

1919. 3044

Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
der Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Königlichen Universität zu Frankfurt a.M.

vorgelegt von

Karl Reinhardt

aus Frankfurt a. M.



Druck von Robert Noske, Borna-Leipzig
Großbetrieb für Dissertationsdruck
1918.



Referent: Prof. Dr. L. Bieberbach.

Meinen lieben Eltern!

Inhalt.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Erster Teil.

Der Hauptsatz.

§ 1. Einige Hilfssätze	3
§ 2. Der Hauptsatz für konvexe Polygone	21
§ 3. Der Hauptsatz für allgemeine Polygone	32
§ 4. Die Zerlegung von Polygonen in Polygone	48

Zweiter Teil.

Anwendung des Hauptsatzes.

§ 1. Die reguläre Zerlegung und die Zerlegung in Sechs- und Fünfecke	56
§ 2. Die Zerlegung in kongruente Sechs- und Fünfecke	65

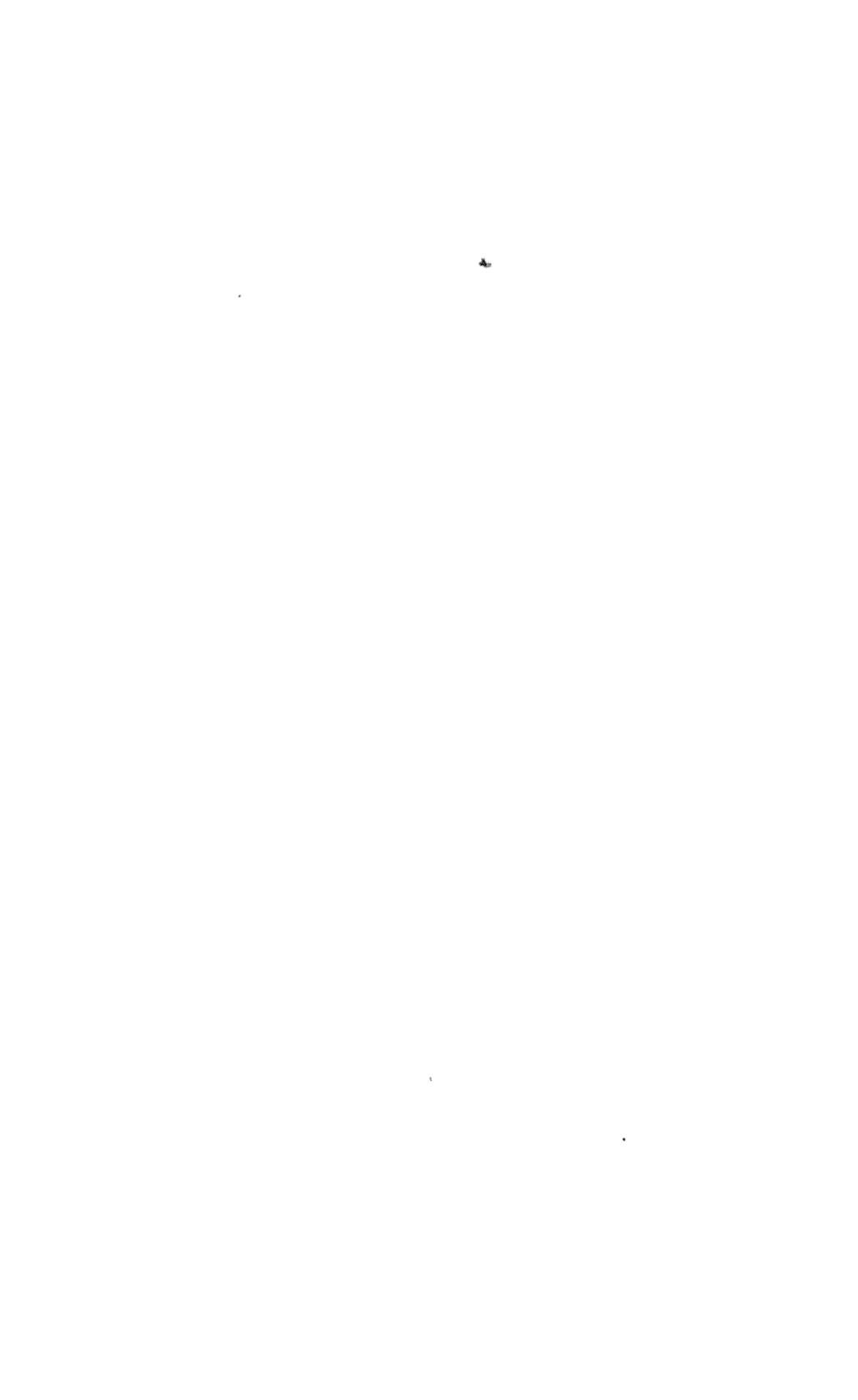


Einleitung.

Die vorliegende Arbeit soll ein Beitrag zur Lösung einer Frage sein, die D. Hilbert in einem auf dem Internationalen Mathematikerkongreß zu Paris 1900 gehaltenen Vortrage über mathematische Probleme aufgeworfen hat¹⁾. Im Anschluß an das 18. der dort genannten Probleme spricht Hilbert die Vermutung aus, daß jeder Bereich von der Beschaffenheit, daß die Ebene in eine Folge zu ihm kongruenter Exemplare zerlegbar ist, als Fundamentalbereich einer Gruppe von Bewegungen aufgefaßt werden kann, die die Ebene in sich überführen. Um diese Frage einer Lösung näherzubringen, wird im ersten Teil dieser Arbeit zunächst allgemein die Zerlegung der Ebene in eine Folge einfach zusammenhängender Polygone betrachtet. Durch Übertragung der hierbei benutzten Methode auf die Untersuchung der Zerlegung eines Polygons in andere Polygone ergeben sich auch in dieser Hinsicht einige Resultate. Im zweiten Teil werden erst einige Folgerungen aus den Ergebnissen des ersten Teils gezogen und diese sodann auf die Untersuchung der Ebenenzerlegung in kongruente Fünf- und Sechsecke angewandt. Soweit diese Betrachtungen geführt sind, zeigt sich, daß die dabei zutage tretenden Polygontypen, welche eine Zerlegung der Ebene in zu ihnen kongruente Exemplare gestatten, in der Tat gleichzeitig Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen sind.

Zur Untersuchung dieser Fragen wurde ich durch Herrn Prof. Dr. Ludwig Bieberbach angeregt. Ich möchte nicht versäumen, meinem hochverehrten Lehrer an dieser Stelle sowohl für das der Arbeit allzeit entgegengebrachte rege Interesse als auch für manchen Rat bei deren Abfassung meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

¹⁾ Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1900.



Erster Teil.

Der Hauptsatz.

§ 1.

Einige Hilfssätze.

Es sei die gesamte Ebene in eine Folge von beschränkten, abgeschlossenen, einfach zusammenhängenden und schlichten ebenen Bereichen b_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) zerlegt, und wir wollen annehmen, daß diese sämtlich von stetigen und differenzierbaren Randkurven begrenzt sind. Wir setzen ferner voraus, daß die Folge der Durchmesser¹⁾ d_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) der Bereiche b_i nach oben beschränkt ist:

$$d_i \leq 2R \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

und daß die Folge ihrer Flächeninhalte f_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) eine von Null verschiedene untere Grenze besitzt, die durch den Flächeninhalt eines Kreises vom Radius r geliefert werde:

$$f_i \geq \pi r^2 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Es werde dann von einem beliebigen Punkt als Mittelpunkt aus die Folge der konzentrischen Kreise Z_ν , mit den Radien $\nu \cdot \rho$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) konstruiert, deren Grundradius ρ beliebig, aber größer als $2R$ sei. Es werde ferner innerhalb jedes von zwei aufeinander folgenden Kreisen mit den Radien $\nu \cdot \rho$ und $(\nu - 1) \cdot \rho$ gebildeten Kreisrings R_ν eine durch die Berandungen der Bereiche b_i gebildete, doppelpunktfreie geschlossene Kurve C_ν gezogen, welche das Zentrum der Folge Z_ν im Inneren enthält (s. Abb. 1). Eine so definierte Kurve C_ν muß stets existieren,

¹⁾ Der Durchmesser eines abgeschlossenen Bereichs ist bekanntlich die größte unter allen Entfernungen je zweier seiner Punkte.

da wegen $d_i \leq 2R$ ($i = 1, 2, \dots$) und $\varrho > 2R$ keiner der Bereiche b_i gleichzeitig von zwei Kreisen geschnitten werden kann, deren Radien sich um ϱ unterscheiden. Aus demselben Grund müssen auch noch alle Bereiche b_i , die von innen her an eine Kurve C_ν längs endlicher Kurvenstücke oder auch nur in Punkten angrenzen und die wir daher Randbereiche der Kurve nennen wollen, ganz innerhalb des durch die beiden Kreise mit den Radien $\nu \cdot \varrho$ und $(\nu - 2) \cdot \varrho$ begrenzten Kreisringes liegen. Die Folge der von den Kurven umschlossenen einfach zusammenhängenden Bereiche bezeichnen wir mit B_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$).

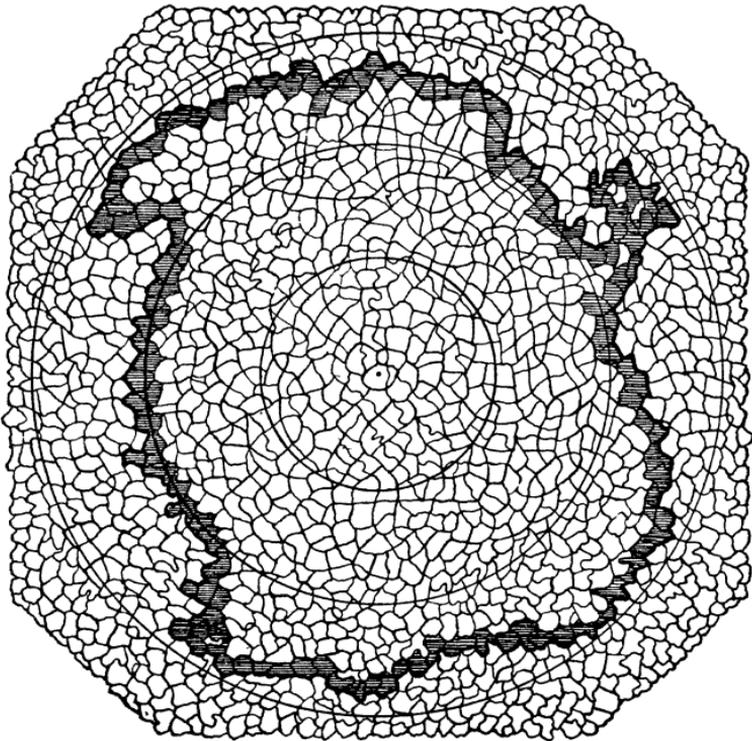


Abb. 1.

Ist nun a_ν die Anzahl der zur Kurve C_ν gehörigen Randbereiche, A_ν die Anzahl aller von ihr umschlossenen Bereiche, so gilt folgender

Hilfssatz 1: Das Verhältnis der Anzahl der zu einer Kurve C_ν gehörigen Randbereiche

zu der Anzahl aller von ihr umschlossenen Bereiche strebt mit wachsendem ν gegen Null:

$$(1) \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{A_\nu} = 0.$$

Dabei ist die Wahl der Kurven C_ν in den Kreisringen R_ν völlig willkürlich.

Zum Beweise bedenken wir, daß der Flächeninhalt des vom ν -ten und $(\nu - 2)$ -ten Kreise gebildeten Kreisrings $\pi\nu^2\rho^2 - \pi(\nu - 2)^2\rho^2$ ist; da nach dem oben Gesagten alle Randbereiche von C_ν , deren jeder mindestens den Flächeninhalt πr^2 haben muß, innerhalb dieses Kreisrings liegen, so folgt:

$$a_\nu \pi r^2 < \pi \rho^2 (\nu^2 - (\nu - 2)^2),$$

oder:

$$a_\nu < \frac{\rho^2}{r^2} 4(\nu - 1).$$

Andererseits müssen infolge der Annahmen alle von der Kurve C_ν umschlossenen Bereiche den $(\nu - 1)$ -ten Kreis völlig ausfüllen; da dessen Flächeninhalt $\pi(\nu - 1)^2\rho^2$ ist und jeder Bereich b_i wegen der Voraussetzung $d_i \leq 2R$ stets ganz innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{2}{\sqrt{3}}R$) Platz hat — also höchstens den Flächeninhalt $\frac{4}{3}\pi R^2$ besitzt —, so folgt hieraus:

$$A_\nu \frac{4}{3}\pi R^2 > \pi \rho^2 (\nu - 1)^2,$$

oder:

$$A_\nu > \frac{\rho^2}{R^2} \frac{3}{4} (\nu - 1)^2.$$

Es ergibt sich also für das Verhältnis der Zahl der Randbereiche zur Zahl aller Bereiche die Abschätzung:

¹⁾ Diese obere Grenze folgt aus einem von H. W. Jung in Bd. 123 des Crelleschen Journals bewiesenen Satz. Vgl. darüber auch die Arbeit von H. W. Jung in Bd. 137 des Crelleschen Journals und eine Arbeit des Verfassers in den Jahresberichten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1916.

$$\frac{a_\nu}{A_\nu} < \frac{\frac{\varrho^2}{r^2} 4 (\nu - 1)}{\frac{\varrho^2}{R^2} \frac{3}{4} (\nu - 1)^2} = \frac{16 R^2}{3 r^2} \frac{1}{\nu - 1}.$$

Da hierin R und r feste Zahlen sind und $\frac{1}{\nu - 1}$ mit wachsendem ν gegen Null strebt, so erhalten wir so in der Tat die Beziehung (1).

Es ist klar, daß sich ein dem Hilfssatz 1 entsprechender Satz ohne weiteres für einen Raum von beliebiger Dimensionszahl, insbesondere also für den gewöhnlichen dreidimensionalen Raum aufstellen läßt.

Wir wollen aus dem Hilfssatz 1 sofort eine Folgerung ziehen. Zu diesem Zweck bezeichnen wir diejenigen Punkte der Ebene, die zugleich den Berandungen von mindestens dreien der Bereiche b_i angehören, als Netzpunkte der vorliegenden lückenlosen und schlichten Bedeckung, und insbesondere als n -fache Netzpunkte ($n = 3, 4, \dots$), wenn genau n Bereiche b_i in ihnen zusammenstoßen. Die zwischen je zwei Netzpunkten gelegenen Kurvenstücke, die zugleich Stücke der Berandungen von je zweien der Bereiche b_i sind, nennen wir Netzlinien. Greifen wir einen bestimmten der Bereiche b_i heraus, so stößt in jeder Netzlinie ein weiterer Bereich an ihn an; die Gesamtheit aller dieser längs endlicher Kurvenstücke an b_i grenzenden Bereiche wollen wir die Grenzbereiche von b_i nennen, und zwar sei ein solcher Grenzbereich wieder ein n -facher ($n = 1, 2, \dots$), wenn er genau n Netzlinien mit b_i gemeinsam hat. Unsere Folgerung wollen wir auf die beiden folgenden Hilfssätze stützen:

Hilfssatz 2: Die Anzahl der längs endlicher Kurvenstücke und in Punkten an einen Bereich b_i angrenzenden Bereiche, insbesondere also die Anzahl seiner Grenzbereiche, ist stets kleiner als $\frac{16 R^2}{3 r^2}$.

Denn da nach Voraussetzung jeder Bereich b_i in einen Kreis vom Radius $\frac{2}{\sqrt{3}} R$ hineingelegt werden kann, so muß

der betrachtete Bereich mit seinen sämtlichen angrenzenden Bereichen innerhalb eines Kreises vom Radius $\frac{4}{\sqrt{3}} R$ Platz haben. Da nun einerseits ein solcher Kreis den Inhalt $\frac{16}{3} \pi R^2$ hat, andererseits aber auch wieder nach Voraussetzung jeder Bereich b_i mindestens den Inhalt πr^2 besitzt, so können in einem solchen Kreis vom Radius $\frac{2}{\sqrt{3}} R$ höchstens $\frac{16}{3} \frac{R^2}{r^2}$ Bereiche liegen, womit der Hilfssatz 2 bewiesen ist.

Hilfssatz 3: Die Anzahl der die Berandung eines Bereiches b_i bildenden Netzlinien ist stets kleiner als die doppelte Anzahl seiner Grenzbereiche.

Dieser Hilfssatz ist die direkte Folge eines Theorems, das wir jetzt herleiten wollen. Es ist dabei zweckmäßig, erst einige abkürzende Bezeichnungen einzuführen. Haben wir einen mehrfachen Grenzbereich, so liegen zwischen den Netzlinien, in denen dieser an b_i stößt, zu der Berandung von b_i gehörige, wieder aus Netzlinien anderer Grenzbereiche bestehende Kurvenstücke, die Zwischenlinien des Grenzbereiches heißen mögen (s. Abb. 2).

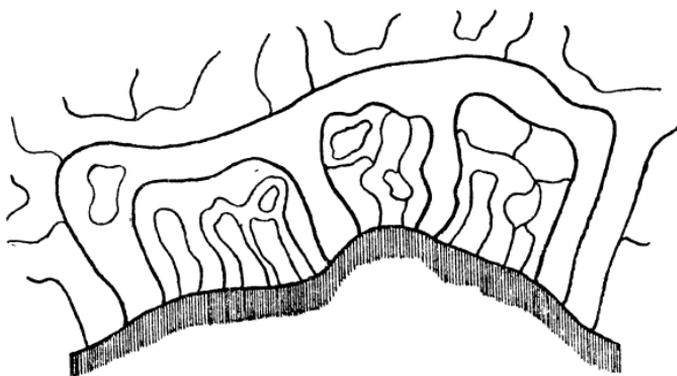


Abb. 2.

Ein n -facher Grenzbereich hat also $n - 1$ Zwischenlinien. Ein Grenzbereich, an dessen Zwischenlinien lediglich einfache Grenzbereiche stoßen, sei ein solcher erster Ordnung, stoßen an

seine Zwischenlinien auch Bereiche erster Ordnung, so sei er von zweiter Ordnung usw., allgemein heiße ein Grenzbereich von n -ter Ordnung, wenn an mindestens eine seiner Zwischenlinien ein Grenzbereich $(n - 1)$ -ter Ordnung stt.¹⁾ Die Gesamtheit der Grenzbereiche, die aus einem solchen n -ter Ordnung und den sämmtlichen zu dessen Zwischenlinien gehörigen Grenzbereichen besteht, nennen wir ein System n -ter Ordnung; mehrere aneinanderstoßende Systeme mögen eine Gruppe von Systemen heißen, und zwar eine solche n -ter Ordnung, wenn n die größte der Ordnungen der in ihr vorkommenden Systeme bedeutet. Schließlich sei der Grad einer Gruppe die um Eins verminderte Anzahl der Systeme, aus denen die Gruppe besteht. Dann lautet das

Theorem: Die um Eins vermehrte Anzahl N der die Berandung eines Bereiches b_i bildenden Netzlinien ist gleich der doppelten Anzahl G seiner Grenzbereiche, vermindert um die Summe S der Grade sämmtlicher vorkommenden Gruppen²⁾:

$$(2) \quad N + 1 = 2 \cdot G - S.$$

Hierin ist Hilfssatz 3 enthalten; denn sind im günstigsten Fall überhaupt keine Gruppen vorhanden, so wird aus (2):

$$N = 2G - 1,$$

und es ist demnach stets:

$$N \leq 2G - 1 < 2G.$$

Um nun das Theorem zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß jedem Grenzbereich von b_i seine wohldefinierte endliche Vielfachheit und Ordnung zukommt; denn nach Hilfssatz 2 ist

¹⁾ Ein einfacher Grenzbereich sei dann auch ein solcher nullter Ordnung.

²⁾ Es ist dabei offenbar einerlei, wie man die Systeme zu Gruppen zusammenfaßt, wenn man noch festsetzt, daß man eine einmal als Gruppe gezählte Gesamtheit von Systemen von da ab selbst als System behandelt; denn es gilt dann der leicht zu beweisende Satz: Zerlegt man eine Gruppe in mehrere Teilgruppen, so ist ihr Grad gleich der Summe der Grade der Teilgruppen, vermehrt um den Grad der aus diesen selbst gebildeten Gruppe.

die Anzahl der Grenzbereiche von b_i beschränkt; da nun an jede Zwischenlinie eines Grenzbereichs mindestens noch ein anderer Grenzbereich stößt und an verschiedene Zwischenlinien ersichtlich auch verschiedene Grenzbereiche stoßen müssen, so muß auch seine Vielfachheit beschränkt sein. Betrachtet man ferner die Zwischenlinien eines mehrfachen Grenzbereiches, so können an diese wieder mehrfache Grenzbereiche anstoßen, und für diese kann dasselbe gelten usw.; infolge der Beschränktheit der Zahl der Grenzbereiche muß man jedoch auf diese Weise nach endlich vielen Schritten auf einfache Grenzbereiche, d. h. auf solche nullter Ordnung kommen; damit besitzt jeder Grenzbereich eine wohldefinierte endliche Ordnung.

Wir beweisen (2) zunächst für Systeme erster Ordnung und für Gruppen erster Ordnung; durch verallgemeinerte vollständige Induktion oder den Schluß von $1, 2, 3, \dots, n-1$ auf n folgt dann die Richtigkeit für Systeme n -ter Ordnung und für Gruppen n -ter Ordnung.

Sei ein von einem ν -fachen Grenzbereich gebildetes System erster Ordnung gegeben; sei g die Anzahl aller zu diesem System gehörigen Grenzbereiche, n die Anzahl aller Netzklinien, die es mit b_i gemeinsam hat, s_k der Grad der zur k -ten Zwischenlinie gehörigen Gruppe von einfachen Grenzbereichen ($k = 1, 2, \dots, \nu - 1$); dann folgt offenbar:

$$g = 1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} (s_k + 1),$$

$$n = \nu + \sum_{k=1}^{\nu-1} (s_k + 1)$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\nu-1} (s_k + 1) \right) + \nu - 2 - \sum_{k=1}^{\nu-1} s_k - \nu + 1,$$

und es ist in der Tat:

$$n = 2g - \sum_{k=1}^{\nu-1} s_k - 1.$$

Haben wir ferner eine Gruppe erster Ordnung vom Grade s_0 ; dann gilt für jedes der sie bildenden $s_0 + 1$ Systeme:

$$(a) \quad n_i = 2 \cdot g_i - s_i - 1^1) \quad (i = 1, 2, \dots, s_0 + 1),$$

worin g_i die Anzahl der das i -te System bildenden Grenzbereiche, n_i die Anzahl der zu ihm gehörigen Netzlينien und s_i die Summe der Grade der zu ihm gehörigen Gruppen bedeutet ($i = 1, 2, \dots, s_0 + 1$). Da nun die Anzahl g der die Gruppe bildenden Grenzbereiche gleich der Summe der entsprechenden Zahlen der einzelnen Systeme ist und dasselbe für die Anzahl n der Netzlينien gilt, so folgt durch Summieren von (a) sofort:

$$n = 2 \cdot g - \sum_{i=1}^{s_0+1} s_i - s_0 - 1 = 2g - s - 1,$$

worin s nunmehr die Summe der Grade sämtlicher vorkommenden Gruppen bedeutet.

Es werde sodann ein von einem ν -fachen Grenzbereich gebildetes System n -ter Ordnung betrachtet. Sei wieder G die Anzahl aller zu diesem System gehörigen Grenzbereiche, N die Anzahl aller Netzlينien, die es mit b_i gemeinsam hat, S_k die Gradsumme sämtlicher zur k -ten Zwischenlinie gehörigen Gruppen ($k = 1, 2, \dots, \nu - 1$); dann gilt nach Voraussetzung:

$$(b) \quad N_k = 2 \cdot G_k - S_k - 1 \quad (k = 1, 2, \dots, \nu - 1),$$

worin N_k , G_k bez. die Anzahl der zur k -ten Gruppe gehörigen Netzlينien und Grenzbereiche bedeutet. Ferner ist ersichtlich:

$$G = \sum_{k=1}^{\nu-1} G_k + 1,$$

$$N = \sum_{k=1}^{\nu-1} N_k + \nu;$$

unter Berücksichtigung von (b) und der ersten dieser Beziehungen wird die zweite:

$$N = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\nu-1} G_k - \sum_{k=1}^{\nu-1} S_k - (\nu - 1) + \nu = 2G - \sum_{k=1}^{\nu-1} S_k - 1.$$

Schließlich betrachten wir eine Gruppe n -ter Ordnung

¹⁾ Denn diese Beziehung gilt offenbar auch für Systeme nullter Ordnung, da dann $s_i = 0$ und $n_i = g_i = 1$ ist.

vom Grade S_0 , die also aus $S_0 + 1$ Systemen bis zur n -ten Ordnung besteht; für jedes dieser Systeme gilt demnach:

$$(c) \quad N_i = 2 \cdot G_i - S_i - 1 \quad (i = 1, 2, \dots, S_0 + 1),$$

worin G_i die Anzahl der Grenzbereiche, aus denen es besteht, N_i die Anzahl der zu ihm gehörigen Netzlinien und S_i die Summe der Grade der zu ihm gehörigen Gruppen bedeutet ($i = 1, 2, \dots, S_0 + 1$). Durch Summation von (c) folgt dann genau wie oben:

$$N = 2G - S - 1,$$

wenn mit N, G bez. die Anzahl sämtlicher zu der Gruppe gehörigen Netzlinien und Grenzbereiche bezeichnet wird und S die Summe der Grade sämtlicher vorkommenden Gruppen bedeutet. Damit ist unser Theorem vollständig bewiesen.

Nun können wir die Folgerung aus Hilfssatz 1 ziehen; sie besteht in dem

Hilfssatz 4: Das Verhältnis der Anzahl a_ν der eine Kurve C_ν bildenden Netzlinien zu der Anzahl aller von dieser Kurve umschlossenen Bereiche strebt mit wachsendem ν gegen Null:

$$(3) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{a_\nu}{A_\nu} = 0.$$

Zum Beweise greifen wir einen der Bereiche b_i heraus und berechnen eine obere Grenze für die Anzahl der seine Berandung bildenden Netzlinien. Nach Hilfssatz 3 ist diese Anzahl stets kleiner als die doppelte Anzahl der zu b_i gehörigen Grenzbereiche, welche letztere Anzahl nach Hilfssatz 2 wieder stets kleiner als $\frac{16}{3} \frac{R^2}{r^2}$ ist; also ist die gesuchte obere Grenze $\frac{32}{3} \frac{R^2}{r^2}$. Nun sind sämtliche die Kurve C_ν bildenden Netzlinien aber gleichzeitig auch Netzlinien der zu C_ν gehörigen Randbereiche; da die Anzahl der letzteren a_ν ist, so ist mithin sicher

$$a_\nu < \frac{32}{3} \frac{R^2}{r^2} a_\nu,$$

oder:

$$\frac{a_v}{A_v} < \frac{32 R^2 a_v}{3 r^2 A_v},$$

woraus nach Hilfssatz 1 sofort die Beziehung (3) folgt.

Da in höheren Räumen die Zusammenhänge andere als in der Ebene sind, so läßt sich ein dem Hilfssatz 3 entsprechender Satz unter unseren allgemeinen Voraussetzungen nicht ohne weiteres für mehrdimensionale Räume aussprechen. Nimmt man dagegen etwa noch an, daß alle die lückenlose und schlichte Bedeckung erzeugenden Bereiche konvex sind, so gilt Hilfssatz 3 in der Form, daß die Anzahl der einen Bereich b_i bildenden „Netzflächen“ gleich der Anzahl seiner Grenzbereiche ist. Unter dieser Voraussetzung besteht dann auch im n -dimensionalen und demnach insbesondere im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum offenbar ein dem Hilfssatz 4 ganz entsprechender Satz.

Wir wollen uns nun weiterhin gewisse der bei der Bedeckung beteiligten Bereiche b_i markiert denken. Sei \bar{A}_v die Anzahl der von einer Kurve C_v umschlossenen markierten Bereiche, also $\bar{A}_v \leq A_v$. Wir betrachten dann die Folge der Quotienten $\frac{\bar{A}_v}{A_v}$, die sämtlich der Ungleichung:

$$0 \leq \frac{\bar{A}_v}{A_v} \leq 1$$

genügen. Diese Folge braucht natürlich im allgemeinen keinen Grenzwert zu besitzen; doch muß sie nach dem Bolzano-Weierstraßschen Satz stets mindestens einen Häufungspunkt haben. Außerdem müssen alle ihre Häufungspunkte ebenfalls dem abgeschlossenen Intervalle von Null bis Eins angehören.

Es werde nun in jedem der Kreisringe R_v außer der Kurve C_v noch eine zweite Kurve C'_v mit denselben Eigenschaften gezogen; auch für diese zweite Kurvenschar möge die Folge der Quotienten $\frac{\bar{A}'_v}{A'_v}$ gebildet werden. Dann gilt der folgende

Hilfssatz 5: Die Differenz der Quotienten

$\frac{\bar{A}_{\nu+\mu}}{A_{\nu+\mu}}$ und $\frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}}$ strebt für jedes beliebige feste μ mit wachsendem ν gegen Null:

$$(4) \quad \lim_{\nu=\infty} \left(\frac{\bar{A}_{\nu+\mu}}{A_{\nu+\mu}} - \frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}} \right) = 0 \quad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die beiden Kurvenscharen C_{ν} und $C_{\nu'}$ können dabei natürlich auch identisch sein. Die Gleichung (4) gilt ersichtlich ebenso, wenn μ mit wachsendem ν nicht fest bleibt, sondern eine beschränkte Wertmenge beliebig durchläuft. Man kann also zu jeder beliebig kleinen positiven Größe ε eine Zahl $N = N(M)$

stets so wählen, daß die Differenzen $\left| \frac{\bar{A}_{\nu+\mu}}{A_{\nu+\mu}} - \frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}} \right|$ für alle $\nu > N(M)$ und für alle $|\mu| \leq M$ kleiner als ε sind.

Es genügt offenbar, die Gleichung (4) für $\mu = 0$ und für positive Werte von μ zu beweisen. Denn ist μ negativ, so setzen wir $\nu + \mu = \nu'$, also $\nu = \nu' - \mu$, und da ν' mit ν über alle Grenzen wächst, so ist dieser Fall damit auf den eines positiven μ zurückgeführt.

Zum Beweise von (4) für $\mu \geq 0$ zeigen wir die Gültigkeit der folgenden drei Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} (c_1) \quad & \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+\mu}}{A_{\nu'}} = 1, \\ (c_2) \quad & \lim_{\nu=\infty} \frac{\bar{A}_{\nu+\mu} - \bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu+\mu}} = 0, \\ (c_3) \quad & \limsup_{\nu=\infty} \frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu+\mu}} \leq \frac{4}{3} \frac{R^2}{r^2}, \end{aligned} \right\} (\mu = 0, 1, 2, \dots).$$

Dazu beachten wir zunächst, daß $|A_{\nu+\mu} - A_{\nu'}|$ den (absolut genommenen) Unterschied zwischen der Anzahl sämtlicher von der Kurve $C_{\nu+\mu}$ umschlossenen Bereiche und derjenigen aller innerhalb der Kurve $C_{\nu'}$ gelegenen Bereiche angibt. Dieser Unterschied muß aber sicher kleiner sein, als die Anzahl der

Bereiche beträgt, die in dem von den beiden Kreisen mit den Radien $(\nu + \mu)\rho$ und $(\nu - 1) \cdot \rho$ gebildeten Kreisring enthalten sind; also ist entsprechend wie beim Beweise von Hilfssatz 1:

$$|A_{\nu + \mu} - A_{\nu'}| \pi r^2 < \pi \rho^2 ((\nu + \mu)^2 - (\nu - 1)^2),$$

oder:

$$(d_1) \quad |A_{\nu + \mu} - A_{\nu'}| < \frac{\rho^2}{r^2} (\mu + 1) (\mu - 1 + 2\nu) < \frac{\rho^2}{r^2} (\mu + 1) (2\nu + \mu).$$

Da ferner offenbar stets:

$$|\bar{A}_{\nu + \mu} - \bar{A}_{\nu'}| \leq |A_{\nu + \mu} - A_{\nu'}|$$

ist, so ist auch:

$$(d_2) \quad |\bar{A}_{\nu + \mu} - \bar{A}_{\nu'}| < \frac{\rho^2}{r^2} (\mu + 1) (2\nu + \mu).$$

Schließlich bedeutet $\bar{A}_{\nu'}$ die Anzahl der von der Kurve $C_{\nu'}$ umschlossenen markierten Bereiche, die ersichtlich höchstens gleich der Zahl sämtlicher innerhalb des ν -ten Kreises gelegenen Bereiche b_i ist; daher folgt:

$$\bar{A}_{\nu'} \pi r^2 < \pi \rho^2 \nu^2,$$

oder:

$$(d_3) \quad \bar{A}_{\nu'} < \frac{\rho^2}{r^2} \nu^2.$$

Aus den Ungleichungen (d_1) , (d_2) und (d_3) ergeben sich unter Berücksichtigung der bereits beim Beweise von Hilfssatz 1 benutzten Abschätzung:

$$A_{\nu + \mu} > \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{R^2} (\nu - 1)^2$$

und:

$$A_{\nu'} > \frac{3}{4} \frac{\rho^2}{R^2} (\nu - 1)^2$$

die drei folgenden:

$$(c_1') \quad \left| \frac{A_{\nu + \mu}}{A_{\nu'}} - 1 \right| < \frac{4}{3} \frac{R^2}{r^2} (\mu + 1) \frac{2\nu + \mu}{(\nu - 1)^2},$$

$$(c_2') \quad \left| \frac{\bar{A}_{\nu + \mu} - \bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu + \mu}} \right| < \frac{4}{3} \frac{R^2}{r^2} (\mu + 1) \frac{2\nu + \mu}{(\nu - 1)^2},$$

$$(c_3') \quad \frac{\bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} < \frac{4}{3} \frac{R^2}{r^2} \left(\frac{\nu}{\nu-1} \right)^2,$$

aus denen die Beziehungen (c_1) , (c_2) und (c_3) ohne weiteres fließen.

Wählen wir nun eine Zahl $N = N(\mu)$ so groß, daß für alle Werte $\nu > N$ erstens — nach (c_1') —:

$$\left| \frac{A_{\nu+\mu}}{A_\nu'} - 1 \right| < \varepsilon \frac{r^2}{r^2 + 2R^2},$$

zweitens — nach (c_2') —:

$$\left| \frac{\bar{A}_{\nu+\mu} - \bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} \right| < \varepsilon \frac{r^2}{r^2 + 2R^2},$$

und drittens — nach (c_3') —:

$$\frac{\bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} < 2 \frac{R^2}{r^2}$$

ist, so folgt für dieselben Werte von ν sofort:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{A}_{\nu+\mu}}{A_{\nu+\mu}} - \frac{\bar{A}_\nu'}{A_\nu'} \right| &= \left| \frac{\bar{A}_{\nu+\mu} - \bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} - \frac{\bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} \left(\frac{A_{\nu+\mu}}{A_\nu'} - 1 \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{\bar{A}_{\nu+\mu} - \bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} \right| + \frac{\bar{A}_\nu'}{A_{\nu+\mu}} \cdot \left| \frac{A_{\nu+\mu}}{A_\nu'} - 1 \right| \\ &< \varepsilon \frac{r^2}{r^2 + 2R^2} + 2 \frac{R^2}{r^2} \cdot \varepsilon \frac{r^2}{r^2 + 2R^2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

womit der Hilfssatz 5 bewiesen ist.

Aus diesem Hilfssatz wollen wir nun mehrere Folgerungen ziehen. Wir greifen aus der ganzen Folge $\frac{\bar{A}_\nu}{A_\nu}$ zunächst eine

Teilfolge $\frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}}$ heraus, die einen Grenzwert besitzt (und die eventuell mit jener identisch sein kann); eine solche muß stets existieren. Wir behaupten: Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Kurven $C_{\nu'}$ in den zu

den Kreisen $Z_{\nu'}$ gehörigen Kreisringen $R_{\nu'}$. Dies ist klar, denn aus (4) ergibt sich für $\mu = 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} \left(\frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}} - \frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}} \right) = 0;$$

existiert also $\lim_{\nu'=\infty} \frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}}$ und ist dieser Grenzwert gleich q , so

existiert hiernach auch $\lim_{\nu'=\infty} \frac{A'_{\nu'}}{A'_{\nu'}}$ und ist ebenfalls gleich q . Da-

mit sind wir berechtigt, kurz zu sagen, der Grenzwert q gehöre zu der Teilkreisschar $Z_{\nu'}$.

Für das Folgende wollen wir die Radiendifferenz zweier aufeinanderfolgender Kreise einer solchen Teilkreisschar zur Abkürzung deren Abstand nennen; zu jeder Teilkreisschar gehört so eine Folge von Abständen. Ferner sei eine Teilkreisschar eine solche erster oder zweiter Art, je nachdem die zugehörige Abstandsfolge beschränkt oder nicht beschränkt ist.

Es gilt nun weiter der Satz: Existiert eine Teilkreisschar erster Art $Z_{\nu'}$, zu der ein Grenzwert q

gehört, so besitzt die ganze Folge $\frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}}$ einen Grenzwert, der dann mit q identisch sein muß. Damit die

Folge $\frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}}$ also einen Grenzwert besitzt, ist hinreichend — und

natürlich auch notwendig —, daß eine zu einer Teilkreisschar erster Art gehörige Teilfolge $\frac{\bar{A}_{\nu'}}{A_{\nu'}}$ existiert, die einen Grenzwert

besitzt. Zum Beweise des Satzes greifen wir eine beliebige zweite Teilkreisschar $Z_{\nu''}$ heraus; jedem Kreis dieser Schar ordnen wir den ihm gerade vorangehenden Kreis der Schar $Z_{\nu'}$ zu (die Gesamtheit dieser Kreise $Z_{\nu''}$ bildet also eine Teilschar $Z_{\nu''}$ der ganzen Schar $Z_{\nu'}$). Jedes der so entstehenden Paare besitzt einen gewissen Abstand; da die Schar $Z_{\nu'}$ eine solche erster Art war, so muß die Folge dieser Abstände ersichtlich beschränkt

sein. Setzen wir also $v'' - v''' = \mu$ oder $v'' = v''' + \mu$, so ist für alle v''' $\mu \leq M$; damit können wir aber (4) (für $C_v = C_{v'}$) auf beide Teilfolgen anwenden und bekommen:

$$\lim_{v''' = \infty} \left(\frac{\bar{A}_{v''}}{A_{v''}} - \frac{\bar{A}_{v'''}}{A_{v'''}} \right) = 0.$$

Hieraus folgt aber in der Tat, daß, sofern $\lim_{v''' = \infty} \frac{\bar{A}_{v'''}}{A_{v'''}}$ existiert und gleich q ist — was infolge der Voraussetzung offenbar der Fall sein muß —, auch $\lim_{v''' = \infty} \frac{\bar{A}_{v''}}{A_{v''}}$ existiert und ebenfalls gleich q ist. Da aber die Teilschar $Z_{v''}$ ganz beliebig war, so ist der behauptete Satz bewiesen. Damit also umgekehrt die Folge $\frac{\bar{A}_v}{A_v}$ mehr als einen Häufungspunkt besitzt, muß jede einem Grenzwert zugehörige Teilkreisschar eine solche zweiter Art sein.

Es seien nun zwei verschiedene Teilkreisscharen $Z_{v'}$ und $Z_{v''}$ gegeben, zu denen bez. die Grenzwerte q' und q'' gehören mögen. Jeder Kreis der einen Schar hat von jedem Kreis der anderen Schar einen gewissen Abstand; wir betrachten die Folge dieser sämtlichen Abstände. Damit die beiden Grenzwerte q' und q'' verschieden sind, ist notwendig, daß diese Folge keine unendliche beschränkte Teilfolge besitzt, daß es also mit anderen Worten nicht unendlich oft vorkommt, daß der Abstand zweier zu beiden Scharen gehöriger Kreise unterhalb einer festen Größe bleibt. Denn wäre dies der Fall, so besäßen die Scharen $Z_{v'}$ und $Z_{v''}$ ersichtlich zwei derartige Teilscharen $Z_{v'''} \text{ bzw. } Z_{v^{IV}}$ (mit den zugehörigen Quotienten $\frac{\bar{A}_{v'''}}{A_{v'''}}$ bzw. $\frac{\bar{A}_{v^{IV}}}{A_{v^{IV}}}$), daß die Differenzen $|v''' - v^{IV}| = \mu$ für alle v''' kleiner als eine endliche Größe M blieben. Damit könnten wir aber Hilfssatz 5 (für $C_v = C_{v'}$) auf diese beiden Teilfolgen anwenden und erhielten:

$$\lim_{v''' = \infty} \left(\frac{\bar{A}_{v'''}}{A_{v'''}} - \frac{\bar{A}_{v^{IV}}}{A_{v^{IV}}} \right) = 0,$$

woraus sich die Gleichheit der Grenzwerte der Teilfolgen (und damit auch der ursprünglichen Folgen) ergäbe.

Wir behaupten ferner: Sind die beiden Grenzwerte q' und q'' verschieden, so kann man stets eine Teilkreisschar $Z_{\nu''}$ bilden, zu welcher eine beliebige zwischen den Größen q' und q'' liegende Zahl q''' als Grenzwert gehört. Gibt man nämlich ein beliebig kleines positives ε vor, das wir bereits kleiner als $|q' - q'''|$ und $|q'' - q'''|$ annehmen wollen, so kann man eine Zahl N stets so groß wählen, daß für alle Werte von ν' und ν'' , die größer als N sind, sich einerseits $\frac{\bar{A}_{\nu'}}$ von q' und $\frac{\bar{A}_{\nu''}}$ von q'' um weniger als ε unterscheiden — so daß also infolge der Voraussetzungen $\varepsilon < |q' - q'''|$ und $\varepsilon < |q'' - q'''|$ q''' nicht nur zwischen q' und q'' , sondern auch zwischen $\frac{\bar{A}_{\nu'}}$ und $\frac{\bar{A}_{\nu''}}$ liegt —, und andererseits auch (nach Hilfssatz 5) zwei aufeinanderfolgende Quotienten $\frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}}$ und $\frac{\bar{A}_{\nu+1}}{A_{\nu+1}}$ um weniger als ε voneinander entfernt sind. Da aber dann ersichtlich die zu den zwischen zwei beliebigen Werten ν' und ν'' gelegenen Indexwerten μ gehörigen Quotienten $\frac{\bar{A}_{\nu''}}{A_{\mu}}$ mindestens die Zahlenstrecke zwischen $\frac{\bar{A}_{\nu'}}$ und $\frac{\bar{A}_{\nu''}}$ derart erfüllen müssen, daß je zwei benachbarte dieser Zahlen sich um weniger als ε voneinander unterscheiden, so müssen offenbar sogar wenigstens zwei solcher Indexwerte μ existieren, deren zugehörige Quotienten $\frac{\bar{A}_{\mu}}{A_{\mu}}$ zwar von der Zahl q''' verschieden sind, sich aber von ihr doch ebenfalls um weniger als ε unterscheiden. Mithin kann man zu jedem beliebig kleinen ε Kreise Z_{ν} finden, zu welchen von dem Wert q''' verschiedene, aber um weniger als ε von ihm entfernte Quotienten $\frac{\bar{A}_{\nu}}{A_{\nu}}$ gehören; damit ist der Beweis aber geführt.

Aus dem soeben Bewiesenen folgt, daß sämtliche zwischen

zwei beliebigen Häufungspunkten der Folge $\frac{\bar{A}_\nu}{A_\nu}$ gelegenen Punkte wieder Häufungspunkte dieser Folge sind. Daraus ergibt sich sofort, daß alle Punkte der Strecke, die den limes inferior mit dem limes superior der Folge verbindet, ebenfalls Häufungspunkte sind, während außerhalb dieser Strecke keine solche Punkte mehr liegen. Jeder Folge $\frac{\bar{A}_\nu}{A_\nu}$ ist mithin eine dem Intervall von Null bis Eins ganz angehörende Strecke zugeordnet, die Ort ihrer sämtlichen Häufungspunkte ist und die wir daher ihre Häufungsstrecke nennen können. Diese Strecke kann ausnahmsweise in einen Punkt degenerieren; dann besitzt die Folge einen Grenzwert.

Daß die Häufungsstrecke einer Folge unabhängig von der Wahl der Kurven C_ν in den Kreisringen R_ν ist, ergibt sich nach der an der Spitze dieser Betrachtungen aufgestellten Behauptung. Wir zeigen weiterhin, daß sie auch unabhängig von der Wahl des Grundradius ϱ ($> 2R$) der Kreisschar Z_ν , sowie von der Lage ihres Zentrums ist.

Um die Unabhängigkeit von der Wahl des Grundradius zu zeigen, betrachten wir zunächst außer der Kreisschar $Z_\nu^{(\varrho)}$ mit dem Grundradius ϱ noch zwei Kreisscharen $Z_\nu^{(\varrho_1)}$ und $Z_\nu^{(\varrho_2)}$, deren Grundradien ϱ_1 und ϱ_2 ein Vielfaches und ein Teil von ϱ sind:

$$\varrho_1 = n\varrho,$$

$$\varrho_2 = \frac{\varrho}{m}.$$

Wir behaupten, daß alle zur Schar $Z_\nu^{(\varrho)}$ gehörigen Häufungspunkte auch zu den Scharen $Z_\nu^{(\varrho_1)}$ und $Z_\nu^{(\varrho_2)}$ als Häufungspunkte gehören, daß also die Häufungsstrecken von $Z_\nu^{(\varrho_1)}$ und $Z_\nu^{(\varrho_2)}$ an und für sich höchstens größer als diejenige von $Z_\nu^{(\varrho)}$ sein können. Aus beiden Teilen der Behauptung zusammen folgt aber offenbar sofort (da ϱ Teil von $n\varrho$ und Vielfaches von $\frac{\varrho}{m}$ ist), daß jene

Häufungsstrecken mit der von $Z_{\nu}^{(e)}$ identisch sein müssen. Zum Beweise der Behauptung greifen wir eine Teilkreisschar $Z_{\nu}^{(e)}$ mit dem zugehörigen Grenzwert q heraus. Da jeder Kreisring $R_{\nu}^{(e)}$ ganz innerhalb eines Kreisrings $R_{\nu}^{(e_1)}$ liegen muß, so ist damit bereits eine Teilkreisschar $Z_{\nu}^{(e_1)}$ gefunden, zu der der Grenzwert q gehört, womit der erste Teil der Behauptung bewiesen ist. Ferner liegen innerhalb jedes Kreisrings $R_{\nu}^{(e)}$ m Kreisringe $R_{\nu}^{(e_2)}$; wählen wir die Kurven C_{ν} nun speziell so, daß jede gleichzeitig ganz innerhalb eines der Kreisringe $R_{\nu}^{(e_2)}$ verläuft, so ist damit eine Schar $Z_{\nu}^{(e_2)}$ konstruiert, die zu dem Grenzwert q führt, so daß auch der zweite Teil der Behauptung bewiesen ist. Sind nun zwei Kreisscharen mit den beliebigen Grundradien e_1 und e_2 gegeben, so betrachten wir eine Kreisschar $Z_{\nu}^{(e_3)}$ mit dem Grundradius $e_3 = n e_1$, der so gewählt ist, daß $e_3 > 2 e_2$ ist. Da dann innerhalb jedes Ringes der Schar $R_{\nu}^{(e_3)}$ mindestens ein Ring der Schar $R_{\nu}^{(e_2)}$ liegen muß, so muß die Folge $Z_{\nu}^{(e_3)}$ zu sämtlichen Häufungspunkten der Folge $Z_{\nu}^{(e_2)}$ führen. Die Häufungsstrecke von $Z_{\nu}^{(e_3)}$, oder, was nach den zuerst angestellten Betrachtungen dasselbe ist, von $Z_{\nu}^{(e_1)}$ kann demnach höchstens länger sein als diejenige von $Z_{\nu}^{(e_2)}$. Genau umgekehrt kann man aber ersichtlich zeigen, daß sie höchstens kürzer sein kann. Damit müssen aber beide Häufungsstrecken in der Tat gleich sein.

Zum Beweise der Unabhängigkeit von der Lage des Zentrums schließlich legen wir um beide Zentren, deren Entfernung s betragen möge, Kreisscharen, deren gemeinsamer Grundradius ρ größer als $s + 2R$ sei. Betrachten wir nun je zwei entsprechende aufeinanderfolgende Kreise beider Scharen, so wird von denselben ein von vier Kreisbogen begrenzter, jedem der beiden entsprechenden Kreisringe ganz angehöriger Bereich umschlossen, dessen Randpunkte infolge der Voraussetzung $\rho > 2R + s$ an der schmalsten Stelle noch weiter als $2R$ voneinander entfernt sind (s. Abb. 3). Innerhalb jedes solchen Bereiches läßt sich also eine den bekannten Anforderungen ge-

nügende Kurve C_ν konstruieren, die beiden entsprechenden Kreisringen zugleich angehört. Da mithin die Kurvenschar für beide Kreisscharen dieselbe ist, so folgt die Behauptung ohne weiteres.

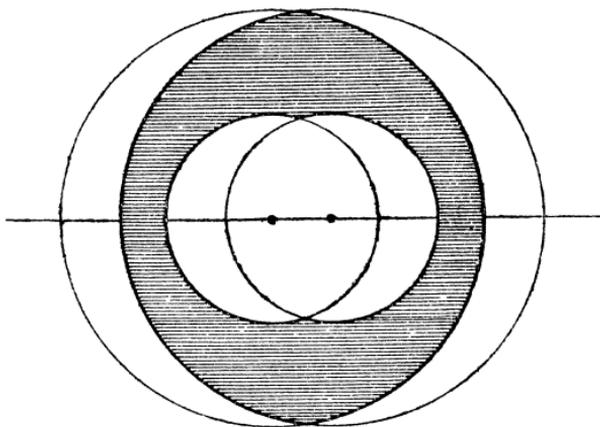


Abb. 3.

Die hiermit erzielten Ergebnisse können wir zusammenfassen in dem

Hilfssatz 6: Jeder Folge $\frac{\bar{A}_\nu}{A_\nu}$ ist eine ganz dem Intervall Null bis Eins angehörende Strecke zugeordnet, deren Punkte sämtliche Häufungspunkte der Folge sind. Diese Strecke ist unabhängig von der Wahl der Kurven C_ν in den Kreisringen R_ν und von der Größe des Grundradius ϱ der Kreisschar Z_ν , sowie von der Lage ihres Zentrums. Artet sie in einen Punkt aus, so besitzt die Folge $\frac{\bar{A}_\nu}{A_\nu}$ einen Grenzwert.

§ 2.

Der Hauptsatz für konvexe Polygone.

Die Bereiche b_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), die die lückenlose und schlichte Bedeckung der Ebene erzeugen, seien jetzt sämtlich

geradlinig und konvex¹⁾; die Ebene sei also in eine Folge konvexer Polygone P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) zerlegt. Unter Ecken eines Polygons verstehen wir in der üblichen Weise diejenigen Punkte seiner Berandung, zu denen von π verschiedene Polygonwinkel gehören; Polygone mit gleicher Eckenzahl wollen wir kurz gleicheckige Polygone nennen. Konvexe Polygone erfüllen offenbar die in § 1 für die Bereiche b_i geforderten allgemeinen Bedingungen; wir setzen ferner wieder voraus, daß ihre Durchmesser nicht beliebig groß und ihre Flächeninhalte nicht beliebig klein werden. Da infolge der Konvexität alle Polygonwinkel kleiner als π sind, so muß die Bedeckung so beschaffen sein, daß von jeder Ecke jedes Polygons mindestens noch zwei andere Polygone ausgehen, d. h. mit anderen Worten, daß jede Polygonecke einen Netzknoten bildet. Natürlich können auch auf den Kanten der Polygone noch Netzknoten liegen; solche, durch die Bedeckung selbst erst definierte Punkte einer Polygonberandung, die für die Bedeckung dieselbe Rolle spielen wie die eigentlichen Ecken, wollen wir daher singuläre Ecken des Polygons nennen.

Wir wollen uns zunächst auf den Fall gleicheckiger Polygone beschränken. Sei dann n die Eckenzahl jedes Polygons, sei ferner e_i die Anzahl der singulären Ecken des Polygons P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), sei schließlich $e_i^{(k)}$ die Anzahl derjenigen (eigentlichen und singulären) Ecken des Polygons P_i , die mit k -fachen Netzknoten identisch sind ($i = 1, 2, 3, \dots$; $k \geq 3$). Dann ist zunächst:

$$(1) \quad n + e_i = \sum_{k \geq 3} e_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Wir betrachten nun die in § 1 definierte Folge der Teilbereiche B_ν , von denen der ν -te aus A_ν Polygonen besteht. Dann gilt folgender

Satz 1: Zerlegt man die gesamte Ebene in eine Folge von gleicheckigen konvexen

¹⁾ Es genügt offenbar, lediglich Konvexität der Bereiche zu fordern, da die geradlinige Begrenzung sich als Folge der lückenlosen und schlichten Bedeckung hieraus sofort ergibt.

Polygonen, deren Durchmesser beschränkt sind und deren Flächeninhalte nicht beliebig klein werden, so gilt für ihre Eckenzahl n die folgende Darstellung:

$$(I) \quad n = 6 - \lim_{\nu = \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i,$$

worin:

$$(I') \quad E_i = e_i + \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

ist.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich einfach durch doppelte Darstellung der in einem Teilbereich B_ν vorkommenden Gesamtwinkelsumme S_ν ; denn einmal ist diese einfach:

$$(2) \quad S_\nu = \pi \cdot \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i - 2),$$

wenn man die bekannte Darstellung $\pi \cdot (n + e_i - 2)$ für die Winkelsumme eines einfachen Polygons mit $n + e_i$ Ecken benutzt. Ist sodann P_ν die Gesamtzahl der innerhalb und p_ν diejenige der auf dem Rande von B_ν (also auf C_ν) liegenden Netzpunkte, so ergibt sich als zweite Darstellung:

$$(3) \quad S_\nu = 2 \pi P_\nu + \pi (p_\nu - 2),$$

da C_ν ja in unserem Falle ein einfaches Polygon mit der Eckenzahl p_ν ist.

Ist nun $p_\nu^{(k, k')}$ die Anzahl der auf C_ν liegenden k -fachen Netzpunkte, in denen k' dem Teilbereich B_ν angehörige Polygone zusammenstoßen — deren innere Vielfachheit also k' ist ($k' \geq 1$) —, so daß mithin stets:

$$(4) \quad \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} p_\nu^{(k, k')} = p_\nu$$

und:

$$(5) \quad k' < k - 1 < k$$

ist, so ergibt sich für P_ν ersichtlich folgende Darstellung:

$$P_\nu = \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{A_\nu} e_i^{(k)} - \sum_{k' \geq 1} k' p_\nu^{(k, k')} \right),$$

oder wenn man hierin für $e_i^{(3)}$ den sich aus (1) ergebenden Wert:

$$e_i^{(3)} = n + e_i - \sum_{k \geq 4} e_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

einsetzt:

$$\begin{aligned} P_\nu &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} e_i^{(k)} + \sum_{k \geq 4} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{A_\nu} e_i^{(k)} - \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} P_\nu^{(k, k')} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i) - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} \frac{k-3}{3k} e_i^{(k)} - \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} P_\nu^{(k, k')}. \end{aligned}$$

Diesen Wert für P_ν setzen wir nun in (3) ein; durch Gleichsetzung der beiden sich aus (2) und (3) für S_ν ergebenden Werte finden wir dann:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i - 2) \\ &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i) - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{3k} e_i^{(k)} - 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} P_\nu^{(k, k')} + P_\nu - 2, \end{aligned}$$

oder aber:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{A_\nu} (n + e_i) - 6 A_\nu = (n - 6) \cdot A_\nu + \sum_{i=1}^{A_\nu} e_i \\ &= - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} - 6 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} P_\nu^{(k, k')} + 3 P_\nu - 6, \end{aligned}$$

oder schließlich:

$$\begin{aligned} (6) \quad n &= 6 - \frac{1}{A_\nu} \cdot \left(\sum_{i=1}^{A_\nu} e_i + \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} \right) \\ & \quad + \frac{1}{A_\nu} \left(3 \cdot \left(P_\nu - 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} P_\nu^{(k, k')} \right) - 6 \right). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung wollen wir nun ν über alle Grenzen wachsen lassen; dann fallen die Randglieder fort, da:

$$(7) \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \left(3 \left(p_\nu - 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} \right) - 6 \right) = 0$$

ist. Denn da nach (5) stets $k' < k$ ist, so folgt unter Berücksichtigung von (4):

$$0 < \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} < \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} p_\nu^{(k, k')} = p_\nu,$$

und hieraus findet man:

$$(8) \quad -p_\nu < p_\nu - 2 \cdot \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} < +p_\nu.$$

Nun war p_ν die Anzahl der auf C_ν liegenden Netzpunkte, die offenbar gerade so groß ist als die Anzahl α_ν der Netzlinien, aus denen C_ν besteht. Aus Hilfssatz 4, § 1, folgt demnach:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{p_\nu}{A_\nu} = \lim_{\nu=\infty} \frac{\alpha_\nu}{A_\nu} = 0,$$

woraus sich durch Anwendung auf (8) die Gleichung (7) ergibt.

Damit haben wir aber aus (6) unter Berücksichtigung von (I') in der Tat die Beziehung (I) hergeleitet; daß $\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i$ stets existiert, folgt einfach daraus, daß dieser Grenzwert umgekehrt gleich $6 - n$ sein muß.

Wir sehen, daß in Satz 1 die Zahlen E_i eine wichtige Rolle spielen, die vermöge der Bedeckung den Polygonen P_i zugeordnet sind. Da auch unsere späteren Folgerungen wesentlich von diesen Zahlen ausgehen werden, wollen wir E_i kurz die zum Polygon P_i vermöge der Bedeckung gehörige charakteristische

Zahl nennen; der in Satz 1 vorkommende Ausdruck $\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i$ ¹⁾

kann dann offenbar als Mittelwert der charakteristischen Zahlen sämtlicher Polygone bezeichnet werden.

¹⁾ Dieser Grenzwert ist natürlich unabhängig von der Wahl der Kurven C_ν in den Kreisringen R_ν , von der Größe des Grundradius ϱ ($> 2R$) und von der Lage des Zentrums der Kreisschar Z_ν .

Es werde aus Satz 1 sofort eine Folgerung gezogen. Da ersichtlich stets:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i \geq 0$$

ist, so ergibt (I):

$$n \leq 6,$$

ein Resultat, das wir aussprechen können in dem

Satz 1a: Man kann die Ebene niemals in gleich-eckige konvexe Polygone, deren Durchmesser beschränkt sind und deren Flächen-inhalte nicht beliebig klein werden, zer-legen, sofern ihre Eckenzahl größer als 6 ist.

Für eine derartige Zerlegung kommen also nur Dreiecke, Vierecke, Fünfecke und Sechsecke in Betracht. Dieser Satz ist ein vollkommenes Analogon zu dem bekannten Satz, daß es keine Eulerschen Polyeder gibt, deren sämtliche Seitenflächen sechs und mehr Ecken haben. Dieser Satz läßt sich ja etwa folgender-maßen beweisen:

Wir betrachten gleich ein dem Eulerschen Polyeder ent-sprechendes, aus größten Kreisen bestehendes Kugelnetz, für das ebenso wie für das Polyeder selbst die bekannte Eulersche Formel:

$$E + F = K + 2$$

gilt, in welcher E die Anzahl der Netzpunkte, K die der Netz-kanten und F die der Netzflächen des Kugelnetzes bedeutet. Da nun in jedem Netzpunkt mindestens drei Netzkanten zu-sammenstoßen müssen, so folgt:

$$3 E \leq 2 K,$$

und setzt man dies oben ein, so findet sich:

$$\frac{2 K}{3} + F \geq K + 2,$$

oder:

$$2 K \leq 6 (F - 2).$$

Hat nun jede der F Netzflächen n Ecken und damit auch n Kanten, so ist noch:

$$2K = nF,$$

womit wir schließlich:

$$n \cdot F \leq 6(F - 2),$$

oder:

$$n \leq 6 \frac{F - 2}{F}$$

erhalten. Da nun $\frac{F - 2}{F}$ für jedes endliche F kleiner als Eins ist, so folgt hieraus, daß n stets kleiner als sechs ist, also höchstens gleich fünf sein kann; dies ist der bekannte Polyedersatz, der demnach auch für aus größten Kreisen bestehende Kugelteilungen gilt. Nun gilt aber die obige Ungleichung für jede beliebig große Zahl F und natürlich auch für jede Kugel mit beliebig großem Radius. Faßt man nun eine Zerlegung der Ebene in Polygone als Grenzfall eines Kugelnetzes für eine Kugel mit unendlich großem Radius und für eine unendliche Anzahl F von Netzflächen auf, so folgt dafür aus der obigen Ungleichung $n \leq 6$, mit dem Unterschied also, daß jetzt auch das Gleichheitszeichen Gültigkeit haben kann, da $\lim_{F=\infty} \frac{F - 2}{F} = 1$ ist. Satz 1a ist also in der Tat das vollkommene Analogon zu dem Eulerschen Polyedersatz.

Es hat keine Schwierigkeit, den Satz 1, zu dem wir jetzt zurückkehren, auf den Fall konvexer Polygone mit beliebigen beschränkten Eckenzahlen zu übertragen¹⁾. Dazu fassen wir alle gleicheckigen Polygone zu einer Art zusammen. Sei a die Anzahl der bei der Zerlegung vorkommenden Arten, sei weiter n_j die Eckenzahl der j -ten Art ($j = 1, 2, \dots, a$), sei ferner e_{ij} die Zahl der singulären Ecken und $e_{ij}^{(k)}$ die Zahl der mit k -fachen Netzpunkten zusammenfallenden (eigentlichen und singulären) Ecken des i -ten Polygons der j -ten Art ($i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, a$;

¹⁾ Dabei ist selbstverständlich nach wie vor vorausgesetzt, daß ihre Durchmesser beschränkt sind und ihre Flächeninhalte nicht beliebig klein werden.

$k \geq 3$), sei schließlich $A_{\nu j}$ die Anzahl der dem Teilbereich B_{ν} angehörig Polygone j -ter Art ($\nu = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, a$) und habe $A_{\nu}, S_{\nu}, P_{\nu}, p_{\nu}, k', p_{\nu}^{(k, k')}$ dieselbe Bedeutung wie früher; dann gilt zunächst:

$$(9) \quad \sum_{j=1}^a A_{\nu j} = A_{\nu}.$$

Während ferner die Gleichungen (3), (4) und (5) unverändert bleiben, treten an die Stelle unserer früheren Gleichungen (1) und (2) einfach die folgenden:

$$(1_1) \quad n_j + e_{ij} = \sum_{k \geq 3} e_{ij}^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, a),$$

$$(2_1) \quad S_{\nu} = \pi \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} (n_j + e_{ij} - 2),$$

und für P_{ν} gilt jetzt die Darstellung:

$$P_{\nu} = \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} e_{ij}^{(k)} - \sum_{k' \geq 1} k' p_{\nu}^{(k, k')} \right),$$

oder, wenn wir hierin für $e_{ij}^{(3)}$ wieder den sich aus (1₁) ergebenden Wert:

$$e_{ij}^{(3)} = n_j + e_{ij} - \sum_{k \geq 4} e_{ij}^{(k)}$$

einsetzen:

$$P_{\nu} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} (n_j + e_{ij}) - \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} \sum_{k \geq 4} \frac{k-3}{3k} e_{ij}^{(k)} - \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_{\nu}^{(k, k')}.$$

Unter Berücksichtigung dieses Ausdrucks erhalten wir durch Gleichsetzung der beiden Werte für S_{ν} genau wie früher:

$$\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} (n_j + e_{ij}) - 6 A_{\nu} = \sum_{j=1}^a A_{\nu j} n_j - 6 A_{\nu} + \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} e_{ij}$$

$$= - \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_{ij}^{(k)} - 6 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_{\nu}^{(k, k')} + 3 p_{\nu} - 6,$$

oder aber:

$$(6_1) \quad \sum_{j=1}^a \frac{A_{\nu j}}{A_{\nu}} \cdot n_j = 6 - \frac{1}{A_{\nu}} \left(\sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} e_{ij} + \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_{\nu j}} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_{ij}^{(k)} \right)$$

$$+ \frac{1}{A_{\nu}} \left(3 \left(p_{\nu} - 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_{\nu}^{(k, k')} \right) - 6 \right).$$

Die linke Seite hierin gibt offenbar den Mittelwert der Eckenzahlen in dem Teilbereich B_{ν} an. Lassen wir ν über alle Grenzen wachsen, so gilt natürlich wieder Gleichung (7). Doch haben wir im Gegensatz zu früher nun auch linker Hand eine Folge von ν abhängiger Größen, und diese braucht im allgemeinen keinen Grenzwert zu besitzen. Wir setzen für das Folgende nun noch eine derartige Beschaffenheit der betrachteten Bedeckung voraus, daß alle Zahlen $\frac{A_{\nu j}}{A_{\nu}}$ ($j = 1, 2, \dots, a$) bei unbegrenzt wachsendem ν bestimmten Grenzwerten q_j ($j = 1, 2, \dots, a$) zustreben:

$$\lim_{\nu = \infty} \frac{A_{\nu j}}{A_{\nu}} = q_j \quad (j = 1, 2, \dots, a),$$

zwischen denen infolge von (9) dann die Beziehung:

$$\sum_{j=1}^a q_j = 1$$

bestehen muß. In diesem Falle besitzt auch die linke Seite von (6₁) einen Grenzwert:

$$\lim_{\nu = \infty} \sum_{j=1}^a \frac{A_{\nu j}}{A_{\nu}} n_j = \sum_{j=1}^a q_j n_j,$$

und wir erhalten:

$$\sum_{j=1}^a q_j n_j = 6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_\nu j} \left(e_{ij} + \sum_{k \geq 4} 2^{\frac{k-3}{k}} e_{ij}^{(k)} \right),$$

wobei der hierin rechter Hand stehende Grenzwert dann ebenfalls existieren muß.

Jede der Folgen $\frac{A_\nu j}{A_\nu}$ ($j = 1, 2, \dots, a$) gehört zu dem Typus

von Zahlenfolgen, den wir in § 1 ausführlich untersucht haben. Aus dem dort hergeleiteten Hilfssatz 6 ergibt sich, daß die (hier als existierend vorausgesetzten) Grenzwerte q_j ($j = 1, 2, \dots, a$) unabhängig sind von der speziellen Wahl der Polygone C_ν in den Kreisringen R_ν , von der Wahl des Grundradius ϱ ($> 2R$) und von der Lage des Zentrums der konzentrischen Kreisschar Z_ν . Diese Unabhängigkeit von willkürlichen, durch die Bedeckung nicht bedingten Annahmen berechtigt uns zu der Aussage, daß q_j ($j = 1, 2, \dots, a$) das Verhältnis angibt, in welchem die Anzahl aller bei der Bedeckung vorkommenden, der j -ten Polygonart angehörenden Polygone zur Anzahl sämtlicher bedeckenden

Polygone steht; der Ausdruck $\sum_{j=1}^a q_j n_j$ kann füglich als Mittelwert der Eckenzahlen in der ganzen Ebene bezeichnet werden. Unsere seitherigen Betrachtungen führen mithin zu dem

Hauptsatz für konvexe Polygone: Es sei die gesamte Ebene in eine Folge von konvexen Polygonen zerlegt, die einer beschränkten Anzahl a von Arten mit den Eckenzahlen n_1 bis n_a angehören und deren Durchmesser und Flächeninhalte nicht beliebig groß bzw. klein werden; es sei die Zerlegung ferner so beschaffen, daß die Verhältnisse q_1 bis q_a der Anzahlen der je einer Polygonart angehörenden Polygone zur Gesamtzahl aller Polygone existieren; dann gilt für die mittlere Eckenzahl n die Darstellung:

$$(II) \quad n = \sum_{j=1}^a q_j n_j = 6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_\nu j} E_{ij},$$

worin:

$$(III) \quad E_{ij} = e_{ij} + \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_{ij}^{(k)} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, 3, \dots \\ j=1, 2, \dots, a \end{array} \right)$$

ist.

Die Zahlen E_{ij} sind hier wieder die den Polygonen vermöge der Bedeckung zugeordneten charakteristischen Zahlen. Der Hauptsatz enthält natürlich den früheren Satz 1 als Spezialfall für $a=1$. Eine besonders einfache Gestalt nimmt er an, wenn jede Polygonart in gleicher Anzahl von Exemplaren bei der Bedeckung vertreten ist; denn dann ist offenbar:

$$q_j = \frac{1}{a} \quad (j=1, 2, \dots, a),$$

und wir bekommen:

$$\sum_{j=1}^a n_j = a \cdot \left(6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_\nu j} E_{ij} \right).$$

Im allgemeinen Fall regelt der Hauptsatz die den gemachten Voraussetzungen gehorchenden Ebenenbedeckungen mit konvexen Polygonen und es lassen sich demgemäß für spezielle solcher Bedeckungen eine große Menge von Folgerungen aus ihm ziehen. Hier sei nur eine solche erwähnt, die der früher von uns in Satz 1a für eine Polygonart ausgesprochenen entspricht und die man wieder erhält, indem man bemerkt, daß stets:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_\nu j} E_{ij} \geq 0$$

ist. Denn dann ergibt sich aus dem Hauptsatz, daß zu einer Bedeckung der Ebene mit mehreren Polygonarten notwendig ist, daß deren mittlere Eckenzahl kleiner, höchstens gleich sechs ist¹⁾. Übrigens hat auch dieser Satz wieder sein Analogon in

¹⁾ So kann man z. B. die Ebene niemals lückenlos und schlicht mit konvexen Fünf- und Achtecken in gleicher Anzahl bedecken, wenigstens

dem allgemeineren Eulerschen Polyedersatz, den wir aus dem früheren erhalten, wenn wir annehmen, daß das Kugelnetz nicht aus gleicheckigen Netzflächen besteht, sondern daß diese etwa a verschiedenen Arten mit den Eckenzahlen n_1 bis n_a angehören, und daß jede Art in der Anzahl von F_j ($j = 1, 2, \dots, a$) Exemplaren vertreten ist, wobei:

$$\sum_{j=1}^a F_j = F$$

ist. Denn dann erhalten wir aus:

$$2 K = \sum_{j=1}^a F_j \cdot n_j$$

und:

$$2 K \leq 6 (F - 2)$$

die Ungleichung:

$$\sum_{j=1}^a \frac{F_j}{F} n_j \leq 6 \frac{F-2}{F},$$

die das volle Analogon zu unserem obigen Satz bildet; die Quotienten $\frac{F_j}{F}$ ($j = 1, 2, \dots, a$) entsprechen dabei den Verhältnissen q_j ($j = 1, 2, \dots, a$).

§ 3.

Der Hauptsatz für allgemeine Polygone.

Der Hauptsatz des vorigen Paragraphen soll nunmehr auf den Fall einer Zerlegung der Ebene in beliebige Polygone erweitert werden. Dazu verhilft uns eine geeignete Definition der Ecken bzw. deren Anzahl bei einem beliebigen Polygon, die von der üblichen Definition wesentlich abweicht.

Sei ein einfach zusammenhängendes Polygon gegeben, das m Ecken im trivialen Sinn besitzen möge; an jeder Ecke liegt also ein von π verschiedener Polygonwinkel. Wir fassen diese

solange ihre Flächeninhalte nicht beliebig klein und ihre Durchmesser nicht beliebig groß werden; dagegen ist eine solche Bedeckung mit Vier- und Achtecken in gleicher Anzahl offenbar möglich und auch in der Tat ausführbar.

m Winkel nun zu Klassen K_λ von folgender Beschaffenheit zusammen: Je zwei Winkel aus einer Klasse sind entweder einander gleich oder ergänzen sich zu 2π , während je zwei Winkel aus verschiedenen Klassen weder einander gleich sind noch sich zu 2π ergänzen. Die Anzahl der so entstehenden Klassen sei l ; dann können wir sagen, das Polygon habe l Winkel, die untereinander und von ihren Ergänzungen zu 2π verschieden sind. Es ist klar, daß in jeder Klasse K_λ höchstens zwei verschiedene Winkelgrößen α_λ' und α_λ'' ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) vorkommen, für die dann die Beziehung besteht:

$$(a) \quad \alpha_\lambda' + \alpha_\lambda'' = 2\pi \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Seien n_λ' und n_λ'' die Zahlen, die angeben, wie oft die Winkelgröße α_λ' bzw. α_λ'' in der Klasse K_λ vorkommt, und sei die Bezeichnung so gewählt, daß stets $n_\lambda' \geq n_\lambda''$ ist¹⁾; dann ordnen wir jeder Klasse K_λ die von ihr herrührende Teileckenzahl $n_\lambda' - n_\lambda''$ zu und stellen folgende Definition auf:

Definition: Unter der Anzahl n der Ecken eines einfach zusammenhängenden Polygons werde die Summe der von sämtlichen Klassen K_λ herrührenden Teileckenzahlen verstanden:

$$(1) \quad n = \sum_{\lambda=1}^l (n_\lambda' - n_\lambda'').$$

Wir können die Polygonwinkel auch auf eine zweite Art in nur zwei Klassen einteilen, indem wir in die eine Klasse alle Winkel α_λ' ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) und in die andere Klasse alle Winkel α_λ'' ($\lambda = 1, 2, \dots, l$) werfen; zählen wir dann jeden Winkel so oft, wie er in dem Polygon vorkommt, so gibt die eben definierte Eckenzahl einfach die (nicht negative) Differenz der beiden diesen Klassen zugehörigen Klassenzahlen an:

$$(b) \quad n = \sum_{\lambda=1}^l n_\lambda' - \sum_{\lambda=1}^l n_\lambda'',$$

während die Anzahl der trivialen Ecken offenbar deren Summe ist:

¹⁾ Dabei kann n_λ'' also auch gleich Null sein.

$$(c) \quad m = \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}' + \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}''.$$

Daraus folgt, daß beide Eckenzahlen dann und nur dann einander gleich sind, wenn:

$$\sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' = 0,$$

also:
$$n_{\lambda}'' = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 1)$$

ist; dies ist also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die neue Definition mit der gewöhnlichen übereinstimmt. Die einfach zusammenhängenden Polygone, die dieser Bedingung genügen, nennen wir Normalpolygone. Dazu gehören insbesondere ersichtlich alle konvexen Polygone.

Die in dem neuen Sinn genommenen Polygonecken selbst sind keine auf der Berandung festliegenden Punkte; es sind lediglich solche Punkte der Polygonberandung, an welchen Winkel von der Größe α_{λ}' ($\lambda = 1, 2, \dots, 1$) liegen, und zwar für jedes λ in der Anzahl $n_{\lambda}' - n_{\lambda}''$, also unter den n_{λ}' vorhandenen derartigen Punkten im allgemeinen noch willkürlich wählbar.

Es sollen hier noch zwei Sätze über Polygonecken im neuen Sinn angefügt werden, die zeigen, daß diese mancherlei Eigenschaften mit den gewöhnlichen Polygonecken gemeinsam haben; ihre Bedeutung für die Bedeckung der Ebene wird sich nachher zeigen.

Satz 1: Die Summe der Eckenwinkel eines einfach zusammenhängenden Polygons beträgt $\pi \cdot (n - 2)$.

Zum Beweise bemerken wir, daß die gesuchte Winkelsumme s_n offenbar durch:

$$s_n = \sum_{\lambda=1}^1 (n_{\lambda}' - n_{\lambda}'') \cdot \alpha_{\lambda}'$$

dargestellt wird, während die Summe s_m der Eckenwinkel im gewöhnlichen Sinne ersichtlich durch:

$$s_m = \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}' \alpha_{\lambda}' + \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' \alpha_{\lambda}''$$

gegeben ist. Diese letztere läßt sich nun unter Berücksichtigung von (a) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
 s_m &= \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}' \alpha_{\lambda}' + \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' \alpha_{\lambda}'' \\
 &= \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}' \alpha_{\lambda}' + \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' \cdot (2\pi - \alpha_{\lambda}') \\
 &= \sum_{\lambda=1}^1 (n_{\lambda}' - n_{\lambda}'') \alpha_{\lambda}' + 2\pi \cdot \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' \\
 &= s_n + 2\pi \sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' .
 \end{aligned}$$

Bedenken wir ferner, daß nach (b) und (c):

$$\sum_{\lambda=1}^1 n_{\lambda}'' = \frac{m - n}{2}$$

ist, also gerade $\frac{m - n}{2}$ Paare sich zu 2π ergänzender Winkel in dem Polygon vorkommen, und setzen wir schließlich für s_m den bekannten Wert ein, so erhalten wir aus:

$$\pi(m - 2) = s_n + 2\pi \frac{m - n}{2}$$

in der Tat:

$$s_n = \pi(n - 2) .$$

Satz 2: Jedes einfach zusammenhängende Polygon besitzt mindestens drei Ecken.

Denn anderenfalls wäre nach Satz 1 die Winkelsumme an diesen Ecken Null oder negativ, was natürlich unmöglich ist, da an jeder einzelnen Ecke im trivialen Sinn bereits ein Winkel von positiver Größe liegt.

Es sei die Ebene nunmehr zerlegt in eine Folge von beliebigen einfach zusammenhängenden Polygonen P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) mit den beschränkten (trivialen) Eckenzahlen m_i ($i = 1, 2, 3, \dots$):

$$(2) \qquad m_i \leq m \qquad (i = 1, 2, 3, \dots) .$$

Wir setzen wieder voraus, daß ihre Durchmesser nicht beliebig

groß und ihre Flächeninhalte nicht beliebig klein werden. Für das Weitere ist es zweckmäßig, zunächst folgende orientierenden Bemerkungen vorzuschicken.

Das Wesentliche einer solchen allgemeinen Bedeckung im Gegensatz zu derjenigen mit konvexen Polygonen besteht offenbar darin, daß in jedem Polygon jetzt auch solche (trivialen) Ecken auftreten können, in denen nur zwei Bereiche zusammenstoßen; derartige Punkte der Ebene wollen wir in leichter Verallgemeinerung unserer früheren Ausdrucksweise kurz zweifache Netzpunkte der Bedeckung nennen.

Wir betrachten zunächst, um bei diesen allgemeinen Bemerkungen die Ideen zu fixieren, als Beispiel den Fall, daß alle bedeckenden Polygone kongruent sind. Dann wird durch die zweifachen Netzpunkte der Bedeckung — sofern solche überhaupt vorkommen — offenbar zwischen einem Teil der Winkel α_λ' und der diese zu 2π ergänzenden Winkel α_λ'' ($\lambda = 1, 2, \dots$) eine eindeutige Zuordnung hergestellt; es wird also im Durchschnitt eine gewisse Anzahl der Winkel α_λ' in jedem Polygon zu zweifachen Netzpunkten gehören, und infolge der eindeutigen Zuordnung gilt dasselbe für eine gleiche Anzahl von Winkeln α_λ'' jedes Polygons, und dies für jeden Wert von λ ($\lambda = 1, 2, \dots$). Im äußersten Fall kann diese Zahl für das λ -te Winkelpaar ersichtlich n_λ'' sein, so daß also stets die zu überschüssigen Winkeln α_λ' ($\lambda = 1, 2, \dots$) gehörigen Ecken jedes Polygons im Durchschnitt mit mindestens dreifachen Netzpunkten identisch sein müssen. Die Anzahl dieser überschüssigen Winkel im ganzen Polygon ist aber gerade die von uns oben definierte Eckenzahl desselben, so daß wir jetzt sagen können, daß wenigstens durchschnittlich von allen Ecken (im neu definierten Sinn) jedes Polygons mindestens noch zwei weitere Polygone ausgehen müssen. Die Ecken im neuen Sinn spielen also in der Tat auch für die Bedeckung eine ähnliche Rolle wie die trivialen Ecken eines konvexen Polygons.

Diese Überlegungen gelten nun nicht nur dann, wenn sämtliche Polygone kongruent sind, sondern ersichtlich auch in wesentlich allgemeineren Fällen. Um diese zu übersehen, betrachten wir die Menge aller Winkelpaare (φ, ψ) , für die:

und:

$$\varphi + \psi = 2\pi$$

also:

$$0 < \varphi < \pi,$$

$$\pi < \psi < 2\pi$$

ist. In jedem Paar markieren wir einen der beiden Winkel und bezeichnen die Gesamtheit der so erhaltenen markierten Winkelpaare als einen Typus. Sei nun ein einfach zusammenhängendes Polygon vorgelegt; dann markieren wir in den l bei diesem Polygon vorkommenden Winkelpaaren $(\alpha_\lambda', \alpha_\lambda'')$ die Winkel α_λ' ($\lambda = 1, 2, \dots, l$). Dann und nur dann, wenn diese Markierungen mit denjenigen der entsprechenden Paare des Typus übereinstimmen, sagen wir, das Polygon gehöre zu dem Typus. Sämtliche zu ein und demselben Typus gehörigen einfach zusammenhängenden Polygone fassen wir zu einer Polygongattung zusammen. Der Sinn dieser Definition besteht in folgendem: Es sei eine Menge von Polygonen P_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) vorgelegt, bei denen eine bestimmte Winkelgröße ω als Polygonwinkel vorkommen möge, und zwar bei dem i -ten Polygon in der Vielfachheit $n_{i\omega}$ ($i = 1, 2, \dots$). Gehören diese Polygone nun einer Gattung an, so werden die Zahlen $n_{i\omega}$ bei allen Polygonen gleichzeitig nicht kleiner oder gleichzeitig nicht größer sein als die entsprechenden Zahlen $m_{i\omega}$, von denen die i -te angibt, wie oft der Winkel $2\pi - \omega$ in dem i -ten Polygon vorkommt:

$$\text{bezw.:} \quad \left. \begin{array}{l} n_{i\omega} \geq m_{i\omega}, \\ n_{i\omega} \leq m_{i\omega} \end{array} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Und haben manche der vorgelegten Polygone auch noch andere Winkelgrößen gemeinsam, so gilt dasselbe auch für diese. Dann und nur dann, wenn eine vorgelegte Polygonmenge einer Gattung angehört, läßt sich also für jede vorkommende Winkelgröße α einer der beiden Winkel α und $2\pi - \alpha$ mit α' und der andere mit α'' derart bezeichnen, daß für sämtliche Polygone gleichzeitig:

$$n_{i\alpha'} \geq n_{i\alpha''} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

ist, wo $n_{i\alpha'}$ und $n_{i\alpha''}$ bez. angeben, wie oft die Winkel α' und α'' in dem i -ten Polygon vorkommen ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Man sieht nun sofort, daß sich in dem Fall, daß alle die Ebene bedeckenden Polygone einer Gattung angehören, die für kongruente Polygone vorhin angestellten Überlegungen ohne weiteres entsprechend übertragen lassen. Besondere Bedeutung wird dabei dem Spezialfall zukommen müssen, daß sämtliche Polygone gleichzeitig Normalpolygone sind.

In dem allgemeinsten Fall beliebiger Polygone treten dagegen offenbar dadurch noch Komplikationen auf, daß in manchen von ihnen eine bestimmte Winkelgröße öfter auftreten kann als die sie zu 2π ergänzende Winkelgröße, in anderen ebenfalls zur Bedeckung gehörigen dagegen umgekehrt die letztere im Überschuß ist; derartige überschüssige Winkel können sich dann in zweifachen Netzpunkten gegenseitig ergänzen, so daß im allgemeinen auch nicht durchschnittlich von allen Ecken jedes Polygons mehr als zwei Bereiche auszugehen brauchen.

Wir wollen nun im folgenden die hiermit angedeuteten Gedankengänge exakt ausbauen; die bedeckenden Polygone mögen zunächst nur den früher aufgestellten Bedingungen genügen. Haben S_ν , P_ν , p_ν , e_i dieselben Bedeutungen wie in § 2, so ist wieder:

$$S_\nu = \pi \sum_{i=1}^{A_\nu} (m_i + e_i - 2)$$

und:

$$S_\nu = 2\pi P_\nu + \pi(p_\nu - 2),$$

woraus:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^{A_\nu} (m_i + e_i - 2) = 2P_\nu + p_\nu - 2$$

folgt.

Wir denken uns nun sämtliche vorkommenden (voneinander verschiedenen) Winkelgrößen und, soweit sie hierbei nicht schon vorhanden sind, auch deren Ergänzungen zu 2π , die ja als abzählbare Menge endlicher Mengen wieder eine abzählbare Menge bilden, in eine Reihe $R: \alpha_\kappa$ ($\kappa = 1, 2, \dots$) geordnet, und teilen diese in zwei Klassen K_1 und K_2 von folgender Beschaffenheit: Jeder Winkel der ersten Klasse ist verschieden von den Ergänzungen zu 2π aller anderen in dieser Klasse vorkommenden

Winkel; die Winkel der zweiten Klasse werden gebildet von den Ergänzungen zu 2π sämtlicher Winkel der ersten Klasse¹⁾. Die Winkel der ersten Klasse bezeichnen wir mit α_λ' , die der zweiten mit α_λ'' ($\lambda = 1, 2, 3, \dots$), und zwar derart, daß:

$$\alpha_\lambda' + \alpha_\lambda'' = 2\pi \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

ist. Es bedeute nun: $e_{i\alpha}^{(k)}$ die Anzahl derjenigen (trivialen) Ecken des i -ten Polygons, die mit k -fachen Netzpunkten identisch sind und an denen der Winkel α_α aus der Reihe R liegt; $e_{i\lambda}^{(k)'}$ und $e_{i\lambda}^{(k)''}$ dieselbe Anzahl, wenn α_α speziell ein Winkel α_λ' der ersten bzw. ein Winkel α_λ'' der zweiten Klasse ist; $n_{i\lambda}'$ und $n_{i\lambda}''$ die Anzahl derjenigen Ecken des i -ten Polygons, an denen der Winkel α_λ' der ersten bzw. der Winkel α_λ'' der zweiten Klasse liegt; $e_i^{(k)}$ die Anzahl der singulären (also sozusagen zum Polygonwinkel π gehörigen) Ecken des i -ten Polygons, die mit k -fachen Netzpunkten identisch sind, wobei $e_i^{(2)}$ gleich Null gesetzt werden möge; es habe ferner k' und $p_\nu^{(k, k')}$ dieselbe Bedeutung wie früher, doch werde für $\sum_{k'=1} k' p_\nu^{(2, k')} = p_\nu^{(2, 1)}$ kurz $p_\nu^{(2)}$ geschrieben; es sei schließlich $p_\nu^{(2)'}$ und $p_\nu^{(2)''}$ die Anzahl derjenigen zu zweifachen Netzpunkten gehörigen Ecken des Polygons C_ν , an denen zur ersten bzw. zur zweiten Klasse gehörige Polygonwinkel liegen ($i, \nu, \alpha, \lambda = 1, 2, 3, \dots$; $k \geq 2$; $k' \geq 1$).

Dann gelten zunächst ersichtlich folgende Beziehungen:

$$(4_1) \quad \sum_{k \geq 2} \sum_{(\alpha)} e_{i\alpha}^{(k)} = m_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(5) \quad \sum_{(\alpha)} e_{i\alpha}^{(k)} = \sum_{(\lambda)} (e_{i\lambda}^{(k)'} + e_{i\lambda}^{(k)''}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots; k \geq 2),$$

$$(4_2) \quad \sum_{k \geq 2} e_i^{(k)} = e_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(6_1) \quad \sum_{k \geq 2} e_{i\lambda}^{(k)'} = n_{i\lambda}' \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots),$$

¹⁾ Es ist klar, daß bei der Bildung dieser Klassen insofern eine Willkür herrscht, als jeder Winkel aus der einen Klasse in die andere und dafür sein Ergänzungswinkel zu 2π aus dieser in die erste getan werden kann

$$(6_2) \quad \sum_{k \geq 2} e_{i\lambda}^{(k)''} = n_{i\lambda}'' \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots),$$

$$(7) \quad p_\nu^{(2)} = p_\nu^{(2)'} + p_\nu^{(2)''} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots).$$

Für P_ν gilt ferner die Darstellung:

$$P_\nu = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{A_\nu} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) - \sum_{k' \geq 1} k' p_\nu^{(k, k')} \right),$$

aus welcher nach Einsetzung des sich aus (4₁) und (4₂) für $\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(3)} + e_i^{(3)}$ ergebenden Wertes:

$$\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(3)} + e_i^{(3)} = m_i + e_i - \sum_{k \geq 4} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) - \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

folgt:

$$P_\nu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{A_\nu} (m_i + e_i) + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)} - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 4} \frac{k-3}{3k} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) - \sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')}.$$

Nach Einführung dieses Ausdrucks erhalten wir aus (3) nach leichten Umformungen:

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{A_\nu} \left(m_i - \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)} \right) = 6A_\nu - \sum_{i=1}^{A_\nu} \left(\sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) + e_i \right) + 3 \left(p_\nu - 2 \sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} \right) - 6.$$

Es handelt sich nun darum, den hierin linker Hand stehenden Ausdruck umzuformen. Zunächst ist natürlich nach (4₁):

$$(4_1') \quad m_i - \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)} = \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Ferner benutzen wir jetzt, daß durch die innerhalb des betrachteten Teilbereiches B_ν gelegenen zweifachen Netzpunkte eine eindeutige Zuordnung zwischen den dabei vorkommenden Winkeln α_λ' und α_λ'' hergestellt wird. Infolge dieser Zuordnung muß nämlich offenbar die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)'} - p_\nu^{(2)'} = \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(2)''} - p_\nu^{(2)''}$$

bestehen. In dieser setzen wir die sich aus (6₁) und (6₂) für $e_{i\lambda}^{(2)'}$ und $e_{i\lambda}^{(2)''}$ ergebenden Werte:

$$\text{und: } \left. \begin{aligned} e_{i\lambda}^{(2)'} &= n_{i\lambda}' - \sum_{k \geq 3} e_{i\lambda}^{(k)'} \\ e_{i\lambda}^{(2)''} &= n_{i\lambda}'' - \sum_{k \geq 3} e_{i\lambda}^{(k)''} \end{aligned} \right\} (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

ein und erhalten:

$$\sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} n_{i\lambda}' - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} \sum_{k \geq 3} e_{i\lambda}^{(k)'} - p_\nu^{(2)'} = \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} n_{i\lambda}'' - \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} \sum_{k \geq 3} e_{i\lambda}^{(k)''} - p_\nu^{(2)''}.$$

Hierin subtrahieren wir auf beiden Seiten den Ausdruck:

$$\sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} \sum_{k \geq 3} e_{i\lambda}^{(k)'}$$

und bekommen dann unter Berücksichtigung von (5):

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} = \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{(\lambda)} (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'') + 2 \cdot \sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''} + p_\nu^{(2)''} - p_\nu^{(2)'}$$

Die rechts stehenden Differenzen $n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}''$ werden nun im allgemeinen für einen festen Winkel α_λ' bei verschiedenen Polygonen, also für verschiedene Werte von i , verschiedenes Vorzeichen haben. Gehören alle Polygone einer Gattung an, so ist es, wie wir gesehen haben, möglich, bei jedem vorkommenden Winkelpaar α_λ und $2\pi - \alpha_\lambda$ einen der beiden Winkel mit α_λ' und den anderen mit α_λ'' derart zu bezeichnen, daß die Differenzen $n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}''$ für alle Werte von i größer, höchstens gleich Null sind; in diesem Fall mögen die Klassen K_1 und K_2 noch gemäß dieser Bezeichnungsweise gebildet sein, was nach Fußnote S. 39 stets erreichbar ist. Dann gibt der Ausdruck $\sum_{(\lambda)} (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'')$ für jedes Polygon dessen Eckenzahl an, und der erste Summand auf der rechten Seite von (9) ist die Summe dieser Eckenzahlen in B_ν . Auch im allgemeinen Fall schreiben wir daher:

$$(10) \quad \sum_{(\lambda)} (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'') = n_i + 2 \sum_{(\lambda)}' (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'') \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

wo die gestrichene Summe $\sum_{(\lambda)}' (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'')$ nur über diejenigen im i -ten Polygon vorkommenden Winkel α_{λ}' zu erstrecken ist, für die die Differenz $n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}''$ negativ ist. Die Tatsache, daß alle Polygone einer Gattung angehören, wird dann durch die Beziehung:

$$(11) \quad \sum_{(\lambda)}' (n_{i\lambda}' - n_{i\lambda}'') = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

charakterisiert. Nach Einsetzung von (10) erscheint die Gleichung (9) in der Form:

$$\sum_{i=1}^{A_\nu} \sum_{k \geq 3} \sum_{(\alpha)} e_{i\alpha}^{(k)} = \sum_{i=1}^{A_\nu} n_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{A_\nu} \left(\sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''} - \sum_{(\lambda)} (n_{i\lambda}'' - n_{i\lambda}') \right) + p_\nu^{(2)''} - p_\nu^{(2)'}$$

Damit haben wir die gewünschte Umformung erhalten; die Gleichung (8) ergibt unter Berücksichtigung von (4₁') und (9) nach Division durch A_ν :

$$\frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} n_i = 6$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} \left(\left(\sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\alpha)} e_{i\alpha}^{(k)} + e_i \right) + 2 \left(\sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''} - \sum_{(\lambda)} (n_{i\lambda}'' - n_{i\lambda}') \right) \right) \right) \\ & + \frac{1}{A_\nu} \left(3 \left(p_\nu - 2 \sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} \right) - 6 \right) + \frac{1}{A_\nu} (p_\nu^{(2)'} - p_\nu^{(2)''}). \end{aligned}$$

Wir lassen nun wieder ν über alle Grenzen wachsen. Da offenbar:

$$\sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} = \frac{1}{2} p_\nu^{(2)} + \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')}$$

und mithin:

$$p_\nu - 2 \cdot \sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} = (p_\nu - p_\nu^{(2)}) - 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')}$$

ist, $p_\nu - p_\nu^{(2)}$ hier aber die Anzahl der mindestens dreifachen auf C_ν liegenden Netzpunkte angibt, also dieselbe Bedeutung hat wie p_ν in Gleichung (7), § 2, so gilt diese Gleichung auch in unserem Fall und wir haben daher:

$$(12) \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \left(3 \left(p_\nu - 2 \sum_{k \geq 2} \sum_{k' \geq 1} \frac{k'}{k} p_\nu^{(k, k')} \right) - 6 \right) = 0.$$

Ferner ist ersichtlich:

$$- p_\nu^{(2)} \leq p_\nu^{(2)'} - p_\nu^{(2)''} \leq + p_\nu^{(2)}$$

und infolge von (2) auch sicher:

$$p_\nu^{(2)} < m a_\nu.$$

Nach Hilfssatz 1, § 1, folgt demnach:

$$(13) \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} (p_\nu^{(2)'} - p_\nu^{(2)'}) = 0.$$

Schließlich setzen wir noch voraus — wenn wir jetzt unter einer Art noch die Gesamtheit aller Polygone mit gleicher im neuen Sinn genommener Eckenzahl verstehen, wobei diese Definition sich für konvexe Polygone ersichtlich mit der früher gegebenen deckt —, daß das Verhältnis der Zahl der in B_ν vorkommenden einer Art angehörenden Polygone zur Zahl aller zu B_ν gehörigen Polygone für jede vorkommende Art mit wachsendem ν einem bestimmten Grenzwert zustrebt. Diese Grenzwerte sind nach Hilfssatz 6, § 1, wieder unabhängig von der Wahl der Polygone C_ν in den Kreisringen R_ν , von deren Grundradius ρ und von der Lage ihres Zentrums. Ferner

existiert dann auch $\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} n_i$ und kann füglich als Mittel-

wert der Eckenzahlen in der ganzen Ebene bezeichnet werden.

Unter Berücksichtigung von (10) und (11) gelangen wir so zu dem

I. Hauptsatz für allgemeine Polygone: Es sei die gesamte Ebene in eine Folge von einfach zusammenhängenden Polygonen zerlegt, deren Durchmesser und (triviale) Ecken-

zahlen beschränkt sind und deren Flächeninhalte nicht beliebig klein werden; es sei die Zerlegung ferner so beschaffen, daß die Verhältnisse der Anzahlen der je einer Polygonart angehörenden Polygone zur Gesamtzahl aller Polygone existieren; dann gilt für die mittlere Eckenzahl n (im neuen Sinn) die Darstellung:

$$(I) \quad n = \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} n_i = 6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i,$$

worin:

$$(I') \quad E_i = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) + e_i \\ + 2 \cdot \left(\sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''} - \sum'_{(\lambda)} (n_{i\lambda}'' - n_{i\lambda}') \right) \quad (i=1,2,3,\dots)$$

ist.

Auch hier wollen wir die Zahlen E_i wieder die den Polygonen vermöge der Bedeckung zugeordneten charakteristischen Zahlen nennen¹⁾; sie sind die Verallgemeinerungen der früher bei konvexen Polygonen mit diesem Namen belegten Zahlen. Sie brauchen jedoch jetzt ersichtlich nicht mehr stets größer, höchstens gleich Null zu sein; darauf beruht die Schwierigkeit, über eine Bedeckung mit Polygonen von dieser allgemeinen Beschaffenheit weitere Aussagen zu machen.

Wir spezialisieren unser Ergebnis jetzt auf den Fall, daß die an der Bedeckung beteiligten Polygone einer Gattung angehören; dann gilt Gleichung (11), und der einzige negative Bestandteil der charakteristischen Zahlen fällt somit fort. Diese sind nun wieder stets größer, höchstens gleich Null. Sie unterscheiden sich von den charakteristischen Zahlen konvexer Poly-

¹⁾ Man kann den Hauptsatz also auch so aussprechen, daß die Summe aus mittlerer Eckenzahl und mittlerer charakteristischer Zahl stets gleich sechs sein muß.

gone durch den Summanden $2 \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''}$, dessen Bedeutung man sich an Hand der früher gemachten allgemeinen Bemerkungen leicht klar macht. Durch sein Auftreten werden die einzelnen charakteristischen Zahlen und auch ihr Durchschnitt gegenüber denjenigen bei konvexen Polygonen im allgemeinen vergrößert werden; einer Vergrößerung dieser Zahlen entspricht aber stets eine Verkleinerung der durchschnittlichen Eckenzahl der bedeckenden Polygone. Bezeichnen wir durch den angehängten Index j noch die Polygonart, auf die sich die betreffende Größe bezieht, und durchläuft der Index i dann nur Werte, die sich auf die Polygone einer Art beziehen, so gilt der sich durch Spezialisierung aus dem Hauptsatz für allgemeine Polygone ergebende

II. Hauptsatz für einer Gattung angehörende Polygone: Gehören die Polygone des ersten Hauptsatzes außerdem zu einer Gattung, ist ferner a die Zahl der vorkommenden Polygonarten und q_j ($j = 1, 2, \dots, a$) das Verhältnis der Zahl der der j -ten Art angehörenden Polygone zur Zahl aller Polygone, so gilt die Darstellung der mittleren Eckenzahl n in der Form:

$$(II) \quad n = \sum_{j=1}^a q_j n_j = 6 - \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{A_v} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_v j} E_{ij},$$

worin:

$$(II') \quad E_{ij} = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\lambda)} e_{i\lambda j}^{(k)} + e_{ij}^{(k)} \right) + e_{ij} + 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda j}^{(k)''}$$

($i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, a$)

ist.

Da kongruente Polygone stets zu einer Gattung gehören und nur eine Art bilden, so bekommen wir den folgenden

Zusatz: Gehören die Polygone des zweiten Hauptsatzes nur zu einer Art, sind sie

insbesondere kongruent, so lautet die Darstellung:

$$(II_1) \quad n = 6 - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i,$$

worin:

$$(II_1') \quad E_i = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\infty)} e_{i\lambda}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) + e_i + 2 \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_{i\lambda}^{(k)''}$$

(i = 1, 2, 3, ...)

ist.

Aus dieser Darstellung folgt auch hier wieder, daß die — im neuen Sinn genommene — Eckenanzahl kleiner, höchstens gleich sechs sein muß, damit eine Bedeckung möglich ist; es ist also auch dann, wenn die Polygone einer Gattung angehören, lediglich eine Zerlegung der Ebene in Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecke ausführbar, wenigstens solange sie der Bedingung unterliegen, daß ihre Durchmesser beschränkt sind und ihre Flächeninhalte nicht beliebig klein werden.

Es mögen nun schließlich die Polygone nicht nur einer Gattung angehören, sondern gleichzeitig sämtlich Normalpolygone sein. Dann stimmt nach unseren früheren Ausführungen die neue Definition der Eckenanzahl mit der trivialen überein, und es ist:

$$n_{i\lambda}'' = 0 \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots).$$

Hieraus folgt aber nach (6₂):

$$e_{i\lambda}^{(k)''} = 0 \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots; k \geq 2).$$

Da $n_{i\lambda}'' = 0$ ($\lambda = 1, 2, \dots$) für alle Polygone ist, so kann bei einer Polygonmenge, die die obigen beiden Eigenschaften besitzt, sich ersichtlich unter sämtlichen vorkommenden Winkeln kein Paar befinden, das sich zu 2π ergänzt. Die Bedeckung mit Polygonen kann also in diesem Fall nur so beschaffen sein, daß alle Ecken jedes Polygons mit mindestens dreifachen Netzpunkten identisch sind, während dies ja nur im Durchschnitt der Fall ist, wenn die Voraussetzung wegfällt, daß die Polygone Normalpolygone sind. Wegen $e_{i\lambda}^{(k)''} = 0$ ($i, \lambda = 1, 2, \dots; k \geq 2$)

fällt ferner auch der Summand $2 \sum_{k \geq 3} \sum_{(\lambda)} e_i^{(k)''}$ des Ausdruckes für die charakteristischen Zahlen fort; wir gelangen so zu dem

III. Hauptsatz für einer Gattung angehörende Normalpolygone: Sind die Polygone des zweiten Hauptsatzes gleichzeitig Normalpolygone, so lautet die Darstellung der mittleren Eckenzahl:

$$(III) \quad n = \sum_{j=1}^a q_j n_j = 6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{A_\nu j} E_{ij},$$

worin:

$$(III') \quad E_{ij} = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\alpha)} e_{i \neq j}^{(k)} + e_{ij}^{(k)} \right) + e_{ij}$$

(i = 1, 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, a)

ist,

und dem

Zusatz: Sind die Polygone des dritten Hauptsatzes gleichseitig, insbesondere kongruent, so ist:

$$(III_1) \quad n = 6 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i,$$

wenn:

$$(III_1') \quad E_i = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} \left(\sum_{(\alpha)} e_{i \neq i}^{(k)} + e_i^{(k)} \right) + e_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

gesetzt wird.

Die Gleichungen (III) und (III') bzw. (III₁) und (III₁') sind mit den Gleichungen (II) und (II') bzw. (I) und (I') des § 2 identisch. In der Tat gehören konvexe Polygone stets einer Gattung an; ein konvexes Polygon ist außerdem immer ein Normalpolygon.

Zum Schlusse sei noch eine Übersicht über die betrachteten Fälle gegeben:

Erstens: Allgemeine Polygone. Gültigkeit der Darstellung (I), (I').

Zweitens: Polygone, die einer Gattung angehören. Gültigkeit der Darstellung (II), (II') bzw. (II₁), (II'₁). Es ist:

$$\sum_{(\lambda)}' (n_{i\lambda}'' - n_{i\lambda}') = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Durchschnittlich gehen von sämtlichen Ecken jedes Polygons mindestens drei Bereiche aus. Spezialfall: Kongruente Polygone.

Drittens: Normalpolygone, die einer Gattung angehören. Gültigkeit der Darstellung (III), (III') bzw. (III₁), (III'₁). Es ist:

$$e_{i\lambda}^{(k)''} = 0 \quad (i, \lambda = 1, 2, 3, \dots; k \geq 2).$$

Von allen Ecken jedes Polygons gehen mindestens drei Bereiche aus. Spezialfall: Konvexe Polygone.

§ 4.

Die Zerlegung von Polygonen in Polygone.

Es soll jetzt untersucht werden, zu welchen Resultaten unsere seitherigen Überlegungen führen, wenn wir auf den Grenzübergang verzichten, also die Zerlegung für ein beliebiges endliches ν abbrechen. Wir betrachten demnach die Zerlegung eines beliebigen Polygons $C_\nu = C$ in andere Polygone, doch beschränken wir uns dabei auf den Fall, daß die letzteren einer Gattung angehörige gleicheckige Normalpolygone sind¹⁾. Die erhaltenen Sätze werden also insbesondere für die Zerlegung von Polygonen in konvexe Polygone gelten.

Es ist zweckmäßig, die Überlegungen von Anfang an in einer auf unsere jetzigen Ziele zugeschnittenen Weise zu führen. Wir bezeichnen dazu: mit m die Anzahl der Ecken des zu zerlegenden Polygons C ; mit n die Anzahl der Ecken der zerlegenden Polygone P_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$), mit ν (≥ 2) also deren Anzahl; ferner

¹⁾ Bei den zerlegenden Randpolygonen kann jedoch offenbar insoweit von dieser Bedingung abgesehen werden, als es sich dabei um Winkel handelt, die mit Winkeln des zu zerlegenden Polygons (oder Teilen von solchen) identisch sind. Diese Annahme ist im folgenden stillschweigend gemacht.

mit e die Anzahl der singulären Ecken des Polygons C , d. h. derjenigen auf seinen Kanten liegenden Punkte, an welche mindestens zwei der Polygone P_i anstoßen; mit e_i die Anzahl der singulären Ecken von P_i ($i = 1, 2, \dots, \nu$); mit $e_i^{(k)}$ die Anzahl derjenigen Ecken von P_i , von denen im ganzen k (≥ 3) Polygone ausgehen, und die im Inneren von C liegen; mit $p_{ie}^{(k)}$ und $p_{is}^{(k)}$ schließlich die Anzahl der auf der Berandung von C liegenden Ecken von P_i , von denen im ganzen k (≥ 1) bzw. k (≥ 2) Polygone P_i ausgehen, und die mit eigentlichen bzw. singulären Ecken von C identisch sind ($i = 1, 2, \dots, \nu$). Dann ist zunächst:

$$(1_1) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 1} \frac{p_{ie}^{(k)}}{k} = m,$$

$$(1_2) \quad \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 2} \frac{p_{is}^{(k)}}{k} = e,$$

$$(2) \quad \sum_{k \geq 3} e_i^{(k)} + \sum_{k \geq 1} p_{ie}^{(k)} + \sum_{k \geq 2} p_{is}^{(k)} = n + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

Ferner ergibt sich infolge der doppelten Darstellbarkeit der Gesamtwinkelsumme in C :

$$\pi \sum_{i=1}^{\nu} (n + e_i - 2) = 2\pi \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 3} \frac{e_i^{(k)}}{k} + \pi (m + e - 2),$$

oder, wenn man hier den sich aus (2) für $e_i^{(3)}$ ergebenden Wert:

$$e_i^{(3)} = n + e_i - \sum_{k \geq 4} e_i^{(k)} - \sum_{k \geq 1} p_{ie}^{(k)} - \sum_{k \geq 2} p_{is}^{(k)}$$

einsetzt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} (n + e_i) - 2\nu &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{\nu} (n + e_i) - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} \\ &\quad - 2 \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k \geq 1} p_{ie}^{(k)} + \sum_{k \geq 2} p_{is}^{(k)} \right) + m + e - 2, \end{aligned}$$

oder schließlich:

$$\sum_{i=1}^{\nu} (n + e_i) = 6\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} - 2 \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k \geq 1} p_{ie}^{(k)} + \sum_{k \geq 2} p_{is}^{(k)} \right) + 3(m + e - 2).$$

Schreibt man hierin rechter Hand für $3e$ $4e - e$ und für $3m$ $2m + m$, und führt man dann für $4e$ und $2m$ die sich aus (1_2) und (1_1) ergebenden Werte ein, so folgt ersichtlich:

$$n\nu + \sum_{i=1}^{\nu} e_i = 6\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 1} 2 \frac{k-1}{k} p_{ie}^{(k)} - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{k \geq 2} 2 \frac{k-2}{k} p_{is}^{(k)} + m - e - 6,$$

oder, sofern man noch $m = n + r$ setzt:

$$n = 6 + \frac{r}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1} \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} + e_i \right) - \frac{1}{\nu - 1} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k \geq 2} 2 \frac{k-1}{k} p_{ie}^{(k)} + \sum_{k \geq 3} 2 \frac{k-2}{k} p_{is}^{(k)} \right) + e \right).$$

Damit erhalten wir den

Hauptsatz für die Zerlegung eines Polygons in Polygone: Zerlegt man ein einfach zusammenhängendes Polygon mit $m = n + r$ Ecken in ν einfach zusammenhängende einer Gattung angehörige gleicheckige Normalpolygone, so gilt für deren Eckenzahl n die Darstellung:

$$n = 6 + \frac{r}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1} \left(\sum_{i=1}^{\nu} E_i + E \right),$$

worin:

$$E_i = \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

und:

$$E = \sum_{i=1}^{\nu} \left(\sum_{k \geq 2} 2^{\frac{k-1}{k}} p_{ie}^{(k)} + \sum_{k \geq 3} 2^{\frac{k-2}{k}} p_{is}^{(k)} \right) + e$$

ist.

Wir wollen hieraus einige Folgerungen ziehen. Wir bemerken zunächst, daß offenbar stets:

$$E_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

und:

$$E \geq 1$$

ist, dies letztere deshalb, weil infolge des einfachen Zusammenhangs jedes Polygons P_i auf dem Rande von C mindestens ein Punkt liegen muß, von welchem wenigstens zwei Polygone P_i ausgehen; für jeden solchen Punkt enthält aber der E darstellende Ausdruck offenbar einen Summanden ≥ 1 . Aus dem Hauptsatz folgt also:

$$(3) \quad n \leq 6 + \frac{r}{\nu - 1} - \frac{1}{\nu - 1}.$$

Wir setzen zuerst $r = 0$, also $m = n$ voraus; dann ergibt (3):

$$n < 6,$$

und wir haben den

Satz 1: Ein beliebiges einfach zusammenhängendes n -Eck kann niemals in endlich viele einfach zusammenhängende einer Gattung angehörige normale n -Ecke zerlegt werden, falls n größer als fünf ist.

Der Vollständigkeit halber sei hier bemerkt, daß man offenbar stets Dreiecke in Dreiecke, Vierecke in Vierecke und Fünfecke in Fünfecke von der fraglichen Beschaffenheit zerlegen kann.

Es sei dann $r < 0$, also $m < n$; dann folgt ebenso:

$$n < 6,$$

und wir finden den

Satz 2: Ein beliebiges einfach zusammenhängendes Polygon kann niemals in endlich viele einfach zusammenhängende einer

Gattung angehörige gleicheckige Normalpolygone mit höherer Eckenanzahl zerlegt werden, falls diese zugleich größer als fünf ist.

Wir wollen hier wieder anführen, daß man natürlich sehr wohl Dreiecke in Vierecke und Fünfecke, und damit auch Vierecke in Fünfecke von der fraglichen Beschaffenheit zerlegen kann. Gleichzeitig folgt jetzt, daß sogar stets $E \geq 2$ sein muß. Denn der Fall, daß auf dem Rande von C nur ein Punkt liegt, von welchem wenigstens zwei Polygone P_i ausgehen, könnte ersichtlich lediglich dann eintreten, wenn die Eckenanzahl eines und damit aller zerlegenden Polygone um mindestens fünf größer wäre als m . Da dies unmöglich ist, so folgt, daß der Rand von C wenigstens zwei solcher Punkte enthalten muß; damit ist aber in der Tat $E \geq 2$ und:

$$n \leq 6 + \frac{r}{\nu - 1} - \frac{2}{\nu - 1},$$

oder:

$$(3_1) \quad (n - 6)(\nu - 1) \leq r - 2.$$

Es werde nun noch ein Satz über die Zerlegung von Polygonen in solche niederer Eckenanzahl angefügt. Nehmen wir an, daß $n \geq 6$ ist, so ist die linke Seite von (3_1) nicht negativ; wir können also $\nu - 1$ durch seinen kleinsten Wert Eins ersetzen und erhalten:

$$n - 6 \leq r - 2,$$

oder, falls wir hierin für \mathfrak{r} wieder seine Bedeutung $m - n$ einführen:

$$n \leq \frac{m}{2} + 2.$$

Für ungerades m ist diese Ungleichung mit der folgenden gleichwertig:

$$n \leq \frac{m - 1}{2} + 2.$$

Wir bekommen somit den

Satz 3: Ein beliebiges einfach zusammenhängendes m -Eck kann niemals in endlich

viele einfach zusammenhängende einer Gattung angehörige normale n -Ecke derart zerlegt werden, daß $n > \frac{m}{2} + 2$ ist, falls gleichzeitig n größer als fünf würde.

Es sei hier wieder darauf hingewiesen, daß man natürlich stets jedes m -Eck in zwei $\left(\frac{m}{2} + 2\right)$ -Ecke, wenn m gerade, und in zwei $\left(\frac{m-1}{2} + 2\right)$ -Ecke, wenn m ungerade ist, zerlegen kann.

Der Hauptsatz dieses Paragraphen und insbesondere also die sich aus ihm ergebende Ungleichung (3) bzw. (3₁), aus welcher wir die Sätze 1 bis 3 gefolgert haben, läßt sich auch auf eine andere Weise gewinnen, die zugleich eine Anwendung der Resultate des vorigen Paragraphen darstellt. Wir wollen den Gedanken, auf dem sie beruht, kurz erläutern.

Es werde mit einer unendlichen Folge kongruenter Exemplare des zu zerlegenden Polygons C und beliebigen anderen Polygonen eine lückenlose und schlichte Bedeckung der gesamten Ebene hergestellt, die lediglich dreifache Netzpunkte und keine singulären Ecken enthält. Da die (als existierend vorausgesetzte) mittlere charakteristische Zahl einer solchen Bedeckung ersichtlich verschwindet, so muß ihre mittlere Eckenzahl nach Hauptsatz III, § 3, gerade gleich sechs sein. Zerlegt man nun sämtliche bei der Bedeckung beteiligten Exemplare von C auf kongruente Weise in andere Polygone, so gilt für die neue Bedeckung ja ebenfalls der Hauptsatz des vorigen Paragraphen. Setzt man die sich aus diesem für die mittlere Eckenzahl ergebende Darstellung unter Berücksichtigung der Zahl der bei der Zerlegung jedes Polygons C auftretenden mehr als dreifachen Netzpunkte und singulären Ecken an, so erhält man genau den Hauptsatz für die Zerlegung von Polygonen in Polygone, den wir zu Anfang dieses Paragraphen auf andere Weise abgeleitet haben.

Die benötigte Bedeckung kann man etwa dadurch erhalten, daß man zunächst an jede zweite Seite des zu zerlegenden Polygons C (Eckenzahl: m) ein Dreieck anlagert; die freien

Ecken dieser Dreiecke bilden dann offenbar ein Polygon C' , das (sofern z. B. m eine gerade Zahl war) gerade die Hälfte der Ecken des Polygons C hat. Mit C' kann man ebenso verfahren (wobei natürlich die Seiten von C' selbst nicht als Netzlinien zählen) usw. Man überlegt sich leicht, daß es — wenn noch $m \geq 6$ vorausgesetzt wird — stets möglich ist, auf diese Weise schließlich ein Sechseck zu erhalten. Verbindet man die Ecken dieses Sechsecks nun mit denjenigen eines regulären Sechsecks, und bedeckt man die Ebene mit einer unendlichen Folge von kongruenten Exemplaren eines solchen zerlegten Sechsecks lückenlos und schlicht, was ja stets möglich ist, so hat man damit (wenn auch die Seiten dieser regulären Sechsecke selbst wieder nicht als Netzlinien mitzählen) offenbar eine Bedeckung der Ebene erhalten, in welcher das Polygon C unendlich oft vorkommt und die lediglich dreifache Netzpunkte aufweist. Auf ähnliche Weise gelangt man zum Ziel, falls $m < 6$ ist.

Die mittlere Eckenzahl und die mittlere charakteristische Zahl einer solchen Bedeckung ist nun leicht zu ermitteln. Wir zerlegen dazu die gesamte Bedeckung in eine unendliche Folge kongruenter Exemplare eines Polygons P , das gebildet wird von sämtlichen ganz innerhalb eines regulären Sechsecks liegenden Polygonen und dreier seiner Randpolygone (deren jedes zum Teil also einem anderen regulären Sechseck angehört). Wie man leicht sieht, ist die mittlere Eckenzahl in der ganzen Ebene einfach gleich der mittleren Eckenzahl der einen Bereich P bildenden Polygone, und das Entsprechende gilt für die mittlere charakteristische Zahl. Ist N die Gesamtzahl der den Bereich P erfüllenden Polygone und S die Summe der Eckenzahlen aller dieser Polygone mit Ausnahme des Polygons C , so ist die mittlere Eckenzahl mithin offenbar gleich $\frac{m + S}{N}$, und da sie nach dem Hauptsatz gleich sechs sein muß, so besteht die Beziehung:

$$\frac{m + S}{N} = 6,$$

aus welcher:

$$(4) \quad 6N - S = m$$

folgt.

Zerlegt man nun jedes der bei der Bedeckung beteiligten Polygone C auf kongruente Weise, so muß offenbar in jedem Bereich P mindestens eine singuläre Ecke oder ein mehr als dreifacher Netzpunkt auftreten. Da damit aber die mittlere charakteristische Zahl von Null verschieden wird, so muß die mittlere Eckenzahl jetzt kleiner als sechs sein. Ist wie früher ν die Anzahl der zerlegenden gleichseitigen Polygone mit der Eckenzahl n , so ist diese aber jetzt ersichtlich gleich $\frac{\nu n + S}{N + \nu - 1}$, so daß sich die Ungleichung:

$$\frac{\nu n + S}{N + \nu - 1} < 6$$

ergibt. Aus dieser folgt unter Berücksichtigung von (4):

$$\nu n < 6N - S + 6(\nu - 1) = m + 6(\nu - 1)$$

oder, wenn man wieder $m = n + r$ setzt:

$$n < 6 + \frac{r}{\nu - 1}.$$

Diese Abschätzung ist aber mit der früheren Ungleichung (3) im wesentlichen identisch. Auch die Herleitung des Hauptsatzes selbst auf diese Weise bietet keinerlei Schwierigkeit, doch wollen wir uns hier mit dieser Skizze begnügen.

Zweiter Teil.

Anwendung des Hauptsatzes.

§ 1.

Die reguläre Zerlegung und die Zerlegung in Sechs- und Fünfecke.

In diesem zweiten Teil wollen wir uns auf den Fall der Zerlegung der Ebene in gleichseitige, einer Gattung angehörige Normalpolygone beschränken. Wir wollen sehen, welche Folgerungen wir aus unserem auf diesen Fall spezialisierten Hauptsatz ziehen können. Dieser lautete nach (III₁), (III₁'), § 3, erster Teil:

$$(1) \quad n = 6 - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i,$$

wobei:

$$(1') \quad E_i = e_i + \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

war, wenn wir nunmehr unter $e_i^{(k)}$ wieder kurz alle diejenigen der — eigentlichen und singulären — Ecken des i -ten Polygons verstehen, die mit k -fachen Netzpunkten identisch sind ($i = 1, 2, 3, \dots$; $k \geq 4$). Wir hatten früher gesehen, daß eine solche Zerlegung frei von zweifachen Netzpunkten ist, und daß lediglich Drei-, Vier-, Fünf- und Sechsecke für sie in Betracht kommen. Aus (1) folgt sofort, daß:

$$(2) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i = \begin{cases} 3 & \text{für Dreiecke,} \\ 2 & \text{für Vierecke,} \\ 1 & \text{für Fünfecke,} \\ 0 & \text{für Sechsecke} \end{cases}$$

sein muß.

Es ist klar, daß diejenigen Zerlegungen eine besonders einfache Rolle spielen werden, bei welchen die charakteristischen Polygonzahlen für alle beteiligten Polygone dieselben sind:

$$(3) \quad E_i = E \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

denn dann hat auch ihr Mittelwert den gleichen Wert:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i = E,$$

und nach (2) muß bei derartigen Zerlegungen:

$$(4) \quad E = \begin{cases} 3 & \text{für Dreiecke,} \\ 2 & \text{für Vierecke,} \\ 1 & \text{für Fünfecke,} \\ 0 & \text{für Sechsecke} \end{cases}$$

sein. Solche Zerlegungen erhalten wir nun insbesondere, wenn wir fordern, daß die Anzahl der singulären Ecken sowie die Anzahl derjenigen — eigentlichen und singulären — Ecken, die mit dreifachen, vierfachen usw. Netzpunkten identisch sind, bei sämtlichen beteiligten Polygonen dieselbe ist:

$$(5) \quad \begin{cases} e_i = e & (i = 1, 2, 3, \dots), \\ e_i^{(k)} = e^{(k)} & (i = 1, 2, 3, \dots; k \geq 3). \end{cases}$$

Eine Zerlegung von solcher Beschaffenheit wollen wir eine reguläre Zerlegung nennen. Dann ist also für alle Polygone:

$$\begin{aligned} E &= e + \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e^{(k)} \\ &= e + \frac{1}{2} e^{(4)} + \frac{4}{5} e^{(5)} + e^{(6)} + \frac{8}{7} e^{(7)} + \frac{5}{4} e^{(8)} + \dots \end{aligned}$$

Es ist nun leicht, die Beziehungen (3) unter Berücksichtigung dieses Wertes von E zu diskutieren, wenn man bedenkt, daß die $e^{(k)}$ ($k \geq 4$) und e stets positive ganze Zahlen sein müssen oder höchstens verschwinden können. Man erhält dann ersichtlich sämtliche Sorten möglicher regulärer Zerlegungen; in der nachfolgenden **Tabelle** sind diese zusammengestellt:

$$(6) \left\{ \begin{array}{l}
 n = 6: e = 0, e^{(3)} = 6; \\
 n = 5: [e = 1, e^{(3)} = 6;] \\
 \quad e = 0, e^{(6)} = 1, e^{(3)} = 4; \\
 \quad e = 0, e^{(4)} = 2, e^{(3)} = 3; \\
 n = 4: [e = 2, e^{(3)} = 6; \\
 \quad e = 1, e^{(6)} = 1, e^{(3)} = 4; \\
 \quad e = 1, e^{(4)} = 2, e^{(3)} = 3;] \\
 \quad e = 0, e^{(12)} = 1, e^{(4)} = 1, e^{(3)} = 2; \\
 \quad e = 0, e^{(6)} = 1, e^{(4)} = 2, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(6)} = 2, e^{(3)} = 2; \\
 \quad e = 0, e^{(4)} = 4; \\
 n = 3: [e = 3, e^{(3)} = 6; \\
 \quad e = 2, e^{(6)} = 1, e^{(3)} = 4; \\
 \quad e = 2, e^{(4)} = 2, e^{(3)} = 3; \\
 \quad e = 1, e^{(12)} = 1, e^{(4)} = 1, e^{(3)} = 2; \\
 \quad e = 1, e^{(6)} = 1, e^{(4)} = 2, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 1, e^{(6)} = 2, e^{(3)} = 2; \\
 \quad e = 1, e^{(4)} = 4; \\
 \quad e = 0, e^{(42)} = 1, e^{(7)} = 1, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(24)} = 1, e^{(8)} = 1, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(18)} = 1, e^{(9)} = 1, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(15)} = 1, e^{(10)} = 1, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(20)} = 1, e^{(5)} = 1, e^{(4)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(12)} = 1, e^{(6)} = 1, e^{(4)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(12)} = 2, e^{(3)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(8)} = 2, e^{(4)} = 1; \\
 \quad e = 0, e^{(10)} = 1, e^{(5)} = 2; \\
 \quad e = 0, e^{(6)} = 3.
 \end{array} \right.$$

Dabei kann man natürlich stets eine reguläre Zerlegung in n -Ecke, von denen jedes e singuläre Ecken besitzt, als entartete Zerlegung in $(n + e)$ -Ecke ohne singuläre Ecken auffassen; nur die regulären Zerlegungen, für welche $e = 0$ ist, sind demnach als wesentlich verschieden zu betrachten. Wir kommen so zu dem

Satz 1: Es ist nur eine beschränkte Zahl regulärer Zerlegungen möglich; diese wird

gebildet von den in der Tabelle (6) zusammengestellten zehn regulären Zerlegungen in Dreiecke, den vier regulären Zerlegungen in Vierecke, den zwei regulären Zerlegungen in Fünfecke und der einen regulären Zerlegung in Sechsecke.

Bei den Zerlegungen, die nicht mehr der Bedingung (5), sondern lediglich der Bedingung (3) genügen, werden im allgemeinen für verschiedene Polygone auch verschiedene der in der Tabelle (6) für eine bestimmte Eckenzahl aufgeführten Fälle eintreten; solche Zerlegungen wollen wir daher gemischt regulär nennen.

Um weitere Folgerungen ziehen zu können, benötigen wir zunächst den folgenden

Hilfssatz: Das Innere eines Kreises mit dem Radius s kann stets mit mindestens $3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} - 1 \right) \right]^2$ Kreisen vom Radius t schlicht belegt werden¹⁾.

Zum Beweise denken wir uns ein Stück der Ebene mit Kreisen vom Radius t schlicht und möglichst dicht dadurch bedeckt, daß wir um einen solchen Kreis einen ersten Ring von 6 weiteren Kreisen anordnen, deren Zentren auf den Ecken eines konzentrischen regulären Sechsecks mit dem Durchmesser $4t$ liegen, um diesen wieder einen zweiten Ring von 12 Kreisen, deren Zentren mit den Ecken und den Seitenmitten eines konzentrischen Sechsecks vom Durchmesser $8t$ identisch sind, usw. (s. Abb. 4). Hören wir mit der Bedeckung beim i -ten Ring auf, so beträgt die Gesamtzahl der beteiligten Kreise:

$$1 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + \dots + i \cdot 6 = 1 + 3i(i + 1),$$

während der kleinste Kreis, in dessen Inneres die betrachtete Bedeckung noch ganz hineingelegt werden kann, offenbar den Radius $(2i + 1)t$ hat. Umgekehrt muß man also in einen Kreis vom gegebenen Radius s auf diese Weise wenigstens $1 + 3i(i + 1)$

¹⁾ Hierin bedeutet $[x]$ in der üblichen Weise die größte ganze Zahl $\leq x$.
Reinhardt.

Kreise vom Radius t hineinlegen können, wenn $i = \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} - 1 \right) \right\rceil$ ist, oder also erst recht mindestens $3i^2 = 3 \left\lceil \frac{1}{2} \left(\frac{s}{t} - 1 \right) \right\rceil^2$ solche Kreise, womit der Beweis geführt ist.

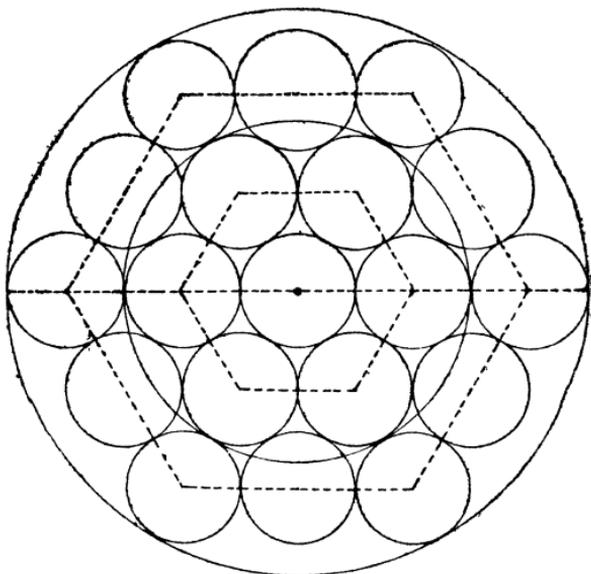


Abb. 4.

Es sei nun die ganze Ebene in Sechsecke zerlegt; dann gilt der folgende

Satz 2: Ist die Ebene in einer Gattung angehörige normale Sechsecke zerlegt, deren Durchmesser beschränkt sind und deren Flächeninhalte nicht beliebig klein werden, so kann man stets einen Kreis mit beliebig großem Radius angeben, in dessen Innern die Zerlegung regulär ist.

Da nur eine einzige reguläre Sechseckszerlegung möglich ist, so besagt dieser Satz, daß innerhalb des beliebig großen Kreises die Zerlegung so beschaffen sein muß, daß kein Sechseck singuläre Ecken besitzt und daß jede eigentliche Sechsecksecke mit einem dreifachen Netzpunkt identisch ist.

Zum Beweise nehmen wir an, man könnte keinen solchen Kreis mit beliebig großem Radius angeben; dann müßte also in jedem Kreis, den man in der Ebene mit dem genügend großen, endlichen Radius t ziehen kann, mindestens ein Sechseck existieren, für welches e_i oder ein $e_i^{(k)}$ ($k \geq 4$) wenigstens gleich Eins ist. Es müßte also in jedem solchen Kreis für mindestens einen Wert von i :

$$(7) \quad E_i = e_i + \sum_{k \geq 4} 2 \frac{k-3}{k} e_i^{(k)} \geq \frac{1}{2}$$

sein. Wir betrachten nunmehr wieder die Folge der Teilbereiche B_ν . In jedem Bereich B_ν kann nach seiner Definition ein Kreis vom Radius $(\nu - 1) \cdot \varrho$ Platz finden; dann läßt sich aber nach dem oben bewiesenen Hilfssatz auch das Innere von B_ν schlicht mit mindestens $3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(\nu - 1) \cdot \varrho}{t} - 1 \right) \right]^2$ Kreisen vom Radius t belegen. Da nun in jedem solchen Kreis nach (7) für mindestens ein Polygon P_i $E_i \geq \frac{1}{2}$ sein müßte, so wäre hiermit offenbar:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i &\geq \frac{1}{2} 3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(\nu - 1) \varrho}{t} - 1 \right) \right]^2 \\ &> \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{(\nu - 1) \varrho}{t} - 1 \right) - 1 \right)^2 \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{(\nu - 1) \varrho}{t} - 3 \right)^2. \end{aligned}$$

Andererseits ist wegen des Flächeninhalts sicher:

$$A_\nu \pi r^2 < \pi \nu^2 \varrho^2,$$

oder:

$$A_\nu < \frac{\nu^2 \varrho^2}{r^2},$$

wo r dieselbe Bedeutung wie in § 1, erster Teil, hat. Dann folgt aber:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i &> \frac{\frac{3}{8} \left(\frac{(\nu-1)\varrho}{t} - 3 \right)^2}{\frac{\nu^2 \varrho^2}{r^2}} \\ &= \frac{3r^2}{8\varrho^2} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \frac{\varrho}{t} - \frac{3}{\nu} \right)^2 \end{aligned}$$

und mithin:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i &\geq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{3r^2}{8\varrho^2} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \frac{\varrho}{t} - \frac{3}{\nu} \right)^2, \\ &= \frac{3}{8} \frac{r^2}{t^2} > 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber einen Widerspruch mit der nach (2) für eine Sechseckszerlegung notwendigen Bedingung:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i = 0,$$

womit Satz 2 bewiesen ist.

Der Beweis dieses Satzes beruhte wesentlich darauf, daß die charakteristischen Zahlen nie negativ werden können. Entsprechende Sätze für die anderen Vieleckszerlegungen lassen sich aus leicht ersichtlichen Gründen nicht ohne weiteres ableiten. Dagegen gelingt dies bei Einführung gewisser Voraussetzungen. So gilt der folgende

Satz 3: Ist die Ebene in einer Gattung angehörige normale Fünfecke zerlegt, deren Durchmesser beschränkt sind und deren Flächeninhalte nicht beliebig klein werden, und ist die Zerlegung so beschaffen, daß die charakteristische Zahl jedes Fünfecks größer (kleiner), höchstens gleich Eins ist, so kann man stets einen Kreis mit beliebig großem Radius angeben, in dessen Innern die Zerlegung gemischt regulär ist.

Dasselbe gilt für eine Zerlegung in Vier- und Dreiecke mit denselben Eigenschaften,

die so beschaffen ist, daß die charakteristische Zahl jedes Polygons größer (kleiner), höchstens gleich Zwei bzw. Drei ist.

Der Beweis ist dem des Satzes 2 ganz analog. Angenommen, der erste Teil des Satzes 3 sei nicht richtig; dann müßte wieder in jedem Kreis mit dem genügend großen, endlichen Radius t sicher wenigstens ein Fünfeck liegen, dessen charakteristische Zahl größer als Eins, also mindestens gleich $\frac{8}{7}$, d. h. um mindestens $\frac{1}{7}$ größer als Eins ist. Da für den Teilbereich B_ν wieder wenigstens $3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(\nu-1)\varrho}{t} - 1 \right) \right]^2$ Kreise vom Radius t in Frage kommen, so müßte ersichtlich sein:

$$\sum_{i=1}^{A_\nu} E_i \geq 1 \cdot A_\nu + \frac{1}{7} 3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{(\nu-1)\varrho}{t} - 1 \right) \right]^2,$$

oder:

$$\frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i > 1 + \frac{1}{A_\nu} \frac{3}{28} \left(\frac{(\nu-1)\varrho}{t} - 3 \right)^2,$$

oder schließlich wegen $A_\nu < \frac{\nu^2 \varrho^2}{r^2}$:

$$\frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i > 1 + \frac{3r^2}{28\varrho^2} \left(\frac{\nu-1}{\nu} \frac{\varrho}{t} - \frac{3}{\nu} \right)^2.$$

Hieraus folgt aber:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i \geq 1 + \frac{3r^2}{28t^2} > 1;$$

diese Beziehung steht wieder im Widerspruch mit der nach (2) für Fünfeckszerlegungen gültigen Gleichung:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{A_\nu} \sum_{i=1}^{A_\nu} E_i = 1,$$

womit dieser Teil von Satz 3 bewiesen ist. Der Beweis verläuft entsprechend, wenn man statt $E_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots$) $E_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots$) voraussetzt, oder wenn an die Stelle der Zerlegung in Fünfecke eine solche in Drei- oder Vierecke unter entsprechender Änderung der Voraussetzung über die charakteristischen Zahlen tritt.

Es werde aus Satz 3 noch eine Folgerung gezogen, die wir im nächsten Paragraphen brauchen:

Satz 4: Ist die Ebene in einer Gattung angehörige normale Fünfecke zerlegt, deren Durchmesser beschränkt sind und deren Flächeninhalte nicht beliebig klein werden, ist ferner die Zerlegung so beschaffen, daß kein Fünfeck singuläre Ecken besitzt, und weiß man schließlich außerdem, daß

a) entweder zwei bestimmte Ecken jedes Fünfecks mit mindestens vierfachen Netzpunkten identisch sind,

b) oder — was auf dasselbe hinausläuft — nicht mehr als drei Ecken jedes Fünfecks mit dreifachen Netzpunkten zusammenfallen,

c) oder schließlich zwar bei einigen Fünfecken auch vier Ecken mit dreifachen Netzpunkten identisch sind, dann aber die fünfte Ecke mit einem mindestens siebenfachen Netzpunkt zusammenfällt,

so kann man stets einen Kreis mit beliebig großem Radius angeben, in dessen Innern die Zerlegung derart regulär ist, daß drei Ecken eines Fünfecks mit dreifachen und die zwei anderen Ecken mit vierfachen Netzpunkten identisch sind.

Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz 3. Denn ist die Bedingung a) oder b) des Satzes 4 erfüllt, so ist für jedes Fünfeck $E_i \geq 2 \frac{1}{2} = 1$, und ist die Bedingung c) erfüllt, so ist

für die betreffenden Fünfecke sogar $E_i \geq \frac{8}{7} > 1$; mithin ist jedenfalls stets die Voraussetzung von Satz 3 erfüllt. Aus diesem folgt dann, daß man stets einen Kreis mit beliebig großem Radius angeben kann, in dessen Innern die Zerlegung gemischt regulär ist. Von den drei sich für gemischt reguläre Zerlegungen aus der Tabelle (6) ergebenden Fällen, die bei den verschiedenen Polygonen möglich sind, kann hier nur der dritte eintreten. Denn der erste Fall kommt nicht in Betracht, da wir singuläre Ecken von vornherein ausgeschlossen haben. Der zweite Fall aber kann nicht vorkommen; denn ist die Bedingung a) oder b) erfüllt, so kann eben $e_i^{(3)}$ für jedes Fünfeck höchstens gleich drei sein, und ist die Bedingung c) erfüllt, so muß für die betreffenden Fünfecke $e_i^{(6)}$ gleich Null sein. Es bleibt also nur die dritte Möglichkeit, die somit für jedes Fünfeck des beliebig großen Kreises eintreten muß. Damit ist Satz 4 bewiesen.

§ 2.

Die Zerlegung in kongruente Sechs- und Fünfecke.

Die im vorigen Paragraphen betrachtete Zerlegung in gleicheckige, einer Gattung angehörige Normalpolygone soll jetzt dahin spezialisiert werden, daß wir sämtliche Polygone als kongruent annehmen. Für eine Folge kongruenter Polygone ist die Voraussetzung, daß die Durchmesser beschränkt sind und die Flächeninhalte nicht beliebig klein werden, stets erfüllt; ferner gehört eine solche Folge immer einer Gattung an. Wir studieren also jetzt die Zerlegung der Ebene in kongruente normale n -Ecke ($n = 3, 4, 5, 6$). Da konvexe Polygone stets normal sind, so gelten die folgenden Betrachtungen insbesondere für Zerlegungen in kongruente konvexe Vielecke.

Man sieht zunächst, daß man mit jedem beliebigen Dreieck sowohl als auch mit jedem beliebigen Viereck und kongruenten Exemplaren die gesamte Ebene lückenlos und schlicht und zwar derart bedecken kann, daß jedes Polygon von allen anderen auf

dieselbe Weise umgeben ist¹⁾. Es kann daher jedes beliebige Dreieck und jedes beliebige Viereck als Fundamentalbereich einer Gruppe von Bewegungen aufgefaßt werden, die die Ebene in sich überführen. Dagegen gilt dies offenbar nicht für ein beliebiges normales Fünfeck oder Sechseck. Vielmehr muß ein solches schon gewisse Bedingungen erfüllen, damit man mit zu ihm kongruenten Exemplaren die Ebene lückenlos und schlicht belegen kann. Es wird sich also darum handeln, diese Bedingungen aufzustellen. Dabei wollen wir die Sechsecke vollständig, die Fünfecke jedoch nur so weit ins Auge fassen, als eine mit ihnen ausgeführte Bedeckung der Ebene ohne das Auftreten singulärer Ecken möglich ist.

Die Untersuchung der soeben aufgeworfenen Frage stützen wir auf die für derartige Bedeckungen im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze. Wir denken uns die Umgebung eines Sechsecks oder Fünfecks mit kongruenten Exemplaren lückenlos und schlicht bedeckt und leiten die Bedingungen her, die hieraus für die Gestalt des betreffenden Polygons folgen. Es handele sich zunächst um Sechsecke; dann folgt aus Satz 2, § 1, daß wir uns bei einer solchen Betrachtung auf Bedeckungen beschränken können, die so beschaffen sind, daß kein Sechseck singuläre Ecken enthält, und daß jede eigentliche Ecke jedes Sechsecks mit einem dreifachen Netzpunkt identisch ist. Diese Bemerkung vereinfacht die Diskussion wesentlich. Im Fall der Fünfecke dagegen ist dieselbe außerordentlich schwierig, selbst wenn wir singuläre Ecken von vornherein ausschließen, wie dies oben geschehen ist; denn es läßt sich ohne weiteres nichts über die Vielfachheit der Netzpunkte aussagen, mit welchen die einzelnen Fünfecksecken zusammenfallen. Die Betrachtung wird daher hier zunächst so eingerichtet werden müssen, daß sich Satz 4, § 1, anwenden läßt. Verfasser hat diese Diskussion für Sechsecke vollständig und für Fünfecke zum größeren Teil durchgeführt; da diese Untersuchungen jedoch sehr umfangreich sind, so sollen sie hier nicht vollständig aufgenommen, sondern

¹⁾ Ein beliebiges Dreieck oder Viereck ist natürlich stets ein Normalpolygon.

lediglich an mehreren Beispielen erläutert und die dabei zutage getretenen Resultate angegeben werden.

Wir betrachten zunächst die Zerlegung in kongruente normale Sechsecke. Die überhaupt möglichen Sechsecke teilen wir nach der Zahl der verschiedenen Seitenlängen in sechs Klassen ein. Ein Sechseck gehört zur ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten Klasse, je nachdem es bez. sechs, fünf, vier, drei, zwei verschiedene Seitenlängen besitzt oder seine sämtlichen Seiten gleich sind. Einige dieser Klassen spalten sich wieder infolge der verschiedenen Verteilung der jeweilig gleichen Sechsecksseiten. So erhalten wir folgende

Einteilung der Sechsecke:

- I. Alle sechs Seiten sind verschieden.
- II. Unter den sechs Seiten sind zwei gleiche; die anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- III₁. Unter den sechs Seiten sind drei gleiche; die anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- III₂. Unter den sechs Seiten sind zwei Paare gleicher, untereinander aber verschiedener; die anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- IV₁. Unter den sechs Seiten sind vier gleiche; die beiden anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- IV₂. Unter den sechs Seiten sind drei gleiche und, davon verschieden, noch zwei gleiche; die letzte ist von diesen allen verschieden.
- IV₃. Die sechs Seiten zerfallen in drei Paare von je zwei gleichen, untereinander aber verschiedenen Seiten.
- V₁. Unter den sechs Seiten sind fünf gleiche; die letzte ist von diesen verschieden.
- V₂. Unter den sechs Seiten sind vier gleiche und, von diesen verschieden, noch zwei gleiche.
- V₃. Die sechs Seiten zerfallen in zwei Tripel von je drei gleichen, untereinander aber verschiedenen Seiten.
- VI. Alle sechs Seiten sind einander gleich.

Es handelt sich nun darum, jeden dieser elf Fälle dahin zu untersuchen, ob man mit kongruenten ihm entsprechenden Sechs-

ecken die ganze Ebene, insbesondere also die Umgebung eines von ihnen lückenlos und schlicht belegen kann, und welche Winkelrelationen dazu bestehen müssen. Dabei zerfallen verschiedene der Fälle je nach der Lage der jeweilig gleichen Seiten im Polygon noch in Unterabteilungen. Im Verlaufe dieser Untersuchungen hat sich nun folgendes Resultat ergeben:

Satz 1: Jedes normale Sechseck von der Beschaffenheit, daß die gesamte Ebene in eine Folge zu ihm kongruenter Exemplare zerlegbar ist, gehört zu einem der folgenden drei Typen:

Erster Typus: Das Sechseck besitzt zwei gegenüberliegend gleiche und parallele Seiten (s. Abb. 5):

$$\begin{aligned} BC &= EF, \\ \zeta + \alpha + \beta &= 2\pi, \\ \gamma + \delta + \varepsilon &= 2\pi. \end{aligned}$$

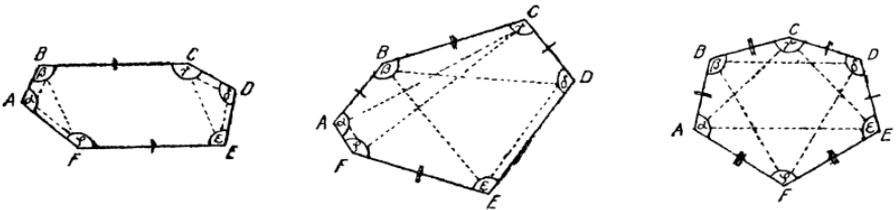


Abb. 5, 6 u. 7.

Zweiter Typus: Das Sechseck besitzt zwei gegenüberliegend gleiche und zwei andere getrennt liegend¹⁾ gleiche Seiten, und seine Winkel zerfallen auf die unten angegebene Weise in zwei Tripel sich je zu 2π ergänzender (s. Abb. 6):

$$\begin{aligned} BC &= EF, \\ AB &= CD, \\ \zeta + \alpha + \gamma &= 2\pi, \\ \delta + \varepsilon + \beta &= 2\pi. \end{aligned}$$

¹⁾ Wir nennen zwei Sechsecksseiten kurz getrennt liegend, wenn sie weder aneinander- noch gegenüberliegen.

Dritter Typus: Die Seiten des Sechsecks zerfallen in drei Paare von je zwei aneinanderliegend gleichen, und jeder von einem solchen Paar eingeschlossene Winkel hat die Größe $\frac{2\pi}{3}$ (s. Abb. 7):

$$\begin{aligned} AB &= BC, & \beta &= \delta = \zeta = \frac{2\pi}{3}, \\ CD &= DE, & & \\ EF &= FA, & \alpha + \gamma + \varepsilon &= 2\pi. \end{aligned}$$

Daß man mit jedem Sechseck, das einem dieser drei Typen angehört, und kongruenten Exemplaren die Ebene in der Tat

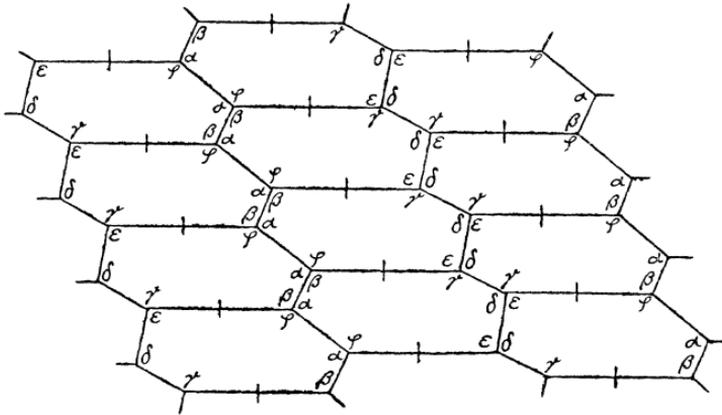


Abb. 8.

Teil der Zerlegung in kongruente Sechsecke des ersten Typus.

lückenlos und schlicht bedecken kann, ist leicht ersichtlich. Das Nähere möge aus den folgenden Abbildungen entnommen werden, die einen Teil der Bedeckung mit kongruenten Sechsecken je eines Typs darstellen, und aus denen man zugleich ersieht, daß die Bedeckung jeweils so beschaffen ist, daß jedes Sechseck von allen übrigen auf die gleiche Weise umgeben ist. Es ergibt sich auf diese Weise, daß in der Tat auch alle kongruenten normalen Sechsecke, die eine Zerlegung der Ebene gestatten, als Fundamentalbereiche von Bewegungsgruppen aufgefaßt werden können.

Es muß also nun gezeigt werden, daß eine Bedeckung der Ebene mit kongruenten Sechsecken, die keinem der drei in Satz 1 auftretenden Typen angehören, unmöglich ist. Dieser Nachweis soll, wie oben erwähnt, hier nur an einigen Beispielen erläutert werden.

Wir machen dazu erst folgende Bemerkungen. Werden zwei kongruente Exemplare eines Polygons derart aneinander-

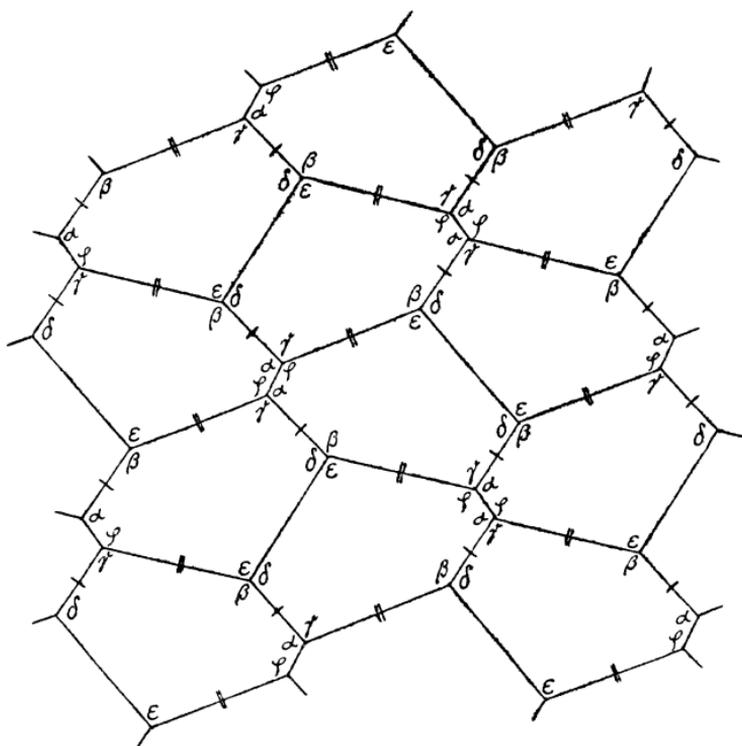


Abb. 9.

Teil der Zerlegung in kongruente Sechsecke des zweiten Typus.

gelagert, daß zwei entsprechende oder zwei nicht entsprechende gleich lange Seiten zur Deckung kommen, so kann dies auf zweierlei Arten geschehen. Entweder so, daß beide Polygone durch alleinige Verschiebung in der Ebene, also durch eine Operation erster Art, wieder zur Deckung gebracht werden können; oder aber auf die Weise, daß dazu erst eine Umklappung durch den Raum oder eine Spiegelung, also eine Operation

zweiter Art, nötig ist. Sind A, B, C, D, E, F die Ecken eines normalen Sechsecks, so drücken wir durch die Zeichen $BC=ED$ bzw. $BC=DE$ kurz die Tatsache aus, daß zwei kongruente Exemplare dieses Sechsecks derart schlicht aneinander gelagert sind, daß die Seite BC des einen mit der Seite DE des anderen zur Deckung kommt, und zwar verwenden wir das erste oder

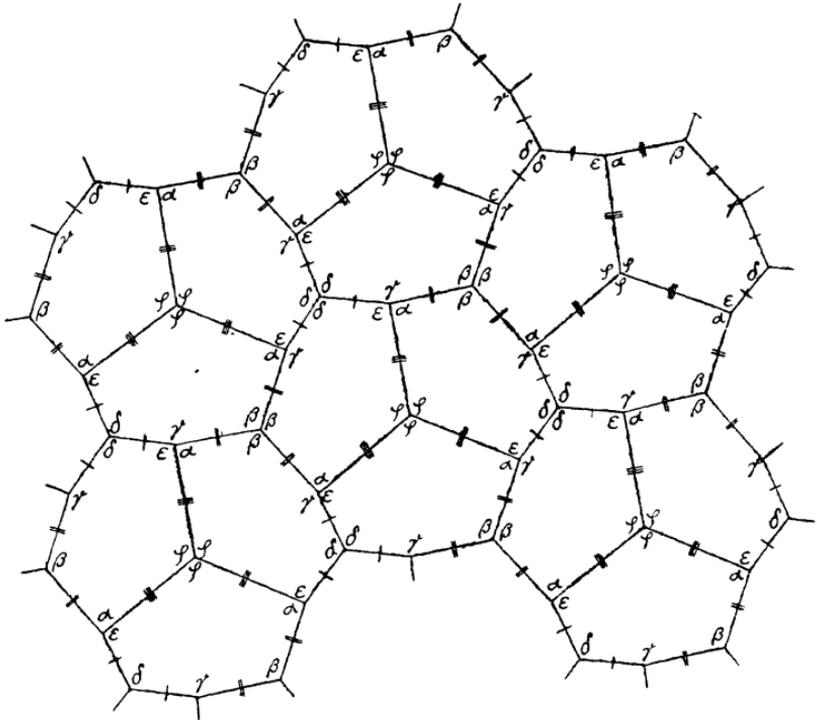


Abb. 10.

Teil der Zerlegung in kongruente Sechsecke des dritten Typus.

das zweite Zeichen, je nachdem der erste oder der zweite der eben erwähnten Fälle vorliegt. Mehrere bei dem gerade betrachteten Teil der Bedeckung vorkommende Polygone mögen numeriert werden; Netzknoten werden mit P, Q, R, ... , Seitenlängen mit x, y, ... bezeichnet. Durch Zeichen wie $P_1 = \alpha$ werde ferner kurz ausgedrückt, daß das Sechseck mit der Nummer 1 an den Netzknoten P mit der Ecke anstößt, an welcher der Winkel α liegt.

Eine Anzahl der bei der Diskussion auftretenden Fälle läßt sich mittels folgenden Hilfssatzes sofort erledigen:

Hilfssatz: Ist die Ebene in eine Folge kongruenter normaler Sechsecke zerlegbar, die zwei aneinanderliegende Seiten besitzen, deren jede von allen anderen verschieden ist, so müssen die auf diese folgenden gegenüberliegenden Seiten notwendig gleich und parallel sein.

Zum Beweise bedenken wir, daß jede der beiden aneinanderliegenden Seiten bei der Bedeckung lediglich mit sich selbst zur Deckung gebracht werden kann, da sie nach Voraussetzung von allen anderen Seiten verschieden ist. Sind jene Seiten AB und FA , so haben wir mithin folgende vier möglichen Fälle (s. Abb. 11):

$$\begin{array}{ll} AB = AB & \text{und} \quad FA = FA, \\ AB = BA & \text{„} \quad FA = FA, \\ AB = AB & \text{„} \quad FA = AF, \\ AB = BA & \text{„} \quad FA = AF. \end{array}$$

Die ersten drei Fälle können nun nicht eintreten, da sonst ersichtlich jedesmal eine der Seiten AB und FA in der Netzlinie PQ mit einer anderen Sechsecksseite zur Deckung käme,

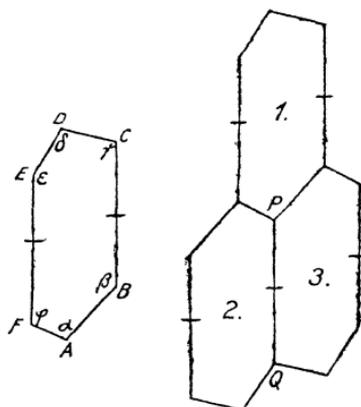


Abb. 11.

was unmöglich ist. Liegt aber der vierte Fall vor, so fallen in derselben Netzlinie jetzt die Seiten BC und EF zusammen,

die somit gleich sein müssen. Gleichzeitig ergibt sich am Punkte P die Winkelrelation $\alpha + \beta + \zeta = 2\pi$, die aussagt, daß die Seiten BC und EF auch parallel sind. Da das Sechseck demnach eines vom ersten Typus ist, so sind diese Bedingungen auch hinreichend. Wie man sieht, ist beim Beweise wesentlich benutzt, daß die Sechsecke frei von singulären Ecken sind, und daß ihre eigentlichen Ecken sämtlich mit dreifachen Netzpunkten zusammenfallen.

Nach diesem Hilfssatz folgt bereits die Unmöglichkeit der Ebenenzerlegung in Sechsecke, die zu der ersten der oben aufgestellten Klassen gehören. Denn für diese ist die Bedingung des Hilfssatzes mehrfach erfüllt, und je zwei gegenüberliegende Seiten sind stets voneinander verschieden.

Die zweite Klasse zerfällt je nach der Lage der beiden gleichen Seiten in drei Unterabteilungen. Denn entweder liegen diese aneinander (a), oder getrennt (b), oder schließlich gegenüber (c) (s. Abb. 12).

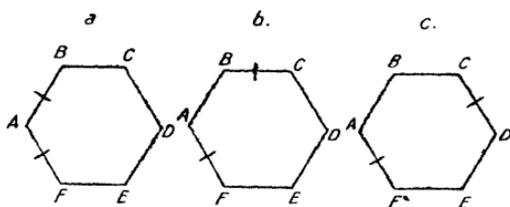


Abb. 12.

In allen drei Fällen ist die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt; aus diesem folgt daher sofort, daß Zerlegungen in Sechsecke a und b unmöglich und solche in Sechsecke c dann und nur dann möglich sind, wenn die beiden gegenüberliegend gleichen Seiten auch parallel sind.

Es sollen weiter noch zwei für die Diskussion typische Beispiele betrachtet werden. Zunächst möge das Sechseck ein Paar gegenüberliegend gleicher und ein zweites Paar davon verschiedener getrennt liegend gleicher Seiten besitzen; die beiden letzten Seiten seien untereinander und von allen anderen verschieden. Dieser Sechseckstyp gehört offenbar zur Klasse III₂; er bildet eine der 8 Unterabteilungen, in die diese zerfällt. Es

sei etwa $AB = CD = x$, $BC = EF = y$. Dann betrachten wir z. B. die Seite DE , die nach Voraussetzung von allen anderen Seiten verschieden ist; sie muß demnach bei der Bedeckung stets mit sich selbst zur Deckung gebracht werden, so daß entweder $DE = DE$ oder $DE = ED$ ist (s. Abb. 13). Der erste dieser Fälle kann jedoch nicht eintreten, da Sechseck 3 sonst offenbar zwei aneinanderliegende Seiten y erhielte, was unmöglich ist. Ist aber $DE = ED$, so folgen im Sechseck 3 jetzt eine Seite x und eine Seite y aufeinander; daher muß entweder $P_3 = \gamma$ oder $P_3 = \beta$ sein. Im ersten dieser Fälle folgt ersichtlich $\gamma + \delta + \varepsilon = 2\pi$, so daß $BC \parallel EF$ ist, womit sich das betrachtete Sechseck als ein solches vom ersten Typus erweist.

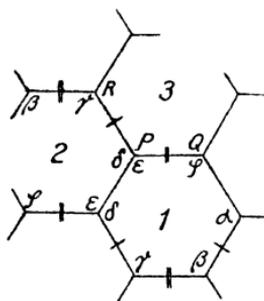


Abb. 13.

Im zweiten Fall ergibt sich entsprechend $\delta + \varepsilon + \beta = 2\pi$, also auch $\zeta + \alpha + \gamma = 2\pi$. Damit besitzt das Sechseck aber alle Eigenschaften eines solchen vom zweiten Typus.

Mitunter müssen bei der Betrachtung auch elementare Sätze über Sechsecke herangezogen werden. Dazu betrachten wir ein Sechseck, dessen Seiten in drei Paare von je zwei gleichen, untereinander aber verschiedenen Seiten zerfallen, und zwar möge das eine Paar aus gegenüberliegenden und die beiden anderen aus getrennt liegenden Seiten bestehen. Ein solches Sechseck gehört zu einer der 5 Unterabteilungen, in welche die Klasse IV_3 zerfällt. Es sei etwa $AB = CD = x$, $BC = EF = y$, $DE = FA = z$. Dann betrachten wir die beiden gegenüberliegenden Seiten BC und EF ; von diesen kann keine mit sich selbst zur Deckung gebracht werden, da sonst ersichtlich in den beiden anliegenden Sechsecken 3 und 4 zwei Seiten x oder zwei Seiten z zur Auf-

einanderfolge kämen, was unmöglich ist (s. Abb. 14). Es muß bei der Bedeckung also stets die eine dieser Seiten an die andere angelagert werden. Dann haben wir zwei Fälle.

Es sei zunächst $BC = FE$; dann stoßen im Sechseck 3 bei P eine Seite x und eine Seite z zusammen. Es muß daher entweder $P_3 = \delta$ oder $P_3 = \alpha$ sein. Im ersten Fall ist $\gamma + \delta + \varepsilon = 2\pi$, also $BC \parallel EF$, so daß das Sechseck zum ersten Typus gehört.

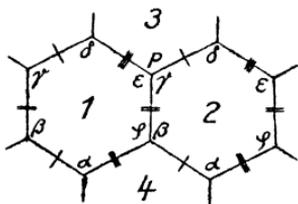


Abb. 14.

Im zweiten Fall dagegen ergibt sich $\alpha + \gamma + \varepsilon = 2\pi$ und demnach auch $\beta + \delta + \zeta = 2\pi$. Nun besteht aber der Satz, daß in einem Sechseck, das ein Paar gegenüberliegend gleicher und zwei Paare getrennt liegend gleicher Seiten besitzt, und dessen drei nicht aufeinanderfolgende Winkel sich zu 2π ergänzen, die beiden gegenüberliegend gleichen Seiten auch parallel sein müssen. Damit ist also das Sechseck wieder ein solches vom ersten Typus. Um nun diesen Satz zu beweisen, ziehen wir in einem solchen Sechseck die Diagonalen AC, CE und EA (s. Abb. 15). Infolge der Voraussetzungen $AB = CD, BC = EF, DE = FA$; $\beta + \delta + \zeta = 2\pi$ lassen sich dann die drei Dreiecke ABC, CDE und EFA ersichtlich zu einem Dreieck zusammensetzen, das dem Dreieck

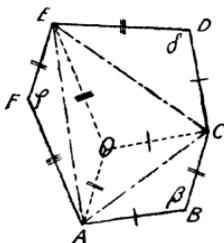


Abb. 15.

ACE kongruent ist. Wir denken es uns daher auf das letztere in das Sechseck hineingelegt; dann sind aber die Vierecke $ABCO$

und $EFAO$ offenbar Parallelogramme, so daß in der Tat $BC \parallel AO \parallel EF$ sein muß.

Es sei dann $BC = EF$. Ist nunmehr $P_3 = \delta$, so folgt $\gamma + \delta + \zeta = 2\pi$ und demnach auch $\alpha + \beta + \varepsilon = 2\pi$. Und ist $P_3 = \alpha$, so ergibt sich $\alpha + \gamma + \zeta = 2\pi$ und somit $\beta + \delta + \varepsilon = 2\pi$. In beiden Fällen gehört das Sechseck also zum zweiten Typus.

Diese Beispiele mögen genügen. Auf ähnliche Weise lassen sich alle anderen Fälle leicht erledigen, wenn auch die Diskussion eines einzelnen Typs mitunter ziemlich umfangreich wird.

Wir betrachten jetzt noch diejenigen Zerlegungen in kongruente normale Fünfecke, die nicht mit dem Auftreten singulärer Ecken verbunden sind. Dazu teilen wir sämtliche Fünfecke wieder nach der Zahl der verschiedenen Seitenlängen in fünf Klassen ein. Ein Fünfeck gehört zur ersten, zweiten, dritten, vierten, fünften Klasse, je nachdem es bez. fünf, vier, drei, zwei verschiedene Seitenlängen besitzt oder seine sämtlichen Seiten gleich sind. Da sich manche dieser Klassen infolge der verschiedenen Verteilung der jeweilig gleichen Seiten wieder spalten, so bekommen wir folgende

Einteilung der Fünfecke:

- I. Alle fünf Seiten sind verschieden.
- II. Unter den fünf Seiten sind zwei gleiche; die anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- III₁. Unter den fünf Seiten sind drei gleiche; die anderen sind von diesen und untereinander verschieden.
- III₂. Unter den fünf Seiten sind zwei Paare gleicher, untereinander aber verschiedener; die letzte ist von diesen verschieden.
- IV₁. Unter den fünf Seiten sind vier gleiche; die letzte ist von diesen verschieden.
- IV₂. Unter den fünf Seiten sind drei gleiche und, davon verschieden, noch zwei gleiche.
- V. Alle fünf Seiten sind einander gleich.

Bei der Untersuchung der ersten vier dieser Fälle hat sich folgendes Resultat ergeben:

Satz 2: Jedes normale Fünfeck mit mindestens drei verschiedenen Seiten und von der Beschaffenheit, daß die gesamte Ebene in eine Folge zu ihm kongruenter Exemplare ohne singuläre Ecken zerlegbar ist, gehört zu einem der folgenden fünf Typen:

Erster Typus: Das Fünfeck besitzt zwei gegenüberliegend gleiche und parallele Seiten (s. Abb. 16):

$$\begin{aligned} BC &= DE, \\ \varepsilon + \alpha + \beta &= 2\pi, \\ \gamma + \delta &= 2\pi. \end{aligned}$$

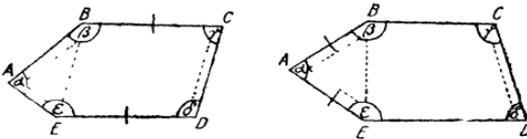


Abb. 16 u. 17.

Zweiter Typus: Das Fünfeck besitzt zwei aneinanderliegend gleiche Seiten, mit welchen die an sie wieder anstoßenden Seiten, die parallel sind, gleiche Winkel bilden (s. Abb. 17):

$$\begin{aligned} AB &= EA, \\ \beta &= \varepsilon, \\ \varepsilon + \alpha + \beta &= 2\pi, \\ \gamma + \delta &= 2\pi. \end{aligned}$$

Dritter Typus: Das Fünfeck besitzt zwei Paare gegenüberliegend gleicher Seiten, und die beiden gegenüberliegenden, von je zwei zu beiden Paaren gehörigen Seiten gebildeten Winkel ergänzen sich zu π (s. Abb. 18):

$$\begin{aligned} AB &= DE, \\ BC &= EA, \\ \alpha + \gamma + \delta &= 2\pi, \\ \beta + \varepsilon &= \pi. \end{aligned}$$

Vierter Typus: Das Fünfeck besitzt zwei Paare aneinanderliegend gleicher Seiten, deren jedes einen Winkel von der Größe $\frac{\pi}{2}$ einschließt (s. Abb. 19):

$$AB = BC,$$

$$DE = EA,$$

$$\beta = \varepsilon = \frac{\pi}{2},$$

$$\alpha + \gamma + \delta = 2\pi.$$

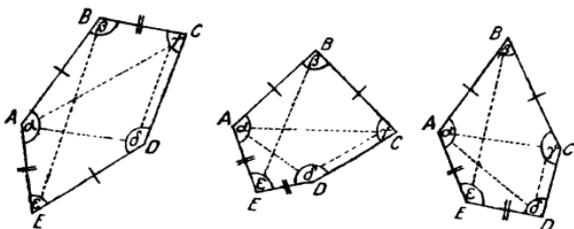


Abb. 18, 19 u. 20.

Fünfter Typus: Das Fünfeck besitzt zwei Paare aneinanderliegend gleicher Seiten, deren eines einen Winkel von der Größe $\frac{\pi}{3}$ und deren anderes einen Winkel von der Größe $\frac{2\pi}{3}$ einschließt (s. Abb. 20):

$$AB = BC,$$

$$DE = EA,$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}, \varepsilon = \frac{2\pi}{3},$$

$$\alpha + \gamma + \delta = 2\pi.$$

Daß man mit jedem Fünfeck, das einem dieser fünf Typen angehört, und kongruenten Exemplaren die Ebene in der Tat lückenlos und schlicht bedecken kann, möge wieder aus den unten folgenden Abbildungen entnommen werden. Aus ihnen ergibt sich zugleich, daß die Bedeckung mit Fünfecken des ersten, dritten, vierten und fünften Typs bereits so beschaffen ist, daß jedes Polygon von allen anderen auf die gleiche Weise

umgeben ist, während diejenige mit Fünfecken des zweiten Typs zwar nicht selbst diese Eigenschaft besitzt, jedoch ohne weiteres dementsprechend eingerichtet werden kann (in der Abbildung ist die neue Lage der sich dabei ändernden Netzlinien punktiert eingezeichnet). Bei der so entstehenden zweiten Bedeckungsart mit Fünfecken dieses Typs erhalten diese sämtlich an entsprechenden Stellen je eine singuläre Ecke; sie kann mithin als eine entartete Bedeckung mit kongruenten Sechsecken aufgefaßt werden¹⁾. Jedenfalls ergibt sich auf diese Weise, daß jedes zu

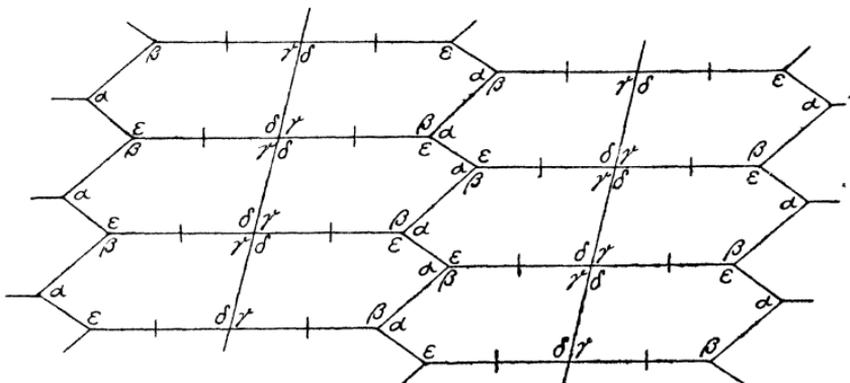


Abb. 21.

Teil der Zerlegung in kongruente Fünfecke des ersten Typus.

einem der fünf in Satz 2 aufgestellten Typen gehörige Fünfeck ebenfalls als Fundamentalbereich einer Bewegungsgruppe aufgefaßt werden kann.

Die Zerlegung in Fünfecke vom ersten und zweiten bzw. vom dritten und vierten Typus kommt offenbar dadurch zustande, daß sich je zwei bzw. je vier kongruente Fünfecke des betreffenden Typs zu einem Sechseck mit drei Paaren gegenüberliegend gleicher und paralleler Seiten zusammensetzen, während etwas Ähnliches bei der Zerlegung in Fünfecke des fünften Typs nicht stattfindet. Übrigens erkennt man, daß die vier ersten

¹⁾ Offenbar kann eine solche auf dieselbe Weise bereits dann hergestellt werden, wenn das Fünfeck lediglich zwei parallele Seiten besitzt; doch ist in diesem allgemeinen Fall eine Zerlegung ohne singuläre Ecken nicht möglich, weshalb dieser Fünfeckstyp bei unseren Untersuchungen nicht auftritt.

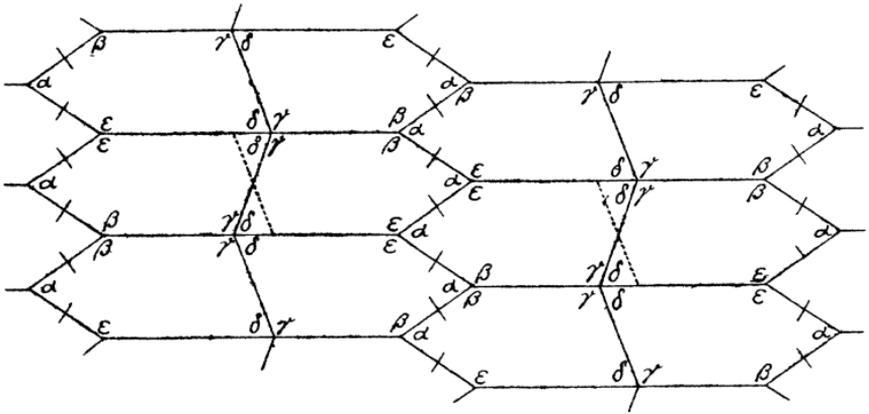


Abb. 22.

Teil der Zerlegung in kongruente Fünfecke des zweiten Typus.

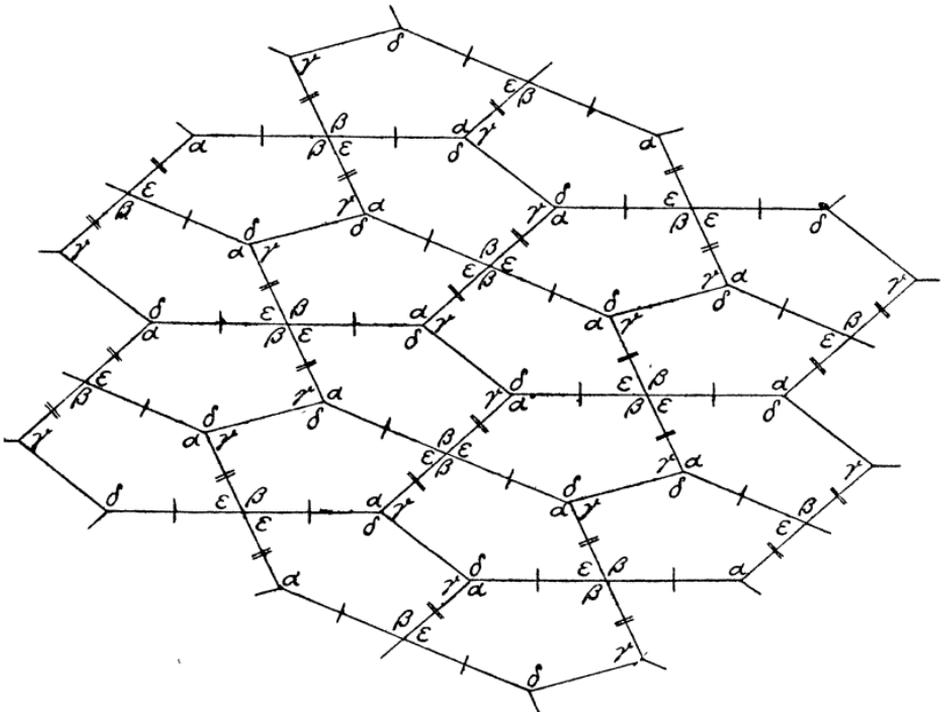


Abb. 23.

Teil der Zerlegung in kongruente Fünfecke des dritten Typus.

Zerlegungen Beispiele regulärer Fünfeckszerlegungen von der Form $e^{(3)} = 3, e^{(4)} = 2$ sind und die fünfte eine solche von der Form $e^{(3)} = 4, e^{(6)} = 1$ ist.

Es wurde früher bereits angedeutet, wie die zum Beweise des Satzes 2 notwendige Diskussion beim einzelnen Typus verlaufen wird. Zunächst ist der Fall zu untersuchen, daß eine,

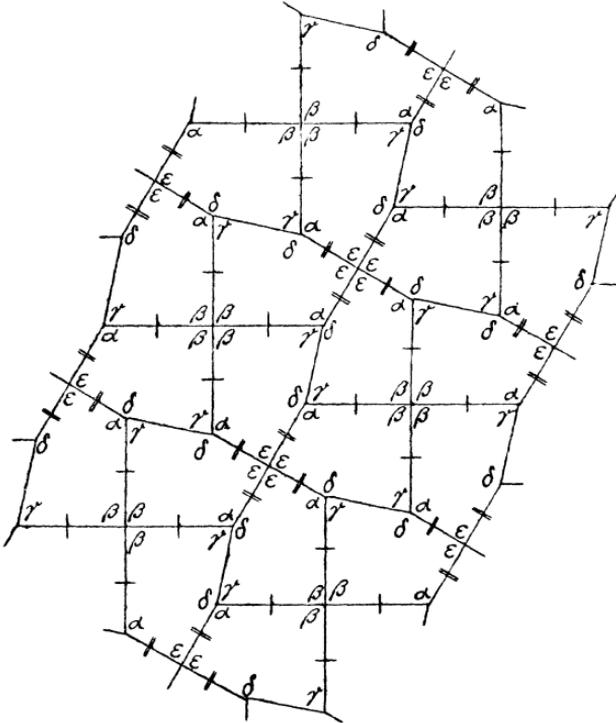


Abb. 24.

Teil der Zerlegung in kongruente Fünfecke des vierten Typus.

zwei, drei oder vier Ecken mit dreifachen Netzpunkten identisch sind. Läßt sich aus diesen Betrachtungen bereits die Entscheidung über die Angehörigkeit des Fünfecks zu einem der fünf Typen oder die Unmöglichkeit der Bedeckung treffen, so kann Satz 4, § 1, angewandt werden, da dessen Voraussetzung a oder b dann als erfüllt angesehen werden kann; da nach diesem die Vielfachheit der Netzpunkte, mit welchen die einzelnen Ecken zusammenfallen, feststeht, so ist die Diskussion ohne

weiteres zu Ende zu führen. Läßt sich dagegen aus den ersten Untersuchungen noch keine Entscheidung treffen, so muß die letzte Ecke ebenfalls herangezogen und der Reihe nach angenommen werden, daß sie mit einem drei-, vier-, fünf- oder

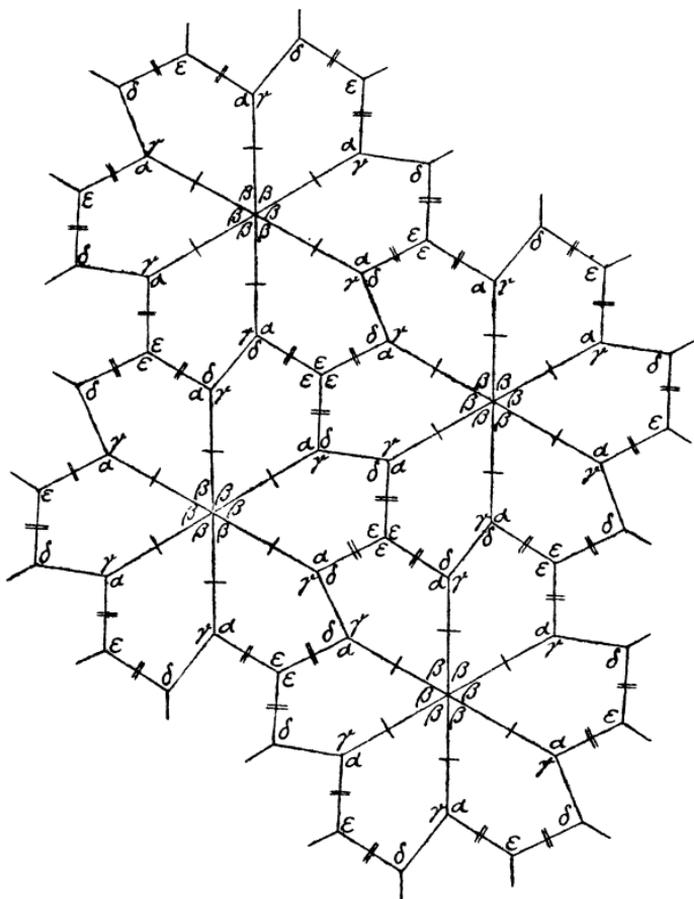


Abb. 25.

Teil der Zerlegung in kongruente Fünfecke des fünften Typus.

sechsfachen Netzpunkt identisch ist; hierauf ist die weitere Diskussion wieder auf Satz 4, Teil c, § 1, zu stützen.

Es sollen dazu wieder zwei typische Beispiele gebracht werden. Wir nehmen zunächst an, daß das Fünfeck zwei getrennt liegend gleiche Seiten besitzt, während die anderen drei Seiten untereinander und von diesen verschieden sind. Dieser

Fall bildet eine der beiden Unterabteilungen, in die die Klasse II zerfällt. Es sei etwa $AB = x_1$, $BC = DE = y$, $CD = x_2$, $EA = x_3$. Da die Seite CD von allen anderen verschieden ist, so muß sie stets mit sich selbst zur Deckung gebracht werden; dann kann aber weder die Ecke C noch die Ecke D jemals mit einem dreifachen Netzpunkt zusammenfallen, denn andernfalls erhielten die Fünfecke 2 und 3 offenbar zwei aneinanderliegende Seiten y , was unmöglich ist (s. Abb. 26). Mithin sind die Voraussetzungen a von Satz 4, § 1, erfüllt, aus welchem folgt, daß wir jetzt lediglich noch eine solche Bedeckung mit Fünfecken des betrachteten Typs zu untersuchen brauchen, bei welcher die Ecken C und D stets mit vierfachen und die Ecken A , B und E immer mit dreifachen Netzpunkten identisch sind. Nun muß die Seite AB so-

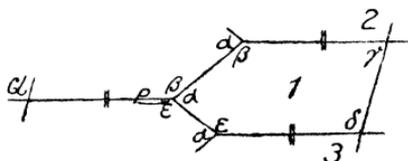


Abb. 26.

wohl als auch die Seite EA mit sich selbst zur Deckung gebracht werden; dann folgt aber, daß nur $AB = BA$ und $EA = AE$ sein kann. Denn andernfalls würden in der Netzlinie PQ die Seiten EA und DE , oder BC und AB , oder schließlich EA und BA zusammenfallen, was offenbar unmöglich ist. Nach der sich somit am Netzpunkt P ergebenden Winkelrelation $\alpha + \beta + \varepsilon = 2\pi$ ist aber $BC \parallel DE$; damit besitzt das betrachtete Fünfeck die sämtlichen Eigenschaften eines solchen vom ersten Typus.

Es soll jetzt noch der Fall betrachtet werden, daß das Fünfeck drei gleiche Seiten besitzt, von denen zwei aneinander und die dritte von diesen beiden getrennt liegt; jede der beiden letzten Fünfeckseiten soll von allen anderen verschieden sein. Dieser Fall entspricht einer der zwei Unterabteilungen, in welche die Klasse III_1 zerfällt. Es sei etwa $AB = CD = EA = x$, $BC = y_1$, $DE = y_2$. Dann sagen wir zunächst so (s. Abb. 27): Die Ecken C und D können nicht beide gleichzeitig mit dreifachen Netzpunkten identisch sein; denn da von den beiden Seiten BC

und DE jede mit sich selbst zur Deckung gebracht werden muß, so müßte sonst das an das betrachtete längs der Seite CD angrenzende Fünfeck 3 drei aneinanderliegende Seiten x erhalten, was unmöglich ist. Wenn nun die Ecken B und C gleichzeitig mit dreifachen Netzpunkten identisch sind, so muß offenbar $P_2 = Q_3 = \alpha$ sein. Dann folgt aber im Falle $BC = CB$ sofort aus P oder Q und im Falle $BC = BC$ mittels der sich aus P und Q ergebenden Beziehungen $\alpha + 2\beta = \alpha + 2\gamma = 2\pi$, also $\beta = \gamma$, die Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, die besagt, daß $CD \parallel EA$ und das Fünfeck daher ein solches vom ersten Typus ist. Eine entsprechende Überlegung gilt ersichtlich, wenn die Ecken D und E gleichzeitig mit dreifachen Netzpunkten identisch sind. Fallen schließlich die Ecken B und E gleichzeitig mit dreifachen Netz-

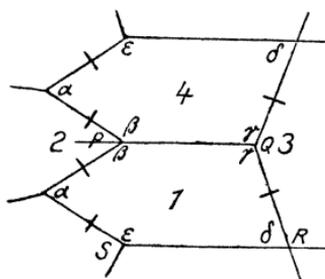


Abb. 27.

punkten zusammen, so ergibt sich, falls entweder $BC = CB$ oder $DE = ED$ ist, aus P bzw. S die Relation $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ bzw. $\alpha + \delta + \epsilon = 2\pi$, womit das Fünfeck jedesmal wieder zum ersten Typus gehört; ist aber $BC = BC$ und $DE = DE$, so folgen aus P und S die Beziehungen $\alpha + 2\beta = 2\pi$ und $\alpha + 2\epsilon = 2\pi$, aus welchen man $\beta = \epsilon$ und $\alpha + \beta + \epsilon = 2\pi$ findet, so daß das Fünfeck jetzt eines vom zweiten Typus ist.

Wären nun bei irgendeinem der bei der Bedeckung vorkommenden Fünfecke vier oder gar fünf Ecken mit dreifachen Netzpunkten identisch, so müßte offenbar mindestens einer der soeben erledigten Fälle auftreten; wir können uns also nunmehr auf die Betrachtung einer Bedeckung beschränken, bei welcher bei keinem Fünfeck mehr als drei Ecken mit dreifachen Netzpunkten zusammenfallen. Für eine solche ist aber die Voraussetzung b von Satz 4, § 1, gerade erfüllt; nach diesem braucht

mithin sogar lediglich eine reguläre Bedeckung von der Art untersucht zu werden, daß je zwei Ecken jedes Fünfecks mit vierfachen und die übrigen Ecken mit dreifachen Netzpunkten identisch sind. Ferner genügt es, als jene mit vierfachen Netzpunkten zusammenfallenden Ecken B und D oder C und E anzunehmen; denn andernfalls müßte ersichtlich wieder mindestens einer der eingangs erledigten Fälle statthaben. Seien bei dem von uns gerade betrachteten Fünfeck diese Ecken etwa B und D. Dann kommen wir sofort auf einen Widerspruch. Denn da wir den Fall nicht mehr zu erörtern brauchen, daß $BC = CB$ ist (weil hier aus Q sofort $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ folgen würde, womit das Fünfeck wieder ein solches vom ersten Typus wäre), so muß $BC = BC$ sein. Da in Fünfeck 4 somit die eine der beiden mit vierfachen Netzpunkten identischen Ecken ebenfalls B ist, so muß die andere D sein. Dann würden aber in Fünfeck 3 ersichtlich die Ecken B und E mit vierfachen Netzpunkten zusammenfallen, was mit den vorigen Bemerkungen in Widerspruch steht.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch hier alle anderen Fälle erledigen. Ebenso bietet es offenbar theoretisch keinerlei Schwierigkeit, auch die vom Verfasser nicht mehr untersuchten drei letzten Fünfecksklassen nach der oben dargelegten Methode zu diskutieren; dagegen ist die praktische Durchführung einer derartigen Diskussion sehr mühsam, äußerst umfangreich und wenig befriedigend. Außerdem besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß andere zu einer Ebenenzerlegung Anlaß gebende Fünfeckstypen als die in Satz 2 aufgezählten dabei nicht mehr zutage treten.

Lebenslauf.

Am 27. Januar 1895 wurde ich, Karl August Reinhardt, als Sohn des Kaufmanns Carl Reinhardt und seiner Ehefrau Josephine geb. Bachmann zu Frankfurt a. M. geboren. Ich bin preußischer Staatsangehöriger und evangelisch-lutherischer Konfession. Von Ostern 1901 ab besuchte ich die Sachsenhäuser Oberrealschule zu Frankfurt a. M., die ich Ostern 1913 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften zuzuwenden. Ich war zunächst drei Semester in Marburg immatrikuliert, bis ich im Herbst 1914 die neugegründete Universität zu Frankfurt bezog, wo sich mein Interesse vor allem der Mathematik zuwandte. Daneben widmete ich mich besonders physikalischen und philosophischen Studien. Meine akademischen Lehrer waren

in Marburg: v. Auwers, Fries, Hensel, Neumann, Richarz;
in Frankfurt: Bieberbach, Cornelius, Hellinger, v. Laue,
Schoenflies, Schumann, Wachsmuth.

Während des Wintersemesters 1917/18 weilte ich als Assistent von Geheimrat Hilbert in Göttingen. Am 28. Januar 1918 bestand ich in Frankfurt das Rigorosum.
