

Mechanismus der spontanen Schwerewellenabstrahlung
im differentiell geheizten rotierenden Annulus und in einem
doppeltperiodischen, kartesischen Modellsystem

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Geowissenschaften/Geographie
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Steffen Hien
aus Weinheim

Frankfurt 2018

D 30

vom Fachbereich Geowissenschaften/Geografie der
Johann Wolfgang Goethe–Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Peter Lindner

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Achatz
Institut für Atmosphäre und Umwelt
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Apl. Prof. Dr. Uwe Harlander
Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungslehre
Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg

Datum der Disputation: 22.10.2018

Zusammenfassung

Die Abstrahlung von internen Schwerewellen in atmosphärischen Strahlströmen und Temperaturfronten trägt vermutlich mit einem signifikanten Beitrag zum gesamten Schwerewellenspektrum bei. Das physikalische Verständnis der dabei ablaufenden Prozesse ist derzeit allerdings noch zu gering ausgeprägt, um eine adäquate mathematische Darstellung für operationelle Wetter- und Klimamodelle zu entwickeln. In dieser Arbeit wird der Mechanismus dieser Schwerewellenquelle in numerischen Simulationen des differenziell geheizten rotierenden Annulusexperiments erforscht. Dieses Experiment besitzt eine im Vergleich zur Atmosphäre deutlich verringerte Anzahl an Freiheitsgraden und eignet sich besonders gut zum Studium der Dynamik der mittleren Breiten. Analoge Untersuchungen werden in einem äquivalenten kartesischen Modellsystem vorgenommen, in dem periodische Bedingungen in den beiden horizontalen Raumrichtungen vorliegen. Im Gegensatz zur Annuluskonfiguration, in der nachweislich auch eine Schwerewellenabstrahlung an den Zylinderwänden erfolgt, kommt in dieser Konfiguration nur die interne Dynamik als Schwerewellenquelle in Frage. Die nichtlinearen Simulationen beider Modellkonfigurationen zeigen eine großskalige barokline Wellenstruktur, die ein atmosphärenähnliches Jet-Front System beinhaltet. Darin eingelagert werden vier voneinander isolierte Schwerewellenpakete in der Annuluskonfiguration sowie zwei Schwerewellenpakete im doppelperiodischen Modellsystem charakterisiert. Um den zugrundeliegenden Quellmechanismus zu untersuchen, erfolgt eine Aufspaltung der Zustandsvariablen in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil, wobei erstgenannter das geostrophische und hydrostatische Gleichgewicht erfüllt und letztgenannter das Schwerewellensignal enthält. Die Strömungsaufspaltung bildet die Grundlage für die Entwicklung eines tangential-linearen Modells für den unbalancierten Strömungsanteil. Hierbei wird eine systematische Umformulierung der dynamischen Grundgleichungen hinsichtlich der Wechselwirkung beider Strömungsanteile vollzogen. Insbesondere wird der rein balancierte Antrieb der unbalancierten Strömung freigelegt, um dessen Einfluss auf die Schwerewellenaktivität zu quantifizieren. Die anschließenden tangential-linearen Simulationen zeigen, dass drei der vier Schwerewellenpakete in der Annuluskonfiguration in der internen Strömung generiert werden. Ein verbleibendes Wellenpaket entsteht an der inneren Zylinderwand, ehe es in das innere Modellvolumen propagiert. Darüber hinaus wird deutlich, dass der rein balancierte interne Antrieb der Schwerewellen einen signifikanten Beitrag zur Schwerewellengenerierung leistet. Im doppelperiodischen Modellsystem gibt es eine nahezu perfekte Übereinstimmung zwischen den unbalancierten Strömungsmustern in den tangential-linearen und den nichtlinearen Simulationen. Auch dort nimmt der balancierte Antrieb eine zentrale Rolle bei der Schwerewellenabstrahlung ein. Die abschließende Gegenüberstellung verschiedener, voneinander unabhängiger Gleichgewichtskonzepte macht deutlich, dass die balancierte Strömung der führenden Ordnung in der Rossbyzahl bereits eine erstaunliche Übereinstimmung mit der vollen Strömung liefert. Zudem erbringt die Anwendung einer Lagrange'schen Filtermethode den Nachweis, dass die Vertikalbewegungen und die horizontalen Divergenzsignale in der Annuluskonfiguration fast ausschließlich auf die Schwerewellenaktivität zurückzuführen sind.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Modelle	7
2.1	Annuluskonfiguration	7
2.2	Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration	15
2.3	Randbedingungen und numerische Methoden	16
3	Groß- und kleinskalige Strömungseigenschaften	19
3.1	Großskalige, barokline Wellen	19
3.1.1	Annuluskonfiguration	19
3.1.2	Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration	24
3.2	Schwerewellensignal	26
3.2.1	Annuluskonfiguration	27
3.2.2	Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration	30
4	Mechanismus der spontanen Schwerewellenabstrahlung: Theorie	35
4.1	Balancierte und unbalancierte Strömung und deren Wechselwirkung	35
4.2	Ein tangential-lineares Modell für den unbalancierten Strömungsanteil	42
4.2.1	Randbedingungen	47
4.2.2	Lösbarkeitsbedingungen	50
4.3	Omegagleichung	51
5	Mechanismus der spontanen Schwerewellenabstrahlung: Ergebnisse	53
5.1	Balancierter Vertikalwind und balancierte horizontale Divergenz	53
5.1.1	Annuluskonfiguration	53
5.1.2	Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration	56
5.2	Ergebnisse der tangential-linearen Simulationen	59
5.2.1	Initialisierung mit verschwindender unbalancierter Strömung	59
5.2.2	Initialisierung mit nicht verschwindender unbalancierter Strömung	64
6	Gleichgewichtskonzepte	71
6.1	Balancierte Strömungen verschiedener Ordnung in der Rossbyzahl	72
6.1.1	Gleichgewichtsbeziehungen führender Ordnung	75
6.1.2	Gleichgewichtsbeziehungen nächsthöherer Ordnung	77
6.2	Lagrange'sche Filtermethode	80
6.3	Vergleich der Ungleichgewichte	82
6.3.1	Annuluskonfiguration	83
6.3.2	Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration	89
6.4	Wellenzahl-Frequenz Analyse	93
7	Vergleich mit dem Laborexperiment	101

8 Fazit	105
Anhang	109
A Die Gültigkeit der Boussinesq-Näherung	109
A.1 Ausgangsgleichungen	109
A.2 Entdimensionalisierung der Gleichungen	111
A.3 Näherung der Gleichungen und Gültigkeitsbereich	113
B Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen	119
C Entwicklungsgleichung der linearen potentiellen Vorticity	125
D Balancierte Antriebsterme im tangential-linearen Modell	127
E Nebenrechnungen zum Inversionsproblem	131
F Herleitung der Omegagleichung	135
G Nebenrechnungen zur Stromfunktionzerlegung	137
H Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen zweiter Ordnung	141
Literaturverzeichnis	144

Kapitel 1

Einleitung

Interne Schwerewellen (englisch: *internal gravity waves*) sind allgegenwärtig in geschichteten Medien wie der Erdatmosphäre und dem Ozean. Es handelt sich um räumlich und zeitlich periodisch ablaufende Bewegungen, die sich in Form von Wellenpaketen horizontal und vertikal fortbewegen. Das Zusammenspiel von Auftriebskräften bedingt durch stabile Schichtungsverhältnisse einerseits und von Trägheitskräften andererseits bildet dabei die Grundlage zur Ausbildung und Aufrechterhaltung des Wellensignals. Die Bewegungseigenschaften werden außerdem je nach Ausdehnung und Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets mehr oder weniger stark von der, durch die Erdrotation verursachten, Corioliskraft beeinflusst. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf atmosphärischen Schwerewellen, die typischerweise horizontale Längenskalen von 10–1000 km aufweisen (Plougonven & Zhang, 2014). Der Entstehungsort atmosphärischer Schwerewellen liegt größtenteils in der Troposphäre. Abhängig vom Entstehungsmechanismus wird zwischen orographischen und nicht orographischen Schwerewellen unterschieden. Während erstgenannte beim Auftreffen von Luftmassen auf ein Gebirgsmassiv entstehen, können letztgenannte durch eine Vielzahl verschiedener Entstehungsmechanismen erzeugt werden (Fritts & Alexander, 2003). Hierbei ist vor allem die Schwerewellengenerierung durch Konvektion (zum Beispiel Gewitter) und in der Umgebung der atmosphärischen Strahlströme und Temperaturfronten, im Folgenden Jet-Front System genannt, von hoher Relevanz. Da Schwerewellen, die von Jet-Front Systemen ausgehen, im Allgemeinen intrinsische Frequenzen nahe dem Coriolisparameter $f = 2\Omega \sin(\phi)$ (Ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde, ϕ = Breitengrad) besitzen, werden diese auch als Trägheitsschwerewellen (englisch: *inertia-gravity waves*) bezeichnet. Charakteristisch für diese Wellenpakete sind große horizontale Skalen sowie eine nahezu rein horizontale Ausbreitung im oberen Teil der Troposphäre.

Nichtsdestotrotz propagiert ein Großteil der Schwerewellen in vertikaler Richtung durch die Tropopausenregion in die Stratosphäre oder gar in die Mesosphäre. Durch den exponentiellen Dichterrückgang der Umgebungsluft mit steigender Höhe erfolgt dabei ein sukzessives Amplitudenwachstum der Schwerewellenpakete, bis diese schließlich brechen und dissipieren. Sowohl während der Fortbewegung als auch während der Dissipation interagieren die Wellenpakete mit der großskaligen Hintergrundströmung (Böloni et al., 2016). Hierbei geben die Wellen Energie und Impuls an die Luftteilchen der mittleren Atmosphäre ab, wodurch die dortige Dynamik wesentlich beeinflusst wird. Unter anderem wird die Stärke des Polarwirbels und der mesosphärische meridionale Temperaturgradient signifikant modifiziert (Fritts & Alexander, 2003). Des Weiteren sind die Schwerewellen maßgeblich an der Entstehung der Quasi-zweijährigen Schwingung (Baldwin et al., 2001) beteiligt. Auf der anderen Seite übt der Zustand der mittleren Atmosphäre, und insbesondere der der Stratosphäre, einen starken Einfluss auf das saisonale Wettergeschehen und das Klima der Troposphäre aus. In diesem Zusammenhang wird auch von *downward control*

gespröchen (Haynes et al., 1991; Scaife et al., 2005). Auf Grundlage dieser physikalischen Zusammenhänge wird ersichtlich, dass eine möglichst präzise Darstellung des Schwerewellensignals für die Wetter- und Klimavorhersage unerlässlich ist. Dies gestaltet sich jedoch schwierig, denn durch ihre teilweise recht kleinskaligen Strukturen können die aktuellen Wetter- und Klimamodelle nur einen Teil des Schwerewellenspektrums explizit auflösen. Um die Auswirkungen des verbleibenden, nicht aufgelösten Anteils auf die großskalige Dynamik dennoch zu berücksichtigen, bedarf es der Entwicklung von Subgitterskalenparametrisierungen. Dafür sind Kenntnisse der räumlichen und zeitlichen Variabilität der Schwerewellen erforderlich. Zudem ist ein möglichst genaues physikalisches Verständnis der drei zentralen Prozesse im Lebenszyklus einer Schwerewelle, namentlich Generierung, Ausbreitung, Dissipation, von essentieller Bedeutung.

Die Ansätze zur Erforschung der Schwerewelleneigenschaften sind vielfältig. Zum einen werden atmosphärische Messungen eingesetzt, um das Schwerewellensignal zu charakterisieren. Dabei handelt es sich unter anderem um Satelliten-, Radar- oder Lidarmessungen. Neuerdings werden auch Ballonmessungen (englisch: *superpressure ballon measurements*) durchgeführt, bei denen ein mit Überdruck gefüllter Ballon über mehrere Monate das Schwerewellensignal auf Isopyknen-Flächen (Isoflächen der Dichte) aufzeichnet (siehe zum Beispiel Jewtoukoff et al., 2015). Zum anderen werden theoretische Untersuchungen vorgenommen, die teilweise mit numerischen oder experimentellen Studien ergänzt werden. Als besonders geeignet stellt sich in diesem Zusammenhang die Betrachtung von idealisierten dynamischen Systemen heraus, die von experimenteller oder numerischer Natur sind. Eine gegenüber der realen Atmosphäre deutlich reduzierte Anzahl an Freiheitsgraden führt zu einer erheblichen Vereinfachung der Schwerwellenidentifizierung und erleichtert darüber hinaus die Beschreibung der zugrundeliegenden physikalischen Prozesse. Überdies erlaubt die Reproduzierbarkeit des Experiments einen besonderen Fokus auf den Entstehungsmechanismus der Wellen zu legen, der durch entsprechende Parameterstellungen explizit gesteuert werden kann. Eine Vielzahl von bereits durchgeführten Studien griff auf idealisierte dynamische Systeme zur Untersuchung der Schwerwellenabstrahlung von Jet-Front Systemen zurück. Denn im Gegensatz zu den orographisch und konvektiv erzeugten Schwerewellen, reicht das physikalische Verständnis der in der Atmosphäre ablaufenden dynamischen Prozesse noch nicht aus, um bestehende, stark angepasste Parametrisierungen (englisch: *parameter tuning*) zu verbessern oder zu ersetzen. Eine mehr physikalisch basierte mathematische Beschreibung dieses Prozesses würde zusätzlich eine verbesserte Klimasensitivität des Modellsystems zur Folge haben, was gerade im Zuge des Klimawandels sehr wünschenswert ist.

Der Nachweis, dass die Schwerwellenemission vom Jet-Front System tatsächlich einen signifikanten Beitrag zum gesamten Schwerewellenspektrum leistet, wurde zunächst anhand von atmosphärischen Messexperimenten erbracht. So analysierten Uccellini & Koch (1987) eine Messreihe von Schwerwelleneregnissen in der Troposphäre und erkannten, dass in Abwesenheit von Orographie der Ausgangsbereich der Strahlströme, im Folgenden Jet-Exit Region genannt, die dominierende Quellregion von Schwerewellen ist. Dort kommt es zu einer starken Abnahme der Windgeschwindigkeit in einem relativ kleinen räumlichen Bereich. Diese Erkenntnisse wurden in einer aktuelleren Studie von Plougonven et al. (2003) bestätigt, in der Radiosondaten von einer Messkampagne über dem Nordatlantik

ausgewertet wurden. Darüber hinaus wurden auch numerische Arbeiten durchgeführt, die sich zum Ziel setzen, das beobachtete Schwerwellensignal zu reproduzieren. Als Vorreiter ist hierbei die Studie von O’Sullivan & Dunkerton (1995) zu nennen, in der idealisierte Simulationen von realistischen baroklinen Wellenzyklen vorgenommen wurden. Im Einklang mit den oben geschilderten Beobachtungsergebnissen stellten die Autoren ebenfalls eine erhöhte Schwerwellenaktivität in der Jet-Exit Region fest. Ähnliche Resultate fanden auch Wu & Zhang (2004), die mesoskalige Simulationen für den Nordatlantik durchführten, welche in guter Übereinstimmung mit Radarbeobachtungen waren.

Das generelle physikalische Verständnis der Schwerwellengenerierung im Jet-Front System hat sich in den letzten Jahren in prinzipieller Weise geändert. Viele der in der Vergangenheit durchgeführten experimentellen oder numerischen Fallstudien beziehen sich auf die klassische geostrophische Anpassung als Quellmechanismus (Uccellini & Koch, 1987; O’Sullivan & Dunkerton, 1995; Fritts & Luo, 1992; Luo & Fritts, 1993). Hierbei strahlt eine im Ungleichgewicht befindliche, rotierende Strömung so lange Schwerwellen ab, bis die zurückbleibende Strömung einen Gleichgewichtszustand einnimmt. Es werden allerdings weder Aussagen über den Ursprung der anfänglichen Störung gemacht, noch liefert diese Theorie Erklärungsansätze zu der Beobachtung, dass die Schwerwellenabstrahlung ein eher kontinuierlicher Vorgang ist und ein finaler, vollständig balancierter Zustand nie erreicht wird (Plougonven & Zhang, 2014). Aus diesem Grund bevorzugen aktuellere Studien den Mechanismus der spontanen Schwerwellenemission, der die kontinuierliche Emission von Schwerwellen von einem überwiegend balancierten Zustand beinhaltet (Zhang, 2004). Um den Prozess genauer zu studieren, haben sich numerische Simulationen von idealisierten Wirbeldipolen als sinnvoll herausgestellt (Viúdez, 2007; Snyder et al., 2009; Wang & Zhang, 2010). Dieses System besteht aus einem zyklonal/antizyklonal rotierenden Dipol, der als eine zusammenhängende Struktur auf der f -Ebene (f ist konstant) propagiert. Somit dient das System als vereinfachtes Modell der Jet-Exit Region. Die mit dieser Konfiguration gewonnenen Ergebnisse weisen dauerhaft existierende Wellenpakete vor dem Dipol auf, was mit der Jet-Exit Region in Verbindung gebracht wird (Snyder et al., 2009). Informationen über den dazugehörigen Quellmechanismus der Wellen kann, wie in Snyder et al. (2009) und Wang & Zhang (2010) angewendet, mithilfe einer tangential-linearen Analyse gewonnen werden. Dabei wird zunächst die Strömung um einen großskaligen, balancierten Zustand linearisiert, ehe lineare Entwicklungsgleichungen für den unbalancierten Strömungsanteil, in dem die Schwerwellen beinhaltet sind, abgeleitet werden. Diese Vorgehensweise erlaubt es, den Antrieb der Schwerwellen durch den rein balancierten Anteil der Strömung qualitativ und qualitativ zu erfassen. Beispielweise gelang es Snyder et al. (2009) mit ihrem tangential-linearen Modell zu zeigen, dass der balancierte Antrieb bei der Schwerwellengenerierung im Wirbeldipol eine zentrale Rolle einnimmt.

Weiterführende Studien, die über die sehr idealisierten Dipolsysteme hinausgehen und mit der realen Atmosphäre vergleichbare, frei bewegliche Jet-Front Systeme aufweisen, stehen noch immer aus und sind sehr wünschenswert. Ein Schritt in diese Richtung stellt das differentiell geheizte rotierende Annulusexperiment dar. Dieses Experiment besteht aus einem Arbeitsmedium, das sich zwischen zwei vertikal orientierten koaxialen Zylinderwänden befindet, zwischen denen eine konstante Temperaturdifferenz angelegt wird. Zusätzlich rotiert die Apparatur mit einer vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit. Dieses

System ist nicht nur wegen seiner recht einfachen Konstruktion im Labor sehr beliebt, sondern ermöglicht auch den Vergleich mit äquivalenten numerischen Simulationen. Werden die physikalischen Parameter des Experiments entsprechend gewählt, bilden sich barokline Wellen im Arbeitsmedium aus, die mit konstanter Amplitude im Modellgebiet propagieren. Folglich eignet sich das Modellsystem besonders gut, um die Dynamik der Atmosphäre in mittleren Breiten nachzubilden und zu untersuchen. Verursacht durch die breitenabhängige Sonneneinstrahlung entsteht dort ebenfalls ein von der Jahreszeit abhängiger Temperaturgradient zwischen Pol und Äquator, dem die Natur unter Mitwirken der Erdrotation versucht entgegenzutreten. Es entstehen großskalige, barokline Wellenmuster, an denen warme Luftmassen nordwärts und kalte Luftmassen südwärts transportiert werden.

Zahlreiche numerische und experimentelle Arbeiten wurden bereits durchgeführt, welche die Untersuchung von baroklinen Lebenszyklen und die dazugehörigen Jet-Front Systeme im rotierenden Annulus zum Ziel hatten (Früh & Read, 1997; Sitte & Egbers, 2000; von Larcher & Egbers, 2005; Harlander et al., 2012; Vincze et al., 2014). Kürzlich wurde das Potential des Experiments entdeckt, auch den Entstehungsprozess und die Ausbreitung von Schwerewellen zu untersuchen. Jacoby et al. (2011) führte numerische Simulationen in einer klassischen Konfiguration des rotierenden Annulusexperiments durch, in dem ein relativ geringer radialer Abstand der beiden Zylinderwände zu einem Verhältnis zwischen der Brunt-Väisälä Frequenz N und f führt, das kleiner ist als eins. Die Autoren beobachteten Entstehungsorte von Schwerewellen in der Grenzschicht der inneren Zylinderwand, wo eine starke Geschwindigkeitsscherung und ein lokales Absinken von Flüssigkeitsteilchen innerhalb der großskaligen baroklinen Welle vorherrscht. Nach dem Entstehungsprozess wandern die Wellen in das Modellinnere des Annulus. Ähnliche Welleneigenschaften werden auch in Randriamampianina (2013) und Randriamampianina & Crespo del Arco (2015) beschrieben. Im Gegensatz zu Jacoby et al. (2011) vermuten die Autoren einen anderen Entstehungsmechanismus, bei dem eine Temperaturumkehr in Kombination mit einer Strömungsumkehr zu der Ausbildung eines Wirbels (englisch: *billow*) führt, ähnlich wie es auch bei einer Kelvin-Helmholtz Instabilität beobachtet wird. Trifft diese Scherströmung anschließend auf die kalte innere Zylinderwand, wird die Generierung von Schwerewellen initiiert. In der erst sehr kürzlich erschienen Studie von von Larcher et al. (2018) wurde ebenfalls festgestellt, dass Schwerewellenpakete an der inneren Zylinderwand der klassischen Annulusgeometrie generiert werden und dann ins Modellinnere propagieren. Eine wesentliche Erkenntnis dieser Arbeit ist darüber hinaus, dass die äußere Zylinderwand zwar lokale, wellenförmige Instabilitäten aufweist, diese allerdings nicht in Form von Schwerewellen abgestrahlt werden. Stattdessen handelt es sich um Störungen, deren Aufenthaltsort sich auf die äußere Wand beschränkt. Folglich wird nur die innere Zylinderwand als mögliche Schwerewellenquelle in Betracht gezogen. Borchert et al. (2014) legte den Fokus auf eine atmosphärenähnlichere Konfiguration des rotierenden Annulusexperiments. Der dort verwendete Aufbau sorgt durch einen größeren radialen Abstand der Zylinderwände, eine geringere Füllhöhe und einen größeren radialen Temperaturgradienten zu einem Verhältnis von $N/f > 1$, was auch in der realen Atmosphäre beobachtet wird. Die Autoren berichten von klaren Hinweisen auf Wellenpakete, die im Jet-Front System entstehen. Diese Wellenpakete sind im Gegensatz zu den Wellen, die an der inneren Zylinderwand entstehen, von deutlich größerer Relevanz für atmosphärische Studien. Eine tiefere Untersuchung des vorliegenden Quellmechanismus der in Borchert et al.

(2014) festgestellten Schwerewellenpakete wurde bisher jedoch noch nicht durchgeführt.

Daran anschließend ist es das Ziel der vorliegenden Arbeit, den Mechanismus der Schwerewellenabstrahlung vom Jet-Front System in Borchert et al. (2014) umfassend zu beschreiben. Dabei orientiert sich die Studie an dem Parameterregime, das in Borchert et al. (2014) entwickelt wurde und atmosphärische Bedingungen für die Emission und die Ausbreitung der Schwerewellen bereitstellt. Da davon ausgegangen werden kann, dass Grenzschichtinstabilitäten als Schwerewellenquelle auch in dieser Modellkonfiguration weiterhin auftreten, stellt sich die zentrale Frage, welchen Anteil die spontane Schwerewellenemission, die vom balancierten Strömungsanteil im Inneren des Modellgebiets angetrieben wird, am gesamten Schwerewellenspektrum hat. Um diese Frage zu beantworten, werden verschiedene Hilfsmittel eingesetzt. Neben den Simulationen mit dem differentiell geheizten rotierenden Annulusexperiment werden auch analoge Untersuchungen in einem doppeltperiodischen, kartesischen Modellsystem vorgenommen, dessen physikalische Eigenschaften bestmöglich denen des Annulusexperiments gleichen. Durch die Abwesenheit von horizontalen Begrenzungen kann die Entstehung von Grenzschichtinstabilitäten und daraus resultierenden Schwerewellen in dieser Konfiguration ausgeschlossen werden. Demnach ist eine Schwerewellengenerierung nur im Jet-Front System des Modells möglich. Zur Analyse der Wechselwirkung zwischen der großskaligen Strömung und der Schwerewellen erfolgt eine Aufspaltung der vollen Strömung in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil, unter der Annahme kleiner Rossbyzahlen. Verschiedene, voneinander unabhängige diagnostische Verfahren werden benutzt, um zu belegen, dass der in dieser Arbeit definierte, unbalancierte Strömungsanteil auch tatsächlich vom Schwerewellensignal dominiert wird. Anschließend wird der Antrieb der Schwerewellen durch den Gleichgewichtsanteil der Strömung in einem strikten Formalismus freigelegt. Simulationen mit einem tangential-linearen Modell werden daraufhin ausgeführt, die Entscheidungshilfen darüber liefern sollen, welche des beobachteten Schwerewellenpakete im Jet-Front System und welche eher aufgrund von Grenzschichtinstabilitäten generiert werden. Abschließend richtet sich der Blick nochmals auf einige Methoden, die eine tiefergehende Charakterisierung des Schwerewellensignals zum Ziel haben. Neben einer Rossbyzahlentwicklung zur Herleitung von Gleichgewichtskonzepten höherer Ordnung wird dabei auch eine Lagrang'sche Filtermethode angewandt, um auf Grundlage der intrinsischen Frequenzen der Felder das Schwerewellensignal zu bestimmen.

Die Arbeit ist folgendermaßen strukturiert. Nachdem ein Überblick über die nichtlinearen numerischen Modellsysteme in Kapitel 2 gegeben wird, werden die groß- und kleinskaligen Strömungseigenschaften beider Modellsysteme vorgestellt (vergleiche Kapitel 3). Ein besonderes Augenmerk liegt dabei in der Identifikation und Charakterisierung der Schwerewellenpakete. Kapitel 4 entwickelt die Theorie zur Wechselwirkung zwischen der balancierten und der unbalancierten Strömung im Limit kleiner Rossbyzahlen. Zudem werden die tangential-linearen Gleichungen hergeleitet, die zur Untersuchung des Quellmechanismus eingesetzt werden. Den Schwerpunkt des daran anschließenden Kapitels 5 bildet die Präsentation der Ergebnisse der tangential-linearen Modellierung, die nach zwei unterschiedlichen Anfangsbedingungen gegliedert ist. Danach erfolgt in Kapitel 6 ein quantitativer Vergleich zweier unabhängiger Analysemethoden, die das Ziel der Diagnose der Ungleichgewichtsanteile der Strömung verfolgen. Kapitel 7 stellt die ersten Ergebnisse

einer Vergleichsstudie mit einer neu erbauten Laborkonfiguration des Annulusexperiments vor. Eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse wird zunächst in Kapitel 8 vorgenommen, ehe eine Diskussion der Resultate im Kontext bereits bestehender Arbeit vorgenommen wird.

Ein Großteil der in den Kapiteln 2–5 beschriebenen Ergebnisse wurde in Hien et al. (2018) publiziert.

Kapitel 2

Die Modelle

Die Untersuchungen dieser Arbeit werden an zwei unterschiedlichen numerischen Modellkonfigurationen durchgeführt. Einerseits handelt es sich dabei um ein Modell für das differentiell geheizte rotierende Annulusexperiment, das aufgrund der Reproduzierbarkeit in entsprechenden Laborexperimenten den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit einnimmt. Andererseits werden vergleichbare Analysen in einem kartesischen Modell mit periodischen Randbedingungen in den beiden horizontalen Raumrichtungen vorgenommen. In den folgenden Kapiteln werden zunächst der Aufbau, die zugrundeliegenden Grundgleichungen sowie die verwendeten physikalischen Parameter und die daraus resultierenden dimensionslosen Kennzahlen beider Modelle beschrieben. Abschließend folgt ein Überblick über die verwendeten Randbedingungen und numerischen Methoden, die zur numerischen Integration der Modellgleichungen eingesetzt werden.

2.1 Annuluskonfiguration

Der schematische Aufbau des differentiell geheizten rotierenden Annulusexperiment ist in Abbildung 2.1 gezeigt. Das Experiment besteht aus zwei koaxialen, vertikal orientierten Zylindern, die auf einem festen Boden fixiert sind. Zwischen den beiden Zylinderwänden befindet sich ein Fluid, in unserem Fall Wasser, das bis zur einer Gleichgewichtsfüllhöhe d eingefüllt ist. Als obere Begrenzung wird ein reibungsfreier Deckel angenommen, der eine Näherung der freien Flüssigkeitsoberfläche der experimentellen Konfiguration darstellen soll. Der zylinderförmige Aufbau des Annulusexperiments legt eine Vermessung der physikalischen Größen in Zylinderkoordinaten nahe. Daher wird innerhalb des Modellsystems ein zylindrisches Koordinatensystem, bestehend aus dem Azimutalwinkel ϑ , dem radialen Abstand zur Rotationsachse r und dem vertikalen Abstands zum Boden z , eingeführt. Die jeweiligen Koordinatenrichtungen sind ebenfalls in Abbildung 2.1 eingezeichnet. Um einen radialen Temperaturgradienten zwischen dem inneren ($r = a$) und dem äußeren Zylinder ($r = b$) zu erzeugen, wird der innere Zylinder auf die Temperatur T_a abgekühlt, wohingegen der äußere Zylinder auf die Temperatur T_b erwärmt wird ($T_b > T_a$). Zudem rotiert die gesamte Apparatur mit der Winkelgeschwindigkeit Ω , so dass die vorhandenen Flüssigkeitsteilchen sowohl Coriolis- als auch Zentrifugalbeschleunigungen erfahren.

Mathematisch wird die Dynamik des Systems mit der Boussinesq-Näherung beschrieben. Diese Annahme, deren Berechtigung weiter unten noch eingehender diskutiert wird, begründet sich primär aus der Tatsache, dass die Dichteabweichungen $\Delta\hat{\rho}$ von Wasser von der zeitlich und räumlich konstanten Hintergrunddichte $\hat{\rho}_0$ bei der Referenztemperatur $T_0 = (T_a + T_b)/2$ nur sehr gering sind ($|\Delta\hat{\rho}| < 0.01\hat{\rho}_0$). Neben der Dichteaufspaltung

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \Delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

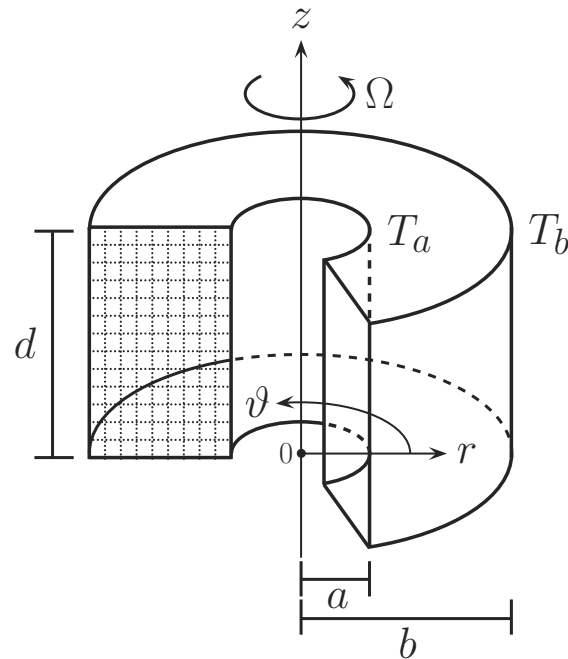


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des differentiell geheizten rotierenden Annulusexperiments. Die Temperaturen T_a und T_b werden am inneren ($r = a$) sowie am äußeren Zylinder ($r = b$) vorgegeben. Die eingefüllte Flüssigkeit besitzt die Gleichgewichtsfüllhöhe d und Ω kennzeichnet die Winkelgeschwindigkeit der Apparatur. Zur Beschreibung der physikalischen Größen des Systems wird ein zylindrisches Koordinatensystem eingeführt, das aus dem Azimutalwinkel ϑ , dem radialen Abstand zur Rotationsachse r und dem vertikalen Abstand zum Boden z besteht. Die gestrichelt angedeuteten Quadrate zeigen das regelmäßig angeordnete Gitter des Finite-Volumen-Modells. Aus Borchert et al. (2014).

wird auch der Gesamtdruck $\hat{p}(\mathbf{r}, t)$ in einen zeitunabhängigen, jedoch vertikal abhängigen Hintergrunddruck $\hat{p}_0(z)$ und eine Abweichung $\Delta\hat{p}(\mathbf{r}, t)$ zerlegt

$$\hat{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{p}_0(z) + \Delta\hat{p}(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

Der Vektor \mathbf{r} beschreibt hierbei einen beliebigen Ortspunkt des Systems und t die Zeit. Der Hintergrunddruck \hat{p}_0 ergibt sich aus der Annahme des hydrostatischen Gleichgewichts zwischen Druckgradient, Erd- und Zentrifugalbeschleunigung

$$\nabla\hat{p}_0 = \mathbf{g}\hat{\rho}_0 - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \hat{\rho}_0, \quad (2.3)$$

mit der Definition des Nabla-Operators in Zylinderkoordinaten $\nabla = \mathbf{e}_\vartheta(1/r)\partial/\partial\vartheta + \mathbf{e}_r\partial/\partial r + \mathbf{e}_z\partial/\partial z$, der Erdbeschleunigung $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{e}_z$ sowie der Zentrifugalbeschleunigung $-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \Omega^2 r\mathbf{e}_r$. Außerdem werden die zylindrischen Einheitsvektoren \mathbf{e}_ϑ , \mathbf{e}_r and \mathbf{e}_z benutzt, die in dieser Reihenfolge ein linkshändiges Koordinatensystem definieren. Die Impulsgleichungen nehmen unter der Boussinesq-Näherung die folgenden Form an

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{I} - \boldsymbol{\sigma}) - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{g}\rho - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \rho, \quad (2.4)$$

wobei $p \equiv \Delta\hat{p}/\hat{\rho}_0$, $\rho \equiv \Delta\hat{\rho}/\hat{\rho}_0$ und $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_\vartheta + v\mathbf{e}_r + w\mathbf{e}_z$ den Geschwindigkeitsvektor darstellt. Der Tensor \mathbf{I} bezeichnet den Einheitstensor und $\boldsymbol{\sigma}$ den viskosen Spannungstensor, der sich in der Boussinesq-Näherung vereinfachen lässt zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \nu \left[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right], \quad (2.5)$$

mit der kinematischen Viskosität ν . Das hochgestellte, aufrecht geschriebene T kennzeichnet hierbei das Transponierte eines Tensors. Die Kontinuitätsgleichung ist gegeben durch

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.6)$$

was eine divergenzfreie Strömung charakterisiert. Die thermodynamische Energiegleichung lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}T) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (2.7)$$

mit der Temperatur T und der Temperaturleitfähigkeit $\kappa = \lambda/(c_p\hat{\rho}_0)$, wobei λ die Wärmeleitfähigkeit und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck ist. Zur vollständigen Beschreibung des Systems wird zudem eine Zustandsgleichung benötigt, die eine mathematische Beziehung zwischen der Dichte und der Temperatur angibt. In dieser Studie wird der Zusammenhang mit dem parabolischen Ansatz (Borchert et al., 2015)

$$\rho = \rho_1 (T - T_0) + \rho_2 (T - T_0)^2, \quad (2.8)$$

parametrisiert. Die Koeffizienten ρ_1 und ρ_2 sind dabei materialabhängige Größen. Auch die Temperaturabhängigkeit der kinematischen Viskosität ν und der Temperaturleitfähigkeit κ werden, wie in Borchert et al. (2015) ausführlich beschrieben, mit einem parabolischen Ansatz berücksichtigt

$$\nu = \nu_0 \left[1 + \nu_1 (T - T_0) + \nu_2 (T - T_0)^2 \right], \quad (2.9)$$

- innerer Radius, a :	20 cm
- äußerer Radius, b :	70 cm
- Gleichgewichtsfüllhöhe, d :	4 cm
- Temperatur innere Zylinderwand, T_a :	15 °C
- Temperatur äußere Zylinderwand, T_b :	45 °C
- Winkelgeschwindigkeit, Ω :	0,08 rad/s (0,76 rpm)
- ρ_1 :	$-2,923 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$
- ρ_2 :	$-3,917 \times 10^{-6} \text{ K}^{-2}$
- ν_0 :	$8,160 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
- ν_1 :	$-2,292 \times 10^{-2} \text{ K}^{-1}$
- ν_2 :	$2,819 \times 10^{-4} \text{ K}^{-2}$
- κ_0 :	$1,477 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$
- κ_1 :	$2,758 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$
- κ_2 :	$-1,259 \times 10^{-5} \text{ K}^{-2}$
- Ekmanzahl, Ek :	6×10^{-3}
- thermische Rossbyzahl, Ro_{th} :	0,5

Tabelle 2.1: Physikalische Parameter und abgeleitete dimensionslose Kennzahlen für die atmosphärische Annuluskonfiguration, die in Borchert et al. (2014) entwickelt wurde.

$$\kappa = \kappa_0 [1 + \kappa_1 (T - T_0) + \kappa_2 (T - T_0)^2]. \quad (2.10)$$

Die jeweiligen Werte von $\rho_{1,2}$, $\nu_{0,1,2}$ and $\kappa_{0,1,2}$, die sich aus parabolischen Approximationen von gemessenen Werten ergeben (Borchert et al., 2015), können der Tabelle 2.1 entnommen werden.

Streng genommen ist obige Darstellung der Grundgleichungen eine Erweiterung der traditionellen Boussinesq-Näherung (Boussinesq, 1903), da Temperaturabhängigkeiten nicht nur in der Dichte, sondern auch in der kinematischen Viskosität und der Temperaturleitfähigkeit berücksichtigt werden. Nichtsdestotrotz stellt sich die Frage nach der Gültigkeit der Boussinesq-Näherung in der vorliegenden Studie, da ein recht großer Temperaturbereich betrachtet wird. Wie in den Tabellen 2.1 und 2.2 ersichtlich ist, wird eine Temperaturspanne von $\Delta T = T_b - T_a = 30 \text{ K}$ in der Annuluskonfiguration und $\Delta T = 40 \text{ K}$ im doppelperiodischen Modell verwendet. Folglich könnte die Kritik laut werden, dass die Vernachlässigung einiger Terme bei der Herleitung der Boussinesq-Gleichungen nicht mehr gerechtfertigt ist. Als Konsequenz wären die Ergebnisse der numerischen Simulationen der vorliegenden Modellkonfigurationen mit äußerster Vorsicht zu genießen. Um diesen Zweifeln entgegen zu treten, betrachten wir zunächst die Studie von Borchert et al. (2015). Darin wurde das in der vorliegenden Arbeit benutzte numerische Modell des Annulus in einem kleineren Temperaturbereich angewandt und auf Grundlage äquivalenter Laborstudien

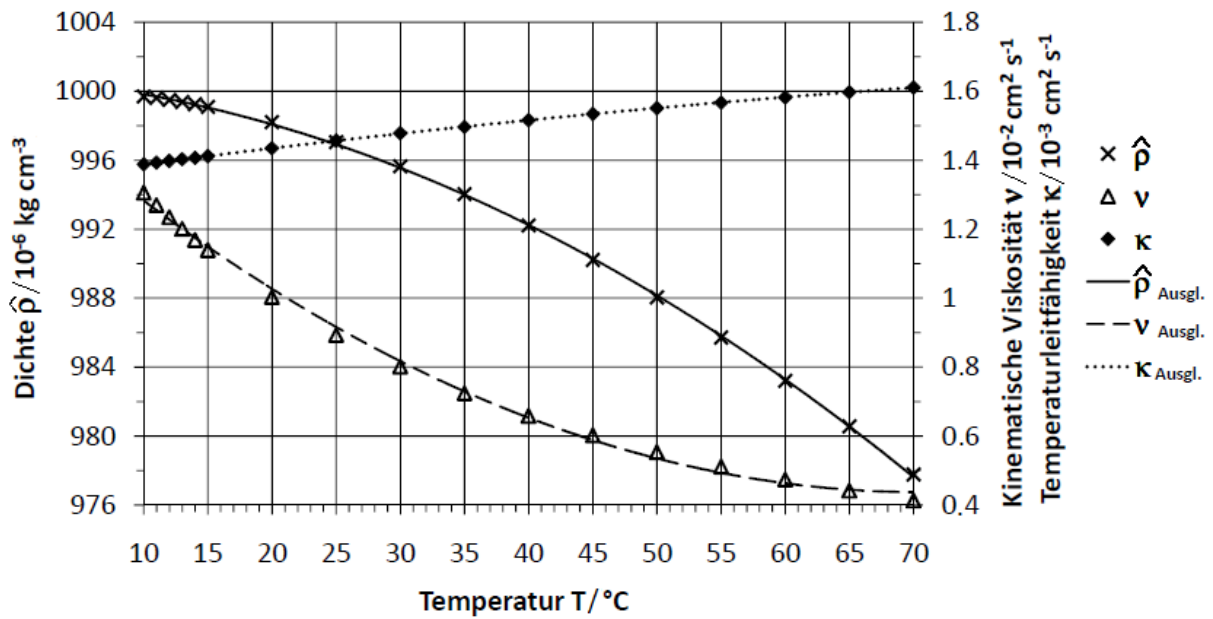


Abbildung 2.2: Temperaturabhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von Wasser bei einem Druck von 1000 hPa. Die Grafik zeigt gemessene Werte der totalen Dichte $\hat{\rho}$ (Kreuze), der kinematischen Viskosität ν (Dreiecke) und der Temperaturleitfähigkeit κ (Rauten). Entsprechende Ausgleichsparabeln sind ebenfalls eingezeichnet. Die dazugehörigen Koeffizienten befinden sich in Tabelle 2.1 (siehe Gleichungen (2.8)–(2.10) für den funktionalen Zusammenhang). Die Korrelation zwischen den Ausgleichsparabeln und den gemessenen Werten ist in allen Fällen größer als 0,99. Aus Borchert (2015, bearbeitet).

erfolgreich validiert. Darüber hinaus wird gezeigt, dass die parametrisierten Parabeln der Flüssigkeitseigenschaften (vergleiche Gleichungen (2.8)–(2.10)) auch in der hier betrachteten, höheren Temperaturspanne eine sehr gute Übereinstimmung mit den tatsächlich gemessenen Werten liefern. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 2.2 gemessene Werte der totalen Dichte $\hat{\rho}$, der kinematischen Viskosität ν und der Temperaturleitfähigkeit κ in einem Temperaturbereich von 10 – 70 $^{\circ}\text{C}$ mit den entsprechenden Ausgleichsparabeln gezeigt. Wie daraus zu erkennen ist, ist der parabolische Ansatz bestens geeignet, um die jeweiligen Temperaturabhängigkeiten zu parametrisieren. Die Korrelation zwischen den Ausgleichsparabeln und den gemessenen Werten ist in allen Fällen größer als 0,99.

Weitere Argumente zur Gültigkeit der Boussinesq-Näherung können durch Einbezug der Arbeit von Gray & Giorgini (1976) gewonnen werden. Dort werden, basierend auf einer Skalenanalyse der vollen inkompressiblen Gleichungen, verschiedene Bedingungen abgeleitet, unter denen die traditionelle Boussinesq-Näherung (keine Temperaturabhängigkeiten in ν und κ) verwendbar ist. Unter näherer Betrachtung und unter Einbezug unserer Modellgeometrie zeigt sich, dass die vernachlässigten Terme auch in einem größeren Temperaturbereich keinen signifikanten Einfluss auf die Dynamik des Systems haben. Diese Terme sind betragsmäßig mindestens eine Ordnung kleiner als die führenden Boussinesq-Terme. Die Ausführungen von Gray & Giorgini (1976) sind im Anhang A explizit dargestellt. Zudem erfolgt eine Diskussion der darin abgeleiteten Resultate und Bedingungen auf Basis

unserer Annuluskonfigurationen.

Auf Grundlage der physikalischen Parameter, die aus Borchert et al. (2014) übernommen wurden und in Tabelle 2.1 gelistet sind, können nun weitere, teilweise dimensionslose Kennzahlen zur Beschreibung der Annuluskonfiguration abgeleitet werden. Ziel der Studie von Borchert et al. (2014) war die Entwicklung einer Annuluskonfiguration, die bestmöglich die atmosphärischen Bedingungen der Erdatmosphäre widerspiegelt. In diesem Zusammenhang sollte vor allem gewährleistet sein, dass das räumliche Mittel der Auftriebsbeziehungsweise Brunt-Väisälä-Frequenz N größer ist als der Coriolisparameter f .

Die quadrierte Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 gibt Auskunft über die Schichtung der Atmosphäre. So gilt eine Atmosphäre mit $N^2 > 0$ als stabil, mit $N^2 < 0$ als labil und mit $N^2 = 0$ als neutral geschichtet. In den höheren Regionen der Troposphäre der mittleren Breiten – Bereiche, die für die Schwerewellenausbreitung sehr relevant sind – wird $N/f = \mathcal{O}(100)$ beobachtet (Esler & Polvani, 2004). Auch in unserer atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration stellt sich eine stabile Schichtung ein. Wie in Kapitel 3.1.1 ausführlich erklärt, wird diese durch die Umwälzung der durch den radialen Temperaturunterschied entstehenden Zirkulation erzeugt und aufrecht erhalten. Daher ist der vertikale Temperaturgradient ΔT_{vert} zwischen Boden und Oberfläche der Flüssigkeitssäule ungefähr gleich dem radialen Temperaturunterschied $T_b - T_a$, und eine Abschätzung für N kann vorgenommen werden mit (Borchert et al., 2015)

$$N \equiv \sqrt{\frac{g|\rho_1(\Delta T_{vert})|}{d}} \approx \sqrt{\frac{g|\rho_1(T_b - T_a)|}{d}}, \quad (2.11)$$

was zu $N/f = \mathcal{O}(10)$ führt.

Um die Bedeutung des Verhältnisses N/f im Zuge der Schwerewellendynamik noch deutlicher hervorzuheben, betrachten wir die Dispersionsrelation von linearen Schwerewellen unter der Boussinesq-Näherung (Fritts & Alexander, 2003)

$$\hat{\omega}^2 = \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = N^2 \cos^2(\alpha) + f^2 \sin^2(\alpha). \quad (2.12)$$

$\hat{\omega} = \omega - k_x u_0 - k_y v_0$ ist hierbei die intrinsische Frequenz der Wellen, die in einem System beobachtbar ist, das sich mit der großskaligen, horizontalen Hintergrundströmung $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)^T$ bewegt. ω ist hingegen die sogenannte absolute Frequenz, die ein stationärer Beobachter wahrnimmt. k_x, k_y, k_z kennzeichnen die zonale (azimutal im Sinne des Annulus), meridionale (negative radiale) und vertikale Wellenzahl. Des Weiteren repräsentiert

$$\alpha = \arctan\left(k_z / \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\right) \quad (2.13)$$

den Winkel, den die Ausbreitungsrichtung der Phase mit der horizontalen Ebene einschließt. Dieser kann bei Kenntnis der Frequenz $\hat{\omega}$ ausschließlich durch das Verhältnis von N/f bestimmt werden. Die Phasengeschwindigkeit der Welle lautet

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{k} = \frac{\omega}{\|\mathbf{k}\|^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

wobei $\|\mathbf{k}\|$ die Norm des Wellenzahlvektors $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top$ ist. Die für den Energie- und Impulsfluss maßgebende Gruppengeschwindigkeit von Schwerewellen

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega = \begin{pmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial k_x} \\ \frac{\partial\omega}{\partial k_y} \\ \frac{\partial\omega}{\partial k_z} \end{pmatrix} = \frac{N^2 - f^2}{\hat{\omega} \|\mathbf{k}\|^4} \begin{pmatrix} k_x k_z^2 \\ k_y k_z^2 \\ -(k_x^2 + k_y^2)k_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

berechnet sich durch den Gradienten der lokalen Frequenzen im Wellenzahlraum. Des Weiteren kann leicht gezeigt werden, dass die intrinsische Gruppengeschwindigkeit $\tilde{\mathbf{c}}_g = \nabla_{\mathbf{k}}\tilde{\omega}$ und die intrinsische Phasengeschwindigkeit $\tilde{\mathbf{c}}_p = \frac{\tilde{\omega}}{\|\mathbf{k}\|^2}\mathbf{k}$ senkrecht aufeinander stehen (Sutherland, 2010)

$$\tilde{\mathbf{c}}_g \cdot \tilde{\mathbf{c}}_p = 0. \quad (2.16)$$

Dementsprechend propagieren hochfrequente Schwerewellenpakete ($\hat{\omega} \approx N$, $\alpha = 0^\circ$) nahezu vertikal, während sich niederfrequente Wellenzüge ($\hat{\omega} \approx f$, $\alpha = 90^\circ$) eher in horizontaler Richtung ausbreiten.

Eine weitere Voraussetzung, die an die Wahl der physikalischen Parameter gestellt wird, ist das Auftreten von barokliner Instabilität im Annulus. Ist diese vorhanden, so können sich barokline Wellen ausbilden. In diesem Zusammenhang eignet sich das quasigeostrophische Modell von Eady (1949) als Anhaltspunkt, um den Mechanismus der baroklinen Instabilität zu studieren. Unter den Annahmen einer f -Ebene, konstanter Schichtungsverhältnisse und einer linearen Höhenabhängigkeit der Zonalgeschwindigkeit werden hierbei Bedingungen für eine zonal symmetrische, rechteckige Kanalgeometrie hergeleitet, die für die Entstehung von barokliner Instabilität erfüllt sein müssen (vergleiche Vallis, 2006). Wir übertragen im Folgenden diese Ausführungen auf unsere Annuluskonfiguration und vernachlässigen dabei Krümmungseffekte der zylindrischen Geometrie, was eine vereinfachte Darstellung in kartesischen Koordinaten ermöglicht. Zunächst werden die azimuthalen und radialen (x- und y-Richtung) baroklinen Wellenzahlen in der Annulusgeometrie eingeführt (siehe Borchert, 2015)

$$\tilde{k}_x(n_x) = \frac{2\pi}{\tilde{\lambda}_x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi(a+b)}{n_x}} = \frac{2n_x}{a+b}, \quad (2.17)$$

$$\tilde{k}_y(n_y) = \frac{2\pi}{\tilde{\lambda}_y} = \frac{2\pi}{\frac{b-a}{n_y/2}} = \frac{\pi n_y}{b-a}, \quad (2.18)$$

wobei n_x und n_y die Modenzahlen und $\tilde{\lambda}_x$ und $\tilde{\lambda}_y$ die Wellenlängen in azimuthaler und radialer Richtung sind. Gleichung (2.17) besagt, dass die azimuthale Wellenzahl der baroklinen Welle nur ein ganzzahliger Bruchteil des mittleren Annulusumfangs $\pi(a+b)$ sein kann. Gleichzeitig berücksichtigt Gleichung (2.18), dass die radiale Wellenlänge nur Werte annehmen kann, die ein ganzzahliger Bruchteil der doppelten Annulusspaltbreite $2(b-a)$ sind. Auf die Darstellung der einzelnen Rechenschritte zur Lösung des Eady-Problems wird in dieser Arbeit verzichtet. Wir beschränken uns auf die für uns relevanten Erkenntnisse. Wie in Vallis (2006) explizit gezeigt wird, liegt eine Instabilität vor, sofern

$$L_d^2(\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2) < \mu_c^2. \quad (2.19)$$

$L_d = Nd/f$ kennzeichnet hierbei den Rossby-Deformationsradius, der die typische horizontale Längenskala der baroklinen Störung beschreibt und $\mu_c = 2,399$. Setzen wir die zuvor definierten Wellenzahlen (2.17) und (2.18) in Gleichung (2.19) ein und betrachten die kleinstmögliche Modenzahl ($n_x = n_y = 1$), so erhalten wir die notwendige Instabilitätsbedingung für den Grundzustand

$$\left[\frac{2L_d}{\pi(a+b)} \right]^2 + \left(\frac{L_d}{b-a} \right)^2 < \left(\frac{\mu_c}{\pi} \right)^2. \quad (2.20)$$

Da der zweite Term auf der linken Seite in Gleichung (2.20) deutlich größer ist als der erste ($b-a < \pi(a+b)/2$), kann der erste Term vernachlässigt werden und wir erhalten das schwächere Instabilitätskriterium (Hide & Mason, 1975)

$$\left(\frac{L_d}{b-a} \right)^2 \equiv Bu < \left(\frac{\mu_c}{\pi} \right)^2, \quad (2.21)$$

wobei hier die Burger-Zahl Bu eingeführt wurde.

Zur weiteren Charakterisierung der Strömungseigenschaften im Annulusexperiment betrachten wir die Rossbyzahl Ro und die Ekmanzahl Ek . Erstgenannte beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Coriolisbeschleunigung und ist in ihrer allgemeinsten Form definiert als

$$Ro \equiv \frac{U}{fL}. \quad (2.22)$$

U und L sind hierbei charakteristische Werte für die Horizontalgeschwindigkeit sowie horizontale Ausdehnung der großskaligen Strömung. Wie in den anschließenden Kapiteln noch deutlich wird, eignet sich dieser Parameter im Speziellen zur Skalenseparation von großskaligen (langsamen) und kleinskaligen (schnellen) Strömungssignalen (Vanneste, 2013). Wir folgen Borchert et al. (2015) und bedienen uns der thermischen Windbeziehung, um eine charakteristische Horizontalgeschwindigkeit U abzuleiten. Setzen wir diese in Gleichung (2.22) ein, so erhalten wir die sogenannte thermische Rossbyzahl

$$Ro_{th} \equiv \frac{dg\rho_1|T_b - T_a|/f(b-a)}{f(b-a)} = \left(\frac{N}{f} \frac{d}{b-a} \right)^2 \approx 0,5, \quad (2.23)$$

wobei wir im zweiten Schritt die Definition der Brunt-Väisälä-Frequenz (2.11) ausgenutzt haben. Es stellt sich also heraus, dass in der vorliegenden Geometrie die Rossbyzahl mit der Burger-Zahl übereinstimmt.

Die Ekmanzahl

$$Ek = \frac{\nu_0}{\Omega d^2} \approx 0,006, \quad (2.24)$$

gibt das Verhältnis von viskosen Kräften zur Corioliskraft an. Verglichen mit realen atmosphärischen Bedingungen finden wir im Annulus einen größeren Wert, da wir nur eine dünne Wasserschicht betrachten, die sich mit einer relativ geringen Geschwindigkeit fortbewegt. Allerdings zeigen Untersuchungen, dass die für uns relevanten Prozesse, und insbesondere die Schwerewellenaktivität, davon kaum beeinflusst werden, auch wenn es zu einer vergleichsweise schnelleren Dissipation der Wellenpakete kommt (vergleiche Abschnitt 3.2.2).

2.2 Doppeltperiodische, kartesische Konfiguration

Bereits durchgeführte Studien lassen darauf schließen, dass die Schwerewellenaktivität im rotierenden Annulusexperiment von zwei grundlegend verschiedenen Mechanismen angeregt wird. Während einige Untersuchungen davon ausgehen, dass die beobachteten Schwerewellen in der Grenzschicht der inneren Zylinderwand generiert werden (Jacoby et al., 2011; Randriamampianina, 2013; Randriamampianina & Crespo del Arco, 2015; von Larcher et al., 2018), deutet die Arbeit von Borchert et al. (2014) darauf hin, dass ein nicht zu vernachlässigbarer Anteil der Schwerewellen auch direkt im Inneren, im Jet-Front System, entsteht. Da der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit auf die Entstehung von Schwerewellen im Jet-Front System liegt, gilt unser Hauptaugenmerk der Schwerwellenerzeugung im Inneren des Annulusexperiments. Eine klare Separierung beider Entstehungsprozesse stellt sich allerdings als schwierig heraus, weil sicherlich auch eine Überlagerung beziehungsweise Wechselwirkung beider Mechanismen nicht ausgeschlossen werden kann. Daher werden die anschließenden Untersuchungen zusätzlich auch in einer idealisierten Strömungskonfiguration durchgeführt, die keine festen Wände, sondern periodische Bedingungen in den beiden horizontalen Richtungen besitzt. Folglich kann eine Schwerwellengenerierung ausschließlich im Jet-Front System erfolgen. Eine mögliche Schwerwellenerzeugung durch Scherinstabilitäten im Modellinneren kann durch eine geeignete Wahl der Modellgeometrie und der Modellparameter ausgeschlossen werden. Analoge Simulationen in beiden Modellkonfigurationen erlauben uns somit Aussagen um die relative Wichtigkeit beider Quellprozesse zu treffen.

Zur numerischen Umsetzung des doppeltperiodischen Systems wird von der Zylindergeometrie zu einem linkshändigen, kartesischen Koordinatensystem übergegangen. Dieses wird durch die kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z mit den zugehörigen Übersetzungen $\mathbf{e}_\vartheta \rightarrow \mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_r \rightarrow \mathbf{e}_y$ and $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z$ repräsentiert. Die mathematische Beschreibung des modifizierten Modells erfolgt weiterhin mit dem Gleichungssystem (2.4)–(2.8), jedoch wird in der Energiegleichung (2.7) ein Antriebsterm F eingefügt, der ein baroklin instabiles, hyperbolisches Temperaturprofil erzeugt

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}T) + \nabla \cdot (\kappa \mathbf{T}) + F. \quad (2.25)$$

Der Antriebsterm F nimmt dabei die folgende Form an

$$F = -\frac{1}{\tau} (T - T_r), \quad (2.26)$$

mit

$$T_r = T_a + (T_b - T_a) \left(1 - \frac{1}{2} \left[\tanh \left\{ \frac{1}{\sigma_y} \left(\frac{y}{L_y} - \frac{1}{4} \right) \right\} - \tanh \left\{ \frac{1}{\sigma_y} \left(\frac{y}{L_y} - \frac{3}{4} \right) \right\} \right] \right). \quad (2.27)$$

T_a und T_b sind dabei als Äquivalent zur inneren und äußeren Zylinderwandtemperatur in der Annuluskonfiguration zu verstehen. Hier handelt es sich um das Minimum und das Maximum des angetriebenen Temperaturprofils T_r . σ_y beschreibt die relative Dicke des Temperatursprungs im Temperaturantrieb. Der Wert von σ_y wird ausreichend klein gewählt, so dass die Entstehung von Scherinstabilitäten in der Strömung vermieden werden kann.

- zonale Länge, L_x :	63 cm
- meridionale Länge, L_y :	100 cm
- Gleichgewichtsfüllhöhe, d :	4 cm
- minimale Antriebstemperatur, T_a :	10 °C
- maximale Antriebstemperatur, T_b :	50 °C
- Winkelgeschwindigkeit, Ω :	0,157 rad/s (1,5 rpm)
- Relaxationszeit, τ :	1000 s
- Dicke Temperaturantrieb, σ_y :	0,06
- Ekmanzahl, Ek :	3×10^{-3}
- thermische Rossbyzahl, Ro_{th} :	0,2

Tabelle 2.2: Physikalische Parameter und abgeleitete dimensionslose Größen für die doppeltperiodische, kartesische Modellkonfiguration.

τ bezeichnet eine Relaxationszeit, mithilfe derer die Amplitude des Temperaturantriebs gesteuert werden kann. Basierend auf empirisch durchgeführten Testexperimenten stellt sich ein Wert von $\tau = 1000$ s als geeignet heraus. In diesem Fall wird die Temperaturverteilung durch den Antriebsterm adäquat beeinflusst. Zudem ist die Zeitskala groß genug, so dass der Temperaturantrieb keine Beeinflussung auf die relevanten dynamischen Prozesse ausübt. Zur Veranschaulichung ist das hyperbolische Temperaturprofil in Abbildung 2.3 dargestellt. Die verwendeten Modellparameter sowie einige dimensionslose Kennzahlen sind in Tabelle 2.2 gelistet. Dabei ist die horizontale Ausdehnung des Modellgebiets so gewählt, dass sich gerade eine Wellenlänge der baroklinen Welle darin ausbreitet. Um einen bestmöglichen Vergleich mit der Annuluskonfiguration zu ermöglichen, wird auch hier Wasser als Arbeitsmedium verwendet, dessen physikalische Eigenschaften weiterhin, wie in Kapitel 2.1 beschrieben, eine angemessene Berücksichtigung finden.

2.3 Randbedingungen und numerische Methoden

Die numerische Integration der Grundgleichungen (2.4)–(2.8) erfordert das Vorhandensein von Randbedingungen. Dabei werden Kenntnisse der Modellvariablen $\mathbf{z} = (u, v, w, T, p)$ selbst (Dirchlet-Randbedingungen) oder deren Normalableitung (Neumann-Randbedingungen) an den Rändern des Modellgebiets benötigt. Die vertikalen Randbedingungen am Boden ($z = 0$ cm) sowie an der (reibungsfreien) Flüssigkeitsoberfläche ($z = 4$ cm) stimmen in beiden Modellsystemen überein. Am (festen) Boden haben wir verschwindende Normalgeschwindigkeiten (englisch: *no-normal flow condition*)

$$w|_{z=0,d} = 0, \quad (2.28)$$

sowie Haftreibungsbedingungen (englisch: *no-slip condition*), was zur Folge hat, dass dort auch die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten verschwinden

$$u|_{z=0} = v|_{z=0} = 0. \quad (2.29)$$

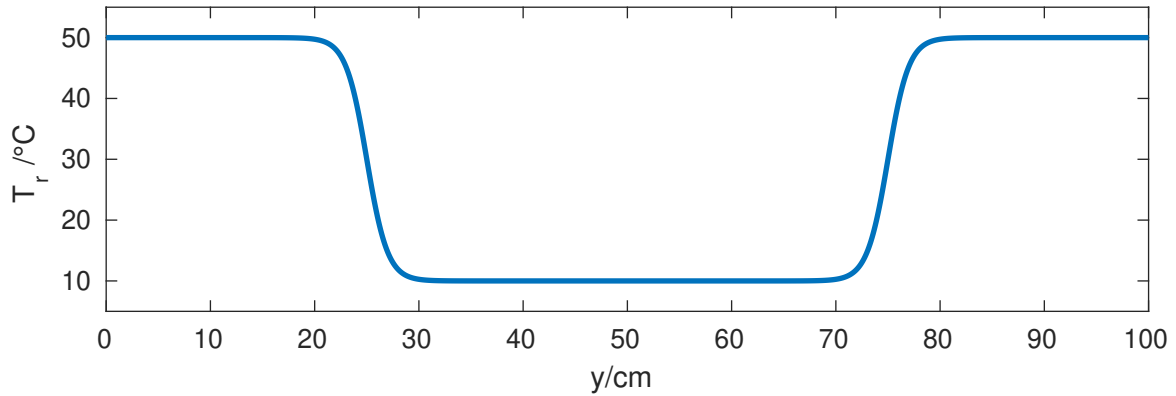


Abbildung 2.3: Meridionaler Verlauf des Temperaturprofils $T_r(y)$, das in der doppeltperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration zur Erzeugung von barokliner Instabilität verwendet wird. Siehe Gleichung (2.27) für den funktionalen Zusammenhang.

Da wir eine reibungsfreie Flüssigkeitsoberfläche betrachten, fordern wir, dass die senkrecht zur Oberfläche zeigenden Komponenten des viskosen Impulsflusses (siehe Definition (2.5)) verschwinden. Dies führt unter Berücksichtigung von Bedingung (2.28) zu

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d} = \nu \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad (2.30)$$

woraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d} = \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0. \quad (2.31)$$

Wir vernachlässigen zudem den Wärmeaustausch (Wärmeleitung, Verdunstung oder Strahlungsflüsse) zwischen den vertikalen Begrenzungen der Modellsysteme und der Umgebung, was sich in der Bedingung

$$\lambda \nabla T \cdot \mathbf{e}_z \Big|_{z=0,d} = 0, \quad (2.32)$$

widerspiegelt. Daraus folgt

$$\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0,d} = 0. \quad (2.33)$$

Auch die vertikalen Gradienten des Drucks verschwinden in beiden Modellkonfigurationen

$$\frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{z=0,d} = 0. \quad (2.34)$$

In der Horizontalen verwendet das kartesische Modell doppeltperiodische Randbedingungen, so dass gilt

$$\mathbf{z} \Big|_{x=0} = \mathbf{z} \Big|_{x=L_x}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{z} \Big|_{y=0} = \mathbf{z} \Big|_{y=L_y}. \quad (2.36)$$

Im Falle der Annuluskonfiguration haben wir periodische Verhältnisse nur in azimuthaler Richtung

$$\mathbf{z}|_{\vartheta=0^\circ} = \mathbf{z}|_{\vartheta=360^\circ}. \quad (2.37)$$

An den radialen Wänden werden, analog zu den Bedingungen am festen Boden, ebenfalls verschwindende Normalgeschwindigkeiten und Haftreibungsbedingungen angewandt

$$u|_{r=a,b} = v|_{r=a,b} = w|_{r=a,b} = 0. \quad (2.38)$$

Wie bereits in Kapitel 2.1 beschrieben, werden die Temperaturen an der inneren und äußeren Zylinderwand vorgegeben

$$T|_{r=a} = T_a, \quad (2.39)$$

$$T|_{r=b} = T_b. \quad (2.40)$$

Die radialen Randbedingungen des Drucks lauten

$$\left. \frac{\partial p}{\partial r} \right|_{r=a,b} = 0. \quad (2.41)$$

Die numerischen Methoden zur Umsetzung der Modellgleichungen und Randbedingungen in einem numerischen Modell werden ausführlich in Borchert (2015) beschrieben. Es handelt sich dabei um das Modell *cylindrical flow solver with implicit turbulence model (cylFloat)*, das auch in Studien von Borchert et al. (2014, 2015) eingesetzt wurde. Im Folgenden werden die zentralen Eigenschaften des Modells kurz wiedergegeben. Für weitere Details sei dann auf die erwähnten Referenzen verwiesen.

Zur Lösung der Modellgleichungen wird ein Finite-Volumen-Verfahren verwendet. Dafür wird, im Falle der Annuluskonfiguration, das Modellvolumen V_A in 3D-Gitterzellen ΔV_A unterteilt, welche die azimuthale Ausdehnung $\Delta\vartheta = 2\pi/N_\vartheta$, die radialen Länge $\Delta r = (b-a)/N_r$ und die vertikale Erstreckung $\Delta z = d/N_z$ aufweisen. N_ϑ , N_r and N_z bezeichnet die Anzahl der Gitterzellen in azimuthaler, radialer und vertikaler Richtung. Während das Volumen der jeweiligen Gitterzellen $\Delta V_A = r\Delta\vartheta\Delta r\Delta z$ dabei von der radialen Position im Annulus abhängt, wird für das kartesische Modell ein reguläres Gitter mit den Ausmaßen $\Delta x = L_x/N_x$, $\Delta y = L_y/N_y$, $\Delta z = d/N_z$ aufgespannt, wobei N_x und N_y hier die zonale und meridionale Gitteranzahl kennzeichnen. Die Modellvariablen sind auf einem Finiten-Volumen-Gitter versetzt, auf einem sogenannten C-Gitter (englisch: *staggered C-grid*), angeordnet (Arakawa & Lamb, 1977). Die Flüsse der jeweiligen Gitterzellen werden in dieser Arbeit mithilfe einer einfachen zentralen Differenzenmethode berechnet, wohingegen in den vorherigen Studien (Borchert et al., 2014, 2015) die implizite Subgitterskalenparamterisierung ALDM (*adaptive local deconvolution method*, Hickel et al., 2006) zur Berechnung der Advektionsterme eingesetzt wurde. Diese Vereinfachung erscheint plausibel, da unsere numerischen Simulationen allesamt mit einer sehr hohen räumlichen Auflösung durchgeführt werden, so dass alle relevanten Skalen explizit aufgelöst werden. Einzig für die groben Vorsimulationen in der Annulusgeometrie (vergleiche Kapitel 3.1.1) wird von der Subgitterskalenparamterisierung ALDM Gebrauch gemacht.

Die zeitliche Integration der prognostischen Gleichungen der drei Geschwindigkeitskomponenten und der Temperatur wird mittels einer Runde-Kutta Methode dritter Ordnung durchgeführt (Williamson, 1980). Um zu gewährleisten, dass die Strömung zu jeder Zeit die Kontinuitätsgleichung (2.6) erfüllt, wird in jedem Schritt zudem eine Poisson-Gleichung gelöst, woraus auch der Druck p diagnostiziert wird (für Details siehe Borchert, 2015).

Kapitel 3

Groß- und kleinskalige Strömungseigenschaften

In diesem Kapitel werden die groß- und kleinskaligen Strömungseigenschaften beschrieben, die in den beiden Modellkonfigurationen auftreten. Als Grundlage hierfür dienen direkte numerische Simulationen, die mit einer ausreichend hohen numerischen Auflösung durchgeführt werden, um alle relevanten kleinskaligen Prozesse aufzulösen. Im Folgenden werden zunächst die großskaligen, baroklinen Strömungseigenschaften charakterisiert. Auf deren Grundlage wird dann die Schwerewellenaktivität diskutiert. Zudem erfolgt eine quantitative Analyse der Schwerewellenpakete im rotierenden Annulusexperiment, was Referenzwerte für analoge Laborexperimente bereitstellt.

3.1 Großskalige, barokline Wellen

Bevor die Ergebnisse der Modellsimulationen präsentiert werden, sei noch kurz auf die Simulationsstrategie eingegangen. Sowohl für die Annulus- als auch für die doppeltperiodische, kartesische Konfiguration wird zunächst eine zweidimensionale (2D) Simulation durchgeführt, bis sich ein Gleichgewichtszustand (englisch: *steady state*) einstellt. Dieser wird unter anderem durch das asymptotische Verhalten der räumlich gemittelten kinetischen und potentiellen Energie festgelegt. Die numerische Umsetzung der 2D-Modellierung wird erreicht, indem die azimuthale (Annulus) beziehungsweise zonale (kartesisch) Gitteranzahl auf eins gesetzt werden ($N_\vartheta = 1$ beziehungsweise $N_x = 1$). Die so erhaltenen 2D-Grundzustände werden als Anfangszustände für die dreidimensionalen (3D) numerischen Integrationen verwendet. Zusätzlich wird auf das Temperaturfeld eine zufällige, schwache Störung addiert, was die Entstehung von baroklinen Wellen induziert. Die anschließenden 3D-Simulationen werden so lange durchgeführt, bis sich die baroklinen Wellen vollständig ausgebildet haben und die entsprechenden führenden azimuthalen (zonalen) Wellenzahlen konstant sind.

3.1.1 Annuluskonfiguration

Der stationäre 2D-Grundzustand ist in der betrachteten Annuluskonfiguration nach einer Integrationszeit von 36000 s erreicht. Die radiale und vertikale Gitteranzahl beträgt dabei $N_r = 80$ und $N_z = 30$. Die azimuthalsymmetrischen Ergebnisse der 2D-Simulationen sind in Abbildung 3.1 für die azimuthale Geschwindigkeitskomponente u_{2D} , die Temperatur T_{2D} und den Druck p_{2D} dargestellt. Die Felder erfüllen in guter Näherung das geostrophische

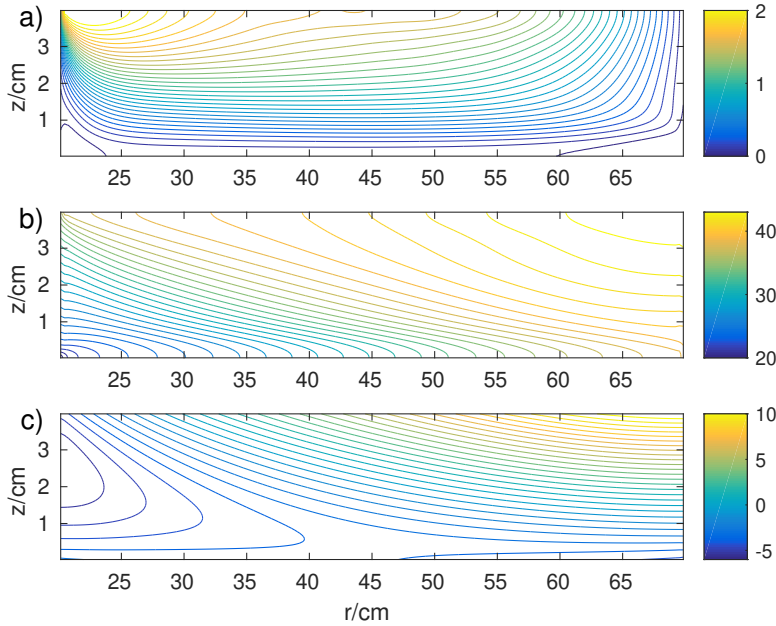


Abbildung 3.1: Konturlinien der azimutalsymmetrischen, stationären 2D-Simulation des rotierenden Annulusexperiments: a) azimutale Geschwindigkeit u_{2D} (in cm s^{-1}), b) Temperatur T_{2D} (in $^{\circ}\text{C}$) und c) Druck p_{2D} (in $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$).

und hydrostatische Gleichgewicht

$$u_{2D} \approx \frac{1}{f} \frac{\partial p_{2D}}{\partial r}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial p_{2D}}{\partial z} \approx -\rho_{2D} g, \quad (3.2)$$

das im Folgenden als thermischer Wind zusammengefasst wird. Um sich davon bildlich zu überzeugen, zeigt Abbildung 3.2 den mit f normierten radialen Dichtegradienten $(1/f)\partial p_{2D}/\partial r$ (Abbildung 3.2a), den vertikalen Dichtegradienten $\partial p_{2D}/\partial z$ (Abbildung 3.2b) und den Auftriebsterm $-\rho_{2D}g$ (Abbildung 3.2c), wobei $\rho_{2D} = \rho(T_{2D})$ aus der Zustandsgleichung (2.8) berechnet wurde. Es ist erkennbar, dass das geostrophische Gleichgewicht (3.1) in erster Näherung befriedigt ist, wenngleich die aus dem Druck berechnete azimutale Geschwindigkeit an der Flüssigkeitsoberfläche nahe der inneren Zylinderwand etwas zu hoch ausfällt (vergleiche Abbildungen 3.1a und 3.2a). Das hydrostatische Gleichgewicht (3.2) ist hingegen nahezu perfekt erfüllt (vergleiche Abbildungen 3.2b und 3.2c).

Die azimutale Geschwindigkeit nimmt mit steigender Säulenhöhe zu und erreicht ihren Maximalwert an der Flüssigkeitsoberfläche nahe der inneren Zylinderwand (siehe Abbildung 3.1a). Sowohl die Temperatur (Abbildung 3.1b) als auch der Druck (Abbildung 3.1c) zeigen eine Zunahme mit der Höhe ($\partial T_{2D}/\partial z > 0$, $\partial p_{2D}/\partial z > 0$). Der positive Temperaturgradient geht mit einer Dichteabnahme mit der Höhe ($\partial \rho_{2D}/\partial z < 0$) einher, was mittels Gleichung (2.8) unter Beachtung von $\rho_1, \rho_2 < 0$ gezeigt werden kann. Dies ist gleichbedeutend mit stabilen Schichtungsverhältnissen des Fluids.

Die anschließenden 3D-Simulationen werden zunächst mit einer relativ groben nume-

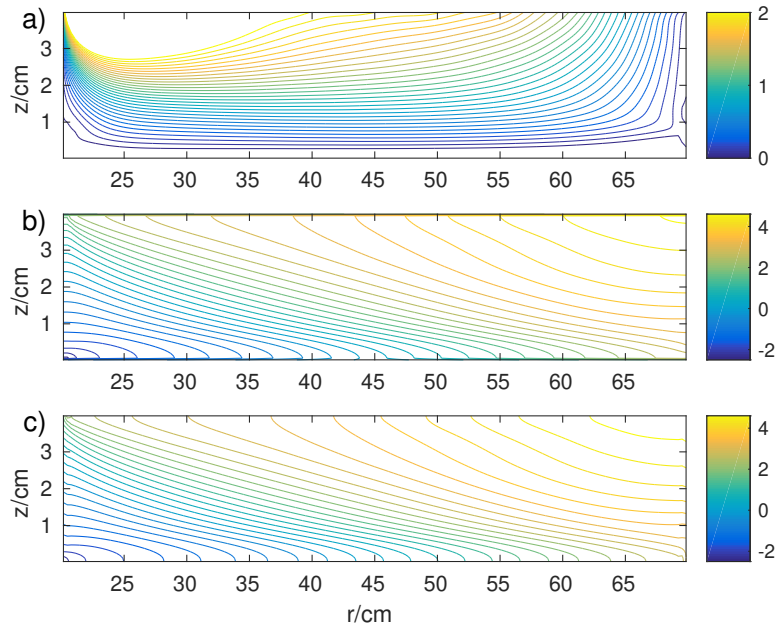


Abbildung 3.2: Konturlinien der azimutalsymmetrischen, stationären 2D-Simulation des rotierenden Annulusexperiments: a) $\frac{1}{f} \frac{\partial p_{2D}}{\partial r}$ (in cm s^{-1}), b) $\frac{\partial p_{2D}}{\partial z}$ (in cm s^{-2}) und c) $-g\rho_{2D}$ (in cm s^{-2}).

rischen Auflösung ($N_\theta = 80$, $N_r = 80$, $N_z = 30$) durchgeführt, bis sich die baroklinen Wellen vollständig ausbilden und keine Amplitudenveränderungen mehr erkennbar sind (Integrationszeit 2100 s). Das Resultat dieser Simulation ist am Beispiel der horizontalen Temperaturverteilung (bei $z = 3d/4 = 3 \text{ cm}$) in Abbildung 3.3 dargestellt. Drei großskalige, isolierte Temperaturminima entspringen aus der inneren, gekühlten Zylinderwand und erstrecken sich fast über die gesamte radiale Ausdehnung des Modellgebiets. Folglich werden kühle Flüssigkeitselemente in Richtung des geheizten, äußeren Zylinders transportiert. Demgegenüber fließen in den Zwischenräumen zweier benachbarter Temperaturminima warme Flüssigkeitselemente in Richtung der inneren Zylinderwand. Das System als Ganzes bewegt sich im Laufe der Zeit in azimuthaler Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn) und weist dabei eine relativ geringe Driftgeschwindigkeit auf. Aufgrund der konstanten azimuthalen Wellenzahl von drei bietet es sich an, die folgenden, hochauflösenden Rechnungen nur für einen Wellenberg und ein Wellental auszuführen. Dies wird erreicht, indem ein ausgewählter Wellenberg und -tal auf ein feineres Gitter ($N_\theta = 160$, $N_r = 160$, $N_z = 90$) interpoliert wird und nur eine sektorielle ($2\pi/3$)-Simulation durchgeführt wird. Dabei wird in azimuthaler Richtung weiterhin Periodizität angenommen. Durch diese Vorgehensweise kann die azimuthale Gitterauflösung bei gleichbleibender azimuthaler Gitterzahl verdreifacht werden. Um durch die Interpolation auftretende Störeffekte zu beseitigen, wird das Modell dann für weitere 1100 s integriert. Ausgewählte Ergebnisse dieser sektoriellen 3D-Simulationen sind in Abbildung 3.4 gezeigt. Deutlich sichtbar ist ein Minimum in der Druckverteilung p_{3D} in der Mitte des Modellgebiets (Abbildung 3.4a). An dieser Stelle ist zudem eine ausgeprägte Wirbelstruktur sichtbar, was aus der Vertikalkomponente der

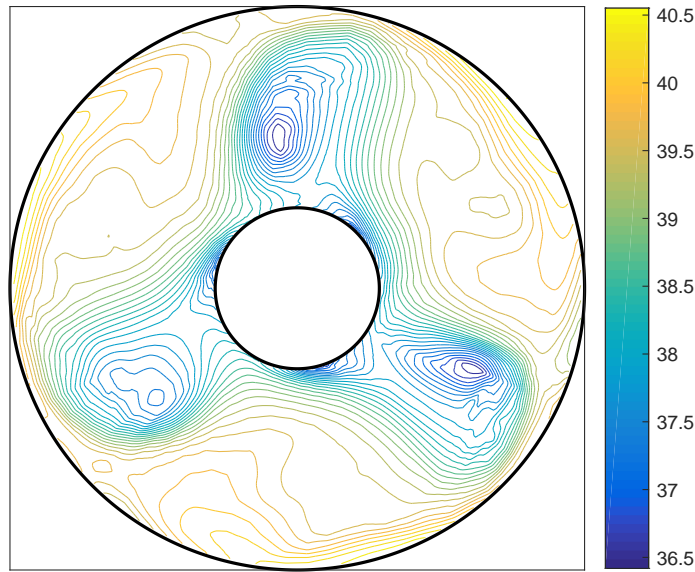


Abbildung 3.3: Horizontale Temperaturverteilung in °C (bei $z = 3d/4 = 3$ cm) der grob aufgelösten 3D-Simulationen des rotierenden Annulusexperiments nach einer Integrationszeit von 2100 s.

relativen Vorticity

$$\zeta = (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z, \quad (3.3)$$

hervorgeht (Abbildung 3.4b). Dieser asymmetrisch aufgebaute Wirbel ist gekennzeichnet durch eine hohe zyklonale Rotation ($\zeta > 0$) im Zentrum des Tiefdruckgebiets, der von schwach antizyklonalen Strömungsgebieten ($\zeta < 0$) umschlossen wird.

Vergleichbare großskalige Strömungseigenschaften werden unter anderem in Untersuchungen von idealisierten Wirbeldipolen (englisch: *vortex-dipole studies*) beobachtet (siehe zum Beispiel Viúdez, 2007; Snyder et al., 2007; Wang & Zhang, 2010). Auch in diesen Studien wird das Hauptaugenmerk auf die Erforschung der Schwerewellenaktivität gelegt, die durch großskaligen Strömungsanteil angeregt wird. Der Absolutbetrag der horizontalen Geschwindigkeit $\mathbf{u}_{3D} = (u_{3D}, v_{3D})^T$

$$|\mathbf{u}_{3D}| = \sqrt{u_{3D}^2 + v_{3D}^2}, \quad (3.4)$$

und das Temperaturfeld T_{3D} befinden sich in den Abbildungen 3.4c und 3.4d. Deutlich erkennbar ist ein Starkwindband (Jetstream), welches das Druckminimum umschließt. An gleicher Stelle werden auch die größten horizontalen Temperaturgradienten beobachtet, was den Verlauf einer Temperaturfront andeutet. Zusammengefasst definieren das Starkwindband und die Temperaturfront also ein Jet-Front System. Darüber hinaus sind Regionen ersichtlich, die eine starke Abnahme der Windgeschwindigkeit zeigen. Besonders deutlich ist dies an der Ostflanke des Tiefdruckgebiets ausgeprägt, die auch als Jet-Exit Region bezeichnet wird. Wie experimentelle Untersuchungen zeigen (zum Beispiel Uccellini &

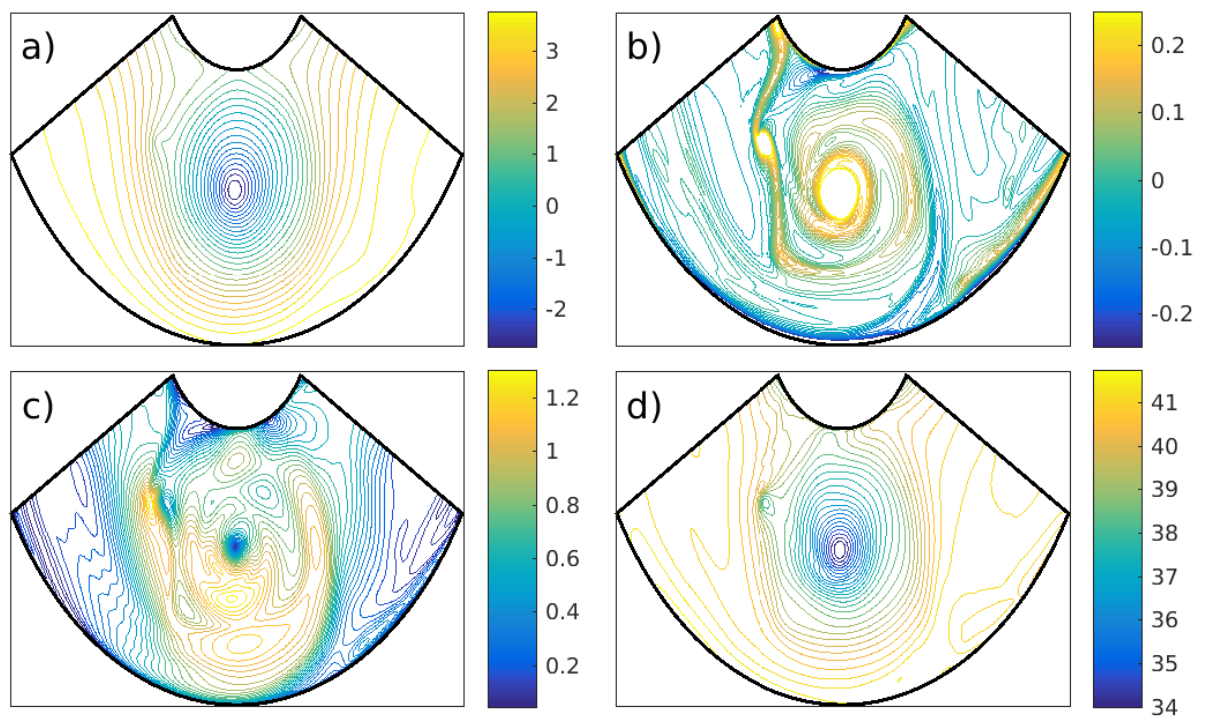


Abbildung 3.4: Horizontale Querschnitte (bei $z = 3d/4 = 3$ cm) für die sektoriellen 3D-Simulationen des rotierenden Annulusexperiments: a) Druck p_{3D} (in $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$), b) vertikale Vorticity ζ (in s^{-1}), c) absolute Horizontalgeschwindigkeit $|\mathbf{u}_{3D}|$ (in cm s^{-1}) and d) Temperatur T_{3D} (in $^\circ\text{C}$) nach einer Integrationszeit von 3600 s.

Koch, 1987) und auch idealisierte numerische Arbeiten bestätigen (zum Beispiel O’Sullivan & Dunkerton, 1995), liegt in diesen Regionen eine erhöhte Schwerewellenaktivität vor.

Um die Charakterisierung der großskaligen Strömungseigenschaften im Annulus abzuschließen, gehen wir kurz auf die bereits erwähnten stabilen Schichtungsverhältnisse ein. Wie schon in der Arbeit von Hide (1967) diskutiert, wird der positive vertikale Temperaturgradient $\partial T/\partial z$ (siehe Abbildung 3.1b) durch den meridionalen Wärmetransport von der äußeren, geheizten zu der inneren, gekühlten Zylinderwand erzeugt und aufrecht erhalten. Dabei steigen Flüssigkeitselemente, deren Temperatur wärmer als die Umgebung ist, an der äußeren Zylinderwand auf, während es zu einem Absinken von Flüssigkeitselementen am inneren Zylinder kommt. Es stellt sich eine stabile Schichtung ein. Alternativ kann eine stabile Schichtung auch manuell generiert werden. So modifizierten Vincze et al. (2016) und Rodda et al. (2018) die Flüssigkeitseigenschaften von Wasser in einem Laborexperiment durch Hinzufügen eines vertikal abhängigen Salzgradienten, um stabile Schichtungseigenschaften herbeizuführen.

3.1.2 Doppelperiodische, kartesische Konfiguration

Die numerischen Simulationen des doppelperiodischen, kartesischen Modellsystems werden allesamt mit der konstanten numerischen Gitterauflösung $N_x = 90$, $N_y = 480$ und $N_z = 30$ gerechnet. Zuvor durchgeführte Testsimulationen zeigten, dass diese Auflösung ausreichend hoch ist, um alle relevanten räumlichen Signale aufzulösen. Der stationäre 2D-Grundzustand, der nach einer Integrationsdauer von 10000 s erreicht ist, ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Wie aus dem zonalen Geschwindigkeitsfeld (Abbildung 3.5a) hervorgeht, entstehen zwei entgegengerichtete Starkwindbänder, deren Maximum an der Modelloberfläche erreicht wird. Wird zudem die Temperatur- und Druckverteilung betrachtet (Abbildungen 3.5b und 3.5c), so liegt der Verdacht nahe, dass der 2D-Grundzustand auch in dieser Konfiguration die thermische Windbeziehung in guter Näherung erfüllt. Denn die stärksten Windgeschwindigkeiten gehen mit den Regionen des größten meridionalen Druckgradienten einher. Um das auch quantitativ zu verifizieren, ist in Abbildung 3.6 der mit f normierte meridionale Dichtegradient $(1/f)\partial p_{2D}/\partial r$ (Abbildung 3.6a), der vertikale Dichtegradient $\partial p_{2D}/\partial z$ (Abbildung 3.6b) und der Auftriebsterm $-\rho_{2D}g$ (Abbildung 3.6c) veranschaulicht. Die Übereinstimmung von u_{2D} mit dem aus dem Druckgradienten berechneten Wert ist nahezu perfekt (vergleiche Abbildung 3.5a und 3.6a) und fällt noch besser aus als in der Annuluskonfiguration (siehe Abschnitt 3.1.1). Auch das hydrostatische Gleichgewicht ist in sehr guter Näherung befriedigt (vergleiche Abbildung 3.6b und 3.6c).

Ausgewählte horizontale Querschnitte bei $z = 3d/4 = 3$ cm der anschließenden 3D-Simulation (Simulationsdauer: 345 s) sind in Abbildung 3.7 präsentiert. Es handelt sich dabei um das Maximum des ersten baroklinen Wellenzyklus, der, wie in Kapitel 3.2.2 ausführlich diskutiert, das größte Schwerewellensignal aufweist. Das voll entwickelte barokline Wellenmuster kennzeichnet sich durch zwei Druckminima (Abbildung 3.7a), die mit der Position von zwei Wirbelstrukturen übereinstimmen (Abbildung 3.7b). Auffällig ist hierbei, dass die jeweiligen Wirbel eine überwiegend zyklonale Struktur zeigen ($\zeta > 0$) und deutlich intensiver ausgeprägt sind als in der Annuluskonfiguration (vergleiche Abbildung 3.4b). Darüber hinaus kann auch in der kartesischen Konfiguration von zwei Jet-Front Sys-

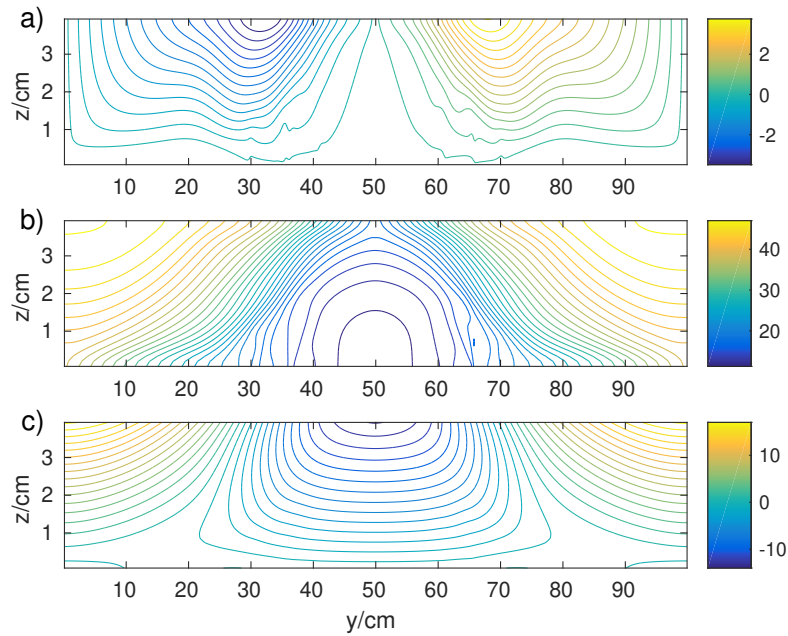


Abbildung 3.5: Konturlinien der zonalsymmetrischen, stationären 2D-Simulation der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration: a) zonale Geschwindigkeit u_{2D} (in $cm\ s^{-1}$), b) Temperatur T_{2D} (in $^{\circ}C$) und c) Druck p_{2D} (in $cm^2\ s^{-2}$).

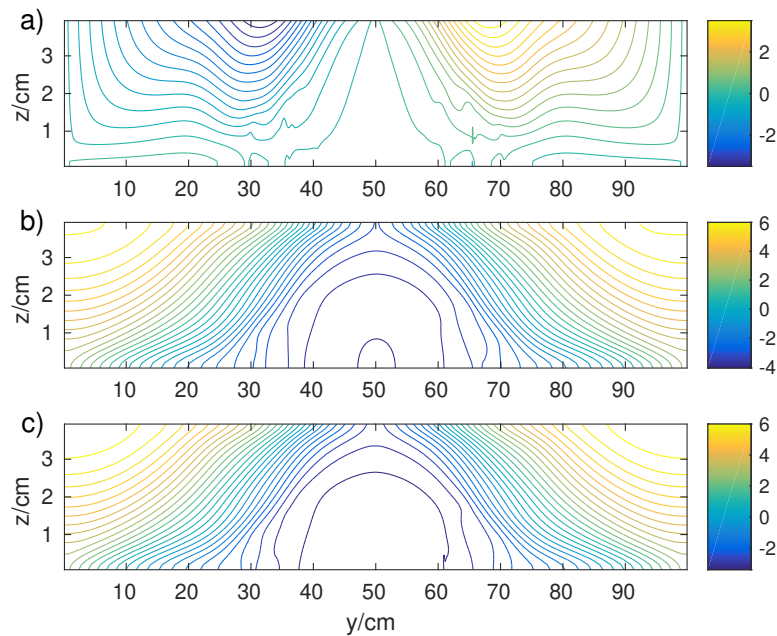


Abbildung 3.6: Konturlinien der zonalsymmetrischen, stationären 2D-Simulation der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration: a) $\frac{1}{f} \frac{\partial p_{2D}}{\partial y}$ (in $cm\ s^{-1}$), b) $\frac{\partial p_{2D}}{\partial z}$ (in $cm\ s^{-2}$) und c) $-g\rho_{2D}$ (in $cm\ s^{-2}$).

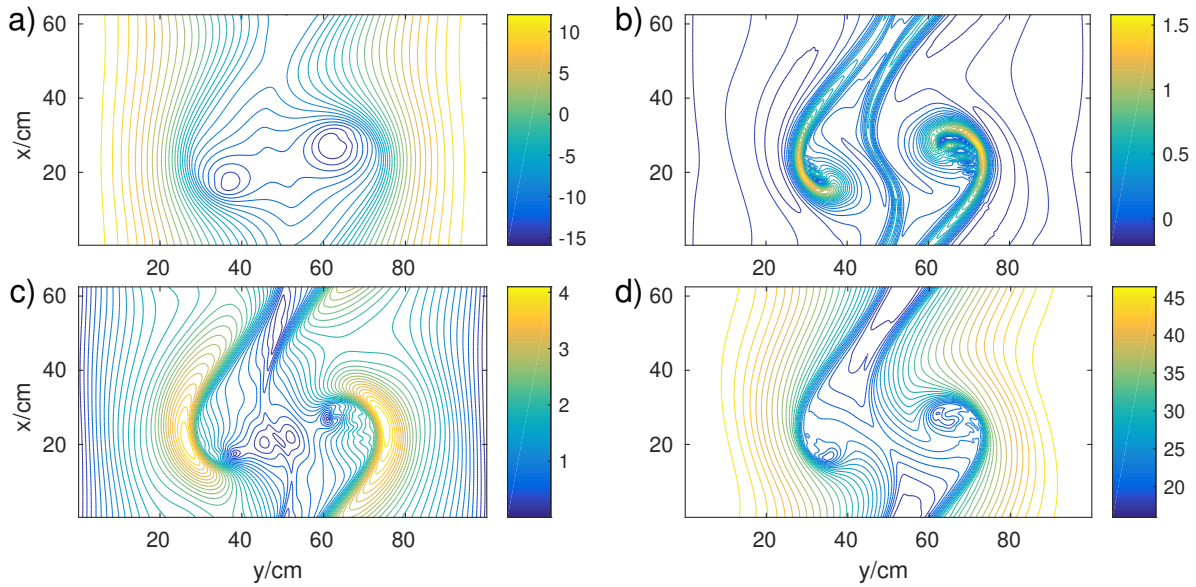


Abbildung 3.7: Horizontale Querschnitte (bei $z = 3d/4 = 3$ cm) für die 3D-Simulationen der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration: a) Druck p_{3D} (in $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$), b) vertikale Vorticity ζ (in s^{-1}), c) absolute Horizontalschwindigkeit $|\mathbf{u}_{3D}|$ (in cm s^{-1}) and d) Temperatur T_{3D} (in $^\circ\text{C}$) nach einer Integrationszeit von 345 s.

temen gesprochen werden. Maximale horizontale Windgeschwindigkeiten (Abbildung 3.7c) werden in den Gebieten mit den stärksten horizontalen Temperaturgradienten beobachtet (Abbildung 3.7d). Auch die horizontalen Geschwindigkeiten übersteigen die Werte in der Annuluskonfiguration. Prinzipiell können die höheren Werte verschiedener Modellvariablen mit der höheren Temperaturspanne erklärt werden, die in der kartesischen Konfiguration auferlegt wird.

Die zuvor beschriebenen, großskaligen Strömungseigenschaften beider Modellsystem bilden den Ausgangspunkt für die folgenden Untersuchungen der kleinskaligen Strukturen. Zur vereinfachten Referenzierung wird hierfür der Zeitpunkt, zu dem die obige Analyse der baroklinen Welleneigenschaften vorgenommen wird, als Zeitpunkt $t = 0$ s definiert.

3.2 Schwerwellensignal

Auf Grundlage der großskaligen Strömungseigenschaften erfolgt nun die Identifikation und Quantifizierung des Schwerwellensignals. Wie bereits in Borchert et al. (2014) gezeigt, gibt es deutliche Hinweise auf eine erhöhte Schwerwellenaktivität in der vorliegenden Annuluskonfiguration. Wir gehen in dieser Arbeit einen Schritt weiter und lokalisieren verschiedene Schwerwellenpakete zunächst explizit, bevor diese dann auch quantitativ untersucht werden. Die Bestimmung des Quellmechanismus erfolgt dann in Kapitel 5.

Als nützlicher Indikator zur Detektion und Abgrenzung von Schwerwellenpaketen erweist sich die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz (O’Sullivan & Dunkerton, 1995; Wang

et al., 2009; Mirzaei et al., 2014)

$$\delta = \nabla_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{u}. \quad (3.5)$$

Zu beachten ist hierbei, dass für die folgenden Untersuchungen die um ihren balancierten Anteil reduzierte, unbalancierte horizontale Divergenz

$$\delta_{unbal} = \delta - \delta_{bal}, \quad (3.6)$$

verwendet wird. Dies hat zum Ziel, vorhandene, eher großskaligen Strömungsbeiträge, die keinerlei Schwerewellensignal beinhalten, von der totalen horizontalen Divergenz zu separieren, um die Identifikation der Wellenpakete zu erleichtern. Die genaue Verfahrensweise zur Berechnung von δ_{bal} sowie die dazugehörige Illustration der räumlichen Struktur ist in den Kapiteln 4.3 und 5.1 gezeigt. Neben den Resultaten für die Annuluskonfiguration, die auch Referenzwerte für äquivalente Laboruntersuchungen bereitstellt, werden vergleichende Untersuchungen parallel auch für das doppeltperiodische, kartesischen Modellsystem präsentiert.

3.2.1 Annuluskonfiguration

Die Identifikation und Analyse der Schwerewellenpakete in der Annuluskonfiguration wird exemplarisch zur Zeit $t = 20$ s vorgenommen. Zu diesem Zeitpunkt ist die Schwerewellenaktivität eindrucksvoll ausgeprägt und es ist eine klare Separierung von verschiedenen Wellenpaketen möglich. Verglichen mit der großskaligen Hintergrundströmung, die in Abbildung 3.4 zum Zeitpunkt $t = 0$ s verbildlicht ist, kam es zu keiner prinzipiellen Veränderung der dynamischen Strukturen. Es kam lediglich zu einer geringfügigen azimuthalen Advektion der großskaligen Strukturen (entgegen dem Uhrzeigersinn).

In Abbildung 3.8 befindet sich ein horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten, horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} sowohl für die exakte Zylindergeometrie des Experiments (Abbildung 3.8a) als auch für die entsprechende Projektion auf kartesische Koordinaten (Abbildung 3.8b). Dieser Schritt ist notwendig, um die identifizierten Wellenpakete näher quantifizieren zu können (siehe unten). Generell kann anhand der wellenartigen Strukturen zwischen vier verschiedenen Wellenpaketen – WP1, WP2, WP3 und WP4 – unterschieden werden. Wichtig zu erwähnen ist hierbei, dass jedes dieser Pakete individuell generiert wurde und nicht Bestandteil eines ehemals einzelnen, großen Pakets war, das sich im Laufe der Entwicklung zerteilte.

Nachfolgend wird die räumliche Lage und die Struktur der Wellenpakete beschrieben. Eine genaue Analyse des Entstehungsmechanismus wird in Kapitel 5 durchgeführt. WP1 wird von einer kleinskaligen Dipolstruktur (in Yasuda et al. (2015) als „*couplet*“ bezeichnet) emittiert. An den Abmessungen in Abbildung 3.8b orientierend, ist diese etwa bei $x \approx 0.7$ rad und $r \approx 53$ cm positioniert. Diese Struktur ist besonders deutlich im Vorticityfeld (vergleiche Abbildung 3.4b) erkennbar, und zwar als kleinskaliger Wirbel an der Westflanke des Druckminimums, eingebettet in der Temperaturfront. Es ist zu beachten, dass diese Struktur zu diesem Zeitpunkt ($t = 0$ s) noch etwas weiter nordwestlich positioniert war. Auch die horizontale Geschwindigkeit, dargestellt in Abbildung 3.4c, zeigt eine dipolartige Struktur an dieser Stelle. Eine zusätzliche Charakterisierung anhand der vertikalen Strömungsbedingungen erfolgt in Kapitel 5.1. Vergleichbare Strukturen wurden

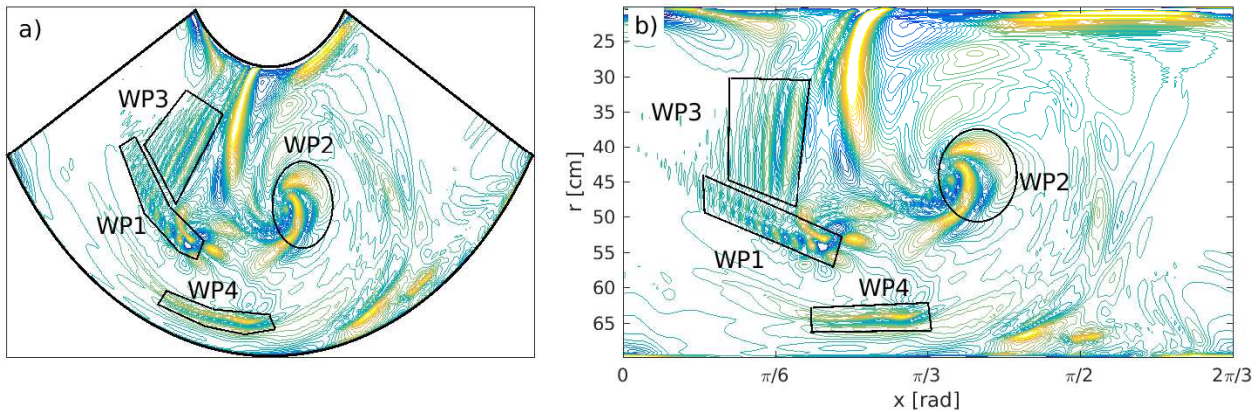


Abbildung 3.8: Charakterisierung der Schwerewellenpakete im rotierenden Annulusexperiment: a) horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} in der Zylindergeometrie und b) die dazugehörige kartesische Projektion. Außerdem ist die Lage von vier verschiedenen Wellenpaketen (WP1–WP4) eingezeichnet. Die Farbskala der Konturlinien reicht von $-0,05 \text{ s}^{-1}$ bis $0,05 \text{ s}^{-1}$.

unter anderem in einer Studie von Viúdez (2007) gefunden, in der die Schwerewellenaktivität in einem idealisierten Wirbeldipol untersucht wurde. In diesem Fall entdeckte der Autor eine kleinskalige Wirbelstruktur entlang der Dipolachse, die er als Ausgangspunkt eines frontalen Schwerewellenpakets ausmachte.

WP2 ordnet sich mit einer spiralförmigen Struktur um das Druckminimum an ($1.06 < x < 1.27$ rad und $40 < r < 55$ cm in Abbildung 3.8b). Die erhöhte Schwerewellenaktivität in dieser Region wurde bereits von Borchert et al. (2014) erkannt. Außerdem gibt es erneut deutliche Gemeinsamkeiten mit Schwerewellensignalen, die in Wirbeldipolstudien auftreten (vergleiche zum Beispiel Viúdez, 2007; Snyder et al., 2007, 2009). Sowohl die dortigen Schwerewellenpakete als auch WP2 propagagieren stationär mit den jeweiligen Wirbelstrukturen der großskaligen Hintergrundströmung. Wie in Lin & Zhang (2008) detailliert erläutert wurde, handelt es sich bei diesen Wellenpaketen um ursprünglich ebene Wellen, die sich dann im Tiefdrucksystem aufwickeln und schließlich die beobachtete spirale Struktur ausbilden.

Das dritte Wellenpaket, WP3, erstreckt sich in den Bereichen $0.38 < x < 0.67$ rad und $30 < r < 47$ rad hinter der baroklinen Wellenstruktur. Durch seine Nähe zu WP1 liegt der Verdacht nahe, dass WP1 und WP3 ein zusammengehöriges Wellenpaket bilden. Dies ist allerdings nicht der Fall. Einerseits ist aus dem zusätzlichen Einbezug der vertikalen Struktur der Wellen (nicht gezeigt) eine klare Abtrennung beider Pakete sichtbar. Andererseits deuten die in Kapitel 5 vorgestellten Ergebnisse auf grundsätzlich verschiedene Entstehungsmechanismen hin. Demzufolge wird WP3 an der inneren Zylinderwand generiert bevor es das Modellinnere propagiert, während WP1 im Inneren der Strömung entsteht. Ein weiteres Wellenpaket, WP4, befindet sich entlang des Jetstreams in der Nähe der äußeren Zylinderwand ($0.64 < x < 1.00$ rad, $62 < r < 67$ cm in Abbildung 3.8b). Dieses Paket zeigt längliche Strukturen mit einer geringen radialen Ausdehnung. Im Gegensatz zu den obigen Paketen weist es außerdem eine um 90° verschobene Orientierung auf.

Nach Bestimmung der räumlichen Lage und Struktur der verschiedenen Wellenpakete erfolgt nun eine quantitative Analyse der Welleneigenschaften wie Wellenlänge, Amplitude und Energie. Diese Werte können wiederum als Referenz für entsprechende Laborstudien verwendet werden, um beispielsweise Mess- und Filtermethoden zu justieren. Im Folgenden wird die Methodik der Wellendiagnose kurz skizziert. Eine umfassendere Darstellung ist in Schoon & Zülicke (2018) gegeben.

Allgemein basiert die Methodik auf lokalen phasenunabhängigen Abschätzungen. Mit Hilfe einer Hilbert-Transformation wird zunächst eine Datenreihe komplex erweitert, um die Wellenamplitude zu bestimmen. Die Phase der Welle wird zur Abschätzung der Wellenzahl verwendet. Die Methodik wird nachfolgend für eine eindimensionale Datenreihe in x -Richtung skizziert, wobei ihr eigentlicher Vorteil in der Abschätzung lokaler dreidimensionaler Welleneigenschaften liegt. Das Ergebnis der komplexen Erweiterung mit der Hilbert-Transformation ist die Summe aus der Eingangsdatenreihe $f(x)$ als Realteil und der Hilberttransformierten $H_x[f]$ als Imaginärteil

$$\hat{f} = f(x) + iH_x[f], \quad (3.7)$$

wobei die Hilbert-Transformation $H_x[f(x)]$ für beliebige reelle Variablen x und y einer komplex- oder reellwertigen Funktion $f(x)$ gegeben ist als (von Storch & Zwiers, 2002)

$$H_x[f(x)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x - y} dy. \quad (3.8)$$

Die Amplitude

$$A_x(f) = (f(x)^2 + H_x[f]^2)^{1/2}, \quad (3.9)$$

gibt eine Abschätzung der lokalen Einhüllenden der oszillierenden Funktion an, während die Phase

$$\varphi_x(f) = \arctan\left(\frac{H_x[f]}{f(x)}\right), \quad (3.10)$$

benutzt wird, um absolute Wellenzahlen zu bestimmen

$$k_x(f) = \left| \frac{\partial \varphi_x(f)}{\partial x} \right|. \quad (3.11)$$

Um ein dreidimensionales Feld der Welleneigenschaften zu erhalten, werden die Amplituden der einzelnen Kooordinatenrichtungen mit der Wellenzahl gewichtet und zusammengeführt

$$A(f)^2 = w_x A_x(f)^2 + w_y A_y(f)^2 + w_z A_z(f)^2, \quad (3.12)$$

$$w_d(f) = \frac{k_d(f)^2}{k_x(f)^2 + k_y(f)^2 + k_z(f)^2}, \quad d = (x, y, z). \quad (3.13)$$

Somit erhalten wir Amplituden und Wellenzahlen an jedem Ort. Um nun die Daten des rotierenden Annulusexperiments dieser Analyse zu unterziehen, beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die kartesische Projektion der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} , illustriert in Abbildung 3.8b. Wie in Kapitel 4.1 noch veranschaulicht wird, dominieren in diesem Feld die unbalancierten Schwerewellenmoden gegenüber den balancierten, geostrophischen Beiträgen. Zur Analyse wird eine mittlere zonale Ausdehnung des Untersuchungsgebiet definiert $L_x = 2\pi/3(a + (b - a)/2) = 94,25$ cm

Parameter	WP1	WP2	WP3	WP4
k_x/cm^{-1}	1,2467	0,9948	1,5069	0,6761
k_y/cm^{-1}	1,2219	1,0565	0,4202	1,1297
k_z/cm^{-1}	1,8144	1,7998	1,7598	1,4050
λ/cm	2,4955	2,7177	2,6684	3,2629
A/s^{-1}	0,0140	0,0218	0,0084	0,0074
$e/10^{-5} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$	3,2160	11,2840	1,4416	1,5796

Tabelle 3.1: Tabellarischer Überblick der Wellenparameter von WP1, WP2, WP3 und WP4. Angaben zur Berechnung im Text.

und es werden Wellenzahlen $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_\vartheta - k_y \mathbf{e}_r + k_z \mathbf{e}_z$, Amplituden $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ sowie zugehörige kinetischen Wellenenergien e berechnet. Letztere wird aus δ_{unbal} diagnostiziert

$$e = \frac{\delta_{unbal}^2}{k_h^2}, \quad (3.14)$$

wobei $k_h = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ die horizontale Wellenzahl beschreibt. Gleichung (3.14) kann aus den Polarisationsbeziehungen hydrostatischer Schwerewellen hergeleitet werden (siehe Zülicke & Peters, 2006; Marks & Eckermann, 1995). Unter Einbezug der bereits berechneten Welleneigenschaften kann Gleichung (3.14) mit der Amplitude ($\delta_{unbal}^2 = 0.5A^2$) und den horizontalen Wellenzahlen ausgedrückt werden

$$e = \frac{1}{2} \frac{A(\delta)^2}{k_x(\delta)^2 + k_y(\delta)^2}. \quad (3.15)$$

Die Ergebnisse der Wellenanalyse sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Um dabei den Vergleich mit Laborexperimenten zu erleichtern, sind dort auch Wellenlängen $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ angegeben. Zusätzlich illustriert Abbildung 3.9 horizontale Querschnitte der gewichteten Amplituden (3.9a) und der Wellenlängen (3.9b). Hierbei sind die zuvor definierten vier Wellenpakete (WP1–WP4) hervorgehoben. Bei Betrachtung der Werte in Tabelle 3.1 ist ersichtlich, dass WP2 die größten Amplituden und somit auch die größte Energie besitzt. Des Weiteren deutet die relative große Differenz der radialen Wellenzahlen k_y von WP1 und WP3 auf die unterschiedliche Orientierung der Wellenpakete hin. Die Wellenlängen der jeweiligen Wellenpakete liegen im selben Größenbereich, wobei WP4 die größten Wellenlänge besitzt.

3.2.2 Doppelperiodische, kartesische Konfiguration

Die Schwerewellenaktivität im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem wird exemplarisch zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ betrachtet. Die horizontale Verteilung der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} ist in Abbildung 3.10 dargestellt. Darin können zwei verschiedene Wellenpakete, WPC1 und WPC2, ausgemacht werden. Unter Einbezug der großskaligen Hintergrundströmung (vergleiche Abbildung 3.7) wird ersichtlich,

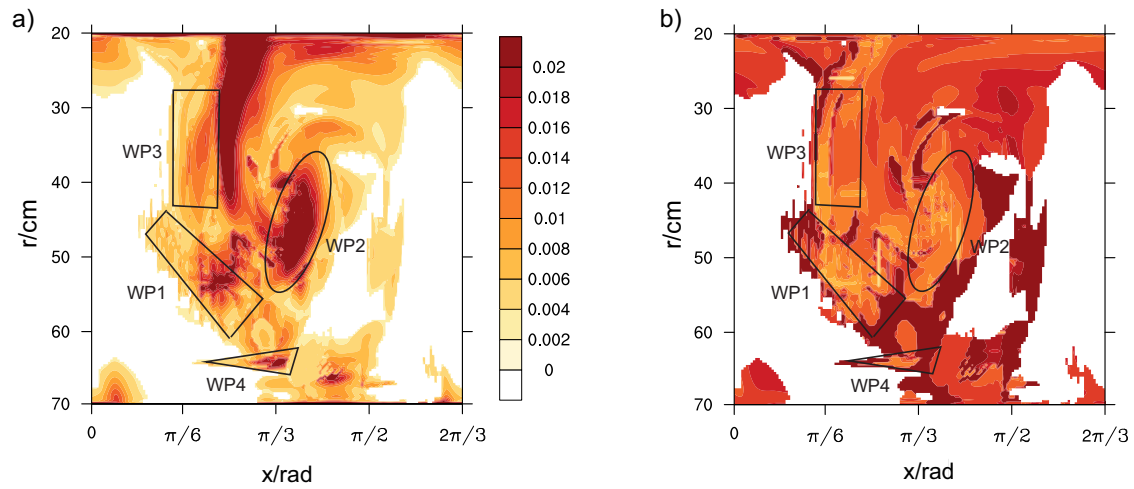


Abbildung 3.9: Resultat der Wellenpaketanalyse im rotierenden Annulusexperiment. Bild a) zeigt einen horizontalen Querschnitt (bei $z = 3 \text{ cm}$) der Amplituden A (in s^{-1}) und Bild b) die Wellenlänge λ (in cm). Die Lage der vier Wellenpakete (WP1–WP4) ist gekennzeichnet.

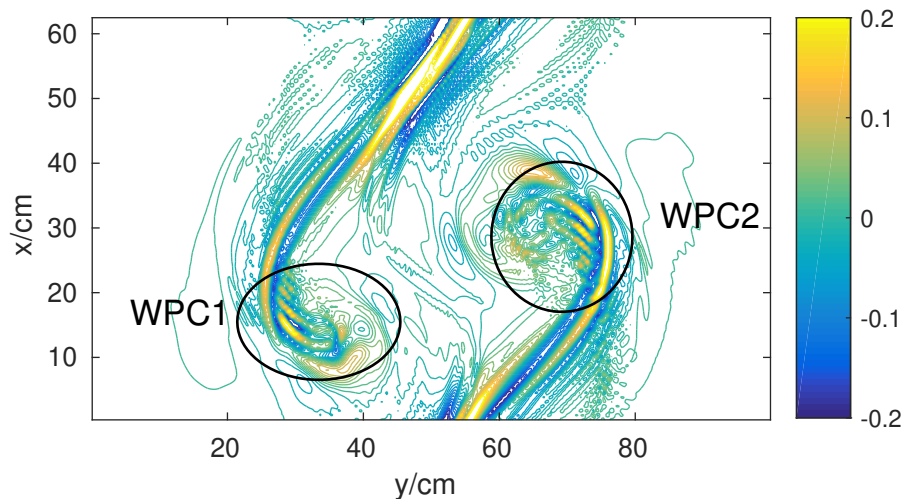


Abbildung 3.10: Charakterisierung der Schwerewellenpakete in der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3 \text{ cm}$) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{umbal} (in s^{-1}). Die Lage der beiden Wellenpakete WPC1 und WPC2 ist gekennzeichnet.

dass die räumliche Lage der Wellenpakete mit der Position der Jet-Front Systeme sowie der beiden Wirbelstrukturen beziehungsweise Druckminima übereinstimmt. Verglichen mit der Annuluskonfiguration, die mit WP2 ebenfalls ein Wellenpaket im Druckminimum aufweist, sind die räumlichen Skalen von WPC1 und WPC2 jedoch sichtlich kürzer bemessen. Demgegenüber sind die Amplituden der Wellenstrukturen um etwa eine Größenordnung stärker ausgeprägt. Auf den Entstehungsmechanismus von WPC1 und WPC2 wird in den folgenden Kapiteln noch genauer eingegangen.

Zur abschließenden Charakterisierung der groß- und kleinskaligen Strömungseigenschaften beider Modellsysteme lohnt es sich, eine gegenüberstellende zeitliche Analyse der baroklinen Wellen und der Schwerewellenaktivität vorzunehmen. Prinzipiell können während jedem baroklinen Wellenzyklus Schwerewellenemissionen beobachtet werden. Nachdem sich die Wellenpakete einige Zeit im Modellgebiet fortbewegen, erfolgt schließlich die Dissipation derselben. Die Anzahl und die Intensität der emittierten Schwerewellenpakete zeigt jedoch einen recht transienten Charakter. Wie die in Kapitel 4.2 vorgenommene theoretische Betrachtung aufzeigt, werden die ablaufenden Prozesse maßgeblich von den vorherrschenden Antriebsbedingungen der großskaligen, baroklinen Strömung beeinflusst. Um den Zusammenhang des zeitlichen Verlaufs der Baroklinität und der Schwerewellenaktivität quantitativ zu manifestieren, werden im Folgenden die Zeitreihen der räumlich gemittelten Werte der kinetischen Energie $E_{kin} = |\mathbf{v}|^2/2$ und der quadrierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ^2 analysiert. Die kinetische Energie E_{kin} , die als Maß für die Stärke der Baroklinität angesehen wird, ist zur besseren Veranschaulichung um ihren zeitlichen Mittelwert reduziert. Im Gegensatz zu den obigen Betrachtungen, wird zur Beurteilung des Schwerewellensignals in diesem Fall nicht die reduzierte δ_{unbal} , sondern die totale horizontale Divergenz δ benutzt. Wie Testrechnungen allerdings zeigen, würde die Verwendung des reduzierten Felds δ_{unbal} zumindest qualitativ zu den selben Ergebnissen führen. Abbildung 3.11 zeigt die zeitlichen Verläufe der entsprechenden Werte für die Annulus- (Abbildung 3.11a) und die kartesische Konfiguration (Abbildung 3.11b). Hierfür werden beide Modellsysteme weitere 400 s (Annulus) beziehungsweise 300 s (kartesisches Modell) integriert. Als Startpunkt ($t = 0$ s) dienen dabei die in Kapitel 3.1 untersuchten 3D-Strömungsfelder.

Im Annulus zeigt sich ein Anstieg der Schwerewellenaktivität bis zum Zeitpunkt $t = 150$ s, ehe eine rasche Abnahme beobachtet wird, die zum Zeitpunkt $t = 210$ s in einem Minimum mündet. Im Zeitraum [200; 275] s werden allgemein geringe Werte von δ^2 festgestellt. Wie auch durch die dazugehörigen räumlichen Felder von δ bestätigt wird (nicht gezeigt), ist in diesem Zeitraum nahezu kein Schwerewellensignal wahrnehmbar. Anschließend lebt die Schwerewellenaktivität wieder deutlich auf, was einen raschen Anstieg von δ^2 zur Folge hat. Mit Blick auf den zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie wird ersichtlich, dass diese Emissionszyklen eng mit zwei baroklinen Wellenzyklen einhergehen.

Ein ähnliches Bild ergibt sich im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem (vergleiche Abbildung 3.11b). Es gibt eine periodische Abfolge von Minima und Maxima des Schwerewellensignals. Allerdings ist diesem Zyklus eine systematische, linear verlaufende Abnahme der Wellenaktivität überlagert, wodurch die Maxima von δ^2 im zeitlichen Verlauf immer kleiner werden. Die kinetische Energie zeigt einen ähnlichen Verlauf, wobei die Korrelation mit δ^2 nicht so stark ausgeprägt ist wie im Annulusexperiment. Zudem stellt

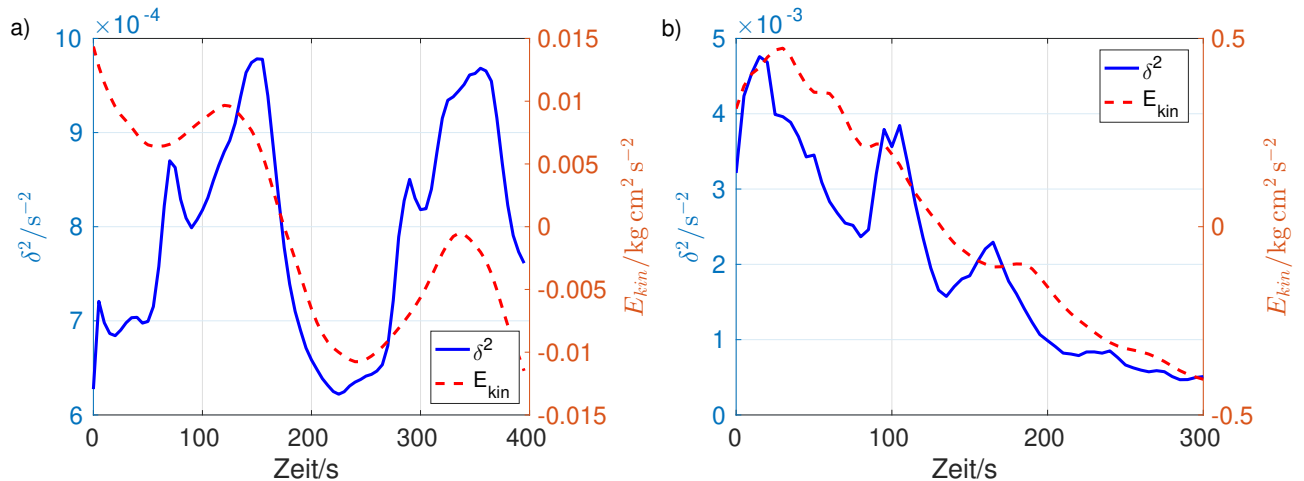


Abbildung 3.11: Zeitlicher Verlauf der räumlich gemittelten Werte der quadrierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ^2 sowie der totalen kinetischen Energie E_{kin} für a) die rotierende Annuluskonfiguration und b) für das doppelperiodische, kartesische Modellsystem. Zu beachten ist, dass das zeitliche Mittel von E_{kin} vom zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie subtrahiert wurde.

sich heraus, dass die Zeitspanne, in der Schwerewellen emittiert werden, mit 30 s deutlich kürzer ist als in der Annuluskonfiguration, in der eine Zeitdauer von 150 s beobachtet wird (vergleiche Abbildung 3.11a).

Zusammenfassend zeigt sich, dass die typische Zeitskala der Schwerewellenemission entscheidend von der Zeitskala der großskaligen Strömung bestimmt wird. Ein weiterer Faktor, der vor allem bei der Auflösung der Wellenpakete eine Rolle spielt, ist die relative hohe Viskosität und thermische Diffusion, die in beiden Modellkonfigurationen beobachtet wird (siehe die Ausführungen zur Ekman-Zahl in Kapitel 2.1). Daher dissipieren die Wellenpakete darin schneller als unter reellen atmosphärischen Bedingungen. Im Falle der Annuluskonfiguration sorgt allerdings eine relativ starke Windscherung an der inneren Zylinderwand dafür, dass die Lebensdauer einzelner Wellenpakete deutlich erhöht wird.

Kapitel 4

Mechanismus der spontanen Schwerewellenabstrahlung: Theorie

Nachdem im vorangegangenen Kapitel die Schwerewellenaktivität in beiden Modellsystemen beschrieben wurde, stellt sich nun die Frage nach dem Quellmechanismus der beobachteten Wellen. Die Erkenntnisse aus der Zeitreihenanalyse in Kapitel 3.2.2 weisen bereits darauf hin, dass ein signifikanter Zusammenhang zwischen der Schwerewellenaktivität und der großskaligen Hintergrundströmung besteht. Auch die Arbeit von Borchert et al. (2014) zeigt deutliche Anzeichen von Schwerewellenpaketen im Bereich der baroklinen Welle. Davon motiviert, wird in diesem Kapitel eine systematische Analyse der Wechselwirkung zwischen dem großskaligen, balancierten Strömungsanteil und den Schwerewellen gegeben. Auf Grundlage einer Spaltung der Strömung in einen groß- und einen kleinskaligen Anteil, wobei die Schwerewellen in letzterem beinhaltet sind, besteht ein Hauptziel darin, einen mathematischen Ausdruck für den großskaligen Antrieb der Schwerewellen abzuleiten. Um dies zu erreichen, müssen wir uns allerdings auf eine handhabbare Separation der Strömung und der dynamischen Gleichungen beschränken. Daher werden lineare Gleichgewichtsbedingungen verwendet und die Bestimmung des balancierten Gleichgewichtsanteils geschieht durch die Inversion der linearen potentiellen Vorticity (PV). Zudem wird die Genauigkeit des linearen Gleichgewichtskonzepts durch die Extraktion der balancierten Vertikalbewegung und der balancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz erhöht, indem wir uns der quasigeostrophischen Omegagleichung bedienen. Auf Grundlage der theoretischen Betrachtungen erfolgt abschließend die Herleitung eines tangential linearen Modells, mithilfe dessen der Quellmechanismus der Schwerewellen im anschließenden Kapitel explizit untersucht wird.

4.1 Balancierte und unbalancierte Strömung und deren Wechselwirkung

Um die Eigenschaften und Quellen von Schwerewellen möglichst präzise untersuchen zu können, ist eine Separation des Schwerewellenanteils von der gesamten Strömung von zentraler Bedeutung. Eine mögliche Vorgehensweise, die in Borchert et al. (2014) Anwendung fand, benutzt ein gleitendes Volumenmittel zur Bestimmung der großskaligen Strömung. Die Differenz zwischen der vollen und der gemittelten Strömung ist der kleinskalige Strömungsanteil, der auch die Schwerewellenaktivität beinhaltet. Wir wählen in dieser Arbeit einen anderen Weg zur Unterteilung des Strömungsfelds in einen großskaligen,

balancierten und einen kleinskaligen, unbalancierten Anteil

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ p \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ p \end{pmatrix}_u. \quad (4.1)$$

Hier und auch im Folgenden werden die tiefgestellten Indizes b beziehungsweise u eingesetzt, um den balancierten beziehungsweise unbalancierten Störungsanteil einer Modellvariablen zu kennzeichnen. Zu beachten ist außerdem, dass im Folgenden anstatt der Temperatur T der Auftrieb $B = -\rho g - B_{00}$ betrachtet wird. Dieser ist, ebenso wie der Druck p , als Abweichung von der mittleren thermischen Schichtung B_{00} definiert und erfüllt die Bedingung $B_{00} = dp_{00}/dz$, wobei p_{00} den hydrostatisch balancierten Anteil in p bezeichnet. Die erste Term auf der rechten Seite in Gleichung (4.1) erfüllt geeignete Gleichgewichtsbedingungen, wie zum Beispiel das geostrophische und hydrostatische Gleichgewicht, und kann aus dem vollen Strömungsfeld durch Inversion der PV bestimmt werden (siehe zum Beispiel Davis & Emanuel, 1991). Die Abweichung des vollen vom balancierten Feld definiert den unbalancierten Teil der Strömung, der auch die Schwerewellen enthält.

Beim Blick in die Literatur wird die Vielfältigkeit der verwendeten Gleichgewichtskonzepte deutlich. Diese reichen von eher einfachen, linearen Bedingungen bis hin zu komplexeren Gleichgewichtskonzepten höherer Ordnung (Warn et al., 1995; Zhang et al., 2000; Dritschel & Viúdez, 2004; Viúdez & Dritschel, 2006; McKiver & Dritschel, 2008; Snyder et al., 2009; Wang & Zhang, 2010). Prinzipiell verfolgen alle Konzepte das Ziel, die großskalige Strömung (barokline Wellen) bestmöglich zu erfassen. Ein Vergleich einiger ausgewählter Gleichgewichtsmodelle angewendet auf die in dieser Arbeit betrachteten Modellsysteme ist in Kapitel 6 präsentiert. Für die Analysen in diesem Kapitel jedoch bedienen wir uns ausschließlich linearen Gleichgewichtsrelationen der führenden Ordnung.

Als Leitgröße zur Bestimmung der balancierten Strömung dient oftmals die potentielle Vorticity, deren zeitliche Entwicklung definitionsgemäß ausreichen soll, um die horizontale, balancierte Strömung zu beschreiben. Nachdem die PV aus der vollen Strömung bestimmt wurde, folgt die Anwendung verschiedener Gleichgewichtsbedingungen, um die balancierte Strömung zu diagnostizieren (PV-Inversion, siehe zum Beispiel Hoskins et al., 1985; McIntyre & Norton, 2000; Vanneste, 2013). Auf Grundlage der Erkenntnis, dass die Rossbyzahl in unseren Modellkonfigurationen klein ist ($Ro < 1$) und wir zudem eine direkte mathematische Beziehung zwischen balancierter Strömung und Schwerewellen herstellen möchten, beschränken wir uns darauf, nur den linearen Anteil der PV zu verwenden. Diese Vorgehensweise ist im Grenzfall kleiner Rossbyzahlen durchaus üblich (Charney, 1948; Hoskins et al., 1985; Pedlosky, 1987; Achatz et al., 2017). Denn wie von Bühler & McIntyre (2005) in der Larangeschen- und von Achatz et al. (2017) in der Eulerschen Betrachtungsweise gezeigt, tragen die Schwerewellen im Grenzfall kleiner Rossbyzahlen zum nichtlinearen Anteil der PV bei. Somit ist der lineare Anteil ausschließlich von den geostrophisch- und hydrostatisch balancierten Feldern bestimmt, wie es auch in der quasi-geostrophischen Theorie der Fall ist (Charney, 1948; Pedlosky, 1987; Vallis, 2006). Darüber hinaus kann mithilfe der Polarisationsbeziehungen linearer Schwerewellen bewiesen werden, dass diese keinen Beitrag zum linearen Anteil der PV leisten (Phillips, 1963; Mohebalhojeh & Dritschel, 2001; Smith & Waleffe, 2002). Der entsprechende Beweis befindet sich in

Anhang B. Basierend auf diesen Überlegungen definieren wir die balancierte Strömung derart, dass sie die geostrophische und hydrostatische Gleichgewichtsbedingungen erfüllt

$$f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_b = -\nabla_{\mathbf{h}} p_b, \quad (4.2)$$

$$B_b = \frac{\partial p_b}{\partial z}, \quad (4.3)$$

und die lineare PV ausschließlich durch sie bestimmt wird

$$\Pi = \zeta + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} = \Pi_b = \zeta_b + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_b}{\partial z} = \frac{1}{f} \nabla_{qg}^2 p_b. \quad (4.4)$$

Hierbei ist \mathbf{u}_b der horizontale Geschwindigkeitsvektor, $\zeta = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \times \mathbf{u})$ ist die Vertikalkomponente der Vorticity, $\nabla_{\mathbf{h}}$ den der horizontale Anteil des Nabla-Operators, $\zeta_b = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \times \mathbf{u}_b)$ ist die balancierte vertikale Vorticity, und $\nabla_{qg}^2 \equiv (\nabla_{\mathbf{h}}^2 + f^2/N^2 \partial^2/\partial z^2)$ ist der quasigeostrophische Laplace-Operator. Darüber hinaus verschwindet die Vertikalgeschwindigkeit in der führenden Ordnung

$$w_b = 0. \quad (4.5)$$

Gleichung (4.4) hat zur Folge, dass die unbalancierte Strömung, $\mathbf{u}_u = \mathbf{u} - \mathbf{u}_b$, $w_u = w$ und $B_u = B - B_b$, die neben den Schwerewellen auch noch balancierte Anteile höherer Ordnung beinhaltet, keinen Beitrag zur linearen PV leistet

$$\Pi_u = \zeta_u + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_u}{\partial z} = 0, \quad (4.6)$$

wobei $\zeta_u = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \times \mathbf{u}_u)$ die unbalancierte, vertikale Vorticity bezeichnet.

Um Missverständnisse zu vermeiden, ist es wichtig, folgende Gegebenheit hervorzuheben. Der balancierte Druck p_b , den wir aus Gleichung (4.4) erhalten, ist nur näherungsweise identisch mit dem geostrophischen Druck p_g , der als führender Term einer Rossbyzahlentwicklung des Gesamtdrucks p definiert ist. Um dies zu belegen, bedienen wir uns der Analyse von Muraki et al. (1999), in welcher der balancierte Strömungsanteil der nächsten Ordnung in Ro , die sogenannte ageotrophisch balancierte Strömung, im hydrostatischen Grenzfall bestimmt wird. Es stellt sich heraus, dass die ageotrophischen Beiträge einen nicht verschwindenden Beitrag zur linearen PV liefern; allerdings sind diese Korrekturen eine Ordnung kleiner in der Rossbyzahl als die führenden Terme. Somit besteht nur eine kleine Differenz zwischen p_b und p_g im Falle kleiner Rossbyzahlen. Der Einbezug dieser Korrekturterme in die vorliegende Arbeit würde eine strikte Umformulierung der Grundgleichungen in balancierte und unbalancierte Dynamik (siehe unten) deutlich erschweren, wenn nicht gar unmöglich machen. Da für uns die Vorteile, die uns diese Analyse einbringen, jedoch deutlich überwiegen, verzichten wir auf diese Korrekturen. Um der Tatsache, dass unsere hier definierte unbalancierte Strömung bei moderaten Rossbyzahlen auch balancierte Beiträge enthält, dennoch Rechnung zu tragen, nehmen für die Diagnostik eine weitere Maßnahme in unsere Analyse mit auf. Wir extrahieren den balancierten Beitrag in der nächsten Ordnung in der Rossbyzahl, indem wir den balancierten Vertikalwind und die zugehörige balancierte horizontale Geschwindigkeitsdivergenz aus der quasigeostrophischen Omegagleichung berechnen (vergleiche Kapitel 4.3).

Zur Untermauerung, dass die obigen theoretischen Ausführung zutreffen und der Schwerewellenanteil in der unbalancierten Strömung tatsächlich gegenüber den balancierten Anteilen dominiert, erfolgt eine weitere Untersuchung, die auf einer linearen Modenzerlegung basiert. Dabei beschränken wir uns exemplarisch auf die Annuluskonfiguration und folgen der Arbeit von Borchert et al. (2014), in welcher der Energiebeitrag der Schwerewellen relativ zur Gesamtenergie abgeschätzt wurde. Im Gegensatz zu dieser Studie, in der die gesamte Strömung $\mathbf{z} = (u, v, w, B)$ dieser Analyse unterzogen wurde, wenden wir das Verfahren sowohl auf die unbalancierte \mathbf{z}_u als auch auf die balancierte Strömung \mathbf{z}_b an. Eine ausführliche Beschreibung der Methodik befindet sich in Borchert et al. (2014). Hier skizzieren wir die zentralen Arbeitsschritte am Beispiel von \mathbf{z}_u . Eine Herleitung der Eigenfrequenzen und Eigenmoden der linearisierten Boussinsq-Gleichungen wird in Anhang B ausgeführt.

Zur Analyse wird zunächst das Modellvolumen in Gitterboxen der Ausdehnung $N_\theta^{box} = 41$, $N_r^{box} = 61$, $N_z^{box} = 41$ aufgeteilt und zur Vereinfachung kartesische Geometrie in den jeweiligen Boxen verwendet. Nach Anwendung eines gleitenden Volumenmittels zur Bestimmung des Mittelwerts an jedem Gitterpunkt $\langle \mathbf{z}_u \rangle$, lassen sich die kleinskaligen Strömungskomponenten schreiben als

$$\mathbf{z}_u' = \mathbf{z}_u - \langle \mathbf{z}_u \rangle. \quad (4.7)$$

Bevor eine diskrete 3D-Fourier-Transformation von \mathbf{z}_u' in jeder Gitterbox ausgeführt wird (siehe Gleichung B.11), was zu den Fouriertransformierten $\hat{\mathbf{z}}_u = (\hat{u}_u, \hat{v}_u, \hat{w}_u, \hat{B}_u)$ führt, werden die Felder mit einer Fensterfunktion $W(x, y, z)$ (Harris, 1978, Tukey-Fenster) multipliziert. Die Anwendung von W sorgt dafür, dass die Felder in jeder Gitterbox zum Rand hin auf null gesetzt werden, um den spektralen Leck-Effekt zu minimieren. Anschließend erfolgt die lineare Modenzerlegung, was bedeutet, dass jede einzelne Mode $\hat{\mathbf{z}}_u(k_x, k_y, k_z)$ auf die geostrophische Mode $\hat{\mathbf{g}}$, die beiden Schwerewellenmoden $\hat{\mathbf{s}}^\pm$ und eine divergente, unphysikalische Mode $\hat{\mathbf{d}}$ projiziert wird

$$\hat{\mathbf{z}}_u = \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} + \hat{\sigma}^+ \hat{\mathbf{s}}^+ + \hat{\sigma}^- \hat{\mathbf{s}}^- + \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{d}}. \quad (4.8)$$

$\hat{\mathbf{d}}$ wird benötigt, da nach Abzug des Volumenmittels $\langle \mathbf{z}_u \rangle$ von \mathbf{z}_u nicht mehr sichergestellt werden kann, dass \mathbf{z}_u' die Kontinuitätsgleichung erfüllt (Borchert et al., 2014). Untersuchungen zeigen jedoch, dass der divergente Anteil in \mathbf{z}_u' vernachlässigbar klein ist. Die Koeffizienten $\hat{\gamma}$, $\hat{\sigma}^\pm$ und $\hat{\epsilon}$ ergeben sich durch Projektion von $\hat{\mathbf{z}}_u'$ auf die einzelnen Moden unter Verwendung eines Energieskalarprodukts (siehe Gleichung B.22). Abschließend geschieht die Berechnung der Energiebeiträge, die in \mathbf{z}_u' enthalten sind. Dafür wird in jeder Gitterbox über alle Wellenzahlen summiert

$$E_G = \sum_{k_x, k_y, k_z} |\hat{\gamma}(k_x, k_y, k_z)|^2, \quad (4.9)$$

$$E_{SW} = \sum_{k_x, k_y, k_z} |\hat{\sigma}^+(k_x, k_y, k_z)|^2 + \sum_{k_x, k_y, k_z} |\hat{\sigma}^-(k_x, k_y, k_z)|^2, \quad (4.10)$$

wobei E_G die geostrophische Energie und E_{SW} die Summe der positiven und negativen Schwerewellenenergie bezeichnet. Im Einklang mit der Analyse der Schwerewellenaktivität in Kapitel 3.2.1 haben wir unsere Analyse zum Zeitpunkt $t = 20$ s ausgeführt. Wie zu erwarten, ist das Mittel $\langle \mathbf{z}_u \rangle$ mindestens eine Größenordnung kleiner in der Amplitude

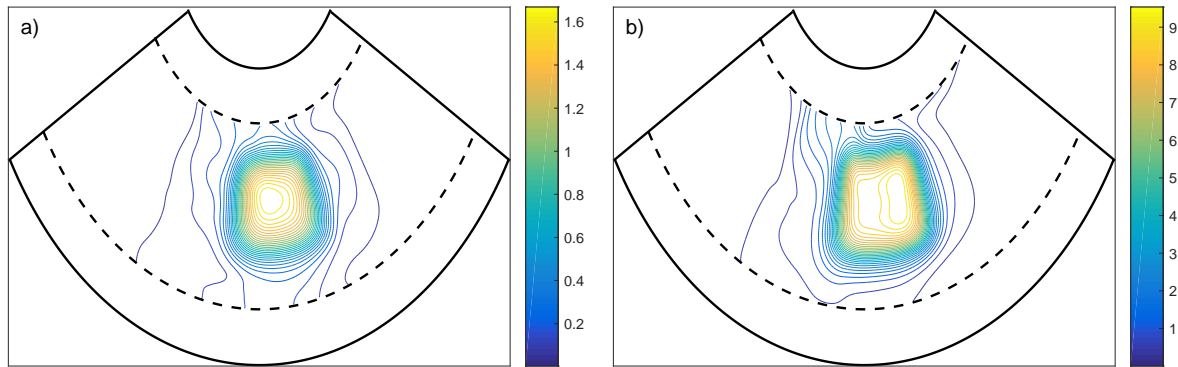


Abbildung 4.1: Energiebeiträge der geostrophischen Mode und der beiden Schwerewellenmoden zur Gesamtenergie des kleinskaligen, unbalancierten Strömungsanteils \mathbf{z}'_u : a) Energie der geostrophischen Mode E_G , b) Energie der beiden Schwerewellenmoden E_{SW} . Aus Darstellungsgründen sind beide Felder mit der über das Volumen gemittelten Gesamtenergie normiert.

als \mathbf{z}_u (nicht gezeigt). Die Ergebnisse der linearen Modenanalyse sind in Abbildung 4.1 veranschaulicht, das einen horizontalen Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der geostrophischen Energie E_G (Abbildung 4.1a) und der summierten Schwerewellenenergie E_{SW} (Abbildung 4.1b) beinhaltet. Dabei wurden die Energiefelder mit der über das Volumen gemittelten Gesamtenergie $\langle E \rangle$ des Systems normiert und es werden nur Gitterboxen betrachtet, die sich mit ihrer vollen Ausdehnung noch innerhalb des Modellsystems befinden. Die Energieverteilungen beider Moden zeigen maximale Werte in der Mitte der Konfiguration, wo sich auch das Druckminimum befindet. Allerdings ist der Energiebeitrag der Schwerewellen, verglichen mit der geostrophischen Energie, um etwa eine Ordnung größer in der Amplitude. Demnach untermauern die Ergebnisse die obige These, dass es zwar einen balancierten Beitrag im unbalancierten Strömungsfeld \mathbf{z}_u gibt, der Schwerewellenanteil jedoch deutlich dominiert. Eine weitere Bestätigung dieser Erkenntnis ist in Abschnitt 6.3 zu finden, wo verschiedene, voneinander unabhängige Gleichgewichtskonzepte gegenüber gestellt werden.

Aus Konsistenzgründen wird eine analoge Analyse auch für den balancierten Strömungsanteil \mathbf{z}_b durchgeführt. Da dieses Feld definitionsgemäß keine horizontale Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{u}_b = 0$ besitzt (vergleiche Gleichung (4.2)), ist zu erwarten, dass es auch keine Schwerewellen beinhaltet. Überraschenderweise stellte sich anfangs jedoch heraus, dass die Schwerewellenenergie fast genauso hoch ist wie die geostrophische Energie (nicht gezeigt). Nach einer tiefgehenden Untersuchung stellte sich der Grund für dieses Verhalten heraus. Wie oben bereits erwähnt, wird eine Fensterfunktion auf die Felder angewandt, bevor die diskrete 3D-Fourieranalyse vorgenommen wird. Durch diese Maßnahme, die dazu führt, dass die zu analysierenden Felder zum Rand der Gitterbox auf null gesetzt werden, wird im Einflussbereich der Fensterfunktion eine künstliche horizontale Divergenz erzeugt, was sich in der Schwerewellenenergie widerspiegelt. Zur Vermeidung dieses Sachverhalts entschlossen wir uns daher, W nicht direkt auf \mathbf{z}_b , sondern zunächst auf den balancierten Druck $p'_b = p_b - \langle p_b \rangle$ anzuwenden. Anschließend erfolgt die Anwendung des geostrophischen und hydrostatischen Gleichgewichts (4.2) und (4.3), um die gestrichenen Größen \mathbf{z}'_b zu

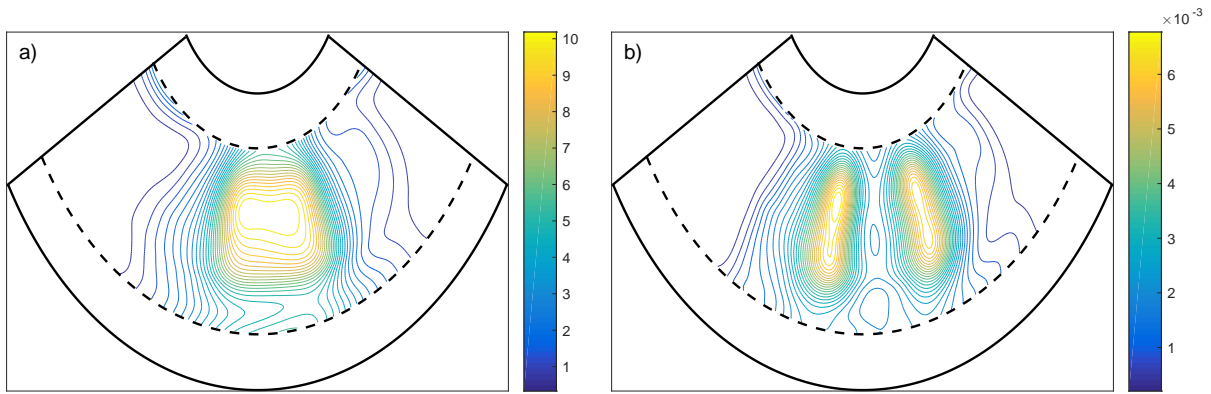


Abbildung 4.2: Energiebeiträge der geostrophischen Mode und der beiden Schwerwellenmoden zur Gesamtenergie des kleinskaligen, balancierten Strömungsanteils z'_b : a) Energie der geostrophischen Mode E_G , b) Energie der beiden Schwerwellenmoden E_{SW} . Aus Darstellungsgründen sind beide Felder mit der über das Volumen gemittelten Gesamtenergie normiert.

berechnen. Die resultierenden Felder sind definitionsgemäß divergenzfrei und besitzen daher auch keine Schwerwellenenergie. Dies wird bei Blick auf Abbildung 4.2 bestätigt, wo die normierten Energien der geostrophischen Mode und der Schwerwellenmode präsentiert werden. Die Ergebnisse erfüllen die zuvor beschriebenen Erwartungen, dass das balancierte Feld keine Schwerwellenaktivität aufweist. Es kann nur ein vernachlässigbares Signal festgestellt werden, das höchstwahrscheinlich durch einen minimalen Genauigkeitsfehler stammt, der durch die Annahme von kartesischer Geometrie der Gitterboxen entsteht. Des Weiteren zeigt sich, dass durch die Modifikation des Drucks p'_b eine geostrophische Zirkulation einsetzt, die zu einer künstlich erhöhten balancierten Energie führt (nicht gezeigt). Die Anwendung der Fensterfunktion ist unerlässlich und ein Eingriff in die Dynamik des Systems somit unumgänglich. Nichtsdestotrotz kann belegt werden, dass die unbalancierte Strömung von Schwerwellen dominiert wird. Im Fall der Analyse des unbalancierten Feldes ist der Einfluss der Fensterfunktion nämlich als vernachlässigbar anzunehmen.

Auf Grundlage der zuvor diskutierten Aufspaltung der Strömung erfolgt nun die theoretische Untersuchung der Wechselwirkung zwischen den beiden Strömungskomponenten. Zur Vereinfachung wird dabei die viskose Reibung, thermische Wärmeleitung und die Zentrifugalbeschleunigung in den Grundgleichungen (2.4)–(2.7) vernachlässigt und die Gleichung (2.7) für die Temperatur T durch eine Gleichung für den Auftrieb B ersetzt. Das resultierende Gleichungssystem lässt sich schreiben als (Vallis, 2006)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -f\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - \nabla_h p, \quad (4.11)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = B - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4.12)$$

$$\frac{DB}{Dt} = -N^2 w, \quad (4.13)$$

$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (4.14)$$

wobei $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ die materielle Ableitung darstellt. Wie im Anhang C vorgechnet wird, kann daraus eine prognostische Gleichung für die (balancierte) lineare PV und damit eine Gleichung für die balancierte Strömung abgeleitet werden

$$\frac{D\Pi}{Dt} = - \left(\zeta - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \left(\mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B \right). \quad (4.15)$$

Interessanterweise besitzt $D\Pi/Dt$ keinen rein balancierten Beitrag, da $\delta = \delta_u$, $w = w_u$ und $(\partial \mathbf{u}_b / \partial z) \cdot \nabla_h B_b = 0$. Daher ist Π eine Erhaltungsgröße in Abwesenheit von unbalancierter Strömung ($\mathbf{u} = \mathbf{u}_b$ und $B = B_b$).

Um Gleichungen für den unbalancierten Strömungsanteil zu erhalten, setzen wir die oben eingeführte Separation der Variablen in die Gleichungen (4.11)–(4.14) ein. Darüber hinaus benutzen wir das geostrophische und das hydrostatische Gleichgewicht (siehe Gleichungen (4.2) und (4.3)) und machen von der Tatsache Gebrauch, dass die in dieser Arbeit definierte unbalancierte Strömung keine lineare PV besitzt (siehe Gleichung (4.6)). Als Resultat erhalten wir das prognostische Gleichungssystem

$$\frac{D\mathbf{u}_u}{Dt} = -f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_u - \nabla_h p_u - \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b - \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_u, \quad (4.16)$$

$$\frac{Dw_u}{Dt} = B_u - \frac{\partial p_u}{\partial z}, \quad (4.17)$$

$$\frac{DB_u}{Dt} = -N^2 w_u - \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b - \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_u, \quad (4.18)$$

$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_u + \frac{\partial w_u}{\partial z}, \quad (4.19)$$

$$0 = \zeta_u + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_u}{\partial z}. \quad (4.20)$$

Die materiellen Ableitungen der balancierten Felder $D\mathbf{u}_b/Dt$ und DB_b/Dt beinhalten im Allgemeinen sowohl balancierte als auch unbalancierte Strömungsbeiträge. Aus diesem Grund wird eine weitere Separation vorgenommen, um den rein balancierten Anteil zu extrahieren

$$\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} = \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b + \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_u, \quad (4.21)$$

$$\frac{DB_b}{Dt} = \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b + \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_u. \quad (4.22)$$

Wie im Anhang D gezeigt, nehmen diese Terme die folgende Form an

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left[\nabla_h \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b - \nabla_h \mathbf{u}_b \cdot \nabla_h p_b \right], \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b - \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial z} \cdot \nabla_h p_b \quad (4.24)$$

mit

$$\left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b = \nabla_{qg}^{-2} (\nabla_{qg}^2 \mathbf{u}_b \cdot \nabla_h p_b) \quad (4.25)$$

und

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt}\right)_u = \frac{1}{f}\mathbf{e}_z \times \left[\nabla_h \left(\frac{Dp_b}{Dt}\right)_u - \nabla_h \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right], \quad (4.26)$$

$$\left(\frac{DB_b}{Dt}\right)_u = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt}\right)_u - \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial z} \cdot \nabla p_b, \quad (4.27)$$

mit

$$\left(\frac{Dp_b}{Dt}\right)_u = \nabla_{qq}^{-2} \left(f \frac{D\Pi}{Dt} + 2\nabla_{qq} \mathbf{v}_u \cdot \nabla \nabla_{qq} p_b + \nabla_{qq}^2 \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right). \quad (4.28)$$

∇_{qq}^{-2} kennzeichnet die Invertierung des quasigesotrophischen Laplace-Operators, der in Gleichung (4.4) definiert wurde und $\nabla_{qq} \equiv \nabla_h + \mathbf{e}_z(f/N)\partial/\partial z$ ist der quasigeostrophische Nabla-Operator, der $\nabla_{qq}^2 = \nabla_{qq} \cdot \nabla_{qq}$ (mit $N^2 > 0$) erfüllt. Des Weiteren benutzen wir hier das sogenannte Doppelskalarprodukt $\cdot\cdot$ zweier Tensoren, dessen Definition in Anhang D eingeführt wird.

Auf diese Weise haben wir eine strikte Umformulierung der ursprünglichen Boussinesq-Gleichungen (4.11)–(4.14) vollzogen, die uns die Möglichkeit eröffnet, eine explizite Untersuchung der Wechselwirkung zwischen balancierter (geostrophischer und hydrostatischer) und unbalancierter Strömung vorzunehmen. Von besonderer Bedeutung für die folgenden Analysen ist die Erkenntnis, dass es auch bei anfangs verschwindendem unbalancierten Strömungsanteil einen balancierten Anteil in den materiellen Ableitungen von Horizontalgeschwindigkeit (Gleichung (4.23)) und Auftrieb (Gleichung (4.24)) gibt, der im Allgemeinen nicht gleich null ist. Es gibt somit einen direkten Antrieb der unbalancierten Strömung, und damit auch der Schwerewellenaktivität, in den Gleichungen (4.16)–(4.18) durch das balancierte Strömungsfeld.

4.2 Ein tangential-lineares Modell für den unbalancierten Strömungsanteil

Aufgrund der Erkenntnisse des vorangegangenen Abschnitts, in dem ein direkter, balancierter Antrieb der unbalancierten Strömung identifiziert werden konnte, folgt nun eine systematische Analyse des Einflusses der Antriebsterme bei der Schwerwellengenerierung. Ein besonderes Augenmerk gilt dabei den in Kapitel 3.2 beschriebenen Schwerwellenpaketen. Als Basis für die Untersuchungen dient ein tangential-lineares Modell, das auf Grundlage der geostrophisch und hydrostatisch balancierten Hintergrundströmung die unbalancierte Dynamik simuliert. Diese Vorgehensweise ist sinnvoll, wenn die Amplituden der unbalancierten Strömung ausreichend klein sind und nichtlineare Wechselwirkungen eine vernachlässigbare Rolle in einem gewissen Integrationszeitraum spielen.

Tangential-lineare Modelle wurden beispielsweise schon von Snyder et al. (2009) und Wang & Zhang (2010) eingesetzt, um die spontane Schwerwellenemission in Wirbeldipolen zu erforschen. Es zeigte sich, dass das angetriebene lineare Modell gut geeignet ist um die Schwerwellenaktivität, die im nichtlinearen Modell beobachtet wird, zu reproduzieren. Im Folgenden wird das von uns benutzte tangential-lineare Modell eingeführt und mit anderen Ansätzen verglichen. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung einiger technischer Details zur Implementierung des Modells. Als Ausgangspunkt für die Betrachtungen bietet

sich an, das Gleichungssystem (4.15)–(4.20) in kompakter Form darzustellen

$$\frac{\partial \mathbf{s}_b}{\partial t} = \mathbf{G}_b(\mathbf{s}_b, \mathbf{s}_u), \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{s}_u}{\partial t} &= \mathbf{G}_u(\mathbf{s}_b, \mathbf{s}_u), \\ &= \mathbf{F}_u(\mathbf{s}_b) + \mathbf{L}_u(\mathbf{s}_b) \mathbf{s}_u + \mathbf{N}_u(\mathbf{s}_u). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Darin bezeichnen $\mathbf{s}_b(\mathbf{r}, t)$ und $\mathbf{s}_u(\mathbf{r}, t)$ die balancierten und unbalancierten prognostischen Variablen und $\mathbf{G}_b(\mathbf{s}_b, \mathbf{s}_u)$ und $\mathbf{G}_u(\mathbf{s}_b, \mathbf{s}_u)$ sind die nichtlinearen Tendenzen der balancierten und der unbalancierten Strömung. Letztere wird weiter aufgespalten in einen Antrieb $\mathbf{F}_u(\mathbf{s}_b)$, der nur von den balancierten Feldern abhängt, einen linearen Teil mit dem Operator $\mathbf{L}_u(\mathbf{s}_b)$ und einen Beitrag $\mathbf{N}_u(\mathbf{s}_u)$, der alle nichtlinearen (hier quadratischen) Wechselwirkungen der unbalancierten Strömung enthält. In unserer Analyse berechnen wir die balancierte Strömung von der exakten Lösung der vollen, nichtlinearen Gleichungen. Zudem nehmen wir an, dass die Amplituden der unbalancierten Felder \mathbf{s}_u ausreichend klein sind, so dass $\mathbf{N}_u(\mathbf{s}_u)$ vernachlässigt werden kann. Das führt zu dem linearen, prognostischen System

$$\left(\frac{\partial \mathbf{s}_u}{\partial t} \right)_{lin} = \mathbf{F}_u(\mathbf{s}_b) + \mathbf{L}_u(\mathbf{s}_b) \mathbf{s}_u. \quad (4.31)$$

Ein wesentlicher Vorteil, der sich durch die lineare Form des Gleichungssystem ergibt, ist die Tatsache, dass jeder einzelne Term der rechten Seite in Gleichung (4.31) additiv zur Tendenz von \mathbf{s}_u beiträgt. Das erlaubt insbesondere, den Beitrag der balancierten Antriebsterme zur Zeitentwicklung der unbalancierten Strömung direkt zu quantifizieren.

Bevor wir die tangential-linearen Gleichungen explizit angeben, treffen wir noch einige generelle Aussagen zum linearen System (4.31). Im Allgemeinen sind beide Terme der rechten Seite bedeutende Einflussfaktoren bei der Zeitwicklung eines Schwerewellenpackets. Um die jeweilige Rolle in der Dynamik des Systems zu verdeutlichen, betrachten wir das Gleichungssystem (4.31) als einen linearen harmonischen Oszillator mit Antrieb (Plougonven & Zhang, 2014). Der Antrieb \mathbf{F}_u regt ein bestimmtes Frequenz- beziehungsweise Wellenlängenspektrum an und bestimmt die Amplitude von \mathbf{s}_u . Dies wird besonders deutlich, wenn zum Anfangszeitpunkt der Modellintegration keine unbalancierte Strömung vorliegt. Dann kann nur der balancierte Antrieb \mathbf{F}_u , der im Allgemeinen nicht verschwindet, unbalancierte Strömung und damit Schwerewellen erzeugen. Demgegenüber wirkt der lineare Operator \mathbf{L}_u vorwiegend auf die Struktur der (bestehenden) Welle, indem er deren Zugbahn, die Orientierung und die Frequenz beeinflusst.

Um nun die tangential-linearen Gleichungen zu erhalten, linearisieren wir das Gleichungssystem (4.16)–(4.20) um die zeitabhängige, balancierte Strömung, die wir aus der Integration der vollen Dynamik berechnen. Dabei wird ersichtlich, dass die meisten Terme bereits eine tangential-lineare Struktur aufweisen. Lediglich die materiellen Ableitungen sowie die Zeitentwicklung der linearen PV (siehe Gleichung (4.15)) sind von der Linearisierung

direkt betroffen, was zu folgendem Gleichungssystem führt

$$\frac{\partial \mathbf{u}_u}{\partial t} = -\mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}_u - f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_u - \nabla_h p_u - \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_{u,lin} - \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b, \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial w_u}{\partial t} = -\mathbf{u}_b \cdot \nabla w_u + B_u - \frac{\partial p_u}{\partial z}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial B_u}{\partial t} = -\mathbf{u}_b \cdot \nabla B_u - N^2 w_u - \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_{u,lin} - \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b, \quad (4.34)$$

$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_u + \frac{\partial w_u}{\partial z}, \quad (4.35)$$

$$0 = \zeta_u + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_u}{\partial z}, \quad (4.36)$$

wobei

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_{u,lin} = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left[\nabla_h \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_{u,lin} - \nabla_h \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right], \quad (4.37)$$

$$\left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_{u,lin} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_{u,lin} - \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial z} \cdot \nabla p_b, \quad (4.38)$$

mit

$$\left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_{u,lin} = \nabla_{qg}^{-2} \left[f \left(\frac{D\Pi}{Dt} \right)_{lin} + 2 \nabla_{qg} \mathbf{v}_u \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right], \quad (4.39)$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{D\Pi}{Dt} \right)_{lin} = & - \left(\zeta_b - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_b}{\partial z} \right) \delta_u - \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial z} \cdot \left(\mathbf{e}_z \times \nabla_h w_u + \frac{f}{N^2} \nabla_h B_u \right) \\ & - \frac{f}{N^2} \frac{\partial \mathbf{u}_u}{\partial z} \cdot \nabla_h B_b. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Diese Gleichungen bilden ein geschlossenes, angetriebenes System für die linearen, unbalancierten Strömungskomponenten. Zu beachten ist, dass, ausgehend von diesem System, eine Wellengleichung wie in Plougonven & Zhang (2007) hergeleitet werden kann, sofern die Voraussetzungen kleiner Rossbyzahlen, kleinskaliger Schwerewellen und eines kleinen Aspektverhältnisses erfüllt sind. Dieser Schritt ist für die numerische Integration der Modellsysteme allerdings nicht notwendig, wodurch wir die allgemeinere Form des Gleichungssystems bevorzugen.

Eine Einordnung und ein Vergleich unseres Ansatzes mit bereits bestehenden Studien zu dieser Thematik erscheint lohnenswert. In der Arbeit von Plougonven & Zhang (2007) wird ein Antrieb der unbalancierten Strömung vorgeschlagen, der mit den gesamten materiellen Zeitableitungen der balancierten Felder in Gleichungen (4.16) und (4.18) in Verbindung gebracht werden kann. Dieselbe Methodik wurde auch in Wang & Zhang (2010) angewandt. Wie allerdings in unserer Arbeit explizit gezeigt wird (siehe oben), beinhalten die materiellen Ableitungen der balancierten Felder auch unbalancierte Komponenten, die streng genommen nicht zum balancierten Antrieb, sondern zum linearen Operator gehören.

Folglich ermöglicht die in unserer Arbeit vorgenommene Freilegung des rein balancierten Anteils eine direktere Untersuchung des Einflusses des balancierten Antriebs auf die Schwellenaktivität. Diese Problematik wurde in Snyder et al. (2009) umgangen, indem die großskalige Hintergrundströmung des linearisierten Systems durch die Integration eines quasigeostrophischen Modells vorgeschrieben wurde. Dies entspräche in unserem System einer Integration der PV-Gleichung (4.15) mit verschwindender rechten Seite. Der Antrieb der linearen Gleichungen besteht aus dem Residuum der zeitlichen Tendenzen des vollen und des quasigeostrophischen Modells. Ein wesentlicher Nachteil dieser Vorgehensweise ist, dass das quasigeostrophische Modell mit anwachsender Integrationszeit immer weiter von der reellen, nichtlinearen Lösung abweicht. Dieses Problem wird in unsere Studie vermieden, da die balancierte Strömung fortlaufend aus der Lösung der vollen Modellintegration diagnostiziert wird.

Nachfolgend werden einige technische Details zur numerischen Umsetzung diskutiert. Aus Konsistenzgründen sind die viskose Reibung und die Temperaturleitung, ähnlich wie im vollen Gleichungssystem (2.4)–(2.10), auch im linearen Modell implementiert. In diesem Zusammenhang wurde zudem eine Sensitivitätsanalyse der Modellparameter ν und κ durchgeführt, um deren Einfluss auf die lineare Dynamik des Systems zu untersuchen und um die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, durch Anpassung von ν und κ eine einfache Parametrisierung der vernachlässigten nichtlinearen Terme zu erhalten. Es stellte sich allerdings heraus, dass keine Modifizierung der ursprünglichen Gleichungen (2.9)–(2.10) in den für uns relevanten Integrationszeiträumen nötig ist.

Wie oben bereits angesprochen, erfolgt die Simulationen des tangential-linearen Modells parallel zum vollen Modell und die geostrophisch und hydrostatisch balancierte Strömung wird in jedem Integrationsschritt aus der vollen Strömung diagnostiziert. Aus Effizienzgründen wird in allen relevanten Gleichungen das Quadrat der Schichtung N^2 als konstant angenommen. Die Verwendung einer vertikal abhängigen Brunt-Väisälä-Frequenz $N^2 \rightarrow N^2(z)$, was im Rahmen der quasigeostrophische Theorie zulässig wäre, ist nicht zwingend notwendig. Dafür betrachten wir die Vertikalprofile von $N^2(z)$ in der Annulus- (Abbildung 4.3a) und in der kartesischen Konfiguration (Abbildung 4.3b) exemplarisch zum Zeitpunkt $t = 0$ s. Um diese zu berechnen, mitteln wir die lokal abhängige Schichtung

$$N^2(x, y, z) = -g \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial z}, \quad (4.41)$$

über jedes Höhenniveau. Überdies befindet sich in Abbildung 4.3 auch der über alle Raumrichtungen gemittelte Wert, der im Annulus $N^2 = 0.73 \text{ s}^{-2}$ und im kartesischen Modell $N^2 = 1.46 \text{ s}^{-2}$ beträgt. Zu beachten ist, dass bei der Mittelung die radialen Grenzschichten im Annulus ausgespart werden. Wie Abbildung 4.3 verdeutlicht, weist die höhenabhängige Schichtung im relevanten Höhenbereich ($0.5 < z < 3.5$ cm) keine starken Abweichungen vom verwendeten Mittelwert auf. Die Einschränkung $N^2 = \text{konst.}$ ist demzufolge eine plausible Annahme. Eine zusätzliche Schwierigkeit bei Verwendung eines vertikal abhängigen Profils ergäbe sich am Boden und an der Oberfläche der Modelle. Hier fällt N^2 rasch ab und zeigt teilweise sogar Nulldurchgänge. Da N^2 aber im Nenner von Gleichung (4.4) (PV-Invertierung) und Gleichung (4.71) (Omegagleichung) auftaucht, gäbe es numerische Schwierigkeiten beim Lösen dieser Gleichungen.

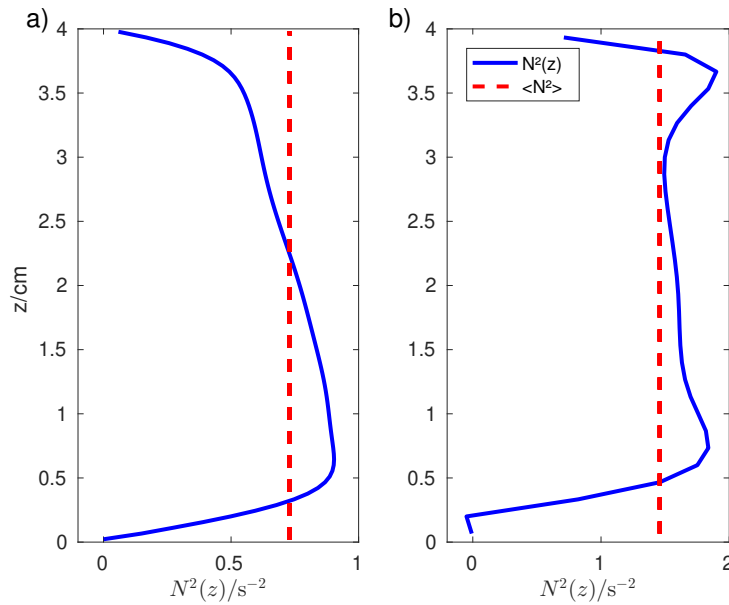


Abbildung 4.3: Vertikalprofile der Auftriebsfrequenz $N^2(z)$ (in s^{-2}) erhalten durch Mittelung über die einzelnen Höhenniveaus: a) Annuluskonfiguration, b) doppeltperiodisches, kartesisches Modellsystem. Die in rot eingezeichneten, gestrichelten Werte kennzeichnen die in der Arbeit verwendeten Mittelwerte $\langle N^2 \rangle$.

Bei der Durchführung von Testsimulationen zu Beginn unserer Analyse zeigte sich, dass, unabhängig von der gewählten Anfangsbedingung, die lineare, unbalancierte Strömung in der Annuluskonfiguration nach einer Integrationszeit von wenigen Sekunden divergiert. Nach tiefgehenden Untersuchungen konnten wir den Grund dieses Verhaltens ermitteln. Wir beobachteten ein sehr schnelles Anwachsen der linearen Strömung an der inneren und äußeren Zylinderwand des Annulus, höchstwahrscheinlich verursacht von dort auftretenden Grenzschichtinstabilitäten. Um diese Instabilitäten zu eliminieren, beziehungsweise einzudämmen, werden die linearen Felder in jedem Integrationszeitschritt mit einer Fensterfunktion α multipliziert. Diese nimmt die folgende Form an

$$\alpha(r^*) = \begin{cases} 1, & |r^*| \leq \beta^* L_y \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi(|r^*| - \beta^* L_y)}{L_s} \right] \right\}, & \beta^* L_y < |r^*| \leq [\beta^* + \gamma^*(1 - \beta^*)] L_y \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.42)$$

Hierbei ist $L_y = (b-a)/2$, $L_s = \gamma^*(1 - \beta^*)L_y$ und β^* , γ^* sind frei wählbare Parameter. Eine systematische Analyse verschiedener Kombinationen von β^* , γ^* machte deutlich, dass die Werte der Parameter keinen Einfluss auf die Schwerewelldynamik ausüben. Daher werden die Werte $\beta^* = 0,95$ und $\gamma^* = 1,0$ verwendet, da in diesem Fall nur die Gitterpunkte, die unmittelbar an den Zylinderwänden platziert sind, direkt von der Modifikation betroffen sind. Zu beachten ist, dass für eine erleichterte numerische Umsetzung der Ursprung der radialen Koordinate r auf die neue Variable $r^* = r - (a+b)/2$ verschoben wurde (vergleiche Gleichung (4.42)). Die Form der Fensterfunktion ist in Abbildung 4.4 illustriert, wobei aus Anschauungsgründen $\alpha(r)$ dort als Funktion der ursprünglichen radialen Variablen r

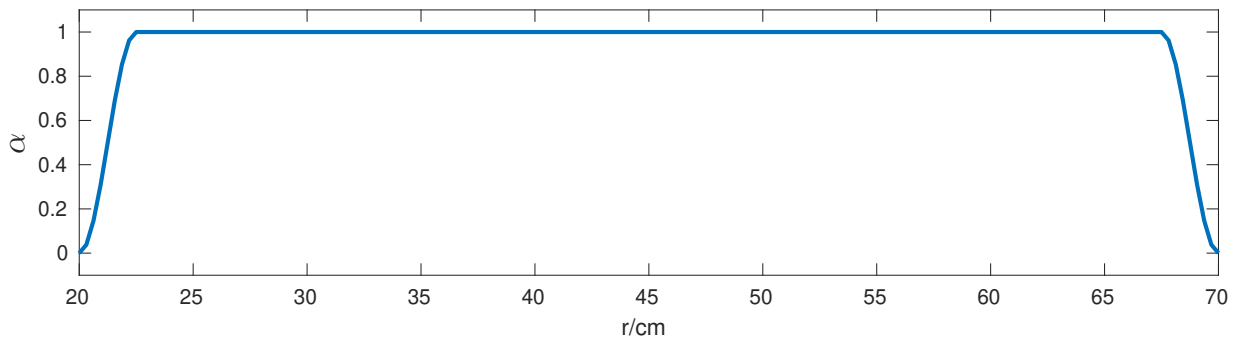


Abbildung 4.4: Fensterfunktion α , die in der Annuluskonfiguration auf die lineare, unbalancierte Strömung in jedem Integrationsschritt angewendet wird. Siehe Gleichung 4.42 für den funktionalen Zusammenhang.

gezeichnet ist. Wie dort ersichtlich, bleiben weite Bereiche der Strömung durch Anwendung der Fensterfunktion unbeeinflusst. Lediglich an den Gitterpunkten nahe der Wände bei $r = a = 20$ cm und $r = b = 70$ cm sorgt die Funktion für eine stetige Abnahme der linearen Felder, bis diese schließlich direkt an den Wänden auf null gesetzt werden.

Prinzipiell hat dieser mathematischer Eingriff zwei Hauptauswirkungen auf das Modellsystem. Einerseits könnte die Schwerewelldynamik im Inneren der Annuluskonfiguration und insbesondere in der Nachbarschaft der Jet-Exit Region beeinflusst werden. Folglich käme es zu einer Abnahme der Korrelation von vollem und linearem Modell. Andererseits entsteht ein wesentlicher Vorteil durch diese Vorgehensweise. Mit Anwendung der Fensterfunktion werden auch Instabilitäten eliminiert, die als Ausgangspunkt für die Generierung von Schwerewellen gelten (vergleiche Jacoby et al., 2011; Randriamampianina & Crespo del Arco, 2015). Infolgedessen können wir stark davon ausgehen, dass ein mögliches Schwerewellensignal im tangential-linearen Modell tatsächlich durch ein spontanes Ungleichgewicht im Inneren der Strömung und nicht durch Grenzschichtinstabilitäten an den Zylinderwänden verursacht wurde. Aus naheliegenden Gründen ist eine solche Maßnahme im doppeltperiodischen, kartesischen Modell nicht notwendig.

4.2.1 Randbedingungen

Eine sorgfältige Formulierung der Randbedingungen ist auch im tangential-linearen Modell von zentraler Bedeutung. Es werden sowohl Bedingungen für die linearen, unbalancierten Felder als auch für die geostrophisch und hydrostatisch balancierten Felder benötigt. Wie sich während der Arbeit herausstellte, sind insbesondere die Felder, die durch Invertierung des quasigeostrophischen Laplace-Operators gewonnen werden (siehe Gleichungen (4.4), (4.25) und (4.39)) sehr sensitiv gegenüber den Randwerten. Eine korrekte Implementierung derselben ist daher für die Modellierung der linearen Dynamik unerlässlich.

Die unbalancierten Geschwindigkeitsfelder \mathbf{v}_u erfüllen dieselben Randbedingungen wie die vollen Felder \mathbf{v} (vergleiche Kapitel 2.3). Für den unbalancierten Auftrieb B_u fordern wir im Einklang mit der vertikalen Randbedingung für die Temperatur (2.33)

$$\left. \frac{\partial B_u}{\partial z} \right|_{z=0,d} = 0. \quad (4.43)$$

Im Falle der Annuluskonfiguration sind zudem radiale Randwerte erforderlich. Da der volle Auftrieb $B(T) = -g\rho(T)$ nur von der Temperatur abhängt und diese an den Zylinderwänden festgelegt ist ($T|_{r=a,b} = T_{a,b}$), besitzt B dort keine unbalancierte Komponente

$$B_u|_{r=a,b} = 0. \quad (4.44)$$

Zur Bestimmung der balancierten Felder muss zunächst der balancierte Druck p_b aus der PV-Gleichung (4.4) diagnostiziert werden. Die Lösung dieser Gleichung erfordert in beiden Modellsystemen die Festlegung von vertikalen Randbedingungen für p_b . Wir nehmen an, dass sich die Strömung am Boden und an der Oberfläche im hydrostatischen Gleichgewicht befindet

$$\left(\frac{\partial p_b}{\partial z}\right)_{z=0,d} = B|_{z=0,d}. \quad (4.45)$$

In radialer Richtung (nur Annulus) verwenden wir, dass die balancierte Azimutalgeschwindigkeit $u_b = 1/f(\partial p_b/\partial r)$ ebenso wie die volle Geschwindigkeit u an den Zylinderwänden verschwindet. Daher fordern wir, dass

$$\left(\frac{\partial p_b}{\partial r}\right)_{r=a,b} = 0. \quad (4.46)$$

Die Randbedingung für B_b in vertikaler Richtung lautet analog zu (2.33) und (4.43)

$$\left(\frac{\partial B_b}{\partial z}\right)_{r=a,b} = 0, \quad (4.47)$$

und in radialer Richtung (nur Annulus)

$$\left(\frac{\partial B_b}{\partial r}\right)_{r=a,b} = 0, \quad (4.48)$$

wobei von der thermischen Windbeziehung

$$\frac{\partial u_b}{\partial z}\bigg|_{r=a,b} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p_b}{\partial r}\bigg|_{r=a,b} = \frac{1}{f} \frac{\partial B_b}{\partial r}\bigg|_{r=a,b} = 0, \quad (4.49)$$

Gebrauch gemacht wurde.

Die oben vorgestellte Wahl der vertikalen (und radialen) Randbedingungen liefert die beste Übereinstimmung zwischen voller und balancierte Strömung. Prinzipiell ist das System überbestimmt, was bedeutet, dass nicht alle Randbedingungen gleichzeitig befriedigt werden können. Beispielsweise gewährleistet die Bedingung (4.46) zwar $u_b|_{r=a,b} = 0$, die analoge Bedingung für die radiale Geschwindigkeitskomponente v_b ist allerdings im Allgemeinen nicht erfüllt. Die Resultate mit den obigen Randbedingungen zeigen jedoch, dass auch ohne explizites Fordern von $v_b = -1/f(\partial p_b/\partial \vartheta) = 0$ die radialen Geschwindigkeiten nahezu null sind an den Zylinderwänden. Eine alternative Vorgehensweise zur Bestimmung der balancierten Strömung, die verschwindende Normalgeschwindigkeiten explizit gewährleistet, wird in Kapitel 6.1.1 vorgestellt und diskutiert. Des Weiteren erwirkt Gleichung (4.45) keineswegs, dass die balancierte Horizontalgeschwindigkeit \mathbf{u}_b am Boden

verschwindet. Auf der Basis von Testrechnungen mit $p_b|_{z=0} = 0$, was zu einer Befriedigung dieser Bedingung führen würde, kann eine deutlich schlechtere Übereinstimmung zwischen der balancierten und der vollen Strömung beobachtet werden, vor allem im Inneren des Modellgebietes.

Es verbleibt die Festlegung von Randwerten für die Terme $(Dp_b/Dt)_b$ und $(Dp_b/Dt)_{u,lin}$, zu deren Bestimmung Gleichungen (4.25) und (4.28) gelöst werden müssen. Für die vertikalen Ränder betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right) &= \frac{D}{Dt} \frac{\partial p_b}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla p_b \\ &= \frac{DB_b}{Dt} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla p_b \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla p_b \quad \text{bei } z = 0, d, \end{aligned} \quad (4.50)$$

wobei das hydrostatische Gleichgewicht (4.3) und die Auftriebsgleichung (4.13) zusammen mit $w(z=0) = w(z=d) = 0$ benutzt wurden. Anschließend zerlegen wir die Terme in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil, so dass bei $z = 0, d$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b = \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial z} \cdot \nabla p_b, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_{u,lin} = \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial z} \cdot \nabla p_b. \quad (4.52)$$

Eine Linearisierung ist dabei nicht erforderlich. In analoger Weise können die radialen Randbedingungen für die Annuluskonfiguration abgeleitet werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right) &= \frac{D}{Dt} \frac{\partial p_b}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \cdot \nabla p_b \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} \cdot \nabla p_b \quad \text{bei } r = a, b, \end{aligned} \quad (4.53)$$

wobei hier erneut berücksichtigt wurde, dass die balancierte Aziumtalgeschwindigkeit $u_b = 1/f(\partial p_b/\partial r)$ an radialen Wänden verschwindet. Schließlich bekommen wir bei $r = a, b$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b = \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial r} \cdot \nabla p_b, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_{u,lin} = \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial r} \cdot \nabla p_b. \quad (4.55)$$

Die Durchführung der bereits erwähnten Operator-Invertierungen wird mithilfe eines präkonditionierten, stabilisierten Bikonjugierte-Gradienten-Verfahrens (englisch: *biconjugate gradient stabilised* — BiCGSTAB, Van der Vorst, 1992) vorgenommen, das iterativ eine numerische Lösung der Gleichungen mit einer vorher festzulegenden Genauigkeit bestimmt.

4.2.2 Lösbarkeitsbedingungen

Die numerische Integration des tangential-linearen Modells umfasst drei diagnostische Gleichungen (4.4), (4.25) und (4.39), die eine Invertierung des quasigeostrophischen Laplace-Operators erfordern. Diese Gleichungen werden in jedem Integrationschritt iterativ gelöst (siehe Kapitel 4.2.1). Zu beachten ist hierbei, dass die Gleichungen gewisse Lösbarkeitsbedingungen erfüllen müssen, damit eine eindeutige Lösung gefunden werden kann und das iterative Lösungsverfahren gegen die korrekte Lösung konvergiert. Um dies näher zu beleuchten, betrachten wir exemplarisch die allgemeine Gleichung

$$\nabla_{gg}^2 \beta = \gamma, \quad (4.56)$$

wobei β die gesuchte Lösung der Gleichung ist und γ eine beliebige rechte Seite repräsentiert. Demzufolge können die Operator-Invertierungen, die in dieser Arbeit durchgeführt werden, als Spezialfall von Gleichung (4.56) angesehen werden. Im Folgenden werden die Lösbarkeitsbedingung und deren Umsetzung beispielhaft für das zylindrische Annulus-system hergeleitet. Integration von Gleichung (4.56) über das Annulusvolumen V ergibt mithilfe des Gauß'schen Integralsatz für die linke Seite

$$\frac{1}{V} \int_V dV \nabla_{gg}^2 \beta = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \left(\nabla_{\mathbf{h}} \beta + \mathbf{e}_z \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \beta}{\partial z} \right) d\mathbf{S} \quad (4.57)$$

$$= \frac{1}{V} \int_{S_R} dS_R \left[\frac{\partial \beta}{\partial r} \right]_{r=a}^{r=b} + \frac{1}{V} \frac{f^2}{N^2} \int_{S_V} dS_V \left[\frac{\partial \beta}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=d}, \quad (4.58)$$

wobei ∂V die gesamte Annulusberandung, S_R die Fläche der Zylinderwände und S_V die Fläche der vertikalen Begrenzungen kennzeichnet. Der Vektor $d\mathbf{S}$ steht senkrecht auf der Annulusberandung. Zusammengefasst muss also gelten

$$\frac{1}{V} \int_V \gamma dV = \frac{1}{V} \int_{S_R} dS_R \left[\frac{\partial \beta}{\partial r} \right]_{r=a}^{r=b} + \frac{1}{V} \frac{f^2}{N^2} \int_{S_V} dS_V \left[\frac{\partial \beta}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=d}. \quad (4.59)$$

Da diese Bedingung im Allgemeinen nicht erfüllt ist, wird die ursprüngliche Gleichung (4.56) ersetzt durch

$$\nabla_{gg}^2 \beta = \gamma - \frac{1}{V} \left(\int_V dV \gamma - \int_{S_R} dS_R \left[\frac{\partial \beta}{\partial r} \right]_{r=a}^{r=b} - \frac{f^2}{N^2} \int_{S_V} dS_V \left[\frac{\partial \beta}{\partial z} \right]_{z=0}^{z=d} \right), \quad (4.60)$$

was wiederum zu einer Erfüllung der Lösbarkeitsbedingung führt. Zu beachten ist, dass der zur Verfügung stehende iterative Algorithmus zur Lösung von Gleichungen der Form (4.56) beziehungsweise (4.60) derart konzipiert ist, dass verschwindende Gradienten der gesuchten Funktion β senkrecht zur Annulusberandung vorausgesetzt werden (vergleiche Borchert, 2015). Da dies in der vorliegenden Arbeit allerdings im Allgemeinen nicht zutrifft, haben wir den nachfolgenden Ansatz gewählt, der es erlaubt, den bestehenden Lösungsalgorithmus auch weiterhin zu verwenden. Hierfür wird die gesuchte Funktion β aufgespalten in

$$\beta = \tilde{\beta} + \beta', \quad (4.61)$$

wobei $\tilde{\beta}$ eine beliebige, vorgegebene Funktion ist, welche die Bedingungen

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial z} \right|_{z=0,d} = \left. \frac{\partial \beta}{\partial z} \right|_{z=0,d}, \quad (4.62)$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial r} \right|_{r=a,b} = \left. \frac{\partial \beta}{\partial r} \right|_{r=a,b}, \quad (4.63)$$

erfüllt. Damit wird die Inversionsgleichung (4.56) zu

$$\nabla_{qq}^2 \beta' = \gamma - \nabla_{qq}^2 \tilde{\beta}, \quad (4.64)$$

wobei gilt

$$\left. \frac{\partial \beta'}{\partial z} \right|_{z=0,d} = \left. \frac{\partial \beta'}{\partial r} \right|_{r=a,b} = 0. \quad (4.65)$$

Schließlich wird Gleichung (4.64) zur Gewährleistung der Lösbarkeitsbedingung ersetzt durch

$$\nabla_{qq}^2 \beta' = \gamma - \nabla_{qq}^2 \tilde{\beta} - \frac{1}{V} \int dV \left(\gamma - \nabla_{qq}^2 \tilde{\beta} \right), \quad (4.66)$$

wodurch zunächst β' und mit Gleichung (4.61) dann die gesuchte Funktion β bestimmt werden kann. Da die Gradienten von β' senkrecht zur Annulusbereandung definitionsgemäß verschwinden, kann zur Lösung von Gleichung (4.66) der bestehende Lösungsalgorithmus verwendet werden. Des Weiteren ist zu bemerken, dass sich Gleichung (4.66) auch direkt durch Einsetzen des Ansatzes (4.61) in Gleichung (4.60) unter Verwendung des Gauß'schen Integralsatzes ergibt. Voraussetzung zur Lösung von Gleichung (4.66) ist eine geeignete Definition der Funktion $\tilde{\beta}$. Eine praktische Vorgehensweise, die in der vorliegenden Arbeit Anwendung findet, ist in Anhang E skizziert.

4.3 Omegagleichung

Die in Kapitel 4.1 vorgestellte Theorie zur Separation der Variablen in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil impliziert, dass die führende, balancierte Strömung keine Vertikalgeschwindigkeit besitzt $w_b = 0$. Demnach ist die führende Ordnung von w als auch die führende Ordnung der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz $\delta = -\partial w / \partial z$ ausschließlich durch die unbalancierte Strömung bestimmt. Allerdings ist es auf Grundlage der quasigeostrophischen Theorie hinlänglich bekannt, dass w und δ auch einen balancierten Anteil aufweisen, welcher der nächsthöheren Ordnung in Ro entspricht. Eine Extraktion dieses eher großskaligen Anteils erlaubt eine vereinfachte Identifikation des Schwerewellensignals. Davon motiviert führen wir eine weitere Zerlegung ein

$$w = w_u \quad (4.67)$$

$$= w_{bal} + w_{unbal}, \quad (4.68)$$

und

$$\delta = \delta_u \tag{4.69}$$

$$= \delta_{bal} + \delta_{unbal}, \tag{4.70}$$

wobei das Schwerewellensignal ausschließlich in w_{unbal} und δ_{unbal} enthalten ist. Zur Berechnung von w_{bal} bedienen wir uns der quasigeostrophischen Omegagleichung (Hoskins et al., 1978; Holton, 2004; Danioux et al., 2012), die im Anhang F hergeleitet wird

$$\nabla_{gg}^2 w_{bal} = -\frac{2}{N^2} \nabla_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{Q}. \tag{4.71}$$

Hier wurde der sogenannte Q-Vektor (Hoskins et al., 1978) eingeführt, der in koordinatenunabhängiger Form geschrieben werden kann als

$$\mathbf{Q} = \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_b \cdot \nabla_{\mathbf{h}} B_b. \tag{4.72}$$

Wichtig ist darauf hinzuweisen, dass \mathbf{Q} in dieser Arbeit nur aus balancierten Feldern führender Ordnung besteht. Als Randbedingung zur Lösung von Gleichung (4.71) benutzen wir verschwindende Werte an den vertikalen Begrenzungen $w_{bal}(z=0) = w_{bal}(z=d) = 0$ für beide Modellsysteme. Für die Annuluskonfiguration werden zudem verschwindende Vertikalgeschwindigkeiten an den beiden Zylinderwänden angenommen $w_{bal}(r=a) = w_{bal}(r=b) = 0$. Nachdem w_{bal} aus der balancierten Strömung diagnostiziert wurde, kann die balancierte horizontale Geschwindigkeitsdivergenz berechnet werden

$$\delta_{bal} = -\frac{\partial w_{bal}}{\partial z}. \tag{4.73}$$

Der dann verbleibende unbalancierte Anteil $\delta_{unbal} = \delta - \delta_{bal}$ dient, wie bereits in Kapitel 3.2 erläutert, der Identifikation und Charakterisierung der Schwerewellenpakete. Ein ähnliches Verfahren zur Diagnose der unbalancierten Strömung wird in Zhang (2004) eingesetzt. Dort wird das nichtlineare Residuum der nichtlinearen Balancegleichung Δ_{NBE} als Indikator für die Schwerewellenaktivität herangezogen. Um zu zeigen, dass diese Verfahrensweise von gleicher Genauigkeit ist wie die oben präsentierte, werfen wir einen Blick in die Arbeit von McWilliams (1985). Daraus kann entnommen werden, dass Δ_{NBE} Ungleichgewichte der Ordnung $\mathcal{O}(Ro^2)$ enthüllt, sofern die Rossby- und die Froudezahl, $Fr = U/\sqrt{gL}$, von der gleichen Größenordnung sind. Diese Einschränkung ist im Rahmen der quasigeostrophischen Theorie erfüllt. Die balancierte horizontale Geschwindigkeitsdivergenz δ_{bal} wiederum, die wir aus der quasigeostrophischen Omegagleichung erhalten, ist von Ordnung $\mathcal{O}(Ro)$. Da dieser Beitrag von der totalen Divergenz δ subtrahiert wird, ist das resultierende Feld δ_{unbal} ebenfalls von der Ordnung $\mathcal{O}(Ro^2)$ und somit von gleicher Ordnung wie Δ_{NBE} . Abschließend sollte noch erwähnt werden, dass der Fehler, der entsteht, wenn die balancierten Felder \mathbf{u}_b und B_b anstatt der geostrophischen Strömung zur Berechnung von \mathbf{Q} verwendet werden, eine Größenordnung $\mathcal{O}(Ro)$ kleiner ist als δ_{bal} selbst.

Kapitel 5

Mechanismus der spontanen Schwerewellenabstrahlung: Ergebnisse

Basierend auf den vorangegangenen theoretischen Betrachtungen der Schwerewellenabstrahlung vom balancierten Strömungsanteil werden in diesem Kapitel die Ergebnisse der dazugehörigen numerischen Simulationen diskutiert. Dabei werden zunächst der aus der Omegagleichung diagnostizierte balancierte Vertikalwind und die balancierte Geschwindigkeitsdivergenz gezeigt. Anschließend werden die Resultate der tangential-linearen Modellierung präsentiert, wobei zwischen zwei unterschiedlichen Anfangsbedingungen unterschieden wird. Zudem liegt ein besonderes Augenmerk auf dem geostrophisch und hydrostatisch balancierten Antrieb der unbalancierten Strömung.

5.1 Balancierter Vertikalwind und balancierte horizontale Divergenz

5.1.1 Annuluskonfiguration

Zur Lösung der Omegagleichung (4.71) in der Annuluskonfiguration wird zunächst die in Gleichung (4.42) definierte Fensterfunktion auf die rechte Seite der Omegagleichung angewendet. Dieser Schritt ist notwendig, da $\nabla \cdot \mathbf{Q}$ sehr starke Gradienten an der inneren und äußeren Zylinderwand aufweist, die bei der Invertierung der Omegagleichung dort zu sehr hohen, unphysikalischen Werten von w_{bal} führen würden. Wie Testrechnungen mit verschiedenen Parametern der Fensterfunktion α belegen, werden die Strömungseigenschaften wie Amplitude und Struktur von w_{bal} im für uns relevanten inneren Bereich des Modellsystems nur sehr geringfügig von dieser Maßnahme beeinflusst. Im Einklang mit der in Kapitel 3.2.1 vorgenommenen Schwerewellenanalyse betrachten wir die Ergebnisse zum Zeitpunkt $t = 20$ s. Abbildung 5.1 zeigt horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) des vollen Vertikalwinds w (Abbildung 5.1a), des balancierten Beitrags aus der Omegagleichung w_{bal} (Abbildung 5.1b) und der unbalancierten Vertikalgeschwindigkeit $w_{unbal} = w - w_{bal}$ (Abbildung 5.1c). Die aus den jeweiligen vertikalen Geschwindigkeitsfeldern abgeleiteten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenzen sind in Abbildung 5.2 dargestellt. Sowohl das balancierte vertikale Windfeld w_{bal} als auch das dazugehörige Divergenzfeld δ_{bal} sind geprägt von wenigen, großskaligen Strukturen, die vergleichbare oder kleinere Amplituden gegenüber dem jeweiligen totalen Feld w und δ besitzen. Dies war zu erwarten, da zur Ermittlung der balancierten Felder nur balancierte Strömungskomponenten eingesetzt werden (siehe rechte Seite der Omegagleichung (4.71)). Nichtsdestotrotz ist neben der schwachen dipolartigen Struktur in der Modellmitte (Druckminimum) eine deutlicher ausgeprägte, kleinere Dipolstruktur im linken unteren Teil des Modellgebietes sichtbar.

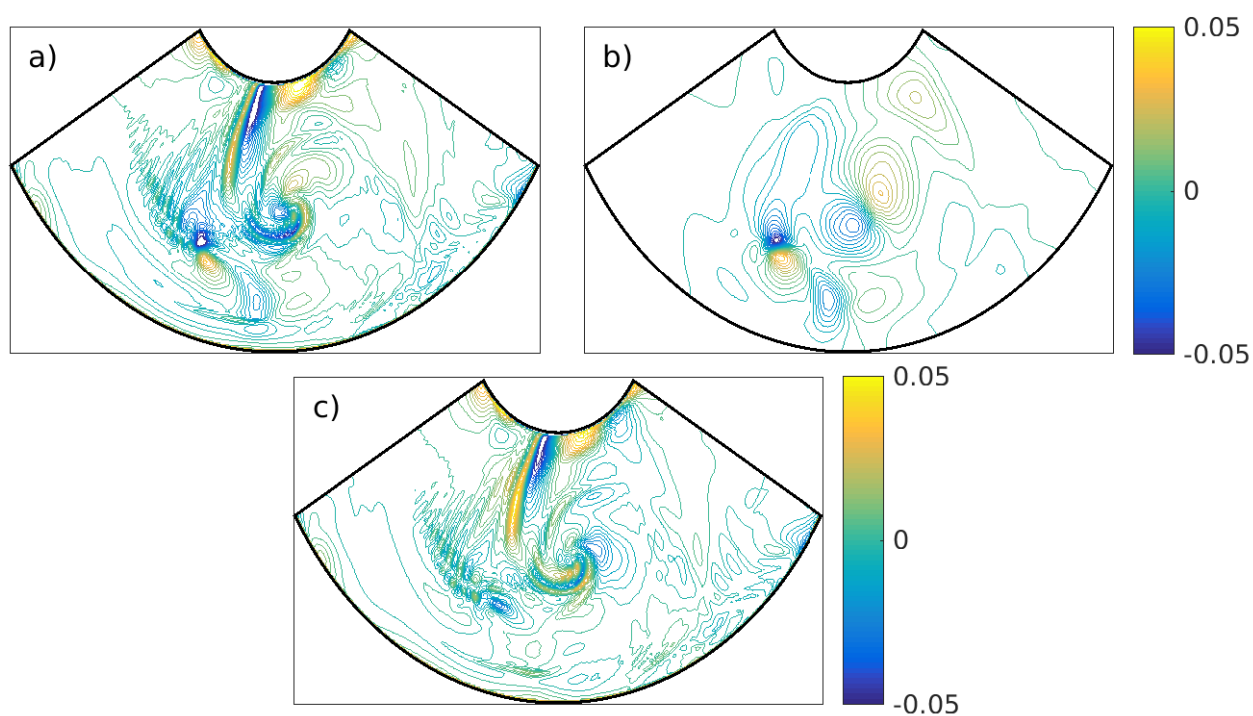


Abbildung 5.1: Diagnostizierter, balancierter Strömungsanteil in der vertikalen Geschwindigkeit in der Annuluskonfiguration: a) totaler Vertikalwind w , b) balancierter Vertikalwind w_{bal} aus der Omegagleichung und c) unbalancierter Vertikalwind $w_{unbal} = w - w_{bal}$. Die horizontalen Querschnitte (bei $z = 3$ cm) sind zum Zeitpunkt $t = 20$ s gezeigt. Die Einheit ist cm s^{-1} .

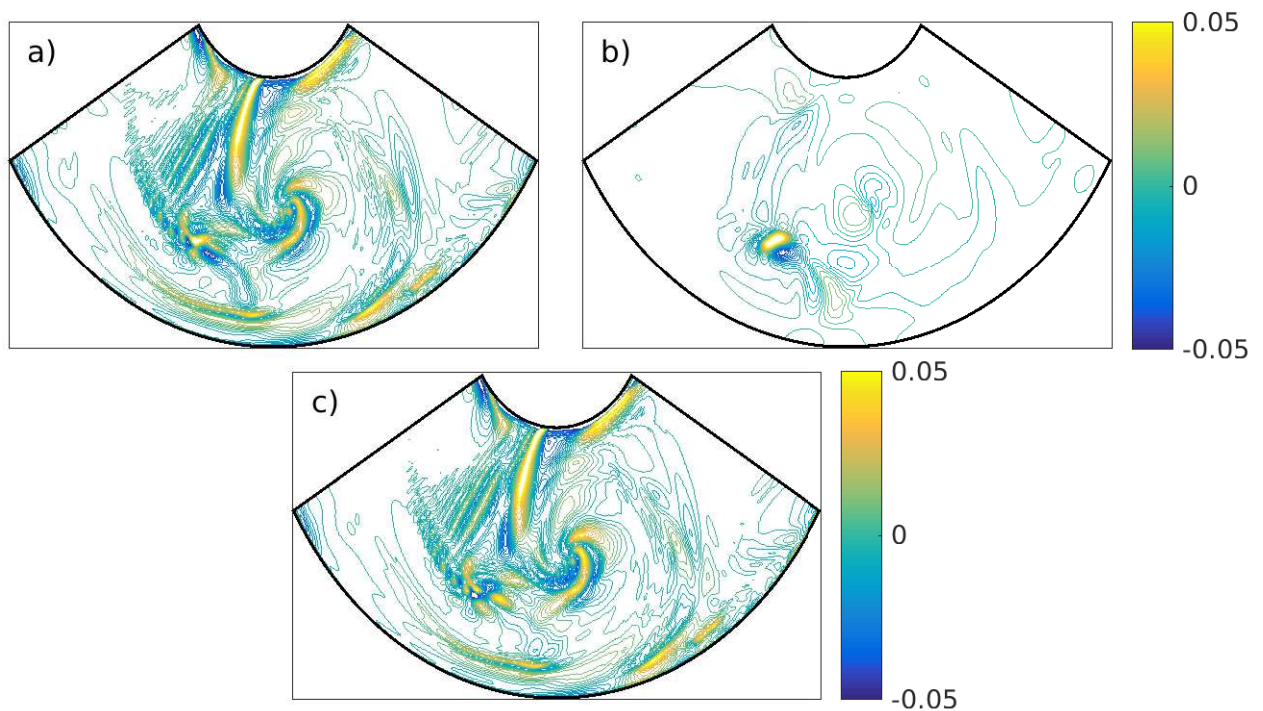


Abbildung 5.2: Diagnostizierter, balancierter Strömungsanteil in der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz in der Annuluskonfiguration: a) totale Divergenz δ , b) balancierte Divergenz δ_{bal} aus der Omegagleichung und c) unbalancierte Divergenz $\delta_{unbal} = \delta - \delta_{bal}$. Die horizontalen Querschnitte (bei $z = 3$ cm) sind zum Zeitpunkt $t = 20$ s gezeigt. Die Einheit ist s^{-1} .

Diese Struktur wurde bereits in Kapitel 3.2.1 angesprochen und in Anlehnung an die Arbeit von Yasuda et al. (2015) als *couplet* bezeichnet. Sie ist gekennzeichnet durch kleinskalige, auf- und abwärts gerichtete Bewegungen ($w_{bal} \propto -\delta_{bal}$) und gilt als mögliche Quelle von Schwerewellen (Viúdez, 2007). In der Arbeit von Viúdez (2007) wurde ein ähnliches Muster in der vollen Strömung beobachtet. Allerdings ist im Gegensatz zu unserer Arbeit dieses Signal nicht in dem aus der Omegagleichung berechneten vertikalen Windfeld erkennbar. Viúdez (2007) führt vielmehr an, dass die Quelle dieser Struktur auf die materielle Änderung der ageostrophischen differentiellen Vorticity zurückzuführen ist. Das in der vorliegenden Arbeit auftauchende Schwerewellenpaket WP1, das aus dem hier beschriebenen, balancierten *couplet* hervorgeht, scheint demgegenüber direkt durch die balancierte Strömung induziert zu werden. Eine Bestätigung dieser Vermutung folgt in Kapitel 5.2, wenn die Ergebnisse der tangential-linearen Modellierung vorgestellt werden. Beim Blick auf die unbalancierten Variablen w_{unbal} und δ_{unbal} wird deutlich, dass, ausgenommen der bereits erwähnten Dipolstrukturen, nur geringfügige Unterschiede zu den vollen Feldern w und δ existieren. Dies gilt insbesondere für die in Kapitel 3.2.1 charakterisierten Schwerewellenpakete WP1–WP4. Hier spielt es nahezu keine Rolle, ob δ oder δ_{unbal} als Schwerewellenindikator eingesetzt wird. Folglich können wir die in Kapitel 4.1 gewonnenen Erkenntnisse bekräftigen, dass der balancierte Anteil in der in dieser Arbeit definierten unbalancierten Strömung keine dominierende Rolle einnimmt.

5.1.2 Doppelperiodische, kartesische Konfiguration

Für das doppelperiodische, kartesische Modellsystem ist eine vorherige Anwendung der Fensterfunktion zur Lösung der Omegagleichung aus naheliegenden Gründen nicht erforderlich. Wir betrachten die Ergebnisse exemplarisch zum Zeitpunkt $t = 0$ s, an dem die groß- und kleinskaligen Strömungseigenschaften in Kapitel 3 erläutert wurden. Abbildungen 5.3 und 5.4 beinhalten die vollen, balancierten und unbalancierten Strömungsanteile der Vertikalgeschwindigkeit $w = w_{bal} + w_{unbal}$ und der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz $\delta = \delta_{bal} + \delta_{unbal}$. Die balancierte Geschwindigkeit w_{bal} in Abbildung 5.3b weist großskalige Auf- und Abwärtsbewegungen in den beiden Wirbeldipolen auf. Wie aus synoptischer Sicht zu erwarten, werden die größten Vertikalgeschwindigkeiten an den Vorderseiten der Temperaturfronten festgestellt. An dieser Stelle übertrifft die balancierte Strömung sogar etwas die Aufwärtsbewegung, die im totalen Feld w beobachtet wird. Die dazugehörige balancierte Divergenz δ_{bal} in Abbildung 5.4b zeigt ebenso deutliche Signale im Bereich der Wirbeldipole. Diese Muster sind allerdings kleinskaliger als die Signale in w_{bal} . Außerdem weisen die Amplituden etwas kleinere Werte auf wie die der vollen Divergenz (siehe Abbildung 5.4a). Verglichen mit den Strömungseigenschaften in der Annuluskonfiguration liegen im kartesischen Modellsystem also deutlich ausgeprägtere Vertikalbewegungen vor. Auch ein etwas stärkeres balanciertes Divergenzsignal ist wahrnehmbar, wodurch sich die unbalancierte Divergenz δ_{unbal} etwas deutlicher von dem totalen Feld δ unterscheidet. Dennoch macht es qualitativ kaum einen Unterschied, ob δ oder δ_{unbal} zur Charakterisierung der Schwerewellenpakete WPC1 und WPC2 herangezogen werden. Zentrale Eigenschaften wie Amplitude, Orientierung und Wellenlänge unterscheiden sich nur marginal.

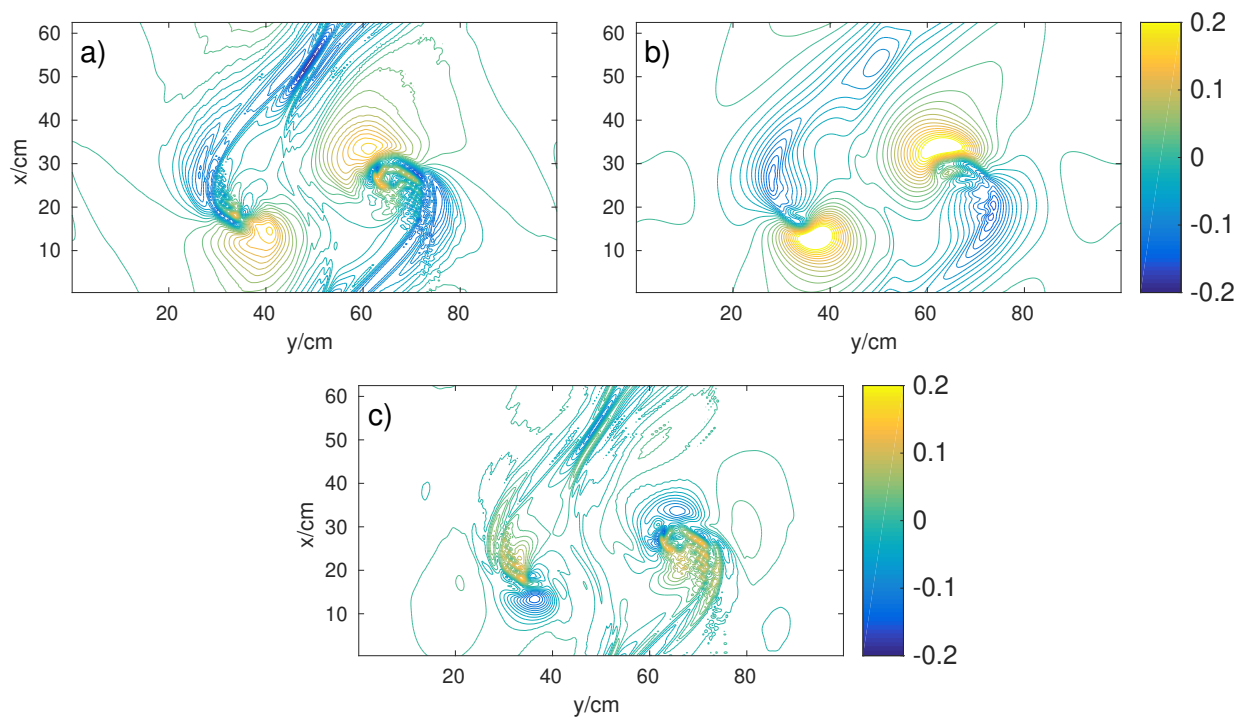


Abbildung 5.3: Diagnostizierter, balancierter Strömungsanteil in der vertikalen Geschwindigkeit im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem: a) totaler Vertikalwind w , b) balancierter Vertikalwind w_{bal} aus der Omegagleichung und c) unbalancierter Vertikalwind $w_{unbal} = w - w_{bal}$. Die horizontalen Querschnitte (bei $z = 3 \text{ cm}$) sind zum Zeitpunkt $t = 0 \text{ s}$ gezeigt. Die Einheit ist cm s^{-1} .

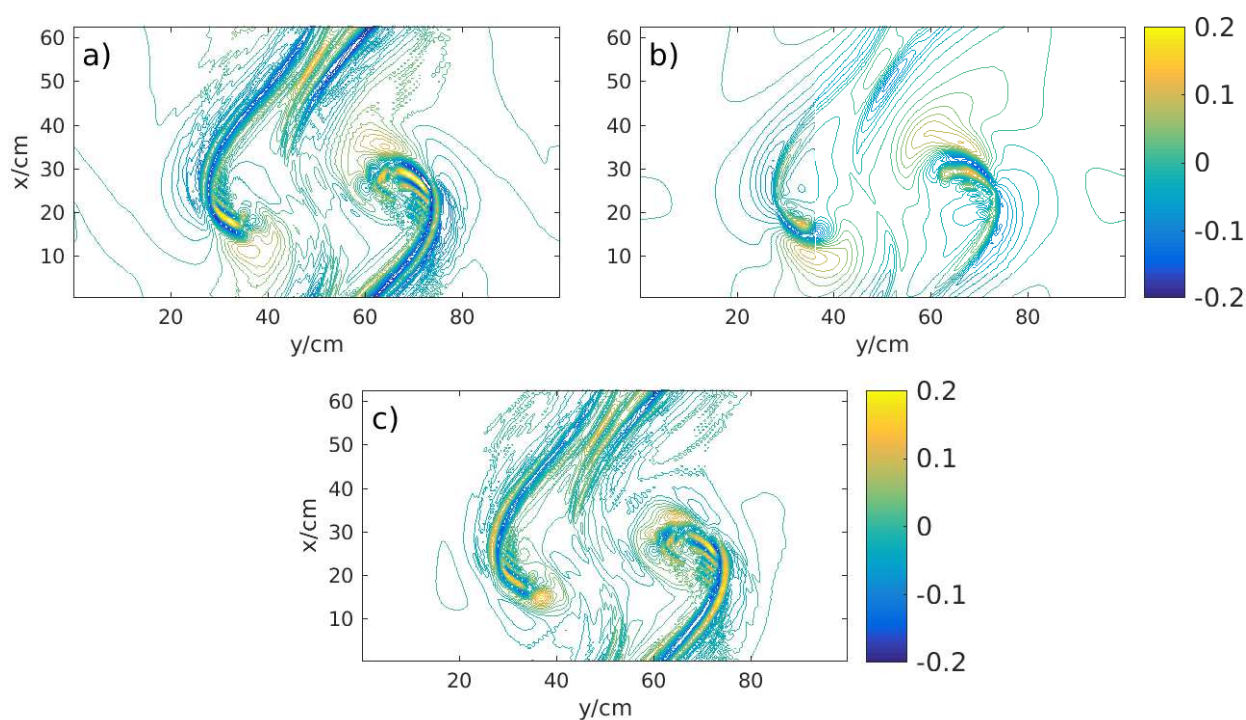


Abbildung 5.4: Diagnostizierter, balancierter Strömungsanteil in der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem: a) totale Divergenz δ , b) balancierte Divergenz δ_{bal} aus der Omega-gleichung und c) unbalancierte Divergenz $\delta_{unbal} = \delta - \delta_{bal}$. Die horizontalen Querschnitte (bei $z = 3$ cm) sind zum Zeitpunkt $t = 0$ s gezeigt. Die Einheit ist s^{-1} .

5.2 Ergebnisse der tangential-linearen Simulationen

In diesem Abschnitt werden die Resultate der tangential-linearen Simulationen vorgestellt. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der rotierenden Annuluskonfiguration, in welcher die relative Wichtigkeit der verschiedenen Quellenmechanismen der Schwerewellen abgeschätzt wird. Im Speziellen wird der Antrieb der Schwerewellen durch den balancierten Antrieb im Inneren des Modellgebiets mit der Schwerewellengenerierung durch Grenzschichtinstabilitäten an den radialen Zylinderwänden verglichen. Um den letztgenannten Prozess zu unterbinden, wird die in Kapitel 4.2 eingeführte Fensterfunktion in jedem Integrations-schritt auf die lineare, unbalancierte Strömung angewendet. Analoge Untersuchungen werden auch im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem durchgeführt, in dem die Schwerewellenanregung ausschließlich durch Prozesse im Inneren der Modellkonfiguration erfolgt. Ausgangspunkt der tangential-linearen Simulationen bildet der nichtlineare Zustand der Modellsysteme bei $t = 0$ s (vergleiche Kapitel 3.1). Wie aus Abbildung 3.11 hervorgeht, ist zu diesem Zeitpunkt ein starkes Anwachsen der Schwerewellenaktivität wahrnehmbar, sowohl im Annulus- als auch in der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration. Zur Initialisierung des tangential-linearen Modells wird dieser Zustand in den in Abschnitt 4.1 beschriebenen balancierten und unbalancierten Strömungsanteil separiert. Anschließend wird das tangential-lineare Modell mit zwei unterschiedlichen Anfangszuständen zeitlich integriert. Einerseits setzen wir die lineare, unbalancierte Strömung auf null zum Startpunkt der Simulationen, um den Fokus auf die spontane Anregung der unbalancierten Felder durch die geostrophisch und hydrostatisch balancierte Strömung zu legen. Andererseits initialisieren wir das Modell mit dem zuvor berechneten unbalancierten Zustand und führen tangential-lineare Simulationen mit und ohne balanciertem Antrieb durch. Diese Vorgehensweise erlaubt es, Aussagen zu treffen, inwieweit der balancierte Antrieb die zeitliche Entwicklung bereits bestehender Schwerewellenpakete beeinflusst. In beiden Fällen wird das nichtlineare Modell parallel zum tangential-linearen Modell integriert, da es zum einen als Referenz für die tangential-linearen Simulationen verwendet und zum anderen der balancierte Zustand fortlaufend aus der vollen Strömung berechnet wird.

5.2.1 Initialisierung mit verschwindender unbalancierter Strömung

Zunächst werden die Ergebnisse der tangential-linearen Simulationen präsentiert, die mit einem verschwindenden Anfangszustand initialisiert werden. Basierend auf dieser Vorgehensweise können zwei zentrale Aspekte genauer beleuchtet werden. Auf der einen Seite können wir verifizieren, ob das angetriebene tangential-lineare Modell in der Lage ist, die Strömungsmuster der nichtlinearen Simulationen zu reproduzieren. Damit einhergehend können wir die Annahmen, die bei der Herleitung des tangential-linearen Modells gemacht werden, rechtfertigen. Diese Annahmen umfassen, dass die Amplituden der unbalancierten Strömung deutlich kleiner sind als die der balancierten Strömung und dass die nichtlinearen Terme in der Dynamik des Systems keine bedeutende Rolle spielen. Auf der anderen Seite können wir den Beitrag des balancierten, nichtlinearen Antriebs zur Zeitentwicklung der unbalancierten Strömung quantifizieren. Denn am Anfangszeitpunkt der numerischen Integration des tangential-linearen Systems tragen nur diese Terme zur Tendenz der unbalancierten Felder und insbesondere auch zur Schwerewellenanregung bei.

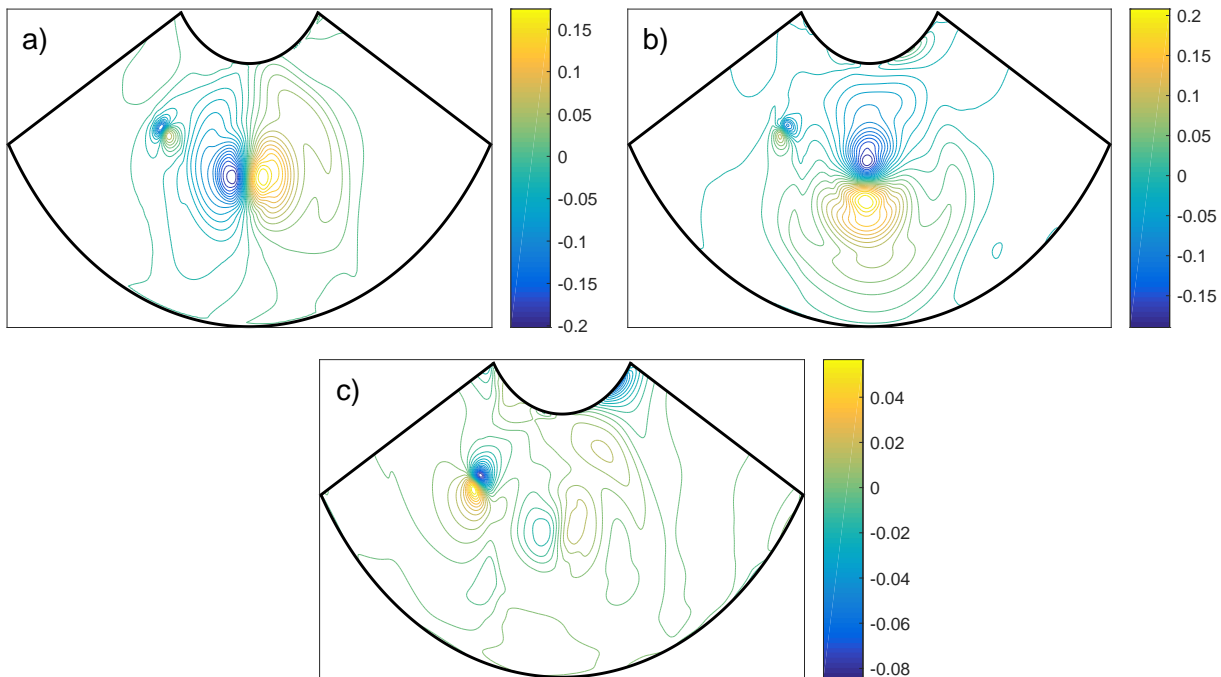


Abbildung 5.5: Horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) der geostrophisch und hydrostatisch balancierten Antriebsterme in der Annuluskonfiguration zum Startpunkt der tangential-linearen Simulationen ($t = 0$ s): a) Antrieb der unbalancierten Azimutalgeschwindigkeit u_u (in cm s^{-2}), b) Antrieb der unbalancierten Radialgeschwindigkeit v_u (in cm s^{-2}) und c) Antrieb des unbalancierten Auftriebs B_u (in cm s^{-3}). Siehe Gleichungen (4.23) und (4.24) für den funktionalen Zusammenhang.

Bevor die Resultate der tangential-linearen Modellierung vorgestellt werden, lohnt es sich, ein Blick auf die horizontale Struktur der Antriebsterme zu werfen. Abbildung 5.5 zeigt horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) der geostrophisch und hydrostatisch balancierten Antriebsterme in der Annuluskonfiguration zum Startpunkt der tangential-linearen Simulationen (vergleiche Gleichung (4.23) und (4.24)). Generell bestehen alle Felder aus relativ großskaligen Strukturen, die um das Druckminimum in der Modellmitte angeordnet sind. Darüber hinaus ist das Signal des kleinskaligen Wirbeldipols (*couplet*) an der Westflanke des Tiefdrucksystems in allen Feldern ersichtlich. Vor allem das Signal im Antriebsfeld des Auftriebs (siehe Abbildung 5.5c) ist an dieser Stelle besonders deutlich ausgeprägt. Alle Antriebsterme besitzen an den genannten Stellen eine typische dipolartige Struktur, wobei der Antrieb der unbalancierten Radialgeschwindigkeit v_u (Abbildung 5.5b) ein im Vergleich zum Antrieb der unbalancierten Azimutalgeschwindigkeit u_u um 90° verschobenes Muster aufweist. Die Amplituden der beiden Geschwindigkeitsantriebe sind von gleicher Größenordnung. Ähnliche Eigenschaften werden in der Wirbeldipolstudie von Snyder et al. (2009) beobachtet, in der sich die großskaligen Antriebe der unbalancierten Horizontalgeschwindigkeiten und der potentiellen Temperatur auf das Zentrum des Wirbeldipols beschränken. Auch in diesem Fall sind die Antriebsterme der Horizontalgeschwindigkeiten von gleicher Größenordnung, allerdings zeigen die Felder drei- oder sogar vierpolige Muster.

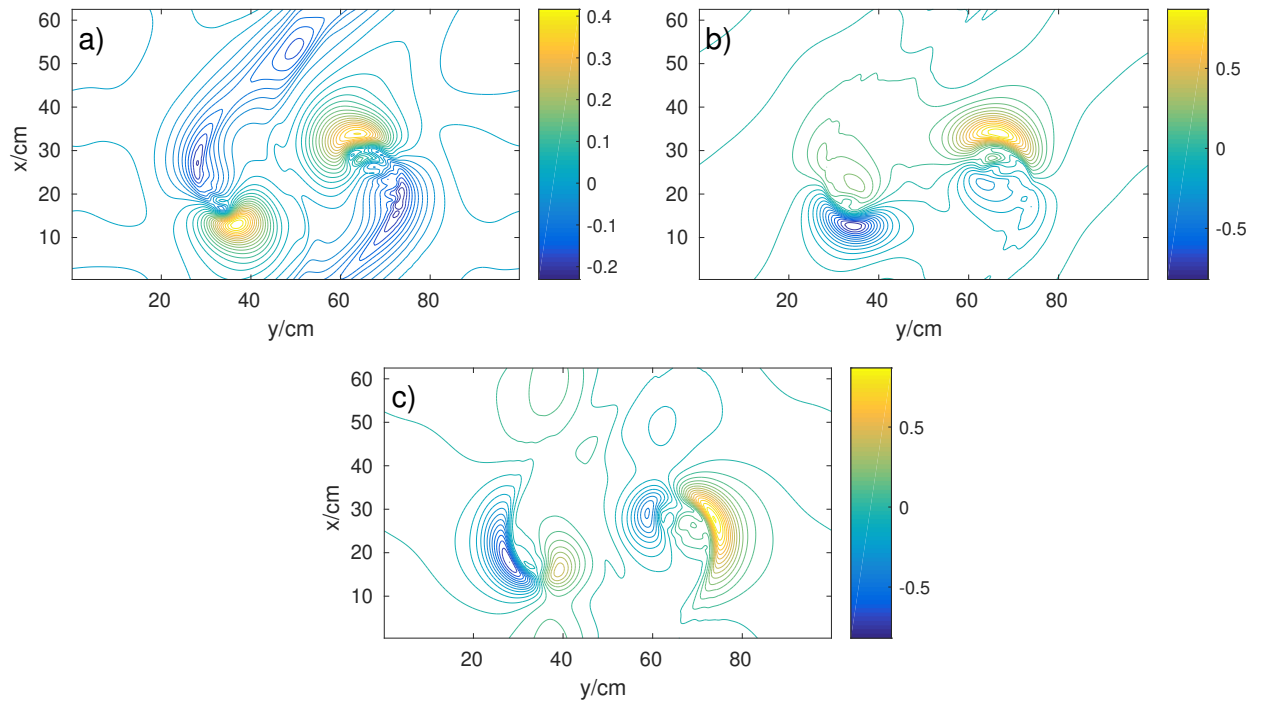


Abbildung 5.6: Horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) der geostrophisch und hydrostatisch balancierten Antriebsterme im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem zum Startpunkt der tangential-linearen Simulationen ($t = 0$ s): a) Antrieb der unbalancierten Azimutalgeschwindigkeit u_u (in cm s^{-2}), b) Antrieb der unbalancierten Radialgeschwindigkeit v_u (in cm s^{-2}) und c) Antrieb des unbalancierten Auftriebs B_u (in cm s^{-3}). Siehe Gleichungen (4.23) und (4.24) für den funktionalen Zusammenhang.

Die Form der Antriebsterme in der doppelperiodischen, kartesischen Modellkonfiguration sind in Abbildung 5.6 veranschaulicht. Während der Antrieb der unbalancierten Azimutalgeschwindigkeit (siehe Abbildung 5.6) sich über das gesamte Modellgebiet erstreckt und (positive) Maximalwerte in den beiden Wirbelstrukturen erkennbar sind, konzentrieren sich die Antriebsfelder von unbalancierter Radialgeschwindigkeit und Auftrieb auf das Jet-Front System. Im Gegensatz zur Annuluskonfiguration sind die Amplituden des Antriebs von B_u von gleicher Größenordnung wie die der Horizontalgeschwindigkeiten \mathbf{u}_u .

Die Ergebnisse der tangential-linearen Modellierung in der Annuluskonfiguration sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Dort befinden sich horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz für das nichtlineare (Abbildung 5.7a) und das angetriebene tangential-lineare Modell (Abbildung 5.7b), die nach einer Integrationszeit von 20 s erhalten werden. Zu diesem Zeitpunkt gibt es die maximale Übereinstimmung der nichtlinearen und der tangential-linearen Felder. Wie aus Abbildung 5.7 ersichtlich ist, erscheint WP1 auch im tangential-linearen Modell, wo es mit WP1' gekennzeichnet ist. Zudem zeigen die tangential-linearen Simulationen deutliche Wellenaktivitäten im Druckminimum, was mit WP2' deklariert ist. WP3 ist in der tangential-linearen Simulation nicht aufzufinden, während sich WP4 auch in der tangential-linearen Konfiguration auszubilden scheint, jedoch mit schwächerer Amplitude. Auch wenn WP1' im

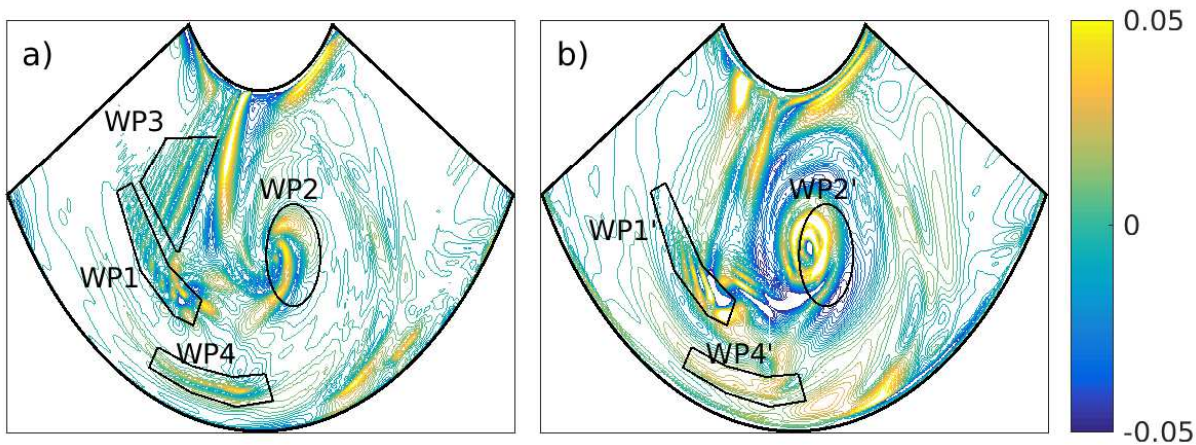


Abbildung 5.7: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} (in s^{-1}) in der Annuluskonfiguration: a) für das volle, nichtlineare Modell und b) für das tangential-lineare Modell. Die Simulationsergebnisse sind nach 20 s Integrationszeit gezeigt, wobei das tangential-lineare Modell mit verschwindender unbalancierter Strömung initialisiert wurde. Die Position der Wellenpakete ist im nichtlinearen Modell mit WP1–WP4 und im tangential-linearen Modell mit WP1', WP2' und WP4' gekennzeichnet. WP3 ist im tangential-linearen Modell nicht vorhanden.

Vergleich zu WP1 etwas kürzer ausfällt und die Amplituden etwas überschätzt werden, impliziert das Vorhandensein von WP1', dass sich das kleinskalige *couplet* auch in der linearen Dynamik ausbildet. Darüber hinaus kann die Vermutung, die in Abschnitt 5.1.1 geäußert wurde, bestätigt werden, und zwar dass WP1 durch die balancierte Strömung im Inneren des Modellgebietes induziert wird. Die spiralförmige Struktur von WP2' ist im tangential-linearen Modell stärker ausgeprägt als im nichtlinearen Modell (WP2), was darauf hindeutet, dass die tangential-lineare Dynamik eine intensivere Wirbelstruktur im Druckminimum aufweist. Die abweichende Struktur und Amplitude von WP2' hat zweierlei Gründe. Zum einen weist, wie in Abschnitt 3.2.1 gezeigt, WP2 die größten Amplituden aller Wellenpakete auf. Daher könnten die in der tangential-linearen Dynamik vernachlässigten nichtlinearen Wechselwirkungen doch eine erhebliche Rolle in der Formierung von WP2 spielen. Zum anderen ist es bekannt, dass die quasigeostrophische Theorie in stark gekrümmten Strömungen die volle Dynamik ungenauer reproduziert (siehe beispielsweise Fultz, 1991; Warn et al., 1995; Zhang et al., 2000). Solche Strömungsbedingungen liegen auch in unserer Annuluskonfiguration vor, besonders in der Nähe der Wirbelstruktur um das Druckminimum, in der WP2 eingebettet ist (vergleiche Abbildung 3.4c). In der Tat beobachten wir, dass die Abweichung $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_b|$ in der Nähe des dort verlaufenden Jetstreams im Vergleich zur Umgebung merklich erhöht ist. Der Grund für die Abwesenheit von WP3 in der tangential-linearen Konfiguration liegt darin begründet, dass WP3 durch Grenzschichtinstabilitäten an der inneren Zylinderwand generiert wird, gefolgt von einer Ausbreitung des Wellenpakets in das Modellinnere. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, werden mögliche Entstehungsmechanismen von WP3 beispielsweise in Jacoby et al. (2011)

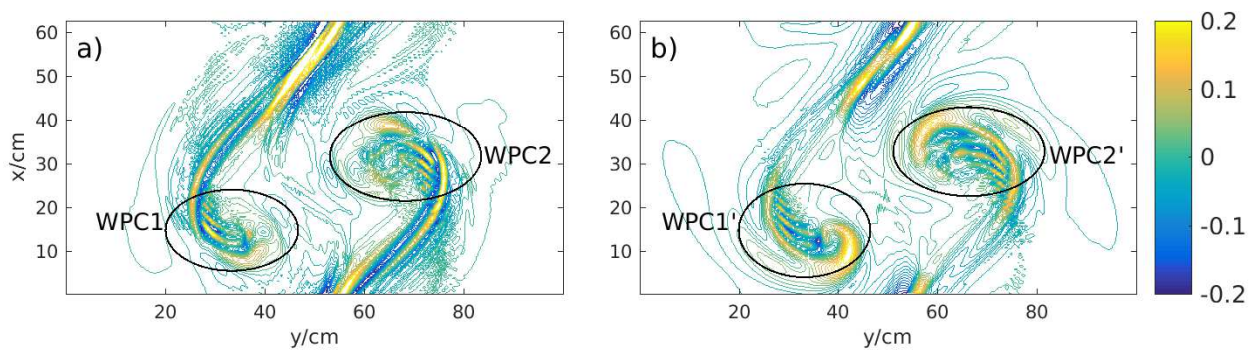


Abbildung 5.8: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} (in s^{-1}) im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem: a) für das volle, nichtlineare Modell und b) für das tangential-lineare Modell. Die Simulationsergebnisse sind nach 5 s Integrationszeit gezeigt, wobei das tangential-lineare Modell mit verschwindender unbalancierter Strömung initialisiert wurde. Die Position der Wellenpakete ist im nichtlinearen Modell mit WPC1 und WPC2 und im tangential-linearen Modell mit WPC1' und WPC2' gekennzeichnet.

und Randriamampianina & Crespo del Arco (2015) diskutiert. Durch die Anwendung der Fensterfunktion auf die unbalancierte, lineare Strömung können wir das Auftreten der dort vorgeschlagenen Prozesse zur Schwerewellenanregung in unserer tangential-linearen Dynamik nahezu ausschließen. Gleichermaßen sorgt die Fensterfunktion höchstwahrscheinlich aber auch für eine Abschwächung von WP4', das sich am Jetstream in der Nähe der äußeren Zylinderwand aufhält.

Die Erkenntnis, dass sich WP1 und teilweise auch WP2 und WP4 im angetriebenen tangential-linearen Modell ausbilden, unterstützt den Verdacht enorm, dass ein Teil der beobachteten Schwerewellen tatsächlich vom Jet-Front System und nicht durch Grenzschichtinstabilitäten generiert wird. Denn da wir unser tangential-lineares Modell mit verschwindender Anfangsbedingung initialisieren, können wir explizit nachweisen, dass ausschließlich der balancierte Antrieb im Inneren des Modellgebiets die Schwerwellenemission hervorrufen kann. Des Weiteren sind diese Feststellungen konsistent mit der in Kapitel 3.2.2 aufgezeigten hohen Korrelation zwischen der Schwerwellenaktivität und der Stärke der Baroklinität.

Um die vorherigen Ausführungen weiter zu untermauern, betrachten wir die Ergebnisse der tangential-linearen Analyse im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem. In dieser Konfiguration können Grenzschichteffekte an den seitlichen Begrenzungen definitiv ausgeschlossen werden. Es stellt sich heraus, dass die beste Übereinstimmung zwischen der nichtlinearen und der angetriebenen tangential-linearen Simulation schon nach einer Integrationszeit von 5 s erreicht ist. Abbildung 5.8 präsentiert die unbalancierte horizontale Geschwindigkeitsdivergenz der nichtlinearen (Abbildung 5.8a) und der tangential-linearen Strömung (Abbildung 5.8b). Der Vergleich beider Felder zeigt eindrucksvoll, dass die tangential-lineare Dynamik die nichtlineare Strömung nahezu vollständig reproduziert. Sowohl die räumliche Lage als auch die Amplituden der beiden Wellenpakete, WPC1 und WPC2, werden vom tangential-linearen Modell sehr gut abgebildet (vergleiche WPC1' und

WPC2' in Abbildung 5.8b). Es gibt nur marginale Unterschiede in den beiden Divergenzfeldern, die mit den vernachlässigten nichtlinearen Wechselwirkungen in Verbindung gebracht werden können. Die Ergebnisse beweisen also einmal mehr, dass das tangential-lineare Modellsystem bestens geeignet ist, um die nichtlineare Dynamik zu studieren. Darüber hinaus bekräftigt die tangential-lineare Analyse des doppeltperiodischen, kartesischen Modells den Verdacht, dass der Ursprung einiger Schwerewellenpakete in der Annuluskonfiguration auf dynamische Prozesse im Inneren des Modellgebiets zurückzuführen ist.

5.2.2 Initialisierung mit nicht verschwindender unbalancierter Strömung

Weitere Simulationsexperimente werden mit einem anfangs nicht verschwindendem, nicht-linearen unbalancierten Strömungsanteil durchgeführt. Der unbalancierte Anfangszustand ergibt sich hierbei aus der Differenz zwischen den vollen und den diagnostizierten balancierten Feldern. Neben den nichtlinearen und den angetriebenen tangential-linearen Ergebnissen werden auch die Resultate der tangential-linearen Simulationen präsentiert, in denen der hydrostatisch und geostrophisch balancierte Antrieb auf null gesetzt wird. Alle drei Modellvarianten werden mit demselben Anfangszustand zeitlich integriert, wobei wichtig ist zu erwähnen, dass die Schwerewellenpakete schon in dem Anfangszustand existieren. Folglich zielt die Analyse darauf ab, den Einfluss des balancierten Antriebs auf bereits existierende Schwerewellen zu quantifizieren.

Ein horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz des Anfangsfeldes in der Annuluskonfiguration ist in Abbildung 5.9a dargestellt. WP2, WP3 und WP4 sind darin zumindest ansatzweise erkennbar. Beim Blick auf andere vertikale Höhenniveaus wird allerdings ersichtlich, dass alle Wellenpakete, inklusive WP1, zu diesem Zeitpunkt schon nahezu vollständig ausgebildet sind (nicht gezeigt). Die Ergebnisse nach einer Integrationszeit von 20 s sind für das nichtlineare Modell in Abbildung 5.9b und für das angetriebene und nicht angetriebene tangential-lineare Modell in den Abbildungen 5.9c,d gezeigt. Zusätzlich befindet sich der Korrelationskoeffizient nach Pearson in der rechten unteren Ecke der tangential-linearen Ergebnisse. Diese statistische Kennzahl, die zwischen den nichtlinearen und den jeweiligen tangential-linearen horizontalen Feldern bestimmt wird, erlaubt einen quantitativen Vergleich der Modellvarianten. Bei der Berechnung der Korrelationen werden nur Gitterpunkte in Betracht gezogen, die außerhalb des Einflussbereichs der Fensterfunktion liegen.

Aufgrund der übereinstimmenden Anfangsbedingungen besitzen beide tangential-lineare Modellvarianten eine Korrelation von eins auf zu Beginn der Simulationen. Nach einer Integrationszeit von 20 s weist das angetriebene tangential-lineare Modell eine Korrelation von 0,5 auf (siehe Abbildung 5.9c), wohingegen der Korrelationskoeffizient des nicht angetriebenen Modells (siehe Abbildung 5.9d) bereits auf 0,2 zurückgegangen ist. Ein wesentlicher Grund für die niedrigere Korrelation im nicht angetriebenen tangential-linearen Modell ist eine deutlich ausgeprägtere Spiralstruktur um das Druckminimum. Demgegenüber stimmen die Strömungsmuster der angetriebenen tangential-linearen Modellkonfiguration recht gut mit der nichtlinearen Dynamik überein. Der zeitliche Verlauf des 3D-Korrelationskoeffizienten ist in Abbildung 5.10 gezeigt. Wie daraus erkennbar ist, fällt die Korrelation des nicht angetriebenen Modells (gestrichelte Linie) vor allem in

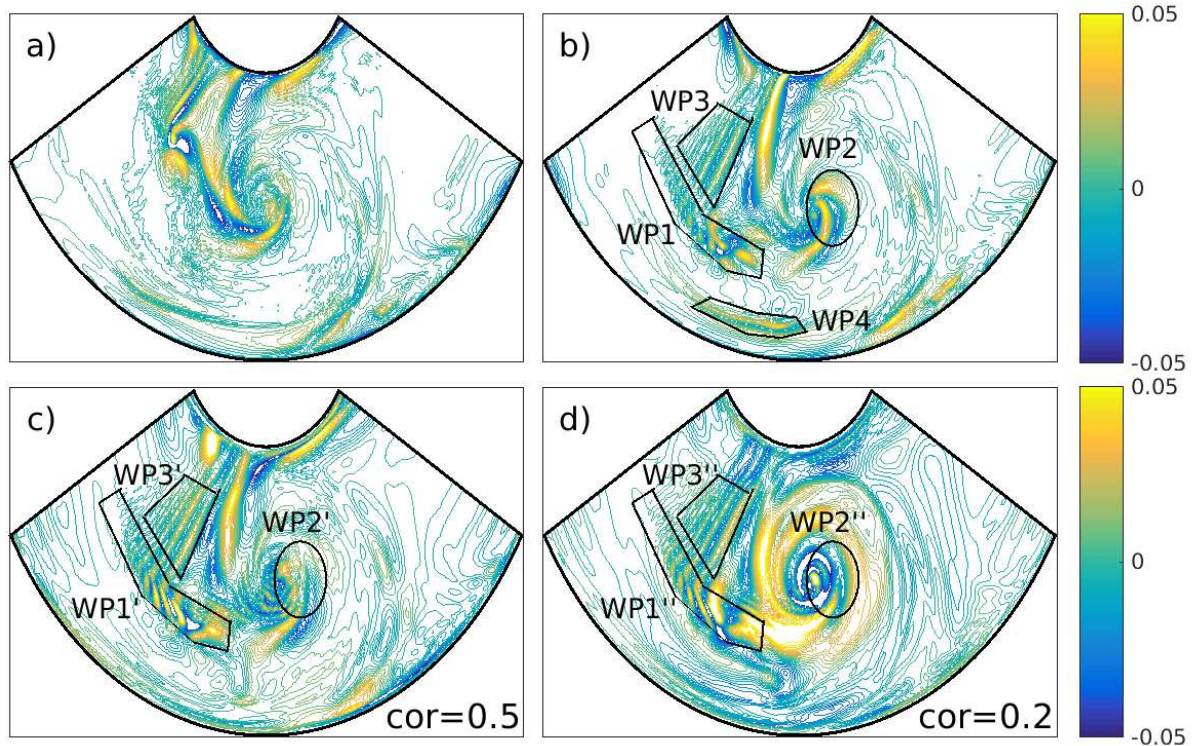


Abbildung 5.9: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} (in s^{-1}) in der Annuluskonfiguration für verschiedene Modellvarianten. Obere Reihe: a) nichtlineare Felder zum Startpunkt $t = 0$ s und b) nichtlineare Felder nach einer Integrationszeit von 20 s. Untere Reihe: c) Ergebnis der angetriebenen tangential-linearen Simulation nach 20 s und d) Ergebnis der nicht angetriebenen tangential-linearen Simulation nach 20 s. Alle Modellläufe werden mit dem selben, in a) gezeigten Anfangsfeld initialisiert. Die Position der Wellenpakete ist im nichtlinearen Modell mit WP1–WP4, im angetriebenen tangential-linearen mit WP1'–WP3' und im nicht angetriebenen tangential-linearen Modell mit WP1''–WP3'' gekennzeichnet. WP4 ist in den beiden tangential-linearen Simulationen nicht eindeutig identifizierbar. Der Korrelation zwischen den beiden tangential-linearen und den nichtlinearen horizontalen Feldern ist jeweils in der rechten unteren Ecke platziert.

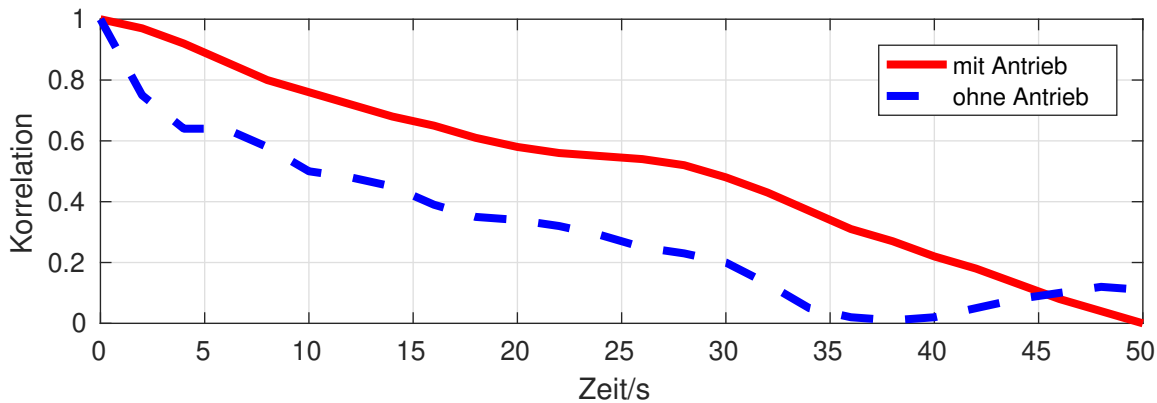


Abbildung 5.10: Zeitlicher Verlauf der 3D-Korrelation zwischen dem nichtlinearen und den tangential-linearen Simulationen in der Annuluskonfiguration. Die durchgezogene Linie beschreibt die Korrelation zwischen dem nichtlinearem und dem angetriebenen tangential-linearen Modell und die gestrichelte Linie die Korrelation zwischen dem nichtlinearen und dem nicht angetriebenen tangential-linearen Modell.

den ersten 5 s deutlich schneller ab als die angetriebene Variante (durchgezogene Linie). Anschließend ist die Steigung beider Kurven relativ ähnlich und ab etwa 35 s konvergieren beide Kurven gegeneinander. Ab diesem Zeitpunkt weichen auch die Ergebnisse des angetriebenen tangential-linearen Modells stark von der nichtlinearen Lösung ab. Die Ursache hierfür liegt höchstwahrscheinlich darin begründet, dass sich die Vernachlässigung der nichtlinearen Terme dann stärker auf die lineare Dynamik des Systems auswirkt. Überdies führt die Verwendung der Fensterfunktion zu einem weiteren (negativen) Eingriff in die Dynamik des linearen Systems.

Die Existenz der Wellenpakete WP1–WP3 kann in beiden tangential-linearen Simulationen nachgewiesen werden. Diese werden mit WP1'–WP3' in der angetriebenen und mit WP1''–WP3'' in der nicht angetriebenen Modellkonfiguration benannt (siehe Abbildung 5.9). Generell werden sowohl die räumliche Lage als auch die Wellenlängen und Orientierungen von WP1 und WP3 in beiden tangential-linearen Modellen recht gut reproduziert. Es wird allerdings eine leichte Zunahme der Amplituden beobachtet. Demnach übt der geostrophisch und hydrostatisch balancierte Antrieb kaum Einfluss auf die Eigenschaften dieser beiden Wellenpakete aus. WP2 wird im angetriebenen tangential-linearen Modell noch recht gut getroffen (WP2'), wohingegen WP2'' deutliche Unterschiede in der Struktur und den Amplituden aufweist. Diese Erkenntnisse lassen darauf schließen, dass WP2 kontinuierlich vom balancierten Strömungsanteil beeinflusst wird. WP4, das in der Nähe der äußeren Zylinderwand platziert ist, ist in den tangential-linearen Simulationen kaum identifizierbar. Wie bereits in Kapitel 5.2.1 erwähnt, ist dies auf die Fensterfunktion zurückzuführen, die zu einer Abschwächung von WP4 führt. Zusammenfassend bedeuten die obigen Ausführungen, dass der balancierte Antrieb einen signifikanten Einfluss auf die Zeitentwicklung der gesamten Struktur von WP2 ausübt, was unter anderem durch die rasche Abnahme der Korrelation im nicht angetriebenen Modell belegbar ist. Im Gegensatz dazu hat der balancierte Antrieb kaum Einfluss auf die kleinskaligen Wellenpakete WP1

und WP3, was konsistent ist mit den theoretischen Ausführungen in Abschnitt 4.2.

Leider sind analoge Untersuchungen im doppeltperiodischen, kartesischen Modellsystem nicht möglich. Bei Initialisierung der tangential-linearen Modellkonfigurationen mit nicht verschwindendem Anfangszustand beginnen die linearen, unbalancierten Felder nach wenigen Sekunden Integrationszeit zu divergieren. Genauer gesagt beobachten wir lineare Instabilitäten auf Gitterebene, die rasch zunehmen und zu einem Zusammenbruch des Modells führen. Höchstwahrscheinlich kann die Ursache dieser Instabilitäten auf die Vernachlässigung der nichtlinearen Terme zurückgeführt werden. In Folge dessen entsteht eine erhöhte Energiekaskade zu den kleinskaligen Strukturen hin, die daraufhin exponentiell anwachsen. Der Versuch, die kinematische Viskosität im tangential-linearen Modell zu erhöhen, um diesen Prozess zu unterbinden und eine Verlängerung des stabilen Integrationszeitraums herbeizuführen, ist zwar von Erfolg gekrönt, allerdings wird auch die Dynamik der linearen Strömung signifikant beeinflusst. Daher wird auf derartige Eingriffe ins lineare Modellsystem verzichtet. Nichtsdestotrotz bestätigen die Ergebnisse, die während der anfänglich stabilen Modellintegration gewonnen werden, die Erkenntnisse aus der Annuluskonfiguration. Abbildung 5.11a zeigt das Anfangsfeld, mit dem das volle, das angetriebene und das nicht angetriebene tangential-lineare Modell initialisiert werden. Wie auch in der Annuluskonfiguration sind die Wellenpakete, WPC1 und WPC2, auch in diesem Fall schon vollständig ausgebildet. Die zuvor beschriebenen Umstände erlauben einen stabilen Integrationszeitraum von 2s für beide tangential-linearen Modellkonfigurationen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 5.11b–5.11d dargestellt. Generell werden die Erkenntnisse aus der Annuluskonfiguration bestätigt. Die Korrelation des tangential-linearen Modells ohne Antrieb fällt deutlich schneller ab als im angetriebenen Fall. Darüber hinaus übt der balancierte Antrieb offensichtlich keinen direkten Einfluss auf bereits bestehende Schwerkwellenpakete aus, die in dieser Konfiguration nachweislich im Inneren des Modellgebiets generiert werden.

Abschließend sei noch kurz auf den Versuch eingegangen, die erhöhte Energiekaskade des tangential-linearen Modells in der doppeltperiodischen Modellkonfiguration zu unterbinden, um ein stabiles tangential-lineares Modell zu erhalten. Hierfür parametrisieren wir die nichtlinearen Wechselwirkungen $\mathbf{N}(\mathbf{s}_u)$ mit einer empirisch gewonnenen, linearen Ornstein-Uhlenbeck Schließung (Dolaptchiv et al., 2013). Damit lässt sich die allgemeine Form der tangential-linearen Gleichungen (4.31) schreiben als

$$\left(\frac{\partial \mathbf{s}_u}{\partial t} \right)_{lin,OU} = \mathbf{F}_u(\mathbf{s}_b) + \mathbf{L}_u(\mathbf{s}_b) \mathbf{s}_u + \dot{\mathbf{P}}_{OU}, \quad (5.1)$$

wobei

$$\dot{\mathbf{P}}_{OU} = \mathbf{k}_{OU} + \mathbf{L}_{OU} \mathbf{s}_u + \Sigma \dot{\mathbf{W}} \quad (5.2)$$

einen empirischen Ornstein-Uhlenbeck bezeichnet. Hierbei ist \mathbf{k}_{OU} ein konstanter Vektor, \mathbf{L}_{OU} und Σ konstante Matrizen und $\dot{\mathbf{W}} dt = d\mathbf{W}$ kennzeichnet ein Wiener Inkrement. Die Werte der Parameter \mathbf{k}_{OU} , \mathbf{L}_{OU} und Σ erhalten wir aus dem Residuum der zeitlichen Tendenz des nichtlinearen und des tangential-linearen Modells

$$d\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{s}_u}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathbf{s}_u}{\partial t} \right)_{lin}, \quad (5.3)$$

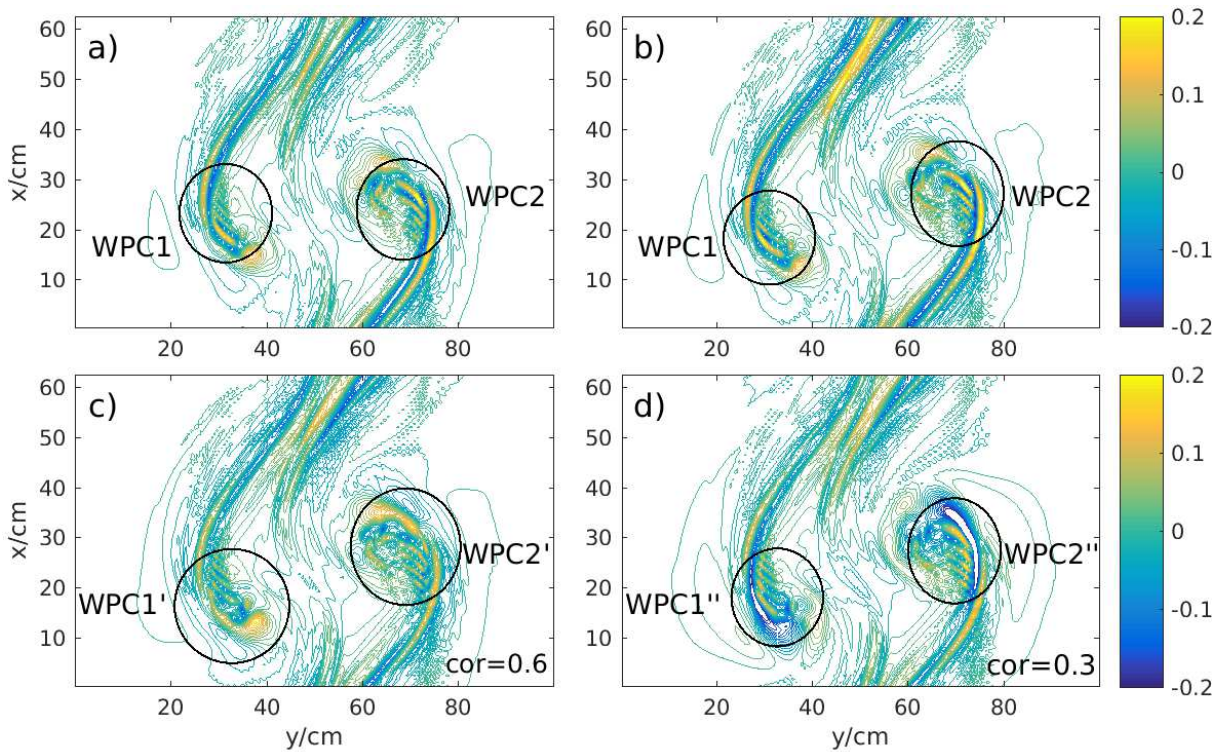


Abbildung 5.11: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) der unbalancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ_{unbal} (in s^{-1}) im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem für verschiedene Modellvarianten. Obere Reihe: a) nichtlineare Felder zum Zeitpunkt $t = 0$ s und b) nichtlineare Felder nach einer Integrationszeit von 2 s. Untere Reihe: c) Ergebnis der angetriebenen tangential-linearen Simulation nach 2 s und d) Ergebnis der nicht angetriebenen tangential-linearen Simulation nach 2 s. Alle Modellläufe werden mit dem selben, in a) gezeigten Anfangsfeld initialisiert. Die Position der Wellenpakete ist im nichtlinearen Modell mit WPC1–WPC2, im angetriebenen tangential-linearen mit WPC1'–WPC2' und im nicht angetriebenen tangential-linearen Modell mit WPC1''–WPC2'' gekennzeichnet. Der Korrelation zwischen den beiden tangential-linearen und den nichtlinearen horizontalen Feldern ist jeweils in der rechten unteren Ecke platziert.

unter Verwendung einer Maximum-Likelihood-Methode, ähnlich wie in Dolaptchiev et al. (2013). Aufgrund limitierter Speicherkapazität erfolgt die Berechnung der Schließungsparameter separat an jedem Gitterpunkt unter Einbezug der benachbarten horizontalen und vertikalen Gitterpunkte. Nach Implementierung der Schließungsterme in das doppeltperiodische Modell stellte sich jedoch heraus, dass auch das resultierende Modell nach wenigen Zeitschritten divergiert. Eine anschließende Eigenwertanalyse des linearen Operators \mathbf{LOU} zeigte, dass dieser Eigenwerte besitzt, die größer als null sind. Daher ist auch das modifizierte tangential-lineare System (5.1) instabil.

Kapitel 6

Gleichgewichtskonzepte

Die vorangegangenen Untersuchungen basieren auf einer Separation der totalen Strömung in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil, wobei die Schwerewellenaktivität vollständig im unbalancierten Anteil enthalten ist. Die Berechnung der balancierten Strömung erfolgt durch die Invertierung der quasigeostrophischen linearen PV (siehe Gleichung (4.4)), in der die unbalancierten Anteile vernachlässigt werden. Diese Vorgehensweise erlaubt eine strikte Umformulierung der Grundgleichungen in balancierte und unbalancierte Dynamik, wodurch Informationen über die Wechselwirkung der beiden Strömungsarten gewonnen werden können. Wie in Abschnitt 4.1 aufgezeigt, ist der unbalancierte Strömungsanteil zwar vom Schwerewellensignal dominiert, jedoch befindet sich darin auch ein nicht zu vernachlässigender balancierter Anteil. Die nachfolgenden Analysen zielen darauf ab, das Schwerewellensignal weiter zu isolieren, was gleichbedeutend ist mit einer genaueren Bestimmung der balancierten Strömung. Dies ermöglicht zum einen eine genauere Quantifizierung der Welleneigenschaften wie Wellenlänge oder Amplitude. Zum anderen sind genauere Aussagen über die Energieübertragung zwischen großskaliger, balancierter Strömung und dem kleinskaligen Schwerewellensignal möglich. Darüber hinaus besteht die Absicht, die diagnostizierten Ungleichgewichte als Schwerewellenquelle für nichtorographische Schwerewellenparametrisierungen zu verwenden. In diesem Zusammenhang dürfte insbesondere interessant sein, inwieweit die angewendeten Gleichgewichtskonzepte verschiedener Genauigkeit in der Lage sind, die Schwerwelleneffekte in der mittleren Atmosphäre zu reproduzieren.

Generell ist eine exakte Trennung der Strömung in einen balancierten und einen Schwerewellenanteil nicht möglich. Wie theoretische Betrachtungen von Vanneste (2013) aufzeigen, ist die spontane Schwerewellenanregung zwar exponentiell klein in Ro , allerdings führt die zeitliche Entwicklung eines anfangs perfekt balancierten Zustands unwiderrufflich zu einer Generierung von Schwerewellen. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies, dass keine exakt invariante langsame Mannigfaltigkeit (englisch: *slow manifold*) existiert (Vanneste, 2013). Auch unser tangential-lineares Gleichungssystem in Abschnitt 4.2 besitzt diese Eigenschaft. Denn selbst wenn das tangential-lineare System mit anfangs verschwindender unbalancierter Strömung initialisiert wird, sorgt der im Allgemeinen nicht verschwindende balancierte Antrieb zu einer Generierung von unbalancierter Strömung. Nichtsdestotrotz ist es aus den oben genannten Beweggründen wünschenswert, eine möglichst genaue Spaltung beider Strömungsarten vorzunehmen. In der Literatur ist eine Vielzahl von verschiedenen Gleichgewichtskonzepten vorhanden, von denen einige in Kapitel 4.1 gelistet sind. Wir beschränken uns im Folgenden auf einige ausgewählte Verfahren.

Standardmäßig können Gleichgewichtsbedingungen verschiedener Ordnung durch die Zerlegung der relevanten Modellvariablen hinsichtlich der Rossbyzahl Ro ($Ro < 1$) abgeleitet

werden. So wird beispielsweise die Azimutalgeschwindigkeit u zerlegt in

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} Ro^i u_i, \quad (6.1)$$

wobei u_i den Strömungsbeitrag der i -ten Ordnung bezeichnet. Werden die entsprechenden Zerlegungen in die zugrundeliegende Gleichungen des dynamischen Systems eingesetzt, können Gleichgewichtsbedingungen verschiedener Ordnung bestimmt werden. In führender Ordnung in Ro handelt es sich dabei um das quasigeostrophische Gleichgewicht, das schon von Charney (1948) beschrieben wurde. Die nächste Ordnung in Ro beinhaltet die sogenannte ageostrophisch balancierte Strömung. Explizite Ausdrücke für diese Strömungsanteile werden unter der Annahme einer hydrostatischen Boussinesq-Strömung auf der f -Ebene in Muraki et al. (1999) hergeleitet. Die Erweiterung auf die nicht-hydrostatischen Boussinesq-Gleichungen wird in der Arbeit von McKiver & Dritschel (2008) vorgenommen. Die dort abgeleiteten Gleichgewichtsbeziehungen, die auch in unserer Modellkonfigurationen angewendet werden, werden in Abschnitt 6.1 vorgestellt.

Im Gegensatz dazu existieren auch vielfältige Gleichgewichtsverfahren, die nicht auf einer dimensionslosen Kennzahl wie zum Beispiel der Rossby- oder der Froudezahl basieren. In diesem Zusammenhang sei beispielsweise das optimale PV-Gleichgewicht (englisch: *optimal PV balance (OPV)*) von Dritschel & Viúdez (2004) erwähnt, in dem eine optimale PV in mehreren Vorwärts- und Rückwärtsintegrationen iterativ bestimmt wird. In der PV enthaltene Schwerewellensignale werden in diesem Prozess systematisch eliminiert. Wir bedienen uns allerdings eines anderen Verfahrens, das unter anderem von Nagai et al. (2015) und Shakespeare & Hogg (2017) eingesetzt wird, um in ozeanischen Modellen das Schwerewellensignal aus der totalen Strömung zu extrahieren. Hierfür werden die Modellvariablen zunächst in das Lagrange-Bild überführt, ehe eine zeitliche Fourier-Transformation und ein Frequenzfilter angewendet werden, um das Schwerewellensignal zu isolieren. Eine ausführliche Erklärung der durchzuführenden Arbeitsschritte inklusive der entsprechenden Annahmen befindet sich in Abschnitt 6.2. Ein Überblick über weitere Gleichgewichtskonzepte sowie deren Eignung zur quantitativen Bestimmung des Ungleichgewichtsanteils in einer feuchten baroklinen Welle ist in der kürzlich erschienenen Studie von Mirzaei et al. (2017) dargestellt.

Nachfolgend werden die beiden unterschiedlichen Verfahren näher erläutert, die in unserer Studie zur Extraktion der Ungleichgewichtsanteile eingesetzt werden. Im daran anschließenden Kapitel werden die Ergebnisse beider Methoden gegenübergestellt und einer qualitativen und quantitativen Analyse unterworfen. Abschließend werden die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften des beobachteten Schwerewellensignals nochmals genauer untersucht, indem die Ergebnisse einer Frequenz-Wellenzahl Analyse diskutiert werden.

6.1 Balancierte Strömungen verschiedener Ordnung in der Rossbyzahl

Ausgangspunkt zur Herleitung der Gleichgewichtsbeziehungen der führenden und der nächsthöheren Ordnung in der Rossbyzahl bildet das nicht-hydrostatische Boussinesq Gleichungssystem (4.11)–(4.14) mit den in Abschnitt 2.3 beschriebenen Randbedingungen. Zu

beachten ist, dass für das doppelperiodische Modellsystem formal ein Antriebsterm F_B in die rechte Seite der Auftriebsgleichung (4.13) einzufügen ist und dass die Reibung und die Wärmeleitung der Einfachheit halber in den anschließenden Betrachtungen vernachlässigt werden. Die nachfolgenden Ausführungen basieren auf den Arbeiten von Dritschel & Viúdez (2003) und McKiver & Dritschel (2008).

Aufgrund der Divergenzfreiheit der Strömung (siehe Gleichung (4.14)) werden nur drei unabhängige Variablen zur vollständigen Beschreibung der Dynamik der Systeme benötigt. Zwei dieser Variablen sind die Horizontalkomponenten der dimensionslosen ageostrophischen Vorticity, die den Ungleichgewichtsanteil der Strömung beinhalten

$$\mathcal{A} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{f} + \frac{\nabla B}{f^2}, \quad (6.2)$$

mit der totalen Vorticity $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$. Wie weiter unten noch deutlich wird, verschwindet \mathcal{A}_h in führender Ordnung, enthält aber balancierte Beiträge der nächsthöheren Ordnung in Ro . Die zeitliche Entwicklung von \mathcal{A}_h ist durch die horizontale ageostrophische Vorticitygleichung gegeben (Herleitung in Dritschel & Viúdez, 2003))

$$\frac{D\mathcal{A}_h}{Dt} = -f\mathbf{e}_z \times \mathcal{A}_h + (1 - c^2) \nabla_h w + \frac{1}{f}(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{f^2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla B, \quad (6.3)$$

mit $c = N/f$. Die Zeitentwicklung des Gleichgewichtsanteils der Strömung wird durch die Erhaltungsgleichung der dimensionslosen, nichtlinearen PV beschrieben und bildet die dritte prognostische Gleichung

$$\frac{D\varpi}{Dt} = 0, \quad (6.4)$$

mit

$$\varpi = \frac{\zeta}{f} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla B}{fN^2}. \quad (6.5)$$

Um die ursprünglichen Variablen (\mathbf{v}, B) zu erhalten, wird zunächst ein Vektorpotential $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi, \psi, \phi)^T$ definiert mit

$$\mathcal{A} = \nabla^2 \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.6)$$

Durch Anwendung der Divergenz und der Rotation auf Gleichung (6.2) unter Einbezug der Definition (6.6) bekommen wir

$$\nabla^2 B = \nabla^2 f^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (6.7)$$

und

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla^2 f \nabla \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.8)$$

Wird nun der inverse Laplace-Operator ∇^{-2} von links auf die beiden Gleichungen angewandt, so folgt

$$B = f^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (6.9)$$

und

$$\mathbf{v} = -f\nabla \times \boldsymbol{\varphi}. \quad (6.10)$$

Hierbei ist es wichtig anzumerken, dass der letzte Schritt eine geeignete Wahl der Randbedingungen der Modellsysteme voraussetzt. In der Arbeit von McKiver & Dritschel (2008) ist diese Vorgehensweise unkritisch, da die Untersuchungen in einer dreifachperiodischen Modellkonfiguration vorgenommen werden. In unserer Arbeit jedoch ist die Verwendung der Definitionen (6.9) und (6.10) angesichts der nichttrivialen Randbedingungen streng genommen nicht gültig. Nichtsdestotrotz verzichten wir im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf einen mathematisch konsistenten Formalismus, was aufgrund der später gezeigten Resultate durchaus gerechtfertigt ist.

Die horizontalen Komponenten von $\boldsymbol{\varphi}$ werden bestimmt durch

$$\boldsymbol{\varphi}_h = \nabla^{-2} \mathcal{A}_h, \quad (6.11)$$

während die Vertikalkomponente aus einer doppelten Monge-Ampère Gleichung folgt

$$\nabla_{qq}^2 \phi = \varpi + (1 - c^{-2}) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - c^{-2} \mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}), \quad (6.12)$$

mit $\Theta = \nabla_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_h$ und

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{\varphi}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}) \cdot [\nabla^2 \boldsymbol{\varphi} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi})]. \quad (6.13)$$

Die umformulierte Form der prognostischen Gleichungen wird nun verwendet, um Gleichgewichtsbeziehungen verschiedener Ordnung abzuleiten. Es handelt sich hierbei um eine diagnostische Analyse, weswegen eine zeitliche Integration der Gleichungen nicht erforderlich ist. Zunächst werden alle relevanten Felder einer Rossbyzahl Zerlegung unterzogen, ähnlich wie in Gleichung (6.1). Anschließend führen wir eine quasigeostrophische Skalierung ein, die auf der PV basierenden Rossbyzahl $\epsilon \equiv |\varpi|_{\max}$ beruht. Die charakteristischen Längen- und Zeitskalen sind

$$x, y \sim L, \quad z \sim H, \quad t \sim (\epsilon f)^{-1}, \quad H/L \sim f/N \equiv c^{-1}. \quad (6.14)$$

Zudem werden die Annahmen $H/L = \mathcal{O}(1)$ und $f/N = \mathcal{O}(1)$ getroffen, was für unsere Modellsysteme unproblematisch ist. Damit finden wir

$$\mathbf{u} \sim \epsilon f L, \quad w \sim \epsilon^2 f L / c, \quad B \sim \epsilon N f L. \quad (6.15)$$

Überdies wird auch das Vektorpotential $\boldsymbol{\varphi}$ zerlegt in

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.16)$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}_1 = \mathcal{O}(\epsilon)$ und $\boldsymbol{\varphi}_2 = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Setzen wir die Zerlegungen in die umformulierten Gleichungen ein, bekommen wir Gleichgewichtsbeziehungen verschiedener Ordnung in ϵ .

6.1.1 Gleichgewichtsbeziehungen führender Ordnung

Da angenommen wird, dass die führende Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ der Strömung die thermischen Windbeziehungen erfüllt

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} = -\frac{1}{f} \nabla \times B_1 \mathbf{e}_z, \quad (6.17)$$

ergibt sich mit $w_1 = 0$ für die führende Ordnung in \mathcal{A}_h (siehe Gleichung (6.2))

$$\mathcal{A}_{h1} = 0. \quad (6.18)$$

Dementsprechend fordern wir, dass auch die führende Ordnung der horizontalen Vektorkomponenten $\varphi_1 = \psi_1 = 0$ (siehe Gleichung (6.11)) verschwindet. Aus der führenden Ordnung der Monge-Ampère Gleichung (6.12) ergeben sich damit die bekannten quasi-geostrophischen Gleichungen

$$\nabla_{qg}^2 \phi_1 = \varpi, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{u}_1 = -f \nabla \times \varphi_1 = -f \nabla \times \phi_1 \mathbf{e}_z, \quad (6.20)$$

$$w_1 = 0, \quad (6.21)$$

$$B_1 = f^2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \quad (6.22)$$

Wie bereits in Abschnitt 4.2.1 erläutert, ist die Wahl der Randbedingungen zum Lösen dieser Gleichungen von zentraler Bedeutung. Die dort definierten vertikalen und radialen (Annulus) Randbedingungen für den balancierten Druck p_b werden auch für die nachfolgenden Berechnungen eingesetzt, mit der Äquivalenz $\phi_1 = p_b/f^2$. Die Wahl dieser Randbedingungen gewährleistet zwar, dass die Azimutalgeschwindigkeit $u_1 = f(\partial\phi_1/\partial r)$ an den radialen Wänden der Annuluskonfiguration verschwindet. Allerdings wird die Forderung einer verschwindenden Normalgeschwindigkeit $v_1 = -f/r(\partial\phi_1/\partial\vartheta)$ an den Wänden nicht befriedigt, wengleich v_1 beziehungsweise v_b nahezu keine Signale an den Wänden aufweist (nicht gezeigt). Dennoch wird in dieser Arbeit ein weiterer, alternativer Ansatz getestet, der vor allem in der Ozeanographie Anwendung findet und die Bedingung $v_1|_{r=a,b} = 0$ explizit erfüllt (siehe zum Beispiel Chouksey, 2017)). Hierzu führen wir die Stromfunktion $\hat{\psi} = f\hat{\phi}_1$ ein, wobei aufgrund der sich unterscheidenden Randbedingungen im Allgemeinen $\hat{\phi}_1 \neq \phi_1$ gilt. Zur Bestimmung der gesuchten Funktion $\hat{\psi}$ führen wir die Zerlegung

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_0(\mathbf{r}) + \mu_0(z) + \hat{\psi}_1(r)\mu_1(z), \quad (6.23)$$

ein, wobei $\nabla_h^2 \hat{\psi}_1 = 0$ und $\hat{\psi}_0|_{r=a,b} = 0$. Die Funktionswerte von $\hat{\psi}_1(r)$ sind an der inneren und äußeren Zylinderwand vorgegeben

$$\hat{\psi}_1(r) = \begin{cases} 0, & r = a \\ 1, & r = b. \end{cases} \quad (6.24)$$

Da der Funktionsverlauf im Inneren des Modellgebiets frei wählbar ist, verwenden wir der Einfachheit halber das lineare Profil

$$\hat{\psi}_1 = \frac{1}{b-a}r + \frac{a}{a-b}. \quad (6.25)$$

Damit hat die betrachtete Stromfunktion nur eine vertikale Abhängigkeit an den radialen Begrenzungen

$$\hat{\psi}|_{r=a} = \mu_0(z), \quad (6.26)$$

$$\hat{\psi}|_{r=b} = \mu_0(z) + \mu_1(z), \quad (6.27)$$

und die Bedingung $v_1|_{r=a,b} = 0$ ist erfüllt. Demgegenüber ist der radiale Gradient von $\hat{\psi}$ an den Zylinderwänden im Allgemeinen ungleich null, wodurch die Azimutalgeschwindigkeit nicht verschwindet. Intuitiv erscheint diese Wahl der Randbedingungen plausibler zu sein als die oben beschriebene Forderung nach verschwindenden Azimutalgeschwindigkeiten an den Zylinderwänden. Denn die Normalgeschwindigkeit sollte an den undurchdringbaren Zylinderwänden stets verschwinden, während für die Azimutalgeschwindigkeit auch free-slip Bedingungen ($\partial u_1/\partial r|_{r=a,b} = 0$, $u_1|_{r=a,b} \neq 0$) denkbar wären. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse beider Ansätze ist in Abschnitt 6.3.1 zu finden.

Die Berechnung der einzelnen Terme, die in Anhang G ausgeführt wird, führt zu

$$\mu_1(z) = \frac{3A}{2\pi} \left\langle \frac{u}{r} \right\rangle, \quad (6.28)$$

$$\nabla_h^2 \hat{\psi}_0 + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\hat{\psi}_0 - \langle \hat{\psi}_0 \rangle \right) = q - \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \left(\hat{\psi}_1 - \langle \hat{\psi}_1 \rangle \right), \quad (6.29)$$

$$\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} = \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_0 \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_1 \rangle. \quad (6.30)$$

Darin bezeichnet $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{A} \int_A \cdot dA$ die Mittelung über eine horizontale Querschnittsfläche der Annuluskonfiguration und

$$q = \zeta + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (6.31)$$

ist die lineare, quasigeostrophische PV. Zur Lösung des Gleichungssystems (6.29)–(6.30) sind Kenntnisse über den rein vertikal abhängigen Mittelwert $\langle \hat{\psi}_0 \rangle$ erforderlich. Da $\langle \hat{\psi}_0 \rangle$ allerdings keiner Bestimmungsgleichung genügt, handelt es sich um einen frei wählbaren Parameter. Um konsistent mit der Bedingung $\hat{\psi}_0|_{r=a,b} = 0$ zu sein, setzen wir

$$\langle \hat{\psi}_0 \rangle = 0, \quad (6.32)$$

im gesamten Modellgebiet. Dieser Schritt hat keinen Einfluss auf die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten, die sich ausschließlich aus horizontalen Ableitungen der vollen Stromfunktion $\hat{\psi}_1$ ergeben (vergleiche Gleichung (6.33)). Welche Auswirkung die Forderung (6.32) allerdings auf das Auftriebsfeld hat (vergleiche Gleichung (6.35)), bleibt offen.

Die führende Ordnung der Modellvariablen ergibt sich aus der Stromfunktion $\hat{\psi}$ wie folgt

$$\tilde{\mathbf{u}}_1 = -\nabla \times \hat{\psi} \mathbf{e}_z, \quad (6.33)$$

$$\tilde{w}_1 = 0, \quad (6.34)$$

$$\tilde{B}_1 = f \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}. \quad (6.35)$$

Auch die Lösung des Gleichungssystems (6.28)–(6.30) erfordert die Definition von Randbedingungen. Für den vertikal abhängigen Term $\mu_1(z)$ erhalten wir

$$\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \int_A dA \frac{1}{r} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (6.36)$$

$$\left. \frac{\partial \mu_1}{\partial z} \right|_{z=d} = 0, \quad (6.37)$$

wobei von den Randbedingungen des nichtlinearen Modells (vergleiche Kapitel 2.3) Gebrauch gemacht wurde. Für $\mu_0(z)$ verwenden wir

$$\left. \frac{\partial \mu_0}{\partial z} \right|_{z=0,d} = 0, \quad (6.38)$$

und für $\hat{\psi}_0$

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{B}{f} \right|_{z=0} - \hat{\psi}_1 \left. \frac{\partial \mu_1}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (6.39)$$

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial z} \right|_{z=d} = \left. \frac{B}{f} \right|_{z=d}. \quad (6.40)$$

Auch die Wahl der Randbedingungen (6.38)–(6.40) erlaubt wiederum eine gewisse Wahlfreiheit. Es muss allerdings gewährleistet sein, dass die volle Stromfunktion $\hat{\psi}$ hydrostatische Bedingungen an den vertikalen Begrenzungen aufweist

$$\left. \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \right|_{z=0,d} = \frac{1}{f} B|_{z=0,d}. \quad (6.41)$$

6.1.2 Gleichgewichtsbeziehungen nächsthöherer Ordnung

Um die nächsthöhere Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ zu erhalten, betrachten wir die horizontale Vorticitygleichung (6.3) und setzen die in Abschnitt 6.1 eingeführten Skalenabschätzungen ein. Es ergibt sich für die einzelnen Terme

$$\frac{D\mathcal{A}_h}{Dt} \sim \mathcal{O}(\epsilon^3), \quad (6.42)$$

$$-f\mathbf{e}_z \times \mathcal{A}_h \sim \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.43)$$

$$(1 - c^2) \nabla_h w \sim \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.44)$$

$$\frac{1}{f} (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \sim \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (6.45)$$

$$-\frac{1}{f^2} (\nabla_h \mathbf{u}) \cdot \nabla B \sim \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (6.46)$$

Insgesamt bekommen wir damit in der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ die beiden Gleichungen

$$0 = -f\mathbf{e}_z \times \mathcal{A}_{h2} + (1 - c^2) \nabla_h w_2 + \frac{1}{f} (\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_1 - \frac{1}{f^2} \nabla_h \mathbf{u}_1 \cdot \nabla B_1, \quad (6.47)$$

mit $\mathcal{A}_{h2} = \boldsymbol{\omega}_2/f + \nabla B_2/f^2$ und $\boldsymbol{\omega}_i = \nabla \times \mathbf{v}_i$ mit $i = 1, 2$. Da die Zeitableitung keinen Beitrag zur Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ liefert, wird aus der ursprünglich prognostischen Gleichung für \mathcal{A}_h eine diagnostische Gleichung für \mathcal{A}_{h2} . Dies ist gleichbedeutend mit der Eliminierung des Schwerewellensignals in $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Zur Bestimmung der drei Variablen in $\boldsymbol{\varphi}_2$ wird eine weitere Gleichung benötigt. Hierzu folgen wir McKiver & Dritschel (2008) und fordern, dass der lineare Anteil der PV in der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ verschwindet

$$\frac{\zeta_2}{f} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial B_2}{\partial z} = 0. \quad (6.48)$$

Dieser Schritt ist allerdings mit einer gewissen Vorsicht zu genießen, da die Forderung (6.48) inkonsistent mit dem Ausführungen von Muraki et al. (1999) ist. Wie aus der dortigen Analyse hervorgeht, ist die linke Seite von Gleichung (6.48) im Allgemeinen ungleich null.

Als nächstes drücken wir die Gleichungen (6.47) und (6.48) mit dem Vektorpotential $\boldsymbol{\varphi}$ aus und vermessen die jeweiligen Größen in der kartesischen und in der Zylindergeometrie. Die in Anhang H dargestellte Herleitung ergibt für das Vektorpotential in der kartesischen Geometrie (hochgestellter Index k für die kartesische Geometrie)

$$\boldsymbol{\varphi}_2^k = \varphi_2^k \mathbf{e}_x + \psi_2^k \mathbf{e}_y + \phi_2^k \mathbf{e}_z, \quad (6.49)$$

die folgende Bestimmungsgleichung

$$c^2 \nabla_{qq}^2 \boldsymbol{\varphi}_2^k + (1 - c^2) \nabla \Theta_2^k = \mathbf{L}^k, \quad (6.50)$$

mit $\Theta_2^k = \nabla_h \cdot \boldsymbol{\varphi}_{h2}^k$, $\mathbf{L}^k = L_x \mathbf{e}_x + L_y \mathbf{e}_y + L_z \mathbf{e}_z$ und

$$L_x = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial y^2} \right), \quad (6.51)$$

$$L_y = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial y} \right), \quad (6.52)$$

$$L_z = 0. \quad (6.53)$$

Hierbei ist der quasigeostrophische Laplace-Operator und der (horizontale) Nabla-Operator in kartesischer Geometrie zu verwenden.

In analoger Weise ist die Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential in der Zylindergeometrie (hochgestellter Index z für die Zylindergeometrie)

$$\boldsymbol{\varphi}_2^z = \varphi_2^z \mathbf{e}_r + \psi_2^z \mathbf{e}_\vartheta + \phi_2^z \mathbf{e}_z, \quad (6.54)$$

gegeben als

$$c^2 \tilde{\nabla}_{qq}^2 \boldsymbol{\varphi}_2^z + (1 - c^2) \nabla \Theta_2^z = \mathbf{L}^z, \quad (6.55)$$

wobei wir hier den vektoriellen quasigeostrophischen Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten eingeführt haben

$$\tilde{\nabla}_{qq}^2 \boldsymbol{\varphi}_2^z = \left(\nabla_{qq}^2 \varphi_2^z - \frac{\varphi_2^z}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_2^z}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_r + \left(\nabla_{qq}^2 \psi_2^z - \frac{\psi_2^z}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_2^z}{\partial \vartheta z} \right) \mathbf{e}_\vartheta + \nabla_{qq}^2 \phi_2^z \mathbf{e}_z, \quad (6.56)$$

für dessen Anwendung sowie für die Berechnung von $\Theta_2^z = \nabla_h \cdot \varphi_{h2}^z$ die jeweiligen Operatoren in der Zylindergeometrie zu benutzen sind. Die Komponenten des Vektors $L^z = L_r e_r + L_\vartheta e_\vartheta + L_z e_z$ lassen sich schreiben als

$$L_r = 2 \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial \vartheta} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial \vartheta \partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial \vartheta^2} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi_1^z}{\partial \vartheta} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial \vartheta \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1^z}{\partial r} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial z} \right], \quad (6.57)$$

$$L_\vartheta = 2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial z} \frac{\partial \phi_1^z}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial z} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_1^z}{\partial \vartheta \partial z} \right], \quad (6.58)$$

$$L_z = 0. \quad (6.59)$$

Wie aus den Gleichungssystemen (6.50) beziehungsweise (6.55) hervorgeht, besteht die rechte Seite der Gleichungen ausschließlich aus Termen der führenden Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$. Nachdem diese, wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben, bestimmt wurden, erfolgt die Berechnung der nächsthöheren Ordnung. Abschließend können die ursprünglichen Variablen der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ unter Berücksichtigung der Modellgeometrie mit der Vorschrift

$$B_2 = f^2 \nabla \cdot \varphi_2, \quad (6.60)$$

$$\mathbf{v}_2 = -f \nabla \times \varphi_2, \quad (6.61)$$

ermittelt werden.

Erneut bedarf es einer geeigneten Wahl von Randbedingungen für φ_2^k und φ_2^z an den vertikalen und radialen (nur Annulus) Begrenzungen. Auch hier ist eine gewisse Willkür geboten, da nicht alle Bedingungen, wie zum Beispiel das Verschwinden aller Geschwindigkeitskomponenten \mathbf{v}_2 an den festen Rändern, gleichzeitig befriedigt werden können. Nach ausgiebigen Testrechnungen stellte sich die folgende Wahl der Randbedingungen als am geeignetsten heraus. In vertikaler Richtung setzen wir

$$\left. \frac{\partial \phi_2^{k,z}}{\partial z} \right|_{z=0,d} = 0, \quad (6.62)$$

was konsistent ist mit der hydrostatischen Bedingung (4.45). Des Weiteren fordern wir, dass die Vertikalgeschwindigkeit w_2 am Boden und an den Modelloberflächen verschwindet. Das führt zu

$$\varphi_2^{k,z}|_{z=0,d} = \psi_2^{k,z}|_{z=0,d} = 0. \quad (6.63)$$

Es verbleibt die Definition der radialen Randbedingungen in der Annuluskonfiguration. Hier stellt sich die Wahl

$$\varphi_2^z|_{r=a,b} = \psi_2^z|_{r=a,b} = \left. \frac{\partial \phi_2^z}{\partial r} \right|_{r=a,b} = 0, \quad (6.64)$$

als geeignet heraus.

Wichtig ist zu außerdem erwähnen, dass die Vertikalschwindigkeit

$$w_2 = -f (\nabla \times \varphi_2) \cdot e_z, \quad (6.65)$$

mit dem aus der Omegagleichung (4.71) stammenden balancierten Vertikalwind w_{bal} übereinstimmt, sofern nur der lineare Anteil der PV in Gleichung (6.5) zur Berechnung der führenden Ordnung eingesetzt wird. Dies kann am einfachsten in der kartesischen Geometrie gezeigt werden, in der w_2 definiert ist als

$$w_2 = -f \left(\frac{\partial \psi_2^k}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2^k}{\partial y} \right). \quad (6.66)$$

Betrachten wir die beiden horizontalen Komponenten von Gleichung (6.50)

$$c^2 \nabla_{qg}^2 \varphi^k + (1 - c^2) \frac{\partial \Theta_2^k}{\partial x} = L_x, \quad (6.67)$$

$$c^2 \nabla_{qg}^2 \psi^k + (1 - c^2) \frac{\partial \Theta_2^k}{\partial y} = L_y, \quad (6.68)$$

und berechnen $\partial(6.68)/\partial x - \partial(6.67)/\partial y$, so erhalten wir mit der Definition (6.66)

$$\begin{aligned} \nabla_{qg}^2 w_2 &= -\frac{f^3}{N^2} \left(\frac{\partial L_y}{\partial x} - \frac{\partial L_x}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{2}{N^2} \left(\frac{\partial(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_y)}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{2}{N^2} \nabla_h \cdot \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (6.69)$$

wobei vom geostrophischen und hydrostatischen Gleichgewicht, (6.20) und (6.22), Gebrauch gemacht wurde.

6.2 Lagrange'sche Filtermethode

Ziel des Lagrange'schen Filterverfahrens ist die Extraktion des Schwerewellensignals aus der vollen Strömung. Im Gegensatz zu den im vorherigen Abschnitt vorgestellten Gleichgewichtsbedingungen, beruht diese Methodik nicht auf einer dimensionslosen Kennzahl wie die Rossbyzahl. Vielmehr wird von der Dispersionsrelation linearer Schwerewellen (siehe Gleichung (2.12)) Gebrauch gemacht, die besagt, dass Schwerewellen intrinsische Frequenzen zwischen $f \leq \hat{\omega} \leq N$ aufweisen. Ausgangspunkt der Analyse ist eine zeitlich hoch aufgelöste Zeitreihe der Modellvariablen. Die Verfahrensweise, die aus der Arbeit von Shakespeare & Hogg (2017) übernommen wurde, umfasst die folgenden Schritte:

1. Einlesen der hoch aufgelösten Zeitreihen der gewünschten Modellvariablen für ein ausgewähltes Höhengniveau.
2. An jedem Gitterpunkt wird zum Startzeitpunkt $t = t_0$ ein Flüssigkeitselement initialisiert. Anschließend werden die zeitabhängigen Trajektorien berechnet, die jedes einzelne Flüssigkeitselement in der lokalen Strömung zurücklegt. Zur zeitlichen Integration der Trajektorien wird eine Runge-Kutta Methode zweiter Ordnung eingesetzt. Der Einfachheit halber wird die Vertikalbewegung der Teilchen vernachlässigt. Wie in Nagai et al. (2015) und Shakespeare & Hogg (2017) gezeigt wird, ist diese

Vereinfachung unkritisch, da die Dopplerverschiebung durch die Vertikalgeschwindigkeit im Allgemeinen deutlich geringer ausfällt als die horizontale Verschiebung. Zur Bestätigung dieser Annahme haben wir Beispielrechnungen durchgeführt, die eine vertikale Auslenkung der Flüssigkeitsteilchen zulassen. Wie erwartet unterscheiden sich die Ergebnisse nur marginal von den Analysen, die sich auf rein horizontale Bewegungen beschränken.

3. Interpolation der Modellvariablen vom regelmäßig angeordneten Gitter auf die Trajektorien der Flüssigkeitselemente. Als Resultat erhalten wir die Modellvariablen im Lagrange-Bild.
4. Subtraktion eines linearen zeitlichen Gradienten von den Feldern, um die Periodizität der Zeitreihen zu gewährleisten. Anschließend erfolgt eine zeitliche Fourier-Transformation und die Anwendung eines Frequenzfilters. Hierbei werden alle Frequenzen, die größer sind als $0,9f$, als Schwerewellen identifiziert. Der Schwellenwert von $0,9f$ stellt dabei sicher, dass auch Signale, die Frequenzen nahe der Trägheitsfrequenz f aufweisen, zum Schwerewellensignal beitragen. Danach wird eine inverse zeitliche Fourier-Transformation durchgeführt, wodurch wir das Wellensignal entlang der Trajektorien erhalten.
5. Abschließend werden die Wellenfelder zurück auf das reguläre Gitter interpoliert. Die Differenz zwischen der totalen Strömung und dem erhaltenen Schwerewellensignal definiert den balancierten Strömungsanteil.

Zu beachten ist, dass durch die Anwendung des Frequenzfilters bei der zeitlichen Fourier-Transformation sogenannte Ringing-Effekte auftreten (Gibbs'sches Phänomen), wodurch die Anfangs- und Endpunkte der gefilterten Zeitreihe Störsignale aufweisen. Um dieser Problematik entgegen zu treten, befinden sich die zu analysierenden Felder in den mittleren 60% der Zeitreihe.

Die Analyse wird sowohl im doppelperiodischen Modellsystem als auch in der Annuluskonfiguration in einer kartesischen Geometrie vorgenommen. Daher werden die zu untersuchenden Felder im Annulus nach dem Einlesen zunächst vom zylindrischen Koordinatensystem mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_z = (r, \vartheta, z)$ auf ein reguläres, linkshändiges kartesisches Koordinatensystem mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}_k = (y, x, z)$ interpoliert. Es gelten die folgenden Transformationsvorschriften für die räumlichen Koordinaten

$$x = r \cos \vartheta, \quad (6.70)$$

$$y = r \sin \vartheta, \quad (6.71)$$

$$z = z. \quad (6.72)$$

Die Geschwindigkeiten transformieren sich wie folgt

$$\frac{d\mathbf{r}_k}{dt} = \begin{pmatrix} v_k \\ u_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \sin \vartheta + r \frac{d\vartheta}{dt} \cos \vartheta \\ \frac{dr}{dt} \cos \vartheta - r \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \sin \vartheta + u \cos \vartheta \\ v \cos \vartheta - u \sin \vartheta \\ w \end{pmatrix}. \quad (6.73)$$

Um die Referenzierung in den folgenden Abschnitten zu erleichtern, erhalten die nach dieser Methodik gewonnenen Wellenfelder den tiefgestellten Index f , wohingegen die

verbleibende Strömung durch den Index m gekennzeichnet ist. Zum Beispiel gilt für die Azimutalgeschwindigkeit u in der Annuluskonfiguration

$$u = u_f + u_m. \quad (6.74)$$

6.3 Vergleich der Ungleichgewichte

Nach der vorangegangenen theoretischen Vorstellung der Verfahren zur Extraktion des Schwerewellensignals werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse der Analyse präsentiert und einer vergleichenden Diskussion unterworfen. Dabei wird einerseits eine qualitative Gegenüberstellung der Gleichgewichtsverfahren verschiedener Ordnung und der Lagrang'schen Filtermethode durchgeführt, indem horizontale Querschnitte ausgewählter Felder gezeigt werden. Wir beschränken uns dabei auf die Felder der Azimutal- beziehungsweise Zonalgeschwindigkeit u und der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ . Die zusätzliche Betrachtung der verbleibenden Felder würde zu keinen weiteren qualitativen Erkenntnissen führen. Andererseits erfolgt eine mehr quantitativ orientierte Auswertung, in der die prozentualen Anteile der diagnostizierten Ungleichgewichte verglichen werden (siehe McKiver & Dritschel, 2008). Hierzu bilden wir das Verhältnis der quadratischen Mittel von Ungleichgewichtanteil zu vollem Feld. Beispielsweise lautet das prozentuale Ungleichgewicht für die Azimutalgeschwindigkeit u in führender Ordnung

$$\%u_1 = 100 \frac{\|u - u_1\|_{QM}}{\|u\|_{QM}}, \quad (6.75)$$

in der nächsthöheren Ordnung

$$\%u_2 = 100 \frac{\|u - u_1 - u_2\|_{QM}}{\|u\|_{QM}}, \quad (6.76)$$

und auf Basis der Lagrang'schen Filtermethode

$$\%u_f = 100 \frac{\|u_f\|_{QM}}{\|u\|_{QM}}. \quad (6.77)$$

Hierbei ist $\|x\|_{QM} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i^N x_i^2}$, wobei N die betrachtete Anzahl an Gitterpunkten und x ein beliebiges Feld darstellt. Nehmen wir an, dass die betrachtete Strömung sowohl balancierte als auch unbalancierte Anteile enthalte, wobei in diesem Fall letzterer ausschließlich aus dem Schwerewellensignal bestehe. Dann wird die Genauigkeit der einzelnen Gleichgewichtsverfahren darin gemessen, inwieweit der balancierte Anteil aus der gesamten Strömung extrahiert werden kann. Folglich gilt in der vorliegenden Arbeit: Je kleiner der prozentuale Wert des Ungleichgewichts, desto besser das vorliegende Gleichgewichtskonzept. Eine solcher Standpunkt ist sicherlich nicht unumstritten, da atmosphärische Strömungsmuster im Allgemeinen sehr komplex sind und eine stetige Wechselwirkung beider Strömungsanteile erfolgt. Zudem zeigen die bereits erwähnten theoretischen Betrachtungen von Vanneste (2013), dass kein exakter invarianter Gleichgewichtszustand existiert. Nichtsdestotrotz werden die prozentualen Ungleichgewichte als ein hilfreicher Indikator der Gleichgewichtsverfahren angesehen und daher auch in der folgenden Auswertung

eingesetzt. Die quantitativen Kennzahlen werden für alle Modellvariablen gezeigt und es werden sowohl 2D- als auch 3D-Feldverteilungen begutachtet.

Im Zuge der Untersuchungen hat sich herausgestellt, dass die Übereinstimmung der balancierten Felder mit der vollen Strömung in beiden Modellkonfigurationen deutlich höher ausfällt, wenn nur der lineare Anteil

$$\varpi_{lin} = \frac{\zeta}{f} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (6.78)$$

in der nichtlinearen PV (siehe Gleichung (6.5)) in den Berechnungen verwendet wird. Diese Erkenntnis steht im Gegensatz zu der Studie von McKiver & Dritschel (2008), in der die Benutzung der totalen, nichtlinearen PV zu deutlich besseren Ergebnissen führt. Ein wesentlicher Unterschied zu der vorliegenden Arbeit ist allerdings, dass McKiver & Dritschel (2008) der Einfachheit halber ein dreifachperiodisches Modellsystem für ihre Untersuchungen betrachten. Unsere Modellsysteme weisen jedoch feste Begrenzungen auf, an denen wir sehr hohe nichtlineare Beiträge zur PV beobachten. Daher ist es recht wahrscheinlich, dass diese Werte beim Lösen der entsprechenden Gleichungen (vergleiche Abschnitt 6.1) zu einer Verschlechterung der Ergebnisse führen. Als Konsequenz der Vernachlässigung des nichtlinearen Anteils der PV folgt, dass, wie am Ende von Abschnitt 6.1.2 gezeigt, die Vertikalgeschwindigkeit w_2 mit w_{bal} aus der Omegagleichung (4.71) übereinstimmt. Daher liefert die folgende Analyse keine neuen Erkenntnisse bezüglich der balancierten Vertikalbewegungen und der daraus resultierenden balancierten horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz. Nichtsdestotrotz werden der Vollständigkeit halber auch die balancierten Signale w_2 und δ_2 der Analyse unterworfen. Auf die Bestimmung der anderen nächsthöheren Terme u_2, v_2, B_2 wurde in den vorangegangenen Kapiteln allerdings noch nicht eingegangen.

6.3.1 Annuluskonfiguration

Die oben eingeführten Diagnoseverfahren werden in der Annuluskonfiguration exemplarisch zum Zeitpunkt $t = 20$ s angewendet (vergleiche Abschnitt 3.2.1). Als Datengrundlage zur Anwendung der Lagrange'schen Filtermethode dient eine Zeitreihe von 100 s mit einer zeitlichen Auflösung von $dt = 0,08$ s. Damit ergibt sich eine Frequenzauflösung von $\Delta\hat{\omega} = 2\pi/100$ s = $0,4f$ und die maximal auflösbare Frequenz ist $\hat{\omega}_{max} = \pi/dt = 245,4f$. Signale mit solch hohen Frequenzen werden zwar nicht beobachtet, jedoch ist der recht kleine Wert von dt damit begründet, dass die Trajektorien der Flüssigkeitselemente damit möglichst exakt berechnet werden können. Die Analyse wurde auch mit längeren Zeitreihen durchgeführt, allerdings gab es keine signifikanten Änderungen der Ergebnisse. Bevor die Resultate der verschiedenen Gleichgewichtsverfahren gegenübergestellt werden, lohnt es sich ein Blick auf den Absolutbetrag der linearen PV $|\varpi_{lin}|$ (siehe Definition (6.78)) zu werfen. Denn die Herleitungen der Gleichgewichtsbeziehungen in Kapitel 6.1 gelten streng genommen nur unter der Annahme kleiner Rossbyzahlen ($|\varpi_{lin}| < 1$). Abbildung 6.1 zeigt einen horizontalen Querschnitt von $|\varpi_{lin}|$ bei $z = 3$ cm. Wie draus zu erkennen ist, ist das Feld über weite Strecken durch sehr kleine Werte ($|\varpi_{lin}| \ll 1$) geprägt. Allerdings befindet sich ein ausgeprägtes Maximum ($|\varpi_{lin}| > 2$) in der Modellmitte (Druckminimum) sowie ein weiteres, isoliertes Maximum an Stelle der kleinskaligen Wirbelstruktur (vergleiche

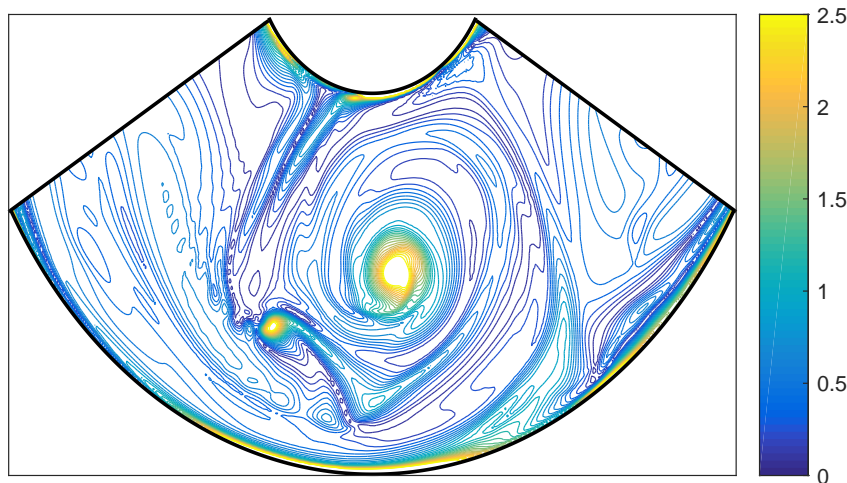


Abbildung 6.1: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) des Absolutbetrags der dimensionslosen, linearen PV $|\varpi_{lin}|$ in der Annuluskonfiguration zum Zeitpunkt $t = 20$ s.

Abschnitt 3.2.1) südwestlich davon. Beide Strukturen können mit der Emission der Schwebwellenwellenpakete WP1 und WP2 in Verbindung gebracht werden, die, wie in Kapitel 5.2 aufgezeigt, nachweislich im Inneren der Strömung generiert werden. Der Einfluss dieser Maxima auf die Qualität der Gleichgewichtsverfahren wird nachfolgend eruiert.

Ein Vergleich der Gleichgewichtskonzepte auf Grundlage der Azimutalgeschwindigkeit u ist in Abbildung 6.2 gegeben. Dort sind horizontale Querschnitte (bei $z = 3$ cm) der totalen Geschwindigkeit u (Abbildung 6.2a), der führenden Ordnung in der Rossbyzahlentwicklung u_1 (Abbildung 6.2c) und des Ungleichgewichts führender Ordnung $u - u_1$ (Abbildung 6.2e) dargestellt. Des Weiteren ist die nächsthöhere Ordnung u_2 (Abbildung 6.2d) und das zugehörige Ungleichgewicht $u - u_1 - u_2$ (Abbildung 6.2f) gezeigt. Der aus der Lagrang'schen Filtermethode stammende Ungleichgewichtsanteil u_f ist in Abbildung 6.2b zu finden. Es zeigt sich, dass die führende Ordnung u_1 bereits sehr gut mit der vollen Strömung u übereinstimmt. Die Amplitude des Ungleichgewichtsanteils $u - u_1$ ist mehr als eine Größenordnung kleiner als u oder u_1 selbst. Die Subtraktion der balancierten, nächsthöheren Ordnung u_2 führt zu einer weiteren Reduzierung des balancierten Anteils in $u - u_1 - u_2$, wenngleich eine ausgeprägte Dipolstruktur im Modellinneren zurückbleibt (vergleiche Abbildung 6.2f). Da in diesem Bereich recht große Rossbyzahlen ($|\varpi_{lin}| > 2$) beobachtet werden, ist es nicht auszuschließen, dass diese Struktur in gewissem Maße aus Ungenauigkeiten der dortigen Rossbyzahlzerlegung resultiert. Das Ergebnis der Lagrange'schen Filtermethode ist in Abbildung 6.2b zu sehen. In der Nähe der inneren Zylinderwand stimmen die Strukturen von u_f recht gut mit dem Ungleichgewicht der zweiten Ordnung $u - u_1 - u_2$ überein. Allerdings ist im Modellinneren eine gegensätzliche Wirbelstruktur erkennbar, die zudem deutlich größere Amplituden aufweist. Eine kleinskali- ge Dipolstruktur im Südwesten des Modellgebiets ist in beiden Feldern erkennbar. Über die Ursachen der Differenzen beider Felder im Modellinneren kann nur spekuliert werden. Ein

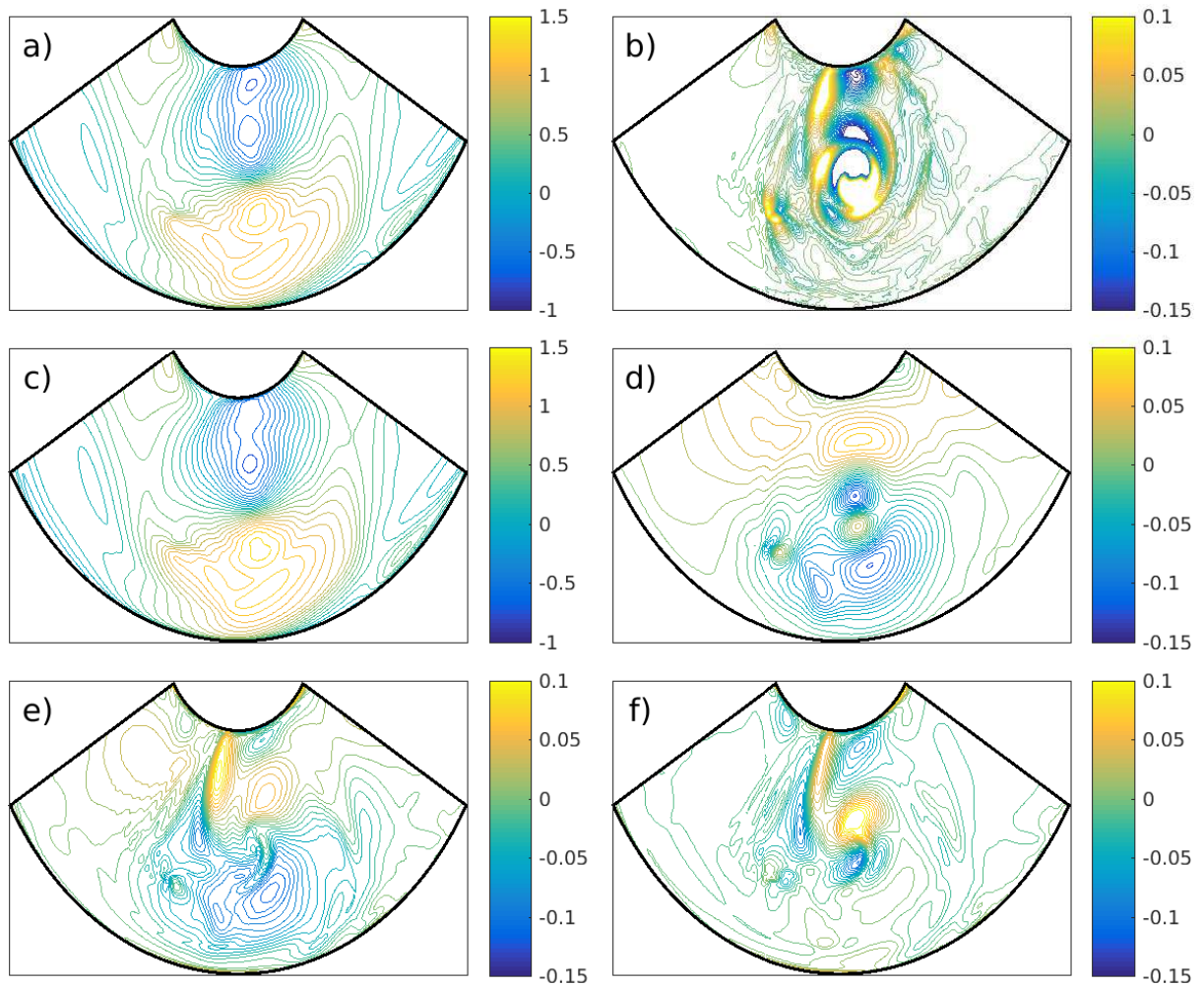


Abbildung 6.2: Vergleich verschiedener Gleichgewichtskonzepte anhand der Azimutalggeschwindigkeit u in der Annuluskonfiguration zum Zeitpunkt $t = 20$ s. Gezeigt sind horizontale Querschnitte ($z = 3$ cm) von a) totalem Feld u , b) das aus der Lagrange'schen Filtermethode stammende Wellenfeld u_f , c) führende Ordnung u_1 der Rossbyzahlentwicklung, d) nächsthöhere Ordnung u_2 , e) $u - u_1$, und f) $u - u_1 - u_2$. Die Einheit aller Felder ist cm s^{-1} .

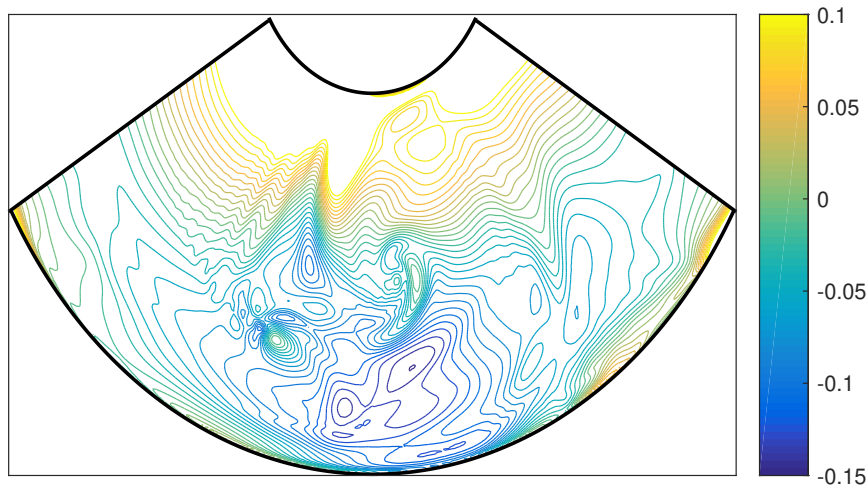


Abbildung 6.3: Wie in Abbildung 6.2c, allerdings wurde die führende Ordnung hier aus der Stromfunktion $\hat{\psi}$ berechnet ($\tilde{u}_1 = \partial\hat{\psi}/\partial r$). Die Einheit ist cm s^{-1} .

bereits erwähnter Aspekt könnte der Zusammenbruch der Rossbyzahlzerlegung in diesem Bereich sein, was eine stichhaltige Interpretation der diagnostizierten Ungleichgewichte nahezu unmöglich macht.

Analog zum Ungleichgewicht der führenden Ordnung $u - u_1$ (siehe Abbildung 6.2e) ist in Abbildung 6.3 das Ungleichgewicht gezeigt, das sich ergibt, wenn anstatt u_1 das aus der Stromfunktionzerlegung stammende Feld \tilde{u}_1 eingesetzt wird. Daraus geht deutlich hervor, dass \tilde{u}_1 unphysikalische hohe Werte an der inneren und der äußeren Zylinderwand besitzt. Demgegenüber gibt es eine fast perfekte Übereinstimmung zwischen \tilde{v}_1 , \tilde{B}_1 und v_1 , B_1 (nicht gezeigt). Demnach bestätigen die so gewonnen Erkenntnisse einmal mehr, dass die radiale Geschwindigkeit an den Zylinderwänden auch ohne die explizite Forderung $v_1|_{r=a,b} = 0$ verschwindet. Andererseits sind die Ergebnisse stark sensitiv gegenüber den Randbedingungen, welche die Azimutalgeschwindigkeit betreffen. In diesem Fall muss die Forderung $u_1|_{r=a,b} = 0$ explizit umgesetzt werden, um nicht ein unphysikalisches Verhalten nahe der Zylinderwände zu erhalten. Dementsprechend vertrauen wir weiterhin den in Abschnitt 4.2.1 eingeführten Randbedingungen zur Berechnung der Felder der führenden Ordnung.

Die Anwendung der Diagnoseverfahren auf die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz ist in Abbildung 6.4 demonstriert. Darin ist das totale Feld δ (Abbildung 6.4a), das balancierte Feld der führenden Ordnung δ_2 (Abbildung 6.4b) und deren Differenz $\delta - \delta_2$ (Abbildung 6.4c) dargestellt. Die Interpretation dieser Felder wurde bereits in Kapitel 5.1.1 vorgenommen. Das gefilterte Feld δ_f aus der Lagrange Methode ist in Abbildung 6.4d dargestellt, während das zugehörige balancierte Feld $\delta_m = \delta - \delta_f$ in Abbildung 6.4e veranschaulicht ist. Bei genauerer Betrachtung fallen marginale Unterschiede zwischen den beiden Feldern δ_{bal} und δ_2 auf. Diese sind auf die Verwendung der Fensterfunktion zurückzuführen, die vor dem Lösen der Omegagleichung (vergleiche (4.71)) auf die rechte

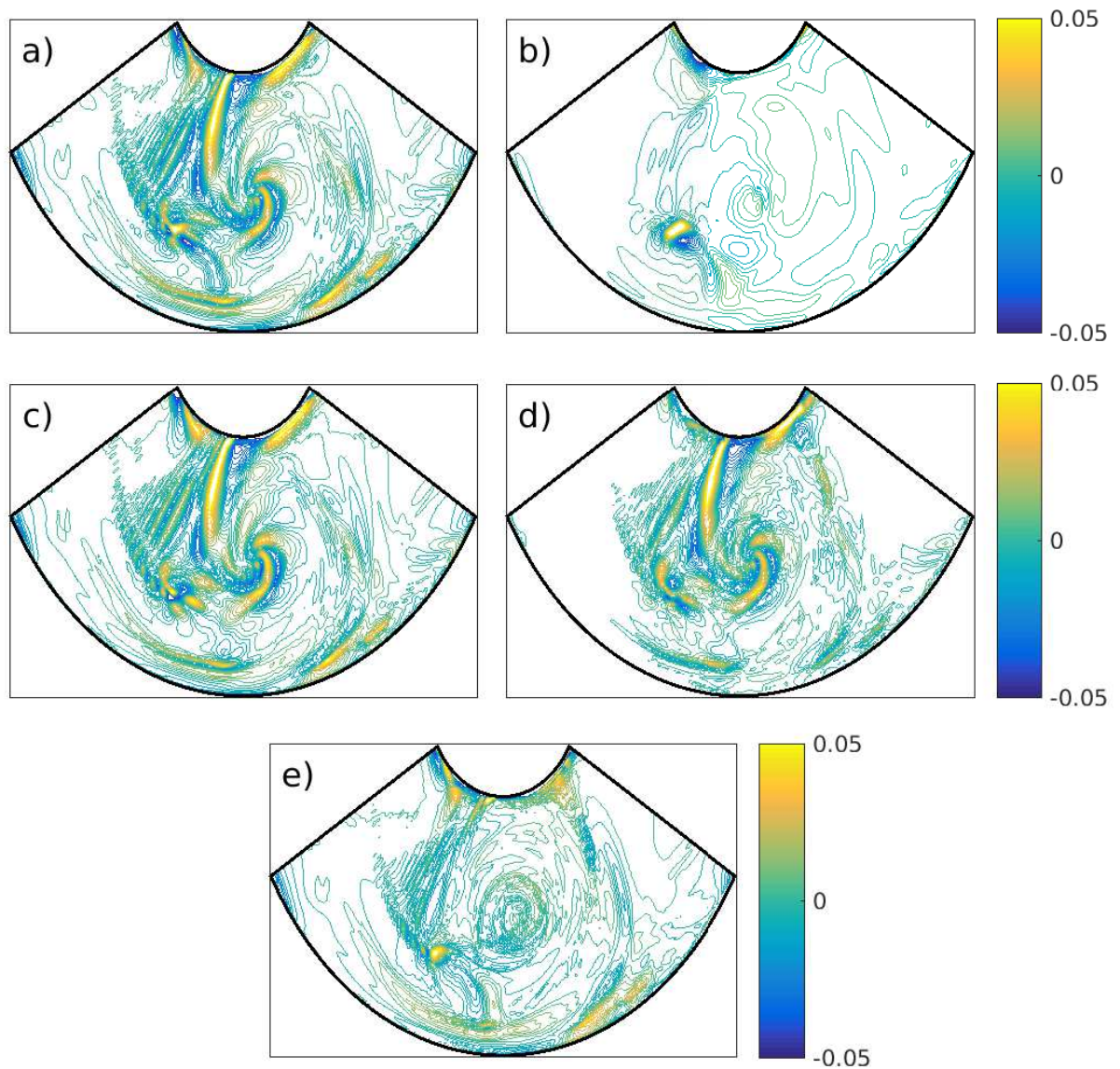


Abbildung 6.4: Vergleich verschiedener Gleichgewichtskonzepte anhand der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ in der Annuluskonfiguration zum Zeitpunkt $t = 20$ s. Gezeigt sind horizontale Querschnitte ($z = 3$ cm) von a) totalem Feld δ , b) führender Ordnung δ_2 der Rossbyzahlentwicklung, c) $\delta - \delta_2$, d) δ_f und e) $\delta_m = \delta - \delta_f$. Die Einheit aller Felder ist s^{-1} .

	MD08		$\hat{\psi}$ -Zerlegung		Lagrange Filter	
	2D	3D	2D	3D	2D	3D
$\%u_1$	6,9	14,2	25,8	16,6	-	-
$\%v_1$	10,4	19,7	18,7	9,7	-	-
$\%B_1$	13,6	11,0	15,9	14,4	-	-
$\%u_2$ ($\%u_f$)	4,3	11,7	-	-	12,9	8,5
$\%v_2$ ($\%v_f$)	7,1	18,0	-	-	17,7	11,1
$\%w_2$ ($\%w_f$)	98,9	98,4	-	-	37,6	35,8
$\%B_2$ ($\%B_f$)	10,4	7,8	-	-	6,1	8,2
$\%\delta_2$ ($\%\delta_f$)	97,5	100,0	-	-	65,9	57,7

Tabelle 6.1: Prozentualer Anteil der diagnostizierten Ungleichgewichte zur totalen Strömung in der Annuluskonfiguration. Siehe Abschnitt 6.3 für die jeweiligen Rechenvorschriften. Die Abkürzung MD08 kennzeichnet die in Abschnitt 6.1 abgeleiteten Gleichgewichtsbeziehungen der führenden (tiefgestellter Index 1) und der nächsthöheren Ordnung (tiefgestellter Index 2). Die Ergebnisse, die auf Grundlage der Stromfunktionzerlegung (siehe Gleichung (6.23)) gewonnen werden, werden nur für die führende Ordnung berechnet. Die aus der Lagrange'schen Filtermethode stammenden Ungleichgewichte weisen den tiefgestellten Index f auf. Die 2D-Kennzahlen werden für einem horizontalen Querschnitt der Felder bei $z = 3$ cm berechnet.

Seite der Gleichung angewendet wird. Zur Lösung des Gleichungssystems (6.55) ist keine derartige Manipulation erforderlich. Das gefilterte Feld δ_f stimmt in bemerkenswerter Weise mit $\delta - \delta_2$ (und δ) überein. Insbesondere werden alle Wellenpakete WP1–WP4 in δ_f erfasst. Damit ist der Beweis erbracht, dass die Wellensignale konsistent mit der Dispersionsrelation linearer Schwerewellen sind und intrinsische Frequenzen größer als f besitzen. Des Weiteren werden die Signale an der inneren Zylinderwand von δ_f größtenteils reproduziert, die bekanntermaßen als Ausgangspunkt von Schwerewellen fungieren. Das Residuum δ_m weist zwar schwache, kleinskalige Strömungsmuster in den Bereichen der Wellenpakete auf, jedoch entstehen diese durch die Interpolation der Felder vom zylindrischen auf das kartesische Gitter. Beim Vergleich von δ_2 und δ_m zeigt sich, dass die isolierte Dipolstruktur (*couplet*) auch in δ_m vorzufinden ist. Insgesamt gesehen stimmen die verschiedenen Diagnoseverfahren in diesem Fall sehr gut überein. Zu ähnlichen Erkenntnissen gelangen wir, wenn die Analyse auf Grundlage der vertikalen Geschwindigkeitskomponente w durchgeführt wird (nicht gezeigt). Die sehr gute Übereinstimmung zwischen w und w_f impliziert, dass die vertikalen Strömungen in der Annuluskonfiguration hauptsächlich auf Schwerewellen zurückzuführen sind. Darüber hinaus liefert die Analyse einen weiteren Beweis dafür, dass der in Kapitel 4.1 definierte unbalancierte Strömungsanteil tatsächlich vom Schwerewellensignal dominiert wird.

Um die vorherigen Ausführungen auch quantitativ zu untermauern, sind in Tabelle 6.1 die

prozentualen Anteile der Ungleichgewichte gelistet. Die Abkürzung MD08 kennzeichnet hierbei die in Abschnitt 6.1 abgeleiteten Gleichgewichtsbeziehungen der führenden und der nächsthöheren Ordnung. Wie oben bereits angedeutet, ist der Großteil der balancierten Strömung bereits in der führenden Ordnung enthalten. Zudem bestätigt die Analyse der Felder, die durch die Stromfunktionszerlegung erhalten wurden, dass \tilde{u}_1 eine deutlich schlechtere Übereinstimmung mit dem vollen Feld u liefert, während \tilde{v}_1 und \tilde{B}_1 vergleichbare Werte liefern.

Durch die Subtraktion der nächsthöheren Ordnung kommt es zu einer weiteren, jedoch geringer ausfallenden Reduzierung des balancierten Strömungsanteils. Erneut zeigt sich, dass w und δ die geringsten balancierten Beiträge aufweisen. Mithilfe von MD08 kann nahezu kein balancierter Anteil identifiziert werden. Die aus der Lagrange'schen Filtermethode stammenden Werte $\%w_f$ und $\%\delta_f$ fallen kleiner aus, was impliziert, dass durch die Anwendung dieser Methodik ein größerer balancierter Anteil diagnostiziert wird. Demgegenüber liegen die prozentualen Ungleichgewichte $\%u_2$, $\%v_2$, und $\%B_2$ in der gleichen Größenordnung wie $\%u_f$, $\%v_f$, und $\%B_f$.

Überdies wird eine systematische Zunahme der Ungleichgewichte in MD08 festgestellt, wenn das gesamte 3D Modellvolumen betrachtet wird. Dies ist nicht verwunderlich, da die Strömung im Einflussbereich der Grenzschicht am Annulusboden starke Ungleichgewichte ausbildet, die von MD08 nicht erfasst werden. Folglich steigt der prozentuale Anteil, wenn das gesamte Modelvolumen betrachtet wird. Im Falle der Lagrange'schen Filtermethode ist eine leichte Abnahme der 3D-Werte erkennbar, wenngleich sich die Zahlen immer noch im gleichen Größenbereich befinden. Es ist daher davon auszugehen, dass die kleinskaligen Strukturen, die in der bodennahen Grenzschicht erzeugt werden, im Rahmen der Filtermethode als Ungleichgewichte identifiziert werden.

6.3.2 Doppelperiodische, kartesische Konfiguration

Im doppeltperiodischen, kartesischen Modellsystem wird die Analyse zum Zeitpunkt $t = 0$ s durchgeführt. Für die Lagrange'sche Filtermethode wird dabei eine Zeitreihe von 50 s mit einer zeitlichen Auflösung von $dt = 0,025$ s generiert, was einer Frequenzauflösung von $0,4f$ und einer maximal auflösbaren Frequenz von $400f$ entspricht. Ähnlich wie in der Annuluskonfiguration zuvor, blicken wir als erstes auf den Absolutbetrag der linearen PV $|\varpi_{lin}|$ in Abbildung 6.5. Auch hier finden wir sehr kleine Werte im Großteil des Modellgebiets. Jedoch gibt es ausgedehnte Muster mit $|\varpi_{lin}| > 1$, die überwiegend zonal verlaufen und ihre Maximalwerte in den beiden Wirbelstrukturen aufweisen. Verglichen mit der Annuluskonfiguration sind die Amplituden etwa doppelt so groß ausgeprägt.

Die Ergebnisse der Analyseverfahren auf Grundlage der zonalen Geschwindigkeit u können aus Abbildung 6.6 entnommen werden. Die dortige Anordnung der jeweiligen Felder ist analog zur Darstellung in der Annuluskonfiguration. Auch in der doppeltperiodischen Konfiguration wird ein Großteil der großskaligen Strömungseigenschaften bereits von der führenden Ordnung u_1 erfasst und das Ungleichgewicht $u - u_1$ der führenden Ordnung zeigt deutlich geringe Amplituden im Vergleich zu u . Durch die Subtraktion der nächsthöheren Ordnung u_2 werden weitere großskalige Anteile beseitigt, so dass $u - u_1 - u_2$ nur in den beiden Wirbelstrukturen nicht verschwindende Strömungsmuster aufweist. Wiederum handelt es sich um Bereiche, in denen relativ große Rossbyzahlen beobachtet werden

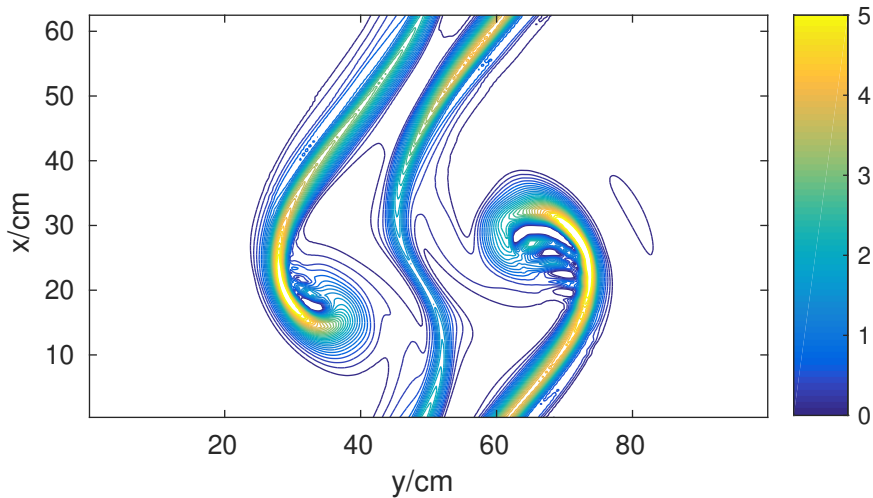


Abbildung 6.5: Horizontaler Querschnitt (bei $z = 3$ cm) des Absolutbetrags der dimensionslosen, linearen PV $|\varpi_{lin}|$ im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem zum Zeitpunkt $t = 0$ s.

($|\varpi_{lin}| > 1$) und es stellt sich die Frage über die Anwendbarkeit der Rossbyzahlzerlegung in diesen Bereichen. Das gefilterte Feld u_f aus der Lagrange Methode zeigt verglichen mit $u - u_1 - u_2$ deutlich ausgeprägtere Strukturen und Amplituden. Die Gründe für diese Unterschiede bleiben offen.

Abbildung 6.7 illustriert den Vergleich der verschiedenen Gleichgewichtskonzepte am Beispiel der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ . Die Signale des balancierten Anteils δ_2 sowie des Residuums $\delta - \delta_2$ wurden bereits im Zusammenhang mit den Resultaten der Omegagleichung in Abschnitt 5.1.2 diskutiert. Es verbleiben die Gegenüberstellung von $\delta - \delta_2$ mit δ_f und von δ_2 mit δ_m . Die Strukturen von $\delta - \delta_2$ und δ_f zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Im Besonderen sind die wellenförmigen Muster und die Amplituden der Wellenpakete WPC1 und WPC2 in δ_f fast vollständig ausgeprägt. Auch der dazugehörige balancierte Anteil δ_m besitzt sehr viele Gemeinsamkeiten mit δ_2 , sowohl in der Form als auch in der Amplitude des Feldes. Demnach stimmen die verschiedenen Diagnoseverfahren in diesem Fall sehr gut überein. Darüber hinaus sollte noch erwähnt werden, dass, im Gegensatz zur Annuluskonfiguration, das doppelperiodische Modellsystem deutlich größer ausgebildete Vertikalbewegungen aufweist, die, wie aus der w_2 oder w_m hervorgeht (nicht gezeigt), zum balancierten Anteil der Strömung gehören.

Der prozentuale Anteil der Ungleichgewichte basierend auf MD08 und der Langrange'schen Filtermode ist in Tabelle 6.2 dargestellt. Prinzipiell können daraus ähnliche Rückschlüsse wie in der Annuluskonfiguration geschlossen werden. Der Großteil des balancierten Strömungsanteils wird bereits durch die erste Ordnung in MD08 erfasst. Allerdings zeigen die deutlich verringerten Werte von $\%w_2$ und $\%\delta_2$, dass in dieser Konfiguration intensiver ausgeprägte, balancierte Vertikalbewegungen vorhanden sind.

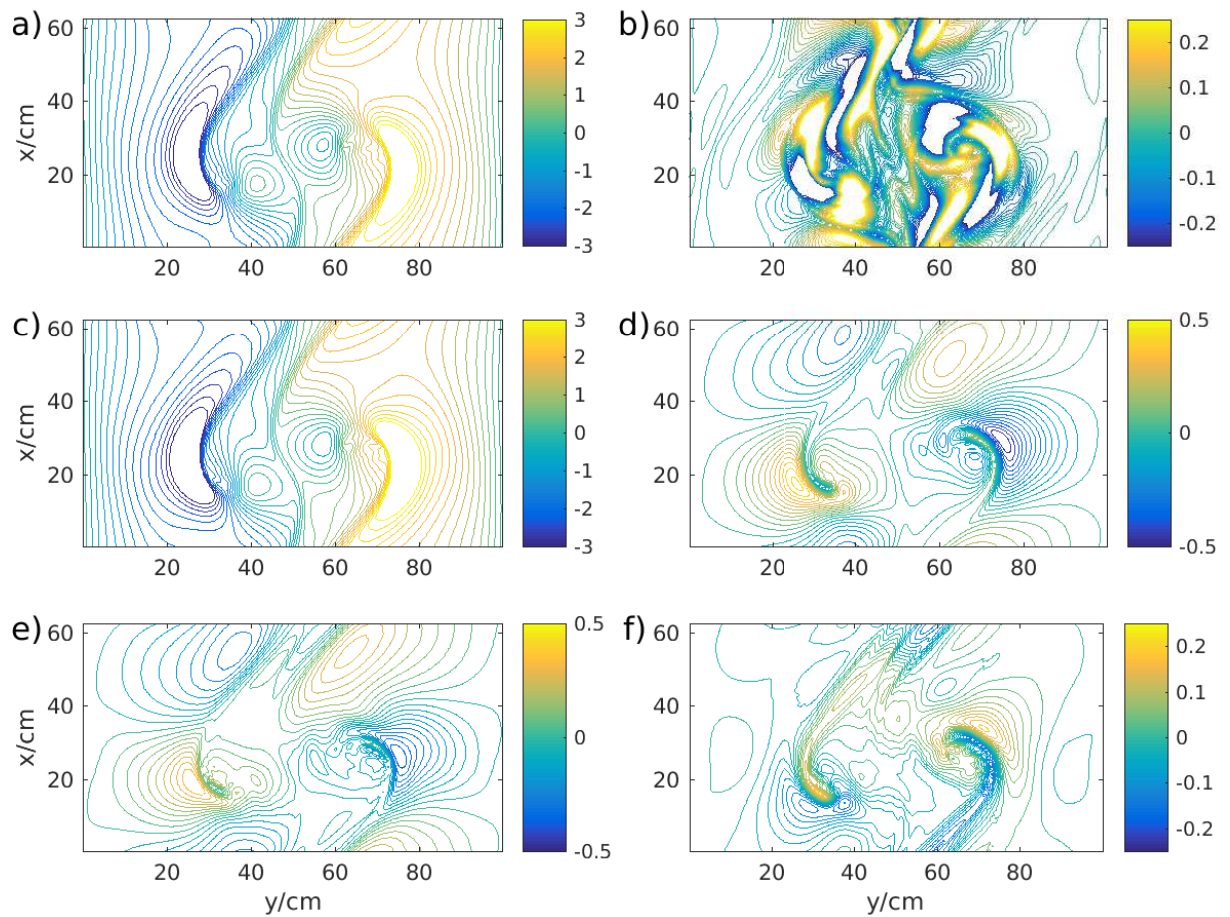


Abbildung 6.6: Vergleich verschiedener Gleichgewichtskonzepte anhand der Azimutalgeschwindigkeit u im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem zum Zeitpunkt $t = 0$ s. Gezeigt sind horizontale Querschnitte ($z = 3$ cm) von a) totalem Feld u , b) das aus der Lagrange'schen Filtermethode stammende Wellenfeld u_f , c) führende Ordnung u_1 der Rossbyzahlentwicklung, d) nächsthöhere Ordnung u_2 , e) $u - u_1$, und f) $u - u_1 - u_2$. Die Einheit aller Felder ist $cm\ s^{-1}$.

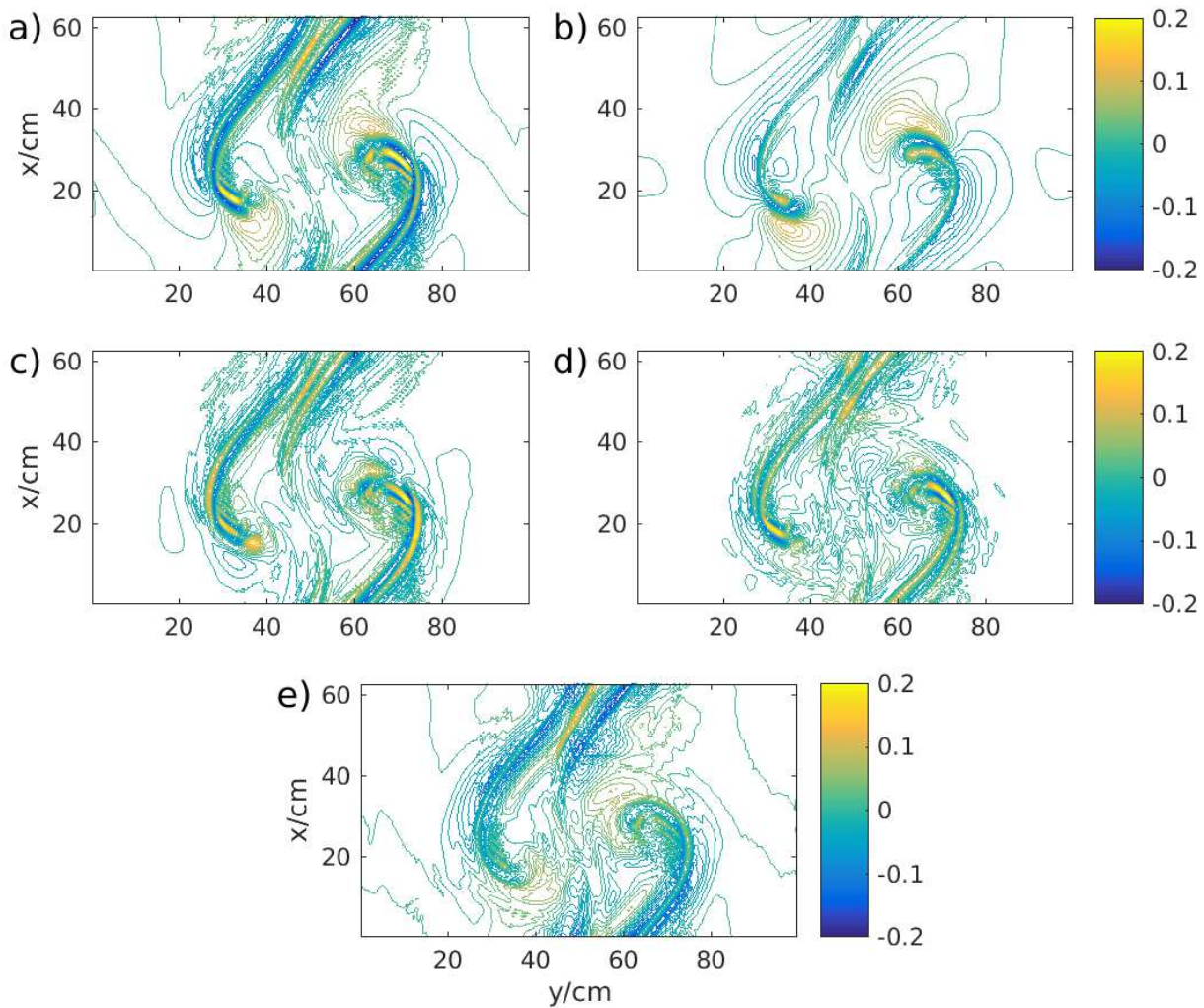


Abbildung 6.7: Vergleich verschiedener Gleichgewichtskonzepte anhand der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz δ im doppelperiodischen, kartesischen Modellsystem zum Zeitpunkt $t = 0\text{s}$. Gezeigt sind horizontale Querschnitte ($z = 3\text{cm}$) von a) totalem Feld δ , b) führende Ordnung δ_2 der Rossbyzahlentwicklung, c) $\delta - \delta_2$, d) δ_f und e) $\delta_m = \delta - \delta_f$. Die Einheit aller Felder ist s^{-1} .

	MD08		Lagrange Filter	
	2D	3D	2D	3D
$\%u_1$	7,4	15,3	-	-
$\%v_1$	18,8	31,4	-	-
$\%B_1$	4,9	4,2	-	-
$\%u_2$ ($\%u_f$)	2,7	10,1	9,3	8,2
$\%v_2$ ($\%v_f$)	10,4	28,8	24,0	16,6
$\%w_2$ ($\%w_f$)	47,9	51,6	38,1	34,8
$\%B_2$ ($\%B_f$)	4,3	3,7	3,3	2,6
$\%\delta_2$ ($\%\delta_f$)	68,4	84,6	57,1	53,1

Tabelle 6.2: Prozentualer Anteil der diagnostizierten Ungleichgewichte zur totalen Strömung im doppeltperiodischen, kartesischen Modellsystem. Siehe Abschnitt 6.3 für die jeweiligen Rechenvorschriften. Die Abkürzung MD08 kennzeichnet die in Abschnitt 6.1 abgeleiteten Gleichgewichtsbeziehungen der führenden (tiefgestellter Index 1) und der nächsthöheren Ordnung (tiefgestellter Index 2). Die aus der Lagrange'schen Filtermethode stammenden Ungleichgewichte weisen den tiefgestellten Index f auf. Die 2D-Kennzahlen werden für einen horizontalen Querschnitt der Felder bei $z = 3$ cm berechnet.

6.4 Wellenzahl-Frequenz Analyse

In den vorangegangenen Kapiteln wurden die Eigenschaften der beobachteten Schwerewellenpakete qualitativ und quantitativ charakterisiert und es wurde der zugrundeliegende Quellmechanismus bestimmt. Eine Untersuchung der Wellen hinsichtlich ihres raumzeitlichen Verhaltens steht allerdings noch aus. In diesem Zusammenhang stellt sich vor allem die Frage, ob die identifizierten Schwerewellenstrukturen konsistent mit den Vorhersagen der linearen Schwerewellentheorie sind. Um dieser Fragestellung auf den Grund zu gehen, wird nachfolgend eine Wellenzahl-Frequenz Analyse am Beispiel von Wellenpaket WP2 in der Annuluskonfiguration (vergleiche Abbildung 3.8) vorgenommen. Methodisch orientieren wir uns an einer Studie von Wheeler & Kiladis (1999), in der auf Grundlage von Satellitendaten eine Wellenzahl-Frequenz Analyse der vorherrschenden dynamischen Strukturen der Äquatorregion vorgenommen wurde. Für unsere Analyse betrachten wir eine Zeitreihe der (vollen) Zustandsvariablen $\mathbf{z}_{box}(\mathbf{x}, t) = (u_{box}, v_{box}, w_{box}, B_{box})$ in einer stationären Gitterbox mit der Ausdehnung $N_{\theta}^{box} = 41$, $N_r^{box} = 61$, $N_z^{box} = 41$, die zum Zeitpunkt $t = 0$ s das Wellenpaket WP2 umschließt. Zur Vereinfachung werden die anschließenden Berechnungen unter Annahme einer kartesischen Geometrie angenommen, was aufgrund der relativ geringen Ausmaße der Gitterbox durchaus gerechtfertigt ist. In einem ersten Schritt subtrahieren wir zunächst zu jedem Zeitpunkt das Volumenmittel der Modellvariablen

$$\mathbf{z}'_{box}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z}_{box}(\mathbf{x}, t) - \langle \mathbf{z}_{box}(t) \rangle, \quad (6.79)$$

ehe, ähnlich wie bei der Energieanalyse in Abschnitt 4.1, eine räumliche Fourier-Transformation von $\mathbf{z}'_{box}(\mathbf{x}, t)$ erfolgt. Als Resultat erhalten wir die Zeitreihe der Fourierkoeffizienten $\hat{\mathbf{z}}_{box}(\mathbf{k}, t)$. Danach projizieren wir diese Zeitreihe auf die in Abschnitt 4.1 eingeführten Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen (vergleiche Anhang B)

$$\hat{\mathbf{z}}_{box}(\mathbf{k}, t) = \hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{g}} + \hat{\sigma}_{box}^+(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{s}}^+ + \hat{\sigma}_{box}^-(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{s}}^- + \hat{\epsilon}_{box}(\mathbf{k}, t)\hat{\mathbf{d}}, \quad (6.80)$$

mit

$$\hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, t) = \langle \hat{\mathbf{z}}_{box}(\mathbf{k}, t), \hat{\mathbf{g}} \rangle, \quad (6.81)$$

$$\hat{\sigma}_{box}^\pm(\mathbf{k}, t) = \langle \hat{\mathbf{z}}_{box}(\mathbf{k}, t), \hat{\mathbf{s}}^\pm \rangle, \quad (6.82)$$

$$\hat{\epsilon}_{box}(\mathbf{k}, t) = \langle \hat{\mathbf{z}}_{box}(\mathbf{k}, t), \hat{\mathbf{d}} \rangle, \quad (6.83)$$

wobei wir vom Energieskalarprodukt (siehe Gleichung (B.22)) Gebrauch machen. Im nächsten Schritt werden die Koeffizienten $\hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, t)$, $\hat{\sigma}_{box}^\pm(\mathbf{k}, t)$ und $\hat{\epsilon}_{box}(\mathbf{k}, t)$ einer zeitlichen Fourier-Transformation unterworfen, wodurch wir die frequenzabhängigen Koeffizienten $\hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, \omega)$, $\hat{\sigma}_{box}^\pm(\mathbf{k}, \omega)$ und $\hat{\epsilon}_{box}(\mathbf{k}, \omega)$ erhalten. Für die praktische Umsetzung wird dabei der Real- und der Imaginärteil separat transformiert und anschließend aufaddiert. Am Beispiel

$$\hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, t) = \hat{\gamma}_{box}^R(\mathbf{k}, t) + i\hat{\gamma}_{box}^I(\mathbf{k}, t), \quad (6.84)$$

wobei $\hat{\gamma}_{box}^R(\mathbf{k}, t)$ den Real- und $\hat{\gamma}_{box}^I(\mathbf{k}, t)$ den Imaginärteil von $\hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, t)$ bezeichnet, bedeutet dies, dass wir zunächst die Transformaten

$$\hat{\gamma}_{box}^R(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\gamma}_{box}^{RR}(\mathbf{k}, \omega) + i\hat{\gamma}_{box}^{RI}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.85)$$

$$\hat{\gamma}_{box}^I(\mathbf{k}, \omega) = \hat{\gamma}_{box}^{IR}(\mathbf{k}, \omega) + i\hat{\gamma}_{box}^{II}(\mathbf{k}, \omega), \quad (6.86)$$

berechnen. Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, \omega) &= \hat{\gamma}_{box}^R(\mathbf{k}, \omega) + i\hat{\gamma}_{box}^I(\mathbf{k}, \omega) \\ &= \hat{\gamma}_{box}^{RR}(\mathbf{k}, \omega) - \hat{\gamma}_{box}^{II}(\mathbf{k}, \omega) + i\left[\hat{\gamma}_{box}^{RI}(\mathbf{k}, \omega) + \hat{\gamma}_{box}^{IR}(\mathbf{k}, \omega)\right]. \end{aligned} \quad (6.87)$$

Abschließend berechnen wir die Energiespektren, die sich durch Projektion auf die geostrophische und die (negative) Schwerewellenmode ergeben

$$\hat{E}_G(\mathbf{k}, \omega) = \left| \hat{\gamma}_{box}(\mathbf{k}, \omega) \right|^2, \quad (6.88)$$

$$\hat{E}_{SW-}(\mathbf{k}, \omega) = \left| \hat{\sigma}_{box}^-(\mathbf{k}, \omega) \right|^2. \quad (6.89)$$

Wir beschränken uns hier aus Darstellungsgründen auf das Energiespektrum der negativen Schwerewellenmode. Das Spektrum aus der positiven Schwerewellenmode liefert analoge Ergebnisse. Um die Energiespektren geeignet zu visualisieren, fixieren wir die horizontalen Wellenzahlen $\mathbf{k}_h^* = (k_x^*, k_y^*)^T$. Dabei orientieren wir uns beim Schwerwellenspektrum an den diagnostizierten horizontalen Wellenzahlen (vergleiche Tabelle 3.1). Im Falle des geostrophischen Energiespektrums wählen wir kleinere Wellenzahlen, da dort die größten Energien erwartet werden. Auch die Fixierung von zwei anderen Wellenzahlen wäre möglich,

allerdings haben Untersuchungen gezeigt, dass das Konstanthalten der horizontalen Wellenzahlen die eindrucksvollsten Resultate liefert.

Zur Analyse wählen wir eine Zeitreihe von 40 s mit einer zeitlichen Auflösung von $dt = 0,08$ s. Der Vorhersage der linearen Dynamik folgend (vergleiche Anhang B), erwarten wir die größten Werte im Energiespektrum der geostrophischen Mode entlang der Frequenz

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \tilde{\omega}_1 + \mathbf{k}_h^* \cdot \mathbf{U}_0 \\ &= \mathbf{k}_h^* \cdot \mathbf{U}_0.\end{aligned}\quad (6.90)$$

Darin bezeichnet $\mathbf{U}_0 = (U_0, V_0)^T$ die räumlich und zeitlich gemittelten Werte der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten. Des Weiteren haben wir ausgenutzt, dass die intrinsische Frequenz $\tilde{\omega}_1$ der geostrophischen Strömung verschwindet (vergleiche Anhang B). Analog solle das Energiespektrum der negativen Schwerewellenmode Maximalwerte entlang der Frequenz

$$\begin{aligned}\omega_3 &= \tilde{\omega}_3 + \mathbf{k}_h^* \cdot \mathbf{U}_0 \\ &= -\sqrt{\frac{N^2 (k_x^{*2} + k_y^{*2}) + f^2 k_z^2}{k_x^{*2} + k_y^{*2} + k_z^2}} + \mathbf{k}_h^* \cdot \mathbf{U}_0,\end{aligned}\quad (6.91)$$

aufweisen, wobei die intrinsische Frequenz der (negativen) Schwerewellenmode $\tilde{\omega}_3$ (vergleiche Anhang B) eingesetzt wurde.

Abbildung 6.8 zeigt das Energiespektrum E_G der geostrophischen Mode in Abhängigkeit der Frequenz ω und der vertikalen Wellenzahl k_z . Darüber hinaus ist die vorhergesagte Dispersionsrelation (6.90) der geostrophischen Strömung eingezeichnet. Wie daraus ersichtlich wird, sind die größten Energiewerte exakt entlang dieser Kurve anzutreffen. Es wird ein Maximum bei $k_z = 0$ beobachtet. Das äquivalente Energiespektrum für die negative Schwerewellenmode ist, samt Dispersionsrelation (6.91), in Abbildung 6.9 dargestellt. Auch in diesem Fall gibt es eine recht gute Übereinstimmung zwischen den Maximalwerten des Energiespektrums und der theoretischen Vorhersage der linearen Dynamik. Insbesondere wird das Minimum der Dispersionsrelation bei k_z erfasst. Wie aus der Dispersionsrelation von linearen Schwerewellen hervorgeht (siehe Gleichung 2.12), liegt der gültige (intrinsische) Frequenzbereich der Wellen im Intervall $f < \tilde{\omega} < N$. In der betrachteten Gitterbox finden wir $\langle N \rangle = 0.82 \text{ s}^{-1}$ bei einem konstanten Coriolisparameter $f = 0.16 \text{ s}^{-1}$. Daher gibt es nur einen recht kleinen Frequenzbereich, indem Schwerewellen existieren können. Abbildung 6.9 demonstriert eindrucksvoll, dass auch das nichtlineare Wellensignal WP2 diese Eigenschaften aufweist und Frequenzen in dem angesprochenen Intervall besitzt. Zusammenfassend zeigt die Wellenzahl-Frequenz Analyse demnach, dass die räumlichen und zeitlichen Strukturen von WP2 konsistent mit den Vorhersagen der linearen Schwerewellendynamik sind.

Um zu überprüfen, ob die gesamte Schwerewellenaktivität im Modellvolumen den Vorhersagen der linearen Schwerewellendynamik folgt, stellt sich die folgende Vorgehensweise als nützlich heraus. Das (sektorielle) Annulusvolumen wird in 26 überlappende Boxen aufgeteilt, wobei wir uns auf den oberen Teil der Strömung ($z > 2$ cm) beschränken. In diesem Bereich wird die höchste Schwerewellenaktivität wahrgenommen. Die Anzahl der eingeschlossenen Gitterpunkte pro Box ist konstant und stimmt mit den oben eingeführten

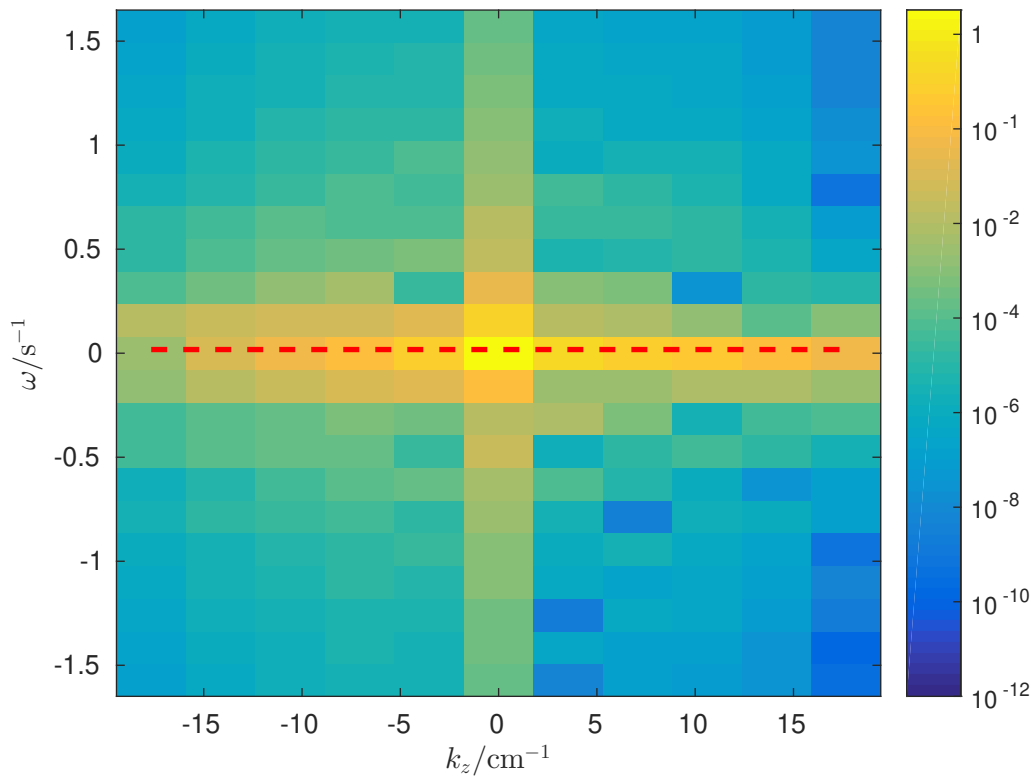


Abbildung 6.8: Wellenzahl–Frequenz Spektrum von \hat{E}_G in der Annuluskonfiguration in Abhängigkeit der vertikalen Wellenzahl k_z ($k_x, k_y = \text{konst.}$) und der Frequenz ω . Die Berechnung erfolgt in einer stationären Gitterbox der Ausdehnung $N_\vartheta^{box} = 41$, $N_r^{box} = 61$, $N_z^{box} = 41$, die sich in der Mitte des Modellgebiets befindet. Es wird eine Zeitreihe von 40 s verwendet. Die gestrichelte rote Linie zeigt die Dispersionsrelation der geostrophischen Eigenmode der linearisierten Boussinesq-Gleichungen.

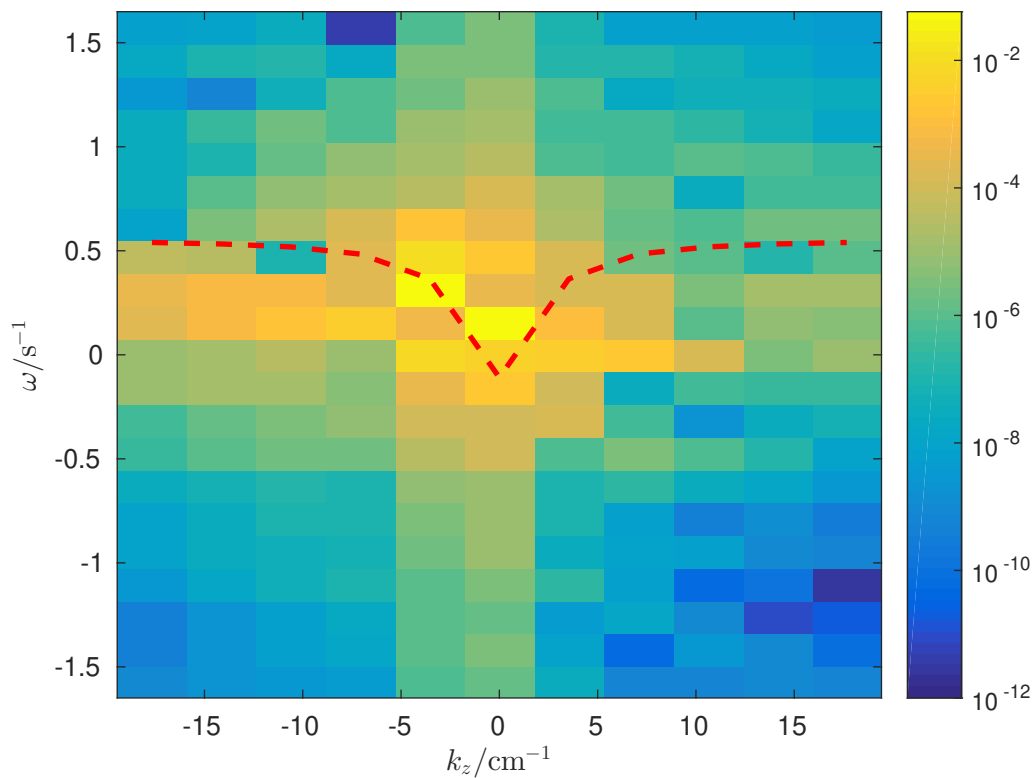


Abbildung 6.9: Wellenzahl-Frequenz Spektrum von E_{SW}^- in der Annuluskonfiguration in Abhängigkeit der vertikalen Wellenzahl k_z ($k_x, k_y = \text{konst.}$) und der Frequenz ω . Die Berechnung erfolgt in einer stationären Gitterbox der Ausdehnung $N_\theta^{box} = 41$, $N_r^{box} = 61$, $N_z^{box} = 41$, die sich in der Mitte des Modellgebiets befindet. Es wird eine Zeitreihe von 40 s verwendet. Die gestrichelten rote Linie zeigt die Dispersionrelation der negativen Schwerewellenmode der linearisierten Boussinesq-Gleichungen.

Ausmaßen überein. Die zuvor geschilderte Wellenzahl-Frequenz Analyse wird nun in jeder Box vorgenommen. Aus Darstellungsgründen werden die jeweiligen Energien hier allerdings in Abhängigkeit der intrinsischen Frequenzen

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i - \mathbf{k}_h^* \cdot \mathbf{U}_0^i, \quad (6.92)$$

angegeben, wobei $i = 1, \dots, 26$ die jeweilige Gitterbox kennzeichnet. Im nächsten Schritt mitteln wir die Energien der geostrophischen und negativen Schwerewellenmoden über alle Gitterboxen

$$\langle \hat{E}_G(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \rangle = \frac{1}{26} \sum_{i=1}^{26} \left| \hat{\gamma}_{box}^i(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \right|^2, \quad (6.93)$$

$$\langle \hat{E}_{SW-}(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \rangle = \frac{1}{26} \sum_{i=1}^{26} \left| \hat{\sigma}_{box}^i(\mathbf{k}, \tilde{\omega}) \right|^2. \quad (6.94)$$

Die so erhaltenen Energiespektren sind in Abbildung 6.10 für den geostrophischen und in Abbildung 6.11 für den negativen Schwerewellenmode dargestellt. Des Weiteren sind die jeweiligen Verläufe der Dispersionsrelationen eingezeichnet. Da sich die Dispersionsrelation der Schwerewellenmode aufgrund verschiedener Werte von N^2 von Box zu Box geringfügig unterscheidet, wurde auch hier der Mittelwert über alle Boxen gebildet.

Das gemittelte Energiespektrum der geostrophischen Mode zeigt Maximalwerte entlang der berechneten Dispersionsrelation $\tilde{\omega}_1 = 0$, wobei die höchsten Werte bei den kleinsten vertikalen Wellenzahlen beobachtet werden. Somit ist die Vorhersage der linearen Dynamik im Einklang mit den beobachteten Strukturen. Das gemittelte Energiespektrum der negativen Schwerewellenmode in Abbildung 6.11 zeigt eine nicht derart ausgeprägte Übereinstimmung. Die höchsten Werte sind auch hier um $\tilde{\omega} = k_z = 0$ angeordnet, was im Rahmen der linearen Dynamik allerdings nicht vorhergesagt wird. Entlang des Verlaufs der Dispersionsrelation, die bei $k_z = 0$ ein Minimum aufweist, wird jedoch ebenfalls ein signifikanter Energiebeitrag festgestellt.

Nach Ansicht der Energiespektren der einzelnen Boxen zeigt sich, dass in einigen Boxen eine recht gute Übereinstimmung mit der linearen Dynamik vorliegt (siehe beispielsweise der betrachteten Fall oben). Demgegenüber ist in anderen Boxen kein ausgewiesener Zusammenhang feststellbar. Darüber hinaus wurde der Versuch unternommen, ein Energiespektrum der Form

$$\tilde{E}_{SW-} = \frac{A}{\left(1 + \frac{k_z}{k_0}\right)^\alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_0}\right)^\beta}, \quad (6.95)$$

an das beobachtete, mittlere Energiespektrum $\langle \hat{E}_{SW-} \rangle$ (siehe Abbildung 6.11) zu fitten. Die Parameter k_0 , $\tilde{\omega}_0$, A , α , und β werden dabei so gewählt, dass die mittlere quadratische Differenz von \tilde{E}_{SW-} und $\langle \hat{E}_{SW-} \rangle$ minimal ist. Die Abweichung $\langle \hat{E}_{SW-} \rangle - \tilde{E}_{SW-}$ weist nun zwar ein Minimum bei $k_z = 0$ auf (nicht gezeigt), jedoch ist nicht die erhoffte Hervorhebung der Werte entlang der Dispersionsrelation erkennbar. Zusammenfassend kann demnach festgehalten werden, dass die beobachtbaren Schwerewellenstrukturen zwar nicht perfekt mit der Vorhersage der linearen Schwerewellendynamik übereinstimmen, allerdings treten auch keine elementaren Widersprüche auf.

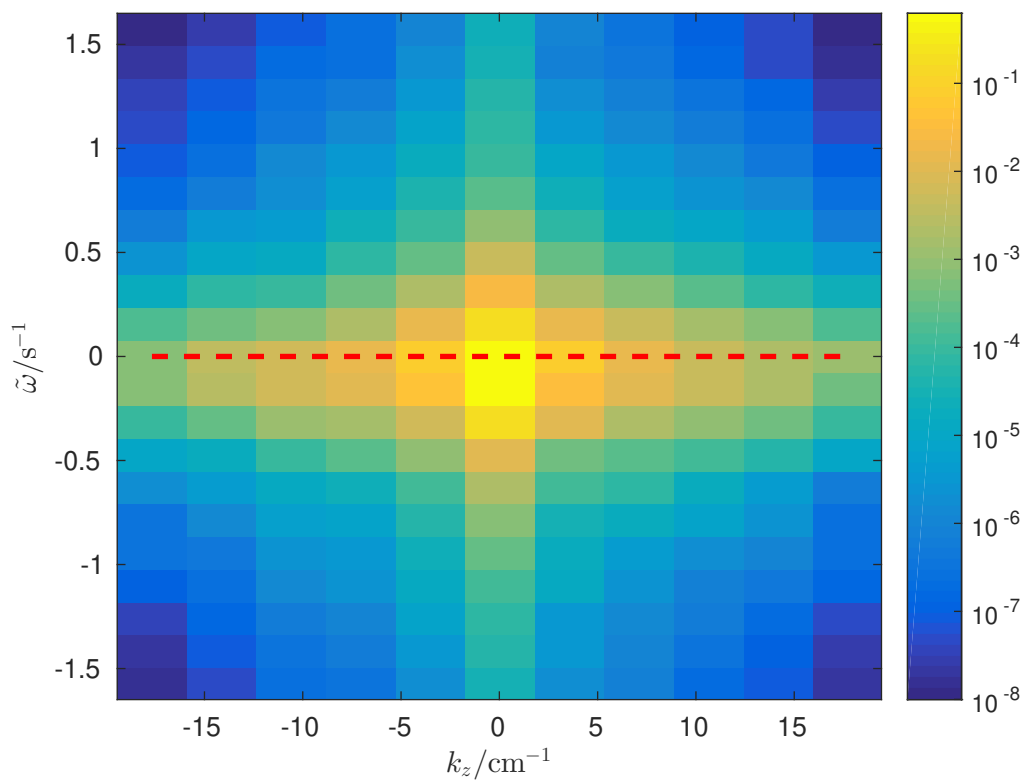


Abbildung 6.10: Wellenzahl-Frequenz Spektrum von $\langle \hat{E}_G \rangle$ in der Annuluskonfiguration in Abhängigkeit der vertikalen Wellenzahl k_z ($k_x, k_y = \text{konst.}$) und der intrinsischen Frequenz $\tilde{\omega}$. Das Spektrum zeigt ein Mittelwert über 26 Boxen. Es wird eine Zeitreihe von 40s verwendet. Die gestrichelte rote Linie zeigt die Dispersionsrelation der geostrophischen Eigenmode der linearisierten Boussinesq-Gleichungen.

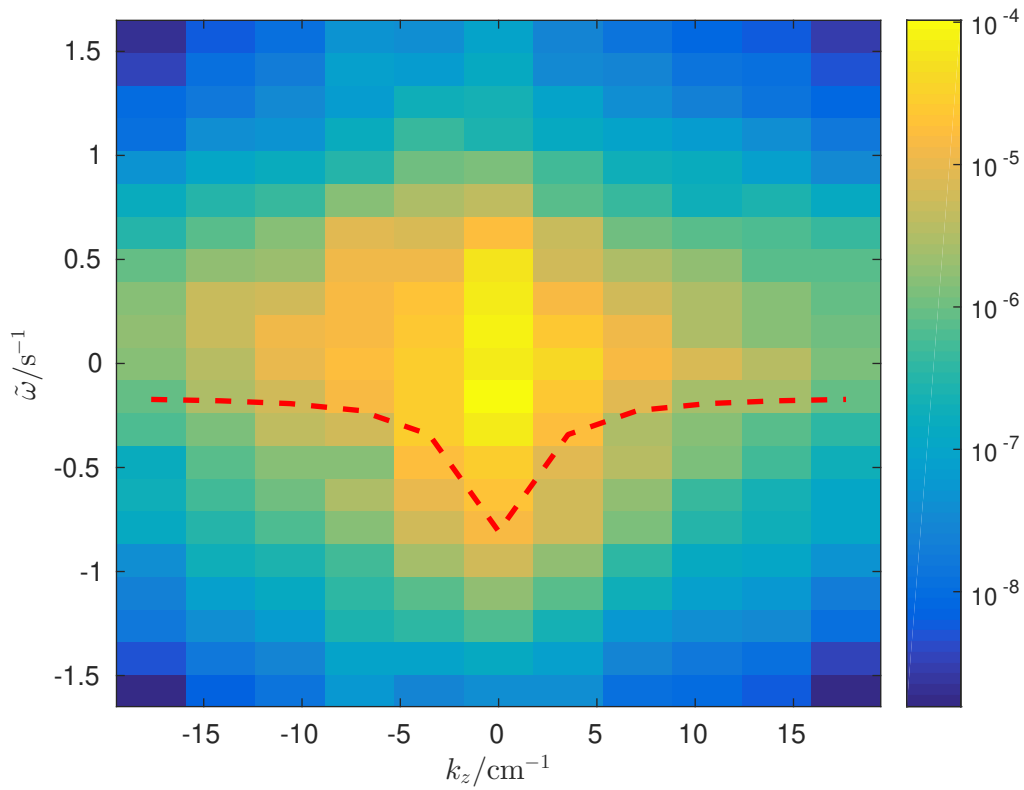


Abbildung 6.11: Wellenzahl-Frequenz Spektrum von $\langle \hat{E}_{SW-} \rangle$ in der Annuluskonfiguration in Abhängigkeit der vertikalen Wellenzahl k_z ($k_x, k_y = \text{konst.}$) und der intrinsischen Frequenz $\tilde{\omega}$. Das Spektrum zeigt ein Mittelwert über 26 Boxen. Es wird eine Zeitreihe von 40s verwendet. Die gestrichelte rote Linie zeigt die Dispersionsrelation der negativen Schwerewellenmode der linearisierten Boussinesq-Gleichungen.

Kapitel 7

Vergleich mit dem Laborexperiment

Wie bereits in Kapitel 2.1 kurz erwähnt, wurde das nichtlineare Annulusmodell *cylFloit* in einer vorherigen Studie mit entsprechenden Labordaten erfolgreich validiert (vergleiche Borchert et al., 2015). Es handelte sich dabei allerdings um die klassische Annuluskonfiguration, in welcher die über das Volumen gemittelte Brunt-Väisälä-Frequenz N kleiner ist als der Coriolisparameter f . Während der Forschungsarbeiten zu der vorliegenden Doktorarbeit wurde von unseren Kollegen an der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg (BTU) eine atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration ($N/f > 1$) errichtet, mit der auch schon erste Laborexperimente durchgeführt wurden. Zum Abgabezeitpunkt dieser Arbeit ist die Validierung und Analyse der Modell- und Labordaten noch nicht vollständig abgeschlossen. Nichtsdestotrotz werden im Folgenden die aktuellsten Ergebnisse der Vergleichsstudie für ein ausgewähltes Parameterregime beschrieben und diskutiert.

Zunächst ist es wichtig zu erwähnen, dass es aufgrund technischer Limitierungen nicht möglich war, die in Borchert et al. (2014) eingeführte und in den vorherigen Kapiteln betrachtete atmosphärenähnliche Annulusgeometrie exakt nachzubauen. Das Laborexperiment besitzt einen um 15 cm größeren inneren Radius von $a = 35$ cm. Der äußere Radius ist mit $b = 70$ cm identisch mit der numerischen Konfiguration, wohingegen die Füllhöhe mit $d = 6$ cm um 2 cm höher ist (vergleiche Abschnitt 2.1). Nach umfangreichen Untersuchungen stellte sich außerdem heraus, dass die Temperaturdifferenz zwischen äußerer und innerer Zylinderwand im Laborexperiment effektiv nur $\Delta T = T_b - T_a = 25,2^\circ\text{C} - 23,1^\circ\text{C} = 2,1^\circ\text{C}$ beträgt. Die Temperatur der Wasserbäder zur Kühlung der inneren und Erhitzung der äußeren Zylinderwand weist zwar einen Unterschied von 45°C auf, jedoch sorgt die hohe Wärmeisolation der Wände für eine deutliche Reduzierung dieses Gradienten. Die Winkelgeschwindigkeit der Apparatur ist variabel einstellbar. Die hier dargestellten Ergebnisse werden mit einer Rotationsgeschwindigkeit von $\Omega = 0,6$ rpm durchgeführt.

Um einen bestmöglichen Vergleich zwischen Modell- und Laborexperiment zu erhalten, werden die Parameter der Laborgeometrie für die numerischen Simulationen übernommen. Des Weiteren richtet sich auch die Simulationsstrategie streng nach den experimentellen Abläufen. Es wird zunächst eine 2D-Simulation mit einer Rotationsrate von 0,1 rpm vorgenommen, bis sich ein Gleichgewichtszustand einstellt. Anschließend wird eine zufällige Störung auf das Temperaturfeld addiert, ehe eine 3D-Simulation der gesamten Annuluskonfiguration durchgeführt wird. Die Rotationsgeschwindigkeit wird dabei linear um 0,01 rpm pro 15 s erhöht, bis die finale Geschwindigkeit erreicht ist. Über den gesamten Zeitraum wird in jedem Integrationsschritt eine zufällige Störung auf die innere und äußere Zylinderwandtemperatur gegeben, um die im Experiment wahrgenommenen Temperaturvariationen nachzuahmen. Das numerische Experiment weist eine recht hohe Gitterauflösung von $N_\vartheta = 600$, $N_r = 200$ und $N_z = 135$ auf, so dass alle relevanten kleinskaligen Struk-

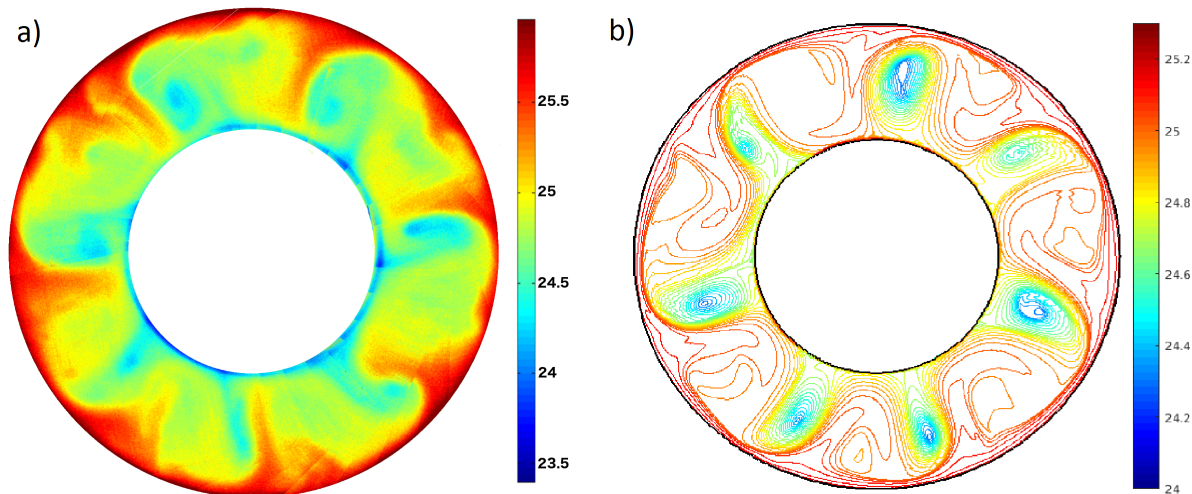


Abbildung 7.1: Ergebnis des Validierungsexperiments für die neue atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration an der BTU in Cottbus. Die Abbildung zeigt die horizontale Temperaturverteilung in ($^\circ\text{C}$) an der Oberfläche ($z = 6 \text{ cm}$) für a) das Laborexperiment und b) die dazugehörige numerische Simulation. In beiden Fällen ist eine führende barokline Wellenzahl von sieben erkennbar.

turen explizit aufgelöst werden. In der nachfolgenden Gegenüberstellung wird zwischen den groß- und kleinskaligen Strukturen unterschieden. Dabei beschränken wir uns auf die Gleichgewichtszustände des experimentellen und des numerischen Experiments, die sich einstellen, wenn keine Variation der führenden baroklinen Wellenzahl mehr beobachtet wird.

Zum Vergleich der großskaligen Strömungsmuster im Labor- und Simulationsexperiment bietet es sich an, die horizontale Temperaturverteilung an der Oberfläche ($z = d = 6 \text{ cm}$) des Annulus zu betrachten. Wie aus Abbildung 7.1 hervorgeht, wird sowohl im Experiment als auch in der Simulation eine führende barokline Wellenzahl von sieben festgestellt. Auch die jeweiligen Amplituden liegen in derselben Größenordnung, wenngleich die Laborstudie einen größeren Temperaturbereich abdeckt. Ein möglicher Grund für diesen Unterschied liegt darin begründet, dass in der numerischen Simulation Wärmeflüsse und Verdunstungseffekte zwischen Oberfläche und Umgebung vernachlässigt werden. Im Labor wird allerdings eine starke Zunahme der Luftfeuchtigkeit während der Durchführung der Experimente wahrgenommen, was auf eine hohe Verdunstungsrate schließen lässt. Dennoch zeigt sich bezogen auf die großskaligen Strukturen eine recht gute Übereinstimmung.

Von besonderem Interesse ist, ob Schwerwellensignale im Labor- und im Simulationsexperiment beobachtet werden und wenn ja, ob auch hierbei eine Konsistenz der Strukturen vorliegt. Um dieser Frage nachzugehen, konzentrieren wir uns jeweils auf einen ausgewählten Wellenberg und ein Wellental und berechnen die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz. Wir beschränken uns hierfür auf einen horizontalen Querschnitt bei $z = 5 \text{ cm}$. Im Allgemeinen wird im Experiment und in der Simulation eine Zunahme der Schwerwellenaktivität mit der Höhe wahrgenommen. Eine Gegenüberstellung beider Felder ist in Abbildung 7.2 zu finden. Zur vereinfachten Vermessung der beobachteten Skalen haben wir dabei das Ergebnis der numerischen Simulation (Abbildung 7.2b) auf ein kartesisches Koordinaten-

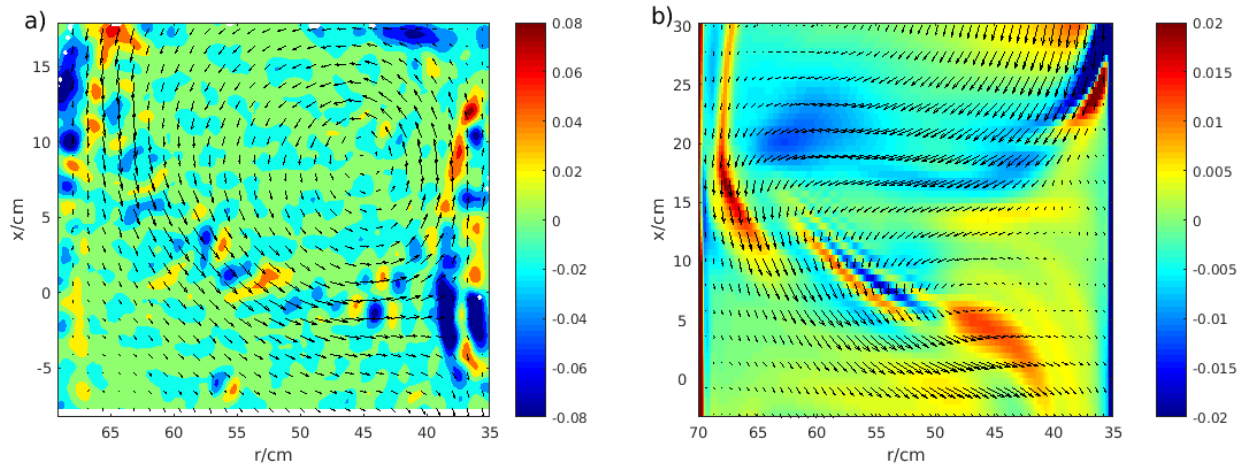


Abbildung 7.2: Horizontale Querschnitte (bei $z = 5$ cm) der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz (in s^{-1}) für einen ausgewählten Wellenberg und ein Wellental in der neuen atmosphärischen Annuluskonfiguration an der BTU in Cottbus. a) Laborexperiment, b) numerische Simulation. Das eingezeichnete Vektorfeld beschreibt das horizontale Geschwindigkeitsfeld.

system projiziert. Die Labormessungen werden ohnehin in einer kartesischen Geometrie vorgenommen. Des Weiteren wird auf die Rohdaten des Laborexperiments ein Gauß-Filter angewandt, damit die durch die Messumstände verursachten Störsignale (Rauschen) beseitigt werden. Um einen Eindruck über die zugrundeliegenden Strömungsverhältnisse zu gewinnen, ist in Abbildung 7.2 zudem die horizontale Geschwindigkeit als Vektorfeld eingezeichnet. Prinzipiell sind sowohl im Laborexperiment (Abbildung 7.2a) als auch in der Simulation (Abbildung 7.2b) wellenartige Strukturen erkennbar, die auf eine deutliche Schwerewellenaktivität hinweisen. Im Labor ordnen sich diese Muster vorwiegend entlang des Jetstreams an. Auch an den Zylinderwänden, insbesondere an der inneren Wand ($r = 35$ cm), sind ausgeprägte Signale der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz erkennbar. Darüber hinaus sind im gesamten Ausschnitt schwache, zufällig auftretende Strukturen mit $|\delta| < 0,02 \text{ s}^{-1}$ vorzufinden, die unter anderem auf Messungenauigkeiten zurückzuführen sind. Die Modellsimulation zeigt ein isoliertes Wellenpaket im Bereich $5 \leq x \leq 15$ cm und $50 \leq r \leq 60$ cm, das im Vergleich zum Labor deutlich längere Skalen aufweist. Wie aus der zeitlichen Entwicklung der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz hervorgeht, wird das Wellenpaket in der Umgebung der äußeren Zylinderwand generiert. Anschließend propagiert es entlang des Jetstreams in Richtung der inneren Zylinderwand, wo es schließlich dissipiert. Die Phasengeschwindigkeit ist dabei näherungsweise senkrecht zur Gruppengeschwindigkeit, was konsistent ist mit der Theorie der linearen Schwerewellen (vergleiche Abschnitt 2.1). Erste Untersuchungen deuten darauf hin, dass die Schwerewellen im Inneren der Strömung und nicht an der Grenzschicht der äußeren Zylinderwand erzeugt werden. Neben der abweichenden Form und der gegensätzlichen Orientierung der Wellenpakete im Labor- und Simulationsexperiment ist vor allem ein deutlicher Unterschied in der Amplitude auffällig. Im Vergleich zur Modellrechnung weisen die im Experiment gemessenen Schwerewellen eine etwa viermal so große Amplitude auf. Allerdings kann nicht ausgeschlossen werden, dass die simulierten Schwerewellen auch in der Laborkonfiguration auftreten, da die Amplitude unterhalb der Messgenauigkeit der Laborinstrumente liegt. Des

Weiteren sind Unterschiede in den beiden horizontalen Geschwindigkeitsfeldern ersichtlich. Während im Laborexperiment eine geschlossene Zirkulation um das Wellental beobachtet wird, zeigt die Simulation einen eher offenen Strömungsverlauf mit nahezu verschwindenden Geschwindigkeitskomponenten im Bereich der inneren Zylinderwand. Werden jedoch andere Wellentäler der Simulationsergebnisse betrachtet, so finden wir deutlich bessere Übereinstimmungen in den Strömungsmustern. Da die Schwerewellenaktivität, die in anderen Wellentälern vergleichbare Strukturen besitzt, im hier illustrierten Wellental am deutlichsten ausgeprägt ist, wird auf einen weiteren Vergleich verzichtet.

Zusammenfassend zeigt sich also, dass die großskaligen Strömungseigenschaften des Labor- und Simulationsexperiments recht gut übereinstimmen. Demgegenüber bestehen signifikante Unterschiede in der Form und der Amplitude der beobachteten Schwerewellensignale. Derzeit wird nach Ursachen dieser Diskrepanz gesucht. Ein möglicher Grund könnte in der periodischen Variation der Zylinderwandtemperaturen liegen, die aus der Zufuhr (beziehungsweise Abfuhr) von Wasser in die Wärmebäder resultiert, um das Temperaturniveau aufrecht zu erhalten. Es liegt die Vermutung nahe, dass es dadurch zu einem periodischen Antrieb von Ungleichgewichten in der baroklinen Strömung kommt, die anschließend, ähnlich wie bei der geostrophischen Anpassung, in Form von Schwerewellen abgestrahlt werden. Entsprechende Maßnahmen zur Nachahmung dieses Vorgangs werden aktuell in das numerische Modell implementiert.

Kapitel 8

Fazit

In dieser Arbeit wird der Mechanismus der spontanen Schwerwellenemission in numerischen Simulationen des differenziell geheizten rotierenden Annulusexperiments erforscht. Die zentrale Fragestellung ist hierbei, welche Rolle die interne Dynamik des Systems gegenüber Grenzschichtinstabilitäten an den Zylinderwänden bei der Generierung der Schwerwellen einnimmt. Die Analyse wird in der atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration vorgenommen, die in Borchert et al. (2014) entwickelt wurde und ein Verhältnis von $N/f > 1$ aufweist. Analoge Untersuchungen werden in einem äquivalenten kartesischen Modellsystem durchgeführt, in dem periodische Bedingungen in beiden horizontalen Raumrichtungen vorliegen. Folglich kommt in dieser Konfiguration nur die interne Dynamik als Schwerwellenquelle in Frage. Um ein baroklin instabiles Strömungsprofil zu erzeugen, wird eine thermische Relaxation in die Modellgleichungen implementiert.

Unter dem ausgewählten Parameterregime bildet sich in beiden Modellkonfigurationen eine großskalige, barokline Wellenstruktur, die ein atmosphärenähnliches Jet-Front System beinhaltet. Darüber hinaus zeigt die Analyse der kleinskaligen Strukturen die Existenz von vier voneinander isolierten Schwerwellenpaketen in der Annuluskonfiguration sowie von zwei Schwerwellenpaketen im doppelperiodischen Modellsystem. Um den zugrundeliegenden Quellmechanismus zu studieren, erfolgt eine Aufspaltung der Zustandsvariablen in einen balancierten und einen unbalancierten Anteil, wobei das Schwerwellensignal im letztgenannten enthalten ist. Der Gleichgewichtsanteil, der das geostrophische und das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt, wird aus der Invertierung der linearen PV gewonnen, die definitionsgemäß nur aus balancierten Beiträgen besteht. Wie voneinander unabhängige Analyseverfahren bestätigen, ist der so definierte unbalancierte Strömungsanteil in hohem Maße vom Schwerwellensignal dominiert. Nichtsdestotrotz wird zusätzlich die quasigeostrophische Omegagleichung verwendet, um balancierte Beiträge in der Vertikalgeschwindigkeit und in der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz zu diagnostizieren. Die Strömungsaufspaltung bildet die Grundlage für die Entwicklung eines tangential-linearen Modells für den unbalancierten Strömungsanteil. Hierbei wird eine systematische Umformulierung der dynamischen Grundgleichungen hinsichtlich der Wechselwirkung beider Strömungsanteile vollzogen. Insbesondere wird der rein balancierte Antrieb der unbalancierten Strömung freigelegt, um dessen Einfluss auf die Schwerwellenaktivität zu quantifizieren. In der anschließenden Integration des tangential-linearen Modells wird die zeitabhängige balancierte Strömung fortwährend aus den nichtlinearen Modellvariablen berechnet. Des Weiteren werden die nichtlinearen Wechselwirkungen der unbalancierten Felder vernachlässigt.

Die tangential-linearen Simulationen zeigen, dass drei der vier Schwerwellenpakete in der Annuluskonfiguration in der internen Strömung generiert werden. Ein verbleibendes Wellen-

paket entsteht an der inneren Zylinderwand, ehe es in das innere Modellvolumen propagiert. Überdies stellt sich heraus, dass der rein balancierte, interne Antrieb der Schwerewellen einen signifikanten Beitrag zur Schwerewellengenerierung leistet. Im doppelperiodischen Modellsystem gibt es eine nahezu perfekte Übereinstimmung zwischen den unbalancierten Strömungsmustern in den tangential-linearen und der nichtlinearen Simulationen. Auch dort nimmt der balancierte Antrieb eine zentrale Rolle bei der Schwerewellenabstrahlung ein. Die nachfolgende Gegenüberstellung verschiedener, voneinander unabhängiger Gleichgewichtskonzepte bringt zwei grundlegende Erkenntnisse hervor. Zum einen wird deutlich, dass die balancierte Strömung der führenden Ordnung in der Rossbyzahl bereits eine erstaunliche Übereinstimmung mit der vollen Strömung liefert. Die Berücksichtigung von Gleichgewichtsbeziehungen der nächsthöheren Ordnung führt zwar zu einer weiteren Extraktion von balancierter Strömung, allerdings fällt dieser Beitrag relativ gering aus. Zum anderen erbringt die Anwendung einer Lagrange'schen Filtermethode den Nachweis, dass die Vertikalbewegungen und das horizontale Divergenzsignal in der Annuluskonfiguration fast ausschließlich auf die Schwerewellenaktivität zurückzuführen sind.

In der Arbeit werden die Resultate der Studie von Borchert et al. (2014) vertieft, in welcher die numerischen Simulationen derselbigen Annuluskonfiguration bereits auf eine erhebliche Schwerewellenaktivität an der inneren Zylinderwand und im Inneren der Strömung hindeuteten. Auf Grundlage der durchgeführten Untersuchungen ist es nun möglich, den jeweiligen Schwerewellenpaketen einen Quellmechanismus zuzuordnen. Demzufolge kann die Annahme von Borchert et al. (2014) bestätigt werden, dass ein signifikanter Anteil der Schwerewellen tatsächlich im Jet-Front System generiert wird. Neben einem Wellensignal, das sich im Druckminimum der baroklinen Welle anordnet, werden zwei weitere Wellenpakete identifiziert, die im Inneren der Strömung angeregt werden. Da sich der interne Antriebsmechanismus der Schwerewellen ausschließlich aus balancierten Strömungsanteilen zusammensetzt, kann daraus geschlossen werden, dass der zeitabhängige, großskalige Gleichgewichtsanteil kontinuierlich Schwerewellenpakete abstrahlt. Folglich sehen wir es als erwiesen an, dass der Mechanismus der spontanen Schwerewellenemission (Zhang, 2004; Vanneste, 2013) auch im differentiell geheizten rotierenden Annulusexperiment abläuft. Diese Erkenntnis ist vor allem für entsprechende Laborstudien von Interesse. Darüber hinaus besitzt das Experiment im Vergleich zu idealisierten Wirbeldipolstudien (Viúdez, 2007; Snyder et al., 2009; Wang & Zhang, 2010) komplexere und deutlich realistischere Strömungseigenschaften, wodurch es sich als Grundlage für weiterführende Untersuchungen empfiehlt.

Natürlich ist es unumstritten, dass ein erheblicher Anteil des gesamten Schwerewellensignals auch aus der Grenzschicht an der inneren Zylinderwand hervorgeht. Entsprechende Entstehungsmechanismen werden ausführlich in Jacoby et al. (2011), Randriamampiana & Crespo del Arco (2015) und in der kürzlich erschienenen Studie von von Larcher et al. (2018) diskutiert. Zu beachten ist jedoch, dass alle diese Untersuchungen in der klassischen Annulusgeometrie mit $N/f < 1$ vorgenommen werden. Der relativ große Temperaturgradient zwischen den Zylinderwänden von $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ könnte außerdem den Verdacht aufkommen lassen, dass in der betrachteten Konfiguration auch konvektiv erzeugte Schwerewellen auftreten (siehe beispielsweise Beres et al., 2004; Song & Chun, 2005). Da allerdings keine konvektiven Zellen wahrgenommen werden, scheint dieser Ent-

stehungsprozess ausgeschlossen.

Der Vergleich der Strömungseigenschaften in einer neu erbauten atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration an der BTU in Cottbus mit äquivalenten Simulationsrechnungen mit unserem numerischen Annulusmodell *cylFloit* ist zum Abgabezeitpunkt der Doktorarbeit noch nicht abgeschlossen. Vorläufige Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung der großskaligen Strömungsmuster. Sowohl im Experiment als auch in der Simulation wird eine führende barokline Wellenzahl von sieben festgestellt. Die Skalen und die Amplituden der identifizierten Schwerewellenpakete unterscheiden sich allerdings zum jetzigen Zeitpunkt noch deutlich. Mögliche Ursachen dieser Diskrepanzen werden derzeit intensiv diskutiert und mögliche Lösungsansätze getestet.

Die Erkenntnisse dieser Doktorarbeit tragen dazu bei, dem allgemeinen Ziel einer physikalisch basierten Parametrisierung der Schwerewellengenerierung im Jet-Front System einen Schritt näher zu kommen. Sicherlich verlangt dieses Vorhaben noch enormen wissenschaftlichen Fortschritt sowohl in der theoretischen Betrachtung als auch in der atmosphärischen Erfassung der ablaufenden Prozesse. Nichtsdestotrotz stimmt die hohe Forschungsaktivität in diesem Bereich zuversichtlich, dass in naher Zukunft eine effiziente, physikalisch basierte Parametrisierung entwickelt wird, die in operationellen Wetter- und Klimamodellen Anwendung findet.

Anhang A

Die Gültigkeit der Boussinesq-Näherung

In den nachfolgenden Betrachtungen wird die Gültigkeit der Boussinesq-Näherung in dem in der vorliegenden Arbeit verwendeten Temperaturbereich untersucht. Hierzu bedienen wir uns der Arbeit von Gray & Giorgini (1976), deren Ausführungen zunächst zusammengefasst und anschließend auf Basis unserer Annuluskonfiguration diskutiert werden. Um das Referenzieren zu erleichtern, übernehmen wir die dort verwendete Notation. Daher kann es an manchen Stellen zu Abweichungen zu der in der Arbeit üblichen Notation kommen.

A.1 Ausgangsgleichungen

Ausgangspunkt der Analyse bilden die vollen inkompressiblen Gleichung ohne Rotation und Volumenviskosität in kartesischer Geometrie in Indexnotation

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \rho g \mathbf{k}_i + \frac{\mu \partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} + \Gamma_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x_j}, \quad (\text{A.2})$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{K \partial^2 T}{\partial x_j^2} + \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + \alpha T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi, \quad (\text{A.3})$$

wobei

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial x_k} \delta_{ij},$$

und

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} \right).$$

Darin ist

- ρ = (volle) Dichte,
- \mathbf{V}_i = Geschwindigkeitsvektor,
- P = Druck,
- g = Erdbeschleunigung,
- \mathbf{k}_i = vertikaler Einheitsvektor,
- μ = Viskosität,
- T = Temperatur,
- c_p = spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck,
- K = Temperaturleitfähigkeit,
- α = thermischer Ausdehnungskoeffizient.

Um das Gleichungssystem (A.1)–(A.3) zu komplettieren, wird zudem eine Zustandsgleichung der Form

$$\rho = \rho(T, P), \quad (\text{A.4})$$

benötigt. Dieser Zusammenhang wird, wie auch die Temperatur- und Druckabhängigkeit der anderen physikalischen Eigenschaften, mit einem linearen Ansatz parametrisiert

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_0(T - T_0) + \beta_0(P - P_0)], \quad (\text{A.5})$$

$$c_p = c_{p0} [1 + a_0(T - T_0) + b_0(P - P_0)], \quad (\text{A.6})$$

$$\mu = \mu_0 [1 + c_0(T - T_0) + d_0(P - P_0)], \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha = \alpha_0 [1 + e_0(T - T_0) + f_0(P - P_0)], \quad (\text{A.8})$$

$$K = K_0 [1 + m_0(T - T_0) + n_0(P - P_0)], \quad (\text{A.9})$$

wobei $\rho_0, \alpha_0, \dots, n_0$ materialabhängige Größen sind, die beispielsweise aus Tabellenwerten entnommen werden können. Der tiefgestellte Index 0 kennzeichnet dabei den jeweiligen Materialwert zum Referenzzustand (T_0, P_0) .

Zunächst werden statische Schichtungseffekte beseitigt. Dies geschieht unter der Annahme einer stabil geschichteten Referenzatmosphäre (tiefgestellter Index s) mit

$$\frac{\partial P_s}{\partial x_i} = -\rho_s g \mathbf{k}_i, \quad (\text{A.10})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(K_s \frac{\partial T_s}{\partial x_j} \right) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Entsprechend lauten die Ausdrücke für ρ_s und K_s

$$\rho_s = \rho_0 [1 - \alpha_0(T_s - T_0) + \beta_0(P_s - P_0)], \quad (\text{A.12})$$

$$K_s = \rho_0 [1 + m_0(T_s - T_0) + n_0(P_s - P_0)]. \quad (\text{A.13})$$

Wir subtrahieren Gleichung (A.10) von der Impulsgleichung (A.2) und setzen die linearisierten Materialeigenschaften (A.5)–(A.9) in das Gleichungssystem (A.1)–(A.3) ein. Als Resultat erhalten wir

$$-\alpha_0 \frac{DT}{Dt} + \beta_0 \frac{DP}{Dt} + [1 - \alpha_0(T - T_0) + \beta_0(P - P_0)] \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} [1 - \alpha_0(T - T_0) + \beta_0(P - P_0)] \frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P - P_s)}{\partial x_i} + \alpha_0(T - T_s) g \mathbf{k}_i \\ -\beta_0(P - P_s) g \mathbf{k}_i + \nu_0 [1 + c_0(T - T_0) + d_0(P - P_0)] \frac{\partial \Gamma_{ij}}{\partial x_j} &+ \nu_0 \left[c_0 \frac{\partial T}{\partial x_j} + d_0 \frac{\partial P}{\partial x_j} \right] \Gamma_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned}
& [1 - \alpha_0(T - T_0) + \beta_0(P - P_0)] [1 + a_0(T - T_0) + b_0(P - P_0)] \frac{DT}{Dt} \\
= & \kappa_0 [1 + m_0(T - T_0) + n_0(P - P_0)] \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + \kappa_0 \left[m_0 \frac{\partial T}{\partial x_j} + n_0 \frac{\partial P}{\partial x_j} \right] \frac{\partial T}{\partial x_j} \\
& + \left(\frac{\alpha_0}{\rho_0 c_{p0}} \right) [1 + e_0(T - T_0) + f_0(P - P_0)] \times \left\{ (T - T_0) \frac{D}{Dt} (P - P_s) \right. \\
& \left. + T_0 \frac{D}{Dt} (P - P_s) - (T - T_0) g \mathbf{V}_3 \rho_0 [1 - \alpha_0(T_s - T_0) + \beta_0(P_s - P_0)] \right. \\
& \left. - T_0 \mathbf{V}_3 \rho_0 [1 - \alpha_0(T_s - T_0) + \beta_0(P_s - P_0)] \right\} + \frac{\nu_0}{c_{p0}} [1 + c_0(T - T_0) + d_0(P - P_0)] \Phi,
\end{aligned} \tag{A.16}$$

mit

$$\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0},$$

und

$$\kappa_0 = \frac{K_0}{\rho_0 c_{p0}}.$$

Des Weiteren wurde die Identität

$$T \frac{DP}{Dt} = (T - T_0) \frac{D(P - P_s)}{Dt} + T_0 \frac{D(P - P_s)}{Dt} - (T - T_0) \rho_s g \mathbf{V}_3 - T_0 \rho_s g \mathbf{V}_3$$

verwendet.

A.2 Entdimensionalisierung der Gleichungen

Um die relative Wichtigkeit der einzelnen Terme im Gleichungssystem (A.14)–(A.16) abzuschätzen, werden die Gleichungen entdimensionalisiert. Hierfür ist die Einführung charakteristischer Skalen notwendig. Wir betrachten hierzu eine horizontale Flüssigkeitsschicht der vertikalen Dicke L , an welcher der (vertikale) Temperaturunterschied θ angelegt wird. Eine aussagekräftige Geschwindigkeitsskala, welche die Intensität der Bewegungen widerspiegelt, ist mit $q = \sqrt{\alpha_0 g \theta L}$ gegeben. Der dynamische Druck $(P - P_s)$ skaliert mit ρq^2 , während $(P - P_0)$ und $(P_s - P_0)$ mit $\rho_0 g L$ skalieren. Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Vorschriften zwischen den vollen und den entdimensionalisierten, mit Tilde

gekennzeichneten, Variablen

$$\begin{aligned}
x_i &= L\tilde{x}_i, \\
T - T_0 &= \theta(\tilde{T} - \tilde{T}_0), \\
T - T_s &= \theta(\tilde{T} - \tilde{T}_s), \\
\mathbf{V}_i &= q\tilde{\mathbf{V}}_i = (\alpha_0 g \theta L)^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{V}}_i, \\
t &= \frac{L}{q}\tilde{t} = \left(\frac{L}{\alpha_0 g \theta}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{t}, \\
P - P_s &= \rho q^2(\tilde{P} - \tilde{P}_s) = \rho_0 \alpha_0 g \theta L(\tilde{P} - \tilde{P}_s), \\
P - P_0 &= \rho_0 g L(\tilde{P} - \tilde{P}_0), \\
\Gamma_{ij} &= \frac{q}{L}\tilde{\Gamma}_{ij} = \left(\frac{\alpha_0 g \theta}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Gamma}_{ij}, \\
\Phi &= \frac{q^2}{L^2}\tilde{\Phi} = \frac{\alpha_0 g \theta}{L}\tilde{\Phi}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Setzen wir diese Definitionen in (A.14)–(A.16) ein, so erhalten wir

$$-\epsilon_1 \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} + \epsilon_2 \frac{D\tilde{P}}{D\tilde{t}} + \left[1 - \epsilon_1(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_2(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0, \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
\left[1 - \epsilon_1(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_2(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \frac{D\tilde{\mathbf{V}}_i}{D\tilde{t}} &= -\frac{\partial(\tilde{P} - \tilde{P}_s)}{\partial \tilde{x}_i} + (\tilde{T} - \tilde{T}_s)\mathbf{k}_i - \epsilon_2(\tilde{P} - \tilde{P}_s)\mathbf{k}_i \\
&+ \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \epsilon_3(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_4(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_3 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \epsilon_4 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_j}\right] \tilde{\Gamma}_{ij},
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
&\left[1 - \epsilon_1(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_2(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \left[1 + \epsilon_5(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_6(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} \\
&= \frac{1}{(PrRa)^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \epsilon_7(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_8(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2} + \frac{1}{(PrRa)^{\frac{1}{2}}} \left[\epsilon_7 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \epsilon_8 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_j}\right] \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \\
&+ \epsilon_{11} \left[1 + \epsilon_9(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_{10}(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \left\{ \epsilon_1(\tilde{T} - \tilde{T}_0) \frac{D}{D\tilde{t}}(\tilde{P} - \tilde{P}_s) + \epsilon_1 \left(\frac{T_0}{\theta}\right) \frac{D(\tilde{P} - \tilde{P}_s)}{D\tilde{t}} \right. \\
&\quad \left. - (\tilde{T} - \tilde{T}_0)\tilde{\mathbf{V}}_3 \left[1 - \epsilon_1(\tilde{T}_s - \tilde{T}_0) + \epsilon_2(\tilde{P}_s - \tilde{P}_0)\right] \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{T_0}{\theta}\right) \tilde{\mathbf{V}}_3 \left[1 - \epsilon_1(\tilde{T}_s - \tilde{T}_0) + \epsilon_2(\tilde{P}_s - \tilde{P}_0)\right] \right\} \\
&\quad + \epsilon_{11} \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \epsilon_3(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_4(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \Phi,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

mit

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \alpha_0 \theta, \\
\epsilon_2 &= \beta_0 \rho_0 g L, \\
\epsilon_3 &= c_0 \theta, \\
\epsilon_4 &= d_0 \rho_0 g L, \\
\epsilon_5 &= a_0 \theta, \\
\epsilon_6 &= b_0 \rho_0 g L, \\
\epsilon_7 &= m_0 \theta, \\
\epsilon_8 &= n_0 \rho_0 g L, \\
\epsilon_9 &= e_0 \theta, \\
\epsilon_{10} &= f_0 \rho_0 g L, \\
\epsilon_{11} &= \frac{\alpha_0 g L}{c_{p_0}},
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$Ra = \frac{\alpha_0 g \theta L^3}{\kappa_0 \nu_0}, \tag{A.22}$$

und

$$Pr = \frac{\nu_0}{\kappa_0}. \tag{A.23}$$

A.3 Näherung der Gleichungen und Gültigkeitsbereich

Werden alle ϵ -Vorfaktoren im entdimensionalisierten Gleichungssystem (A.18)–(A.20) auf null gesetzt, so erhalten wir die traditionelle Boussinesq-Näherung. Der Vorfaktor $\left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}}$, der sowohl in der Impulsgleichung (A.19) als auch in der Temperaturgleichung (A.20) auftaucht, ist häufig sehr klein. Allerdings darf er beim Vorhandensein von festen Modellberandungen nicht vernachlässigt werden.

Im Folgenden werden die Gleichungen sukzessive vereinfacht. Im ersten Schritt leiten wir die Bedingungen ab, die erfüllt sein müssen, damit konstante Werte für ρ , c_p , μ , α und K verwendet werden können, wenn diese als multiplikative Faktoren in den Gleichungen (A.18)–(A.20) vorzufinden sind. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Faktoren $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{10}$ klein sind. Nehmen wir an, dass T_0 der Mittelwert zwischen der unteren (wärmeren) und der oberen (kühleren) Randtemperatur ist

$$T_0 = \frac{T_{max} + T_{min}}{2},$$

so können wir die Abschätzung

$$|\tilde{T} - \tilde{T}_0| = |\tilde{T}_s - \tilde{T}_0| = \frac{|T - T_0|}{\theta} = \frac{\left|\frac{T - T_{max}}{2} + \frac{T - T_{min}}{2}\right|}{T_{max} - T_{min}} \leq 0,5.$$

vornehmen. Eine ähnliche Abschätzung kann für $(\tilde{P} - \tilde{P}_0)$ beziehungsweise $(\tilde{P}_s - \tilde{P}_0)$ vorgenommen werden, wenn P_0 als der hydrostatische Druck in der Modellmitte ($z = L/2$)

angenommen wird

$$P_0 = P_{00} - \frac{\rho_0 g L}{2},$$

wobei P_{00} der maximale Druck am Boden ($z = 0$) ist. Für $(\tilde{P} - \tilde{P}_0)$ erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} \tilde{P} - \tilde{P}_0 &= \frac{P - P_0}{\rho_0 g L} = \frac{P - P_{00}}{\rho_0 g L} + 0,5, \\ &\Rightarrow |\tilde{P} - \tilde{P}_0| \leq 0,5. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt auch $|\tilde{P} - \tilde{P}_s| \leq 0,5$ im gesamten Modellgebiet. Demnach führt die Forderung

$$|\epsilon_1|, \dots, |\epsilon_{10}| \leq 0,1, \quad (\text{A.24})$$

zu einem maximalen Fehler von 10%, wenn wir $\left[1 + \epsilon_i(\tilde{T} - \tilde{T}_0) + \epsilon_j(\tilde{P} - \tilde{P}_0)\right] \approx 1$ setzen. Mit dieser durchaus vertretbaren Näherung vereinfachen sich die Gleichungen (A.18)–(A.20) zu

$$-\epsilon_1 \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} + \epsilon_2 \frac{D\tilde{P}}{D\tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0, \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{\mathbf{V}}_i}{D\tilde{t}} &= -\frac{\partial(\tilde{P} - \tilde{P}_s)}{\partial \tilde{x}_i} + (\tilde{T} - \tilde{T}_s)\mathbf{k}_i - \epsilon_2(\tilde{P} - \tilde{P}_s)\mathbf{k}_i \\ &\quad + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j} + \left(\epsilon_3 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \epsilon_4 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_j} \right) \tilde{\Gamma}_{ij} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} &= \frac{1}{(PrRa)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2} + \left(\epsilon_7 \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \epsilon_8 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_j} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \epsilon_{11} \left[\epsilon_1(\tilde{T} - \tilde{T}_0) \frac{D}{D\tilde{t}}(\tilde{P} - \tilde{P}_s) \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_1 \left(\frac{T_0}{\theta} \right) \frac{D(\tilde{P} - \tilde{P}_s)}{D\tilde{t}} - (\tilde{T} - \tilde{T}_0)\tilde{\mathbf{V}}_3 - \left(\frac{T_0}{\theta} \right) \tilde{\mathbf{V}}_3 \right] + \epsilon_{11} \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Diese erste Approximation ist gleichbedeutend mit der Verwendung der konstanten Referenzwerte (tiefgestellte 0) für die Materialeigenschaften (siehe Gleichungen (A.5)–(A.9)), sofern diese als Multiplikator auftreten. Die Temperaturabhängigkeit der Dichte bleibt allerdings im Auftriebsterm erhalten, genauso wie alle linearen Näherungen in den Ableitungen. Ohne weitere Annahmen können noch weiteren Terme in (A.25)–(A.27) vernachlässigt werden, die mit $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{10}$ multipliziert werden. Dann erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{V}}_j}{\partial \tilde{x}_j} = 0, \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{D\tilde{\mathbf{V}}_i}{D\tilde{t}} = -\frac{\partial(\tilde{P} - \tilde{P}_s)}{\partial \tilde{x}_i} + (\tilde{T} - \tilde{T}_s)\mathbf{k}_i + \left(\frac{Pr}{Ra}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}}{\partial \tilde{x}_j}, \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{D\tilde{T}}{D\tilde{t}} = \frac{1}{(PrRa)^{\frac{1}{2}}} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j^2} - \epsilon_{11} \left(\frac{T_0}{\theta} \right) \tilde{\mathbf{V}}_3 + \epsilon_{11} \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}. \quad (\text{A.30})$$

Hierbei haben wir in Gleichung (A.30) $T_0/\theta \geq 10$ angenommen und nur die größten Terme darin berücksichtigt.

Um Gleichung (A.30) weiter zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $\epsilon_{11} \ll 1$, so dass

$$\left| \epsilon_{11} \left(\frac{T_0}{\theta} \right) \right| \leq 0,1, \quad (\text{A.31})$$

und

$$|\epsilon_{11}| \left(\frac{Pr}{Ra} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0,1 \frac{1}{(PrRa)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.32})$$

Sind die Bedingungen (A.24), (A.31) und (A.32) erfüllt, so erhalten wir die traditionellen Boussinq-Gleichungen, die in dimensionsbehafteter Form die folgende Gestalt annehmen

$$\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{D\mathbf{V}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P - P_s)}{\partial x_i} + \alpha_0 g(T - T_s) \mathbf{k}_i + \nu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{V}_i}{\partial x_j^2}, \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2}. \quad (\text{A.35})$$

Auf Grundlage der physikalischen Eigenschaften von Wasser bei einer Referenztemperatur von $T_0 = 15^\circ\text{C}$ und einem Druck von $P_0 = 1000 \text{ hPa}$ werden in Tabelle A.1 Werte für die entdimensionalisierten Größen $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{11}$ in Abhängigkeit von θ und L bereitgestellt. Wie daraus zu erkennen ist, folgen die striktesten Bedingungen aus den Forderungen $\epsilon_9 \leq 0,1$ und $\epsilon_8 \leq 0,1$. Diese lauten

$$\theta \leq 1,25^\circ\text{C}, \quad (\text{A.36})$$

und

$$L \leq 2,4 \times 10^5 \text{ cm}. \quad (\text{A.37})$$

Die Bedingungen (A.31) und (A.32) verlangen

$$\frac{L}{\theta} \leq 9,9 \times 10^4 \text{ cm}/^\circ\text{C}, \quad (\text{A.38})$$

und

$$L \leq 3,5 \times 10^6 \text{ cm}. \quad (\text{A.39})$$

- ϵ_1 :	$1,5 \times 10^{-4}\theta$
- ϵ_2 :	$4,8 \times 10^{-8}L$
- ϵ_3 :	$-2,7 \times 10^{-2}\theta$
- ϵ_4 :	$-2,7 \times 10^{-8}L$
- ϵ_5 :	$-2,4 \times 10^{-4}\theta$
- ϵ_6 :	$-2,4 \times 10^{-7}L$
- ϵ_7 :	$1,7 \times 10^{-3}\theta$
- ϵ_8 :	$4,2 \times 10^{-7}L$
- ϵ_9 :	$8,0 \times 10^{-2}\theta$
- ϵ_{10} :	0
- ϵ_{11} :	$3,5 \times 10^{-9}L$

Tabelle A.1: Entdimensionalisierte Parameter (A.21) für Wasser bei einer Temperatur von $T_0 = 15^\circ\text{C}$ und einem Druck von $P_0 = 1000\text{ hPa}$. Aus Gray & Giorgini (1976).

Beziehen wir die hier abgeleiteten Bedingungen auf unsere Annuluskonfiguration, so können wir die folgenden Schlüsse ziehen. Benutzen wir für die charakteristische Längenskala L entweder die radiale Spaltbreite der Annuluskonfiguration $L = b - a = 50\text{ cm}$ oder die Säulenhöhe $d = 4\text{ cm}$, so zeigt sich unter Verwendung von $\theta = 30^\circ\text{C}$, dass die Bedingungen (A.37), (A.38) und (A.39) erfüllt sind und daher keinerlei Probleme darstellen. Gleichung (A.36) ist zwar nicht befriedigt, allerdings gilt diese Forderung nur, wenn konstante Materialeigenschaften (siehe Gleichungen (A.5)–(A.9)) angenommen werden. Unsere (erweiterte) Form der Boussinesq-Gleichungen, eingeführt in Abschnitt 2.1, nimmt sogar eine quadratische Temperaturabhängigkeit der Parameter μ und K an, welche die Materialeigenschaften nahezu perfekt parametrisiert (vergleiche Abbildung 2.2). Auch die räumlichen Ableitungen von μ und K finden in der Impulsgleichung (2.4) und in der Temperaturgleichung (2.7) Berücksichtigung.

Wir setzen $\rho = \rho_0$, sofern die Dichte(abweichungen) nicht mit der Erdbeschleunigung multipliziert werden. Des Weiteren nehmen wir $c_p = c_{p_0}$ an. In Bezug auf die entdimensionalisierten Parameter $\epsilon_1 - \epsilon_{10}$ fordern wir also lediglich

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_5, \epsilon_6 \leq 0,1,$$

was beim Blick auf die Tabellenwerte A.1 auf alle Fälle gerechtfertigt ist. Darüber hinaus finden wir $\epsilon_{11} \ll 0,1$. Zu beachten ist außerdem, dass eine Druckabhängigkeit der genannten physikalischen Eigenschaften im Allgemeinen nicht erforderlich ist, da diese für Wasser verschwindend gering ist. Demnach benutzen wir die Kontinuitätsgleichung (A.18) mit $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$, die Impulsgleichung (A.19) in der vollen Form, und die Temperaturgleichung (A.20) mit $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = 0$ und $\epsilon_{11} = 0$. Aufgrund der in dieser Arbeit verwendeten parabelförmigen Parametrisierungen für κ und μ unterscheidet sich allerdings die Form einzelner Terme der rechten Seiten in Gleichungen (A.19) und (A.20) von unseren Gleichungen.

Zusammenfassend zeigt sich also, dass alle Vereinfachungen, die, ausgehend von den vollen inkompressiblen Gleichungen, zu unserem erweiterten Boussinesq-Gleichungssystem führen, unbedenklich sind und die Gleichungen auch in der betrachteten Temperaturspanne anwendbar sind. Eine kleine Unsicherheit bleibt allerdings bestehen, da die Referenzwerte in Tabelle A.1 für eine Referenztemperatur von $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ermittelt wurden, während unsere Studien bei $T_0 = 30^\circ\text{C}$ vorgenommen werden. Es werden jedoch dadurch keine signifikant verschiedenen Ergebnisse erwartet. Eine ähnliche Betrachtung für das doppeltperiodische Modellsystem führt zu denselben Erkenntnissen.

Anhang B

Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen bildet das Gleichungssystem (4.11)–(4.14). Der Einfachheit halber wird für die nachfolgenden Berechnungen kartesische Geometrie verwendet. Im ersten Schritt zerlegen wir die Zustandsvariablen in einen großskaligen und einen kleinskaligen Anteil

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ B \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ B_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ B' \\ p' \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

wobei die großskaligen Variablen das geostrophische und hydrostatischen Gleichgewicht erfüllen und die großskaligen Vertikalgeschwindigkeit verschwindet

$$u_0 = -\frac{1}{f} \frac{\partial p_0}{\partial y}, \quad (\text{B.2})$$

$$v_0 = \frac{1}{f} \frac{\partial p_0}{\partial x}, \quad (\text{B.3})$$

$$w_0 = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$B_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = N^2. \quad (\text{B.6})$$

Nun setzen wir die Zerlegung (B.1) in das volle Gleichungssystem (4.11)–(4.14) ein und vernachlässigen alle Nichtlinearitäten in den kleinskaligen Feldern. Zudem nehmen wir eine ausreichend glatte Hintergrundströmung an, so dass auch die räumlichen und zeitlichen Ableitungen der großskaligen Felder nicht berücksichtigt werden. Mit diesen Vereinfachungen, die im Rahmen der Theorie von Wentzel, Kramers und Brillouin (WKB-Theorie,

siehe beispielsweise Grimshaw (1975)) gerechtfertigt sind, erhalten wir

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}' = -f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u}' - \nabla_h p', \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla w' = B' - \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial B'}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla B' = -N^2 w', \quad (\text{B.9})$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{v}'. \quad (\text{B.10})$$

Im nächsten Schritt führen wir die Fourier-Entwicklung der kleinskaligen Felder $\mathbf{z}' = (u', v', w', B', p')^T$ ein

$$\mathbf{z}'(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\mathbf{z}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (\text{B.11})$$

wobei $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B}, \hat{p})^T$ die Fouriertransformierten darstellt. Setzen wir die Entwicklung in (B.7)–(B.10) ein und nehmen die Hintergrundströmung als konstant an, so bekommen wir die linearisierten Boussine-Gleichungen im Fourierraum, die jede einzelne Mode erfüllen muss

$$-i\tilde{\omega} \hat{u} = f \hat{v} - ik_x \hat{p}, \quad (\text{B.12})$$

$$-i\tilde{\omega} \hat{v} = -f \hat{u} - ik_y \hat{p}, \quad (\text{B.13})$$

$$-i\tilde{\omega} \hat{w} = \hat{B} - ik_z \hat{p}, \quad (\text{B.14})$$

$$-i\tilde{\omega} \hat{B} = -N^2 \hat{w}, \quad (\text{B.15})$$

$$0 = i(k_x \hat{u} + k_y \hat{v} + k_z \hat{w}). \quad (\text{B.16})$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\omega} = \omega - k_x u_0 - k_y v_0$ die intrinsische Frequenz. Gleichungssystem (B.12)–(B.16) kann alternativ auch in Matrix-Vektor-Form dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} -i\tilde{\omega} & -f & 0 & 0 & ik_x \\ f & -i\tilde{\omega} & 0 & 0 & ik_y \\ 0 & 0 & -i\tilde{\omega} & -1 & ik_z \\ 0 & 0 & N^2 & -i\tilde{\omega} & 0 \\ ik_x & ik_y & ik_z & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{B} \\ \hat{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Um nichttriviale Lösungen zu erhalten, muss die Determinante der Matrix verschwinden. Demnach muss gelten

$$\tilde{\omega} \{ \tilde{\omega} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] - N^2 (k_x^2 + k_y^2) - f^2 k_z^2 \} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Die Lösungen dieser Gleichung führen uns zu den drei Eigenfrequenzen des linearen Systems. Es handelt sich dabei um die geostrophischen Mode mit der Eigenfrequenz

$$\tilde{\omega}_1 = 0, \quad (\text{B.19})$$

und um die beiden Schwerewellenmoden mit den Eigenfrequenzen

$$\tilde{\omega}_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \quad (\text{B.20})$$

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der geostrophischen Mode setzen wir (B.19) in (B.12)–(B.16) ein und erhalten

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \left(-\frac{k_y}{f}, \frac{k_x}{f}, 0, k_z \right)^T \text{i}\hat{p}. \quad (\text{B.21})$$

Die Normierung von $\tilde{\mathbf{z}}_1$ erfolgt mittels des Energieskalarprodukts

$$\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle = \frac{1}{2} \left(\hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^* + \hat{w}\hat{w}^* + \frac{\hat{B}\hat{B}^*}{N^2} \right). \quad (\text{B.22})$$

Damit erhalten wir den normierten geostrophischen Eigenvektor

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_1 &= \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{z}}_1\|} \tilde{\mathbf{z}}_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}fN}{\sqrt{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}} \left(-\frac{k_y}{f}, \frac{k_x}{f}, 0, k_z \right)^T \text{i}\hat{p} \\ &=: \hat{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Zur Berechnung der Schwerewellenmoden multiplizieren wir zunächst (B.12)–(B.16) mit $(-\text{i}\tilde{\omega}_{2,3})$. Einfache Umformungen führen dann zu

$$(\tilde{\omega}_{2,3}^2 - f^2) \hat{u} = (\tilde{\omega}_{2,3} k_x + \text{i}k_y f) \hat{p}, \quad (\text{B.24})$$

$$(\tilde{\omega}_{2,3}^2 - f^2) \hat{v} = (\tilde{\omega}_{2,3} k_y - \text{i}k_x f) \hat{p}, \quad (\text{B.25})$$

$$(\tilde{\omega}_{2,3}^2 - N^2) \hat{w} = \tilde{\omega}_{2,3} k_z \hat{p}, \quad (\text{B.26})$$

$$(\tilde{\omega}_{2,3}^2 - N^2) \hat{B} = -\text{i}N^2 k_z \hat{p}, \quad (\text{B.27})$$

was wir zusammenfassen als

$$\tilde{\mathbf{z}}_{2,3} = \left(\frac{\tilde{\omega}_{2,3} k_x + \text{i}k_y f}{\tilde{\omega}_{2,3}^2 - f^2}, \frac{\tilde{\omega}_{2,3} k_y - \text{i}k_x f}{\tilde{\omega}_{2,3}^2 - f^2}, \frac{\tilde{\omega}_{2,3} k_z}{\tilde{\omega}_{2,3}^2 - N^2}, -\frac{\text{i}N^2 k_z}{\tilde{\omega}_{2,3}^2 - N^2} \right)^T \hat{p}. \quad (\text{B.28})$$

Des Weiteren finden wir mit der Dispersionsrelation (B.20)

$$\tilde{\omega}_{2,3}^2 - N^2 = -(N^2 - f^2) \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (\text{B.29})$$

$$\tilde{\omega}_{2,3}^2 - f^2 = (N^2 - f^2) \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}, \quad (\text{B.30})$$

so dass Gleichung (B.28) geschrieben werden kann als

$$\tilde{\mathbf{z}}_{2,3} = \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{(N^2 - f^2)k_z} \left(\frac{k_z(\tilde{\omega}_{2,3} k_x + \text{i}k_y f)}{k_x^2 + k_y^2}, \frac{k_z(\tilde{\omega}_{2,3} k_y - \text{i}k_x f)}{k_x^2 + k_y^2}, -\tilde{\omega}_{2,3}, \text{i}N^2 \right) \hat{p}. \quad (\text{B.31})$$

Zur Normierung berechnen wir unter Einbezug der Dispersionsrelation (B.20) zunächst

$$\langle \tilde{\hat{z}}_{2,3}, \tilde{\hat{z}}_{2,3} \rangle = \frac{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^2 \tilde{\omega}_{2,3}^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{(N^2 - f^2) k_z^2 (k_x^2 + k_y^2)} \|\hat{p}\|^2. \quad (\text{B.32})$$

Letztendlich nehmen die normierten Eigenvektoren der Schwerewellenmoden folgende Form an

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_{2,3} &= \frac{1}{\|\tilde{\hat{\mathbf{z}}}_{2,3}\|} \tilde{\hat{\mathbf{z}}}_{2,3} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{k}\|} \left[\frac{k_z \left(k_x + ik_y \frac{f}{\tilde{\omega}_{2,3}} \right)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \frac{k_z \left(k_y - ik_x \frac{f}{\tilde{\omega}_{2,3}} \right)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, i\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \frac{N^2}{\tilde{\omega}_{2,3}} \right]^T \frac{\hat{p}}{\|\hat{p}\|} \\ &=: \hat{\mathbf{s}}^\pm, \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

wobei $\|\mathbf{k}\| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

Wir sehen uns zwei Spezialfälle genauer an. Der Grenzfall $\tilde{\omega}_{2,3} = \pm N$ mit $k_z = 0$ und $k_x, k_y \neq 0$ (hochfrequente Schwerewellen mit rein vertikaler Gruppengeschwindigkeit) ist durch Gleichung (B.33) abgedeckt. Demgegenüber finden wir eine Singularität im Nenner von Gleichung (B.33), wenn wir den Grenzfall der Trägheitschwingung $\tilde{\omega}_{2,3} = \pm f$ mit $k_x, k_y = 0$ und $k_z \neq 0$ betrachten. Daher greifen wir auf das Gleichungssystem (B.12)–(B.16) zurück, das in diesem Spezialfall lautet

$$-i(\pm f)\hat{u} = f\hat{v}, \quad (\text{B.34})$$

$$-i(\pm f)\hat{v} = -f\hat{u}, \quad (\text{B.35})$$

$$-i(\pm f)\hat{w} = \hat{B} - ik_z\hat{p}, \quad (\text{B.36})$$

$$-i(\pm f)\hat{B} = -N^2\hat{w}, \quad (\text{B.37})$$

$$0 = ik_z\hat{w}. \quad (\text{B.38})$$

Daraus folgt $\hat{w} = \hat{B} = \hat{p} = 0$ und

$$\hat{\mathbf{z}}_{2,3} = (1, \mp i, 0, 0)^T \frac{\hat{u}}{\|\hat{u}\|} = \hat{\mathbf{s}}^\pm. \quad (\text{B.39})$$

Neben der geostrophischen Mode und der beiden Schwerewellenmoden wird ein weiterer Eigenvektor $\hat{\mathbf{d}}$ benötigt, da aufgrund numerischer Ungenauigkeiten nicht gewährleistet werden kann, dass die Kontinuitätsgleichung (B.16) erfüllt ist. Als Bedingung fordern wir, dass $\hat{\mathbf{d}}$ im Sinne des Energieskalarprodukts senkrecht auf den anderen Eigenvektoren steht

$$\langle \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad (\text{B.40})$$

$$\langle \hat{\mathbf{s}}^\pm, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad (\text{B.41})$$

und $\langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 1$ erfüllt. Wir finden

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} (k_x, k_y, k_z, 0)^T. \quad (\text{B.42})$$

Mit der Struktur der Schwerewellenmoden (B.33) beziehungsweise (B.39) kann gezeigt werden, dass lineare Schwerewellen keinen Beitrag zur linearen PV leisten. Die Fouriertransformierte der linearen PV (siehe Gleichung (4.4)) lautet

$$\begin{aligned}\hat{\Pi} &= \hat{\zeta} + \frac{f}{N^2} \frac{\partial \hat{B}}{\partial z} \\ &= ik_x \hat{v} - ik_y \hat{u} + i \frac{f}{N^2} k_z \hat{B}.\end{aligned}\tag{B.43}$$

Setzen wir die entsprechenden Terme für \hat{u} , \hat{v} und \hat{B} aus Gleichung (B.33) ein, so folgt direkt

$$\hat{\Pi} = 0,\tag{B.44}$$

was ein Beweis für unsere Aussage liefert.

Anhang C

Entwicklungsgleichung der linearen potentiellen Vorticity

Auf Grundlage der Definition der linearen potentiellen Vorticity in Gleichung (4.4) kann eine prognostische Gleichung für die PV hergeleitet werden. Anwendung der materiellen Ableitung auf Π ergibt

$$\frac{D\Pi}{Dt} = \frac{D\zeta}{Dt} + \frac{f}{N^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right), \quad (\text{C.1})$$

wobei wir hier $f = 2\Omega = \text{konst.}$ ausgenutzt haben und auch die Schichtung N^2 hier, wie auch an allen anderen Stelle dieser Arbeit, als konstant angenommen wird. Bei dem ersten Term auf der rechten Seite in Gleichung (C.1) handelt es sich um die Zeitentwicklung der relativen Vorticity $\zeta = (\nabla \times \mathbf{v})$. Ein Ausdruck für diese prognostische Gleichung wird zum Beispiel in Vallis (2006) hergeleitet

$$\frac{D\zeta}{Dt} = -(f + \zeta)\delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot (\mathbf{e}_z \times \nabla_h w). \quad (\text{C.2})$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite in (C.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{DB}{Dt} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla B \\ &= -N^2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_h B - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} \\ &= \left(N^2 + \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_h B. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Hier wurde im zweiten Schritt von der Auftriebsgleichung (4.13) und im dritten Schritt von der Kontinuitätsgleichung (4.14) sowie von der Definition der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz (3.5) Gebrauch gemacht.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{D\Pi}{Dt} = - \left(\zeta - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \left(\mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B \right). \quad (\text{C.4})$$

Anhang D

Balancierte Antriebsterme im tangential-linearen Modell

Ziel der folgenden Berechnungen ist die Extraktion des rein balancierten Anteils, der in den Termen

$$\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} = \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b + \left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_u, \quad (\text{D.1})$$

und

$$\frac{DB_b}{Dt} = \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b + \left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_u, \quad (\text{D.2})$$

enthalten ist. Dafür wenden wir zunächst die materielle Ableitung auf das geostrophische und das hydrostatische Gleichgewicht (Gleichungen (4.2) und (4.3)) an

$$\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left(\frac{D}{Dt} \nabla_h p_b \right) = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left(\nabla_h \frac{Dp_b}{Dt} - \nabla_h \mathbf{v} \cdot \nabla p_b \right), \quad (\text{D.3})$$

$$\frac{DB_b}{Dt} = \frac{D}{Dt} \frac{\partial p_b}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla p_b. \quad (\text{D.4})$$

Um einen Ausdruck für Dp_b/Dt zu erhalten, betrachten wir

$$\begin{aligned} \nabla_{qg} \frac{Dp_b}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg} (\mathbf{v} \cdot \nabla p_b) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla p_b + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_{qg} p_b \\ &= \frac{D}{Dt} \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla p_b. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Damit berechnen wir

$$\nabla_{qg}^2 \frac{Dp_b}{Dt} = \nabla_{qg} \cdot \nabla_{qg} \frac{Dp_b}{Dt} = \nabla_{qg} \cdot \frac{D}{Dt} \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla p_b). \quad (\text{D.6})$$

Der erste Term auf der rechten Seite in Gleichung (D.6) kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \nabla_{qg} \cdot \frac{D}{Dt} \nabla_{qg} p_b &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 p_b + \nabla_{qg} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 p_b + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_{qg}^2 p_b \\ &= \frac{D}{Dt} \nabla_{qg}^2 p_b + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b, \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

und der zweite

$$\nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla p_b) = \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla p_b + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b, \quad (\text{D.8})$$

wobei $\cdot\cdot$ das Doppelskalarprodukt zweier Matrizen bezeichnet. Für zwei beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$; $i, j, n \in \mathbb{R}$ und $1 \leq i, j \leq n$ ist das Doppelskalarprodukt allgemein definiert als

$$A \cdot\cdot B = A_{jk} B_{kj}. \quad (\text{D.9})$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$\nabla_{qg}^2 \frac{Dp_b}{Dt} = \frac{D}{Dt} \nabla_{qg}^2 p_b + 2 \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla p_b. \quad (\text{D.10})$$

Damit bekommen wir für Dp_b/Dt

$$\frac{Dp_b}{Dt} = \nabla_{qg}^{-2} \left(f \frac{D\Pi}{Dt} + 2 \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla p_b \right), \quad (\text{D.11})$$

wobei wir die Beziehung $\nabla_{qg}^2 p_b = f\Pi$ eingesetzt haben (vergleiche Gleichung (4.4)). Das ermöglicht uns nun die balancierten und unbalancierten Terme in Dp_b/Dt

$$\frac{Dp_b}{Dt} = \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b + \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_u, \quad (\text{D.12})$$

explizit zu bestimmen. Diese lauten

$$\left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b = \nabla_{qg}^{-2} (\nabla_{qg}^2 \mathbf{u}_b \cdot \nabla_h p_b), \quad (\text{D.13})$$

$$\left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_u = \nabla_{qg}^{-2} \left(f \frac{D\Pi}{Dt} + 2 \nabla_{qg} \mathbf{v}_u \cdot \nabla_{qg} p_b + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right). \quad (\text{D.14})$$

Hier haben wir ausgenutzt, dass $D\Pi/Dt$ keinen rein balancierten Anteil besitzt (siehe Kapitel 4.1) und $\nabla_{qg} \mathbf{u}_b \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b = 0$, was wir im Folgenden beweisen. Zur Vereinfachung greifen wir auf kartesische Koordinaten zurück, ein Beweis mit Zylinderkoordinaten verläuft analog.

Unter Verwendung des geostrophischen Gleichgewichts in der Form

$$\mathbf{u}_b = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \nabla_h p_b, \quad (\text{D.15})$$

erhalten wir

$$\nabla_{qg} \mathbf{u}_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{f}{N} \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{f} \frac{\partial p_b}{\partial y} \\ \frac{1}{f} \frac{\partial p_b}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 p_b}{\partial x \partial y} & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 p_b}{\partial x^2} & 0 \\ -\frac{1}{f} \frac{\partial^2 p_b}{\partial y^2} & \frac{1}{f} \frac{\partial^2 p_b}{\partial y \partial x} & 0 \\ -\frac{1}{N} \frac{\partial^2 p_b}{\partial z \partial y} & \frac{1}{N} \frac{\partial^2 p_b}{\partial z \partial x} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.16})$$

und

$$\nabla \nabla_{qg} p_b = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial p_b}{\partial x} \\ \frac{\partial p_b}{\partial y} \\ \frac{f}{N} \frac{\partial p_b}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_b}{\partial x^2} & \frac{\partial p_b}{\partial x \partial y} & \frac{f}{N} \frac{\partial p_b}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial p_b}{\partial y \partial x} & \frac{\partial p_b}{\partial y^2} & \frac{\partial p_b}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial p_b}{\partial z \partial x} & \frac{\partial p_b}{\partial z \partial y} & \frac{\partial p_b}{\partial z^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.17})$$

Führen wir damit das Doppelskalarprodukt beider Matrizen aus, so folgt

$$\nabla_{qg} \mathbf{u}_b \cdot \nabla \nabla_{qg} p_b = (\nabla_{qg} \mathbf{u}_b)_{ij} (\nabla \nabla_{qg} p_b)_{ji} = 0. \quad (\text{D.18})$$

Mit den Ausdrücken (D.13)–(D.14) lauten somit die gesuchten Terme

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_b = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left[\nabla_h \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b - \nabla_h \mathbf{u}_b \cdot \nabla_h p_b \right], \quad (\text{D.19})$$

$$\left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_b = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_b - \frac{\partial \mathbf{u}_b}{\partial z} \cdot \nabla_h p_b, \quad (\text{D.20})$$

und

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_b}{Dt} \right)_u = \frac{1}{f} \mathbf{e}_z \times \left[\nabla_h \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_u - \nabla_h \mathbf{v}_u \cdot \nabla p_b \right], \quad (\text{D.21})$$

$$\left(\frac{DB_b}{Dt} \right)_u = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{Dp_b}{Dt} \right)_u - \frac{\partial \mathbf{v}_u}{\partial z} \cdot \nabla p_b. \quad (\text{D.22})$$

Anhang E

Nebenrechnungen zum Inversionsproblem

In diesem Abschnitt wird ein relativ einfach umzusetzendes Verfahren vorgestellt, das die Bestimmung der in Kapitel 4.2.2 eingeführten Funktion $\tilde{\beta}$ zum Ziel hat. Wir beschränken uns hierbei auf die Annuluskonfiguration. Vorgegeben sind lediglich die Gradienten von $\tilde{\beta}$ senkrecht zur Annulusberandung (vergleiche Gleichungen (4.62) und (4.63)). Außerdem sollte die Funktion zweifach stetig differenzierbar sein, da der quasigeostrophische Laplace-Operator auf sie angewendet wird (siehe Gleichung (4.66)). Nachfolgend werden die in der Arbeit vorkommenden Inversionsgleichungen (4.4), (4.25) und (4.39) separat behandelt und die entsprechende Bestimmungsgleichungen für $\tilde{\beta}$ abgeleitet.

Im Fall der PV-Inversion (4.4) verschwinden die radialen Ableitungen von $\beta = p_b$ an den Zylinderwänden und es liegen hydrostatische Bedingungen an den vertikalen Rändern vor (siehe Gleichung (4.45)). Es liegt nahe für jeden Gitterpunkt in der (r, ϑ) -Ebene eine vertikal abhängige Parabel

$$\tilde{\beta}_1(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad (\text{E.1})$$

zu definieren, wobei mit (4.45) gilt

$$\left. \frac{\partial \tilde{\beta}_1}{\partial z} \right|_{z=0,d} = B(r, \vartheta)|_{z=0,d}. \quad (\text{E.2})$$

Die Parameter c_1 und c_2 werden für jeden Gitterpunkt in der (r, ϑ) -Ebene separat berechnet, wobei die Werte aus der Bedingung (E.2) resultieren. Des Weiteren setzen wir der Einfachheit halber $c_0 = 0$, was keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Für die beiden anderen Inversionsgleichungen (4.25) und (4.39) liegen zudem nicht verschwindende radiale Ableitungen an den Zylinderwänden vor. Folglich müssen Funktionen $\tilde{\beta}_2$ und $\tilde{\beta}_3$ bestimmt werden, die sowohl nichttriviale Randbedingungen an den radialen als auch an den vertikalen Rändern aufweisen. Diese Vorgaben werden umgesetzt, indem an jedem azimutalen Ort ϑ , eine Funktion definiert wird, die sich aus vier Teilfunktionen zusammensetzt. Zur Illustration ist in Abbildung E.1 eine (r, z) -Ebene dargestellt. Wie daraus ersichtlich, ist die Ebene anhand der beiden Diagonalen in vier Teilbereiche (I–IV) unterteilt, in denen jeweils separat eine parabelförmige Funktion definiert wird.

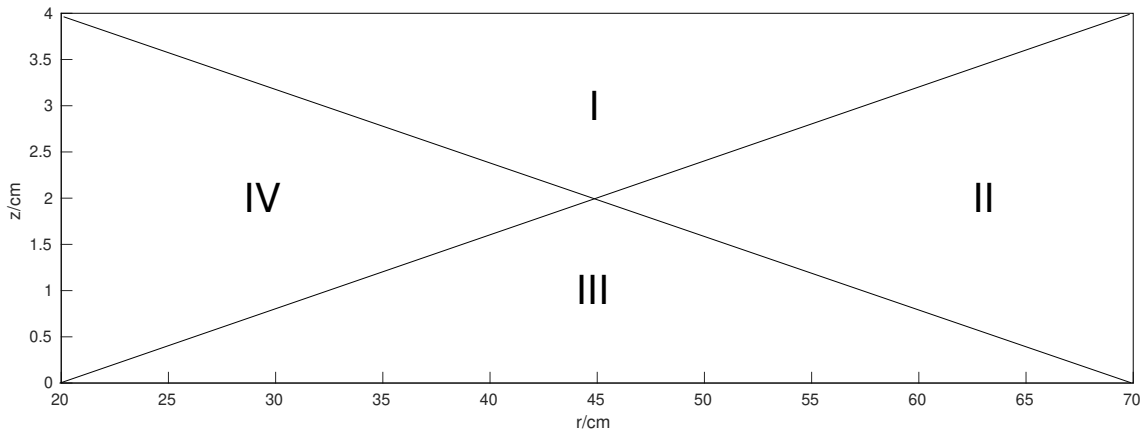


Abbildung E.1: Aufteilung der (r, z) -Ebene anhand der beiden Diagonalen in vier Bereiche I–IV. In jedem Bereich wird eine Funktion definiert, welche die jeweiligen vertikalen/radialen Randbedingungen der gesuchten Funktion erfüllt. Die Funktionswerte und die ersten Ableitungen werden zum inneren Grenzbereich hin auf null gesetzt.

Beispielsweise gilt für die zu Gleichung (4.25) gehörige Funktion $\tilde{\beta}_2$

$$\tilde{\beta}_2 = \begin{cases} \tilde{\beta}_2^I &= d_2 z^2 + d_1 z + d_0, & (r, z) \in I, \\ \tilde{\beta}_2^{II} &= e_2 r^2 + e_1 r + e_0, & (r, z) \in II, \\ \tilde{\beta}_2^{III} &= f_2 z^2 + f_1 z + f_0, & (r, z) \in III, \\ \tilde{\beta}_2^{IV} &= g_2 r^2 + g_1 r + g_0, & (r, z) \in IV, \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

und unter Verwendung von (4.51) und (4.54)

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_2^I}{\partial z} = 2d_2 z + d_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial z} \cdot \nabla p_b \right|_{z=d}, \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_2^{II}}{\partial r} = 2e_2 r + e_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial r} \cdot \nabla p_b \right|_{r=b}, \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_2^{III}}{\partial z} = 2f_2 z + f_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial z} \cdot \nabla p_b \right|_{z=0}, \quad (\text{E.6})$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_2^{IV}}{\partial r} = 2g_2 r + g_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial r} \cdot \nabla p_b \right|_{r=a}. \quad (\text{E.7})$$

Die Funktion $\tilde{\beta}_2^I$ beispielsweise befindet sich im zentralen oberen Bereich der Ebene und daher im Einzugsbereich der oberen vertikalen Randbedingung. Folglich wird $\tilde{\beta}_2^I$ als parabelförmige, vertikal abhängige Funktion definiert, die den gewünschten vertikalen Gradienten am Rand aufweist. Ähnliches gilt für $\tilde{\beta}_2^{III}$, die sich im Einflussbereich der unteren, vertikalen Randbedingung befindet. Für die von den radialen Randbedingungen beeinflussten Gebieten (II, IV) werden jeweils radial abhängige Parabeln bestimmt, welche die gewünschten Eigenschaften erfüllen. Um zusätzlich zu gewährleisten, dass an den Grenzbereichen zwischen verschiedenen Gebieten keine Unstetigkeiten auftreten,

werden die Funktionswerte und die ersten Ableitungen zum inneren Randbereich hin, der durch die Diagonalen begrenzt wird, auf null gesetzt. Auch in diesem Fall setzen wir $d_0 = e_0 = f_0 = g_0 = 0$. Die zu Gleichung (4.39) gehörende Funktion $\tilde{\beta}_3$ ergibt sich analog.

In der doppeltperiodischen, kartesischen Geometrie sind nur die vertikalen Randbedingungen in $\tilde{\beta}$ relevant, da die sich die Flächenintegrale über die horizontalen Ränder jeweils kompensieren. Daher ist nicht nur in der PV-Inversion (siehe oben), sondern auch in den beiden verbleibenden Invertierungen nur eine vertikale Abhängigkeit von $\tilde{\beta}$ vonnöten.

Anhang F

Herleitung der Omegagleichung

In diesem Kapitel erfolgt die Herleitung der quasigeostrophischen Omegagleichung, deren Lösung eine Abschätzung für die großskalige Vertikalgeschwindigkeit bereitstellt. Zur Vereinfachung beschränken wir uns dabei auf kartesische Koordinaten, allerdings führen wir am Ende eine Verallgemeinerung der Ergebnisse auf beliebige Koordinatensysteme durch. Ausgangspunkt der Herleitung sind die beiden horizontalen Impulsgleichungen (4.11), die Auftriebsgleichung (4.13) und die Divergenzfreiheit der Strömung (4.14)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -f\mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - \nabla_h p, \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{DB}{Dt} = -N^2 w, \quad (\text{F.2})$$

$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (\text{F.3})$$

Außerdem verwenden wir das geostrophische und das hydrostatische Gleichgewicht

$$\mathbf{u}_b = \frac{1}{f}\mathbf{e}_z \times \nabla_h p, \quad (\text{F.4})$$

$$B = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (\text{F.5})$$

unter der Annahme, dass $p = p_b$ und $B = B_b$ (Holton, 2004). Des Weiteren werden nur die führenden Ordnungen in der materiellen Ableitung berücksichtigt

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla_h + w \frac{\partial}{\partial z} \\ &\approx \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_b \cdot \nabla_h \\ &= \frac{D_g}{Dt}, \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

und wir treffen die Näherungen (Holton, 2004)

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{D_g \mathbf{u}_b}{Dt}, \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{DB}{Dt} = \frac{D_g B_b}{Dt}. \quad (\text{F.8})$$

Nach der Separation der Variablen in balancierte und unbalancierte Felder vereinfacht sich (F.1)–(F.2) damit zu

$$\frac{D_g u_b}{Dt} - f v_u = 0, \quad (\text{F.9})$$

$$\frac{D_g v_b}{Dt} + f v_u = 0, \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{D_g B_b}{Dt} + N^2 w_{bal} = 0. \quad (\text{F.11})$$

Die volle Vertikalgeschwindigkeit $w = w_u = w_{bal} + w_{unbal}$ wurde dabei in einen balancierten Teil w_{bal} und in einen unbalancierten Anteil w_{unbal} aufgespalten. w_{bal} ist dabei der Beitrag, der aus der Omegagleichung stammt und eine Ordnung kleiner in Ro ist als die führenden horizontalen Geschwindigkeiten \mathbf{u}_b . w_{unbal} ist der verbleibende unbalancierte Vertikalwind und beinhaltet das Schwerewellensignal.

Berechnen wir $\frac{\partial(\text{F.9})}{\partial z} + \frac{1}{f} \frac{\partial(\text{F.11})}{\partial y}$ unter Verwendung der thermischen Windrelationen und der Divergenzfreiheit der führenden horizontalen Strömung

$$\frac{\partial u_b}{\partial z} = -\frac{1}{f} \frac{\partial B_b}{\partial y}, \quad (\text{F.12})$$

$$\frac{\partial v_b}{\partial z} = \frac{1}{f} \frac{\partial B_b}{\partial x}, \quad (\text{F.13})$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial x} = -\frac{\partial v_b}{\partial y}, \quad (\text{F.14})$$

so erhalten wir

$$N^2 \frac{\partial w_{bal}}{\partial y} - f^2 \frac{\partial v_u}{\partial z} = -2 \left(\frac{\partial u_b}{\partial y} \frac{\partial B_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} \frac{\partial B_b}{\partial y} \right) \quad (\text{F.15})$$

$$= -2Q_2, \quad (\text{F.16})$$

mit $Q_2 = \left(\frac{\partial u_b}{\partial y} \frac{\partial B_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial y} \frac{\partial B_b}{\partial y} \right)$.

Eine analoge Rechnung für $-\frac{\partial(\text{F.10})}{\partial z} + \frac{1}{f} \frac{\partial(\text{F.11})}{\partial x}$ liefert

$$N^2 \frac{\partial w_{bal}}{\partial x} - f^2 \frac{\partial u_u}{\partial z} = -2 \left(\frac{\partial u_b}{\partial x} \frac{\partial B_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial x} \frac{\partial B_b}{\partial y} \right) \quad (\text{F.17})$$

$$= -2Q_1, \quad (\text{F.18})$$

wobei $Q_1 = \left(\frac{\partial u_b}{\partial x} \frac{\partial B_b}{\partial x} + \frac{\partial v_b}{\partial x} \frac{\partial B_b}{\partial y} \right)$. Aus $\frac{\partial(\text{F.15})}{\partial y} + \frac{\partial(\text{F.17})}{\partial x}$ folgt mit $\frac{\partial u_u}{\partial x} + \frac{\partial v_u}{\partial y} = -\frac{\partial w_{bal}}{\partial z}$

$$N^2 \left(\frac{\partial^2 w_{bal}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_{bal}}{\partial y^2} \right) + f^2 \frac{\partial^2 w_{bal}}{\partial z^2} = -2 \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right). \quad (\text{F.19})$$

Verallgemeinern wir das Resultat auf beliebige Koordinatensysteme, so lautet die quasi-geostrophische Omegagleichung

$$\nabla_{qq}^2 w_{bal} = -\frac{2}{N^2} \nabla_h \cdot \mathbf{Q}, \quad (\text{F.20})$$

wobei \mathbf{Q} den Q-Vektor (Hoskins et al., 1978) bezeichnet und in dieser Arbeit die folgende Form annimmt

$$\mathbf{Q} = \nabla_h \mathbf{u}_b \cdot \nabla B_b. \quad (\text{F.21})$$

Anhang G

Nebenrechnungen zur Stromfunktionzerlegung

Dieser Abschnitt beinhaltet die Herleitung der einzelnen Terme in der Stromfunktion

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}_0(\mathbf{r}) + \mu_0(z) + \hat{\psi}_1(r)\mu_1(z), \quad (\text{G.1})$$

die in Abschnitt 6.1.1 eingeführt wurde. Setzen wir die Definition (6.23) in die in Gleichung (6.31) definierte lineare PV ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung von $\nabla_h^2 \hat{\psi}_1 = 0$

$$q = \nabla_h^2 \hat{\psi}_0 + \frac{f^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} + \hat{\psi}_1 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \right), \quad (\text{G.2})$$

beziehungsweise

$$\nabla_h^2 \hat{\psi}_0 + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \hat{\psi}_0}{\partial z^2} = q - \frac{f^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} + \hat{\psi}_1 \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \right). \quad (\text{G.3})$$

Integrieren wir Gleichung (6.31) über die sektorielle horizontale Querschnittsfläche $A = 2\pi(b-a)^2/3$ der Annuluskonfiguration, so erhalten wir außerdem

$$\langle q \rangle = \left\langle \nabla_h^2 \hat{\psi}_0 \right\rangle + \frac{f^2}{N^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\langle \hat{\psi}_0 \right\rangle + \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \left\langle \hat{\psi}_1 \right\rangle \right]. \quad (\text{G.4})$$

Des Weiteren gilt mit dem gaußschen Integralsatz

$$\left\langle \nabla_h^2 \hat{\psi}_0 \right\rangle = \frac{1}{A} \int_A dA \nabla_h^2 \hat{\psi}_0 = \frac{1}{A} \int_{\partial A} dr \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial n}, \quad (\text{G.5})$$

wobei ∂A die Umrandung der Annulusfläche A ist. Wie wir weiter unten noch zeigen werden, gilt

$$\int_{\partial A} dr \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial n} = 0, \quad (\text{G.6})$$

so dass der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (G.4) verschwindet

$$\langle q \rangle = \frac{f^2}{N^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\langle \hat{\psi}_0 \right\rangle + \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \left\langle \hat{\psi}_1 \right\rangle \right]. \quad (\text{G.7})$$

Mit der Definition der linearen PV in der Form (siehe Gleichung (4.4))

$$q = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u}) + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} \quad (\text{G.8})$$

erhalten wir unter Verwendung des Stokesschen Integralsatz

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= \frac{1}{A} \int_{\partial A} d\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle, \\ &= \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle,\end{aligned}\tag{G.9}$$

da die volle Horizontalgeschwindigkeit \mathbf{u} an der Annulusberandung verschwindet (vergleiche Abschnitt 2.3). Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (G.7) ein, so erhalten wir

$$\frac{f^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_1 \rangle \right) = \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_0 \rangle.\tag{G.10}$$

Befinden sich die Modellvariablen im geostrophischen Gleichgewicht, so ergibt sich durch Mittelung von

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r},\tag{G.11}$$

über die horizontale Annulusfläche A

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} \int_A dA \frac{u}{r} &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi/3} d\vartheta \int_a^b dr \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \\ &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi/3} d\vartheta [\hat{\psi}(b) - \hat{\psi}(a)] \\ &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi/3} d\vartheta (\mu_1 + \mu_0 - \mu_0) \\ &= \frac{2\pi}{3A} \mu_1.\end{aligned}\tag{G.12}$$

Damit erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für μ_1

$$\mu_1 = \frac{3}{2\pi} \int_A dA \frac{u}{r}.\tag{G.13}$$

Aus Gleichung (G.9) folgt

$$\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial z^2} = -\frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_1 \rangle + \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle \hat{\psi}_0 \rangle.\tag{G.14}$$

Eingesetzt in Gleichung (G.3) bekommen wir eine Rechenvorschrift für $\hat{\psi}_0$

$$\nabla_h^2 \hat{\psi}_0 + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\hat{\psi}_0 - \langle \hat{\psi}_0 \rangle \right) = q - \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle - \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial z^2} \left(\hat{\psi}_1 - \langle \hat{\psi}_1 \rangle \right).\tag{G.15}$$

Abschließend wird Gleichung (G.14) benutzt, um μ_0 zu berechnen.

Integration von Gleichung (G.15) über die Annulusfläche A ergibt

$$\frac{1}{A} \int_A dA \nabla_h \cdot \nabla_h \hat{\psi}_0 = \langle q \rangle - \frac{f}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \langle B \rangle.\tag{G.16}$$

Die rechte Seite verschwindet, was aus Gleichung (G.9) hervorgeht. Die linke Seite kann unter Zuhilfenahme des gaußschen Integralsatz umgeschrieben werden in

$$\frac{1}{A} \int_A dA \nabla_{\mathbf{h}} \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \hat{\psi}_0 = \frac{1}{A} \int_{\partial A} dr \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial n}. \quad (\text{G.17})$$

Wir finden also

$$\frac{1}{A} \int_{\partial A} dr \frac{\partial \hat{\psi}_0}{\partial n} = 0, \quad (\text{G.18})$$

was konsistent ist mit (G.6).

Anhang H

Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen zweiter Ordnung

Ausgehend von den Gleichgewichtsbedingungen (6.47) und (6.48) der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, werden in diesem Abschnitt die dazugehörigen Bestimmungsgleichung für das Vektorpotential φ hergeleitet. Wir beschränken uns hierbei der Einfachheit halber auf die kartesische Geometrie und wählen an gewissen Stellen eine vektorielle Darstellungsfom. Zunächst betrachten wir die einzelnen Terme der rechten Seite in Gleichung (6.47) separat und drücken diese mit der Vektorpotential φ aus (siehe Kapitel 6.1.2 für die entsprechenden Definitionen)

$$-f \mathbf{e}_z \times \mathcal{A}_{h2} = -f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \nabla^2 \varphi_2 \\ \nabla^2 \psi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = -f \begin{pmatrix} -\nabla^2 \psi_2 \\ \nabla^2 \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{H.1})$$

$$(1 - c^2) \nabla_h w_2 = -f (1 - c^2) \nabla_h \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = -f (1 - c^2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.2})$$

Die führende Ordnung der Vorticity lässt sich schreiben als

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \nabla \times \mathbf{v}_1 = -f \nabla \times \nabla \times (\phi_1 \mathbf{e}_z) = f \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \\ -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \end{pmatrix}. \quad (\text{H.3})$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f}(\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}_1 &= f \left[-\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y \partial z} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= f \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= f \begin{pmatrix} J_{z,x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ -J_{y,z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{H.4}
 \end{aligned}$$

wobei wir hier den Jacobi-Operator eingeführt haben, der für zwei beliebige skalare Felder a, b definiert ist als

$$J_{z,x}(a, b) = \frac{\partial a}{\partial z} \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z}, \tag{H.5}$$

und $J_{y,z}(a, b)$ analog. Ferner ist

$$-\frac{1}{f^2} \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla B_1 = -\frac{1}{f^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial v_1}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial v_1}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial B_1}{\partial x} \\ \frac{\partial B_1}{\partial y} \\ \frac{\partial B_1}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{H.6}$$

Setzen wir nun die jeweiligen Definitionen von u_1, v_1 und B_1 ein, so erhalten wir

$$-\frac{1}{f^2} \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla B_1 = f \begin{pmatrix} J_{z,x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ -J_{y,z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{H.7}$$

Damit ergibt sich für Gleichung (6.47) zusammenfassend

$$\begin{pmatrix} (1 - c^2) \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) - \nabla^2 \psi_2 \\ (1 - c^2) \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} \right) + \nabla^2 \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2J_{z,x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 2J_{y,z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{H.8}$$

Führen wir den Laplace-Operator und das Produkt auf der linken Seite aus, so erhalten wir durch einfache Umformungen

$$\begin{pmatrix} (1 - c^2) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2\mathbf{h}}) + c^2 \nabla_{qq}^2 \psi_2 \\ (1 - c^2) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2\mathbf{h}}) + c^2 \nabla_{qq}^2 \varphi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2J_{z,x} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 2J_{y,z} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{H.9}$$

Es verbleibt die Transformation von Gleichung (6.48). Mithilfe der Definitionen von B_2 und \mathbf{v}_2 in den Gleichungen (6.61)–(6.60) erhalten wir

$$\frac{\zeta_2}{f} = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2\mathbf{h}}), \quad (\text{H.10})$$

sowie

$$\frac{1}{N^2} \frac{\partial B_2}{\partial z} = \frac{f^2}{N^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2\mathbf{h}}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2}. \quad (\text{H.11})$$

Demnach lautet Gleichung (6.48) nach Addition beider Terme

$$(1 - c^2) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{2\mathbf{h}}) + c^2 \nabla_{qg} \phi_2 = 0. \quad (\text{H.12})$$

In kompakter Form lauten die Gleichungen (H.9) und (H.12) nach Einführung des hochgestellten Index k für die kartesische Geometrie (siehe Gleichung (6.50))

$$c^2 \nabla_{qg}^2 \boldsymbol{\varphi}_2^k + (1 - c^2) \nabla \Theta_2^k = \mathbf{L}^k, \quad (\text{H.13})$$

mit $\Theta_2^k = \nabla_{\mathbf{h}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_{h2}^k$, $\mathbf{L}^k = L_x \mathbf{e}_x + L_y \mathbf{e}_y + L_z \mathbf{e}_z$ und

$$L_x = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial y \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial y^2} \right), \quad (\text{H.14})$$

$$L_y = -2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial x} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_1^k}{\partial z \partial y} \right), \quad (\text{H.15})$$

$$L_z = 0. \quad (\text{H.16})$$

Die entsprechende Herleitung in der Zylindergeometrie verläuft analog.

Literaturverzeichnis

- Achatz, U., Ribstein, B., Senf, F. & Klein, R. (2017), ‘The interaction between synoptic-scale balanced flow and a finite-amplitude mesoscale wave field throughout all atmospheric layers: Weak and moderately strong stratification’, *Q. J. R. Met. Soc.* **143**, 342–361.
- Arakawa, A. & Lamb, V. R. (1977), ‘Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model’, *Methods in Computational Physics* **17**, 173–265.
- Baldwin, M. P., Gray, L. J., Dunkerton, T. J., Hamilton, K., Haynes, P. H., Randel, W. J., Holton, J. R., Alexander, M. J., Hirota, I., Horinouchi, T., Jones, D. B. A., Kinnersley, J. S., Marquardt, C., Sato, K. & Takahashi, M. (2001), ‘The quasi-biennial oscillation’, *Rev. Geophys.* **39**(2), 179.
- Beres, J. H., Alexander, M. J. & Holton, J. R. (2004), ‘A method of specifying the gravity wave spectrum above convection based on latent heating properties and background wind’, *J. Atmos. Sci.* **61**(3), 324–337.
- Bölöni, G., Ribstein, B., Muraschko, J., Sgoff, C., Wei, J. & Achatz, U. (2016), ‘The interaction between atmospheric gravity waves and large-scale flows: an efficient description beyond the non-acceleration paradigm’, *J. Atmos. Sci.* **73**(12), 4833–4852.
- Borchert, S. (2015), Spontane Schwerewellenabstrahlung im differentiell geheizten rotierenden Annulus, PhD thesis, Goethe-Universität Frankfurt am Main.
- Borchert, S., Achatz, U. & Fruman, M. (2014), ‘Gravity wave emission in an atmosphere-like configuration of the differentially heated rotating annulus experiment’, *J. Fluid Mech.* **758**, 287–311.
- Borchert, S., Achatz, U., Remmler, S., Hickel, S., Harlander, U., Vincze, M., Alexandrov, K., Rieper, F., Heppelmann, T. & Dolaptchiev, S. (2015), ‘Finite-volume models with implicit subgrid-scale parameterization for the differentially heated rotating annulus’, *Meteorol. Z.* **23**(6), 561–580.
- Boussinesq, J. V. (1903), *Théorie analytique de la chaleur*, Paris: Gauthier-Villars.
- Bühler, O. & McIntyre, M. E. (2005), ‘Wave capture and wave-vortex duality’, *J. Fluid Mech.* **534**, 67–95.
- Charney, J. G. (1948), *On the scale of atmospheric motions*, Cammermeyer in Komm.
- Chouksey, M. (2017), Disentangling gravity waves from balanced flow, PhD thesis, Universität Hamburg.
- Danioux, E., Vanneste, J., Klein, P. & Sasaki, H. (2012), ‘Spontaneous inertia-gravity-wave generation by surface-intensified turbulence’, *J. Fluid Mech.* **699**, 153–173.

- Davis, C. A. & Emanuel, K. A. (1991), ‘Potential vorticity diagnostics of cyclogenesis’, *Mon. Weather Rev.* **119**, 1929–1953.
- Dolaptchiev, S., Achatz, U. & Timofeyev, I. (2013), ‘Stochastic closure for local averages in the finite-difference discretization of the forced burgers equation’, *Theor. Comput. Fluid Dyn* **27**, 297–317.
- Dritschel, D. G. & Viúdez, Á. (2003), ‘A balanced approach to modelling rotating stably stratified geophysical flows’, *J. Fluid Mech.* **488**, 123–150.
- Dritschel, D. G. & Viúdez, Á. (2004), ‘Optimal potential vorticity balance of geophysical flows’, *J. Fluid Mech.* **521**, 343–352.
- Eady, E. T. (1949), ‘Long waves and cyclone waves’, *Tellus* **1**, 33–52.
- Esler, J. G. & Polvani, L. (2004), ‘Kelvin-helmholtz instability of potential vorticity layers: A route to mixing’, *J. Atmos. Sci.* **61**, 1392–1405.
- Fritts, D. & Alexander, J. (2003), ‘Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere’, *Rev. Geophys.* **41**(1). 1003.
- Fritts, D. C. & Luo, Z. (1992), ‘Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part I: two-dimensional forcing’, *J. Atmos. Sci.* **49**, 681–697.
- Früh, W. G. & Read, P. L. (1997), ‘Wave interactions and the transition to chaos of baroclinic waves in a thermally driven rotating annulus’, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **355**(1722), 101–153.
- Fultz, D. (1991), ‘Quantitative nondimensional properties of the gradient wind’, *J. Atmos. Sci.* **48**, 869–875.
- Gray, D. D. & Giorgini, A. (1976), ‘The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases’, *Int. J. Heat Mass Transf.* **19**, 545–551.
- Grimshaw, R. (1975), ‘Internal gravity waves: critical layer absorption in a rotating fluid’, *J. Fluid Mech.* **70**, 287–304.
- Harlander, U., Wenzel, J., Alexandrov, K., Wang, Y. & Egbers, C. (2012), ‘Simultaneous piv and thermography measurements of partially blocked flow in a differentially heated rotating annulus’, *Exp. Fluids* **52**(4), 1077–1087.
- Harris, F. J. (1978), ‘On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform’, *Proceedings of the IEEE* **66**, 51–83.
- Haynes, P. H., McIntyre, M. E., Shepherd, T. G., Marks, C. J. & Shine, K. P. (1991), ‘On the ‘downward control’ of extratropical diabatic circulations by eddy-induced mean zonal forces’, *J. Atmos. Sci.* **48**(4), 651–678.
- Hickel, S., Adams, N. A. & Domaradzki, J. A. (2006), ‘An adaptive local deconvolution method for implicit LES’, *J. Comp. Phys.* **213**, 413–436.
-

-
- Hide, R. (1967), ‘Theory of axisymmetric thermal convection in a rotating fluid annulus’, *Phys. Fluids* **10**(1), 56–68.
- Hide, R. & Mason, P. J. (1975), ‘Sloping convection in a rotating fluid’, *Adv. Phys.* **24**(1), 47–100.
- Hien, S., Rolland, J., Borchert, S., Schoon, L., Zülicke, C. & Achatz, U. (2018), ‘Spontaneous inertia-gravity wave emission in the differentially heated rotating annulus experiment’, *J. Fluid Mech.* **838**, 5–41.
- Holton, J. R. (2004), *An Introduction to Dynamic Meteorology*, Academic Press.
- Hoskins, B., Draghici, I. & Davies, H. (1978), ‘A new look at the omega-equation’, *Q. J. R. Met. Soc.* **104**, 31–38.
- Hoskins, B. J., McIntyre, M. E. & Robertson, A. W. (1985), ‘On the use and significance of isentropic potential vorticity maps’, *Q. J. R. Met. Soc.* **111**(470), 877–946.
- Jacoby, T. N. L., Read, P. L., Williams, P. D. & Young, R. M. B. (2011), ‘Generation of inertia-gravity waves in the rotating thermal annulus by a localised boundary layer instability’, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **105**, 161–181.
- Jewtoukoff, V., Hertzog, A., Plougonven, R., de la Cámara, A. & Lott, F. (2015), ‘Comparison of gravity waves in the southern hemisphere derived from balloon observations and the ECMWF analyses’, *J. Atmos. Sci.* **72**(9), 3449–3468.
- Lin, Y. & Zhang, F. (2008), ‘Tracking Gravity Waves in Baroclinic Jet-Front Systems’, *J. Atmos. Sci.* **65**(7), 2402–2415.
- Luo, Z. & Fritts, D. C. (1993), ‘Gravity-wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part II: three-dimensional forcing’, *J. Atmos. Sci.* **50**, 104–115.
- Marks, C. J. & Eckermann, S. D. (1995), ‘A three-dimensional nonhydrostatic ray-tracing model for gravity waves: Formulation and preliminary results for the middle atmosphere’, *J. Atmos. Sci.* **52**(11), 1959–1984.
- McIntyre, M. E. & Norton, W. A. (2000), ‘Potential vorticity inversion on a hemisphere’, *J. Atmos. Sci.* **57**(9), 1214–1235.
- McKiver, W. J. & Dritschel, D. G. (2008), ‘Balance in non-hydrostatic rotating stratified turbulence’, *J. Fluid Mech.* **596**, 201–219.
- McWilliams, J. C. (1985), ‘A uniformly valid model spanning the regimes of geostrophic and isotropic, stratified turbulence: Balanced turbulence’, *J. Atmos. Sci.* **42**(16), 1773–1774.
- Mirzaei, M., Mohebalhojeh, A. R., Zülicke, C. & Plougonven, R. (2017), ‘On the Quantification of Imbalance and Inertia–Gravity Waves Generated in Numerical Simulations of Moist Baroclinic Waves Using the WRF Model’, *J. Atmos. Sci.* **74**(12), 4241–4263.
- Mirzaei, M., Zülicke, C., Mohebalhojeh, A., Ahmadi-Givi, F. & Plougonven, R. (2014), ‘Structure, energy, and parameterization of inertia-gravity waves in dry and moist simulations of a baroclinic wave life cycle’, *J. Atmos. Sci.* **71**(7), 2390–2414.
-

- Mohebalhojeh, A. R. & Dritschel, D. G. (2001), ‘Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow-water equations’, *J. Atmos. Sci.* **58**, 2411–2426.
- Muraki, D. J., Snyder, C. & Rotunno, R. (1999), ‘The Next-Order Corrections to Quasi-geostrophic Theory’, *J. Atmos. Sci.* **56**(11), 1547–1560.
- Nagai, T., Amit, A. T., Kunze, E. & Mahadevan, A. (2015), ‘Spontaneous Generation of Near-Inertial Waves by the Kuroshio Front’, *J. Phys. Oceanogr.* **45**(9), 2381–2406.
- O’Sullivan, D. & Dunkerton, T. J. (1995), ‘Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability’, *J. Atmos. Sci.* **52**, 3695–3716.
- Pedlosky, J. (1987), *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag.
- Phillips, N. A. (1963), ‘Geostrophic motion’, *Rev. Geophys.* **1**(2), 123–176.
- Plougonven, R., Teitelbaum, H. & Zeitlin, V. (2003), ‘Inertia gravity wave generation by the tropospheric midlatitude jet as given by the Fronts and Atlantic Storm-Track Experiment radio soundings’, *J. Geophys. Res.* **108**, 4686.
- Plougonven, R. & Zhang, F. (2007), ‘On the forcing of inertia-gravity waves by synoptic-scale flows’, *J. Atmos. Sci.* **64**, 1737–1742.
- Plougonven, R. & Zhang, F. (2014), ‘Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts’, *Rev. Geophys.* **52**(1), 33–76.
- Randriamampianina, A. (2013), ‘Caractéristiques d’ondes d’inertie gravité dans une cavité barocline (Inertia gravity waves characteristics within a baroclinic cavity)’, *C. R. Mécanique* **341**, 547–552.
- Randriamampianina, A. & Crespo del Arco, E. (2015), ‘Inertia-gravity waves in a liquid-filled, differentially heated, rotating annulus’, *J. Fluid Mech.* **782**, 144–177.
- Rodda, C., Borgia, I. D., Gal, P. L., Vincze, M. & Harlander, U. (2018), ‘Baroclinic, Kelvin and inertia-gravity waves in the barostrat instability experiment’, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **112**(3), 175–206.
- Scaife, A. A., Knight, J., Vallis, G. & Folland, C. (2005), ‘A stratospheric influence on the winter NAO and North Atlantic surface climate’, *Geophys. Res. Lett.* **32**(18), 1–5.
- Schoon, L. & Zülicke, C. (2018), ‘A novel method for the extraction of local gravity wave parameters from gridded three-dimensional data: description, validation, and application’, *Atmospheric Chemistry and Physics* **18**(9), 6971–6983.
- Shakespeare, C. J. & Hogg, A. M. (2017), ‘Spontaneous Surface Generation and Interior Amplification of Internal Waves in a Regional-Scale Ocean Model’, *J. Phys. Oceanogr.* **47**(4), 811–826.
- Sitte, B. & Egbers, C. (2000), *Higher order dynamics of baroclinic waves*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, pp. 355–375.
-

-
- Smith, L. M. & Waleffe, F. (2002), ‘Generation of slow large scales in forced rotating stratified turbulence’, *J. Fluid Mech.* **451**, 145–168.
- Snyder, C., Muraki, D. J., Plougonven, R. & Zhang, F. (2007), ‘Inertia-gravity waves generated within a dipole vortex’, *J. Atmos. Sci.* **64**, 4417–4431.
- Snyder, C., Plougonven, R. & Muraki, D. J. (2009), ‘Mechanisms for spontaneous gravity wave generation within a dipole vortex’, *J. Atmos. Sci.* **66**, 3464–3478.
- Song, I.-S. & Chun, H.-Y. (2005), ‘Momentum Flux Spectrum of Convectively Forced Internal Gravity Waves and Its Application to Gravity Wave Drag Parameterization. Part I: Theory’, *J. Atmos. Sci.* **62**(1), 107–124.
- Sutherland, B. R. (2010), *Internal Gravity Waves*, Cambridge University Press.
- Uccellini, L. W. & Koch, S. E. (1987), ‘The synoptic setting and possible energy sources for mesoscale wave disturbances’, *Mon. Weather Rev.* **115**, 721–729.
- Vallis, G. K. (2006), *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*, Cambridge University Press, New York.
- Van der Vorst, H. A. (1992), ‘Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems’, *SIAM Journal on scientific and Statistical Computing* **13**(2), 631–644.
- Vanneste, J. (2013), ‘Balance and spontaneous wave generation in geophysical flows’, *Ann. Rev. Fluid Mech.* **45**, 147–172.
- Vincze, M., Borchert, S., Achatz, U., Von Larcher, T., Baumann, M., Liersch, C., Remmler, S., Beck, T., Alexandrov, K., Egbers, C., Fröhlich, J., Heuveline, V., Hickel, S. & Harlander, U. (2014), ‘Benchmarking in a rotating annulus: A comparative experimental and numerical study of baroclinic wave dynamics’, *Meteorol. Z.* **23**(6), 611–635.
- Vincze, M., Borcia, I., Harlander, U. & Gal, P. (2016), ‘Double-diffusive convection and baroclinic instability in a differentially heated and initially stratified rotating system: the barostrat instability’, *Fluid Dyn. Res.* **48**(6), 1–21.
- Viúdez, A. (2007), ‘The origin of the stationary frontal wave packet spontaneously generated in rotating stratified vortex dipoles’, *J. Fluid Mech.* **593**, 359–383.
- Viúdez, A. & Dritschel, D. G. (2006), ‘Spontaneous generation of inertia-gravity wave packets by balanced geophysical flows’, *J. Fluid Mech.* **553**, 107–117.
- von Larcher, T. & Egbers, C. (2005), ‘Experiments on transitions of baroclinic waves in a differentially heated rotating annulus’, *Nonlin. Processes Geophys.* **12**, 1033–1041.
- von Larcher, T., Viazzo, S., Harlander, U., Vincze, M. & Randriamampianina, A. (2018), ‘Instabilities and small-scale waves within the Stewartson layers of a thermally driven rotating annulus’, *J. Fluid Mech.* **841**, 380–407.
- von Storch, H. & Zwiers, F. W. (2002), *Statistical Analysis in Climate Research*, Cambridge University Press.
-

- Wang, S. & Zhang, F. (2010), ‘Source of Gravity Waves within a Vortex-Dipole Jet Revealed by a Linear Model’, *J. Atmos. Sci.* **67**(5), 1438–1455.
- Wang, S., Zhang, F. & Snyder, C. (2009), ‘Generation and propagation of inertia-gravity waves from vortex dipoles and jets’, *J. Atmos. Sci.* **66**(5), 1294–1314.
- Warn, T., Bokhove, O., Shepherd, T. G. & Vallis, G. K. (1995), ‘Rossby number expansions, slaving principles, and balance dynamics’, *Q. J. R. Met. Soc.* **121**, 723–739.
- Wheeler, M. & Kiladis, G. N. (1999), ‘Convectively coupled equatorial waves: Analysis of clouds and temperature in the wavenumber–frequency domain’, *J. Atmos. Sci.* **56**(3), 374–399.
- Williamson, J. H. (1980), ‘Low-storage Runge-Kutta schemes’, *J. Comp. Phys.* **35**, 48–56.
- Wu, D. L. & Zhang, F. (2004), ‘A study of mesoscale gravity waves over the North Atlantic with satellite observations and a mesoscale model’, *J. Geophys. Res.* **109**(22), 1–14.
- Yasuda, Y., Sato, K. & Sugimoto, N. (2015), ‘A Theoretical Study on the Spontaneous Radiation of Inertia–Gravity Waves Using the Renormalization Group Method. Part I: Derivation of the Renormalization Group Equations’, *J. Atmos. Sci.* **72**(3), 957–983.
- Zhang, F. (2004), ‘Generation of mesoscale gravity waves in upper-tropospheric jet–front systems’, *J. Atmos. Sci.* **61**(4), 440–457.
- Zhang, F., Koch, S. E., Davis, C. A. & Kaplan, M. L. (2000), ‘A survey of unbalanced flow diagnostics and their application’, *Adv. Atmospheric Sci.* **17**(2), 165–183.
- Zülicke, C. & Peters, D. (2006), ‘Simulation of inertia–gravity waves in a poleward-breaking rossby wave’, *J. Atmos. Sci.* **63**(12), 3253–3276.
-