L} C(X_S)$ wird als $[f_S]_\sim$ notiert.

Die Elemente von $Cyl(\overline{X})$ sind Äquivalenzklassen von Funktionen, die entgegen der Notation zunächst auf $\bigcup_{S\in L} C(X_S)$ und nicht auf $\overline{X}$ definiert sind. Sie können aber als Funktionen auf $\overline{X}$ aufgefaßt werden: Seien $f \in Cyl(\overline{X})$, $(x_S)_{S\in L} \in \overline{X}$ und f_{S_1}, f_{S_2} Repräsentanten von f. Dann gilt $f_{S_1}(x_{S_1}) = f_{S_2}(x_{S_2})$. Sei nämlich $S_3 \geq S_1, S_2$. Dann ist $p^*_{S_1S_3} f_{S_1} = p^*_{S_2S_3} f_{S_2}$ und somit

$$\begin{aligned} f_{S_1}(x_{S_1}) &= f_{S_1}(p_{S_1S_3} x_{S_3}) \\ &= (p^*_{S_1S_3} f_{S_1})(x_{S_3}) \\ &= (p^*_{S_2S_3} f_{S_2})(x_{S_3}) \\ &= f_{S_2}(p_{S_2S_3} x_{S_3}) \\ &= f_{S_2}(x_{S_2}). \end{aligned}$$

Also ist

$$f((x_S)_{S\in L}) := f_S(x_S)$$

für einen beliebigen Repräsentanten f_S von f wohldefiniert. Damit erhält man eine Funktion $f : \overline{X} \to \mathbb{C}$. Die Stetigkeit von f ersieht man aus der folgenden Darstellung: Sei f_S ein Repräsentant von f. Dann ist $f = p^*_S f_S$, denn

$$(p^*_S f_S)((x_{S'})_{S'\in L}) = f_S(p_S(x_{S'})_{S'\in L}) = f_S(x_S)$$

für alle $(x_{S'})_{S'\in L} \in \overline{X}$. Da f_S und p_S stetig sind, folgt die Stetigkeit von f.

Um zu zeigen, daß Zylinderfunktionen von endlich vielen Variablen abhängen, geben wir ein Beispiel. Seien $I = \mathbb{N}$, $L = Fin(\mathbb{N})$ die endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, wobei die Halbordnung durch die Inklusion gegeben ist, X_i kompakte Hausdorffräume und $X_S = \prod_{i\in S} X_i$ für $S \in Fin(\mathbb{N})$. Man hat Projektionen

$$p_{SS'} : X_{S'} \to X_S, \quad (x_i)_{i\in S'} \mapsto (x_j)_{j\in S}$$

für $S \subseteq S'$. Damit hat man ein projektives Spektrum $(X_S, p_{SS'})$ gegeben, dessen projektiver Limes sich ergibt als

$$\overline{X} = \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \simeq \varprojlim_{S\in Fin(\mathbb{N})} X_S.$$

Seien f, g Zylinderfunktionen, d.h.

$$f, g \in (\bigcup_{S\in L} C(X_S))/\sim .$$

Dabei ist die Äquivalenzrelation folgendermaßen gegeben: Seien $f \in C(X_{S_1})$ und $g \in C(X_{S_2})$. $f \sim g \Leftrightarrow \exists S_3 \geq S_1, S_3 : f \circ p_{S_1 S_3} = g \circ p_{S_2 S_3} \in C(X_{S_3})$.

Da gilt $f \in C(X_{S_1}) = C(\prod_{i \in S_1} X_i)$ für ein $S_1 \in Fin(\mathbb{N})$, wird die Abhängigkeit von nur endlich vielen Variablen hier besonders deutlich.

Lemma 4.6: Gegeben $f, g \in Cyl(\overline{X})$. Dann gibt es ein $S \in L$ und $f_S, g_S \in C(X_S)$ mit $f = [f_S]_\sim,\ g = [g_S]_\sim$.

Bew.: Man hat $f = [f_{S_1}]_\sim,\ g = [g_{S_2}]_\sim$. Sei $S \geq S_1, S_2$. Man wähle

$$f_S := p^*_{S_1 S} f_{S_1}, \quad g_s := p^*_{S_2 S} g_{S_2}.$$

$\square$

Satz 4.7: a) Seien $f, g \in Cyl(\overline{X})$. Dann sind die folgenden Operationen wohldefiniert:

$$\begin{aligned} f+g &:= [f_S + g_S]_\sim, \quad fg := [f_S g_S]_\sim, \\ af &:= [af_S]_\sim \quad \forall a \in \mathbb{C}, \\ f^* &:= [(f_S)^*]_\sim, \end{aligned}$$

wobei $S \in L$ (gemäß dem vorangegangenen Lemma) und $*$ hier komplexe Konjugation bedeutet.

b) $Cyl(\overline{X})$ enthält die konstanten Funktionen.

c) $f_S \in C(X_S),\ f_{S'} \in C(X_{S'})$ und $f_S \sim f_{S'} \Rightarrow \sup_{x_S \in X_S} |f_S(x_S)| = \sup_{x_{S'} \in X_{S'}} |f_{S'}(x_{S'})|$.

Bew.: a) Seien $f_S, f_{S'}$ Repräsentanten von f, d.h. $f = [f_S]_\sim = [f_{S'}]_\sim$, und $g_S, g_{S'}$ Repräsentanten von g. Dann gilt für $x_S = p_{SS'} x_{S'}$

$$f_S(x_S) = f_{S'}(x_{S'}), \quad g_S(x_S) = g_{S'}(x_{S'}).$$

Zu zeigen ist $[f_S + g_S]_\sim = [f_{S'} + g_{S'}]_\sim$. Seien $(x_{S''})_{S'' \in L} \in \overline{X},\ x_S := p_S((x_{S''})_{S'' \in L}),\ x_{S'} := p_{S'}((x_{S''})_{S'' \in L}))$. Dann gilt $x_S = p_{SS'} x_{S'}$ und

$$\begin{aligned} [f_S + g_S]_\sim (x_{S''})_{S'' \in L} &= (f_S + g_S)(p_S((x_{S''})_{S'' \in L})) \\ &= (f_S + g_S)(x_S) \\ &= f_S(x_S) + g_S(x_S) \\ &= f_{S'}(x_{S'}) + g_{S'}(x_{S'}) \\ &= (f_{S'} + g_{S'})(x_{S'}) \\ &= (f_{S'} + g_{S'})(p_{S'}((x_{S''})_{S'' \in L})) \\ &= [f_{S'} + g_{S'}]_\sim (x_{S''})_{S'' \in L}. \end{aligned}$$

Da $(x_{S''})_{S''\in L}$ beliebig war, gilt dies für alle $(x_{S''})_{S''\in L} \in \overline{X}$, also gilt $[f_S + g_S]_\sim = [f_{S'} + g_{S'}]_\sim$, und damit ist $f+g$ wohldefiniert.

Die übrigen Beziehungen beweist man analog.

b) klar
c) Seien $S'' \geq S, S'$ und $f_{S''} = p^*_{SS''} f_S = p^*_{S'S''} f_{S'}$. Dann gilt

$$\sup_{x_S\in X_S} |f_S(x_S)| = \sup_{x_{S''}\in X_{S''}} |f_{S''}(x_{S''})| = \sup_{x_{S'}\in X_{S'}} |f_{S'}(x_{S'})|.$$

□

Satz 4.7 bedeutet, daß $Cyl(\overline{X})$ eine normierte, involutive Algebra mit Einselement ist. Die Norm ist gegeben durch

$$|[f]_\sim| := \sup_{x_S\in X_S} |f_S(x_S)|,$$

wobei f_S irgendein Repräsentant von $[f]_\sim$ ist.

Def. 4.8: Die Vervollständigung $C^*(Cyl(\overline{X}))$ von $Cyl(\overline{X})$ bezüglich der Supremums-Norm ist eine kommutative C^*-Algebra. Sie heißt *die zum projektiven Spektrum* $(X_S, p_{SS'})_{S,S'\in L}$ *assoziierte* C^**-Algebra.*

4.1.2 Das Gelfand-Spektrum von $C^*(Cyl(\overline{X}))$

Es wird gezeigt, daß $\overline{X}$ das Gelfand-Spektrum der C^*-Algebra $C^*(Cyl(\overline{X}))$ ist. Das bedeutet, daß man einen isometrischen $*$-Isomorphismus von $C^*(Cyl(\overline{X}))$ auf $C(\overline{X})$ hat.

Sei $Hom(C^*(Cyl(\overline{X})), \mathbb{C})$ der Raum der Charaktere von $C^*(Cyl(\overline{X}))$. Als Charakter einer C^*-Algebra ist jedes Element von $Hom(C^*(Cyl(\overline{X})), \mathbb{C})$ stetig. Jeder solche Charakter ist eindeutig bestimmt durch seine Einschränkung auf $Cyl(\overline{X})$. Man muß also nur den Raum $Hom_0(Cyl(\overline{X}), \mathbb{C})$ der stetigen Charaktere von $Cyl(\overline{X})$ betrachten. Man hat eine kanonische Abbildung

$$\phi : \overline{X} \to Hom_0(Cyl(\overline{X}), \mathbb{C}), \quad x \mapsto (f \mapsto f_S(p_S(x))).$$

Wegen $f_S(p_S(x)) = f(x)$ für jeden Repräsentanten f_S von f ist dies gerade die übliche Evaluationsabbildung.

Satz 4.9: ϕ ist ein Homöomorphismus von $\overline{X}$ auf das Gelfand-Spektrum von $C^*(Cyl(\overline{X}))$.

Bew.: ϕ ist injektiv, weil $Cyl(\overline{X})$ die Punkte von $\overline{X}$ trennt.

ϕ ist surjektiv: Sei $h \in Hom_0(Cyl(\overline{X}), \mathbb{C})$. Für jedes X_S definiert h ein $h_S \in Hom_0(C(X_S), \mathbb{C})$ durch

$$h_S(f_S) := h([f_S]_\sim).$$

Nach dem Satz von Gelfand gibt es genau ein $x_S^h \in X_S$ mit $h_S(f_S) = f_S(x_S^h)$ für alle $f_S \in C(X_S)$. Die so definierte Familie $(x_S^h)_{S \in L}$ gehört zum projektiven Limes $\overline{X}$: Seien $S_1, S_2 \in L,\ S_2 \geq S_1$. Dann gilt für jedes $f_{S_1} \in C(X_{S_1})$: Seien $f_{S_2} := p^*_{S_1 S_2} f_{S_1},\ f := [f_{S_1}]_\sim$. Dann gilt auch $f = [f_{S_2}]_\sim$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f_{S_1}(p_{S_1 S_2}(x^h_{S_2})) &= (p^*_{S_1 S_2} f_{S_1})(x^h_{S_2}) \\ &= f_{S_2}(x^h_{S_2}) = h_{S_2}(f_{S_2}) \\ &= h(f) = h_{S_1}(f_{S_1}) \\ &= f_{S_1}(x^h_{S_1}). \end{aligned}$$

Da dies für alle $f_{S_1} \in C(X_{S_1})$ gilt, folgt $p_{S_1 S_2}(x^h_{S_2}) = x^h_{S_1}$. Somit ist $(x_S^h)_{S \in L} \in \overline{X}$ und

$$h(f) = f((x_S^h)_{S \in L}).$$

Also ist ϕ eine Bijektion.

Die Gelfand-Transformation von $C^*(Cyl(\overline{X}))$ ist eine Abbildung

$$\check{G} : C^*(Cyl(\overline{X})) \to Fun(Hom_0(Cyl(\overline{X}), \mathbb{C})),$$

die durch

$$\check{G}(f)(h) := h(f)$$

definiert ist. Die Gelfand-Topologie auf $Hom_0(Cyl(\overline{X}), \mathbb{C})$ ist die gröbste Topologie, für die alle Funktionen $\check{G}(f),\ f \in C^*(Cyl(\overline{X}))$ stetig sind.

Die von der Produkttopologie auf $\overline{X}$ induzierte Topologie ist die gröbste Topologie, für die alle Funktionen aus $\bigcup_{S \in L} p_S^*(C(X_S))$ stetig sind: alle Funktionen aus dieser Menge sind nämlich stetig auf $\overline{X}$. Da sie die Punkte von $\overline{X}$ trennen, ist die gröbste Topologie, für die alle diese Funktionen stetig sind (kurz die "Funktionentopologie"), hausdorffsch. Da $\overline{X}$ kompakt ist und es zu einer hausdorffschen Topologie keine echt feinere kompakte gibt, stimmt die Funktionentopologie mit der Topologie von $\overline{X}$ überein.

Der Pullback ϕ^* ist eine Bijektion von $\check{G}(C^*(Cyl(\overline{X})))$ auf $\bigcup_{S\in L} p_S^*(C(X_S))$, also transformiert ϕ^* stetige Funktionen auf dem Gelfand-Spektrum von $C^*(Cyl(\overline{X}))$ in stetige Funktionen auf $\overline{X}$. Aus Lemma 4.14 folgt dann, daß ϕ stetig ist (s. unten). Da die Räume kompakt sind, ist die stetige Bijektion ϕ ein Homöomorphismus.

□

4.1.3 Reguläre Borelmaße auf dem projektiven Limes

Die Bezeichnungen der vorangegangenen Abschnitte werden beibehalten.

Def. 4.10: Für jedes $S \in L$ sei ein reguläres Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß μ_S auf X_S gegeben. $(\mu_S)_{S\in L}$ heißt eine *konsistente Familie von Maßen*, wenn

$$\forall S' \geq S : (p_{SS'})_*\mu_{S'} = \mu_S$$

gilt. Dabei bezeichnet $(p_{SS'})_*\mu_{S'}$ das Bildmaß von $\mu_{S'}$ bei der Abbildung $p_{SS'} : X_{S'} \to X_S$:

$$\forall E_S \in \mathcal{B}(X_S) : ((p_{SS'})_*\mu_{S'})(E_S) := \mu_{S'}(p_{SS'}^{-1}(E_S)).$$

Man überprüft leicht, daß

$$\forall S'' \geq S' \geq S : (p_{SS''})_*\mu_{S''} = (p_{SS'})_*[(p_{S'S''})_*\mu_{S''}]$$

gilt. Durch den nächsten Satz werden die regulären Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem projektiven Limes $\overline{X}$ charakterisiert.

Satz 4.11: Sei $(X_S, p_{SS'})_{S,S'\in L}$ ein projektives Spektrum kompakter Hausdorffräume X_S, $\overline{X} = \varprojlim_{S\in L} X_S$ der projektive Limes. Dann gilt:

a) Sei μ ein reguläres Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß (kurz *W-Maß*) auf $\overline{X}$. Dann induziert μ eine konsistente Familie $(\mu_S)_{S\in L}$ von W-Maßen μ_S auf X_S, definiert durch

$$\mu_S := (p_S)_*\mu.$$

b) Sei $(\mu_S)_{S\in L}$ eine konsistente Familie von W-Maßen μ_S auf $X_S,\ S \in L$. Dann gibt es genau ein W-Maß μ auf $\overline{X}$ mit $\mu_S = (p_S)_*\mu$ für alle $S \in L$.

c) μ ist genau dann treu (d.h. $\mu(f^*f) = 0 \Rightarrow f = 0$ für jede stetige Funktion f auf $\overline{X}$), wenn alle μ_S treu sind.

Bew.: a) klar

b) Sei $(\mu_S)_{S\in L}$ eine konsistente Familie von W-Maßen. Der Raum $Cyl(\overline{X})$ der Zylinderfunktionen auf $\overline{X}$ ist dicht in $C(\overline{X})$. Sei $f \in Cyl(\overline{X}),\ f = [f_S]_\sim$ mit $f_S \in C(X_S)$ für ein passendes $S \in L$. Dann ist

$$\Gamma(f) := \int_{X_S} f_S d\mu_S$$

wohldefiniert. Man beachte dabei, daß für $S' \geq S$ und $f_S \in C(X_S)$ gilt

$$((p_{SS'})_*\mu_{S'})(f_S) = \mu_{S'}(p^*_{SS'}f_S).$$

Damit kann man die Konsistenz der Familie $(\mu_S)_{S\in L}$ verwenden, um zu zeigen, daß $\Gamma(f)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten von f ist. Γ ist ein positives lineares Funktional auf $Cyl(\overline{X})$ und damit stetig. Also erhält man genau ein positives lineares Funktional auf $C(\overline{X})$, das wieder mit Γ bezeichnet wird, und dieses ergibt über den Rieszschen Darstellungssatz genau ein reguläres Borelmaß μ auf $\overline{X}$ mit

$$\int_{\overline{X}} f d\mu = \Gamma(f), \quad f \in C(\overline{X}).$$

Für alle S gilt $(p_S)_*\mu = \mu_S$, denn für alle $f_S \in C(X_S)$ gilt

$$\mu_S(f_S) = \Gamma([f_S]_\sim) = \mu(p^*_S f_S) = ((p_S)_*\mu)(f_S).$$

Die Eindeutigkeit von μ sieht man so: Seien μ, ν W-Maße auf $\overline{X}$ mit $(p_S)_*\mu = (p_S)_*\nu$ für alle $S \in L$. Dann gilt $\mu = \nu$ auf den Zylinderfunktionen auf $\overline{X}$:

$$\begin{aligned} \mu([f_S]_\sim) &= \mu((p_S)^* f_S) \\ &= ((p_S)_*\mu)(f_S) \\ &= ((p_S)_*\nu)(f_S) \\ &= \nu([f_S]_\sim), \end{aligned}$$

und damit auch auf ganz $C(\overline{X})$.

c) Sei μ treu. Dann ist für jedes $f_S \in C(X_S)$

$$\int_{X_S} f_S^* f_S d\mu_S = \int_{\overline{X}} ((p_S)^* f_S)^* ((p_S)^* f_S) d\mu,$$

woraus folgt, daß μ_S treu ist, weil alle stetigen Funktionen auf $\overline{X}$ von der Gestalt $(p_S)^* f_S$ sind. Ist umgekehrt jedes μ_S treu, so ist Γ strikt positiv auf $Cyl(\overline{X})$ und damit auf $C(\overline{X})$.

$\square$

4.1.4 Quotient eines projektiven Spektrums nach einer Gruppenoperation

Sei G eine kompakte hausdorffsche topologische Gruppe. G operiere auf jedem Element X_S eines projektiven Spektrums $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ kompakter Hausdorffräume X_S:

$$X_S \times G \to X_S, \quad (x_S, g) \mapsto x_S *_S g,$$

wobei $*_S$ die Operation von g auf X_S bezeichnet. Diese Abbildung sei stetig. (Das ist mehr als die Forderung, daß die Abbildung $X_S \to X_S,\ (x_S, g) \mapsto x_S *_S g$ für jedes feste $g \in G$ stetig sei.) Ferner seien die Projektionen $p_{SS'}$ G-äquivariant, d.h.

$$p_{SS'}(x_{S'} *_{S'} g) = x_S *_S g$$

für alle $S' \geq S,\ g \in G,\ x_S \in X_S,\ x_{S'} \in X_{S'}$. Eine solche Operation von G auf einem projektiven Spektrum heißt *konsistent*. Damit erhält man ein projektives Spektrum $(X_S/G, p_{SS'})_{S,S' \in L}$. Weil G kompakt ist, ist X_S/G hausdorffsch für jedes $S \in L$ (s. [tDi91]). Also sind die X_S/G kompakte Hausdorffräume. Da die Projektionen $p_{SS'}$ G-äquivariant sind, erhält man eine natürliche Operation auf dem projektiven Limes $\overline{X}$:

$$(x_S)_{S \in L} * g := (x_S *_S g)_{S \in L},$$

denn für $S' \geq S$ gilt $p_{SS'}(x_{S'} *_{S'} g) = (p_{SS'} x_{S'}) *_S g = x_S *_S g$. Die Operation von G auf $\overline{X}$ ist stetig, denn die zugehörige Abbildung $\overline{X} \times G \to \overline{X}$ ist genau dann stetig, wenn für jedes $S' \in L$ die Zusammensetzung

$$\overline{X} \times G \to \overline{X} \to X_{S'},$$

wobei die letzte Abbildung die Projektion $p_{S'}$ ist, stetig ist. Diese Zusammensetzung ist die Abbildung

$$((x_S)_{S \in L}, g) \mapsto x_{S'} *_{S'} g.$$

Dies kann man schreiben als Zusammensetzung von

$$p_{S'} \times id_G : \overline{X} \times G \to X_{S'} \times G, \quad ((x_S)_{S\in L}, g) \mapsto (x_{S'}, g)$$

und der Operation der Gruppe, die $(x_{S'}, g)$ in $x_{S'} *_{S'} g$ überführt. Also ist die Operation von G auf $\overline{X}$ stetig.

Sei $\overline{X}_G := \varprojlim_{S\in L}(X_S/G)$ der projektive Limes der X_S/G. Der folgende Satz zeigt, daß man eine kanonische Abbildung von $\overline{X}/G$ nach $\overline{X}_G$ hat und damit insgesamt

$$\overline{X} \to \overline{X}/G \to \overline{X}_G, \quad (x_S)_{S\in L} \mapsto (x_S)_{S\in L} \bmod G \mapsto (x_S \bmod G)_{S\in L}.$$

Satz 4.12: Sei G eine kompakte Gruppe und $(X_S, p_{SS'})_{S,S'\in L}$ ein projektives Spektrum kompakter Räume. (Bei Kompaktheit werde immer Separiertheit vorausgesetzt.) G operiere konsistent auf $(X_S, p_{SS'})_{S,S'\in L}$. Dann ist die Abbildung

$$\phi : \overline{X}/G \to \overline{X}_G, \quad [(x_S)_{S\in L}]_G \mapsto ([x_S]_G)_{S\in L}$$

ein Homöomorphismus.

Bew.: Der Beweis ergibt sich aus den folgenden beiden Lemmata:

Lemma 4.13: Der Pullback

$$\phi^* : C^*(Cyl(\overline{X}_G)) \to C(\overline{X}/G)$$

ist eine Bijektion und damit ein Algebren-Isomorphismus.

Bew.: Man zeigt zunächst, daß die Abbildung

$$\phi : \overline{X}/G \to \varprojlim_{S\in L} X_S/G, \quad [(x_S)_{S\in L}]_G \mapsto ([x_S]_G)_{S\in L}$$

injektiv ist. Es gilt

$$\begin{aligned} [(x_S)_{S\in L}]_G \neq [(y_S)_{S\in L}]_G \quad &\Leftrightarrow \quad \neg(\exists g \in G : (x_S)_{S\in L} = (y_S)_{S\in L} * g) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall g \in G \quad \exists S_g \in L : y_{S_g} \neq x_{S_g}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\forall S \geq S_g : y_S \neq x_S *_S g.$$

Da die Gruppenoperation stetig ist, gilt $y_S \neq x_S *_S (gh)$ für alle h aus einer Umgebung des neutralen Elements der Gruppe, die von S abhängen mag. Weil G kompakt ist, kann man die Gruppe mit endlich vielen solcher Umgebungen überdecken. Also gibt es ein $S_0 \in L$ mit

$$\forall S \geq S_0 \; \forall g \in G : y_S \neq x_S *_S g. \tag{1}$$

Wäre $([x_S]_G)_{S\in L} = ([y_S]_G)_{S\in L}$, so hätte man

$$\forall S \in L \quad \exists g_S \in G : y_S = x_S *_S g$$

im Gegensatz zu (1). Also ist ϕ injektiv.

Die Menge $Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G)$ besteht aus Äquivalenzklassen von Funktionen aus $C(X_S/G)$, und die Elemente von $C(X_S/G)$ kann man auffassen als stetige Funktionen $X_S \to \mathbb{C}$, die auf den G-Bahnen konstant sind. Es gilt

$$\begin{aligned} (\phi^* f)([(x_S)_{S\in L}]) &= (f \circ \phi)([(x_S)_{S\in L}]) \\ &= f(([x_S]_G)_{S\in L}) \\ &= f_S([x_S]_G) \end{aligned}$$

mit $f_S \in C(X_S/G)$. Sei $f_S^\pi \in C(X_S)$ so, daß

$$\begin{tikzcd} X_S/G \arrow[r, "f_S"] & \mathbb{C} \\ X_S \arrow[u, "\pi_S"] \arrow[ur, "f_S^\pi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, wobei π_S die kanonische Projektion auf den Bahnenraum ist. Sei $f^\pi \in Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S)$ die durch f_S^π gegebene Äquivalenzklasse. f^π ist G-äquivariant und induziert somit eine stetige Funktion $f_G^\pi : \overline{X}/G \to \mathbb{C}$. Für diese Funktion gilt

$$f_G^\pi([(x_S)_{S\in L}]_G) = f_S([x_S]_G),$$

denn

$$\begin{aligned} f_G^\pi([(x_S)_{S\in L}]_G) &= f^\pi((x_S)_{S\in L}) \\ &= f_S^\pi(x_S) \\ &= f_S([x_S]_G). \end{aligned}$$

Somit ist ϕ^* eine Abbildung

$$Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G) \to C(\overline{X}/G).$$

ϕ^* ist offensichtlich ein involutiver Algebrenhomomorphismus, der konstante Funktionen in konstante Funktionen überführt. Seien $[(x_S)_{S\in L}]_G \neq [(y_S)_{S\in L}]_G$ zwei verschiedene Punkte in $(\varprojlim_{S\in L} X_S)/G$. Da ϕ injektiv ist, folgt

$$([x_S]_G)_{S\in L} \neq ([y_S]_G)_{S\in L}.$$

Sei $S_0 \in L$ so, daß gilt $[x_{S_0}]_G \neq [y_{S_0}]_G$. Dann gibt es ein $f_{S_0} \in C(X_{S_0}/G)$ mit $f_{S_0}([x_S]_G) \neq f_{S_0}([y_S]_G)$. Wie oben gibt f_{S_0} eine stetige Funktion $f_G^\pi \in \phi^*(Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G))$ mit $f_G^\pi([(x_S)_{S\in L}]_G) = f_{S_0}([x_{S_0}]_G)$. Also trennen die Funktionen aus $\phi^*(Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G))$ die Punkte von $\overline{X}/G$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist somit $\phi^*(Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G)) \subseteq C(\overline{X}/G)$ eine dichte Unteralgebra.

ϕ^* ist isometrisch, denn nach den obigen Überlegungen gilt für $f \in Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G)$:

$$|f|_{C^*(Cyl)} = |f_S|_{C(X_S/G)} = |\phi^* f|_{C(\overline{X}/G)},$$

wobei bei den letzten beiden Normen die jeweilige Maximumsnorm gemeint ist. Damit bekommt man eine isometrische Abbildung

$$\phi^* : C^*(Cyl(\varprojlim_{S\in L} X_S/G)) \to C(\overline{X}/G).$$

Das Bild ist vollständig wegen der Isometrie und dicht, also gleich $C(\overline{X}/G)$.

$\square$

Lemma 4.14: Seien W, Z kompakte Hausdorffräume und $\phi : W \to Z$ eine Abbildung, so daß $\phi^* : C(Z) \to C(W)$ eine Bijektion ist. Dann ist ϕ ein Homöomorphismus.

Bew.: ϕ ist injektiv, weil $C(W)$ die Punkte von W trennt: Seien $x, y \in W$, $x \neq y$. Sei $\varphi \in C(W)$ mit $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 0$. Da ϕ^* surjektiv ist, gibt es ein $f \in C(Z)$ mit $\varphi = \phi^* f = f \circ \phi$. Wegen $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ ist $f(\phi(x)) \neq f(\phi(y))$ und damit $\phi(x) \neq \phi(y)$.

$z \in \mathbb{Z}$ induziert einen Charakter $\chi_z : C(Z) \to \mathbb{C}$ von $C(Z)$. Dann ist $\chi_z \circ (\phi^*)^{-1} : C(W) \to \mathbb{C}$ ein Charakter von $C(W)$, also existiert genau ein $w \in W$ mit

$$\chi_z \circ (\phi^*)^{-1} = \chi_w,$$

d.h. $\chi_z = \chi_w \circ \phi^*$, also gilt

$$\forall f \in C(Z) : f(z) = (f \circ \phi)(w) = f(\phi(w)),$$

und somit $z = \phi(w)$. ϕ ist also auch surjektiv.

Nach Voraussetzung ist $\phi^* f = f \circ \phi : W \to \mathbb{C}$ stetig für alle $f \in C(Z)$. Also ist ϕ stetig bezüglich der schwachen Topologien auf Z bzw. W. Da die Räume kompakt sind, sind dies die gegebenen Topologien.

$\square$

Beachtet man, daß aus Satz 4.9 auch folgt $C^*(Cyl(\overline{X}_G)) = C(\overline{X}_G)$, so ergibt sich aus diesen beiden Lemmata die Behauptung des Satzes 4.12.

4.2 Anwendung auf die physikalische Situation

In diesem Abschnitt werden die vorgestellten projektiven Techniken auf die gegebene physikalische Situation angewendet. Man hat jetzt $X_S := Hom(S, G)$ und $X'_S := Hom(S, G)/Ad(G)$. Diese Räume traten schon in Kapitel 3 auf. Die dort definierten Zylinderfunktionen sind Pullbacks stetiger Funktionen auf X'_S. Jetzt ist G jedoch eine beliebige kompakte, zusammenhängende topologische Gruppe, z.B. eine der Lie-Gruppen $U(n)$ oder $SU(n)$. Die hier vorgestellten Ergebnisse verallgemeinern also den in Kapitel 3 betrachteten $SU(2)$-Fall.

In Unterabschnitt 4.B.1 werden die projektiven Spektren zu den Räumen X_S und X'_S definiert. Die projektiven Limites werden mit $\overline{X}$ und $\overline{X'}$ bezeichnet. Es folgt eine kurze Anmerkung zur Holonomie-Algebra von Gruppen, deren Mandelstam-Identitäten keine Reduktion von Produkten von Wilson-Loop-Funktionen zu Summen erlaubt. Dann wird die wichtige Bijektion zwischen X_S und G^n erläutert, durch die auf X_S eine Mannigfaltigkeitsstruktur erzeugt wird. Das Lemma 4.16 stellt eine Bijektion zwischen dem projektiven Limes $\overline{X}$ und dem Raum $Hom(\mathcal{HG}, G)$ aller Homomorphismen von der Hoop-Gruppe in die Eichgruppe G her. Anschließend wird die Wirkung der Gruppe G auf beide Objekte betrachtet. Der zentrale Satz 4.17 zeigt, daß der projektive Limes $\overline{X'} \simeq \overline{X}/G$ isomorph ist zu $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$.

Anschließend werden in Unterabschnitt 4.B.2 die Zylinderfunktionen auf eine nochmals andere Weise betrachtet. Statt als Funktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ definiert man sie jetzt als Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Es wird in Bem. 4.19 gezeigt, daß es eine kanonische Isomorphie zwischen den beiden Algebren $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ und $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ gibt. Anschließend wird in Lemma 4.22 bewiesen, daß die C^*-Algebra $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ isometrisch isomorph zur C^*-Algebra $C^*(Cyl(\overline{X'}))$ ist. Damit haben wir alle in der Literatur zur Loop-Quantengravitation üblichen Definitionen und ihre Beziehungen geklärt. Wegen der Isomorphie der C^*-Algebren hat man einen Homöomorphismus der Spektren, der in Satz 4.23 angegeben wird. Das Spektrum von $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ ist der Quantenkonfigurationsraum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, und das Spektrum von $C^*(Cyl(\overline{X'}))$ ist $\overline{X'}$. In 4.B.1 wurde gezeigt $\overline{X'} \simeq Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$, also hat man insgesamt einen Isomorphismus

$$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \simeq Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G),$$

wobei G eine kompakte zusammenhängende Lie-Gruppe ist. Damit ist einerseits das Ergebnis aus Kapitel 3.B auf eine andere Art bewiesen und andererseits die gewünschte Verallgemeinerung erreicht. Bei der Definition des Ashtekar-Lewandowski-Maßes verfährt man wie gehabt.

4.2.1 Die projektiven Spektren

Als Indexmenge L dient die Menge der in Def. 3.11 eingeführten zahmen Untergruppen der Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$. L ist eine halbgeordnete, nach oben filtrierte Menge: zu je zwei zahmen Untergruppen S_1, S_2 gibt es eine zahme Untergruppe S_3, so daß

$$S_1 \leq S_3, \quad S_2 \leq S_3.$$

Ein mögliches S_3 kann man konstruieren, indem man die Erzeugenden von S_1 und S_2 zusammennimmt und aus der Loop-Zerlegung (Lemma 2.14) wieder unabhängige Hoops erhält. S_3 sei die von diesen Hoops erzeugte zahme Untergruppe. Insbesondere sind alle zahmen Untergruppen endlich erzeugt.

Sei G eine kompakte hausdorffsche topologische Gruppe. Zu jedem $S \in L$ sei X_S definiert als die Menge der Homomorphismen von S nach G:

$$X_S := Hom(S, G).$$

Sei $S' \geq S$. Dann hat man durch die Einschränkungsabbildung in natürlicher Weise eine Projektion:

$$p_{SS'} : Hom(S', G) \to Hom(S, G), \quad \hat{H} \mapsto \hat{H}|_S.$$

Die Bemerkung im Anschluß an Lemma 3.13 zeigt, daß man jeden Homomorphismus von S nach G auf ganz $\mathcal{HG}$ erweitern kann, falls G eine Gruppe mit surjektiver Exponentialabbildung ist. Im folgenden beschränken wir uns auf den für die Physik wichtigen Fall kompakter zusammenhängender Lie-Gruppen wie z.B. die $U(n)$ und die $SU(n)$. Insbesondere ist für diese Gruppen jeder Homomorphismus von S auf S' erweiterbar. Daher ist $p_{SS'}$ surjektiv.

Bem. 4.15: Seien C, D 2×2-Matrizen und $\det D = 1$. Dann hat man die Spur-Identität $trC\ trD = trCD + trCD^{-1}$. Insbesondere gilt dies für $SU(2)$-Matrizen. Die daraus abgeleitete Mandelstam-Identität

$$T_{\tilde{\alpha}} T_{\tilde{\beta}} = \frac{1}{2}(T_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} + T_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^{-1}})$$

sorgt dafür, daß man beliebige Produkte von Wilson-Loop-Funktionen bezüglich $SU(2)$-Zusammenhängen auf Summen von Wilson-Loop-Funktionen mit Vorfaktoren zurückführen kann. Diese Geschlossenheit unter der Multiplikation ermöglichte die Def. 2.22 der Holonomie-*Algebra* $\mathcal{HA}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum über der Menge der Wilson-Loop-Funktionen. Hat man andere Gruppen G, in denen eine solche Reduktion von Produkten zu Summen von Wilson-Loop-Funktionen aufgrund der Mandelstam-Identitäten nicht möglich ist, so muß man auch die nicht-reduzierbaren Produkte als Erzeugende der entsprechenden Holonomie-Algebra zulassen. Dabei werden in der Regel nicht alle Erzeugenden unabhängig sein, was den Überblick über diese Algebren erschwert. Dennoch lassen sich die C^*-Vervollständigung $C^*(\mathcal{HA})$ und deren Spektrum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ wie gewohnt definieren, und dann greifen die Sätze dieses Kapitels.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge der Zusammenhänge auf einem Hauptfaserbündel über der Basismannigfaltigkeit Σ mit Strukturgruppe G, und seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ die Erzeugenden einer zahmen Untergruppe S. Satz 2.17 zeigt, daß zu jedem $g \in G$ und jedem $\tilde{\beta}_i,\ i = 1, ..., n$ ein $A_0 \in \mathcal{A}$ existiert, so daß $H(\beta_i, A_0) = g$. Außerdem zeigt Lemma 3.8, daß auf einer zahmen Untergruppe S zu jedem $\hat{H} \in Hom(S, G)$ ein $A_0 \in \mathcal{A}$ existiert, so daß

$$\hat{H}(\tilde{\beta}_i) = H(\beta_i, A_0) \quad \forall i = 1, ..., n$$

Man hat somit eine Bijektion zwischen $X_S = Hom(S, G)$ und G^n:

$$\varphi : X_S \to G^n, \quad \hat{H} \mapsto (\hat{H}(\tilde{\beta}_1), ..., \hat{H}(\tilde{\beta}_n)).$$

Durch diese Abbildung wird auf X_S die Struktur der n-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit G^n induziert. Diese Struktur ist unabhängig von der Wahl der freien Erzeugenden von S: Sei $S = \left\langle \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n \right\rangle = \langle \tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n \rangle$. Dann lassen sich die $\tilde{\gamma}_i$ in der Form $\tilde{\gamma}_i = \prod_{k_i} \tilde{\beta}_{k_i}^{\varepsilon_{k_i}}$ mit $\varepsilon_k \in \mathbb{Z}$ darstellen. Sei $\varphi(\hat{H})_{\tilde{\beta}} := \hat{H}(\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n) = (g_1, ..., g_n)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{H})_{\tilde{\gamma}} &= \hat{H}(\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n) \\ &= \hat{H}(\prod_{k_1} \tilde{\beta}_{k_1}^{\varepsilon_{k_1}}, ..., \prod_{k_n} \tilde{\beta}_{k_n}^{\varepsilon_{k_n}}) \\ &= (\prod_{k_1} \hat{H}(\tilde{\beta}_{k_1})^{\varepsilon_{k_1}}, ..., \prod_{k_n} \hat{H}(\tilde{\beta}_{k_n})^{\varepsilon_{k_n}}) \\ &= (\prod_{k_1} g_{k_1}^{\varepsilon_{k_1}}, ..., \prod_{k_n} g_{k_n}^{\varepsilon_{k_n}}) \end{aligned}$$

Die Auswertung auf den $\tilde{\gamma}_i$ liefert also ein Element von G^n, das aus demjenigen, das aus der Auswertung auf den $\tilde{\beta}_j$ stammt, nämlich $(g_1, ..., g_n)$, durch einen stetigen analytischen Diffeomorphismus $G^n \to G^n$ hervorgeht. Dadurch wird die auf X_S induzierte Mannigfaltigkeitsstruktur nicht geändert.

Die $X_S \simeq G^n$ sind kompakte Hausdorffräume. Die Projektionen $p_{SS'}$ sind analytische Abbildungen bezüglich der auf X_S und $X_{S'}$ induzierten Mannigfaltigkeitsstrukturen. Daher ist $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ ein projektives Spektrum kompakter Hausdorffräume.

Die Gruppe G operiert auf den X_S:

$$G \times X_S \to X_S, \quad (g, \hat{H}) \mapsto Ad(g) \circ \hat{H},$$

wobei $(Ad(g) \circ \hat{H})(\beta) = g^{-1}\hat{H}(\beta)g$. Diese Operation ist G-äquivariant, nach der oben eingeführten Sprechweise operiert G konsistent auf dem projektiven Spektrum. Daher definiert G das projektive Spektrum $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S' \in L}$, wobei

$$X'_S := X_S / Ad(G)$$

und die Projektionen $p'_{SS'}$ von den $p_{SS'}$ des projektiven Spektrums $(X_S, p_{SS'})_{S,S' \in L}$ induziert werden.

Lemma 4.16: Durch

$$\phi : Hom(\mathcal{HG}, G) \to \overline{X}, \quad \hat{H} \mapsto (\hat{H}|_S)_{S\in L}$$

ist eine kanonische Bijektion zwischen dem projektiven Limes $\overline{X}$ des projektiven Spektrums $(X_S, p_{SS'})_{S,S'\in L}$ und der Menge $Hom(\mathcal{HG}, G)$ der Homomorphismen von der Hoop-Gruppe nach G gegeben.

Bew.: Sei $\hat{H} \in Hom(\mathcal{HG}, G)$. Es gilt offensichtlich $p_{SS'}\hat{H}|_{S'} = \hat{H}|_S$, falls $S' \geq S$. Sei ϕ obige Abbildung.

ϕ ist injektiv: Seien $\hat{H}, \hat{H}' \in Hom(\mathcal{HG}, G)$, $\hat{H} \neq \hat{H}'$. Dann gibt es ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$, so daß $\hat{H}(\tilde{\alpha}) \neq \hat{H}'(\tilde{\alpha})$. Sei $S_{\tilde{\alpha}}$ eine zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}$, die $\tilde{\alpha}$ enthält. (Falls $\tilde{\alpha}$ schon unabhängig ist, wähle man $\{\tilde{\alpha}\}$, die von $\tilde{\alpha}$ frei erzeugte Untergruppe, ansonsten wende man die Loop-Zerlegung an.) Offensichtlich gilt dann

$$\hat{H}|_{S_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\alpha}) \neq \hat{H}'|_{S_{\tilde{\alpha}}}(\tilde{\alpha}),$$

daher sind auch die Familien $(\hat{H}|_S)_{S\in L}$ und $(\hat{H}|_S)_{S\in L}$ verschieden.

ϕ ist surjektiv: Sei $\hat{H}_S : S \to G$ ein Element von X_S. Wie schon mehrfach angemerkt, läßt sich $\hat{H}_S$ auf ganz $\mathcal{HG}$ erweitern. Die Erweiterung wird mit H_S bezeichnet. Sei $S^{'} \geq S$. Wegen der Surjektivität der Projektionen $p_{SS'}$ gibt es ein $\hat{H}_{S'} \in X_{S^{'}}$, so daß $\hat{H}_{S'}|_S(\tilde{\gamma}) = \hat{H}_S(\tilde{\gamma})$ für alle $\tilde{\gamma} \in S$. $H_{S^{'}}$ sei die Erweiterung von $\hat{H}_{S'}$ auf ganz $\mathcal{HG}$. Es gilt

$$H_S(\tilde{\gamma}) = \hat{H}_S(\tilde{\gamma}) = \hat{H}_{S'}(\tilde{\gamma}) = H_{S'}(\tilde{\gamma}) \quad \forall \tilde{\gamma} \in S.$$

Man definiert ein $H : \mathcal{HG} \to G$ durch

$$H(\tilde{\alpha}) := H_S(\tilde{\alpha}),$$

wobei S eine zahme Untergruppe ist, die $\tilde{\alpha}$ enthält. Dies ist wohldefiniert: Sei $\tilde{\alpha} \in S \cap S'$. Man wählt ein $S'' \geq S, S'$. Dann gilt $H_S(\tilde{\alpha}) = H_{S''}(\tilde{\alpha})$ und $H_{S'}(\tilde{\alpha}) = H_{S''}(\tilde{\alpha})$, also $H_S(\tilde{\alpha}) = H_{S'}(\tilde{\alpha})$. H ist offensichtlich ein Element von $Hom(\mathcal{HG}, G)$, denn $H(\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2) = H_S(\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2) = H_S(\tilde{\gamma}_1)H_S(\tilde{\gamma}_2) = H(\tilde{\gamma}_1)H(\tilde{\gamma}_2)$ für ein S, das $\tilde{\gamma}_1$ und $\tilde{\gamma}_2$ enthält.

$\square$

Die Abbildung ϕ ist G-äquivariant, also hat man eine Abbildung Φ zwischen den Quotienten:

$$\Phi : Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G) \to \overline{X}/G, \quad [\hat{H}] \mapsto [(\hat{H}|_S)_{S\in L}]$$

und eine Abbildung

$$\Theta : \overline{X}/G \to \overline{X'}, \quad [(\hat{H}|_S)_{S\in L}] \mapsto ([\hat{H}|_S])_{S\in L}$$

wobei $\overline{X'}$ der projektive Limes des projektiven Spektrums $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S'\in L}$ ist. Nach Satz 4.12 ist Θ ein Homöomorphismus. Es folgt

Satz 4.17: Die Zusammensetzung $\Theta \circ \Phi$ ist eine Bijektion zwischen $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ und dem projektiven Limes $\overline{X'}$.

4.2.2 Wilson-Loops, Zylinderfunktionen und C^*-Algebra

Gegeben sei ein Hauptfaserbündel P über der Basismannigfaltigkeit Σ mit Projektion π und Strukturgruppe G. In der Faser $\pi^{-1}(x)$ über dem Basispunkt x der Loops sei ein $\tilde{x}$ festgelegt. $\mathcal{A}$ sei die Menge der Zusammenhänge auf diesem Bündel. Die Holonomieabbildung H liefert bei Auswertung auf $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ zu jedem festen $A_0 \in \mathcal{A}$ ein Element von G. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus. Man betrachte die Einschränkung auf eine zahme Untergruppe S:

$$\mathcal{A} \to X_S = Hom(S, G), \quad A \mapsto H^A|_S, \tag{1}$$

wobei $H^A|_S(\tilde{\alpha}) = H(\alpha, A)$, $\tilde{\alpha} \in S$ und α ein Repräsentant von $\tilde{\alpha}$ ist. Sei $\hat{H} \in X_S$. Nach Lemma 3.8 gibt es ein $A_0 \in \mathcal{A}$, so daß

$$\hat{H}(\tilde{\alpha}) = H(\alpha, A_0) \quad \forall \tilde{\alpha} \in S. \tag{2}$$

Daher ist die Abbildung (1) surjektiv. Bekanntermaßen bewirkt eine Eichtransformation die Konjugation der Holonomie mit einem festen $g_0 \in G$. Also hat man eine ebenfalls surjektive Abbildung

$$\tilde{p}_S : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to X'_S = Hom(S, G)/Ad(G), \quad \tilde{p}_S([A]) = [H^A|_S].$$

Das Urbild $\tilde{p}_S^{-1}([H^A|_S])$ eines Elements von X'_S ist eine Klasse von Zusammenhängen, deren zugehörige Holonomien sich auf allen $\tilde{\alpha} \in S$ nur um die Konjugation mit einem festen $g_0 \in G$ unterscheiden. In den Sätzen 3.7 und 3.10 hatten wir für verallgemeinerte Zusammenhänge nachgewiesen, daß

$$\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S \to Hom(S, SU(2))/Ad$$

eine Bijektion ist. (Die Bildung der Äquivalenzklassen modulo $\sim_S$ bedeutete gerade die Identifizierung aller verallgemeinerten Zusammenhänge, deren zugehörige Holonomien sich auf allen $\tilde{\alpha} \in S$ nur um die Konjugation mit einem festen $g_0 \in G$ unterscheiden.) Unser neues Ergebnis zeigt, daß schon für gewöhnliche Zusammenhänge die Abbildung

$$(\mathcal{A}/\mathcal{G}) / \sim_S \rightarrow Hom(S, SU(2))/Ad$$

eine Bijektion ist. Dies liegt daran, daß wegen (2) in jeder Äquivalenzklasse von $\left(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}\right) / \sim_S$ ein Element von $(\mathcal{A}/\mathcal{G}) / \sim_S$ liegt.

Es zeigt sich wieder, daß im endlich erzeugten Fall die Situation dadurch entscheidend vereinfacht wird, daß man alle Homomorphismen durch die Holonomie ersetzen kann und somit nur gewöhnliche und keine verallgemeinerten Zusammenhänge braucht. Der Grenzübergang zu einer Feldtheorie passiert dann durch die Bildung des projektiven Limes.

Der Pullback $\tilde{p}_S^*$ der oben definierten Projektion $\tilde{p}_S$ transportiert Funktionen auf X'_S in Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Def. 4.18: Die Menge der *Zylinderfunktionen* $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ *auf* $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ ist definiert als

$$Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}) := \bigcup_{S \in L} \tilde{p}_S^* C(X'_S).$$

Bem. 4.19: In Def. 3.14 wurden Zylinderfunktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als Pullbacks stetiger Funktionen auf X'_S definiert, dort war der Pullback bezüglich der Projektion $\pi_S : \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \rightarrow X'_S$ zu nehmen. In der jetzigen Definition sind Zylinderfunktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ als Pullbacks bezüglich der Projektion $\tilde{p}_S : \mathcal{A}/\mathcal{G} \rightarrow X'_S$ gegeben. Offensichtlich hat man eine Bijektion zwischen diesen beiden Mengen von Zylinderfunktionen, da für $f \in C(X'_S)$ gilt

$$\pi_S^* f|_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = \tilde{p}_S^* f.$$

Die Zylinderfunktion $\tilde{p}_S^* f$ auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ ist die Einschränkung der Zylinderfunktion $\pi_S^* f$ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Da $\tilde{p}_S^* f$ stetig ist und $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ liegt, läßt sich $\tilde{p}_S^* f$ eindeutig auf ganz $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ erweitern. Da alle betrachteten Funktionen stetig sind (und $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ liegt), handelt es sich um eine isometrische Isomorphie.

Durch die neue Definition wird besonders klar, warum Zylinderfunktionen in der Literatur oft als Funktionen der Gestalt

$$f(A) := f(H(\beta_1, A), ..., H(\beta_n, A)),$$

wobei f eine stetige Funktion ist, angegeben sind. Hier entsprechen die zu den Loops $\beta_1, ...\beta_n$ gehörigen Hoops $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ Erzeugenden einer zahmen Untergruppe S. Bei dieser Form ist noch darauf zu achten, daß f nur von der Konjugationsklasse seiner Argumente abhängen darf, damit man auch tatsächlich eine Funktion auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ und nicht nur auf $\mathcal{A}$ erhält.

Sei $\hat{H} \in X'_S$, ρ eine n-dimensionale Darstellung von G und $f \in C(X'_S)$ definiert durch

$$f(\hat{H})(\tilde{\alpha}) := \frac{1}{n} tr(\rho(\hat{H}(\tilde{\alpha})) \quad \forall \tilde{\alpha} \in S.$$

Sei $A \in \mathcal{A}$ ein Zusammenhang derart, daß $[\hat{H}(\tilde{\alpha})] = [H(\alpha, A)]$ für alle $\tilde{\alpha} \in S$. Dann ist der Pullback

$$\tilde{p}_S^* f = \frac{1}{n} tr(\rho(H(\alpha, A))) = T_{\tilde{\alpha}}(A)$$

eine Wilson-Loop-Funktion. (Im Gegensatz zu früheren Kapiteln wird hier die Darstellung ρ, in der die Spur zu nehmen ist, noch mitnotiert.) Die Wilson-Loop-Funktionen und endliche Linearkombinationen von Produkten von Wilson-Loop-Funktionen sind also Zylinderfunktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Lemma 4.20: Die Menge $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ der Zylinderfunktionen ist bezüglich der Addition und Multiplikation, der komplexen Konjugation und der Supremums-Norm eine involutive, normierte Algebra.

Bew.: Analog zu Lemma 3.16.

Def. 4.21: $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ ist die C^*-Algebra, die durch Vervollständigung von $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ bezüglich der Supremums-Norm entsteht.

Da $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ isometrisch isomorph zu $Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ ist, hat auch eine isometrische Isomorphie zwischen den Vervollständigungen $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ und $C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$. Damit gilt Satz 3.18 analog, d.h., $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ ist isomorph zur Ashtekar-Isham-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$.

Lemma 4.22: $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}))$ ist isometrisch isomorph zur C^*-Algebra $C^*(Cyl(\overline{X'}))$.

Bew.: Man betrachte die Abbildung

$$\phi : Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \to Cyl(\overline{X'}), \quad \tilde{p}_S^* f_S \mapsto [f_S]_\sim .$$

Man zeigt, daß ϕ eine Bijektion ist. ϕ ist injektiv: Seien $f = \tilde{p}_{S_1}^* f_{S_1}$, $f' = \tilde{p}_{S_2}^* f_{S_2} \in Cyl(\overline{X'})$, $f \neq f'$, d.h. es gibt $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ so, daß $f_{S_1}(\tilde{\alpha}) \neq f_{S_2}(\tilde{\alpha})$. Dann gilt $f_{S_3}(\tilde{\alpha}) \neq f_{S_3}(\tilde{\alpha})$ für alle $S_3 \geq S_1, S_2$ und $[f_{S_1}]_\sim \neq [f_{S_2}]_\sim$.

ϕ ist surjektiv: Zu jeder Äquivalenzklasse $[f_S]_\sim$ wählt man einen Repräsentanten f_S. Da $\tilde{p}_S$ surjektiv ist, ist $\tilde{p}_S^*$ injektiv. Sei $f = \tilde{p}_S^* f_S \in Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$. Dann gilt $\phi(f) = [f_S]_\sim$.

Die gesuchte Abbildung ist die stetige Fortsetzung der Abbildung ϕ.

□

Unter Verwendung von Satz 4.9 erhält man folgendes Resultat:

Satz 4.23: Das Gelfand-Spektrum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ der C^*-Algebra $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})) \simeq C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}))$ ist homöomorph zum Raum $\overline{X'} = Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$. ($\overline{X'}$ ist der projektive Limes des projektiven Spektrums $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S' \in L}$, wobei $X'_S = Hom(S, G)/Ad(G)$.) Seien $[\hat{H}] \in \overline{X'}$ und $f \in \overline{Cyl}(\mathcal{A}/\mathcal{G})$. Der Homöomorphismus weist $[\hat{H}]$ folgenden Charakter von $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ zu:

$$[\hat{H}](f) = f_S([\hat{H}]|_S)$$

für alle $f_S \in C(X'_S)$, so daß $f = \tilde{p}_S^* f_S$. Jeder Charakter von $\overline{Cyl}(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ ist eindeutig bestimmt durch einen solchen Charakter von $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$.

□

Dieser Satz entspricht dem Resultat aus Kapitel 3, dort Sätze 3.7 und 3.10. Die projektiven Techniken erlauben eine einfachere Charakterisierung des Gelfand-Spektrums $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ der Ashtekar-Isham-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$. Da $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als Konfigurationsraum der Quantentheorie gedeutet wird, hat man hiermit ein zentrales Ergebnis wiedergewonnen und verallgemeinert. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß statt $SU(2)$ beliebige kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppen verwendet werden können.

Wir wissen aus Lemma 3.8, daß $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ dicht in $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ liegt. Somit liegt $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ auch dicht in $\overline{X'}$, und die Projektionen $\tilde{p}_S : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to X'_S$ sind die Einschränkungen der Projektionen $p_S : \overline{X'} \to X_S$.

Man verfährt nun wie in Def. 3.19, um Maße auf allen X'_S zu erhalten, die vom Haarmaß auf der jeweiligen kompakten Gruppe G induziert werden. Aus Satz 3.20 (a) ersieht man, daß hierdurch eine konsistente Familie von regulären Borelschen Wahrscheinlichkeitsmaßen gegeben ist, die somit ein reguläres Borelsches Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem projektiven Limes $\overline{X'} = \varprojlim_{S \in L} X'_S$ induzieren. Dies ist das schon in Kapitel 3 definierte induzierte Haarsche Maß oder Ashtekar-Lewandowski-Maß auf $\overline{X'} \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Diese Konstruktion funktioniert aber, wie schon mehrfach angemerkt, nicht nur für $SU(2)$, sondern für beliebige kompakte zusammenhängende Lie-Gruppen.

4.3 Die Zustände der Theorie

Wie schon mehrfach gesagt, sind die Zylinderfunktionen Zustände der Theorie. Dies sieht man wie folgt: man hat nach dem bisher Bewiesenen und dem Gelfandschen Darstellungssatz isometrische Isomorphien

$$\begin{aligned} C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})) &\simeq C^*(Cyl(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})) \\ &\simeq C^*(Cyl(\overline{X'})) \\ &\simeq C(\overline{X'}) \\ &\simeq C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}). \end{aligned}$$

Um eine Zylinderfunktion $f \in Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ zu integrieren, übersetzt man sie per Gelfand-Transformation in ein $\check{f} \in C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$. Nach obiger Isomorphie erhält man alle Elemente von $C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ als Gelfand-Transformierte von Zylinderfunktionen oder geeigneten Grenzwerten dieser Funktionen, die im C^*-Abschluß von $Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})$ liegen. Auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ haben wir das Ashtekar-Lewandowski-Maß als reguläres Wahrscheinlichkeitsmaß, und als stetige Funktion auf dem kompakten Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist $\check{f}$ beschränkt und somit p-integrabel, insbesondere quadratintegrabel.

Der Hilbertraum der Theorie ist $\mathcal{H} := L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. Offensichtlich liegt $C^*(Cyl(\mathcal{A}/\mathcal{G})) \simeq C(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}})$ dicht in $\mathcal{H}$. Die Wilson-Loop-Funktionen sind nach Satz 3.18 Zylinderfunktionen und somit auch Zustände. Ein Problem, das lange Zeit offen war, bestand darin, daß die Wilson-Loop-Funktionen eine übervollständige Basis bilden. Das liegt an den Mandelstam-Identitäten, die lineare Abhängigkeiten zwischen Vielfachen von Wilson-Loop-Funktionen und ihren Produkten herstellen. Dieses Problem konnte mit der Einführung der Spin-Netzwerke gelöst werden [Bae96a, Bae96b], die eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}$ bilden.

4.4 Verbindungen zur Gittertheorie

Vieles an den verwendeten Techniken erinnert an die Gittertheorie. Statt direkt über das "Kontinuum", den unendlichdimensionalen Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ zu integrieren, wählt man eine zahme Untergruppe S, die von nur endlich vielen unabhängigen Hoops $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ erzeugt wird. Dann betrachtet man Funktionen auf $X'_S = Hom(S, G)/Ad(G)$, die Zylinderfunktionen. Diese werden über den endlichdimensionalen Raum $X'_S \simeq G^n/Ad(G)$ integriert. Die Zylinderfunktionen können in der Form

$$f(\tilde{A}) = f(H(\beta_1, A), ..., H(\beta_n, A))$$

geschrieben werden (s. Unterabschnitt 4.B.2), wobei $\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$ und A ein Repräsentant von $\tilde{A}$ ist. Dazu gibt es folgende Veranschaulichung: die Holonomien sammeln als pfadgeordnete Exponentiale jeweils ein Stück Information über den Zusammenhang A. Integriert wird entlang der $\tilde{\beta}_i$, die in der Mannigfaltigkeit Σ eingebettet sind. Die $\tilde{\beta}_i$, oder besser die jeweiligen Kurvenstücke, die sie wegen der Unabhängigkeit für sich haben (vgl. Defn. 2.6, 2.13), können als Gitter betrachtet werden. Damit ist jedoch kein gewöhnliches Gitter gemeint, in dem jeder Gitterpunkt durch n ganze Zahlen gekennzeichnet ist, wenn n die Dimension der Mannigfaltigkeit ist, in der das Gitter eingebettet ist. In unserem Fall hat man geschlossene Kurven und wertet die Holonomien entlang dieser Kurven oder ihrer Inversen aus. Dabei ist bei nicht-kommutativen Eichgruppen G die Reihenfolge der Durchlaufungen wichtig. Der Begriff eines Gitters bezieht sich auf die endliche Anzahl von Kanten (Hoops), die in einer zahmen Untergruppe enthalten sind.

Interessant ist auch die Art und Weise, in der der Übergang zum "Kontinuum" geschieht. Für gewöhnlich verkleinert man die Maschen eines Gitters immer weiter und bildet dann einen geeigneten Grenzwert. In einer Theorie ohne Hintergrundstruktur hat man keine Möglichkeit zur Längenmessung, also verliert die Vorstellung einer Verkleinerung der Maschen ihren Sinn. Stattdessen nimmt man in diesem Fall mehr und mehr Hoops $\tilde{\beta}_j$ hinzu, die immer größere zahme Untergruppen erzeugen. Der Limes, der hier verwendet wird, ist der projektive Limes, der bezüglich der Menge *aller* zahmen Untergruppen gebildet wird.

Es gibt eine weitere projektive Familie, die $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als ihren projektiven Limes hat. Wir geben nur eine sehr kurze Andeutung, für näheres siehe [AshLew94b, Bae96b]. Als Indexmenge dient die halbgeordnete Menge aller Graphen mit analytischen Kanten. Die Kanten eines Graphen treffen sich jeweils höchstens an den Endpunkten. Sei $P(\Sigma, G)$ ein Hauptfaserbündel. Zu einem Graphen γ betrachtet man die Menge $\mathcal{A}_\gamma$ aller C^∞-Abbildungen f, die die Faser über Anfangspunkt $\gamma_i(0)$ einer Kante γ_i in die Faser über dem Endpunkt $\gamma_i(1)$ überführen und der Bedingung

$$f(xg) = f(x)g$$

für alle $g \in G$ genügen. Die Holonomie ist eine solche Abbildung. Man betrachtet weiter, wie Eichtransformationen wirken. Zu einem Graphen γ erhält man einen Raum $\mathcal{G}_\gamma$, und die Räume $\mathcal{A}_\gamma/\mathcal{G}_\gamma$ bilden mit den geeigneten Projektionen zwischen Graphen ein projektives Spektrum, das ebenfalls $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als projektiven Limes hat.

In diesem Bild sind Zustände bestimmte Funktionen auf Graphen, die schon mehrfach erwähnten Spin-Netzwerke [Bae96a, Bae96b]. Da sich die Kanten eines Graphen wenn überhaupt nur an den Endpunkten treffen, ist die Analogie zu einem Gitter noch stärker als im Loop-Bild. Der projektive Limes ist bezüglich der Menge aller Graphen zu nehmen.

5 Ergebnisse zu C^∞-Diffeomorphismen

In diesem Kapitel sind verschiedene neue Ergebnisse gesammelt, die alle mit der Wirkung der Diffeomorphismengruppe $Diff(\Sigma)$ zu tun haben.

5.1 Diffeomorphismen und Bündelautomorphismen

Es wird gezeigt, daß in trivialen Bündeln zu jedem C^∞-Diffeomorphismus ein kanonischer Bündelautomorphismus existiert. Dann wird für beliebige Bündelautomorphismen bewiesen, daß man jeweils dasselbe Ergebnis erhält, wenn man entweder den induzierten Diffeomorphismus der Basismannigfaltigkeit auf das Loop-Argument der Holonomie wirken läßt oder den zugehörigen Bündelautomorphismus auf das Zusammenhangs-Argument (Lemma 5.4). Dieses Ergebnis ist unseres Wissens neu und kann als Hinweis auf die dualen Rollen von $\mathcal{HG}$ und $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ gesehen werden. In [AshLew94] gibt es Überlegungen, in welchem Sinne diese Räume als dual angesehen werden können. Dort wird insbesondere die sogenannte Loop-Transformation untersucht, die ein Analogon zur Fourier-Transformation darstellt und die Zusammenhangs- und die Loop-Darstellung der Loop-Quantengravitation verbindet (s. auch [ALMMT95] und Kapitel 6.C). Unser Ergebnis beleuchtet die Dualität von $\mathcal{HG}$ und $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ auf eine andere Weise. Die Übertragung auf die Wilson-Loop-Funktionen ist unmittelbar.

Wir zeigen zunächst, daß es in trivialen Hauptfaserbündeln zu jedem C^∞-Diffeomorphismus der Basismannigfaltigkeit einen kanonisch zugeordneten Bündelautomorphismus gibt: Sei $\phi_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ ein beliebiger C^∞-Diffeomorphismus und G eine Lie-Gruppe, deren Exponentialabbildung surjektiv ist (vgl. Satz 2.17). $P(\Sigma, G)$ sei ein triviales Hauptfaserbündel, d.h. es gibt eine globale Trivialisierung, so daß P von der Gestalt $P = \Sigma \times G$ ist. Durch

$$\phi : P \to P, \quad (x, g) \mapsto (\phi_\Sigma(x), g)$$

ist in kanonischer Weise ein Bündelautomorphismus definiert:

$$\begin{aligned}(\phi \circ R_h)(x,g) &= \phi((x,g)h)\\ &= \phi(x,gh)\\ &= (\phi_\Sigma(x),gh)\\ &= (\phi_\Sigma(x),g)h\\ &= \phi(x,g)h\\ &= (R_h \circ \phi)(x,g),\end{aligned}$$

wobei $x \in \Sigma,\ g,h \in G$. Sei $A \in \mathcal{A}$ ein Zusammenhang auf P, also eine Abbildung

$$A : p \mapsto A_p \in Hom(T_p(P), \mathfrak{g}),$$

wobei $p = (x,g) \in P$ und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra der Lie-Gruppe G ist.

Sei P jetzt wieder ein beliebiges, nicht notwendigerweise triviales Hauptfaserbündel, $\phi : P \to P$ ein Bündelautomorphismus und $\phi_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$ der induzierte Diffeomorphismus der Basismannigfaltigkeit. Wir geben zunächst den Beweis eines wohlbekannten Lemmas:

Lemma 5.1: Der Pullback $\phi^* A$ eines Zusammenhangs $A \in \mathcal{A}$ ist wiederum ein Zusammenhang. Dabei ist

$$(\phi^* A)_p(X) := A_{\phi(p)}(D\phi(p).X)$$

für $X \in T_p(P)$.

Bew.: Seien $g \in C^\infty(P,\mathbb{R}),\ B \in \mathfrak{g}$ und B_p^b das zugehörige fundamentale Vektorfeld an der Stelle p:

$$B_p^b(g) := \frac{d}{dt}(g(p \exp tB))|_{t=0}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}(\phi^* A)_p(B_p^b) &= A_{\phi(p)}(D\phi(p).B_p^b)\\ &= A_{\phi(p)}(\frac{d}{dt}(\phi(p \exp tB))|_{t=0})\\ &= A_{\phi(p)}(\frac{d}{dt}(\phi(p) \exp tB)|_{t=0})\\ &= A_{\phi(p)}(B_{\phi(p)}^b)\\ &= B\end{aligned}$$

$\phi^* A$ erfüllt also eine der beiden definierenden Eigenschaften einer Zusammenhangs-1-Form. Noch zu zeigen ist $R_h^*(\phi^* A) = Ad_{h^{-1}}(\phi^* A)$. Man betrachte zunächst

$$\begin{aligned}(\phi^*(Ad_{h^{-1}}A))_p(X_p) &= (Ad_{h^{-1}}A)_{\phi(p)}(D\phi(p).X_p) \\ &= Ad_{h^{-1}}(A_{\phi(p)}(D\phi(p).X_p) \\ &= Ad_{h^{-1}}((\phi^* A)_p.X_p),\end{aligned}$$

also kurz $\phi^*(Ad_{h^{-1}}A) = Ad_{h^{-1}}(\phi^* A)$. Damit ergibt sich wegen $R_h \circ \phi = \phi \circ R_h$:

$$\begin{aligned}R_h^*(\phi^* A) &= (\phi \circ R_h)^*(A) \\ &= (R_h \circ \phi)^*(A) \\ &= \phi^*(R_h^* A) \\ &= \phi^*(Ad_{h^{-1}}A) \\ &= Ad_{h^{-1}}(\phi^* A).\end{aligned}$$

Also gilt $\phi^* A \in \mathcal{A}$. Bündelautomorphismen operieren per Pullback auf dem Raum $\mathcal{A}$ der Zusammenhänge.

$\square$

Seien weiter $p \in P$ und A ein Zusammenhang auf P. H_p^A bezeichnet den zu A gehörigen Horizontalraum im Punkt P.

Lemma 5.2: Sei $\phi : P \to P$ ein Bündelautomorphismus. Es gilt

$$H_p^{\phi^* A} = D\phi^{-1}(\phi(p))H_{\phi(p)}^A.$$

Bew.: Sei $X_p \in T_p$. Es gilt

$$(\phi^* A)_p(X_p) = A_{\phi(p)}(D\phi(p).X_p).$$

Betrachtet man ein $X_p \in H_p^{\phi^* A}$, so folgt:

$$\begin{aligned}X_p &\in H_p^{\phi^* A} \Leftrightarrow (\phi^* A)_p(X_p) = 0 \\ &\Leftrightarrow D\phi(p).X_p \in H_{\phi(p)}^A \\ &\Leftrightarrow X_p \in D\phi^{-1}(\phi(p))H_{\phi(p)}^A.\end{aligned}$$

Dabei gilt letztere Äquivalenz, weil $(D\phi^{-1})(\phi(p)) = (D\phi(p))^{-1}$ ist, wie man leicht überprüft.

$\square$

Lemma 5.3: Sei γ ein stückweise C^∞-Loop zum Basispunkt $x \in \Sigma$, also $\gamma(0) = x = \gamma(1)$, und $p \in \pi^{-1}(x) \in P$ ein Punkt in der Faser über x. Sei $\gamma_p^{\phi^* A}$ der horizontale Lift von γ mit Anfangspunkt p bezüglich $\phi^* A$, d.h. $\gamma_p^{\phi^* A}(0) = p$. Dann ist $\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A}$ der horizontale Lift von $\phi_\Sigma \circ \gamma$ mit Anfangspunkt $\phi(p)$ bezüglich A.

Bew.: Es gilt

$$\dot{\gamma}_p^{\phi^* A}(t) \in H^{\phi^* A}_{\gamma_p^{\phi^* A}(t)} = D\phi^{-1}(\phi(\gamma_p^{\phi^* A}(t))H^A_{\phi(\gamma_p^{\phi^* A}(t))},$$

also

$$D\phi(\gamma_p^{\phi^* A}(t))\dot{\gamma}_p^{\phi^* A}(t) \in H^A_{\phi(\gamma_p^{\phi^* A}(t))}.$$

Nun ist $D\phi(\gamma_p^{\phi^* A}(t))\dot{\gamma}_p^{\phi^* A}(t) = \frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A})(t)$, also gilt

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A})(t) \in H^A_{(\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A})(t)},$$

$\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A}$ ist also die (eindeutig bestimmte stückweise glatte) horizontale Kurve zum Anfangspunkt $\phi(p)$ bezüglich A. Um zu zeigen, daß $\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A}$ ein Lift von $\phi_\Sigma \circ \gamma$ ist, betrachtet man folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"] & P \arrow[d, "\pi"] \\ \Sigma \arrow[r, "\phi_\Sigma"] & \Sigma \end{tikzcd}$$

Man hat

$$\begin{aligned} \pi \circ (\phi \circ \gamma_p^{\phi^* A}) &= (\pi \circ \phi) \circ \gamma_p^{\phi^* A} \\ &= \phi_\Sigma \circ \pi \circ \gamma_p^{\phi^* A} \\ &= \phi_\Sigma \circ \gamma. \end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt die Kommutativität des Diagramms ausgenutzt und im dritten Schritt die Horizontalität von $\gamma_p^{\phi^* A}$.

$\square$

Damit kann man das eigentliche Lemma formulieren:

Lemma 5.4: Es gilt (mit den in den vorangegangenen Lemmata benutzten Bezeichnungen) für die Holonomien:

$$H_x(\gamma, \phi^* A) = H_{\phi_\Sigma(x)}(\phi_\Sigma \circ \gamma, A).$$

Der Index an der Holonomie bezeichnet den Basispunkt des Loops, bezüglich dessen die Holonomie betrachtet wird.

Bew.: Die Holonomie wird hier als Ergebnis des Paralleltransports entlang einer horizontalen Kurve aufgefaßt. Da man Loops betrachtet, gilt

$$\gamma_p^{\phi^* A}(1) = \gamma_p^{\phi^* A}(0) g$$

mit einem eindeutig bestimmten $g \in G$. Damit folgt

$$(\phi_\Sigma \circ \gamma)^A_{\phi(p)}(1) = \phi(\gamma_p^{\phi^* A}(1)) = \phi(\gamma_p^{\phi^* A}(0)) g = (\phi_\Sigma \circ \gamma)^A_{\phi(p)}(0) g.$$

Im zweiten Schritt wurde ausgenutzt, daß ϕ ein Bündelautomorphismus ist, also mit der Rechtsoperation von G vertauscht. Der Paralleltransport entlang $(\phi_\Sigma \circ \gamma)^A_{\phi(p)}$, des horizontalen Lifts von $\phi_\Sigma \circ \gamma$ zum Anfangspunkt $\phi(p)$ bezüglich A liefert also dasselbe Gruppenelement g wie der Paralleltransport entlang $\gamma_p^{\phi^* A}$, des horizontalen Lifts von γ zum Anfangspunkt p bezüglich $\phi^* A$. Das ist gerade die Behauptung.

$\Box$

Ändert man in der Behauptung des obigen Lemmas die Basispunkte der Loops, so ändern sich die Holonomien um eine Konjugation. Die Spuren der Holonomien bleiben somit unverändert.

Def. 5.5: Die *Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}_x$ zum Basispunkt* $x \in \Sigma$ ist definiert als die Menge $\mathcal{L}_x$ der Loops zum Basispunkt x modulo Holonomie-Äquivalenz von Loops zum Basispunkt x.

Offensichtlich sind die Hoop-Gruppen zu verschiedenen Basispunkten isomorph, also insbesondere

$$\mathcal{L}_x / \sim_x \simeq \mathcal{L}_{\phi_\Sigma(x)} / \sim_{\phi_\Sigma(x)} .$$

Daraus ergibt sich

Lemma 5.6: Es gilt

$$T_{\tilde{\gamma}}(\phi^* A) = trH(\tilde{\gamma}, \phi^* A) = trH((\phi_\Sigma \circ \gamma)^\sim, A) = T_{(\phi_\Sigma \circ \gamma)^\sim}(A)$$

für alle $\tilde{\gamma} \in \mathcal{L}_x / \sim_x$. Dabei wird $(\phi_\Sigma \circ \gamma)^\sim$ mit einem Element von $\mathcal{L}_x / \sim_x$ identifiziert. Die Holonomien sind jeweils auf einem Repräsentanten auszuwerten.

$\square$

Dieses Lemma zeigt, daß man die Wirkung eines Diffeomorphismus $\phi_\Sigma : \Sigma \to \Sigma$, der von einem Bündelautomorphismus $\phi : P \to P$ induziert wird, auch als Wirkung des Bündelautomorphismus auf die Zusammenhänge verstehen kann, wobei die Loops festbleiben. Dies gilt für beliebige solche C^∞-Diffeomorphismen.

5.2 Die Ashtekar-Isham-Algebra unter Wirkung eines Diffeomorphismus

In diesem Abschnitt werden die bekannten Strukturen einer Holonomie-Algebra, ihrer C^*-Vervollständigung zu einer Ashtekar-Isham-Algebra etc. auf einer Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}^\phi$ definiert, die aus $\mathcal{HG}$ durch Wirkung eines beliebigen Diffeomorphismus entstanden ist. Diese Strukturen tauchen so bisher nicht in der Literatur auf. Wir brauchen sie im folgenden Abschnitt für unseren Vorschlag zur Erweiterung des Schemas von analytischen zu beliebigen C^∞-Diffeomorphismen.

Da es für die Loop-Zerlegung nur auf die Überschneidungseigenschaften stückweise analytischer Loops ankommt (s. Lemma 2.14) und sich die Überscheidungseigenschaften von Loops unter beliebigen C^∞-Diffeomorphismen nicht ändern, besteht die Idee darin, neben der Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$, die aus stückweise analytischen Loops besteht, für jeden C^∞-Diffeomorphismus ϕ eine Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}^\phi$ einzuführen:

Def. 5.7: Sei $\phi \in Diff(\Sigma)$. Dann ist die *ϕ-Hoop-Gruppe* $\mathcal{HG}^\phi$ definiert als $\mathcal{HG}^\phi := \phi(\mathcal{HG}) = \{(\phi \circ \alpha)^\sim \mid \tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}\}$. Dabei ist α ein Repräsentant von $\tilde{\alpha}$. Man läßt ϕ auf α wirken und bildet dann die Äquivalenzklasse bezüglich der Holonomie-Äquivalenz.

Offensichtlich kann man für beliebige Elemente $\tilde{\beta}_1^\phi, ..., \tilde{\beta}_m^\phi \in \mathcal{HG}^\phi$ die Loop-Zerlegung durchführen. Man erhält unabhängige Hoops $\tilde{\gamma}_1^\phi, ..., \tilde{\gamma}_n^\phi$. Sei andererseits $\tilde{\beta}_i = \phi^{-1} \circ \tilde{\beta}_i^\phi \in \mathcal{HG},\ i = 1, ..., m$. Dann kann man die Loop-Zerlegung auch für $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_m$ durchführen und die erhaltenen Hoops $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n$ mittels ϕ wieder nach $\mathcal{HG}^\phi$ transportieren. Man erhält $\tilde{\gamma}_1^\phi, ..., \tilde{\gamma}_n^\phi$. Dahinter steckt die eindeutige Darstellbarkeit von Produkten in freien Gruppen.

Man kann jetzt vollkommen analog zum Fall stückweise analytischer Loops zahme Untergruppen, Holonomie-Algebren, Zylinderfunktionen etc. definie-ren. Wir brauchen diese Strukturen dann bei der Betrachtung der Diffeomorphismeninvarianz des Ashtekar-Lewandowski-Maßes.

Def. 5.8: Eine von endlich vielen unabhängigen Hoops $\tilde{\gamma}_1^\phi, ..., \tilde{\gamma}_n^\phi \in \mathcal{HG}^\phi$ frei erzeugte Untergruppe S^ϕ der ϕ-Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}^\phi$ heißt *zahme ϕ-Untergruppe.*

Analog zu den bisherigen Definitionen der Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$ und der Ashtekar-Algebra $C^*(\mathcal{HA})$ definiert man zu jedem $\mathcal{HG}^\phi$ jeweils zwei solche Algebren:

Def. 5.9: Die *ϕ-Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}^\phi$* ist der komplexe Vektorraum über der Menge der Wilson-Loop-Funktionen $T_{\tilde{\alpha}^\phi}$ zu Loops $\tilde{\alpha}^\phi \in \mathcal{HG}^\phi$. Durch

$$* : \mathcal{HA}^\phi \to \mathcal{HA}^\phi, \quad *(\sum_i a_i T_{\tilde{\alpha}_i^\phi}) := \sum_i \overline{a}_i T_{\tilde{\alpha}_i^\phi}$$

ist eine Involution auf $\mathcal{HA}^\phi$ erklärt. Zusammen mit der Supremums-Norm hat man eine normierte, involutive, kommutative Algebra beschränkter Funktionen auf $\mathcal{A}/\mathcal{G}$. Sei $C^*(\mathcal{HA}^\phi)$ die Vervollständigung von $\mathcal{HA}^\phi$ in der Supremumsnorm. $C^*(\mathcal{HA}^\phi)$ ist eine kommutative C^*-Algebra und heißt *ϕ-Ashtekar-Isham-Algebra.* Das Spektrum von $C^*(\mathcal{HA}^\phi)$ wird mit $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ bezeichnet.

Lemma 5.10: Man hat einen isometrischen Isomorphismus

$$\varphi : \mathcal{HA} \simeq \mathcal{HA}^\phi, \quad T_{\tilde{\alpha}} \to T_{(\phi\circ\alpha)^\sim}$$

und damit auch einen isometrischen Isomorphismus

$$\Phi : C^*(\mathcal{HA}) \simeq C^*(\mathcal{HA}^\phi).$$

Bew.: φ ist offensichtlich surjektiv. Die Injektivität sieht man folgendermaßen: Sei $T_{(\phi\circ\alpha)^\sim}(A) = T_{(\phi\circ\beta)^\sim}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Dies ist nach Lemma

5.6 äquivalent zu

$$\begin{aligned} & T_{\tilde\alpha}(\phi^*A) = T_{\tilde\beta}(\phi^*A) \\ \Leftrightarrow\ & T_{\tilde\alpha}(B) = T_{\tilde\beta}(B) \quad \forall B \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow\ & T_{\tilde\alpha} = T_{\tilde\beta}. \end{aligned}$$

Sei $\sum c_{\tilde\alpha} T_{(\phi\circ\alpha)^\sim} \in \mathcal{HA}^\phi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\sum c_{\tilde\alpha} T_{(\phi\circ\alpha)^\sim}| &= \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sum c_{\tilde\alpha} T_{(\phi\circ\alpha)^\sim}(A)| \\ &= \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sum c_{\tilde\alpha} T_{\tilde\alpha}(\phi^*A)| \\ &= \sup_{A\in\mathcal{A}} |\sum c_{\tilde\alpha} T_{\tilde\alpha}(A)| \\ &= |\sum c_{\tilde\alpha} T_{\tilde\alpha}|. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{HA}$ dicht in $C^*(\mathcal{HA})$ liegt und $\mathcal{HA}^\phi$ dicht in $C^*(\mathcal{HA}^\phi)$, läßt sich φ eindeutig zu einem isometrischen Isomorphismus $\Phi : C^*(\mathcal{HA}) \simeq C^*(\mathcal{HA}^\phi)$ erweitern.

□

Aus diesem Lemma folgt weiter, daß es einen Homöomorphismus φ' zwischen den Spektren der C^*-Algebren $C^*(\mathcal{HA}^\phi)$ und $C^*(\mathcal{HA})$ gibt:

$$\varphi' : \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi} \to \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}.$$

Damit läßt sich leicht eine Bijektion zwischen $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ und $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ konstruieren: Sei $h^\phi \in \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$. Dann ist $\varphi'(h^\phi) \in \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Sei $[\hat H_{\varphi'(h^\phi)}]_{Ad}$ das zu $\varphi'(h^\phi)$ gehörige Element von $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ (s. Sätze 3.7, 4.23). Sei $[\hat H_{h^\phi}]_{Ad} \in Hom(\mathcal{HG}^\phi, G)/Ad(G)$ definiert durch

$$[\hat H_{h^\phi}]_{Ad}((\alpha^\phi)^\sim) := [\hat H_{\varphi'(h^\phi)}]_{Ad}((\phi^{-1}\circ\alpha^\phi)^\sim) \quad \forall (\alpha^\phi)^\sim = (\phi\circ\alpha)^\sim \in \mathcal{HG}^\phi.$$

Es gilt $(\phi^{-1}\circ\alpha^\phi)^\sim \in \mathcal{HG}$, und da ϕ und ϕ^{-1} Bijektionen zwischen $\mathcal{HG}$ und $\mathcal{HG}^\phi$ sind, hat man offensichtlich eine Bijektion zwischen $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ und $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$:

$$\Omega : \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi} \to Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G), \quad h^\phi \to [\hat H_{h^\phi}]_{Ad}.$$

Analog zu Def. 3.12 kann man auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ eine Äquivalenzrelation definieren:

Def. 5.11: Seien $\tilde{\beta}_1^\phi, ..., \tilde{\beta}_n^\phi$ unabhängige Hoops, $S^\phi = \left\langle \tilde{\beta}_1^\phi, ..., \tilde{\beta}_n^\phi \right\rangle$ die von ihnen erzeugte zahme Untergruppe. Seien $h, h' \in \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$. Man definiert die S^ϕ-*Äquivalenzrelation* auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ durch

$$h \sim_{S^\phi} h' :\Leftrightarrow \exists g_0 \in G : [\hat{H}_{h'}]_{Ad}(\tilde{\gamma}^\phi) = g_0^{-1}[\hat{H}_h]_{Ad}(\tilde{\gamma}^\phi)g_0 \quad \forall \tilde{\gamma}^\phi \in S,$$

wobei $[\hat{H}_h]_{Ad}, [\hat{H}_{h'}]_{Ad} \in Hom(\mathcal{HG}^\phi, G)/Ad(G)$ die h und h' unter der Bijektion Ω zugeordneten Elemente sind. Sei

$$\pi_{S^\phi} : \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi} \to \left(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}\right) / \sim_{S^\phi}$$

die kanonische Projektion.

Analog zu Lemma 3.13 (a) kann man zeigen, daß es eine Bijektion

$$\left(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}\right) / \sim_{S^\phi} \to Hom(S^\phi, G)/Ad(G)$$

gibt. Daher läßt sich π_{S^ϕ} als Projektion von $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ nach $Hom(S^\phi, G)/Ad(G)$ auffassen. Ebenso gilt Lemma 3.13 (b) analog. Man hat eine Bijektion

$$\left(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}\right) / \sim_{S^\phi} \to G^n/Ad$$

durch Benutzung der obigen Bijektion und Auswertung auf Erzeugenden von S^ϕ.

Entsprechend lassen sich Zylinderfunktionen auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$ definieren (vgl. Def 3.14):

Def. 5.12: Sei $\tilde{f}$ eine stetige Funktion auf $X'_{S^\phi} := Hom(S^\phi, G)/Ad(G)$. Der Pullback f von $\tilde{f}$ unter π_{S^ϕ} heißt *Zylinderfunktion auf* $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}$. f heißt *zylindrisch bezüglich* S^ϕ. Die Menge der Zylinderfunktionen wird mit $Cyl(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi})$ bezeichnet, es gilt

$$Cyl(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^\phi}) := \bigcup_{S^\phi \in L^\phi} \pi^*_{S^\phi} C(X'_{S^\phi}),$$

wobei L^ϕ die halbgeordnete Menge der zahmen Untergruppen von $\mathcal{HG}^\phi$ ist.

5.3 Die Diffeomorphismeninvarianz des Ashtekar-Lewandowski-Maßes

In Unterabschnitt 5.C.1 wird die Wirkung der Diffeomorphismengruppe auf alle bei der Konstruktion des Ashtekar-Lewandowski-Maßes wichtigen Strukturen betrachtet. Dabei gehen wir an geeigneter Stelle auf die Unterschiede zwischen analytischen und beliebigen C^∞-Diffeomorphismen ein. Wir leiten eine Bedingung her, die Maße auf den Teilräumen X'_S des projektiven Spektrums $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S' \in L}$ aus Kapitel 4 erfüllen müssen, um ein diffeomorphismeninvariantes Maß auf dem projektiven Limes $\overline{X'}$ zu induzieren. Es folgt der einzige uns bekannte Beweis, daß das Ashtekar-Lewandowski-Maß tatsächlich invariant gegen Diffeomorphismen ist. In [AshLew94] wird lediglich das unzureichende Argument gegeben, daß bei der Konstruktion von μ keine Metrik oder andere Struktur auf M oder Σ benutzt worden sei und μ deshalb automatisch diffeomorphismeninvariant sei. Abgesehen davon, daß dies einen richtigen Beweis nicht ersetzt, wäre dies nur ein Argument für die Invarianz gegenüber Isometrien, nicht aber allgemeinen Diffeomorphismen. Einige andere Autoren übernehmen diesen unzureichenden Hinweis. Die Überlegungen in [Bae93] sind von allgemeiner Natur und nicht speziell auf das Ashtekar-Lewandowski-Maß bezogen. Das Argument in [AshLew95] weist in die richtige Richtung, ersetzt aber ebenfalls nicht einen Beweis. In [GauRov99] findet sich ein anderes, falsches Argument.

Anschließend machen wir in Unterabschnitt 5.C.2 einen Vorschlag, wie man die Betrachtung auf beliebige C^∞-Diffeomorphismen ausdehnen kann. Dieser Vorschlag ist neu und geht einher mit einer Vergrößerung des Hilbertraums. Wir diskutieren unseren Vorschlag im Verhältnis zu anderen Arbeiten, die ebenfalls eine Erweiterung des Hilbertraums beinhalten.

5.3.1 Die Wirkung von Diffeomorphismen

Wir werden im folgenden darstellen, wie sich die Wirkung der Diffeomorphismengruppe $Diff(\Sigma)$ von C^∞-Diffeomorphismen der Basismannigfaltigkeit Σ auf die Hoops überträgt, dann auf die Räume $Hom(\mathcal{HG}, G)$ und $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ und damit auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$. Aus der Wirkung auf stetige komplexwertige Funktionen auf Räumen der Gestalt $X'_S := Hom(S, G)/Ad(G)$ leiten wir eine allgemeine Bedingung an die Maße auf diesen Räumen ab, die erfüllt sein muß, damit das von ihnen induzierte Maß auf dem projektiven Limes $\overline{X'} \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ invariant gegenüber analytischen Diffeomorphismen ist. Es wird gezeigt, daß das Ashtekar-Lewandowski-Maß diese Bedingung erfüllt.

Sei $\phi : \Sigma \to \Sigma$ ein beliebiger C^∞-Diffeomorphismus. Die Operation von ϕ auf $\mathcal{HG}$ wollen wir folgendermaßen auffassen:

$$\tilde{\phi} : \mathcal{HG} \to \mathcal{HG}^\phi, \quad \tilde{\phi}(\tilde{\alpha}) := (\phi \circ \alpha)^\sim,$$

wobei α ein Repräsentant von $\tilde{\alpha}$ ist. Falls ϕ ein C^∞-Diffeomorphismus ist, der nicht analytisch ist, kann man $\mathcal{HG}^\phi$ nicht mehr mit $\mathcal{HG}$ identifizieren. Dahinter steckt das einfache Lemma, daß nur ein analytischer Diffeomorphismus ganz $\mathcal{HG}$ in sich selbst abbilden kann. Es ist nützlich, $\tilde{\phi}$ als Abbildung zwischen verschiedenen Räumen zu verstehen. (Wenn ϕ ein analytischer Diffeomorphismus ist, so ist die Abbildung $\tilde{\phi} : \mathcal{HG} \to \mathcal{HG}$ der gewöhnliche Pushforward mit ϕ, wenn man wie üblich $\mathcal{HG}^\phi$ mit $\mathcal{HG}$ identifiziert.) Wir führen die Bezeichnung $\tilde{\alpha}^\phi := (\phi \circ \alpha)^\sim$ ein.

Sei $\hat{H} \in Hom(\mathcal{HG}, G)$. Man definiert

$$\check{\phi} : Hom(\mathcal{HG}, G) \to Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G), \quad \check{\phi}(\hat{H}) \mapsto \tilde{\phi}^* \hat{H}.$$

Daß durch $\check{\phi}(\hat{H})$ tatsächlich ein Element von $Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)$ definiert ist, sieht man so:

$$\begin{aligned} \check{\phi}(\hat{H})(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) &= \check{\phi}(\hat{H})((\phi^{-1} \circ \alpha)^\sim) \\ &= \hat{H}((\phi \circ \phi^{-1} \circ \alpha)^\sim) \\ &= \hat{H}(\tilde{\alpha}) \end{aligned} \tag{1}$$

für alle $\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}} \in \mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$. Wenn ϕ ein analytischer Diffeomorphismus ist und man $Hom(\mathcal{HG}^\phi, G)$ mit $Hom(\mathcal{HG}, G)$ identifiziert, so erhält man
$\check{\phi} : Hom(\mathcal{HG}, G) \to Hom(\mathcal{HG}, G)$, wobei

$$\begin{aligned} \check{\phi}(\hat{H})(\tilde{\alpha}) &= \hat{H}((\phi \circ \alpha)^\sim) \\ &= \hat{H}(\tilde{\alpha}^\phi) \end{aligned}$$

für alle $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. $\check{\phi}$ wirkt also per Pullback auf $Hom(\mathcal{HG}, G)$.

Sei $\phi \in Diff(\Sigma)$ wieder beliebig. Wir vereinbaren folgende Notation:

$$\hat{H}^{\phi^{-1}} := \tilde{\phi}^* \hat{H} \in Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G),$$

d.h. $\hat{H}^{\phi^{-1}} = \check{\phi}(\hat{H})$. Dann gilt (vgl. (1)):

$$\hat{H}^{\phi^{-1}}(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) = \hat{H}(\tilde{\alpha}). \tag{2}$$

Seien $\hat{H}, \hat{H}' \in Hom(\mathcal{HG}, G)$ so, daß es ein $g_0 \in G$ gibt, so daß $\hat{H}'(\tilde{\alpha}) = g_0^{-1}\hat{H}(\tilde{\alpha})g_0$ für alle $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$.

Lemma 5.13.: Es gilt $\check{\phi}(\hat{H}')(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) = g_0^{-1}(\check{\phi}(\hat{H})(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}))g_0$.

Bew.: Man hat

$$\begin{aligned}
\check{\phi}(\hat{H}')(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) &= (\tilde{\phi}^*\hat{H}')((\phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim}) \\
&= \hat{H}'((\phi \circ \phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim}) \\
&= g_0^{-1}\hat{H}((\phi \circ \phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim})g_0 \\
&= g_0^{-1}(\tilde{\phi}^*\hat{H})((\phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim})g_0 \\
&= g_0^{-1}(\tilde{\phi}^*\hat{H})(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}})g_0 \\
&= g_0^{-1}(\check{\phi}(\hat{H})(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}))g_0
\end{aligned}$$

für alle $\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}} \in \mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$. Das bedeutet, daß $\check{\phi}$ den Raum $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ in den Raum $Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G)$ abbildet. Wir schreiben $\check{\phi}'$ für die induzierte Operation, $\check{\phi}'([\hat{H}]_{Ad})) := [\tilde{\phi}^*\hat{H}]_{Ad}$.

□

Für ein analytisches ϕ und ohne zwischen $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ und $Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G)$ zu unterscheiden erhält man

$$\begin{aligned}
\check{\phi}([\hat{H}]_{Ad})(\tilde{\alpha}) &= [\tilde{\phi}^*\hat{H}]_{Ad}(\tilde{\alpha}) \\
&= [\hat{H}]_{Ad}((\phi \circ \alpha)^{\sim}) \\
&= [\hat{H}]_{Ad}(\tilde{\alpha}^{\phi})
\end{aligned}$$

für alle $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. Weil ϕ als analytisch vorausgesetzt war, gilt $\tilde{\alpha}^{\phi} \in \mathcal{HG}$. In diesem Fall operiert also $\check{\phi}$ per Pullback auf $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$.

Sei ϕ wieder beliebig. Es gilt

Lemma 5.14.: $\check{\phi} : Hom(\mathcal{HG}, G) \to Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)$ ist eine Bijektion.

Bew.: $\check{\phi}$ ist injektiv: Seien $\hat{H}, \hat{H}' \in Hom(\mathcal{HG}, G),\ \hat{H} \neq \hat{H}'$, d.h., es gibt ein $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$, so daß $\hat{H}(\tilde{\alpha}) \neq \hat{H}'(\tilde{\alpha})$. Dann ist

$$\check{\phi}(\hat{H})(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) = \hat{H}(\tilde{\alpha}) \neq \hat{H}'(\tilde{\alpha}) = \check{\phi}(\hat{H}')(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}),$$

wobei die erste und die letzte Gleichheit aus (1) folgen.

$\check{\phi}$ ist surjektiv: Sei $\hat{H}' \in Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)$. Für $(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}'$ gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}'(\tilde{\alpha}) &= \hat{H}'((\phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim}) \\ &= \hat{H}'(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) \end{aligned}$$

für alle $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. $(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}'$ ist also ein Element von $Hom(\mathcal{HG}, G)$. Man hat außerdem

$$\begin{aligned} \check{\phi}((\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}')(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) &= \phi^*((\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}')((\phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim}) \\ &= \hat{H}'((\phi \circ \phi^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \alpha)^{\sim}) \\ &= \hat{H}'(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) \end{aligned}$$

für alle $\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}} \in \mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$, d.h., $(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}'$ ist das Urbild von $\hat{H}'$ unter $\check{\phi}$, also ist $\check{\phi}$ surjektiv.

$\square$

Es folgt, daß auch $\check{\phi}' : Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G) \to Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G)$ eine Bijektion ist. Seien $\tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n$ unabhängig und $S := \left\langle \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n \right\rangle \subset \mathcal{HG}$ eine zahme Untergruppe. $S^{\phi^{-1}}$ sei die zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$, die von den unabhängigen Hoops $(\phi^{-1} \circ \beta_1)^{\sim}, ..., (\phi^{-1} \circ \beta_n)^{\sim}$ erzeugt wird. Offensichtlich werden durch Einschränkung von $\check{\phi}$ Bijektionen

$$\begin{aligned} \check{\phi} &: Hom(S, G) \to Hom(S^{\phi^{-1}}, G), \\ \check{\phi}' &: Hom(S, G)/Ad(G) \to Hom(S^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G) \end{aligned}$$

induziert. Wir benutzen wieder die Notation $X'_S := Hom(S, G)/Ad(G)$ und analog $X'_{S^{\phi^{-1}}} := Hom(S^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G)$.

Wir vereinbaren außerdem noch folgende Notation:

$$[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} := [\tilde{\phi}^* \hat{H}]_{Ad} \in Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G),$$

d.h. $[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} = \check{\phi}'([\hat{H}]_{Ad})$. Dann gilt (vgl. (1)):

$$[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad}(\tilde{\alpha}^{\phi^{-1}}) = [\hat{H}]_{Ad}(\tilde{\alpha}). \tag{3}$$

Diese Schreibweise zeigt besonders suggestiv die Bijektion zwischen $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ und X'_S.

Sei F_S der Raum stetiger komplexwertiger Funktionen auf X'_S, $F_{S^{\phi^{-1}}}$ der Raum der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $X'_{S^{\phi^{-1}}}$. Man definiert

$$\hat{\phi} : F_S \to F_{S^{\phi^{-1}}}, \quad \tilde{f} \mapsto (\check{\phi}'^{-1})^* \tilde{f},$$

und somit hat man

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tilde{f})([\hat{H}']_{Ad}) &= (\check{\phi}'^{-1})^* \tilde{f}([\hat{H}']_{Ad}) \\ &= \tilde{f}(\check{\phi}'^{-1}([\hat{H}']_{Ad})) \\ &= \tilde{f}([(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}']_{Ad}) \end{aligned}$$

für alle $[\hat{H}']_{Ad} \in X'_S$. Der Beweis von Lemma 5.14 zeigt, daß $(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}'$ ein Element von $Hom(S, G)$ ist, also ist $[(\tilde{\phi}^{-1})^* \hat{H}']_{Ad}$ ein Element von $Hom(S, G)/Ad(G)$, und daher ist diese Definition von $\hat{\phi}(\tilde{f})$ sinnvoll.

Da $\check{\phi}'^{-1} : X'_{S^{\phi^{-1}}} \to X'_S$ eine Bijektion ist, gibt es genau ein $[\hat{H}]_{Ad} \in X'_S$, so daß $\tilde{f}(\check{\phi}'^{-1}([\hat{H}']_{Ad})) = \tilde{f}([\hat{H}]_{Ad})$. Insbesondere gilt für alle $[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} \in X'_{S^{\phi^{-1}}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\tilde{f})([\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad}) &= \tilde{f}([(\tilde{\phi}^{-1})^* \tilde{\phi}^* \hat{H}]_{Ad}) \\ &= \tilde{f}([\hat{H}]_{Ad}). \end{aligned}$$

Diese Schreibweise macht deutlich, daß $\hat{\phi}$ eine Bijektion zwischen $F_{S^{\phi^{-1}}}$ und F_S ist. Führt man noch die Notation

$$\tilde{f}^{\phi^{-1}} := \hat{\phi}(\tilde{f}) \in F_{S^{\phi^{-1}}}$$

ein, so ergibt sich

$$\tilde{f}^{\phi^{-1}}([\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad}) = \tilde{f}([\hat{H}]_{Ad}).$$

Sei μ_S ein Borel-Maß auf X'_S und $\mu_{S^{\phi^{-1}}}$ das Bilddmaß von μ_S auf $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ bezüglich der Bijektion $\check{\phi}' : X'_S \to X'_{S^{\phi^{-1}}}$,

$$\mu_{S^{\phi^{-1}}}(B) := \mu_S(\check{\phi}'^{-1}(B)) \tag{4}$$

für alle Mengen $B \subseteq X'_{S^{\phi^{-1}}}$, so daß $\check{\phi}'^{-1}(B)$ eine Borelmenge ist. Dann gilt offensichtlich

$$\int_{X'_S} \tilde{f} d\mu_S = \int_{X'_{S^{\phi^{-1}}}} \hat{\phi}(\tilde{f}) d\mu_{S^{\phi^{-1}}},$$

d.h. solche Maße auf dem projektiven Limes $\overline{X'} \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, die von Maßen, die die Verträglichkeitsbedingung (4) erfüllen, induziert werden, sind invariant gegen Diffeomorphismen. Dies bezieht sich zunächst nur auf analytische Diffeomorphismen, weil dann $S^{\phi^{-1}}$ als eine zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}$ aufgefaßt werden kann. Wir zeigen, daß die Maße auf X'_S und $X'_{S^{\phi^{-1}}}$, die vom Haar-Maß induziert werden und dem Ashtekar-Lewandowski-Maß zugrunde liegen, gerade in der Beziehung (4) stehen. Die Wahl des induzierten Haar-Maßes ist kanonisch, weil X'_S und $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ isomorph zu $G^n/Ad(G)$ sind. Allerdings kommen prinzipiell auch andere Maße in Betracht, die Bedingung (4) erfüllen und ein Maß auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induzieren, aber z.B. nicht mehr treu sind. In [AshLew95] sind einige Beispiele gegeben.

Def. 3.19 (mit der Verallgemeinerung auf beliebige kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppen, s. Kapitel 4) gibt an, wie die Maße auf den Räumen X'_S und $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ zustandekommen, die dann das Ashtekar-Lewandowski-Maß auf dem projektiven Limes $\overline{X'} \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induzieren. Man benutzt, daß X'_S und $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ isomorph zu $G^n/Ad(G)$ sind und definiert die Maße als Bildmaße des Haar-Maßes auf $G^n/Ad(G)$ unter den Bijektionen. Seien $S := \left\langle \tilde{\beta}_1, ..., \tilde{\beta}_n \right\rangle$, $S^{\phi^{-1}} := \left\langle (\phi^{-1} \circ \beta_1)^{\sim}, ..., (\phi^{-1} \circ \beta_n)^{\sim} \right\rangle = \left\langle \tilde{\beta}^{\phi^{-1}}, ..., \tilde{\beta}^{\phi^{-1}} \right\rangle$ und

$$
\begin{aligned}
\theta \quad &: \quad X'_S \to G^n/Ad(G), \quad [\hat{H}]_{Ad} \mapsto (\hat{H}(\tilde{\beta}_1), ..., \hat{H}(\tilde{\beta}_n)) \bmod Ad, \\
\theta^{\phi^{-1}} \quad &: \quad X'_{S^{\phi^{-1}}} \to G^n/Ad(G), \quad [\hat{H}']_{Ad} \mapsto (\hat{H}'(\tilde{\beta}^{\phi^{-1}}), ..., \hat{H}'(\tilde{\beta}^{\phi^{-1}})) \bmod Ad
\end{aligned}
$$

die Bijektionen. Dabei ist $\hat{H}$ ein Repräsentant von $[\hat{H}]_{Ad}$ und $\hat{H}'$ ein Repräsentant von $[\hat{H}]_{Ad}$. Sei μ_n das vom Haar-Maß herkommende Borel-Maß auf $G^n/Ad(G)$ (vgl. Def. 3.19). Dann ist das Maß μ_S auf X'_S definiert durch

$$\mu_S(B) := \mu_n(\theta(B))$$

für alle Mengen $B \subseteq X'_S$, so daß $\theta(B)$ eine Borelmenge ist. Entsprechend ist das Maß $\mu_{S^{\phi^{-1}}}$ auf $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ definiert durch

$$\mu_{S^{\phi^{-1}}}(C) := \mu_n(\theta^{\phi^{-1}}(C))$$

für alle Mengen $C \subseteq X'_{S^{\phi^{-1}}}$,so daß $\theta^{\phi^{-1}}(C)$ eine Borelmenge ist. Offensichtlich stehen die Maße μ_S und $\mu_{S^{\phi^{-1}}}$ in der folgenden Beziehung:

$$\mu_{S^{\phi^{-1}}}(C) = \mu_S(\theta^{-1} \circ \theta^{\phi^{-1}}(C)).$$

Zu zeigen ist, daß dies der Bedingung (4) entspricht, also soll gelten

Lemma 5.15: Die durch den analytischen Diffeomorphismus ϕ induzierte Bijektion $\check{\phi}'^{-1} : X'_{S^{\phi^{-1}}} \to X'_S$ ist gleich der Bijektion $\theta^{-1} \circ \theta^{\phi^{-1}} : X'_{S^{\phi^{-1}}} \to X'_S$.

Bew.: Wir hatten als Notation vereinbart $[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} = \check{\phi}'([\hat{H}]_{Ad})$, also $\check{\phi}'^{-1}([\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad}) = [\hat{H}]_{Ad}$, wobei $[\hat{H}]_{Ad} \in X'_S$ und $[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} \in X'_{S^{\phi^{-1}}}$. Nach (2) gilt $\hat{H}^{\phi^{-1}}(\tilde{\beta}^{\phi^{-1}}) = \hat{H}(\tilde{\beta})$. Man erhält

$$\begin{aligned} (\theta^{-1} \circ \theta^{\phi^{-1}})([\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad}) &= \theta^{-1}((\hat{H}^{\phi^{-1}}(\tilde{\beta}_1^{\phi^{-1}}), ..., \hat{H}^{\phi^{-1}}(\tilde{\beta}_n^{\phi^{-1}})) \bmod Ad) \\ &= \theta^{-1}((\hat{H}(\tilde{\beta}_1), ..., \hat{H}(\tilde{\beta}_n)) \bmod Ad) \\ &= [\hat{H}]_{Ad}, \end{aligned}$$

für alle $[\hat{H}^{\phi^{-1}}]_{Ad} \in X'_{S^{\phi^{-1}}}$, also gilt $\check{\phi}'^{-1} = \theta^{-1} \circ \theta^{\phi^{-1}}$.

□

Damit ist bewiesen:

Satz 5.16: Das Ashtekar-Lewandowski-Maß ist invariant gegenüber analytischen Diffeomorphismen $\phi : \Sigma \to \Sigma$. Durch $f^{\phi^{-1}} := (\pi_{S^{\phi^{-1}}})^*(\hat{\phi}(\tilde{f}))$ ist eine Zylinderfunktion auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ bezüglich $S_{\phi^{-1}}$ definiert, und es gilt

$$\int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} f d\mu := \int_{X'_S} \tilde{f} d\mu_S = \int_{X'_{S^{\phi^{-1}}}} \hat{\phi}(\tilde{f}) d\mu_{S^{\phi^{-1}}} = \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} f^{\phi^{-1}} d\mu.$$

Dabei wird $S^{\phi^{-1}}$ als zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}$ aufgefaßt und $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ als Unterraum von $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$. Dies ist nur im Fall eines analytischen Diffeomorphismus möglich, weil ein solcher Diffeomorphismus stückweise analytische Hoops in stückweise analytische Hoops abbildet.

□

Allgemein müssen Maße, die auf den Elementen X'_S des projektiven Spektrums $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S' \in L}$ (s. Kapitel 4.B.1) definiert sind und eine konsistente Familie von W-Maßen bilden (s. Def. 4.10), Bedingung (4) erfüllen, damit das von ihnen induzierte Maß auf dem projektiven Limes $\overline{X'} \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ invariant gegen analytische Diffeomorphismen ist. Wir haben gezeigt, daß das Ashtekar-Lewandowski-Maß diese Bedingung erfüllt.

5.3.2 Ausdehnung auf beliebige C^∞-Diffeomorphismen

Die Beweise in dieser Arbeit basieren durchgängig auf der Verwendung stückweise analytischer Hoops, wie in der Loop-Quantengravitation üblich. Die Bedeutung dieser Klasse von Hoops besteht darin, daß man für m beliebige solche Hoops die Loop-Zerlegung (Lemma 2.14) durchführen kann und $n \geq m$ unabhängige Loops erhält. Zu endlich vielen stückweise analytischen Hoops findet man also immer eine zahme Untergruppe, in der diese Hoops enthalten sind. Dann kann man Satz 2.17 (und als direkte Folgerung Lemma 3.8) anwenden, der zentral für alle weiteren Konstruktionen ist. Auch bei den projektiven Techniken spielen die zahmen Untergruppen eine wichtige Rolle. Man bildet den projektiven Limes bezüglich der Menge aller zahmen Untergruppen.

Die Möglichkeit, für stückweise analytische Hoops die Loop-Zerlegung durchzuführen, geht zurück auf die einfachen Überschneidungseigenschaften dieser Hoops, s. Anmerkung vor Lemma 2.14, Lemma 2.14 und Bem. 2.15. Beliebige C^∞-Hoops hingegen können sich auf sehr komplizierte Weise überschneiden, sogar in einer Cantor-Menge. Der Algorithmus der Loop-Zerlegung scheitert, wenn sich die Hoops unendlich oft überschneiden.

Die Hoops und Loops haben keine direkte physikalische Bedeutung als Weltlinien, Teilchenbahnen, Flußlinien oder ähnliches. (Dies gilt zumindest, solange man die Zustände der Theorie nicht besser verstanden hat.) Deswegen spricht aus physikalischer Sicht zunächst nichts gegen die Verwendung stückweise analytischer Hoops. Mathematisch gesehen besteht hier auch keine Schwierigkeit, da jede endlichdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit M einen reell-analytischen Atlas zuläßt.

Dennoch gibt es Gründe, die es wünschenswert machen, allgemeinere Fälle zu betrachten. Die Klasse von Hoops, die man verwendet, schränkt nämlich die Klasse von Diffeomorphismen ein, die man betrachten kann. Die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ zu stückweise analytischen Hoops wird nur durch analytische Diffeomorphismen in sich selbst abgebildet, wie man sich leicht überlegt. (Dies gilt, wenn man die ganze Hoop-Gruppe betrachtet.) Nur in diesem Fall wird auch ein Diffeomorphismus $\mathcal{HA} \to \mathcal{HA}$, $T_{\tilde{\alpha}} \mapsto T_{(\phi_{analyt.} \circ \alpha)^\sim}$ induziert, und man kann die übrigen Strukturen bis hin zum Ashtekar-Lewandowski-Maß μ und $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ wie gehabt konstruieren. Ein allgemeiner Diffeomorphismus ϕ bildet $T_{\tilde{\alpha}}$ jedoch in ein Element von $\mathcal{HA}^{\phi^{-1}} \neq \mathcal{HA}$ ab, weil $(\phi \circ \alpha)^\sim$ im allgemeinen nicht mehr stückweise analytisch ist. Dies macht die gewohnten Konstruktionen unmöglich, da man nicht mehr eine feste Algebra hat.

Die Invarianz gegenüber analytischen Diffeomorphismen ist deutlich schwächer als die gegenüber beliebigen C^∞-Diffeomorphismen. Wenn zwei analytische Diffeomorphismen auf einer nichtleeren offenen Menge übereinstimmen, sind sie aufgrund des Identitätssatzes für Potenzreihen schon identisch. Deshalb gibt es keinen "lokalen" analytischen Diffeomorphismus, der außerhalb eines Kompaktums mit der Identität übereinstimmt, weil ein solcher Diffeomorphismus gleich der Identität ist. Mit analytischen Diffeomorphismen kann man also keine Koordinatentransformationen beschreiben, die nur in einem Teil der Raumzeit wirken und die übrige Raumzeit invariant lassen. Für C^∞-Diffeomorphismen gibt es solche Einschränkungen nicht. Die Gruppe der C^∞-Diffeomorphismen ist die Symmetriegruppe der klassischen ART und sollte vermutlich auch in die Quantentheorie implementiert werden.

Mathematisch gesehen gibt es ebenfalls Gründe, das Schema zu erweitern. Die bisherige Form der Theorie ist insofern merkwürdig, als man einerseits differenzierbare (C^∞-)Strukturen wie Zusammenhänge, Eichtransformationen und Hauptfaserbündel hat, andererseits aber einen reell-analytischen Atlas auf der Mannigfaltigkeit und analytische Diffeomorphismen.

Es ist somit wünschenswert, sowohl C^∞-Diffeomorphismen zu betrachten als auch die grundlegenden Konstruktionen, die auf der Loop-Zerlegung und den zahmen Untergruppen basieren, beizubehalten. Wir schlagen im folgenden eine Erweiterung des Formalismus der Loop-Quantengravitation vor, die genau dies erlaubt. Im Anschluß vergleichen wir unseren Vorschlag mit einem anderen Ansatz aus der Literatur [BaeSaw97a, BaeSaw97b, LewThi99].

Man betrachtet jetzt einen beliebigen C^∞-Diffeomorphismus $\phi \in Diff(\Sigma)$. Falls ϕ nicht analytisch ist, ist $S^{\phi^{-1}} = \left\langle \tilde{\beta}_1^{\phi^{-1}}, ..., \tilde{\beta}_n^{\phi^{-1}} \right\rangle$ keine zahme Untergruppe von $\mathcal{HG}$ mehr, aber von $\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$. In diesem Fall ist $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ als Unterraum von $Hom(\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}, G)/Ad(G)$ aufzufassen. Auf $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ kann man gemäß Def. 3.19 ebenfalls ein Maß $\mu_{S^{\phi^{-1}}}$ definieren, daß vom Haar-Maß herkommt, weil auch $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ isomorph zu $G^n/Ad(G)$ ist. Die Räume $X'_{S^{\phi^{-1}}}$, die die Bilder der Räume X'_S des projektiven Spektrums $(X'_S, p'_{SS'})_{S,S' \in L}$ unter der Bijektion $\check{\phi} : X'_S \to X'_{S^{\phi^{-1}}}$ sind, bilden offensichtlich ebenfalls ein projektives Spektrum $(X'_{S^{\phi^{-1}}}, p'_{S^{\phi^{-1}}S'^{\phi^{-1}}})_{S^{\phi^{-1}},S'^{\phi^{-1}}\in L^{\phi^{-1}}}$, wobei $L^{\phi^{-1}}$die Menge der zahmen Untergruppen von $\mathcal{HG}^{\phi^{-1}}$ bezeichnet. Die Maße auf den $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ bilden offenbar eine konsistente Familie von W-Maßen und induzieren somit ein Maß $\mu^{\phi^{-1}}$ auf dem projektiven Limes $\overline{X'^{\phi^{-1}}} \simeq \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}$. Sei ϕ' ein weiterer Diffeomorphismus, so daß gilt $\phi' = \phi \circ \psi_{an.}$ für einen analytischen Diffeomorphismus $\psi_{an.}$. Dann kann man die Gruppen $\mathcal{HG}^{\phi}$ und $\mathcal{HG}^{\phi'}$ identifizieren. Die zahmen Untergruppen $S^{\phi^{-1}}$ und $S^{\phi'^{-1}}$ liegen beide in $L^{\phi^{-1}}$, und die Maße auf den Räumen $X'_{S^{\phi^{-1}}}$ und $X'_{S^{\phi'^{-1}}}$ erfüllen nach genau analogen Überlegungen die Bedingung (4) aus dem letzten Unterabschnitt. Daher ist das auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}$ induzierte Maß ebenfalls invariant gegen analytische Diffeomorphismen. Dieses Maß wird wieder als Ashtekar-Lewandowski- oder induziertes Haarsches Maß bezeichnet. Sei $f = (\pi_s)^*\tilde{f}$ eine Zylinderfunktion auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ bezüglich S, $\tilde{f} \in F_S$ und $\hat{\phi}(\tilde{f}) \in F_{S^{\phi^{-1}}}$. Wie oben gezeigt, ist $\hat{\phi} : F_S \to F_{S^{\phi^{-1}}}$ eine Bijektion. Durch $f^{\phi^{-1}} := (\pi_{S^{\phi^{-1}}})^*(\hat{\phi}(\tilde{f}))$ ist eine Zylinderfunktion auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}$ bezüglich $S_{\phi^{-1}}$ definiert. Durch ϕ wird also eine Bijektion induziert, die Zylinderfunktionen $f = (\pi_S)^*\tilde{f}$ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ in Zylinderfunktionen auf $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}$ überführt. Mit den selben Argumenten wie oben gilt

$$\int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} f d\mu := \int_{X'_S} \tilde{f} d\mu_S = \int_{X'_{S^{\phi^{-1}}}} \hat{\phi}(\tilde{f}) d\mu_{S^{\phi^{-1}}} = \int_{\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}} f^{\phi^{-1}} d\mu^{\phi^{-1}}.$$

Wir benutzen diese Überlegungen jetzt, um unseren Vorschlag zur Erweiterung des Hilbertraums der Theorie zu formulieren.

Sei $Diff_{analyt.}(\Sigma)$ die Gruppe der analytischen Diffeomorphismen von Σ. Seien $\phi, \psi \in Diff(\Sigma)$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $Diff(\Sigma)$ durch

$$\phi \sim \eta :\Leftrightarrow \exists \psi_{an.} \in Diff_{analyt.}(\Sigma) : \eta = \phi \circ \psi_{an.}$$

Sei $I := Diff(\Sigma)/\sim\; = Diff(\Sigma)/Diff_{analyt.}(\Sigma)$. Der Vorschlag besteht darin, statt wie bisher $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ die direkte Summe

$$\mathcal{H}'_p := \bigoplus_{\phi \in I} L_2(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}, d\mu^{\phi^{-1}})$$

als Prä-Hilbertraum der Theorie zu betrachten. Seien $f = \sum_{\eta \in I} f_\eta,\ g = \sum_{\phi \in I} g_\phi \in \mathcal{H}'_p$. Dabei sind jeweils nur endlich viele Summanden ungleich

Null. Man definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{H}'_p$ durch

$$< f, g >:= \sum_{\iota \in I} < f_\iota, g_\iota >_{\mathcal{H}^\iota}, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{H}^\iota = L_2(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\iota^{-1}}}, d\mu^{\iota^{-1}})$. Nur die Summanden, für die $f_\iota \neq 0$ und $g_\iota \neq 0$ gilt, tragen zum Skalarprodukt bei. Durch diese Definition des Skalarprodukts sind die in der direkten Summe auftauchenden Hilberträume $\mathcal{H}^\iota$ orthogonale Unterräume von $\mathcal{H}'_p$. Das Skalarprodukt $< .,. >_{\mathcal{H}^\iota}$ auf $\mathcal{H}^\iota$ ist das durch das Ashtekar-Lewandowski-Maß gegebene:

$$< f_\iota, g_\iota >_{\mathcal{H}^\iota} = \int_{\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\iota^{-1}}}} \overline{f_\iota} g_\iota d\mu^{\iota^{-1}}.$$

Man erhält den Hilbertraum $\mathcal{H}'$ der Theorie als Vervollständigung von $\mathcal{H}'_p$ bezüglich des Skalarprodukts (1) auf $\mathcal{H}'_p$.

Durch einen beliebigen C^∞-Diffeomorphismus ϕ wird eine Zylinderfunktion $f^{\eta^{-1}} \in L_2(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\eta^{-1}}}, d\mu^{\eta^{-1}}) \subset \mathcal{H}'$ in eine Zylinderfunktion $f^{\phi^{-1}\circ\eta^{-1}} \in L_2(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}\circ\eta^{-1}}}, d\mu^{\phi^{-1}\circ\eta^{-1}}) \subset \mathcal{H}'$ abgebildet, und die Integrale sind gleich. In diesem Rahmen hat man einerseits gute Kontrolle über die Zustände, weil sie sich ebenso leicht wie in Fall stückweise analytischer Kurven charakterisieren lassen, andererseits sind beliebige C^∞-Diffeomorphismen $\phi : \Sigma \to \Sigma$ zugelassen, deren Wirkung sich in der gezeigten Weise auf den Hilbertraum überträgt. Damit hat man in Bezug auf das Maß die echte Symmetriegruppe der klassischen Theorie implementiert. Natürlich sind die ϕ nach wie vor als räumliche Diffeomorphismen einer $3+1$-zerlegten Raumzeit M aufzufassen. Die volle Symmetriegruppe der ART ist die Diffeomorphismengruppe von M. Innerhalb des kanonischen $3+1$-Ansatzes braucht man aber zunächst die Invarianz gegen räumliche Diffeomorphismen.

In den Arbeiten [BaeSaw97a, BaeSaw97b, LewThi99] findet sich ein anderer Vorschlag zur Erweiterung des Formalismus. Es handelt sich um eine recht komplizierte Verallgemeinerung der Spin-Netzwerke, auf die wir nicht genauer eingehen können, da wir schon die Spin-Netzwerke nicht betrachtet haben. Es geht grob gesagt darum, statt analytischer Kanten solche stückweise C^∞-Kurven zuzulassen, die auf jedem Stück eine Immersion darstellen. Diese Kurven können sich unendlich oft überschneiden, weshalb die Loop-Zerlegung nicht angewendet werden kann. Trotzdem kann man zeigen [LewThi99], daß für solche Kurven $\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_n$ die Abbildung

$$\mathcal{A} \to G^n, \quad A \mapsto (H(\tilde{\gamma}_1, A), ..., H(\tilde{\gamma}_n, A))$$

surjektiv ist, falls G eine halbeinfache kompakte Lie-Gruppe ist. Dies ermöglicht es, die Spin-Netzwerke durch sogenannte Spin-Webs zu ersetzen, deren Kanten stückweise C^∞-Kurven sind. Die Menge der Webs ist halbgeordnet [BaeSaw97a] und dient als Indexmenge eines geeigneten projektiven Spektrums. Damit kann man einen wesentlich größeren Raum $\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})_{C^\infty}}$ und einen Hilbertraum darüber konstruieren, der ein gegen C^∞-Diffeomorphismen invariantes Maß trägt. Bei geeigneter Einschränkung erhält man alle Strukturen des Falls zu stückweise analytischen Hoops zurück. Es zeigt sich allerdings, daß die Spin-Web-Zustände mit nicht-analytischen Kanten schwer zu behandeln sind [Bae97b]. Es ist auch nicht möglich, auf einfache Art eine Orthonormalbasis des neuen, größeren Hilbertraums aus den Spin-Web-Zuständen zu konstruieren.

Im Vergleich zu unserem Vorschlag hat dieser Ansatz den klaren Vorteil, daß eine sehr viel größere Klasse von Kurven in die Konstruktion eingeht. Dadurch gibt es auch mehr Zustände in dieser Theorie. Die Konstruktion des Hilbertraums scheint auch direkter zu sein, allerdings ist die Bildung des projektiven Limes bezüglich der Menge aller Webs eine sehr unübersichtliche Prozedur. Auf jeden Fall sind alle Hilberträume, die auftreten, nicht separabel. (Dies gilt schon im Fall stückweise analytischer Hoops und zahmer Untergruppen).

Da aber gerade die Behandlung der neu in die Theorie gekommenen Zustände, der Spin-Web-Zustände mit nicht-analytischen Kanten, Schwierigkeiten macht, fragt sich, ob diese Art der Betrachtung wirklich einen Vorteil bringt. In unserem Ansatz gibt es solche Schwierigkeiten nicht, da die Zustände alle auf Hoops basieren, die diffeomorph zu stückweise analytischen Hoops sind. Deswegen hat man angenehme Überschneidungseigenschaften und kann die Loop-Zerlegung anwenden. Es ist leicht, eine Orthonormalbasis des von uns vorgeschlagenen Hilbertraums anzugeben. Jeder der Teilräume $\mathcal{H}^\phi = L_2(\overline{(\mathcal{A}/\mathcal{G})^{\phi^{-1}}}, d\mu^{\phi^{-1}})$ in der direkten Summe hat eine Orthonormalbasis aus Spin-Netzwerk-Zuständen [Bae96a, Bae96b, ALMMT95]. Da die Teilräume $\mathcal{H}^\phi$ orthogonal sind, nimmt man einfach alle diese Orthonormalbasen zusammen, um eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $\mathcal{H}'$ zu erhalten.

Solange die Zustände in diffeomorphismeninvarianten Theorien nicht besser verstanden sind, ist keine abschließende Beurteilung der beiden Ansätze möglich. Es ist nicht klar, welche Bedeutung die Hoops und die Kanten eines Spin-Netzwerks oder -Webs haben und ob man solche Kanten zulassen sollte, die sich unendlich oft überschneiden. In gewissem Sinne ist der von uns gemachte Vorschlag ein Kompromiß, durch den auf einfache Weise C^∞-Diffeomorphismen betrachtet werden können, bei dem aber die Zustände noch recht übersichtlich charakterisierbar sind.

6 Fastperiodische Funktionen und die kompakte Gruppe $\mathcal{M}(\mathcal{HG})$

In diesem Kapitel stellen wir einen in der Literatur bekannten Beweis vor, daß man zu jeder topologischen Gruppe H eine *kompakte* Gruppe $\mathcal{M}_H$ findet, die H als dichten Teil enthält [Loo53]. Die Gruppe $\mathcal{M}_H$ wurde in [AshIsh92] erwähnt, aber weder explizit konstruiert noch weiter untersucht. Wir wenden die Ergebnisse zur kompakten Gruppe $\mathcal{M}_H$ erstmalig auf den in dieser Arbeit vorgestellten kinematischen Rahmen zur Quantisierung diffeomorphismeninvarianter Eichtheorien an.

$\mathcal{M}_H$ ergibt sich als Spektrum der C^*-Algebra der fastperiodischen Funktionen auf H. Wählt man für H die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$, so liefert die Untersuchung interessante Beziehungen zu den schon bekannten Ergebnissen. (Wir beschränken die Betrachtung jetzt wieder auf stückweise analytische Hoops.) Insbesondere faktorisiert jeder Homomorphismus von $\mathcal{HG}$ in eine Eichgruppe $G \subseteq U(n)$ über $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$. Dies ermöglicht einen neuen, klareren Beweis dafür, daß man einen Homöomorphismus von $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ hat. Wir werden dieses und andere Ergebnisse in der kommenden Veröffentlichung [deGDör00] beweisen. In diesem Kapitel werden nur die wesentlichen Grundlagen dargestellt und einige weiterführende Ergebnisse erwähnt. So sind z.B. die Wilson-Loop-Funktionen in einer geeigneten Betrachtungsweise fastperiodische Funktionen.

Da $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ kompakt ist, hat man ein Haar-Maß auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$. Wir zeigen, daß dieses Maß invariant gegen analytische Diffeomorphismen ist. Eine interessante offene Frage ist, ob dieses diffeomorphismeninvariante Maß auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ ein diffeomorphismeninvariantes Maß auf $Hom_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)/Ad(G) \simeq Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$, also auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induziert. Falls dies zutrifft, bleibt die Frage, ob man wieder das Ashtekar-Lewandowski-Maß erhält oder nicht.

6.1 Grundlagen

Die fastperiodischen Funktionen werden vorgestellt. Es wird gezeigt, daß diese Funktionen eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement bilden. Das Spektrum $\mathcal{M}_H$ dieser Algebra enthält die Gruppe H als dichten Teil. $\mathcal{M}_H$ ist kompakt in der Gelfandtopologie und kann selbst als Gruppe aufgefaßt werden.

Def. 6.1: Sei H eine Gruppe, E eine nichtleere Menge und $f : H \to E$ eine Funktion. Für ein festes $s \in H$ sei f_s die Funktion auf H, die durch

$$f_s(x) = f(sx) \quad \forall x \in H$$

definiert ist. f_s heißt die *Linksverschobene von f um s*.

Def 6.2: Eine *links-fastperiodische Funktion* auf einer topologischen Gruppe H ist eine beschränkte stetige Funktion $f : H \to \mathbb{C}$, für die die Menge $S_f := \{f_s \mid s \in H\}$ der Linksverschobenen von f totalbeschränkt ist bezüglich der Supremumsnorm auf $C_b(H)$, dem Raum der beschränkten stetigen komplexwertigen Funktionen auf H.

Da $C_b(H)$ mit der Supremumsnorm als metrischer Raum betrachtet werden kann, ist die Totalbeschränktheit von S_f äquivalent zur Kompaktheit von $\overline{S_f} \subseteq C_b(H)$. Sei $\mathcal{F}(H)$ die Menge der links-fastperiodischen Funktionen auf H.

Man kann analog den Begriff der rechts-fastperiodischen Funktion definieren. Die beiden Begriffe stimmen überein, s. [HewRos63]. Wir sprechen deshalb fortan von *fastperiodischen* Funktionen.

Lemma 6.3: $\mathcal{F}(H) \subseteq C_b(H)$ ist eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement.

Bew.: $\mathcal{F}(H)$ ist eine Unteralgebra: Seien $f, g \in \mathcal{F}(H)$. Mit $\overline{S_f}$ und $\overline{S_g}$ ist auch $\overline{S_f} \times \overline{S_g}$ kompakt. Da in $C_b(H)$ die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} (u,v) & \mapsto & u+v, \\ (u,v) & \mapsto & uv \end{array}$$

von $C_b(H)\times C_b(H)$ nach $C_b(H)$ stetig sind, sind auch die Mengen $\overline{S_f}+\overline{S_g}$ und $\overline{S_f}\cdot\overline{S_g}$ kompakt. Wegen $S_{f+g} \subseteq S_f + S_g \subseteq \overline{S_f}+\overline{S_g}$ und $S_{fg} \subseteq S_f \cdot S_g \subseteq \overline{S_f}\cdot\overline{S_g}$ sind somit auch $\overline{S_{f+g}}$ und $\overline{S_{fg}}$ kompakt. Also gilt $f+g,\ fg \in \mathcal{F}(H)$.

Ist $\alpha \in \mathbb{C},\ f \in \mathcal{F}(H)$, so gilt

$$S_{\alpha f} = \alpha S_f,$$

und somit ist mit $\overline{S_f}$ auch $\overline{S_{\alpha f}}$ kompakt, d.h. es gilt $\alpha f \in \mathcal{F}(H)$.

$\mathcal{F}(H)$ ist abgeschlossen: Sei $(f^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{F}(H)$, die gleichmäßig gegen $f \in C_b(H)$ konvergiert. Dann gilt für alle $x \in H$

$$\begin{aligned}
|f_x^{(n)} - f_x|_\infty &= \sup_{y\in H} |f_x^{(n)}(y) - f_x(y)| \\
&= \sup_{y\in H} |f^{(n)}(xy) - f(xy)| \\
&= |f^{(n)} - f|_\infty,
\end{aligned}$$

also konvergiert $f_x^{(n)} \to f_x$ gleichmäßig und die Konvergenz dieser Funktionenfolgen ist auch gleichmäßig in $x \in H$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle n so, daß $|f^{(n)} - f|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ ist, und wähle $x_1, ..., x_r$ so, daß $\{f_{x_i}^{(n)} \mid i = 1, ..., r\}$ $\frac{\varepsilon}{3}$-dicht in $S_{f^{(n)}}$ ist. Dann gilt für $g \in S_f,\ g = f_z$ mit geeignetem $i \leq r$:

$$\begin{aligned}
|f_z - f_{x_i}|_\infty &\leq |f_z - f_z^{(n)}|_\infty + |f_z^{(n)} - f_{x_i}^{(n)}|_\infty + |f_{x_i}^{(n)} - f_{x_i}|_\infty \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist $\{f_{x_i} \mid i \leq r\}$ ε-dicht in S_f, d.h. S_f ist totalbeschränkt. Somit ist $\mathcal{F}(H)$ eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_b(H)$.

Ferner ist klar, daß mit $f \in \mathcal{F}(H)$ auch $\overline{f}$ zu $\mathcal{F}(H)$ gehört. Die konstante Funktion $c(x) = 1\ \forall x \in H$ ist das Einselement in $\mathcal{F}(H)$.

$\square$

Nach dem Satz von Gelfand gibt es zu der kommutativen C^*-Algebra $\mathcal{F}(H)$ einen kompakten Raum $\mathcal{M}_H$, so daß $\mathcal{F}(H)$ isometrisch isomorph zu $C(\mathcal{M}_H)$ ist. $\mathcal{M}_H$ ist das Gelfand-Spektrum von $\mathcal{F}(H)$.

Lemma 6.4: Man hat einen stetigen Homomorphismus α von der Gruppe H auf einen dichten Unterraum von $\mathcal{M}_H$.

Bew.: Ein $x \in H$ induziert einen Charakter $f \mapsto f(x)$ von $\mathcal{F}(H)$ und definiert damit einen Punkt von $\mathcal{M}_H$: sei $f \in \mathcal{F}(H)$. f induziert $\check{f} \in C(\mathcal{M}_H)$ durch

$$\check{f}(\tau) := \tau(f),$$

wobei $\tau : \mathcal{F}(H) \to \mathbb{C}$ ein Element von $\mathcal{M}_H$ ist. Eine Subbasis der schwachen (Gelfandschen) Topologie auf $\mathcal{M}_H$ ist gegeben durch die Mengen $\{\tau \in$

$\mathcal{M}_H \mid |\check{f}(\tau) - k| < \varepsilon\}$ für $k \in \mathbb{C}$ und $f \in \mathcal{F}(H)$, $\varepsilon > 0$. Sei $\alpha : H \to \mathcal{M}_H$ die Abbildung $x \mapsto \alpha(x)$ mit $\alpha(x)(f) = f(x)$, wobei $f \in \mathcal{F}(H)$ ist. Die Menge

$$\alpha^{-1}\{\tau \in \mathcal{M}_H \mid |\check{f}(\tau) - k| < \varepsilon\} = \{x \in H \mid |f(x) - k| < \varepsilon\}$$

ist offen in H, weil f stetig ist. Daraus folgt, daß $\alpha : H \to \mathcal{M}_H$ stetig ist.

Angenommen, $\alpha(H)$ wäre nicht dicht in $\mathcal{M}_H$. Dann wäre $\overline{\alpha(H)} \neq \mathcal{M}_H$, d.h. es gäbe ein $\varphi \in C(\mathcal{M}_H)$, $\varphi \neq 0$ und $\varphi(\alpha(H)) = 0$. Man hat $\varphi = \check{f}$ für genau ein $f \in \mathcal{F}(H)$, weil $\mathcal{F}(H) \simeq C(\mathcal{M}_H)$ ist. Daraus folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in H$, also $f = 0$, woraus wiederum folgt $\varphi = 0$. Das ist ein Widerspruch.

□

Man kann zeigen [Loo53], daß die Gruppenoperationen von H, betrachtet als Untermenge von $\mathcal{M}_H$, *gleichmäßig* stetig in der Gelfandtopologie von $\mathcal{M}_H$ sind und sich daher auf ganz $\mathcal{M}_H$ erweitern lassen. Dadurch erhält $\mathcal{M}_H$ eine Gruppenstruktur. Das zentrale Ergebnis lautet:

Satz 6.5: Zu jeder topologischen Gruppe H gibt es eine kompakte Gruppe $\mathcal{M}_H$ und einen stetigen Homomorphismus α von H auf eine dichte Untergruppe von $\mathcal{M}_H$, so daß für das Paar $(\mathcal{M}_H, \alpha)$ die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist: Eine stetige Funktion $f : H \to \mathbb{C}$ ist genau dann fastperiodisch, wenn es eine stetige Funktion $g : \mathcal{M}_H \to \mathbb{C}$ gibt, so daß folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{M}_H \arrow[d, "g"] \\
 & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Da $\mathcal{M}_H$ kompakt ist, ist g durch f eindeutig bestimmt. Wir nennen $\mathcal{M}_H$ *die zu H assoziierte kompakte Gruppe.*

Bew.: Siehe [Loo53], Kapitel 41.

□

6.2 Verbindung zum bisher Dargestellten und neue Ergebnisse

In diesem Abschnitt referieren wir einige Ergebnisse. Beweise finden sich in der kommenden Veröffentlichung [deGDör00]. Bei der Anwendung auf den in dieser Arbeit vorgestellten physikalischen Rahmen wird als Gruppe H die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ gewählt.

Es gilt die universelle Eigenschaft, daß jeder Homomorphismus von H auf eine kompakte Gruppe G über $\mathcal{M}_H$ faktorisiert und genau einen stetigen Homomorphismus von $\mathcal{M}_H$ nach H induziert.

In der Anwendung auf unsere physikalische Situation wählt man für H die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$, versehen mit einer Topologie (siehe z.B. [Barr90]). Sei G wie vorher eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe einer unitären Gruppe $U(n)$. Physikalisch gesehen ist G die Eichgruppe der Theorie. Man erhält:

Lemma 6.6: Sei $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ die zu $\mathcal{HG}$ assoziierte kompakte Gruppe. Dann gibt es eine kanonische Bijektion von $Hom(\mathcal{HG}, G)$ auf die Menge $Hom_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)$ der stetigen Homomorphismen $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \to G$.

Bew.: Sei $\varphi \in Hom(\mathcal{HG}, G)$. Dann gibt es (wegen der universellen Eigenschaft) genau einen stetigen Homomorphismus

$$\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \to G,$$

so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{HG} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \arrow[d, "\mathcal{M}(\varphi)"] \\
 & G
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Daraus ergibt sich die Bijektion $\varphi \mapsto \mathcal{M}(\varphi)$ von $Hom(\mathcal{HG}, G)$ auf $Hom_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)$. Da $\mathcal{M}(\varphi)$ durch eine universelle Eigenschaft definiert ist, ist diese Bijektion kanonisch.

$\Box$

Die Wilson-Loop-Funktionen tauchen in dem angedeuteten neuen Rahmen folgendermaßen auf: man definiert zu einer Wilson-Loop-Funktion $T_{\tilde{\alpha}} : \mathcal{A}/\mathcal{G} \to \mathbb{C}$ eine Funktion $t_{\tilde{A}} : \mathcal{HG} \to \mathbb{C}$ durch

$$t_{\tilde{A}}(\tilde{\alpha}) := T_{\tilde{\alpha}}(\tilde{A}),$$

wobei $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$ und $\tilde{A} \in \mathcal{A}/\mathcal{G}$. Statt wie bisher den Zusammenhang $\tilde{A}$ als Argument und den Hoop $\tilde{\alpha}$ als Index zu betrachten, tauscht man gerade diese Rollen und erhält eine Funktion auf der Gruppe $\mathcal{HG}$. Wie man sich leicht überlegt, sind die Funktionen $t_{\tilde{A}}$ fastperiodisch. Man erhält also Funktionen

$$t_{\tilde{A}} : \mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \to \mathbb{C}.$$

Man kann weiter zeigen, daß $Hom(\mathcal{HG}, G) \subseteq G^{\mathcal{HG}}$ kompakt in der Produkttopologie ist. $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$ ist kompakt in der durch die kanonische Projektion

$$\pi : Hom(\mathcal{HG}, G) \to Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$$

definierten Quotiententopologie.

Aus Lemma 6.6 folgt auch, daß

$$Hom_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)/Ad(G) \simeq Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$$

gilt. Da $Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G) \simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ der Quantenkonfigurationsraum der Theorie ist, hat man eine leicht veränderte Sichtweise auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ gewonnen. Wir benutzen diese Form unten bei den Überlegungen zum Haar-Maß auf

$\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$.

Diese und weitere Ergebnisse fließen in einen neuen, kürzeren Beweis ein, der zeigt, daß man einen Homöomorphismus

$$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} = Spec(C^*(\mathcal{HA})) \to Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$$

hat [deGDör00]. Dieser neue Beweis gelingt ohne Verwendung der Mandelstam-Identitäten, ohne Rekonstruktions-Theoreme wie in Satz 3.7 und ohne projektive Techniken, also ohne Rückgriff auf endlichdimensionale Objekte.

6.3 Das Haar-Maß auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$

Zum Abschluß dieses Kapitels betrachten wir das Haar-Maß ξ auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$. Wir zeigen, daß dieses Maß invariant gegen analytische Diffeomorphismen ist und diskutieren mögliche Verbindungen zum Ashtekar-Lewandowski-Maß.

Lemma 6.7: Das Haar-Maß ξ auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ ist invariant gegen analytische Diffeomorphismen $\phi : \Sigma \to \Sigma$.

Bew.: Sei wie gehabt $Diff_{analyt.}(\Sigma)$ die Gruppe der analytischen Diffeomorphismen von Σ. $Diff(\Sigma)_{analyt.}$ operiert durch Isomorphismen auf $\mathcal{HG}$: sei $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. Dann hat man

$$\tilde{\phi} : \mathcal{HG} \to \mathcal{HG}, \quad \tilde{\alpha} \mapsto (\phi \circ \alpha)^{\sim},$$

und es gilt $\tilde{\phi}(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) = (\tilde{\phi}(\tilde{\alpha}))(\tilde{\phi}(\tilde{\beta}))$. Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{HG} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathcal{HG} \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \\
\mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \arrow[urr, "\mathcal{M}(\phi)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $\alpha : \mathcal{HG} \to \mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ nicht zu verwechseln mit dem Hoop $\tilde{\alpha} \in \mathcal{HG}$. Die Abbildung $\alpha \circ \tilde{\phi} : \mathcal{HG} \to \mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ ist ein Homomorphismus von $\mathcal{HG}$ auf die kompakte Gruppe $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ und induziert somit einen stetigen Homomorphismus $\mathcal{M}(\phi) : \mathcal{M}_{\mathcal{HG}} \to \mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ (unterer Weg, dies ist dann natürlich ein Automorphismus von $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$). Damit ist gezeigt: $Diff_{analyt.}(\Sigma)$ induziert stetige Automorphismen von $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$. Seien $\phi, \psi \in Diff_{analyt.}(\Sigma)$. Dann gilt für die Abbildungen $\mathcal{M}(\phi\psi) = \mathcal{M}(\phi)\mathcal{M}(\psi)$, also

$$\mathcal{M} : Diff_{analyt.}(\Sigma) \to Aut_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}), \quad \phi \mapsto \mathcal{M}(\phi).$$

Es ist eine bekannte Tatsache, daß das Haar-Maß einer kompakten Gruppe invariant gegen solche Automorphismen der Gruppe ist. Sei $f \in C(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}})$. Dann gilt

$$\int_{\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}} (f \circ \mathcal{M}(\phi))(\xi) d\xi = \int_{\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}} f(\xi) d\xi.$$

$\square$

Dieses diffeomorphismeninvariante Maß ist ein anderes Objekt als das Ashtekar-Lewandowski-Maß, das vom Haar-Maß auf der Eichgruppe G induziert wird.

In [AshLew94] gibt es einige Betrachtungen, warum man die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ und den Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ als duale Objekte betrachten sollte. Wir haben uns in dieser Arbeit fast ausschließlich mit der Zusammenhangsdarstellung von diffeomorphismeninvarianten Eichtheorien beschäftigt und kaum mit der Loop-Darstellung. Die Verbindung zwischen beiden ist durch die sogenannten Loop-Transformation gegeben. Sei $\psi(\overline{A}) \in L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ ein Zustand in der Loop-Darstellung. Die Loop-Transformation übersetzt den Zustand $\psi(\overline{A})$ in einen Zustand $\Psi(\tilde{\alpha})$ auf der Hoop-Gruppe:

$$\Psi(\tilde{\alpha}) := \int_{\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}} \overline{\hat{T}_{\tilde{\alpha}}(\overline{A})} \psi(\overline{A}) d\mu = < \hat{T}_{\tilde{\alpha}}, \psi >,$$

wobei $\hat{T}_{\tilde{\alpha}}(\overline{A})$ ist die Gelfand-Transformierte der Wilson-Loop-Funktion $T_{\tilde{\alpha}}$ ist und $< .,. >$ das Skalarprodukt in $L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$. Hierbei werden die dualen Rollen von $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ und $\mathcal{HG}$ deutlich. Die Loop-Transformation ist als Analogon zur Fourier-Transformation zu sehen, die Orts- und Impulsdarstellung in der gewöhnlichen Quantenmechanik verbindet. Ein wichtiger Unterschied ist, daß der Loop-Transformation ein nichtlinearer Quantenkonfigurationsraum, nämlich $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ zugrunde liegt.

Im Licht der hier vorgestellten Ergebnisse liegt allerdings eher die Vermutung nahe, $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ und $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ seien als dual anzusehen. Beides sind kompakte Räume, die diffeomorphismeninvariante Maße tragen. Es ergibt sich die

Frage, ob das Haar-Maß auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ ein diffeomorphismeninvariantes Maß auf dem kompakten Raum $Hom(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)/Ad(G)$ oder auf $Hom_c(\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}, G)/Ad(G)$ $\simeq \overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ induziert. Falls ja, bleibt zu klären, ob dieses Maß wieder das Ashtekar-Lewandowski-Maß ist oder in welcher Beziehung es dazu steht.

Ein besseres Verständnis dieses offenen Problems wird vermutlich auch dazu führen, daß man die inverse Loop-Transformation, die Zustände auf $\mathcal{HG}$ oder $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ in Zustände auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ übersetzt, besser versteht. Es gibt hierzu Ergebnisse [Thi96], die aber keinen Bezug auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ und ein Maß darauf nehmen. Die Existenz eines diffeomorphismeninvarianten Maßes auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ drängt den Verdacht auf, daß dieses Maß eine Rolle bei der Definition der inversen Loop-Transformation spielen sollte.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben in dieser Arbeit die Kinematik diffeomorphismeninvarianter quantisierter Eichtheorien vorgestellt. Die Techniken dazu stammen aus der Loop-Quantengravitation. Dieser vitale Zweig der physikalischen Grundlagenforschung hat eine Fülle neuer Methoden und Ansätze hervorgebracht, deren Anwendungsbereich über die Formulierung einer Theorie der Quantengravitation hinausgeht. Die vorgestellten Ergebnisse nehmen keinen Bezug auf spezielle Eigenschaften der Loop-Quantengravitation wie z.B. das Vorhandensein von Constraints. Stattdessen basiert der gesamte Ansatz auf Strukturen, die der Loop-Quantengravitation und den Yang-Mills-Theorien gemeinsam sind. Dies ist vor allem der klassische Konfigurationsraum $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, der Raum der Eichäquivalenzklassen von Zusammenhängen auf einem Hauptfaserbündel $P(\Sigma, G)$, wobei G die Eichgruppe ist.

Als Algebra der klassischen Konfigurationsvariablen wurde die C^*-Vervollständigung $C^*(\mathcal{HA})$ der Holonomie-Algebra $\mathcal{HA}$, die von den Wilson-Loop-Funktionen gebildet wird, gewählt. Die Gelfandsche Darstellungstheorie führte auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, das Spektrum von $C^*(\mathcal{HA})$, als Quantenkonfigurationsraum. Der Hilbertraum der Theorie wurde als $\mathcal{H} := L_2(\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}, d\mu)$ identifiziert. Wir haben den Raum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ausführlich untersucht und als zentrales Ergebnis eine Bijektion

$$\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}} \to Hom(\mathcal{HG}, G)/Ad(G)$$

erhalten. G ist die Eichgruppe der Theorie und kann jede kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe sein. Damit sind alle in der Physik üblichen Eichgruppen, die $U(n)$ und $SU(n)$, abgedeckt. Wir haben unter Rückgriff auf endlichdimensionale Strukturen (projektive Techniken) ein diffeomorphismeninvariantes Maß μ auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ konstruiert, das Ashtekar-Lewandowski-Maß. Damit konnten das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ festgelegt und die Zustände der Theorie charakterisiert werden. Verbindungen dieses Ansatzes zur Gittertheorie wurden erläutert.

Die Diffeomorphismeninvarianz des Ashtekar-Lewandowski-Maßes wurde nachgewiesen. Außerdem haben wir einen neuen Vorschlag zur Ausdehnung des Formalismus gemacht, der es erlaubt, beliebige C^∞-Diffeomorphismen statt nur analytische Diffeomorphismen einzubeziehen. Schließlich haben wir eine kompakte Gruppe $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ vorgestellt, die die Hoop-Gruppe $\mathcal{HG}$ als dichten Teil enthält und selbst ein kanonisches diffeomorphismeninvariantes Maß trägt, nämlich das Haar-Maß.

Die zu den Wilson-Loop-Funktionen gehörigen Impulsvariablen, die sogenannten Strip-Operatoren, haben wir in dieser Arbeit nicht betrachtet. Ihre Implementation als wesentlich selbstadjungierte, dicht definierte Operatoren auf dem Quantenkonfigurationsraum $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ ist in [ALMMT95] beschrieben. Man benötigt gewisse differentialgeometrische Strukturen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$, z.B. Vektorfelder, die von entsprechenden Strukturen auf den Teilräumen $X'_S \simeq G^n/Ad(G)$ des projektiven Spektrums induziert werden, s. [AshLew94b].

Es bleiben einige interessante offene Probleme. Wie in Kapitel 6 dargelegt, führt eine weitere Untersuchung der kompakten Gruppe $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ und des Haar-Maßes ξ darauf womöglich zu einem besseren Verständnis der Loop-Transformation und ihrer Inversen. Gelänge dies, so wäre eine systematische Betrachtung der Zustände als Funktionen auf $\mathcal{M}_{\mathcal{HG}}$ (in der Loop-Darstellung) statt als Funktionen auf $\overline{\mathcal{A}/\mathcal{G}}$ (in der Zusammenhangs-Darstellung) möglich. Bisherige Ergebnisse zur inversen Loop-Transformation [Thi96] könnten vermutlich leichter gedeutet werden. Wir hoffen, in der kommenden Veröffentlichung [deGDör00] etwas zur Klärung dieser Fragen beitragen zu können.

Eine zentrale offene Frage ist die nach der Bedeutung der Zustände. Welche Rolle spielen die zahmen Untergruppen, auf denen die Zustände basieren? Welche Art von Kurven mit welchen Überschneidungseigenschaften sollte man in der Theorie berücksichtigen? Erst nach Beantwortung dieser Fragen lassen sich auch die Erweiterungen des Formalismus zur Einbeziehung von C^∞-Diffeomorphismen beurteilen.

Wenn man den vorgestellten Rahmen als Basis einer Quantisierung der Yang-Mills-Theorie unter Berücksichtigung der Diffeomorphismeninvarianz betrachten will, ist natürlich die Einbeziehung von Materie ein wichtiger Punkt. Für die gewöhnliche Yang-Mills-Theorie in zwei Dimensionen mit Wilson-Loop-Funktionen als Konfiguarationsvariablen gibt es bereits einige interessante Resultate [ALMMT94]. Auch in der Loop-Quantengravitation ist die Materie-Ankopplung von Interesse, um Anschluß an die bekannten Methoden und Ergebnisse aus der Quantenfeldtheorie finden zu können. Ansätze hierzu finden sich in [BaeKra97, Thi97].

Es gibt eine Vielzahl weiterer offener Fragen, die über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. Dazu gehören alle Fragen über die Dynamik der Theorien, denen der vorgestellte kinematische Rahmen zugrunde liegt. Die Dynamik diffeomorphismeninvarianter Theorien ist typischerweise durch Constraints gegeben. Dadurch entstehen konzeptionelle Probleme, insbesondere das Problem der Zeit, wie in der Einleitung erläutert. Außerdem ist die Betrachtung des klassischen Limes von großer Wichtigkeit für die weitere Entwicklung der Theorie. Es bleibt heute offen, ob man jeweils die richtige klassische Theorie wiedergewinnen kann.

8 Referenzen

[ACM98] J. Ambjorn, M. Carfora, A. Marzuoli, *The Geometry of Dynamical Triangulations* (Springer, Berlin, 1998)

[ACZ98] A. Ashtekar, A. Corichi, J. A. Zapata, "Quantum Theory of Geometry III: Non-commutativity of Riemannian Structures", gr-qc/9806041 v2

[ADM62] R. Arnowitt, S. Deser, C. S. Misner, "The dynamics of general relativity", in *Gravitation: an Introduction to Current Research*, 227, L. Witten (Ed.) (Wiley, New York, 1962)

[ALMMT94] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão, T. Thiemann, "A manifestly gauge invariant approach to quantum theories of gauge fields", in *Geometry of constrained dynamical systems*, J. Charap (Ed.) (Cambridge University Press, Cambridge, 1994)

[ALMMT95] A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourão, T. Thiemann, "Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom", J. Math. Phys. **36**, 6456 (1995)

[ArnGup00] M. Arnsdorf, S. Gupta, "Loop Quantum Gravity on Non-Compact Spaces", gr-qc/9909053 v2

[ARS92] A. Ashtekar, C. Rovelli, L. Smolin, "Weaving a classical geometry with quantum threads", Phys. Rev. Lett. **69**, 237 (1992)

[Ash86] A. Ashtekar, "New variables for classical and quantum gravity", Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986)

[Ash87] A. Ashtekar, "New Hamiltonian formulation of general relativity", Phys. Rev. **D36**, 1587 (1987)

[AshIsh92] A. Ashtekar, C. J. Isham, "Representations of the holonomy algebras of gravity and non-Abelian gauge theories", Class. Quantum Grav. **9**, 1433 (1992)

[AshLew94] A. Ashtekar, J. Lewandowski, "Representation Theory of Analytic Holonomy C^*-Algebras", in *Knots and quantum gravity*, J. Baez (Ed.) (Oxford University Press, Oxford, 1994)

[AshLew94b] A. Ashtekar, J. Lewandowski, "Differential geometry on the space of connections via graphs and projective limits", J. Geom. Phys. **17**, 191 (1995)

[AshLew95] A. Ashtekar, J. Lewandowski, "Projective Techniques and Functional Integration for Gauge Theories", J. Math. Phys. **36**, 2170 (1995)

[AshLew97] A. Ashtekar, J. Lewandowski, "Quantum Theory of Geometry I: Area Operators", Class. Quantum Grav. **14**, A55 (1997)

[AshTat91] A. Ashtekar, *Non-Perturbative Canonical Gravity* (Notes prepared in collaboration with Ranjeet S. Tate) (World Scientific Books, Singa-

pore, 1991)
[Bae93] J.C. Baez, "Diffeomorphism-invariant Generalized Measures on the Space of Connections Modulo Gauge Transformations", in *Proceedings of the Conference on Quantum Topology*, L. Crane, D. Yetter (Eds.), 213 (World Scientific, Singapore, 1994)
[Bae96a] J. C. Baez, "Spin Networks in Gauge Theory", Adv. Math. **117**, 253 (1996)
[Bae96b] J. C. Baez, "Spin Networks in Nonperturbative Quantum Gravity", in *The Interface of Knots and Physics*, L. H. Kauffman (Ed.) (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996)
[BaeKra97] J. C. Baez, K. Krasnov, "Quantization of Diffeomorphism-Invariant Theories with Fermions", hep-th/9703112
[BaeMun94] J. C. Baez, J. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity* (World Scientific Books, Singapore, 1994)
[BaeSaw97a] J. C. Baez, S. Sawin, "Functional Integration on Spaces of Connections", Jour. Funct. Analysis **150**, 1 (1997)
[BaeSaw97b] J. C. Baez, S. Sawin, "Diffeomorphism-Invariant Spin Network States", gr-qc/9708005 v2 (1997)
[Barr91] J. W. Barrett, "Holonomy and Path Structures in General Relativity and Yang-Mills Theory", Int. J. Theor. Phys. **30**, 1171 (1991)
[Bar95] F. Barbero, "Reality Conditions and Ashtekar Variables: a Different Perspective", Phys. Rev. **D51**, 5498 (1995), "Real Ashtekar Variables for Lorentzian Signature Space-times", Phys. Rev. **D51**, 5507 (1995)
[CorKra97] A. Corichi, K. Krasnov, "Loop quantization of Maxwell theory and electric charge quantization", gr-qc/9703177
[deGDör00] H. F. de Groote, A. Döring, "New results on diffeomorphism invariant quantum gauge theories", in Vorbereitung
[Des99] S. Deser, "Infinities in Quantum Gravities", gr-qc/9911073
[DGGP99a] C. Di Bartolo, R. Gambini, J. Griego, J. Pullin, "Consistent canonical quantization of general relativity in the space of Vassiliev knot invariants", gr-qc/9909063
[DGGP99b] C. Di Bartolo, R. Gambini, J. Griego, J. Pullin, "Canonical quantum gravity in the Vassiliev invariants arena: I. Kinematical structure", gr-qc/9911009
[DGGP99c] C. Di Bartolo, R. Gambini, J. Griego, J. Pullin, "Canonical quantum gravity in the Vassiliev invariants arena: II. Constraints, habitats and consistency of the constraint algebra", gr-qc/9911010
[Don96] J. F. Donoghue, Helv. Phys. Acta **69**, 269 (1996)
[GamTri81] R. Gambini, A. Trias, "On the geometrical origin of gauge theories", Phys. Rev. **D23**, 553 (1981)

[GamTri86] R. Gambini, A.Trias, "Gauge dynamics in the C representation", Nucl. Phys. **B278**, 436 (1986)
[GauRov97] M. Gaul, C. Rovelli, "Loop Quantum Gravity and the Meaning of Diffeomorphism Invariance", gr-qc/9910079
[Giu94] D. Giulini, "Ashtekar Variables in Classical General Relativity", in *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, J. Ehlers, H. Friedrich (Eds.) (Springer, Berlin, Heidelberg, 1994)
[Giu00] D. Giulini, "Group Averaging and Refined Algebraic Quantization", gr-qc/0003040
[GliJaf87] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics*, 2nd Edition (Springer, New York, 1987)
[GSW87] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *String Theory* Vol. I und II (Cambridge University Press, Cambridge, 1987)
[HarHaw83] J. B. Hartle, S. W. Hawking, "Wave function of the universe", Phys. Rev. **D28**, 2960 (1983)
[Haw75] S. W. Hawking, "Particle creation by black holes", Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975)
[HawEll73] S. W. Hawking, G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1973)
[HewRos63] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963)
[HewStr69] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis* (Springer, Berlin, Heidelberg, 1969)
[Hoc65] G. Hochschild, *The Structure of Lie Groups*, (Holden-Day, San Francisco, London, Amsterdam, 1965)
[Imm96] G. Immirzi, "Real and complex connections for canonical gravity", gr-qc/9612030
[IPS75] C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, Clarendon Press, 1975
[IPS81] C. J. Isham, R. Penrose, D. W. Sciama, *Quantum Gravity: A Second Oxford Symposium*, Clarendon Press, 1981
[Ish84] C. J. Isham, "Topological and global aspects of quantum theory", in *Relativity, Groups and Topology II (Les Houches, Session XL, 1983)*, 1062, B. S. DeWitt, R. Stora (Eds.) (North Holland, Amsterdam, 1984)
[Ish94] C. J. Isham, "Canonical Quantum Gravity and the Question of Time", in *Canonical Gravity: From Classical to Quantum*, J. Ehlers, H. Friedrich (Eds.) (Springer, 1994)
[Ish95] C. J. Isham, "Structural Issues in Quantum Gravity", gr-qc/9510063
[JacSmo88] T. Jacobson, L. Smolin, "Nonperturbative quantum geometries", Nucl. Phys. **B299**(2), 295 (1988)

[KobNom63] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry* (John Wiley & Sons, New York, London, 1963)
[LewThi99] J. Lewandowski, T. Thiemann, "Diffeomorphism invariant Quantum Field Theories of Connections in terms of webs", gr-qc/9901015
[Lew97] J. Lewandowski, "Volume and Quantizations", Clas. Quantum Grav. **14**, 71 (1997)
[LinSmo99] Y. Ling, L. Smolin, "Supersymmetric Spin Networks and Quantum Supergravity", hep-th/9904016
[Lol93] R. Loll, "Chromodynamics and gravity as theories on loop space", hep-th/9309056
[Loo53] L. H. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis* (Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1953)
[Mal96] J. Maldacena, "Black Holes in String Theory", hep-th/9607235
[Man79] S. Mandelstam, "Charge monopole duality and the phases of non-Abelian gauge theories", Phys. Rev. **D19**, 2391 (1979)
[MarMou95] D. Marolf, J.M. Mourão, "On the support of the Ashtekar-Lewandowski measure", Commun. Math. Phys. **170**, 583 (1995)
[MarkSmo97] F. Markopoulou, L. Smolin, "Quantum geometry with intrinsic local causality", Phys. Rev. **D58** (1998)
[MeiVog92] R. Meise, D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis* (Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992)
[Pen71] R. Penrose, "Angular momentum: an approach to combinatorial spacetime", in *Quantum Theory and Beyond*, T. Bastin (Ed.), 151 (Cambridge University Press, Cambridge, 1971)
[PonReg68] G. Ponzano, T. Regge, in *Spectroscopy and Group Theoretical Methods in Physics*, F. Block (Ed.) (North Holland, New York, 1968)
[ReiRov97] M. Reisenberger, C. Rovelli, "Sum over Surfaces form of Loop Quantum Gravity", Phys. Rev. **D56**, 3490 (1997)
[Ren93] A. D. Rendall, "Comment on a paper of Ashtekar and Lewandowski", Class. Quantum Grav. **10**, 605 (1993)
[Rov96] C. Rovelli, "Black Hole Entropy from Loop Quantum Gravity", Phys. Rev. Lett. **14**, 3288 (1996)
[Rov98] C. Rovelli, "Strings, loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity", gr-qc/9803024 v3
[RovSmo90] C. Rovelli, L. Smolin, "Loop space representation of quantum general relativity", Nucl. Phys. **B331**, 80 (1990)
[RovSmo94] C. Rovelli, L. Smolin, "Discreteness of area and volume in quantum gravity", Nucl. Phys. **B442**, 593 (1995)
[RovSmo95] C. Rovelli, L. Smolin, "Spin Networks and Quantum Gravity", Phys. Rev. **D52**, 5743 (1995)

[RovThi97] C. Rovelli, T. Thiemann, "The Immirzi Parameter in quantum general relativity", gr-qc/9705059
[Smo97] L. Smolin, "The future of spin networks", gr-qc/9702030
[SPS00] D. C. Salisbury, J. M. Pons, L. C. Shepley, "Gauge symmetries in Ashtekar's formulation of general relativity", gr-qc/0004013
[StrVaf96] A. Strominger, C. Vafa, "Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy", Phys. Lett. **B379**, 99 (1996)
[tDi91] T. tom Dieck, *Topologie* (de Gruyter, Berlin, New York, 1991)
[Tel69a] C. Teleman, "Connections and Bundles. I", Indagationes Mathematicae **31**, 89 (1969)
[Tel69b] C. Teleman, "Connections and Bundles. II", Indagationes Mathematicae **31**, 104 (1969)
[Thi96] T. Thiemann, "The inverse loop transform", hep-th/9601105
[Thi97] T. Thiemann, "Kinematical Hilbert Spaces for Fermionic and Higgs Quantum Field Theories", gr-qc/9705021
[Thi98a] T. Thiemann, "Quantum spin dynamics (QSD)", Class. Quantum Grav. **15**, 839 (1998)
[Thi98b] T. Thiemann, "Quantum spin dynamics (QSD): II. The Kernel of the Wheeler-DeWitt constraint operator", Class. Quantum Grav. **15**, 875 (1998)
[Thi98c] T. Thiemann, "Quantum spin dynamics (QSD): III. Quantum constraint algebra and physical scalar product in quantum general relativity", Class. Quantum Grav. **15**, 1207 (1998)
[Thi98d] T. Thiemann, "A length operator for canonical quantum gravity", J. Math. Phys. **39**, 3372 (1998)
[VarZap00] M. Varadarajan, J. A. Zapata, "A proposal for analyzing the classical limit of kinematic loop gravity", gr-qc/0001040
[Wil74] K. Wilson, "Confinement of quarks", Phys. Rev. **D10**, 2445 (1974)
[WilTuc92] R. M. Williams, P. Tuckey, "Regge Calculus: A bibliography and brief review", Class. Quantum Grav. **9**, 1409 (1992)