S2 Text

Autonomous emergence of connectivity assemblies via spike triplet interactions

Lisandro Montangie[1], Christoph Miehl[1,2], Julijana Gjorgjieva[1,2*],

1 Max Planck Institute for Brain Research, 60438 Frankfurt, Germany
2 Technical University of Munich, School of Life Sciences, 85354 Freising, Germany

*gjorgjieva@brain.mpg.de

Calculation of motif coefficients up to third order

Under the condition that the STDP rule is balanced, in the sense that the total depression is equal to the total potention, we obtain the motif coefficients for the motif expansion up to third order in terms of the parameters of the STDP and EPSP functions. The first order motif coefficients that involve α- and β-paths can be calculated as

$$M_{1,0} = 2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\tau_+}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)(\tau_\chi + \tau_+)} + \frac{\tau_y^2}{(\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y)(\tau_\chi + \tau_y)} \right), \tag{S2.1}$$

and

$$M_{0,1} = -2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\eta_- \tau_-}{(\tau_\varepsilon + \eta_- \tau_-)(\tau_\chi + \eta_- \tau_-)} - \frac{\tau_+^2}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)(\tau_+ + \tau_y)(\tau_\chi + \tau_+)} \right), \tag{S2.2}$$

where $\tau_\chi = \frac{\tau_\varepsilon \tau_\iota}{\tau_\varepsilon + \tau_\iota}$. The second order motif coefficients are

$$M_{2,0} = 2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\tau_+^3}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 (\tau_\chi + \tau_+)^2} + \frac{\tau_y^4}{(\tau_\varepsilon + \tau_y)^2 (\tau_+ + \tau_y)(\tau_\chi + \tau_y)^2} \right), \tag{S2.3}$$

$$M_{0,2} = -2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\eta_-^3 \tau_-^3}{(\tau_\varepsilon + \eta_- \tau_-)^2 (\tau_\chi + \eta_- \tau_-)^2} - \frac{\tau_+^4}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 (\tau_+ + \tau_y)(\tau_\chi + \tau_+)^2} \right), \tag{S2.4}$$

and

$$\begin{aligned} M_{1,1} = \pi A_- \tau_- \Bigg(& \frac{(\tau_+ + \tau_\upsilon)}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)(\tau_+ + \tau_\chi)} + \frac{2\tau_+^4}{(\tau_+ + \tau_y)(\tau_+^2 - \tau_\varepsilon^2)(\tau_+^2 - \tau_\chi^2)} + \frac{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2}{(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon - \tau_+)(\tau_\varepsilon + \tau_y)} \\ & + \frac{\tau_\iota^3}{(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_+ - \tau_\chi)(\tau_y + \tau_\chi)} - \frac{(\eta_- \tau_- + \tau_\upsilon)}{(\tau_\varepsilon + \eta_- \tau_-)(\eta_- \tau_- + \tau_\chi)} \Bigg), \end{aligned} \tag{S2.5}$$

where $\tau_\upsilon = \frac{\tau_\varepsilon \tau_\iota}{\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota}$. Finally, the four third order coefficients are calculated as

$$M_{3,0} = 2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\tau_+^5}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^3 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^3} + \frac{\tau_y^6}{(\tau_\varepsilon + \tau_y)^3 \left(\tau_+ + \tau_y\right) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)^3} \right), \tag{S2.6}$$

$$M_{0,3} = -2\pi A_- \tau_- \left(\frac{\eta_-^5 \tau_-^5}{\left(\tau_\varepsilon + \eta_- \tau_-\right)^3 \left(\tau_\chi + \eta_- \tau_-\right)^3} - \frac{\tau_+^6}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^3 \left(\tau_+ + \tau_y\right) \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^3} \right), \tag{S2.7}$$

$$\begin{aligned} M_{2,1} = \frac{\pi}{2} A_- \tau_- \Bigg(& \frac{13\tau_+^3\tau_\iota^3 + \tau_\varepsilon^4(\tau_\iota + \tau_+)^2 + \tau_\varepsilon^3(\tau_\iota + \tau_+)(2\tau_\iota + \tau_+)(\tau_\iota + 3\tau_+)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2} - \frac{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^3}{\tau_\varepsilon(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^3(\tau_\varepsilon + \eta_-\tau_-)} \\
& + \frac{\tau_+\tau_\varepsilon^2\tau_\iota(3\tau_\iota + 4\tau_+)^2 + 2\tau_\varepsilon\tau_\iota^2\tau_+^2(8\tau_\iota + 13\tau_+)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2} + \frac{(\tau_+^2 + \tau_y^2)\tau_\varepsilon^2\tau_\chi^2(2\tau_\varepsilon^2 + 9\tau_\varepsilon\tau_\iota + 9\tau_\iota^2)}{(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{4\tau_+^2\tau_y^4(\tau_\varepsilon^2 + 3\tau_\varepsilon\tau_\iota + 2\tau_\iota^2)^2 + \tau_y^2\tau_\varepsilon(\tau_\varepsilon^3 + 10\tau_\varepsilon^2\tau_\iota + 24\tau_\varepsilon\tau_\iota^2 + 16\tau_\iota^3)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{\tau_\iota^3}{\tau_\varepsilon(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2\left(\tau_\chi + \eta_-\tau_-\right)} + \frac{3\tau_+\tau_y\tau_\varepsilon^2\tau_\chi^2 + (\tau_+ + \tau_y)\tau_\varepsilon^2\tau_\upsilon\tau_\chi^2}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{3\tau_+\tau_y^2\tau_\varepsilon^2\tau_\chi(\tau_\varepsilon^2 + 5\tau_\varepsilon\tau_\iota + 5\tau_\iota^2)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{\tau_y\tau_\varepsilon\tau_\chi + \tau_+^2\tau_y\tau_\varepsilon^2\tau_\chi(2\tau_\varepsilon^3 + 11\tau_\varepsilon^2\tau_\iota + 21\tau_\varepsilon\tau_\iota^2 + 14\tau_\iota^3) + \tau_y^4\tau_\varepsilon\tau_\chi(3\tau_\varepsilon^3 + 16\tau_\varepsilon^2\tau_\iota + 26\tau_\varepsilon\tau_\iota^2 + 13\tau_\iota^3)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{\tau_+\tau_y^4\tau_\varepsilon(3\tau_\varepsilon^3 + 17\tau_\varepsilon^2\tau_\iota + 28\tau_\varepsilon\tau_\iota^2 + 14\tau_\iota^3) + \tau_+\tau_y^3\tau_\varepsilon^2(\tau_\varepsilon^3 + 12\tau_\varepsilon^2\tau_\iota + 30\tau_\varepsilon\tau_\iota^2 + 20\tau_\iota^3)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \\
& + \frac{\tau_+^2\tau_y^2\tau_\varepsilon^2(\tau_\varepsilon^4 + 11\tau_\varepsilon^3\tau_\iota + 38\tau_\varepsilon^2\tau_\iota^2 + 54\tau_\varepsilon\tau_\iota^3 + 27\tau_\iota^4) + \tau_+^2\tau_y^3\tau_\varepsilon(3\tau_\varepsilon^4 + 23\tau_\varepsilon^3\tau_\iota + 62\tau_\varepsilon^2\tau_\iota^2 + 70\tau_\varepsilon\tau_\iota^3 + 28\tau_\iota^4)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)\left(\tau_\chi + \tau_+\right)\left(\tau_\varepsilon + \tau_y\right)^2(\tau_+ + \tau_y)\left(\tau_\chi + \tau_y\right)^2} \Bigg), \end{aligned} \tag{S2.8}$$

and

$$
\begin{aligned}
M_{1,2} = -\frac{\pi}{2} A_- \tau_- \Bigg(& \frac{13\eta_-^3\tau_-^3\tau_\iota^3 + \tau_\varepsilon^4(\tau_\iota + \eta_-\tau_-)^2 + \tau_\varepsilon^3(\tau_\iota + \eta_-\tau_-)(2\tau_\iota + \eta_-\tau_-)(\tau_\iota + 3\eta_-\tau_-)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \eta_-\tau_-)^2 \left(\tau_\chi + \eta_-\tau_-\right)^2} \\
& + \frac{\eta_-\tau_-\tau_\varepsilon^2\tau_\iota(3\tau_\iota + 4\eta_-\tau_-)^2 + 2\eta_-^2\tau_\varepsilon\tau_\iota^2\tau_-^2(8\tau_\iota + 13\eta_-\tau_-)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \eta_-\tau_-)^2 \left(\tau_\chi + \eta_-\tau_-\right)^2} - \frac{4\tau_+^4\tau_y^2 + \tau_y\tau_\varepsilon^2\tau_\upsilon\tau_\chi^2 + 6\tau_+\tau_y\tau_\varepsilon\tau_\upsilon\tau_\chi^2 + 7\tau_+\tau_y^2\tau_\upsilon\tau_\chi^2}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \\
& + \frac{7\tau_+\tau_y^2\tau_\varepsilon^2\tau_\chi^2}{(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right) (\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)} - \frac{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^3}{\tau_\varepsilon(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^3(\tau_\varepsilon + \tau_+)} \\
& + \frac{\tau_+^2\tau_\varepsilon^2\tau_\chi^2(\tau_\varepsilon + 3\tau_\iota)(2\tau_\varepsilon + 3\tau_\iota) + \tau_y^2\tau_\varepsilon^2\tau_\chi^2(\tau_\varepsilon^2 + 3\tau_\varepsilon\tau_\iota + 3\tau_\iota^2) + \tau_+^4\tau_\varepsilon\tau_\chi(3\tau_\varepsilon^2 + 13\tau_\varepsilon\tau_\iota + 13\tau_\iota^2)}{(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \\
& + \frac{(\tau_+^4\tau_y\tau_\varepsilon + \tau_+^3\tau_y^2\tau_\varepsilon^2)(3\tau_\varepsilon^2 + 14\tau_\varepsilon\tau_\iota + 14\tau_\iota^2) + 3\tau_+^2\tau_y\tau_\varepsilon^2\tau_\chi(\tau_\varepsilon^2 + 5\tau_\varepsilon\tau_\iota + 5\tau_\iota^2) + \tau_+\tau_\varepsilon^4\tau_\chi(\tau_\iota + \tau_y)(\tau_\iota + 2\tau_y)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \\
& + \frac{\tau_\iota^3}{\tau_\varepsilon(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)} + \frac{\tau_+^3\tau_\varepsilon^2\tau_\chi}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \\
& + \frac{\tau_+^2\tau_y^2\tau_\varepsilon^2(\tau_\varepsilon^4 + 11\tau_\varepsilon^3\tau_\iota + 38\tau_\varepsilon^2\tau_\iota^2 + 54\tau_\varepsilon\tau_\iota^3 + 27\tau_\iota^4)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + 2\tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \\
& + \frac{\tau_+^3\tau_y\tau_\varepsilon^2(\tau_\varepsilon^2 + 10\tau_\varepsilon\tau_\iota + 10\tau_\iota^2)}{(\tau_\varepsilon + \tau_\iota)^2(\tau_\varepsilon + \tau_+)^2 \left(\tau_\chi + \tau_+\right)^2 (\tau_\varepsilon + \tau_y)(\tau_+ + \tau_y) \left(\tau_\chi + \tau_y\right)} \Bigg).
\end{aligned}
\tag{S2.9}
$$