

Diplomarbeit

**Eine 1–1-Korrespondenz zwischen
einer Klasse von Leftist-Bäumen und
erweiterten t -nären Bäumen**

Wolfgang Petzold
Matrikelnummer 1035579

14. März 2005

Erklärung

Ich versichere, die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Hanau, den 14. März 2005

In erster Linie bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mein Studium stets unterstützt und so erst ermöglicht haben.

Meine Kommilitonen und Arbeitskollegen – und Freunde – Claudia Bärenfänger, Sina Frank und Uli Laube haben diese Diplomarbeit in ihren Entwurfsstadien gelesen und durch ihre wertvollen Einwürfe und Hinweise sowie durch die Gespräche und Diskussionen, die wir geführt haben, wesentlich zum Gelingen beigetragen. Ihnen sei herzlichst danke gesagt.

Prof. Dr. Rainer Kemp hatte immer ein offenes Ohr für die Probleme und Haken im Zusammenhang mit dieser Diplomarbeit und ihrer Thematik, vor allem aber auch für die kleineren und größeren Erfolgsmeldungen. Eine Art der Betreuung, die mehr auf die Anforderungen eines Studierenden einging, kann man sich nicht wünschen.

Ein großes Dankeschön gilt nicht zuletzt Herrn PD Dr. Markus Nebel, der auf unkomplizierteste Weise die Betreuung dieser Diplomarbeit übernommen hat, nachdem Professor Kemp nach schwerer Krankheit im Jahr 2004 verstorben ist.

Zusammenfassung

Leftist-Bäume sind eine Teilmenge der geordneten Bäume mit der Eigenschaft, daß der Weg von jedem inneren Knoten zu einem Blatt des Teilbaums mit diesem Knoten als Wurzel über den am weitesten links stehenden Sohn dieses Knotens verläuft.

In der Arbeit [9] von 1999 hat R. Kemp einfach erzeugte Baumfamilien untersucht, und insbesondere die Eigenschaften der Leftist-Bäume, die zu einer solchen Familie einfach erzeugter Bäume gehören. Ein Ergebnis dieser Untersuchung war, daß die Anzahl der binären Bäume mit m Blättern und die Anzahl der Leftist-Bäume mit m Blättern und erlaubten Knotengraden 0, 2 und 3 identisch sind. Daraufhin hat R. Kemp in [10] eine 1–1-Korrespondenz zwischen diesen beiden Baumklassen definiert.

Die Identität der Anzahlen der Baumklassen gilt nach den Ergebnissen in [9] auch in allgemeinerer Form: Die Anzahl der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern und die Anzahl der Leftist-Bäume mit m Blättern und erlaubten Knotengraden $0, t, 2t - 1, \dots, 1 + t(t - 1)$ sind gleich.

In der vorliegenden Arbeit wird eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten t -nären Bäumen und dieser Klasse von Leftist-Bäumen präsentiert. Zu diesem Zweck wird der Beweis, daß die Anzahlen der Bäume aus den beiden Klassen mit jeweils m Blättern gleich sind, explizit nachvollzogen. Es werden zwei Abbildungen LE und EL definiert, die Bäume aus der einen Klasse in Bäume der anderen Klasse umbauen – und vice versa, und diese Diplomarbeit gibt einen Beweis an, daß diese beiden Abbildungsvorschriften gemeinsam eine 1–1-Korrespondenz zwischen den erweiterten t -nären Bäumen mit m Blättern und den Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäumen mit m Blättern definieren. Diese 1–1-Korrespondenz verallgemeinert die Ergebnisse von R. Kemp [10].

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Definitionen und bereits bekannte Fakten	5
2.1. Allgemeines über Bäume	5
2.2. Leftist-Bäume	9
3. Bekanntes über Leftist-Bäume	13
4. Die Mächtigkeiten sind gleich	15
5. Die Abbildungen	22
5.1. Die Kempsche 1–1-Korrespondenz für $t = 2$	22
5.2. Erweiterungen für $t > 2$	24
5.2.1. Eine Abbildungsvorschrift für $t = 3$	25
5.2.2. Eine Abbildungsvorschrift für $t = 4$	28
5.3. Allgemeine Definition der Abbildungen	30
5.3.1. Allgemeine Definition der Abbildung LE	31
5.3.2. Allgemeine Definition der Abbildung EL	33
5.4. Beispiele	35
6. Beweis der 1–1-Korrespondenz	40
7. Zusammenfassung und Ausblick	54
A. Ein alternativer Beweis für Satz 6.8	57
Literaturverzeichnis	61

Über die Sprache dieser Arbeit

Diese Arbeit ist durchgängig in der „wir“-Form geschrieben. Wie in wissenschaftlichen Texten üblich, möge das „wir“ als „die Leserin/der Leser und ich“ verstanden werden.

1. Einleitung

Bäume und Leftist-Bäume

Bäume spielen in vielen Gebieten der Informatik eine große Rolle. Als *Suchbäume* stellen sie die zentrale Datenstruktur für das Speichern und Wiederfinden von Daten dar. Bei der Analyse des Wortproblems für formale Sprachen („parsing“) repräsentieren sie als *Ableitungsbäume* die Herleitung eines Wortes gemäß einer zugrundeliegenden Grammatik. Bei der Untersuchung aller Probleme, bei denen zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Entscheidung getroffen werden muß, können sie als *Entscheidungsbäume* die möglichen Situationen beschreiben. Sowohl als Spezialfall beim Entwurf von Logikschaltkreisen im Hardwareentwurf als auch als Neuronale Netze findet man Bäume. Bäume sind in der Informatik (fast) allgegenwärtig.

Die meisten Begriffe, die die Beschreibung von Bäumen betreffen, sind in der Informatik sehr geläufig und bedürfen nicht unbedingt einer formalen Definition. Ein Baum besteht aus *Knoten*, die durch *Kanten* kreisfrei verbunden sind. Für *gewurzelte* Bäume ist ein Knoten als *Wurzel* des Baums ausgezeichnet. Die Wurzel eines Baums wird üblicherweise oben gezeichnet. Die Knoten eines Baums haben genau einen Vorgänger, den *Vater*, mit Ausnahme der Wurzel, die keinen Vater besitzt. Ein Knoten kann beliebig viele (direkte) Nachfolger besitzen, die als *Söhne* oder *Kinder* dieses Knotens bezeichnet werden. Die Söhne eines Knotens heißen auch *Brüder* oder *Geschwister*. Ein Knoten ohne Söhne heißt *Blatt*, ein Knoten mit Kindern heißt *innerer Knoten*. Die Kanten zwischen zwei Knoten eines Baums bezeichnet man als *Weg* oder *Pfad*; die Anzahl der Knoten auf diesem Weg ist die *Länge des Weges*. Existiert auf den Söhnen eines Knotens eine Links-Rechts-Ordnung, so spricht man von *geordneten* Bäumen.

Beispiel 1.1: Es seien die gewurzelten Bäume

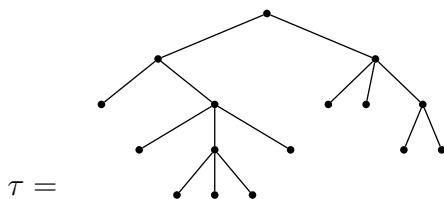


gegeben. Als „geordnete Bäume“ sind die Bäume τ_1 und τ_2 verschieden; als „ungeordnete Bäume“ sind sie identisch.

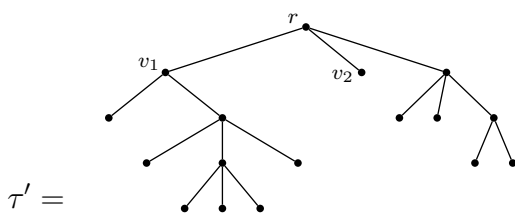
Falls nicht explizit anders herausgestellt, ist in dieser Diplomarbeit mit *Baum* grundsätzlich ein gewurzelter, geordneter Baum gemeint.

Leftist-Bäume stellen eine Unterklasse der geordneten Bäume dar. Für einen Leftist-Baum soll für jeden inneren Knoten gelten, daß der kürzeste Weg von diesem inneren Knoten zu einem Blatt im Teilbaum, dessen Wurzel dieser Knoten ist, immer über das am weitesten links stehende Kind des Knotens verläuft. Leftist-Bäume haben demnach die Eigenschaft, „sich nach rechts zu lehnen“.

Beispiel 1.2: Der Baum



ist ein Leftist-Baum. Von jedem Knoten aus ist der Weg, der immer über das am weitesten links stehende Kind führt, ein kürzester Weg zu einem Blatt des Teilbaums, der diesen Knoten als Wurzel hat. Dagegen ist der Baum



kein Leftist-Baum, denn der Weg von der Wurzel r zum Blatt v_2 ist kürzer als jeder Weg zu einem Blatt, der von der Wurzel r über das am weitesten links stehende Kind v_1 führt.

Diese Art von Bäumen ist ursprünglich 1972 von Clark A. Crane¹ als eine Untermenge der binären Bäume beschrieben worden, um eine Datenstruktur für Prioritätswarteschlangen mit einer sehr schnellen *Merge*-Operation zu erhalten. Diese Art von Leftist-Bäumen ist dann von Knuth in [14, S. 150 ff.] beschrieben und untersucht worden. (Dort verläuft der kürzeste Weg von jedem inneren Knoten zu einem Blatt immer über das am weitesten rechts stehende Blatt, und die Bäume sind „linkslastig“.) Als Quelle zur Definition der Leftist-Bäume dienen mir die Arbeiten von R. Kemp [9] und [10].

In dieser Arbeit wird eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten t -ären Bäumen und einer bestimmten Klasse von Leftist-Bäumen präsentiert. Der Name „1–1-Korrespondenz“ ist synonym zu verstehen mit einer bijektiven Abbildung und wird häufig verwendet, wenn – wie in diesem Fall – Bijektionen zwischen zwei Klassen kombinatorischer Objekte beschrieben werden. Diese Diplomarbeit verallgemeinert ein Ergebnis von R. Kemp [10],

¹C. A. Crane, Linear lists and priority queues as balanced binary trees. Technical Report STAN-CS-72-259, Stanford University, 1972.

das eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten binären Bäumen und Leftist-Bäumen mit erlaubten Knotengraden 0, 2 und 3 beschreibt.

Eine solche bijektive Abbildung kann in der Informatik vielseitig genutzt werden. Zum Test von Algorithmen, die Bäume oder baumartige Datenstrukturen – oder allgemeiner: Graphen – als Eingaben verarbeiten, ist es zum Beispiel oft notwendig, alle möglichen Eingaben einer bestimmten Größe vollständig erzeugen zu können (oder auch nur eine zufällige Auswahl der jeweiligen Familie kombinatorischer Objekte). Liegt eine 1–1-Korrespondenz vor, so kann ein existierender Testmuster-Generator genutzt werden, um Muster einer anderen Familie zu erzeugen. Alonso und Schott [1] geben einige Beispiele für ein solches Vorgehen an.

Über eine 1–1-Korrespondenz ist es auch möglich, existierende Kodierungen – zum Beispiel zur effizienten Speicherung von Objekten – für eine weitere Klasse von kombinatorischen Objekten zu benutzen. Jens Liebehenschel geht in seiner Dissertation [15] an vielen Stellen auch auf die Kodierung kombinatorischer Objekte durch Wörter aus formalen Sprachen ein; durch 1–1-Korrespondenzen lassen sich diese Anwendungsbereiche für die bereits bekannten Kodierungen noch erweitern.

Übersicht

Das folgende Kapitel 2 wird zunächst einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Bäumen zusammentragen. Dann soll der Begriff eines Leftist-Baums formal definiert werden, und einige einfache Eigenschaften von Leftist-Bäumen werden festgehalten.

Kapitel 3 faßt dann die bereits bekannten Forschungsergebnisse aus dem Bereich der Leftist-Bäume zusammen, um die Arbeit in den Kontext der existierenden Ergebnisse einordnen zu können. Dieser Abschnitt ist absichtlich erst hinter die grundlegenden Definitionen in Kapitel 2 eingeordnet, damit sich der Leser/die Leserin schon eine Idee davon verschaffen konnte, was in dieser Arbeit unter „Leftist-Bäumen“ verstanden wird.

In Kapitel 4 soll als das zentrale zugrundeliegende Ergebnis für diese Diplomarbeit die Identität der Anzahl der erweiterten t -nären Bäume einerseits und der Anzahl der Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäume andererseits bewiesen werden. Dazu wird eine von R. Kemp in seiner Arbeit [9] hergeleitete allgemeine Eigenschaft von Leftist-Bäumen, die zu einer Familie einfach erzeugter Bäume gehören, benutzt.

Die Kapitel 5 und 6 befassen sich dann mit der 1–1-Korrespondenz zwischen diesen beiden Baumklassen. Kapitel 5 gibt die Definition von zwei Abbildungsvorschriften an: Die Abbildung LE konstruiert aus einem gegebenen Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Baum einen erweiterten t -nären Baum, und die Abbildung EL baut einen der erweiterten t -nären Bäume in einen Leftist-Baum um. Kapitel 6 gibt dann einen Beweis dafür an,

daß diese beiden Abbildungen zusammen eine 1–1-Korrespondenz zwischen den beiden Baumklassen bilden; speziell daß sie Umkehrfunktionen voneinander sind.

Kapitel 7 schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick ab; insbesondere wird noch ein Hinweis angegeben, daß noch weitere Möglichkeiten existieren, die beiden Abbildungen zu definieren.

2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

Im folgenden werden wir einige grundlegende Begriffe definieren, die auf alle Bäume Anwendung finden. Wir gehen davon aus, daß die Leserin und der Leser mit den grundlegendsten Begriffen aus der Theorie der Graphen und Bäume vertraut ist. So sollen zum Beispiel die Begriffe „Baum“ und „gewurzelter Baum“ als bekannt gelten. Die gebräuchlichen Begriffe und Definitionen können aber auch in den bekannten Lehrbüchern über Diskrete Mathematik, wie zum Beispiel [20] oder [25], nachgeschlagen werden.

In dieser Arbeit steht das Symbol \mathbb{N} für die natürlichen Zahlen ohne Null; die natürlichen Zahlen inklusive der Null werden mit \mathbb{N}_0 bezeichnet, die reellen Zahlen mit \mathbb{R} .

Weiterhin werden wir in diesem Kapitel kurz auf die wesentlichen bekannten Ergebnisse eingehen, die für diese Arbeit von Bedeutung sind.

2.1. Allgemeines über Bäume

Definition 2.1 (Bäume – Bezeichnungen und Schreibweisen)

Für einige grundlegende Eigenschaften von Bäumen benutzen wir die folgenden Symbole und Bezeichnungen:

1. *Wurzel eines Baums:*
Die Wurzel eines Baums τ wird mit $r(\tau)$ bezeichnet.
2. *Grad eines Knotens:*
Für einen (gewurzelten) Baum $\tau = (V, E)$ wird die Anzahl der Kinder eines Knotens $v \in V$ als der Grad des Knotens v , $\deg(v)$ bezeichnet.
3. *Anzahl der Blätter eines Baums:*
Die Anzahl der Blätter eines Baums τ wird kurz als $\|\tau\|$ geschrieben.
4. *Geordnete Bäume:*
Ein Baum heißt geordneter Baum, falls es für jeden Knoten eine lineare Ordnung auf den Kindern dieses Knotens gibt.

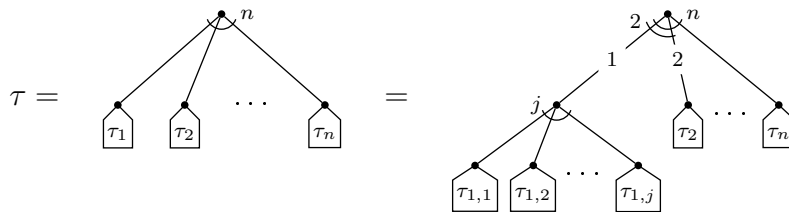
Wie bereits in der Einleitung erwähnt, soll im folgenden mit „Baum“ grundsätzlich ein gewurzelter, geordneter Baum bezeichnet werden.

2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

Teilbäumen betroffen ist. Mit einem Bogen durch die gezählten Kanten und die danebengeschriebene Anzahl soll verdeutlicht werden, welche Kanten so gezählt werden und wieviele es sind.

Um exakt zu notieren, welche Position ein Kind eines Knotens in der Links-Rechts-Ordnung einnimmt, wird gelegentlich die entsprechende Kante unterbrochen und die Zahl in die so entstandene Lücke geschrieben.

Beispiel 2.3: Ein Baum mit seinen Teilbäumen. Der Teilbaum τ_1 ist genauer aufgeführt.



Wir können beobachten, daß für die erweiterten t -nären Bäume nicht alle natürlichen Zahlen als Anzahlen von Blättern möglich sind. Genauer:

Satz 2.1

Für die mögliche Anzahl der Blätter eines (nicht-leeren) erweiterten t -nären Baums τ gilt stets:

$$\|\tau\| \equiv 1 \pmod{t-1}.$$

Beweis:

Das zeigt eine einfache Induktion über die Höhe des Baums τ .

Induktionsverankerung:

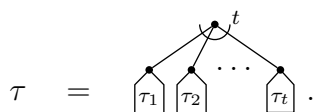
$h(\tau) = 1$. Das bedeutet, $\tau = \bullet$ und $\|\tau\| = 1 + 0(t-1)$.

$h(\tau) = 2$. In diesem Fall muß $\tau = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$ sein, und $\|\tau\| = t = 1 + 1(t-1)$.

Induktionsschritt:

Für Bäume $\tau^{(\leq n)}$ mit einer Höhe von maximal n , $h(\tau^{(\leq n)}) \leq n$, gelte: $\|\tau^{(\leq n)}\| = 1 + i(t-1)$, $i \in \mathbb{N}$.

Sei τ nun ein erweiterter t -närer Baum mit Höhe $n+1$:



2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

Die Teilbäume $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t$ haben maximal eine Höhe von n . Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für diese Teilbäume:

$$\|\tau_j\| = 1 + i_j(t-1), \quad \text{für } i_j \in \mathbb{N} \text{ und } j \in \{1, \dots, t\}.$$

Für die Anzahl der Blätter von τ gilt:

$$\begin{aligned} \|\tau\| &= \sum_{1 \leq j \leq t} \|\tau_{i_j}\| \\ &= \sum_{1 \leq j \leq t} (1 + i_j(t-1)) \\ &= t + (t-1) \sum_{1 \leq j \leq t} i_j \\ &= 1 + (t-1) \left(1 + \sum_{1 \leq j \leq t} i_j \right) \\ &= 1 + i'(t-1) \quad \text{mit } i' := 1 + \sum_{1 \leq j \leq t} i_j. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Blätter von τ lässt sich also in der Form $\|\tau\| = 1 + i'(t-1)$ mit $i' \in \mathbb{N}$ ausdrücken, und somit gilt für τ :

$$\|\tau\| \equiv 1 \pmod{t-1}.$$

■

Satz 2.2

Für erweiterte t -näre Bäume (mit $t \geq 2$) gilt eine feste Beziehung zwischen der Anzahl der Blätter m und der Anzahl der inneren Knoten N :

$$m = 1 + (t-1)N \quad \text{beziehungsweise} \quad N = \frac{m-1}{t-1}.$$

Beweis:

Jeder Knoten eines erweiterten t -nären Baumes (sowohl die inneren Knoten als auch die Blätter) besitzt genau einen Vater, zu dem eine Kante existiert; nur die Wurzel besitzt keinen Vater. Die Anzahl der Kanten in einem erweiterten t -nären Baum ist demnach gleich $(N + m) - 1$.

Da jeder innere Knoten eines erweiterten t -nären Baums genau t Söhne hat, ist die Anzahl der Kanten andererseits gleich tN .

$$\begin{aligned} tN &= N + m - 1 \\ \iff m &= 1 + (t-1)N. \end{aligned}$$

■

2.2. Leftist-Bäume

Definition 2.4 (Leftist-Baum)

Ein Leftist-Baum ist ein Baum mit der Eigenschaft, daß für jeden inneren Knoten v gilt: Der kürzeste Weg von v zu einem Blatt des Teilbaums mit der Wurzel v führt über das am weitesten links stehende Kind dieses Knotens v .

Formal: Sei τ ein geordneter, gewurzelter Baum. Sei v ein beliebiger innerer Knoten von τ ; d. h. $\deg(v) > 0$. Sei p_v der Pfad von v zu dem am weitesten links stehenden Blatt im Teilbaum mit der Wurzel v ; das ist der Pfad, der entsteht, indem von v ausgehend immer der am weitesten links stehende Sohn als Nachfolger gewählt wird. Sei p'_v ein Pfad von v zu einem beliebigen Blatt des Teilbaums mit der Wurzel v . Gilt für alle innere Knoten v und für alle solche Pfade p'_v

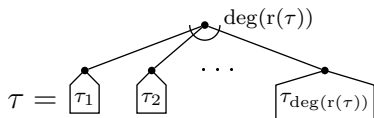
$$|p_v| \leq |p'_v|,$$

so heißt τ Leftist-Baum.

Bemerkung: Mit dieser Definition gleichbedeutend gilt für alle Knoten v eines Leftist-Baums: Die Länge des kürzesten Weges von v zu einem Blatt des Teilbaums τ_v , dessen Wurzel v ist, ist gleich $\text{LBL}(\tau_v)$.

R. Kemp definiert in [9] Leftist-Bäume über diese Eigenschaft.

Bemerkung: Für die Links-Pfad-Längen in einem Leftist-Baum



mit $\deg(r(\tau)) \geq 2$ gilt:

$$(\forall i: 2 \leq i \leq \deg(r(\tau))) \quad (\text{LBL}(\tau_i) \geq \text{LBL}(\tau_1)) . \quad (2.1)$$

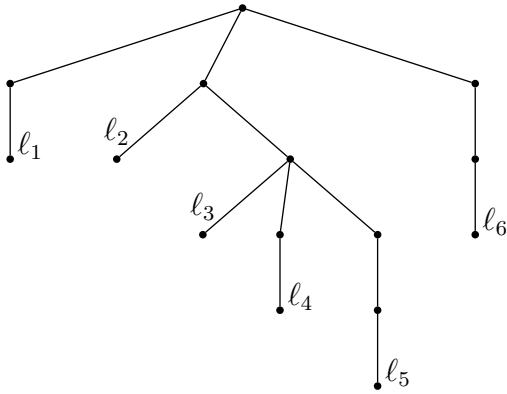
In [9, „ i -cut“, S. 316 f.] hat R. Kemp folgende Eigenschaft für Leftist-Bäume bewiesen (hier speziell für $i = 2$):

Fakt 2.1 (Eindeutiger Schnitt durch Leftist-Bäume (i -cut; hier: 2-cut))

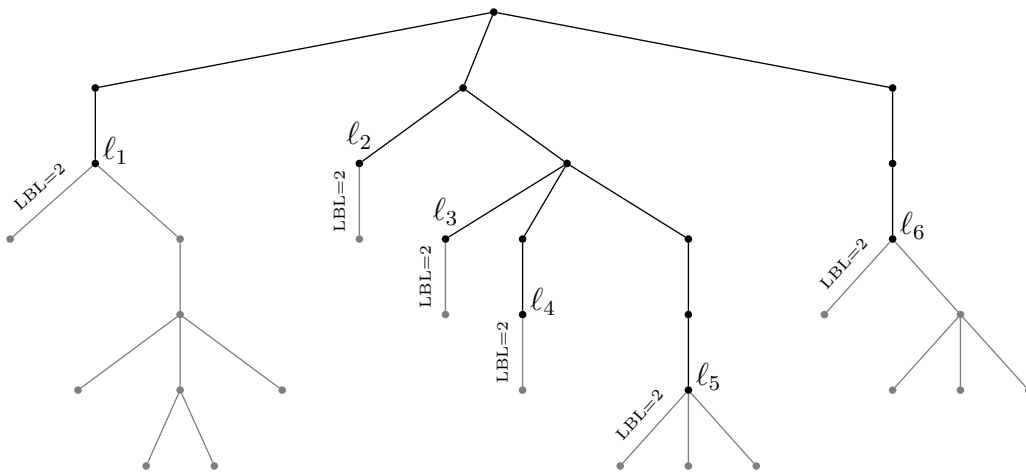
Sei τ ein Baum mit der Leftist-Eigenschaft. Ersetzt man alle Blätter von τ durch Leftist-Bäume mit einer Links-Pfad-Länge von 2, so ist der daraus entstehende Baum wieder ein Leftist-Baum. Darüberhinaus ist eine solche Konstruktion eindeutig.

2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

Beispiel 2.4: Konstruktion eines Leftist-Baums durch einen 2-cut: Der schwarz gezeichnete Leftist-Baum τ wird erweitert, indem alle seine Blätter ℓ_μ – für $1 \leq \mu \leq 6$ – durch (grau gezeichnete) Leftist-Bäume $\tau^{(\mu)}$ mit einer Links-Pfad-Länge von $\text{LBL}(\tau^{(\mu)}) = 2$ ersetzt werden. Sei der Leftist-Baum τ vor der Erweiterung:



Der durch die per 2-cut-Erweiterung entstehende Leftist-Baum könnte dann beispielsweise so aussehen:



2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

Definition 2.5 (Leftist-Bäume – Symbole und Bezeichnungen)

Für bestimmte Baumfamilien der Leftist-Bäume werden in dieser Arbeit folgende Symbole benutzt:

1. $L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ oder $L^{(t, \dots)}$ bezeichnet die Menge der Leftist-Bäume, deren Knoten vom Grad $0, t, 2t-1, 3t-2, \dots$ oder $1+t(t-1)$ sind. Das heißt, für jeden Knoten v eines Leftist-Baums $\tau \in L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gilt:

$$\deg(v) \in \{0, t, 2t-1, 3t-2, \dots, 1+t(t-1)\}.$$

2. $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ oder $L_m^{(t, \dots)}$ bezeichnet die Menge aller Leftist-Bäume mit erlaubten Knotengraden $0, t, 2t-1, 3t-2, \dots, 1+t(t-1)$ und m Blättern.

Satz 2.3

Für die mögliche Anzahl der Blätter eines (nicht-leeren) Leftist-Baums τ aus der Menge $L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gilt stets:

$$\|\tau\| \equiv 1 \pmod{t-1}.$$

Beweis:

Auch hier führen wir den Beweis durch Induktion nach der Höhe des Baums τ .

Induktionsverankerung:

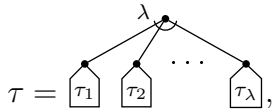
$h(\tau) = 1$. Es ist $\tau = \bullet$ und $\|\tau\| = 1 + 0(t-1)$.

$h(\tau) = 2$. Es ist $\tau = \begin{array}{c} \lambda \\ \bullet \diagup \quad \bullet \diagdown \\ \bullet \dots \bullet \end{array}$, und λ ist einer der erlaubten Knotengrade aus der Menge $\{0, t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1)\}$ (wobei offensichtlich in diesem Fall $\lambda = 0$ nicht möglich ist). Alle diese Knotengrade besitzen die geforderte Form $\lambda = 1 + k(t-1)$ mit $1 \leq k \leq t$.

Induktionsschritt:

Sei $h(\tau) > 2$, und es gelte $\|\tau'\| \equiv 1 \pmod{t-1}$ für alle Bäume τ' mit $h(\tau') < h(\tau)$, die also eine kleinere Höhe haben als τ .

Der Baum τ hat die folgende Form:



und die Wurzel besitzt einen Knotengrad $\lambda \in \{t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1)\}$. Also können wir λ darstellen als $\lambda = 1 + \mu(t-1)$ mit $\mu \in \{1, \dots, t\}$. Für alle $i \in \{1, \dots, \lambda\}$ gilt:

- $\tau_i \in L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$,
- $h(\tau_i) < h(\tau)$,

2. Definitionen und bereits bekannte Fakten

und nach der Induktionsvoraussetzung gilt für alle diese i : $\|\tau_i\| = 1 + k_i(t - 1)$ mit $1 \leq k_i \leq t$.

Für die Anzahl der Blätter von τ gilt damit

$$\begin{aligned}\|\tau\| &= \sum_{1 \leq i \leq \lambda} (1 + k_i(t - 1)) \\ &= \lambda + \sum_{1 \leq i \leq \lambda} k_i(t - 1) \\ &= \lambda + (t - 1) \sum_{1 \leq i \leq \lambda} k_i \\ &= 1 + \mu(t - 1) + (t - 1) \sum_{1 \leq i \leq \lambda} k_i \\ &= 1 + \left(\mu + \sum_{1 \leq i \leq \lambda} k_i \right) (t - 1) \\ &= 1 + k'(t - 1) \quad \text{mit } k' := \mu + \sum_{1 \leq i \leq \lambda} k_i.\end{aligned}$$

■

3. Bekanntes über Leftist-Bäume

Für Leftist-Bäume mit n Blättern, die zu den erweiterten binären Bäumen gehören, hat R. Kemp 1987 [6] bewiesen, daß ihre Anzahl asymptotisch gegeben ist durch $t(n) \sim \alpha c^n n^{-3/2}$ mit $\alpha = 0,25 \dots$ und $c = 2,74 \dots$. Die Frage nach der Zahl der Leftist-Bäume mit N inneren Knoten und nach einem asymptotischen Ausdruck für diese Zahl war von Knuth in Übungsaufgabe 5.2.3–34 ([14, S. 159]) gestellt worden.

Dieses Ergebnis ist 2001 von Drmota [4] auf Leftist-Bäume erweitert worden, die zu einer beliebigen Familie einfach erzeugter Bäume gehören.

R. Kemp untersucht in [7] und [8] eine Menge von additiven Parametern auf den Leftist-Bäumen unter den erweiterten binären Bäumen. Additive Parameter sind Baumparameter, die sich additiv verhalten, das heißt die sich rekursiv durch Addition von Anteilen der Wurzel und der Teilbäume ermitteln lassen. Dazu gehören unter anderen *Interne* und *Externe Weglänge*, *Anzahl der Blätter* und die *Links-* (und auch *Rechts-*) *-Pfad-Länge* des Leftist-Baums.

Uwe Trier hat in [18] diese Untersuchung auf die Leftist-Bäume in der Familie der erweiterten t -nären Bäume verallgemeinert.

Basierend auf den additiven Gewichten zeigt Noguiera in [16], daß die durchschnittliche Höhe von Leftist-Bäumen asymptotisch $n^{1/2}$ beträgt, und er kann die zugehörige Konstante mit hoher Genauigkeit angeben.

In [9] präsentiert R. Kemp mittels Erzeugendenfunktionen eine Möglichkeit, die exakten Anzahlen der Leftist-Bäume mit n inneren Knoten und m Blättern, die zu einer beliebigen einfach erzeugten Baumfamilie¹ gehören, zu berechnen. Für den Fall, daß nur die Anzahl der Blätter untersucht werden soll, gibt er auch eine Asymptotik für die Anzahl der Leftist-Bäume in dieser einfach erzeugten Baumfamilie an.

R. Kemp beschreibt in [10] auf konstruktive Weise eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten binären Bäumen und Leftist-2, 3-Bäumen.

Diese 1–1-Korrespondenz wird in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert werden auf eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten t -nären Bäumen und Leftist-Bäumen mit den erlaubten Knotengraden $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, t(t - 1)$.

¹Eine Definition für *einfach erzeugte Baumfamilien* ist in Definition 4.1 auf Seite 15 angegeben.

3. Bekanntes über Leftist-Bäume

Im Jahr 2003 konnte R. Kemp in [11] eine noch weitergehende Verallgemeinerung zeigen, von der ein Spezialfall eine andere Lösung des in dieser Diplomarbeit präsentierten Ergebnisses darstellt.

Zeitlich ist das zentrale Ergebnis der vorliegenden Diplomarbeit vor dieser Kemp-Arbeit entstanden. Leider haben sich beim Aufschreiben und Ausformulieren des Ergebnisses aus persönlichen Gründen einige Verzögerungen ergeben, so daß diese Diplomarbeit erst jetzt vorgelegt werden kann.

Obwohl die meisten wissenschaftlichen Veröffentlichungen die kombinatorischen Eigenschaften von Leftist-Bäumen untersuchen, gibt es auch beispielhafte Implementierungen und empirische Untersuchungen dieser Datenstruktur; siehe zum Beispiel die Arbeit von Cho und Sahni 1998 [2], die verschiedene Varianten von Leftist-Bäumen und von Skiplisten auf ihre Eignung als zugrundeliegende Datenstrukturen für Prioritätswarteschlangen untersucht.

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

Die Anzahl der erweiterten binären Bäume mit m Blättern und die der Leftist-2, 3-Bäume mit m Blättern sind gleich, wie R. Kemp in [10] nachweist. In [9] zeigt er mit Hilfe einer Funktionalbeziehung für die Enumerator-Erzeugendenfunktionen von Leftist-Bäumen, die zu einer Familie einfach erzeugter Bäume gehören, eine ganze Reihe von Identitäten; darunter fällt auch die Gleichheit der Anzahlen der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern einerseits und der Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume mit m Blättern andererseits.

Der mittels dieser Funktionalgleichung zu führende Beweis der Gleichmächtigkeit der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern und der Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume mit m Blättern wird im folgenden ausführlich angegeben.

Diese zentrale Funktionalgleichung, die für die Leftist-Bäume innerhalb einer einfach erzeugten Baumfamilie gilt, ist hier als Fakt 4.4 wiedergegeben. Bevor jedoch mit Satz 4.3 der Beweis geführt werden kann, müssen zunächst noch ein paar Fakten und Zwischenergebnisse zusammengetragen werden.

Definition 4.1 (Einfach erzeugte Baumfamilien, nach R. Kemp [12])

Sei \mathcal{F} eine Menge geordneter Bäume, $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{T}(n)$ die Menge der Bäume mit n Knoten innerhalb dieser Menge von Bäumen;

$$\mathcal{T}(n) := \{T \in \mathcal{F} \mid T = (V, E) \wedge |V| = n\}.$$

Bezeichne $t(n) := |\mathcal{T}(n)|$ die Anzahl dieser Bäume mit n Knoten. Dann heißt die Erzeugendenfunktion

$$E(z) := \sum_{n \geq 1} t(n) z^n$$

Enumerator-Erzeugendenfunktion von \mathcal{F} .

Die Baumfamilie \mathcal{F} heißt einfach erzeugt, falls es eine reguläre (analytische) Funktion $\Theta(y) = 1 + \sum_{i \geq 1} c_i y^i$ mit $c_i \in \{0, 1\}$ und $c_i = 1$ für ein $i \geq 2$ gibt mit $E(z) = z\Theta(E(z))$.

Bemerkung: Die in dieser Arbeit betrachteten Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume können alternativ zu Definition 2.4, die sie als Untermenge der (uneingeschränkten) Leftist-Bäume beschreibt, indem die erlaubten Knotengrade eingeschränkt werden, auch als eine Untermenge der geordneten Bäume mit erlaubten Knotengraden 0 , t , $2t - 1$,

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

$\dots, 1+t(t-1)$ betrachtet werden, indem aus dieser Menge nur die Bäume mit der Leftist-Eigenschaft herausgesucht werden.

Diesen letzteren Ansatz verfolgt R. Kemp, wenn er die Leftist-Bäume untersucht, die zu einer bestimmten Familie einfach erzeugter Bäume gehören. Die einfach erzeugte Baumfamilie $\mathcal{F}(\Theta_1)$ mit der definierenden Funktion

$$\Theta_1(y) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq t} y^{1+i(t-1)}$$

ist gerade die Familie der geordneten Bäume mit erlaubten Knotengraden $0, t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1)$. Die Menge der in dieser Familie vorkommenden Leftist-Bäume, $\mathcal{FL}(\Theta_1)$, ist die hier betrachtete Menge $L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$.

Definition 4.2

Die Schreibweise $[z^n]A(z)$ meint den Koeffizienten vor z^n in der formalen Potenzreihe $A(z)$. Ist $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, so gilt $[z^n]A(z) = a_n$.

In [5] haben die Autoren Graham, Knuth und Patashnik viele mathematische Methoden und Vorgehensweisen beschrieben, die zur Analyse von Algorithmen und Datenstrukturen nützlich sein können. Unter anderem haben sie auch einige Identitäten für Erzeugendenfunktionen mit Binomialkoeffizienten und ihren zugehörigen geschlossenen Formen zusammengetragen. Wir benötigen eine davon (vgl. [5, Tabelle 321]).

Fakt 4.1 (Eine geschlossene Form, nach [5])

Die Erzeugendenfunktion $\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n$ besitzt die geschlossene Form $\frac{1}{(1-z)^c}$.

Das folgende Inversionstheorem von Lagrange wird es uns unter anderem ermöglichen, die Anzahl der erweiterten t -ären Bäume mit m Blättern zu berechnen.

Fakt 4.2 (Lagrangesche Inversionsformel, nach Flajolet und Sedgewick [17])

Erfüllt eine Erzeugendenfunktion $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ die Funktionalgleichung $z = f(A(z))$,

wobei für f gilt, daß $f(0) = 0$ und $f'(0) \neq 0$, dann ist

$$a_n = [z^n]A(z) = \frac{1}{n} [u^{n-1}] \left(\frac{u}{f(u)} \right)^n.$$

Bemerkung: Für die inverse Funktion $f^{(-1)}$ der hier angegebenen Funktion f muß gelten:

$$f(f^{(-1)}(z)) = f^{(-1)}(f(z)) = z.$$

Wendet man $f^{(-1)}$ auf beide Seiten der Gleichung $z = f(A(z))$ an, so folgt:

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(z) &= f^{(-1)}(f(A(z))) \\ &= A(z). \end{aligned}$$

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

Die Funktion $A(z)$ ist also die Umkehrfunktion von f .

In der Literatur ist das Lagrangesche Inversionstheorem oft auch explizit mit dieser Umkehrfunktions-Notation angegeben worden; siehe zum Beispiel Comtet [3, Seite 148 ff.].

Satz 4.1

Die Anzahl der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern ist

$$|E_m^{(t)}| = \frac{1}{m} \binom{t \frac{m-1}{t-1}}{\frac{m-1}{t-1}}.$$

Beweis:

Die erweiterten t -nären Bäume folgen der symbolischen Gleichung

$$\mathcal{T} = \bullet + \mathcal{T} \begin{array}{c} \nearrow^t \\ \searrow \end{array} \mathcal{T} \cdots \mathcal{T},$$

und für die Erzeugendenfunktion $T(u) = \sum_{m \geq 0} a_m u^m$ der Anzahl a_m dieser Bäume mit m Blättern gilt

$$T(u) = u + T(u)^t. \quad (4.1)$$

Damit gilt auch $u = T(u) - T(u)^t = f(T(u))$ mit $f(z) = z - z^t$. Es ist $f'(z) = 1 - tz^{t-1}$ und $f(0) = 0$ sowie $f'(0) = 1 \neq 0$. Durch Anwendung der Lagrangeschen Inversionsformel (Fakt 4.2) erhalten wir für die Anzahl der erweiterten t -nären Bäume mit N inneren Knoten und $m = 1 + (t-1)N$ Blättern

$$\begin{aligned} |E_m^{(t)}| &= [u^m]T(u) \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \left(\frac{u}{u - u^t} \right)^m && \text{wegen Fakt 4.2} \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \left(\frac{1}{1 - u^{t-1}} \right)^m \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \frac{1}{(1 - u^{t-1})^m} \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \sum_{i \geq 0} \binom{m+i-1}{i} u^{(t-1)i} && \text{wegen Fakt 4.1} \\ &= \frac{1}{m} [u^{(t-1)N}] \sum_{i \geq 0} \binom{m+i-1}{i} u^{(t-1)i} && \text{denn } m = 1 + (t-1)N \\ &= \frac{1}{m} \binom{m+N-1}{N} && \text{Koeffizient an der Stelle } i = N. \end{aligned}$$

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

Durch eine letzte Ersetzung $N = \frac{m+1}{t+1}$ ergibt sich

$$|E_m^{(t)}| = [u^m]T(u) = \frac{1}{m} \binom{t \frac{m+1}{t-1}}{\frac{m+1}{t-1}}. \quad (4.2)$$

■

Satz 4.2

Sei $T^{(-1)}(u)$ definiert als $T^{(-1)}(u) := u - u^t$. $T^{(-1)}(u)$ ist die inverse Funktion von $T(u)$.

Beweis:

Wir werden die Lagrangesche Inversionsformel auf die Funktion $T^{(-1)}(u) = u - u^t$ anwenden, und als deren Umkehrfunktion $T^{(-1)\langle -1 \rangle}$ wird sich $T(u)$ herausstellen.

$$\begin{aligned} T^{(-1)}(u) &= u - u^t \\ &= \sum_{j \geq 0} a_j u^j \quad \text{mit } a_0 := 0, a_1 := 1 \neq 0, a_t := -1 \text{ und } a_j := 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Um die Koeffizienten der Umkehrfunktion $T^{(-1)\langle -1 \rangle}$ von $T^{(-1)}$ zu berechnen, wenden wir nun die Lagrangesche Inversionsformel an:

$$\begin{aligned} [u^m]T^{(-1)\langle -1 \rangle}(u) &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \left(\frac{u}{T^{(-1)}(u)} \right)^m \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \left(\frac{u}{u - u^t} \right)^m \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \left(\frac{1}{1 - u^{t-1}} \right)^m \\ &= \frac{1}{m} [u^{m-1}] \frac{1}{(1 - u^{t-1})^m}. \end{aligned}$$

Nun substituiere $v := u^{t-1}$. Damit gilt $u = v^{\frac{1}{t-1}}$ sowie $u^{m-1} = v^{\frac{m-1}{t-1}}$. Substituiere weiterhin $N := \frac{m-1}{t-1}$. Damit gilt auch $m = 1 + (t-1)N$, und wir können mit diesen Bezeichnungen schreiben:

$$\begin{aligned} [u^m]T^{(-1)\langle -1 \rangle}(u) &= \frac{1}{m} [v^N] \frac{1}{(1-v)^{1+(t-1)N}} \\ &= \frac{1}{m} [v^N] \sum_{j \geq 0} \binom{1+(t-1)N+j-1}{j} v^j && \text{wegen Fakt 4.1} \\ &= \frac{1}{m} \binom{1+(t-1)N+N-1}{N} && \text{Koeff. bei } j = N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m} \binom{tN}{N} \\
 &= \frac{1}{m} \binom{t \frac{m-1}{t-1}}{\frac{m-1}{t-1}} \\
 &= [u^m]T(u) \qquad \text{wegen Gl. (4.2).}
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $T^{\langle -1 \rangle \langle -1 \rangle}(u)$ und $T(u)$ stimmen in allen ihren Koeffizienten überein, sie sind also identisch. \blacksquare

Wir werden nachher eine Formel für die endliche geometrische Summe benötigen. Man kann sie in vielen grundlegenden Mathematiklehrbüchern oder Nachschlagewerken finden, so zum Beispiel in [21] oder in [24]. Ein Beweis kann direkt (Multiplikation der Gleichung mit $(q-1)$ und Ausmultiplizieren) oder auch durch vollständige Induktion geführt werden.

Fakt 4.3 (Geometrische Summe, nach [24])

Für alle $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

In [9, Gleichung 13] leitet R. Kemp eine allgemeine Funktionalgleichung her für Leftist-Bäume, die zu einer Klasse einfach erzeugter Bäume gehören. Diese Beziehung stellt den zentralen Punkt des Beweises dar, daß die beiden Baumklassen $E_m^{(t)}$ und $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gleichmächtig sind.

Fakt 4.4 (Funktionalgleichung für Leftist-Bäume, nach Kemp [9])

Sei $\ell(m)$ die Anzahl aller Leftist-Bäume $\tau \in \mathcal{FL}(\Theta)$ mit m Blättern, die zu einer Familie einfach erzeugter Bäume $\mathcal{F}(\Theta)$ gehören; sei $L(u) := \sum_{m \geq 1} \ell(m) u^m$ die dazugehörige Erzeugendenfunktion.

$L(u)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$L(u) = u + L \left(u \frac{\Theta(L(u)) - 1}{L(u)} \right).$$

Unter der Voraussetzung $c_1 := [y]\Theta(y) = 0$ beweist R. Kemp, daß diese Funktionalgleichung eine eindeutige Lösung besitzt, die $L(0) = 0$ erfüllt.

Die Forderung, daß der Koeffizient vor y in $\Theta(y)$ gleich 0 sein soll, spiegelt dabei die Tatsache wider, daß die Anzahl der Bäume mit m Blättern genau dann endlich ist, wenn Knoten vom Grad 1 nicht erlaubt sind. Da beide in dieser Arbeit betrachteten Baumklassen diese Einschränkung erfüllen, soll im folgenden diese Annahme gelten, auch wenn sie nicht explizit erwähnt wird.

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

Mit diesen Hilfsmitteln können wir jetzt den Beweis führen, daß die Menge der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern und die Menge der Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäume mit m Blättern gleichmächtig sind.

Satz 4.3

Die Anzahlen der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern einerseits und der Leftist-Bäume mit den erlaubten Knotengraden $t, 2t - 1, \dots, 1 + t(t - 1)$ mit m Blättern andererseits sind gleich.

Beweis:

Die Leftist-Bäume aus $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ sind eine Teilmenge der Familie der einfach erzeugten Bäume $\mathcal{F}(\Theta)$ mit $\Theta(y) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq t} y^{1+i(t-1)}$.

Für die Erzeugendenfunktion $L(u) = \sum_{m \geq 1} |L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}| u^m$ für die Anzahl der Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäume mit m Blättern in $L_m^{(t, \dots)}$ gilt die Funktionalgleichung (Fakt 4.4)

$$L(u) = u + L \left(u \frac{\Theta(L(u)) - 1}{L(u)} \right).$$

Für die betrachteten Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäume ist die beschreibende Funktion Θ gegeben durch $\Theta(y) = 1 + \sum_{1 \leq i \leq t} y^{1+i(t-1)}$. Daher ist weiter

$$\begin{aligned} L(u) &= u + L \left(u \frac{\sum_{1 \leq i \leq t} L(u)^{1+i(t-1)}}{L(u)} \right) \\ &= u + L \left(u \sum_{1 \leq i \leq t} L(u)^{i(t-1)} \right), \end{aligned}$$

und es gibt genau eine Lösung $L(u)$ mit $L(0) = 0$, vorausgesetzt, daß $c_1 := [y]\Theta(y) = 0$.

Nun ist $T(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} &u + T \left(u \sum_{1 \leq i \leq t} T(u)^{i(t-1)} \right) \\ &= u + T \left((T(u) - T(u)^t) \sum_{1 \leq i \leq t} (T(u)^{(t-1)})^i \right) && \text{wegen Gl. (4.1)} \\ &= u + T \left((T(u) - T(u)^t) \left(\sum_{0 \leq i \leq t} (T(u)^{(t-1)})^i - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

4. Die Mächtigkeiten sind gleich

$$\begin{aligned}
&= u + T \left((T(u) - T(u)^t) \left(\frac{(T(u)^{t-1})^{t+1} - 1}{T(u)^{t-1} - 1} - 1 \right) \right) && \text{wegen Fakt 4.3} \\
&= u + T \left((T(u) - T(u)^t) \frac{(T(u)^{t-1})^{t+1} - 1 - (T(u)^{t-1} - 1)}{T(u)^{t-1} - 1} \right) \\
&= u + T \left(T(u)(1 - T(u)^{t-1}) \frac{T(u)^{t-1} - (T(u)^{t-1})^{t+1}}{1 - T(u)^{t-1}} \right) \\
&= u + T \left(T(u) \left(T(u)^{t-1} - T(u)^{t^2-1} \right) \right) \\
&= u + T \left(T(u)^t - T(u)^{t^2} \right) \\
&= u + T \left(T(u)^t - (T(u)^t)^t \right) \\
&= u + T \left(T^{(-1)} \left(T(u)^t \right) \right) && \text{wegen Satz 4.2} \\
&= u + T(u)^t \\
&= T(u) && \text{wegen Gl. (4.1).}
\end{aligned}$$

Die Funktion $T(u)$ erfüllt also die Funktionalgleichung, die für die Enumerator-Erzeugendenfunktion der Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume gilt; das bedeutet, $T \equiv L$.

Weil also die Enumerator-Erzeugendenfunktion T der erweiterten t -nären Bäume und die Enumerator-Erzeugendenfunktion L der Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume identisch sind, sind folglich auch die Anzahl der erweiterten t -nären Bäume mit m Blättern und die Anzahl der Leftist- t , $2t - 1$, $3t - 2$, \dots , $1 + t(t - 1)$ -Bäume mit m Blättern gleich. ■

5. Die Abbildungen

In diesem Abschnitt werden nun die Abbildungen LE und EL definiert. Dabei bildet LE einen Leftist-Baum $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ auf einen erweiterten t -ären Baum $\text{LE}(\tau) \in E_m^{(t)}$ ab, und EL wird sich als die Umkehrabbildung von LE herausstellen:

$$L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{LE}} \\ \xleftarrow{\text{EL}} \end{array} E_m^{(t)}$$

Dabei soll für beide Abbildungen gelten: Ist ein Baum τ sowohl in $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ als auch in $E_m^{(t)}$, so ist $\text{LE}(\tau) = \tau$ und $\text{EL}(\tau) = \tau$. Das heißt, wir fordern

$$\text{LE} \Big|_{L_m^{(t, \dots)} \cap E_m^{(t)}} = \text{EL} \Big|_{L_m^{(t, \dots)} \cap E_m^{(t)}} = \text{id}.$$

Ausgehend von der Abbildungsvorschrift, die R. Kemp in [10] für $t = 2$ beschrieben hat, wird die Verallgemeinerung zunächst beispielhaft für $t = 3$ und $t = 4$ durchgeführt und danach für allgemeines t formuliert.

5.1. Die Kempische 1–1-Korrespondenz für $t = 2$

Um eine Bijektion zwischen erweiterten binären Bäumen mit m Blättern, $\tau \in E_m^{(2)}$, und Leftist-2, 3-Bäumen mit m Blättern, $\tau' \in L_m^{(2,3)}$, zu erstellen, hat R. Kemp in [10] die folgenden Abbildungen definiert.

(A) Die Transformation $\text{lb}: L_m^{(2,3)} \rightarrow E_m^{(2)}$ ist rekursiv definiert:

(A1) $\text{lb}(\bullet) := \bullet$;

(A2) $\text{lb} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tau_1 \quad \tau_2 \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{lb}(\tau_1) \quad \text{lb}(\tau_2) \end{array} ;$

(A3) $\text{lb} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{lb}(\tau_3) \quad \text{lb}(\tau_2) \quad \text{lb}(\tau_1) \end{array} .$

(B) Die Transformation $\text{bl}: E_m^{(2)} \rightarrow L_m^{(2,3)}$:

Für die Definition der Rückrichtung benötigen wir einen „Schnitt“ durch einen erweiterten binären Baum, die sogenannte L -Dekomposition. R. Kemp definiert diese L -Dekomposition wie folgt:

Definition 5.1 (L -Dekomposition für erweiterte binäre Bäume, nach [10])
 Jedem Knoten x eines erweiterten binären Baums $\tau \in E^{(2)}$, $\|\tau\| > 1$, wird eine Markierung $\xi(x)$ zugeordnet. Beginne dabei an der Wurzel r des Baums τ .

1. Falls beide Söhne von r innere Knoten sind, setze $\xi(r) := 0$; sonst $\xi(r) := 1$.
2. Falls der Vater eines Knotens $x \neq r$ die Markierung 0 besitzt und beide Söhne von x innere Knoten sind, setze $\xi(x) := 0$; sonst $\xi(x) := 1$.

Bezeichne nun den erweiterten binären Baum mit der Wurzel r , der aus τ entsteht, indem alle Knoten entfernt werden, deren Vater mit 1 markiert ist, als $\tau^{(0)}$. Seien $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung; wir bezeichnen den erweiterten binären Baum mit der Wurzel ℓ_i als $\tau^{(i)}$, für $1 \leq i \leq \|\tau^{(0)}\|$.

Die L -Dekomposition des Baums τ besteht dann aus der Folge

$$\sigma_\tau := \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)}.$$

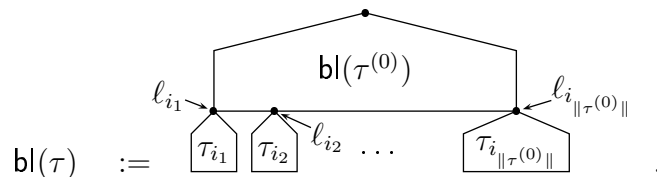
Jetzt kann die Abbildung bl rekursiv definiert werden:

(B1) $\text{bl}(\bullet) := \bullet$;

(B2) Der Baum $\tau \in E_m^{(2)}$ habe die L -Dekomposition

$$\sigma_\tau = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)},$$

und $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ seien die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung. Dann ist



Dabei ist für $1 \leq p \leq \|\tau^{(0)}\|$

$$\tau_{i_p} := \begin{cases} \begin{array}{l} \text{falls } \tau^{(i_p)} = \begin{array}{c} \ell_{i_p} \\ \bullet \\ \tau'' \end{array} ; \\ \begin{array}{c} \ell_{i_p} \\ \bullet \\ \text{bl}(\tau'') \end{array} \end{array} & \text{falls } \tau^{(i_p)} = \begin{array}{c} \ell_{i_p} \\ \bullet \\ \tau'' \end{array} ; \\ \begin{array}{l} \text{falls } \tau^{(i_p)} = \begin{array}{c} \ell_{i_p} \\ \bullet \\ \tau' \quad \tau'' \end{array} . \\ \begin{array}{c} \ell_{i_p} \\ \bullet \\ \text{bl}(\tau'') \quad \text{bl}(\tau') \end{array} \end{array} \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2. Erweiterungen für $t > 2$

Die Abbildungen lb und bl erfüllen die gestellten Forderungen für $t = 2$. Um diese Abbildungen für größere Werte von t zu erweitern, halten wir zunächst die wesentlichen Eigenschaften dieser Abbildungen fest:

- Falls der Knotengrad der Wurzel des abzubildenden Baums $\tau \in L_m^{(2,3)}$ gleich t (also 2) ist, dann bleibt die erste Ebene dieses Baumes bei der Abbildung identisch erhalten, und die Abbildung wird an die Teilbäume mit den Söhnen der Wurzel als Teilbaum-Wurzel „weitergegeben“.
- Falls der Knotengrad der Wurzel von τ ungleich t ist, dann muß die oberste Ebene „umgebaut“ werden. Als Zielstruktur benötigen wir einen erweiterten t -ären (hier binären) Baum mit $\deg(r(\tau))$ Blättern (hier also 3). Diese Struktur darf *nicht* die Leftist-Eigenschaft haben, denn dann würden andere Bäume auf das gleiche Bild abgebildet werden.

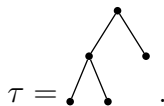
Das rekursiv gebildete Bild des Teilbaums τ_1 , $\text{lb}(\tau_1)$ wird ganz rechts in die oberste Ebene des Bildbaumes „eingehängt“; die Bilder der anderen Teilbäume, $\text{lb}(\tau_2)$ und $\text{lb}(\tau_3)$, werden von rechts nach links an die tieferen Blätter „eingehängt“.

- Die Abbildung bl führt die in Schritt (A3) der Abbildung lb durchgeführte Umordnung der Teilbäume im Schritt (B2), Gleichung (5.1) zurück.

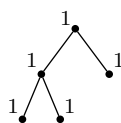
Die L -Dekomposition des abzubildenden Baums stellt dabei sicher, daß ein für diesen Schritt anwendbare Situation vorliegt, d. h. daß die entstehenden Teilbäume $\tau^{(i)}$, $1 \leq i \leq \|\tau^{(0)}\|$, der Form sind, daß mindestens ein Sohn der Wurzel ein Blatt ist.

- Falls die bei der Anwendung der Abbildung bl auszuführende L -Dekomposition als Ergebnis für $\tau^{(0)}$ einen Ein-Knoten-Baum liefert, weil alle Knoten des abzubildenden erweiterten t -ären (hier: binären) Baums mit 1 markiert wurden, so muß der gesamte Baum als $\tau^{(1)}$ betrachtet werden. Dann kann mit dem zweiten Teil der Abbildung bl fortgefahren werden, denn mindestens ein Sohn der Wurzel ist ein Blatt, und eine der im zweiten Teil der Abbildung bl angegebenen Regeln ist anwendbar.

Beispiel 5.1: Sei der erweiterte binäre Baum τ gegeben durch



Durch die Markierungsfunktion ξ der L -Dekomposition werden folgende Knotenmarkierungen vergeben:



Bei der Berechnung der L -Dekomposition entsteht als $\tau^{(0)}$ der Ein-Knoten-Baum,

$$\begin{aligned} \sigma_\tau &= (\tau^{(0)}, \tau^{(1)}) \\ &= \left(\bullet, \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right), \end{aligned}$$

und der Teilbaum $\tau^{(1)}$ kann nun mit Hilfe der Abbildungstabelle von bl abgebildet werden:

$$\tau^{(1)} = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \tau_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} .$$

- Im zweiten Teil der Abbildung bl , wenn die Teilbäume $\tau^{(i_p)}$ auf die jeweiligen Bild-Strukturen τ_{i_p} abgebildet werden, findet eine Fallunterscheidung statt. Sicher ist, daß die Wurzel des Teilbaums $\tau^{(i_p)}$ mindestens einen Sohn hat, der ein Blatt ist. Die Unterscheidung sucht nach demjenigen Blatt als direkten Nachfolger der Wurzel, das am weitesten links steht. Das in der Bedingung explizit dargestellte Blatt (das ein Kind von ℓ_{i_p} ist) „wandert“ in den unterschiedenen Fällen von links nach rechts durch. Die Teilbäume τ'' , τ''' , $\tau^{4'}$, ... könnten aus nur einem Knoten bestehen.

Für die Abbildungsvorschrift für größere t sollen diese Eigenschaften in entsprechender Form beibehalten werden.

5.2.1. Eine Abbildungsvorschrift für $t = 3$

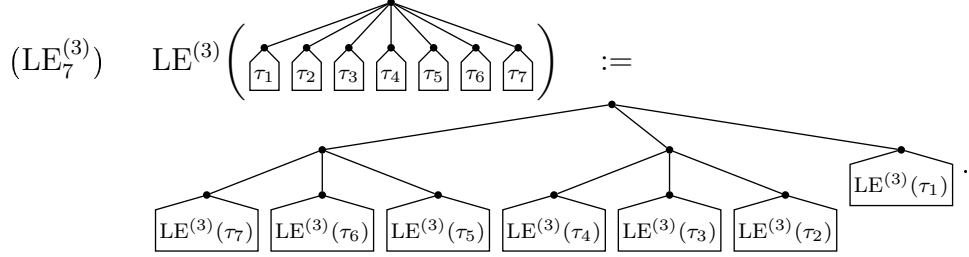
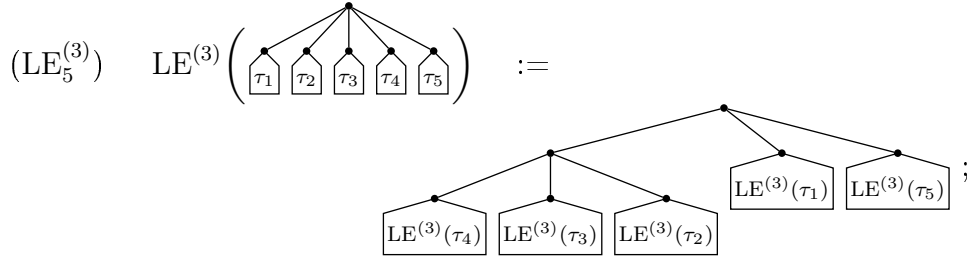
Für $t = 3$ betrachten wir Abbildungen zwischen den erweiterten 3-nären Bäumen mit m Blättern einerseits und Leftist-3, 5, 7-Bäumen andererseits.

(LE⁽³⁾) Die Transformation $\text{LE}^{(3)} : L_m^{(3,5,7)} \rightarrow E_m^{(3)}$:

Die Menge der erlaubten Knotengrade der Leftist-Bäume ist in diesem Fall gleich $\{0, 3, 5, 7\}$. Für jeden dieser Knotengrade benötigen wir eine Regel zur rekursiven Definition einer Abbildung $\text{LE}^{(3)} : L_m^{(3,5,7)} \rightarrow E_m^{(3)}$. Unter Beibehaltung der oben zusammengestellten Eigenschaften können wir die Abbildungen für $t = 3$ definieren:

$$(\text{LE}_0^{(3)}) \quad \text{LE}^{(3)}(\bullet) := \bullet;$$

$$(\text{LE}_3^{(3)}) \quad \text{LE}^{(3)}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \end{array}\right) := \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \boxed{\text{LE}^{(3)}(\tau_1)} \quad \boxed{\text{LE}^{(3)}(\tau_2)} \quad \boxed{\text{LE}^{(3)}(\tau_3)} \end{array};$$



(EL⁽³⁾) Die Transformation $\text{EL}^{(3)} : E_m^{(3)} \rightarrow L_m^{(3,5,7)}$:

Zur Definition einer Abbildung $\text{EL}^{(3)} : E_m^{(3)} \rightarrow L_m^{(3,5,7)}$ müssen wir zunächst den von R. Kemp definierten Begriff der L -Dekomposition (vgl. Def. 5.1) so erweitern, daß er auch auf erweiterte 3-näre Bäume anwendbar ist und das gleiche Ergebnis liefert.

Definition 5.2 (L -Dekomposition für erweiterte 3-näre Bäume)

Jedem Knoten x eines erweiterten 3-nären Baums $\tau \in E^{(3)}$, $\|\tau\| > 1$, wird eine Markierung $\xi(x)$ zugeordnet. Beginne dabei an der Wurzel r des Baums τ .

1. Falls alle drei Söhne von r innere Knoten sind, setze $\xi(r) := 0$; sonst $\xi(r) := 1$.
2. Falls der Vater eines Knotens $x \neq r$ die Markierung 0 besitzt und alle drei Söhne von x innere Knoten sind, setze $\xi(x) := 0$; sonst $\xi(x) := 1$.

Bezeichne nun den erweiterten 3-nären Baum mit der Wurzel r , der aus τ entsteht, indem alle Knoten entfernt werden, deren Vater mit 1 markiert ist, als $\tau^{(0)}$. Seien $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung; wir bezeichnen den erweiterten 3-nären Baum mit der Wurzel ℓ_i als $\tau^{(i)}$, für $1 \leq i \leq \|\tau^{(0)}\|$.

Die L -Dekomposition des Baums τ besteht dann aus der Folge

$$\sigma_\tau := \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)}.$$

5.2.2. Eine Abbildungsvorschrift für $t = 4$

Für $t = 4$ betrachten wir nun Abbildungen zwischen den erweiterten 4-nären Bäumen mit m Blättern einerseits und Leftist-4, 7, 10, 13-Bäumen andererseits.

(LE⁽⁴⁾) Die Transformation $\text{LE}^{(4)} : L_m^{(4,7,10,13)} \rightarrow E_m^{(3)}$:

Die Menge der erlaubten Knotengrade der Leftist-Bäume ist in diesem Fall gleich $\{0, 4, 7, 10, 13\}$. Für jeden dieser Knotengrade benötigen wir eine Regel zur rekursiven Definition einer Abbildung $\text{LE}^{(4)} : L_m^{(4,7,10,13)} \rightarrow E_m^{(4)}$. Unter Beibehaltung der oben zusammengestellten Eigenschaften können wir die Abbildungen für $t = 4$ definieren:

$$(\text{LE}_0^{(4)}) \quad \text{LE}^{(4)}(\bullet) := \bullet ;$$

$$(\text{LE}_4^{(4)}) \quad \text{LE}^{(4)} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \quad \tau_4 \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \text{LE}^{(4)}(\tau_1) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_2) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_3) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_4) \end{array} ;$$

$$(\text{LE}_7^{(4)}) \quad \text{LE}^{(4)} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_7 \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ \text{LE}^{(4)}(\tau_5) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_2) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_1) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_7) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_6) \end{array} ;$$

$$(\text{LE}_{10}^{(4)}) \quad \text{LE}^{(4)} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_{10} \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ \text{LE}^{(4)}(\tau_9) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_6) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_5) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_2) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_1) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_{10}) \end{array} ;$$

$$(\text{LE}_{13}^{(4)}) \quad \text{LE}^{(4)} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_{13} \end{array} \right) := \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ \text{LE}^{(4)}(\tau_{13}) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_{10}) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_9) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_6) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_5) \quad \dots \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_2) \quad \text{LE}^{(4)}(\tau_1) \end{array} .$$

5. Die Abbildungen

(EL⁽⁴⁾) Die Transformation $EL^{(4)}: E_m^{(3)} \rightarrow L_m^{(4,7,10,13)}$:

Zur Definition einer Abbildung $EL^{(4)}: E_m^{(4)} \rightarrow L_m^{(4,7,10,13)}$ müssen wir wieder den Begriff der L -Dekomposition (vgl. Def. 5.1) erweitern, so daß er jetzt auch auf erweiterte 4-näre Bäume anwendbar ist und wieder das gleiche Ergebnis liefert.

Definition 5.3 (L -Dekomposition für erweiterte 4-näre Bäume)

Jedem Knoten x eines erweiterten 4-nären Baums $\tau \in E^{(4)}$, $\|\tau\| > 1$, wird eine Markierung $\xi(x)$ zugeordnet. Beginne dabei an der Wurzel r des Baums τ .

1. Falls alle vier Söhne von r innere Knoten sind, setze $\xi(r) := 0$; sonst $\xi(r) := 1$.
2. Falls der Vater eines Knotens $x \neq r$ die Markierung 0 besitzt und alle vier Söhne von x innere Knoten sind, setze $\xi(x) := 0$; sonst $\xi(x) := 1$.

Bezeichne nun den erweiterten 4-nären Baum mit der Wurzel r , der aus τ entsteht, indem alle Knoten entfernt werden, deren Vater mit 1 markiert ist, als $\tau^{(0)}$. Seien $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung; wir bezeichnen den erweiterten 4-nären Baum mit der Wurzel ℓ_i als $\tau^{(i)}$, für $1 \leq i \leq \|\tau^{(0)}\|$.

Die L -Dekomposition des Baums τ besteht dann aus der Folge

$$\sigma_\tau := \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)}.$$

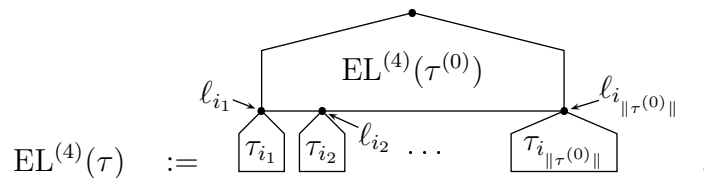
Die Abbildung $EL^{(4)}: E_m^{(4)} \rightarrow L_m^{(4,7,10,13)}$ kann dann wieder ähnlich wie bereits vorher beschrieben werden:

(EL _{$m=1$} ⁽⁴⁾) $EL^{(4)}(\bullet) := \bullet$;

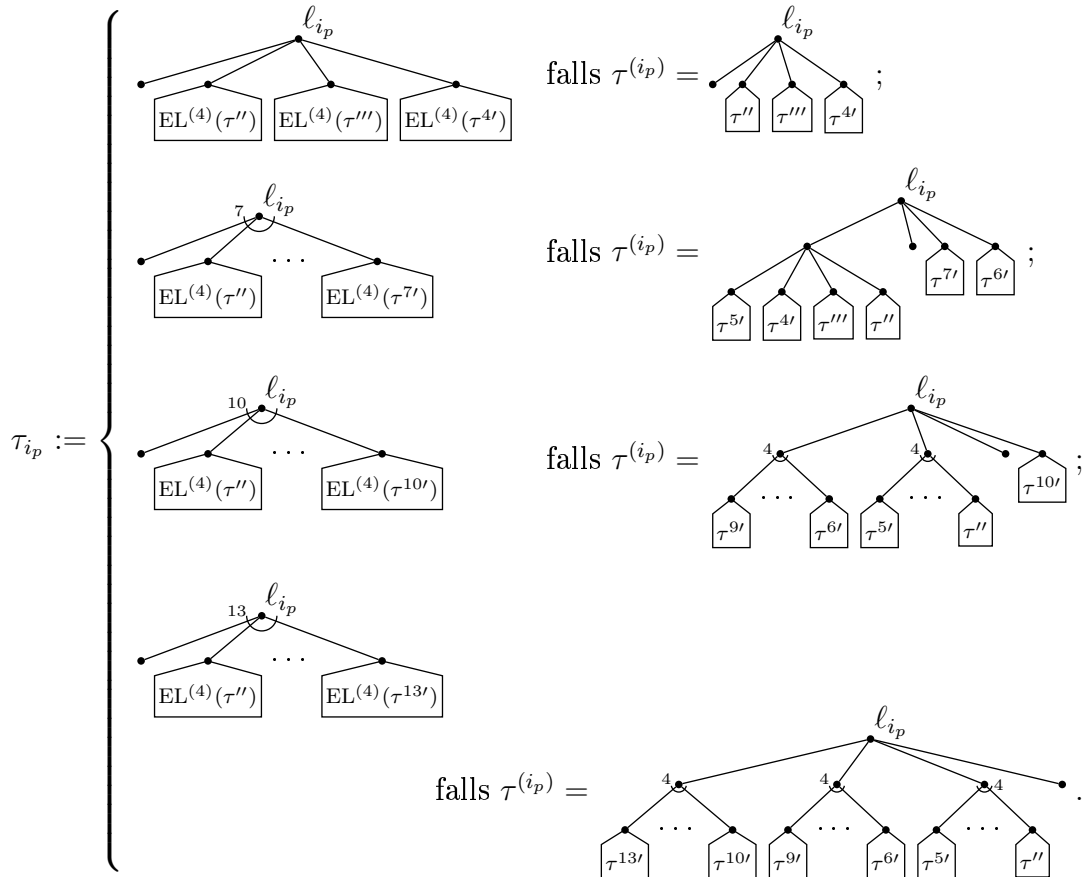
(EL _{$m>1$} ⁽⁴⁾) Der Baum $\tau \in E_m^{(4)}$ habe die L -Dekomposition

$$\sigma_\tau = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)},$$

und $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ seien die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung. Dann ist



Dabei ist für $1 \leq p \leq \|\tau^{(0)}\|$



Bei beiden Beispielen, sowohl für $t = 3$ als auch für $t = 4$, kann beobachtet werden, wie die Abbildung der $\tau^{(i_p)}$ auf die τ_{i_p} bei der Abbildung $EL^{(i)}$, $i \in \{3, 4\}$, die Regeln der jeweiligen Abbildungsregel aus der Abbildungsvorschrift für $LE^{(i)}$ widerspiegelt.

5.3. Allgemeine Definition der Abbildungen

Das Vorgehen, das in den vorangegangenen Beispielen für $t = 3$ und $t = 4$ demonstriert worden ist, soll jetzt für allgemeines t durchgeführt werden.

Im allgemeinen besitzen die betrachteten Leftist-Bäume die erlaubten Knotengrade

$$\{0, t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)\}.$$

Wir betrachten jetzt also Abbildungen zwischen den erweiterten t -ären Bäumen mit m Blättern einerseits und Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäumen andererseits.

5.3.1. Allgemeine Definition der Abbildung LE

Für alle im allgemeinen Fall erlaubten Knotengrade der betrachteten Menge der Leftist-Bäume müssen Regeln für die rekursiv anzuwendende Abbildung LE definiert werden. Bei der Unterscheidung nach dem Grad der Wurzel des abzubildenden Baums $\tau \in L_m^{(t, \dots)}$ können wir dabei die Fälle zusammenfassen, bei denen die Teilbäume bei der Abbildung „umgeordnet“ werden müssen, also die Fälle $\deg(r(\tau)) = 1 + i(t - 1)$ für $i > 1$.

Bemerkung: In diesen Fällen schreiben wir den Grad der Wurzel nicht mehr in der Form $1 + i(t - 1)$, sondern als $kt + j$, da uns dadurch die Durchnummerierung der Teilbäume etwas leichter fällt.

Für $\deg(r(\tau)) = 1 + i(t - 1)$ liefert die Abbildung LE $k = i - 1$ Teilbäume mit t weiteren Teilbäumen, die links von $LE(\tau_1)$ auf der 2. Ebene des entstehenden „Bild-Baumes“ eingebaut werden; auf der 1. Ebene werden dann noch j Teilbäume (einschließlich $LE(\tau_1)$) eingefügt.

Für i gilt in diesen Fällen $2 \leq i \leq t$, und somit ist

$$\begin{aligned} 1 + i(t - 1) &= it - i + 1 \\ &= \underbrace{(i - 1)t}_{=:k} + \underbrace{t - i + 1}_{=:j} \\ &= kt + j. \end{aligned}$$

An dieser Stelle leiten wir die zulässigen Werte für j aus den Beschränkungen für i her:

$$\begin{array}{rcl} 2 & \leq & i & \leq & t \\ -t & \leq & -i & \leq & -2 \\ t - t + 1 & \leq & t - i + 1 & \leq & t - 2 + 1 \\ 1 & \leq & j & \leq & t - 1. \end{array}$$

Für k gilt $1 \leq k + 1 \leq t \iff 0 \leq k \leq t - 1$. Somit hat die Wurzel des entstehenden „Bild-Baumes“ dann

$$k + j = (i - 1) + (t - i + 1) = t$$

Kinder.

5. Die Abbildungen

Formulieren wir also nun die Regeln für die Abbildung LE.

$$(LE_0) \quad LE(\bullet) := \bullet ;$$

$$(LE_t) \quad LE\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} t \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_t \end{array} \end{array}\right) := \begin{array}{c} \begin{array}{c} t \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{LE}(\tau_1) \quad \dots \quad \text{LE}(\tau_t) \end{array} \end{array} ;$$

(LE_{kt+j}) Für $\deg(r(\tau)) = kt + j > t$, das heißt mit $1 \leq k \leq t - 1$ und $j = t - k$, definieren wir die folgenden Regeln:

$$LE\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} kt+j \\ \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_{kt+j} \end{array} \end{array}\right) :=$$

Auf die Teilbäume $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{kt+j}$ wird rekursiv die LE-Abbildung angewendet. Die entstehenden Teilbäume $LE(\tau_1)$ bis $LE(\tau_{kt+j})$ werden nun in die gezeigte Struktur „eingehängt“. Dabei beginnt $LE(\tau_1)$ am Kind mit Nummer $k + 1$ in der Links-Rechts-Ordnung, danach wird der Reihe nach von rechts nach links aufgefüllt. Der Teilbaum Nummer k in $LE(\tau)$ beinhaltet (von rechts nach links) also die Teile $LE(\tau_2), LE(\tau_3), \dots, LE(\tau_{t+1})$; Teilbaum Nummer $k - 1$ beinhaltet die Teile $LE(\tau_{t+2})$ bis $LE(\tau_{2t+1})$; Teilbaum Nummer 1 beinhaltet die Teile $LE(\tau_{(k-1)t+2})$ bis $LE(\tau_{kt+1})$, jeweils von rechts nach links. Allgemein werden die Teile $LE(\tau_{(k-\mu)t+2})$ bis $LE(\tau_{(k-\mu+1)t+1})$ für $1 \leq \mu \leq k$ von rechts nach links in den Teilbaum Nummer μ von $LE(\tau)$ eingebaut. Übrig bleiben zunächst die $t - k - 1$ Teilbäume $LE(\tau_{kt+2})$ bis $LE(\tau_{kt+j})$. Diese werden von rechts nach links als die $t - k - 1$ Teilbäume von $LE(\tau)$ mit den Nummern $k + 1$ bis t eingehängt.

5.3.2. Allgemeine Definition der Abbildung EL

Zur Definition der Abbildung $EL: E_m^{(t)} \rightarrow L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ müssen wir den Begriff der L -Dekomposition jetzt auf allgemeines t erweitern:

Definition 5.4 (L -Dekomposition für erweiterte t -näre Bäume)

Jedem Knoten x eines erweiterten t -nären Baums $\tau \in E^{(t)}$, $\|\tau\| > 1$, wird eine Markierung $\xi(x)$ zugeordnet. Beginne dabei an der Wurzel r des Baums τ .

1. Falls alle Söhne von r innere Knoten sind, setze $\xi(r) := 0$; sonst $\xi(r) := 1$.
2. Falls der Vater eines Knotens $x \neq r$ die Markierung 0 besitzt und alle Söhne von x innere Knoten sind, setze $\xi(x) := 0$; sonst $\xi(x) := 1$.

Bezeichne nun den erweiterten t -nären Baum mit der Wurzel r , der aus τ entsteht, indem alle Knoten entfernt werden, deren Vater mit 1 markiert ist, als $\tau^{(0)}$. Seien $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung; wir bezeichnen den erweiterten t -nären Baum mit der Wurzel ℓ_i als $\tau^{(i)}$, für $1 \leq i \leq \|\tau^{(0)}\|$.

Die L -Dekomposition des Baums τ besteht dann aus der Folge

$$\sigma_\tau := \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \tau^{(2)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)}.$$

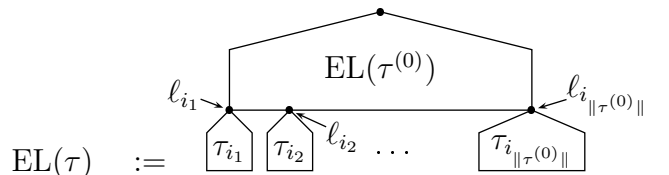
Auch die Abbildung EL wird rekursiv definiert. Wir unterscheiden bei der Abbildung EL zwei Regeln $EL_{m=1}$ und $EL_{m>1}$, die je nach der Anzahl der Blätter m des Baums $\tau \in E_m^{(t)}$ anzuwenden ist. Das heißt genauer: Bis auf den Fall des Ein-Knoten-Baums \bullet ist immer die Regel ($EL_{m>1}$) zu benutzen.

$$(EL_{m=1}) \quad EL^{(t)}(\bullet) := \bullet \quad ;$$

$$(EL_{m>1}) \quad \text{Der Baum } \tau \in E_m^{(t)} \text{ habe die } L\text{-Dekomposition}$$

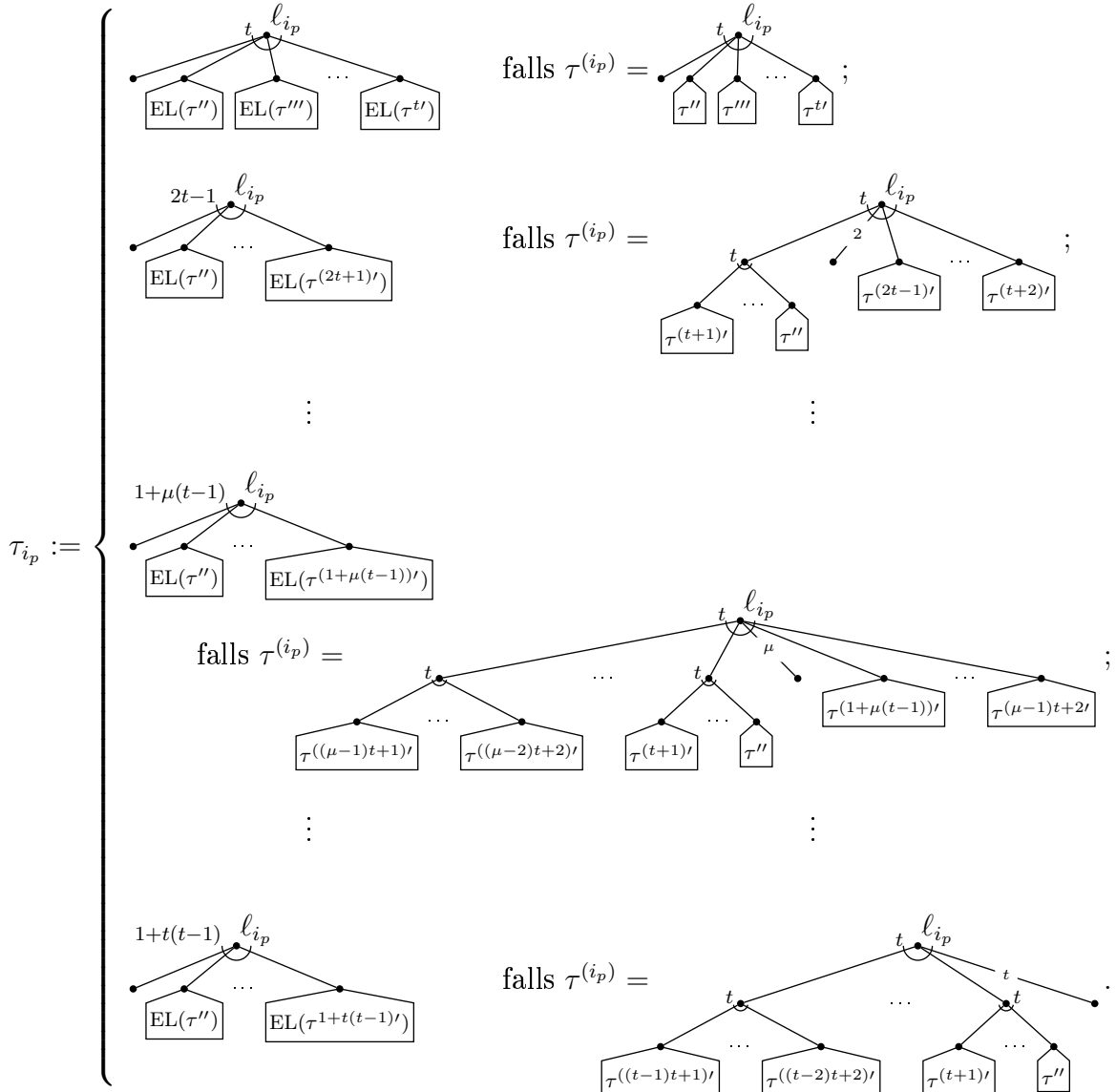
$$\sigma_\tau = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)},$$

und $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{\|\tau^{(0)}\|}$ seien die Blätter von $\tau^{(0)}$ in Links-Rechts-Ordnung. Dann ist



5. Die Abbildungen

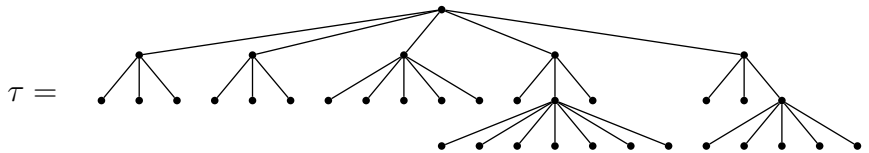
Dabei ist für $1 \leq p \leq \|\tau^{(0)}\|$



5.4. Beispiele

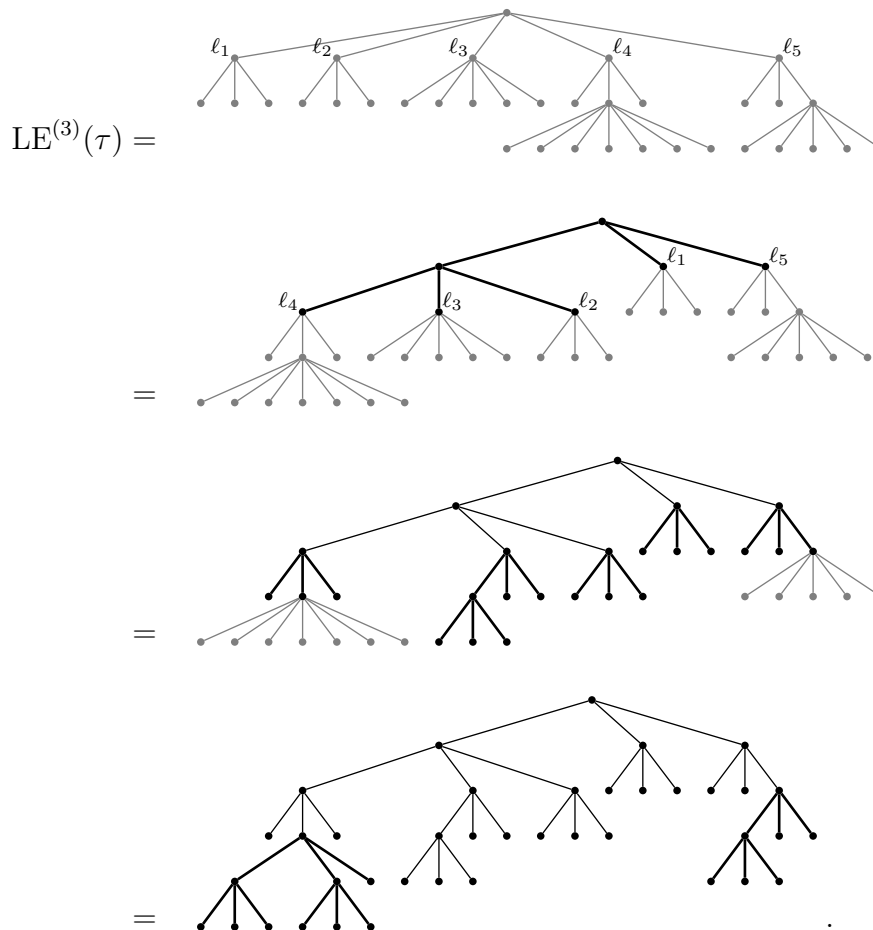
Beispiel 5.2 (Anwendung der Abbildung LE für $t = 3$):

Betrachten wir den Leftist-3, 5, 7-Baum



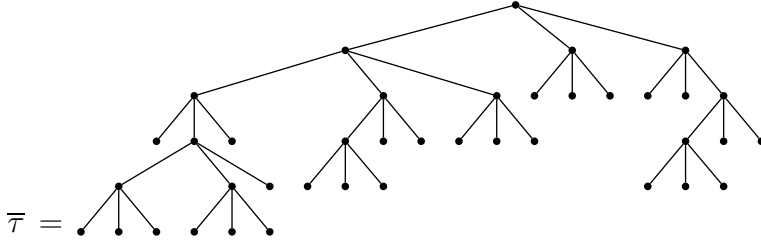
Auf die grauen Teile der abgebildeten Bäume muß jeweils die Abbildung LE noch angewendet werden, die schwarzen Teile sind bereits abgearbeitet. Durch fetteren Druck sind diejenigen Teile hervorgehoben, die in dem jeweiligen Schritt neu entstanden sind. Die Regel $(LE_0^{(t)})$, die für den Ein-Knoten-Baum zuständig ist, wird jeweils sofort ausgeführt.

Mit dieser vereinfachten Darstellung ergibt die Anwendung der Abbildung $LE^{(3)}$ auf den Baum τ

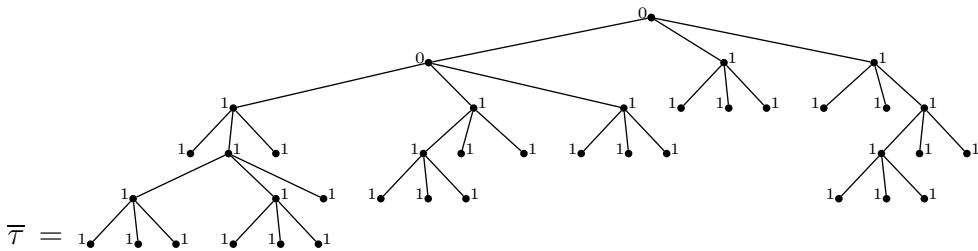


Beispiel 5.3 (Anwendung der Abbildung EL für $t = 3$):

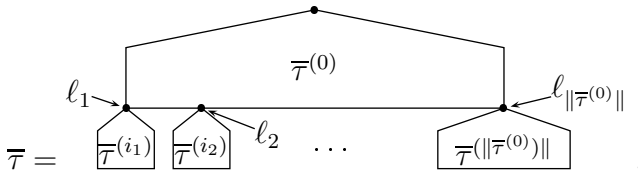
Nennen wir das Ergebnis $LE^{(3)}(\tau)$ des obigen Beispiels $\bar{\tau}$ und sehen uns an, wie die Abbildung $EL^{(3)}$ auf dieser Eingabe arbeitet. Für



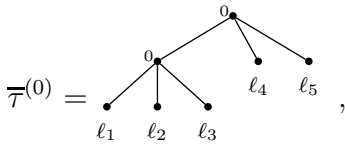
führen wir mit Hilfe der Markierungsfunktion ξ die L -Dekomposition durch:



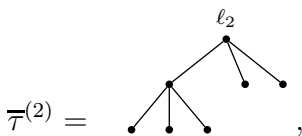
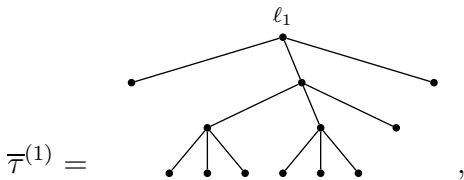
Es ist



und dabei ist der Teilbaum $\bar{\tau}^{(0)}$



und wir sehen, daß $\|\bar{\tau}^{(0)}\| = 5$ ist; die weiteren Teilbäume haben die folgenden Formen:



5. Die Abbildungen

$$\bar{\tau}^{(3)} = \begin{array}{c} \ell_3 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array},$$

$$\bar{\tau}^{(4)} = \begin{array}{c} \ell_4 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array},$$

$$\bar{\tau}^{(5)} = \begin{array}{c} \ell_5 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}.$$

Für $\text{EL}(\bar{\tau})$ gilt

$$\text{EL}(\bar{\tau}) = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ \ell_{i_1} \quad \text{EL}(\bar{\tau}^{(0)}) \quad \ell_{i_5} \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{\bar{\tau}_{i_1}} \quad \boxed{\bar{\tau}_{i_2}} \quad \dots \quad \boxed{\bar{\tau}_{i_5}} \end{array}.$$

Schauen wir uns zuerst einmal $\text{EL}(\bar{\tau}^{(0)})$ an. Die Markierungsfunktion ξ markiert alle Knoten von $\bar{\tau}^{(0)}$ mit 1, und dementsprechend ist die L -Dekomposition von $\bar{\tau}^{(0)}$

$$\sigma_{\bar{\tau}^{(0)}} = (\bar{\tau}^{(0)}, \bar{\tau}^{(1)}) = (\bullet, \bar{\tau}^{(0)}),$$

und die Abbildungsvorschrift EL gibt für diesen Fall an:

$$\bar{\tau}^{(1)} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \quad \quad \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau}_1 = \begin{array}{c} \ell_1 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \ell_{1,1} \quad \ell_{1,2} \quad \ell_{1,3} \quad \ell_{1,4} \quad \ell_{1,5} \end{array}.$$

Wir erhalten $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (4, 3, 2, 1, 5)$, und

$$\text{EL}(\bar{\tau}) = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \quad \diagdown \\ \boxed{\bar{\tau}_4} \quad \boxed{\bar{\tau}_3} \quad \boxed{\bar{\tau}_2} \quad \boxed{\bar{\tau}_1} \quad \boxed{\bar{\tau}_5} \end{array}.$$

Die Teilbäume $\bar{\tau}_\mu$ entstehen dabei aus den Teilbäumen $\bar{\tau}^{(\mu)}$ durch die Anwendung der Abbildungsvorschrift EL . Diese Teilbäume werden wir im folgenden genauer untersuchen.

Für die Umwandlung von $\bar{\tau}^{(2)}$ nach $\bar{\tau}_2$ gilt das gleiche wie für $\bar{\tau}_0$, denn $\bar{\tau}^{(2)}$ besitzt die gleiche Struktur wie $\bar{\tau}^{(0)}$; also gilt

$$\bar{\tau}_2 = \begin{array}{c} \ell_2 \\ \diagup \quad | \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}.$$

5. Die Abbildungen

Die Teilbäume $\bar{\tau}^{(3)}$ und $\bar{\tau}^{(4)}$ bleiben durch die Abbildung EL unverändert:

$$\bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} .$$

Zur weiteren Betrachtung steht noch der Teilbaum

$$\bar{\tau}^{(1)} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \quad / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}$$

aus. Das am weitesten links stehende Blatt befindet sich an Position 1; die Abbildungsvorschrift EL schreibt für diesen Fall vor, keine Umordnung der Kinder vorzunehmen und die Abbildungsvorschrift EL jeweils auf die Teilbäume anzuwenden. $\bar{\tau}^{(1)}$ besitzt nur einen nicht-trivialen Teilbaum an Position 2. Die Markierungsfunktion ξ markiert darin alle Knoten mit 1, und nur der zweite Teil der Abbildung EL wird angewendet:

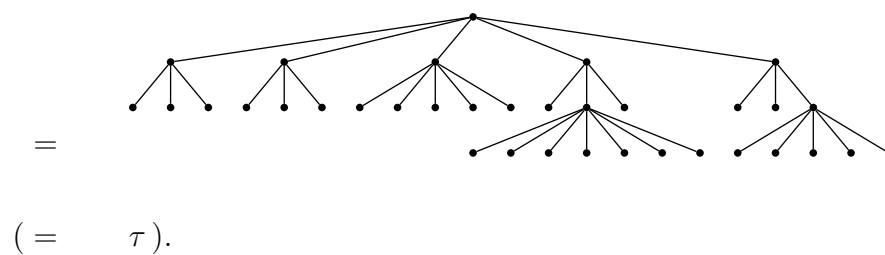
$$\bar{\tau}^{(1)} = \begin{array}{c} \ell_1 \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \quad / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau}_1 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \quad / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} .$$

Mit einer analogen Argumentation folgt für den Teilbaum $\bar{\tau}^{(5)}$:

$$\bar{\tau}^{(5)} = \begin{array}{c} \ell_5 \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \quad / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \bar{\tau}_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \quad / \quad | \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} .$$

Jetzt können die Teilergebnisse zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned} \text{EL}(\bar{\tau}) &= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \text{EL}(\bar{\tau}^{(0)}) \\ / \quad | \quad \backslash \\ \boxed{\bar{\tau}_{i_1}} \quad \boxed{\bar{\tau}_{i_2}} \quad \dots \quad \boxed{\bar{\tau}_{i_5}} \\ \ell_{i_1} \quad \ell_{i_2} \quad \dots \quad \ell_{i_5} \end{array} \\ &= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad | \quad \backslash \\ \boxed{\bar{\tau}_4} \quad \boxed{\bar{\tau}_3} \quad \boxed{\bar{\tau}_2} \quad \boxed{\bar{\tau}_1} \quad \boxed{\bar{\tau}_5} \end{array} \end{aligned}$$



6. Beweis der 1–1-Korrespondenz

Nun muß gezeigt werden, daß die Abbildungen LE und EL je eine Bijektion zwischen den Baumklassen $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $E_m^{(t)}$ darstellen. Außerdem ist zu beweisen, daß sie jeweils zueinander Umkehrfunktionen sind: $LE \stackrel{!}{=} EL^{(-1)}$.

Satz 6.1 hält zunächst fest, daß die Abbildung LE die Anzahl der Blätter eines Baums τ unverändert läßt. Auf diese Eigenschaft werden wir im Laufe der folgenden Beweise öfter zurückgreifen. Satz 6.2 weist die Wohldefiniertheit der Abbildung LE nach. Danach zeigen die Sätze 6.3 und 6.4 die entsprechenden Eigenschaften für die Abbildung EL.

Satz 6.5 wird die Injektivität der Abbildung LE nachweisen, die Surjektivität folgt dann aus der Gleichmächtigkeit von Bild- und Urbildmenge. Für den Nachweis, daß LE und EL jeweils die Umkehrfunktionen voneinander sind, werden die Sätze 6.7 und 6.8 zeigen, daß die Hintereinanderausführungen der beiden definierten Abbildungen jeweils gleich der Identischen Abbildung sind. Das schließt den Nachweis der 1–1-Korrespondenz ab.

Satz 6.1 (LE verändert die Anzahl der Blätter nicht)

Für alle $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gilt: $\|\tau\| = \|\text{LE}(\tau)\| = m$.

Beweis:

Der Beweis wird durch vollständige Induktion nach der Anzahl m der Blätter geführt.

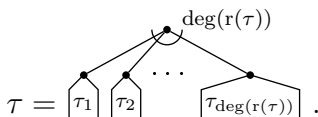
Induktionsverankerung: Sei $m = 1$.

Es ist $\tau = \bullet$, und $\text{LE}(\tau) = \bullet$ nach Definition der Abbildung LE.

Induktionsschritt: Sei $m > 1$. Es gelte die Induktionsvoraussetzung

$$(\forall k < m) (\|\tau\| = k \implies \|\text{LE}(\tau)\| = k). \quad (6.1)$$

Der Leftist-Baum τ habe die Form



6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

Die Anzahl der Blätter $\|\tau\|$ ergibt sich aus der Summe der Blatt-Anzahlen seiner Teilbäume τ_i für $1 \leq i \leq \deg(r(\tau))$:

$$\|\tau\| = \sum_{1 \leq i \leq \deg(r(\tau))} \|\tau_i\| .$$

Diese Teilbäume besitzen jeweils $\|\tau_i\|$ Blätter, und für jeden dieser Teilbäume gilt, daß die Anzahl seiner Blätter echt kleiner als die Anzahl der Blätter von τ ist: $\|\tau_i\| < m$. Damit gilt nach Induktionsvoraussetzung (6.1) für alle i mit $1 \leq i \leq \deg(r(\tau))$:

$$\|\tau_i\| = \|\text{LE}(\tau_i)\| .$$

Unabhängig von der zu benutzenden Regel der Abbildung LE ergibt sich die Anzahl der Blätter von $\text{LE}(\tau)$ aus der Summe der Anzahlen der Blätter seiner Teilbäume; die verschiedenen Regeln unterscheiden lediglich die Permutation der Teilbäume. Das heißt,

$$\begin{aligned} \|\tau\| &= \sum_{1 \leq i \leq \deg(r(\tau))} \|\tau_i\| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq \deg(r(\tau))} \|\text{LE}(\tau_i)\| \\ &= \|\text{LE}(\tau)\| . \end{aligned}$$

■

Satz 6.2

Die Abbildung LE ist wohldefiniert.

Beweis:

Die Wurzel eines Leftist-Baums $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ hat einen (eindeutig bestimmten) Knotengrad $d = \deg(r(\tau)) \in \{0, t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1)\}$. Für jeden dieser Knotengrade d ist genau eine Regel der Vorschrift LE anwendbar, nämlich die Regel (LE_d) .

Die Konstruktion der Abbildung LE stellt sicher, daß für einen Leftist-Baum $\tau \in L_m^{(t, \dots)}$ alle Knoten in $\text{LE}(\tau)$ den Knotengrad 0 oder t erhalten. Außerdem gilt nach Satz 6.1 $\|\tau\| = \|\text{LE}(\tau)\|$. Damit ist für jeden Leftist-Baum $\tau \in L_m^{(t, \dots)}$ eine Abbildungsvorschrift eindeutig festgelegt, und sein Bild $\text{LE}(\tau)$ liegt immer in $E_m^{(t)}$. Damit ist nachgewiesen, daß LE eine wohldefinierte Abbildung von $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ nach $E_m^{(t)}$ ist. ■

Satz 6.3 (EL verändert die Anzahl der Blätter nicht)

Für alle $\tau \in E_m^{(t)}$ gilt: $\|\tau\| = \|\text{EL}(\tau)\| = m$.

Beweis:

Beweis durch Induktion nach der Anzahl m der Blätter von τ .

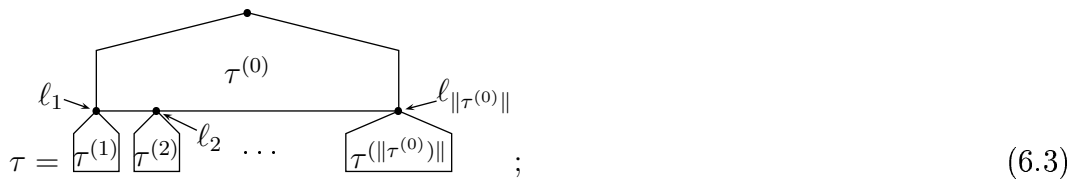
Induktionsverankerung: Sei $m = 1$. Es gibt nur einen erweiterten t -ären Baum mit einem Blatt, nämlich $\tau = \bullet$. Nach der Definition der Abbildung EL ist

$$\text{EL}(\bullet) = \bullet.$$

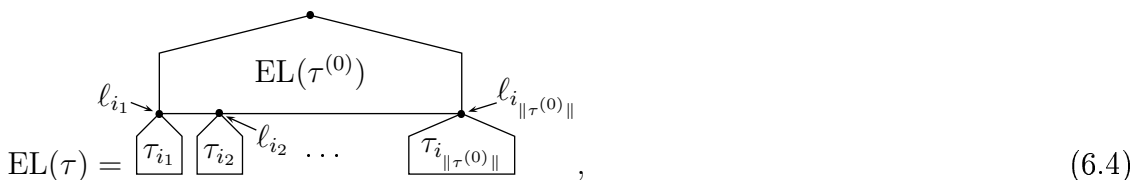
Induktionsschritt: Sei $m > 1$. Es gelte die Induktionsvoraussetzung

$$(\forall k < m) (\|\tau\| = k \implies \|\text{EL}(\tau)\| = k). \quad (6.2)$$

Auf den Baum τ wenden wir jetzt die Abbildungsvorschrift EL an. Wir bilden die L -Dekomposition $\sigma_\tau = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)}$ und erhalten die Darstellung



und durch Anwendung der Abbildung EL erhalten wir



wobei die τ_{i_j} (für $1 \leq j \leq \|\tau^{(0)}\|$), wie in der Definition der Abbildung EL angegeben, jeweils aus $\tau^{(i_j)}$ entstehen.

Durch die Eigenschaften der L -Dekomposition und durch die Tatsache, daß der Knotengrad 1 nicht erlaubt ist, ist sichergestellt, daß der durch die L -Dekomposition „abgeschnittene“ Baum $\tau^{(0)}$ echt weniger Blätter besitzt als τ ; mit der Induktionsvoraussetzung (6.2) erhalten wir als erstes Zwischenergebnis

$$\|\tau^{(0)}\| = \|\text{EL}(\tau^{(0)})\|.$$

Beim Abbilden der Teilbäume $\tau^{(i_j)}$ auf die Teilbäume τ_{i_j} durch den zweiten Teil der Abbildungsvorschrift EL wird die Anwendung der Abbildung EL an die Unter-Teilbäume

„weitergeleitet“. Diese besitzen echt weniger Blätter als τ , und auch hier kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, um festzuhalten:

$$(\forall j: 1 \leq j \leq \|\tau^{(0)}\|) (\|\tau^{(i_j)}\| = \|\tau_{i_j}\|) . \quad (6.5)$$

Aus der Darstellung von $\text{EL}(\tau)$ in Gleichung (6.4) läßt sich erkennen, daß sich die Anzahl der Blätter von $\text{EL}(\tau)$ aus der Summe der Blatt-Anzahlen der Teilbäume τ_{i_j} zusammensetzt. Andererseits war die Anzahl der Blätter von τ gegeben durch die Summe der Blatt-Anzahlen der Teilbäume $\tau^{(j)}$ (vgl. Gleichung (6.3)), und wir können zusammenfassend feststellen:

$$\begin{aligned} \|\tau\| &= \sum_{1 \leq j \leq \|\tau^{(0)}\|} \|\tau^{(j)}\| && \text{wegen Gl. (6.3)} \\ &= \sum_{1 \leq j \leq \|\tau^{(0)}\|} \|\tau_{i_j}\| && \text{wegen Gl. (6.5)} \\ &= \|\text{EL}(\tau)\| && \text{wegen Gl. (6.4).} \end{aligned}$$

■

Satz 6.4

Die Abbildung EL ist wohldefiniert.

Beweis:

Für jeden erweiterten t -ären Baum $\tau \in E_m^{(t)}$ ist die L -Dekomposition anwendbar und eindeutig; die Abbildung EL ist folglich für jeden solchen Baum τ anwendbar.

Der zweite Teil der Abbildungsvorschrift EL stellt dann sicher, daß alle Teilbäume τ_{i_p} , die in die entstehende Struktur eingebaut werden, Leftist-Bäume mit einer Links-Pfad-Länge von 2 sind, und die Wurzeln dieser Teilbäume können durch die Abbildungsvorschrift nur solche Knotengrade bekommen, die in der Menge der erlaubten Knotengrade liegen. Wegen der Eigenschaften des 2-cut (Fakt 2.1) ist gewährleistet, daß durch das Zusammensetzen dieser Leftist-Bäume mit $\text{EL}(\tau^{(0)})$ wieder ein Leftist-Baum entsteht, in dem alle Knoten nur erlaubte Grade haben. Durch Satz 6.3 schließlich ist gegeben, daß auch das Bild der Abbildung EL wieder m Blätter besitzt und zu $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gehört. ■

Satz 6.5

Die Abbildung $\text{LE}: L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} \rightarrow E_m^{(t)}$ ist injektiv.

Beweis:

Wir werden die Gültigkeit der Implikation „Injektivität der Abbildung LE für feste Blattzahl m “

$$R_m : \iff (\forall \tau, \tau' \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}) (\tau \neq \tau' \implies \text{LE}(\tau) \neq \text{LE}(\tau')) \quad (6.6)$$

6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

für alle m durch Induktion nach der Anzahl der Blätter m zeigen. Beachte, daß m nur bestimmte Werte annehmen kann: $m \equiv 1 \pmod{t-1}$ (Sätze 2.1 und 2.3). Wir schreiben also m in der Form $m = 1 + i(t-1)$ und führen die Induktion nach i durch.

Induktionsverankerung:

Sei $i = 0$.

$$L_1^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} = \{\bullet\} = E_1^{(t)} \implies R_1 \text{ gilt.}$$

Sei $i = 1$.

$$L_t^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\} = E_t^{(t)} \implies R_t \text{ gilt.}$$

Sei $i = 2$.

$$L_{2t-1}^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^{2t-1}, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t, \dots, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t$$

und

$$E_{2t-1}^{(t)} = \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t, \dots, \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right\}^t \};$$

nach Regel (LE_{2t-1}) (das ist die Regel „ (LE_{kt+j}) “ aus der Definition der Abbildung LE für $k = 1$ und $j = t - 1$) ist

$$LE \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \right)^{2t-1} = \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \end{array}^t,$$

und die anderen Elemente aus $L_{2t-1}^{(t, \dots)}$ werden durch zweimalige Anwendung der Regel (LE_t) jeweils identisch auf die Elemente aus $E_{2t-1}^{(t)}$ abgebildet.

$$\implies R_{2t-1} \text{ gilt.}$$

Induktionsschritt:

Es gelte $i \geq 3$. Darüberhinaus gelte die Induktionsvoraussetzung $R_{1+k(t-1)}$ für $k < i$.

Seien nun $\tau, \tau' \in L_{1+i(t-1)}^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $\tau \neq \tau'$.

Fall 1: $\deg(r(\tau)) = \deg(r(\tau'))$

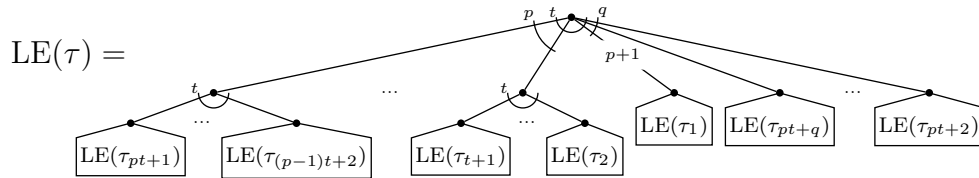
Es seien p und q so gewählt, daß $\deg(r(\tau)) = \deg(r(\tau')) = pt + q$, und p sei maximal mit dieser Eigenschaft, so daß $q < t$.

6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

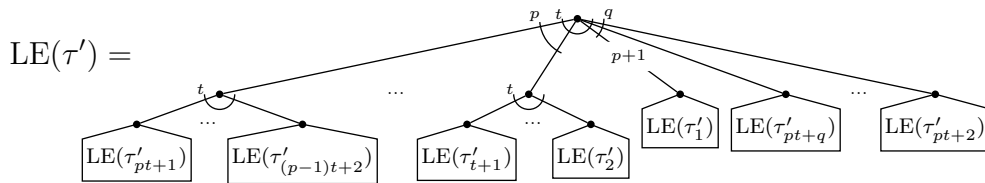
Die Bäume τ und τ' haben die Form



Die Anwendung der Abbildung LE ergibt jeweils:



und



Es muß nun nachgewiesen werden, daß $\text{LE}(\tau)$ und $\text{LE}(\tau')$ verschieden sind, also daß es mindestens ein μ gibt mit $1 \leq \mu \leq pt + q$, so daß $\text{LE}(\tau_\mu) \neq \text{LE}(\tau'_\mu)$.

Annahme:

$$(\forall \mu : 1 \leq \mu \leq pt + q) \quad (\text{LE}(\tau_\mu) = \text{LE}(\tau'_\mu)). \quad (6.7)$$

Dann gilt für diese μ :

$$\begin{aligned} \|\tau_\mu\| &= \|\text{LE}(\tau_\mu)\| && \text{wegen Satz 6.1} \\ &= \|\text{LE}(\tau'_\mu)\| && \text{wegen Gl. (6.7)} \\ &= \|\tau'_\mu\| && \text{wegen Satz 6.1} \\ &< 1 + i(t-1), \end{aligned}$$

und aus der Gültigkeit der Induktionsvoraussetzung $R_{\|\tau_\mu\|}$ folgt

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \tau'_\mu && \text{für alle } 1 \leq \mu \leq pt + q \\ \implies \tau &= \tau' \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\tau \neq \tau'$.

Die Annahme ist also widerlegt, es muß gelten:

$$\begin{aligned} &(\exists \mu \in \{1, 2, \dots, pt + q\}) \quad (\text{LE}(\tau_\mu) \neq \text{LE}(\tau'_\mu)) \\ \implies &\text{LE}(\tau) \neq \text{LE}(\tau') \\ \implies &R_{1+i(t-1)} \text{ gilt.} \end{aligned}$$

6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

Fall 2: $\deg(r(\tau)) \neq \deg(r(\tau'))$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\deg(r(\tau)) < \deg(r(\tau'))$. Es seien p und q sowie p' und q' so gewählt, daß gilt:

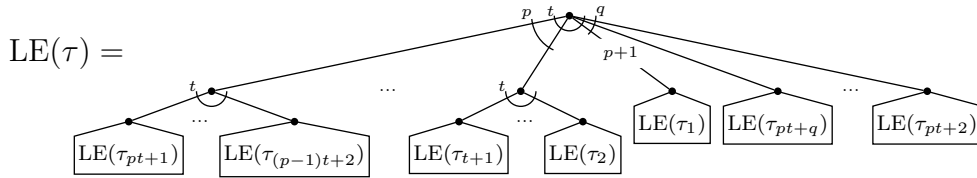
$$\begin{aligned} \deg(r(\tau)) &= pt + q \\ \deg(r(\tau')) &= p't + q', \end{aligned} \quad \text{also } p < p'.$$

Wieder seien p und p' maximal gewählt, so daß $q, q' < t$. An dieser Stelle können wir auch feststellen, daß $q' < q$ gelten muß, denn es gilt für beide Bäume: $p + q = t$ und $p' + q' = t$.

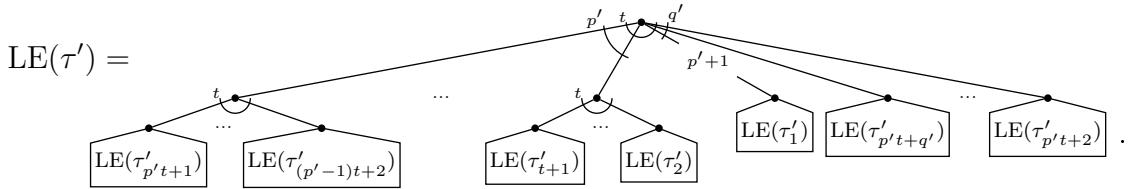
Betrachte die Bäume



Die Anwendung der Abbildungsvorschrift LE ergibt jeweils



und



Annahme:

Es gilt: $LE(\tau) = LE(\tau')$.

Unter dieser Annahme müssen wir den Teilbaum $LE(\tau'_1)$ auch in $LE(\tau)$ wiederfinden. Da $p' > p$ ist, kann er nur einer der Teilbäume $LE(\tau_{pt+q}), LE(\tau_{pt+q-1}), LE(\tau_{pt+q-2}), \dots, LE(\tau_{pt+q-(q-2)}) = LE(\tau_{pt+2})$ sein; genauer: Für $p' = p + 1$ ist $LE(\tau'_1) = LE(\tau_{pt+q})$; für $p' = p + 2$ ist $LE(\tau'_1) = LE(\tau_{pt+q-1})$, und im allgemeinen ist

$$LE(\tau'_1) = LE(\tau_{pt+q-(p'-p-1)}). \quad (6.8)$$

Für die Teilbäume $LE(\tau'_1)$ und $LE(\tau_{pt+q-(p'-p-1)})$ gilt die Induktionsvoraussetzung, denn

$$\begin{aligned} k_1 &:= \|\tau_{pt+q-(p'-p-1)}\| \\ &= \|LE(\tau_{pt+q-(p'-p-1)})\| \end{aligned} \quad \text{wegen Satz 6.1}$$

6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

$$\begin{aligned}
 &= \|\text{LE}(\tau'_1)\| && \text{wegen Gl. (6.8)} \\
 &= \|\tau'_1\| && \text{wegen Satz 6.1} \\
 &< 1 + i(t-1),
 \end{aligned}$$

und aus der Gültigkeit von R_{k_1} folgt

$$\tau'_1 = \tau_{pt+q-(p'-p-1)}. \tag{6.9}$$

Auch der Teilbaum $\text{LE}(\tau_1)$ muß sich im Baum $\text{LE}(\tau')$ auffinden lassen; da $p < p'$, müssen wir links von $\text{LE}(\tau'_1)$ suchen.

Für $p' = p + 1$: $\text{LE}(\tau_1) =$

Für $p' = p + 2$: $\text{LE}(\tau_1) =$

und im allgemeinen ist

$$\text{LE}(\tau_1) = \text{LE}(\tau'_{(p'-p)t+1}) \dots \text{LE}(\tau'_{(p'-p-1)t+2}). \tag{6.10}$$

Betrachten wir nun den Teilbaum τ_1 genauer. τ_1 kann wegen Gleichung (6.10) nicht nur ein Ein-Knoten-Baum sein. Setze p_1 und q_1 so, daß $\text{deg}(r(\tau_1)) = p_1 t + q_1$ (und p_1 maximal mit dieser Eigenschaft ist, so daß $q_1 < t$). Der Teilbaum τ_1 kann dann dargestellt werden als

$$\tau_1 =$$

$$\tag{6.11}$$

Die Anwendung der Abbildungsvorschrift LE auf τ_1 ergibt

$$\text{LE}(\tau_1) =$$

$$\tag{6.12}$$

Ein Vergleich mit der Darstellung in Gleichung (6.10) zeigt:

$$\begin{aligned} \text{LE}(\tau_{1,1}) &= \text{LE}(\tau'_{(p'-p)t+1-(p_1+1-1)}) \\ &= \text{LE}(\tau'_{(p'-p)t+1-p_1}). \end{aligned} \quad (6.13)$$

In ähnlicher Weise wie oben schon folgt auch hier

$$\begin{aligned} k_2 &:= \|\tau'_{(p'-p)t+1-p_1}\| \\ &= \|\text{LE}(\tau'_{(p'-p)t+1-p_1})\| && \text{wegen Satz 6.1} \\ &= \|\text{LE}(\tau_{1,1})\| && \text{wegen Gl. (6.13)} \\ &= \|\tau_{1,1}\| && \text{wegen Satz 6.1} \\ &< 1 + i(t-1), \end{aligned}$$

und aus der Gültigkeit von R_{k_2} folgt

$$\tau'_{(p'-p)t+1-p_1} = \tau_{1,1}. \quad (6.14)$$

Nun ergibt sich für den Teilbaum $\tau_{pt+q-(p'-p-1)}$, der in τ ein Bruder von τ_1 ist und rechts von τ_1 steht, daß seine Links-Pfad-Länge $\text{LBL}(\tau_{pt+q-(p'-p-1)})$ echt kleiner sein muß als die des Teilbaums τ_1 , denn es gilt:

$$\begin{aligned} \text{LBL}(\tau_{pt+q-(p'-p-1)}) &= \text{LBL}(\tau'_1) && \text{wegen Gl. (6.9)} \\ &\leq \text{LBL}(\tau'_{(p'-p)t+1-p_1}) && \text{denn } \tau' \text{ ist ein Leftist-Baum} \\ &= \text{LBL}(\tau_{1,1}) && \text{wegen Gl. (6.14)} \\ &= \text{LBL}(\tau_1) - 1 && \text{wegen Gl. (6.11)}. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zur Tatsache, daß τ die Leftist-Eigenschaft besitzt.

Die Annahme tritt also nicht ein, und es gilt $\text{LE}(\tau) \neq \text{LE}(\tau')$.

$$\implies R_{1+i(t-1)} \text{ gilt.}$$

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen und somit die Injektivität der Abbildung $\text{LE}: L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} \rightarrow E_m^{(t)}$ nachgewiesen. ■

Satz 6.6

Die Abbildung $\text{LE}: L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))} \rightarrow E_m^{(t)}$ ist bijektiv.

Beweis:

$L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $E_m^{(t)}$ sind endlich und gleichmächtig, und LE ist injektiv. Daraus folgt zunächst die Surjektivität von LE und damit die Bijektivität. ■

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Abbildung EL die Umkehrabbildung von LE darstellt. Hierzu betrachten wir die Hintereinanderausführungen dieser beiden Abbildungen. Satz 6.7 beschäftigt sich mit $\text{EL} \circ \text{LE}$, und Satz 6.8 wird die Hintereinanderausführung $\text{LE} \circ \text{EL}$ untersuchen.

Satz 6.7

Für alle Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäume $\tau \in L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ gilt:

$$(\text{EL} \circ \text{LE})(\tau) = \tau.$$

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach m , der Anzahl der Blätter von τ .

Induktionsverankerung: Sei $m = 1$.

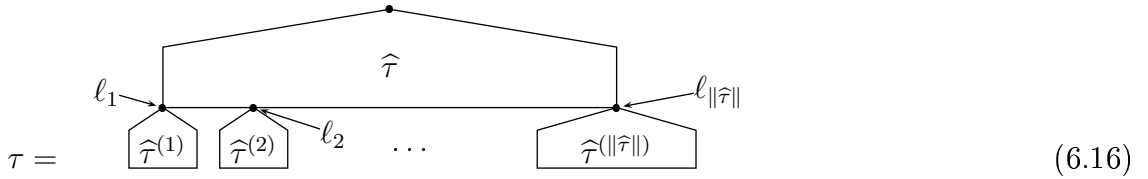
Es gibt nur einen Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Baum $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ mit einem Blatt, das ist $\tau = \bullet$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{EL}(\text{LE}(\bullet)) &= \text{EL}(\bullet) \\ &= \bullet. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei nun $m > 1$. Als Induktionsvoraussetzung gelte

$$(\forall k: 1 \leq k < m) \quad (\forall \tau \in L_k^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}) \quad (\text{EL}(\text{LE}(\tau)) = \tau). \quad (6.15)$$

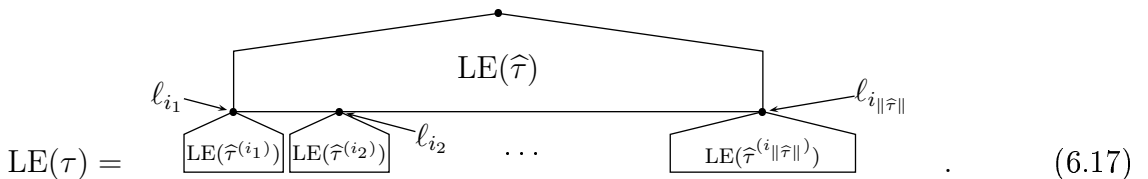
Sei $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$. Durch einen 2-cut (siehe Fakt 2.1, Seite 9) kann der Leftist-Baum τ eindeutig dargestellt werden als



mit $\hat{\tau}^{(i)} \in L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $\text{LBL}(\hat{\tau}^{(i)}) = 2$ für $1 \leq i \leq \|\hat{\tau}\|$. Außerdem ist auch $\hat{\tau} \in L^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $\|\hat{\tau}\| < m$. (Die Teilbäume $\tau^{(i)}$ müssen mehr als ein Blatt besitzen, denn sie haben eine Links-Pfad-Länge von 2, und der Knotengrad 1 ist nicht erlaubt.)

Auf diese Darstellung des Leftist-Baumes τ können wir nun die Abbildungsvorschrift LE anwenden, denn die Abbildung ist rekursiv so definiert, daß sie sich ausgehend von der Wurzel des Baums τ schrittweise auf die Teilbäume „fortsetzt“. Die Tatsache, daß auch der „Teilbaum“ $\hat{\tau}$ von τ ein Leftist-Baum aus $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ ist, gewährleistet dabei, daß die Darstellung explizit auf den durch den 2-cut vorgenommenen Schnitt fokussiert werden kann.

Wir erhalten die Darstellung:



6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

Für die Teilbäume $\widehat{\tau}^{(i_\mu)}$ mit $1 \leq \mu \leq \|\widehat{\tau}\|$ gilt nach Konstruktion $\text{LBL}(\widehat{\tau}^{(i_\mu)}) = 2$. Seien p_μ und q_μ so gewählt, daß $\deg(r(\tau^{(i_\mu)})) = p_\mu t + q_\mu$, und sei p_μ maximal mit dieser Eigenschaft, so daß $q_\mu < t$. Die $\widehat{\tau}^{(i_\mu)}$ besitzen die Form

$$\widehat{\tau}^{(i_\mu)} = \begin{array}{c} \text{---} p_\mu t + q_\mu \\ \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \boxed{\overline{\tau}_2} \quad \dots \quad \boxed{\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu}} \end{array}, \quad (6.18)$$

denn für sie gilt $\text{LBL}(\widehat{\tau}_{i_\mu}) = 2$, und durch Anwendung der Abbildung LE folgt:

$$\text{LE}(\widehat{\tau}^{(i_\mu)}) = \begin{array}{c} \text{---} p_\mu \quad t \quad q_\mu \\ \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \text{---} t \quad \quad \quad \dots \quad \text{---} t \quad \quad \quad \bullet \\ \diagdown \quad \quad \quad \diagup \quad \quad \quad \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_{p_\mu t + 1})} \quad \dots \quad \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_{(p_\mu - 1)t + 2})} \quad \dots \quad \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_{t+1})} \quad \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_2)} \quad \dots \quad \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu})} \quad \dots \quad \boxed{\text{LE}(\overline{\tau}_{p_\mu t + 2})} \end{array}. \quad (6.19)$$

Von diesem erweiterten t -ären Baum $\text{LE}(\tau)$ (Gleichung (6.17)) berechnen wir nun die L -Dekomposition, um die Abbildung EL anwenden zu können. Zunächst muß die Markierung der Knoten durch die Markierungsfunktion ξ durchgeführt werden:

- Alle Knoten in $\text{LE}(\widehat{\tau}) \in E_{\|\widehat{\tau}\|}^{(t)}$, außer den Blättern von $\text{LE}(\widehat{\tau})$, den Knoten ℓ_{i_μ} mit $1 \leq \mu \leq \|\widehat{\tau}\|$, erhalten die Markierung 0.
- Die Knoten ℓ_{i_μ} werden mit 1 markiert, denn mindestens ein Kind von ℓ_{i_μ} ist ein Blatt, wie Gleichung (6.19) zeigt.

Die L -Dekomposition von $\text{LE}(\tau)$ ist also gleich

$$\sigma_{\text{LE}(\tau)} = \text{LE}(\widehat{\tau}), \text{LE}(\widehat{\tau}^{(i_1)}), \text{LE}(\widehat{\tau}^{(i_2)}), \dots, \text{LE}(\widehat{\tau}^{(i_{\|\widehat{\tau}\|})}).$$

Auf die Darstellung von $\text{LE}(\tau)$ in Gleichung (6.17) können wir also die Abbildungsvorschrift EL anwenden:

$$\text{EL}(\text{LE}(\tau)) = \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\ \boxed{\widehat{\tau}_{j_1}} \quad \boxed{\widehat{\tau}_{j_2}} \quad \dots \quad \boxed{\widehat{\tau}_{j_{\|\widehat{\tau}\|}}} \end{array} \quad (6.20)$$

6. Beweis der 1-1-Korrespondenz

Aufgrund der in Gleichung (6.19) dargestellten Struktur der Teilbäume $\text{LE}(\widehat{\tau}^{(j_\mu)})$ können wir aus der Definition der Abbildungsvorschrift EL für die $\widehat{\tau}_{j_\mu}$ die folgende Form ablesen:

$$\widehat{\tau}_{j_\mu} = \begin{array}{c} \ell_{j_\mu} \quad p_\mu t + q_\mu \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ \boxed{\text{EL}(\text{LE}(\overline{\tau}_2))} \quad \dots \quad \boxed{\text{EL}(\text{LE}(\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu}))} \end{array} \quad (6.21)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung (6.15) gilt

$$\text{EL}(\text{LE}(\widehat{\tau})) = \widehat{\tau}, \quad (6.22)$$

da $\|\widehat{\tau}\| < m$. Damit gilt für die Permutation der Blätter

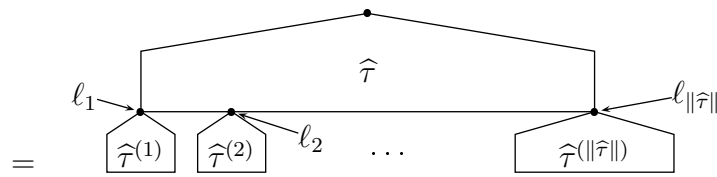
$$(j_1, j_2, \dots, j_{\|\widehat{\tau}\|}) = (1, 2, \dots, \|\widehat{\tau}\|). \quad (6.23)$$

Die Induktionsvoraussetzung kann auch auf die Teilbäume $\overline{\tau}_2$ bis $\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu}$ der Teilbäume $\widehat{\tau}_{(j_\mu)}$ angewendet werden. Damit vereinfacht sich Gleichung (6.21) zu

$$\begin{array}{l} \widehat{\tau}_{j_\mu} = \begin{array}{c} \ell_{j_\mu} \quad p_\mu t + q_\mu \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ \boxed{\text{EL}(\text{LE}(\overline{\tau}_2))} \quad \dots \quad \boxed{\text{EL}(\text{LE}(\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu}))} \end{array} \quad \text{Gleichung (6.21)} \\ \\ = \begin{array}{c} \ell_{j_\mu} \quad p_\mu t + q_\mu \\ \curvearrowright \\ \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ \boxed{\overline{\tau}_2} \quad \dots \quad \boxed{\overline{\tau}_{p_\mu t + q_\mu}} \end{array} \quad \text{Ind.-Voraussetzung, Gl. (6.15)} \\ \\ = \widehat{\tau}^{(j_\mu)}. \quad (6.24) \end{array}$$

Damit kann nun schließlich Gleichung (6.20) weiter vereinfacht werden zu:

$$\text{EL}(\text{LE}(\tau)) = \begin{array}{c} \bullet \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ \boxed{\widehat{\tau}_{j_1}} \quad \boxed{\widehat{\tau}_{j_2}} \quad \ell_{j_2} \quad \dots \quad \boxed{\widehat{\tau}_{j_{\|\widehat{\tau}\|}}} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{EL}(\text{LE}(\widehat{\tau})) \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \bullet \quad \bullet \quad \dots \quad \bullet \\ \ell_{j_1} \quad \dots \quad \ell_{\|\widehat{\tau}\|} \end{array} \quad \text{Gl. (6.20)}$$



=

wg. Gl. (6.22), (6.23) und (6.24)

= τ

wg. Gl. (6.16). ■

Satz 6.8

Für alle erweiterten t -nären Bäume $\tau \in E^{(t)}$ gilt:

$$(\text{LE} \circ \text{EL})(\tau) = \tau.$$

Beweis:

Da die Abbildung LE bijektiv ist (Satz 6.6), gibt es für jeden Baum $\tau_E \in E_m^{(t)}$ genau ein Urbild $\tau_L^{(\tau_E)}$ bezüglich LE:

$$(\forall \tau_E \in E_m^{(t)}) (\exists! \tau_L^{(\tau_E)} \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}) (\text{LE}(\tau_L^{(\tau_E)}) = \tau_E). \quad (6.25)$$

Wendet man auf ein beliebiges τ_E die Abbildung EL an, so kann gefolgert werden:

$$\text{EL}(\tau_E) = \text{EL}(\text{LE}(\tau_L^{(\tau_E)})) \quad \text{wegen Gl. (6.25)} \quad (6.26)$$

$$= \tau_L^{(\tau_E)} \quad \text{wegen Satz 6.7,} \quad (6.27)$$

und indem wir auf beide Seiten der Gleichung (6.27) die Abbildung LE anwenden, erhalten wir für alle $\tau_E \in E_m^{(t)}$:

$$\text{LE}(\text{EL}(\tau_E)) = \text{LE}(\tau_L^{(\tau_E)}) \quad \text{wegen Gl. (6.27)}$$

$$= \tau_E \quad \text{wegen Gl. (6.25).} \quad \blacksquare$$

Bemerkung: Der Beweis für Satz 6.8 kann auch direkt mittels einer Induktion nach der Anzahl der Blätter von $\tau \in L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ geführt werden. Dieser Beweis ist in Anhang A angegeben.

Korollar: Die Abbildung EL ist die Umkehrabbildung von LE.

Beweis:

Wir haben in den vorangegangenen Sätzen nachgewiesen:

1. Die Baumklassen $L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}$ und $E_m^{(t)}$ sind gleichmächtig:

$$|L_m^{(t, 2t-1, \dots, 1+t(t-1))}| = |E_m^{(t)}| ;$$

vgl. [10] sowie Satz 4.3.

2. Die Abbildungen LE und EL sind wohldefiniert (Sätze 6.2 und 6.4). Die Abbildung LE ist injektiv (Satz 6.5), und zusammen mit der Gleichmächtigkeit der Bild- und Urbildmenge ergibt sich die Bijektivität der Abbildung LE (Satz 6.6).
3. Die Hintereinanderausführung von EL und LE ergibt jeweils die Identische Abbildung: $EL \circ LE = \text{id}$ und $LE \circ EL = \text{id}$ (Sätze 6.7 und 6.8).

■

7. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben eine 1–1-Korrespondenz zwischen erweiterten t -nären Bäumen mit m Blättern einerseits und Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Bäumen mit m Blättern andererseits vorgestellt und Abbildungsvorschriften für beide Richtungen angegeben, mit denen Bäume der einen Klasse auf Bäume der anderen Klasse abgebildet werden können. Hat ein erweiterter t -närer Baum bereits die Leftist-Eigenschaft, so wird er identisch abgebildet. Hat ein Leftist- $t, 2t - 1, 3t - 2, \dots, 1 + t(t - 1)$ -Baum nur Knoten mit Grad t , so wird auch dieser entsprechend identisch abgebildet.

Für die Definition der Abbildungen gibt es noch weitere Möglichkeiten. Bei der Definition der Abbildung LE können die Teilbäume $LE(\tau_i)$ für $i \geq 2$ in einer anderen Reihenfolge eingebaut werden. In der vorliegenden Arbeit ist der Ansatz verfolgt worden, diese Teilbäume ausgehend von $LE(\tau_1)$ von rechts nach links in die Struktur einzuhängen, denn auf diese Weise konnte die 1–1-Korrespondenz von R. Kemp [10] zwischen erweiterten binären Bäumen und Leftist-2, 3-Bäumen als der Sonderfall für $t = 2$ eingebettet werden.

In [11] hat R. Kemp die Gemeinsamkeit zwischen Leftist-Bäumen, die zu einer einfach erzeugten Baumfamilie gehören und einer anderen einfach erzeugten Baumfamilie noch weiter verallgemeinert: Er zeigt, daß jede einfach erzeugte Baumfamilie \mathcal{F} eindeutig mit einer anderen einfach erzeugten Baumfamilie \mathcal{F}_1 assoziiert werden kann, so daß ein von ihm definiertes *Gesamtgewicht* der Bäume mit m Blättern in \mathcal{F} gleich dem Gesamtgewicht der Leftist-Bäume mit m Blättern in \mathcal{F}_1 ist. Im allgemeinen wird die Baumfamilie \mathcal{F} derart in Blöcke partitioniert, daß ein Leftist-Baum aus \mathcal{F}_1 auf einen der Blöcke dieser Partition von \mathcal{F} abgebildet werden kann.

Die Abbildungsvorschrift, die sich für den entsprechenden Sonderfall der hier dargestellten Baumfamilien in [11] ergibt, verfolgt die Strategie, die Teilbäume ausgehend von $LE(\tau_1)$ von links nach rechts in die Struktur einzubauen.

Es erscheint sehr wahrscheinlich, daß nur die Position des Teilbaums $LE(\tau_1)$ innerhalb der Abbildungsvorschrift LE erheblich ist: Steht der Teilbaum $LE(\tau_1)$ nicht an der hier dargestellten Position, dann verliert die Abbildung LE die Injektivität.

Beispiel 7.1: Bei dem Versuch, für $t = 2$ statt $LE(\tau_1)$ einen anderen Teilbaum an die besagte Position zu setzen, stoßen wir auf die folgenden Probleme. Definiere die Funktion \overline{LE} wie folgt:

$$(\overline{LE}_1) \quad \overline{LE}(\bullet) := \bullet ;$$

$$\begin{aligned}
 (\overline{\text{LE}}_2) \quad \overline{\text{LE}}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \tau_2 \end{array}\right) &:= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \overline{\text{LE}}(\tau_1) \quad \overline{\text{LE}}(\tau_2) \end{array} ; \\
 (\overline{\text{LE}}_3) \quad \overline{\text{LE}}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \end{array}\right) &:= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \overline{\text{LE}}(\tau_3) \quad \overline{\text{LE}}(\tau_1) \quad \overline{\text{LE}}(\tau_2) \end{array} .
 \end{aligned}$$

Mit dieser Definition gilt

$$\overline{\text{LE}}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \text{sowie} \quad \overline{\text{LE}}\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} ,$$

und die so definierte Abbildung $\overline{\text{LE}}$ ist nicht injektiv. Auf ähnliche Weise kann auch der Teilbaum $\overline{\text{LE}}'(\tau_3)$ an der fett gezeichneten Position nicht helfen. Definiere die Abbildung $\overline{\text{LE}}'$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (\overline{\text{LE}}'_1) \quad \overline{\text{LE}}'(\bullet) &:= \bullet ; \\
 (\overline{\text{LE}}'_2) \quad \overline{\text{LE}}'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \tau_1 \quad \tau_2 \end{array}\right) &:= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \overline{\text{LE}}'(\tau_1) \quad \overline{\text{LE}}'(\tau_2) \end{array} ; \\
 (\overline{\text{LE}}'_3) \quad \overline{\text{LE}}'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3 \end{array}\right) &:= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \overline{\text{LE}}'(\tau_1) \quad \overline{\text{LE}}'(\tau_2) \quad \overline{\text{LE}}'(\tau_3) \end{array} .
 \end{aligned}$$

In diesem Fall kann ein kritisches Beispiel am Teilbaum τ_3 eines abzubildenden Leftist-Baums τ gefunden werden. Es ist

$$\overline{\text{LE}}'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} \quad \text{sowie} \quad \overline{\text{LE}}'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array}\right) = \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \\ \bullet \quad \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \end{array} ,$$

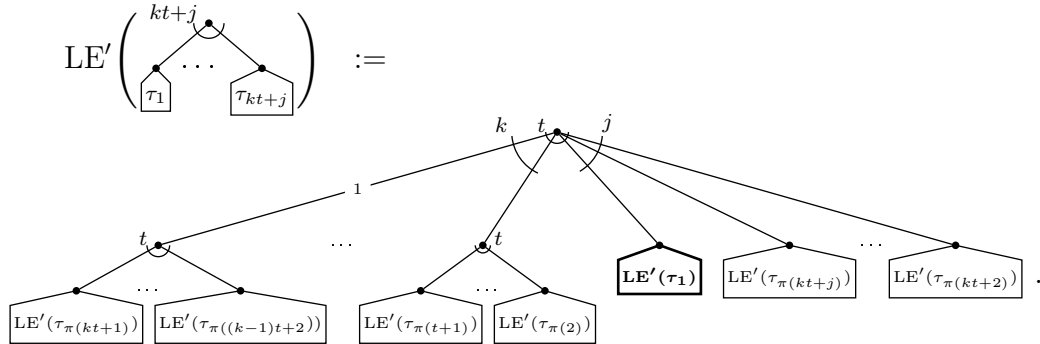
und wieder sehen wir, daß eine so definierte Abbildung $\overline{\text{LE}}'$ nicht injektiv sein kann.

Die Möglichkeiten, die Abbildung LE zu definieren, würden sich unter Verwendung einer beliebigen Permutation π auf den Zahlen $\{2, 3, \dots, kt + j\}$ erweitern auf die im folgenden dargestellte Abbildungsvorschrift (vgl. Abschnitt 5.3.1 ab Seite 31).

$$\begin{aligned}
 (\text{LE}'_0) \quad \text{LE}'(\bullet) &:= \bullet ; \\
 (\text{LE}'_t) \quad \text{LE}'\left(\begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \tau_1 \quad \dots \quad \tau_t \end{array}\right) &:= \begin{array}{c} \bullet \\ / \quad \backslash \quad \bullet \\ \text{LE}'(\tau_1) \quad \text{LE}'(\tau_2) \quad \dots \quad \text{LE}'(\tau_t) \end{array} ;
 \end{aligned}$$

7. Zusammenfassung und Ausblick

(LE'_{kt+j}) Für $\deg(r(\tau)) = kt + j > t$, das heißt mit $1 \leq k \leq t - 1$ und $j = t - k$, definieren wir die folgenden Regeln:



Die Definition der Abbildung EL, speziell des zweiten Teils der Abbildung EL, in dem die Abbildung der Teilbäume $\tau^{(i)}$ für $i \geq 1$ definiert wird, der Teilbäume also, die von der L -Dekomposition als solche Teilbäume gefunden wurden, deren Wurzel mindestens ein Blatt als Kind hat, wäre dann entsprechend zu modifizieren.

A. Ein alternativer Beweis für Satz 6.8

In Kapitel 6 ist der Beweis zu Satz 6.8 mittels der Bijektivität der Abbildung LE und der Gültigkeit von $EL \circ LE = \text{id}$ (Satz 6.7) geführt worden.

Es ist auch möglich, diesen Beweis durch eine Induktion nach m , der Anzahl der Blätter von τ , zu führen. Der Satz heißt:

Satz 6.8

Für alle erweiterten t -nären Bäume $\tau \in E^{(t)}$ gilt:

$$(LE \circ EL)(\tau) = \tau.$$

Beweis:

Beweis durch Induktion nach m , der Anzahl der Blätter von τ .

Induktionsverankerung: Sei $m = 1$.

Es gibt nur einen erweiterten t -nären Baum mit einem Blatt, nämlich $\tau = \bullet$. Es gilt:

$$\begin{aligned} LE(EL(\bullet)) &= LE(\bullet) \\ &= \bullet. \end{aligned}$$

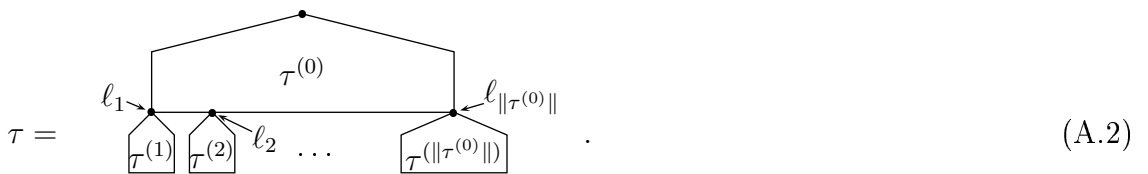
Induktionsschritt: Sei $m > 1$. Es gelte die Induktionsvoraussetzung

$$(\forall k : 1 \leq k < m) \quad (\forall \tau \in E_k^{(t)}) \quad ((LE \circ EL)(\tau) = \tau). \tag{A.1}$$

Sei nun $\tau \in E_m^{(t)}$. Wir werden zunächst die Abbildung EL und danach die Abbildung LE anwenden. Zuerst müssen wir die L -Dekomposition von τ berechnen,

$$\sigma_\tau = \tau^{(0)}, \tau^{(1)}, \dots, \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)},$$

und damit können wir τ darstellen als



A. Ein alternativer Beweis für Satz 6.8

Jetzt kann die Abbildung EL angewendet werden:

$$\text{EL}(\tau) = \begin{array}{c} \text{EL}(\tau^{(0)}) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \ell_{i_1} \quad \ell_{i_{\|\tau^{(0)}\|}} \\ \tau_{i_1} \quad \tau_{i_2} \quad \dots \quad \tau_{i_{\|\tau^{(0)}\|}} \end{array} \cdot \quad (\text{A.3})$$

Dabei werden die τ_{i_j} für $1 \leq j \leq \|\tau^{(0)}\|$ nach der Definition der Abbildung EL wie folgt gebildet: Falls der Teilbaum $\tau^{(i_j)}$ das auf Ebene 1 am weitesten links stehende Blatt an Position $p+1$ hat, falls also $\tau^{(i_j)}$ die Form

$$\tau^{(i_j)} = \begin{array}{c} t \quad t-p-1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 1 \quad p \quad p+1 \\ \dots \quad \dots \\ \tau_{pt+1}^{(i_j)} \quad \tau_{(p-1)t+2}^{(i_j)} \quad \tau_{t+1}^{(i_j)} \quad \tau_2^{(i_j)} \quad \tau_{pt+(t-p)}^{(i_j)} \quad \tau_{pt+2}^{(i_j)} \end{array} \quad (\text{A.4})$$

besitzt, so ist τ_{i_j} durch die Abbildungsvorschrift EL gegeben durch

$$\tau_{i_j} = \begin{array}{c} pt+(t-p) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{EL}(\tau_2^{(i_j)}) \quad \dots \quad \text{EL}(\tau_{pt+(t-p)}^{(i_j)}) \end{array} \cdot \quad (\text{A.5})$$

Auf den Baum $\text{EL}(\tau)$ (siehe Gleichung (A.3)) ist nun die Abbildung LE anwendbar, denn alle Bilder von EL liegen (nach Satz 6.4) in $L_m^{(t, \dots)}$. Es ist $\text{LE}(\tau^{(0)}) \in L_{\|\tau^{(0)}\|}^{(t, \dots)}$, und die rekursive Vorschrift LE erlaubt es, zunächst diesen Baum zu bearbeiten, um sich danach den Teilbäumen τ_{i_j} zuzuwenden.

$$\text{LE}(\text{EL}(\tau)) = \begin{array}{c} \text{LE}(\text{EL}(\tau^{(0)})) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \ell_{j_1} \quad \ell_{j_2} \quad \dots \quad \ell_{j_{\|\tau^{(0)}\|}} \\ \text{LE}(\tau_{j_1}) \quad \text{LE}(\tau_{j_2}) \quad \dots \quad \text{LE}(\tau_{j_{\|\tau^{(0)}\|}}) \end{array} \cdot \quad (\text{A.6})$$

Schauen wir uns zunächst die Teilbäume $\text{LE}(\tau_{j_\mu})$ an ($1 \leq \mu \leq \|\tau^{(0)}\|$). Die Struktur der τ_{j_μ} ist aus Gleichung (A.5) bekannt:

$$\tau_{j_\mu} = \begin{array}{c} pt+(t-p) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{EL}(\tau_2^{(j_\mu)}) \quad \dots \quad \text{EL}(\tau_{pt+(t-p)}^{(j_\mu)}) \end{array} \cdot$$

A. Ein alternativer Beweis für Satz 6.8

Durch Anwendung der Abbildung LE, Regel $(LE_{pt+(t-p)})$, (das ist Regel „ (LE_{kt+j}) “ für $k = p$ und $j = t - p$) erhalten wir

$$LE(\tau_{j_\mu}) =$$

$$(A.7)$$

Nach der Induktionsvoraussetzung (A.1) gilt $LE(EL(\tau^{(0)})) = \tau^{(0)}$, denn durch die L -Dekomposition ist sichergestellt, daß die Anzahl der Blätter von $\tau^{(0)}$ echt kleiner als die Anzahl der Blätter von τ ist. Damit gilt für die Permutation der Indizes

$$(j_1, j_2, \dots, j_{\|\tau^{(0)}\|}) = (1, 2, \dots, \|\tau^{(0)}\|). \quad (A.8)$$

Die Blatt-Anzahlen der Teilbäume $\tau_2^{(j_\mu)}, \dots, \tau_{pt+(t-p)}^{(j_\mu)}$ des Baums τ_{j_μ} aus Gleichung (A.7) müssen durch die L -Dekomposition ebenfalls echt kleiner als $\|\tau\|$ sein. Durch Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf diese Teilbäume erhalten wir

$$LE(\tau_{j_\mu}) =$$

$$=$$

$$=$$

wegen der Induktionsvoraussetzung, Gl. (A.1)

$$= \tau^{(j_\mu)}$$

wegen Gl. (A.4).

A. Ein alternativer Beweis für Satz 6.8

Damit ergibt sich schließlich, ausgehend von Gleichung (A.6),

$$\text{LE}(\text{EL}(\tau)) = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{LE}(\text{EL}(\tau^{(0)})) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \ell_{j_1} \quad \ell_{j_2} \quad \dots \quad \ell_{j_{\|\tau^{(0)}\|}} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{LE}(\tau_{j_1}) \quad \text{LE}(\tau_{j_2}) \quad \dots \quad \text{LE}(\tau_{j_{\|\tau^{(0)}\|}}) \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \tau^{(0)} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_{\|\tau^{(0)}\|} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{LE}(\tau_1) \quad \text{LE}(\tau_2) \quad \dots \quad \text{LE}(\tau_{\|\tau^{(0)}\|}) \end{array} \end{array}$$

wegen der Induktionsvoraussetzung, Gl. (A.1)

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \tau^{(0)} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_{\|\tau^{(0)}\|} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \tau^{(1)} \quad \tau^{(2)} \quad \dots \quad \tau^{(\|\tau^{(0)}\|)} \end{array} \end{array}$$

denn $\text{LE}(\tau_{j_\mu}) = \tau^{(j_\mu)}$,

$$= \tau$$

denn das ist die L -Dekomposition von τ : Gl. (A.2).

■

Literaturverzeichnis

- [1] Alonso, Laurent und Schott, René. *Random Generation of Trees*. Kluwer, 1995.
- [2] Cho, Seonghun und Sahni, Sartaj. Weight-biased leftist trees and modified skip lists. *Journal of Experimental Algorithmics*, 1998. ISSN 1084–6654.
- [3] Comtet, Louis. *Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expressions*. D. Reidel, Dordrecht, Holland, durchgesehene und erweiterte Auflage, 1974.
- [4] Drmota, M. The asymptotic number of leftist trees. *Algorithmica*, 31:304–317, 2001.
- [5] Graham, Ronald L., Knuth, Donald E. und Patashnik, Oren. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, 1991.
- [6] Kemp, Rainer. A note on the number of leftist trees. *Information Processing Letters*, 25:227–232, 1987.
- [7] Kemp, Rainer. The expected additive weight of leftist trees. *Acta Informatica*, 26:711–740, 1989.
- [8] Kemp, Rainer. Further results on leftist trees. In Karoński, Michał, Jaworski, Jerzy und Ruciński, Andrzej, Herausgeber, *Random Graphs '87*. John Wiley & Sons, 1990.
- [9] Kemp, Rainer. On leftist simply generated trees. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 4:313–331, 1999.
- [10] Kemp, Rainer. A one-to-one correspondence between a class of leftist trees and binary trees. *Information Processing Letters*, 71:97–105, 1999.
- [11] Kemp, Rainer. On the representation of simply generated trees by leftist trees. *European Journal of Combinatorics*, 24:581–605, 2003.
- [12] Kemp, Rainer. Bäume, Sommersemester 1996. Vorlesungsskript, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Informatik.
- [13] Knuth, Donald E. *Fundamental Algorithms*, Band 1 von *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 2. Auflage, 1973.
- [14] Knuth, Donald E. *Sorting and Searching*, Band 3 von *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 1973.

- [15] Liebehenschel, Jens. *Lexikographische Generierung, Ranking und Unranking kombinatorischer Objekte: Eine Average-Case-Analyse*. Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Biologie und Informatik, 2000.
- [16] Noguiera, Paulo. On the combinatorics of leftist trees. *Discrete Applied Mathematics*, 109:253–278, 2001.
- [17] Sedgewick, Robert und Flajolet, Philippe. *An Introduction to the Analysis of Algorithms*. Addison-Wesley, 1996.
- [18] Trier, Uwe. *Additive Gewichte bei s-nären Leftist-Bäumen*. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Informatik, 1989.
- [19] Viennot, Xavier Gérard. Trees everywhere. In *CAAP '90 – 15th Colloquium on Trees in Algebra and Programming*, Band 431 von *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 18–41. 1990.

Literatur zu den mathematischen Grundlagen

- [20] Aigner, Martin. *Diskrete Mathematik*. Vieweg, dritte, durchgesehene Auflage, 1999.
- [21] Bronstein, I. N., Semendjajev, K.A., Musiol, G. und Mühlig, H. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, fünfte, überarbeitete u. erweiterte Auflage, 2000.
- [22] Kemp, Rainer. Informatik III, Wintersemester 1996/97. Vorlesungsskript, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Informatik.
- [23] Kemp, Rainer. Mathematische Grundlagen der Informatik, Wintersemester 1999/2000. Vorlesungsskript, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Fachbereich Informatik.
- [24] Mangoldt, Hans von und Knopp, Konrad. *Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre*, Band 1 von *Höhere Mathematik*. S. Hirzel, 17. Auflage, 1990.
- [25] Steger, Angelika. *Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra*, Band 1 von *Diskrete Strukturen*. Springer, 2002. Erster, korrigierter Nachdruck.

Literatur zum Textsatzprogramm \LaTeX

Die vorliegende Arbeit ist mit dem Textsatzprogramm \LaTeX gesetzt worden. Zu diesem Zweck habe ich die folgenden Referenzen benutzt.

- [26] American Mathematical Society. *User's Guide for the `amsmath` Package*. Version 2.0 vom 13.12.1999.
- [27] Knuth, Donald E. *The $T_{E}X$ book*, Band A von *Computers & Typesetting*. Addison-Wesley, 1986.
- [28] Kohm, Markus und Morawski, Jens-Uwe. *Das KOMA-Script Paket – Anleitung*. Version vom 29.1.2003. Die jeweils neueste Version ist im Internet unter <http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/koma-script/koma-script.pdf> erhältlich.
- [29] Kopka, Helmut. *\LaTeX – Einführung*, Band 1 von \LaTeX . Addison-Wesley, zweite, überarbeitete Auflage, 1996.
- [30] Mittelbach, Frank, Goossens, Michel, Braams, Johannes, Carlisle, David und Rowley, Chris. *The \LaTeX companion*. Addison-Wesley, zweite Auflage, 2004.
- [31] Voß, Herbert. *PSTricks*. Deutsche $T_{E}X$ -Anwendervereinigung *dante e. V.* und Lehmanns Fachbuchhandlung, 2004.