Iterierte Darstellungen der Zopfgruppe

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Frank Neumann
aus Bergneustadt

Frankfurt 2001

vom Fachbereich Mathematik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. J. Baumeister

Gutachter: Prof. Dr. F. Constantinescu und Prof Dr. J. Wolfart

Datum der Disputation: 14.12.2001

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Darstellungen der Artinschen Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Homologie iterativ konstruierter äquivarianter Kettenkomplexe betrachtet.
Es werden azyklische Komplexe freier Moduln bzw. freie Auflösungen der ganzen Zahlen für nichtpermutierte Artinsche Zopfgruppen konstruiert, die als iterierte semidirekte Produkte freier Gruppen darstellbar sind. Als Tensorprodukte der freien Auflösungen mit Moduln zu den fraglichen iterierten semidirekten Produkten freier Gruppen erhält man äquivariante Komplexe, deren von Eigenschaften der Koeffizientenmoduln abhängige Homologiegruppen bestimmt werden. Diese Homologiegruppen erlauben Automorphismendarstellungen der (permutierten) Artinschen Zopfgruppe, die gewissermaßen die Artinschen Darstellungen als Automorphismengruppen freier Gruppen iterieren und linearisieren.
Insbesondere werden Darstellungen gewonnen, die die bekannten Burau- und Gassner-Darstellungen der Zopfgruppen verallgemeinern und die als Monodromiegruppen verallgemeinerter hypergeometrischer Integrale interpretiert werden können.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

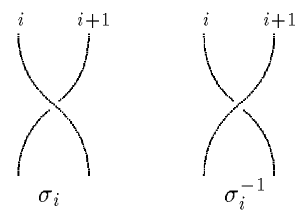
Die Arbeit behandelt im wesentlichen lineare Darstellungen der Artinschen Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und Homologiegruppen gewisser iterativ konstruierter äquivarianter Kettenkomplexe. Die Darstellungen resultieren gewissermaßen durch Linearisierung und Iteration der bekannten Artinschen Darstellungen der Zopfgruppen als Automorphismengruppen freier Gruppen.

Vorbemerkungen

Zopfgruppen Implizit treten die Zopfgruppen zuerst vermutlich bei Hurwitz [20] auf, und zwar als Monodromiegruppen topologischer Riemannscher Flächen mit endlich vielen Blättern und endlich vielen Verzweigungspunkten.
Die algebraische Definition der Zopfgruppen (der Ebene) stammt von Artin. Artin definiert die (permutierte) Zopfgruppe B_n durch Generatoren: σ_i, $i = 1, \ldots, n-1$, und definierende Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \qquad \mid i - j \mid \geq 2 \end{aligned}$$

Die Gruppe B_n ist sozusagen eine Permutationsgruppe mit zwei Freiheitsgraden der Permutation. Die Permutationsgruppe S_n von n Elementen resultiert durch die zusätzlichen Relationen $\sigma_i^2 = 1$. Fadell und Neuwirth [16] definieren die Gruppe B_n topologisch, und zwar als die Fundamentalgruppe des Konfigurationsraums von n paarweise verschiedenen ungeordneten Punkten in der Ebene. Die bekannteste geometrische Darstellung der Gruppe B_n ist die Darstellung durch verflochtene Fäden oder Zöpfe in $\mathbf{R}^3$.



Zur Übersicht über Zopfgruppen siehe Birman [4] und auch Hansen [19].

Darstellungen der Zopfgruppen Die bekannteste lineare Darstellung der Zopfgruppe B_n ist die Burau-Darstellung $B_n \to GL(\mathbf{Z}[t], n)$ durch $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen im Ring $\mathbf{Z}[t]$ der Laurent-Polynome in einer Variablen t:

$$\sigma_i \to \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1-t & t & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Ebenfalls von Artin stammt die treue Darstellung der Gruppe B_n als Gruppe von Automorphismen einer freien Gruppe $U_{n,1} =< \gamma_1, \ldots, \gamma_n >$ vom Rang n:

$$\sigma_i : \gamma_j \to \begin{cases} \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1} & j = i \\ \gamma_i & j = i+1 \\ \gamma_j & j \neq i, i+1 \end{cases}$$

In der vorliegenden Arbeit werden Darstellungen der Zopfgruppe B_n betrachtet, die durch Linearisierung und Iteration aus dieser Darstellung hervorgehen.
Im einfachsten Fall hat man folgendes. Es wird ein azyklischer Komplex $C(U_{n,1})$ freier Linksmoduln zum Gruppenring $\mathbf{Z}U_{n,1}$ konstruiert und mit Hilfe des freien Differentialkalküls nach Fox [17] eine treue Darstellung $B_n \to \mathrm{Aut}(C_1(U_{n,1}))$ gewonnen, die man durch $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen in $B_n \ltimes \mathbf{Z}U_{n,1}$ beschreiben kann:

$$\sigma_i \to \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \sigma_i & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_i(1 - \gamma_i \gamma_{i+1} \gamma_i^{-1}) & \sigma_i \gamma_i & & \\ & & \sigma_i & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_i \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Es ist klar, daß diese Darstellung iteriert werden kann, zumal da die Gruppen B_n und $U_{n,1}$ als Untergruppen der Zopfgruppe B_{n+1} von $n+1$ Elementen aufgefaßt werden können.
Betrachtet man für einen beliebigen Rechtsmodul G zum semidirekten Produkt $B_n \ltimes U_{n,1}$ nun äquivariante Komplexe $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})$, so resultieren Darstellungen $B_n \to \mathrm{Aut}(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(U_{n,1}))$. Ist der Koeffizientenmodul G gegeben durch $\sigma_i \to 1$ und $\gamma_j \to t$, so hat man die obige Burau-Darstellung. Die Konstruktion äquivarianter Komplexe und korrespondierender Darstellungen der Zopfgruppe wird iteriert, wählt man G selbst geeignet als äquivarianten Komplex.

Monodromie hypergeometrischer Integrale Die Arbeit ist motiviert durch die Betrachtung verallgemeinerter hypergeometrischer Integrale. Im einfachsten Fall betrachtet man die

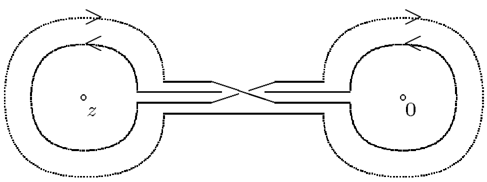
Gauss'schen hypergeometrischen Integrale:

$$F(z) = \int du\, f(u), \qquad f(u) = (u-z)^\lambda u^\lambda (u-1)^\lambda$$

die Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit endlichen Singularitäten in 0 und 1 sind.
Von Interesse sind die zulässigen Integrationswege, d.h. äquivariante Homologiezyklen, und das Verhalten der Integrale für Umläufe von z um die Singularitäten, d.h. die Monodromiegruppe.
Die integrierte Funktion $f(u)$ ist holomorph in $\tilde{X}_{3,1}$, der universellen Überlagerung der punktierten u-Ebene $X_{3,1} = \mathbf{C}\backslash\{z,0,1\}$. Bezeichnet $f(u)$ ein bestimmtes Funktionselement dieser komplexen Funktion, so hat man mittels der Monodromieeigenschaft der Funktion einen 1-dimensionalen Modul $\mathbf{C}$ zur freien Gruppe $U_{3,1} = \pi_1(X_{3,1}) =< \gamma_z, \gamma_0, \gamma_1 >$, und zwar durch den Homomorphismus $\Phi : U_{3,1} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$, definiert durch: $\Phi(\gamma_j)(f(u)) = e^{2\pi i\lambda} f(u)$, $j = z, 0, 1$. Es bezeichne weiter $\tilde{\gamma}_j$ den Lift von γ_j in die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{3,1}$ vo $X_{3,1}$. Im generischen Fall, d.h. unter der Bedingung, daß $\lambda \notin \mathbf{Z}$ ist, sind die Zyklen der äquivarianten Homologiegruppe $H_1(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}U_{3,1}} C(\tilde{X}_{3,1}))$ von der Gestalt:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= [\Phi(1-\gamma_i)]^{-1}(f(u)) \otimes \tilde{\gamma}_i - [\Phi(1-\gamma_j)]^{-1}(f(u)) \otimes \tilde{\gamma}_j = \\ &= (1-e^{2\pi i\lambda})^{-1} f(u) \otimes \tilde{\gamma}_i - (1-e^{2\pi i\lambda})^{-1} f(u) \otimes \tilde{\gamma}_j \end{aligned}$$

Diese Zyklen kombinieren sozusagen topologische Ketten und Informationen über das Funktionselement der (mehrdeutigen) Funktion $f(u)$. Sie sind proportional den bekannten Doppelumläufen von Pochhammer [33]. Linear unabhängige Integrale sind beispielsweise $\int_{c_{z,0}} du\, f(u)$ und $\int_{c_{z,1}} du\, f(u)$.



Sei $X_{2,1} = \mathbf{C}\backslash\{0,1\}$ die punktierte z-Ebene und $U_{2,1} = \pi_1(X_{2,1}) =< \gamma_0, \gamma_1 >$. Das Bild der Gruppe $U_{2,1}$ unter $U_{2,1} \to \mathrm{Aut}(H_1(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}U_{3,1}} C(\tilde{X}_{3,1})$ ist die Monodromiegruppe der Gauss'schen hypergeometrischen Integrale. Explizit hat man mit $t = e^{2\pi i\lambda}$:

$$\gamma_0 \to \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ t(t-1) & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 \to \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$$

Der Zusammenhang zu Darstellungen der Zopfgruppe stellt sich her, faßt man die freie Gruppe $U_{2,1}$ als Untergruppe der Zopfgruppe B_3 auf und die obige Darstellung als Einschränkung der reduzierten Burau-Darstellung von B_3 auf $U_{2,1}$.
Zur Übersicht zu hypergeometrischen Funktionen siehe Klein [23] und auch Yoshida [43].

Übersicht

Im weiteren wird kurz auf den Inhalt der einzelnen Kapitel eingegangen, und es werden die wesentlichen Ergebnisse zusammengefaßt.

Kapitel 1: Zopfgruppen In diesem Kapitel sind grundlegende Definitionen und Sätze zu Zopfgruppen zusammengestellt.
Zunächst werden gemäß Fadell und Neuwith [16] Konfigurationsräume von Mengen von Punkten in 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert. Die Zopfgruppen sind die Fundamentalgruppen dieser Konfigurationsräume. Es werden einige wichtige Eigenschaften der Konfigurationsräume behandelt, so die Faserungen der Konfigurationsräume, die Asphärizität der Konfigurationsräume zur komplexen Ebene und resultierende kurze exakte Homotopiesequenzen zu asphärischen Konfigurationsräumen.
Dann werden die Gruppenbeschreibungen der permutierten und der reinen Zopfgruppen von n Elementen in der komplexen Ebene mit Generatoren und definierenden Relationen angegeben. Der Beweis der Gruppenbeschreibungen gemäß Birman [5] wird angedeutet. Weiter werden die treuen Artinschen Darstellungen der Zopfgruppen zur komplexen Ebene als Gruppen von Automorphismen freier Gruppen angegeben.
Schließlich wird kurz auf die durch die kurzen exakten und zerfallenden Sequenzen von Zopfgruppen beschriebenen semidirekten Produkte von Zopfgruppen eingegangen.

Kapitel 2: Lineare Darstellungen der Zopfgruppen Hier werden 1-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert, deren Homologiegruppen bestimmt und Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und der Homologiegruppen dieser Komplexe betrachtet.
Ein äquivarianter Kettenkomplex wird konstruiert als Produkt $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})$, wobei $C(U_{n,1})$ ein azyklischer Komplex freier Linksmoduln bzgl. der freien Gruppe $U_{n,1}$ vom Rang n ist und der Koeffizientenmodul G ein beliebiger Rechtsmodul zu $U_{n,1}$. $C(U_{n,1})$ wird topologisch konstruiert als ein Kettenkomplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ in der universellen Überlagerung des Konfigurationsraumes $X_{n,1} = \mathbf{C}\backslash\{n \text{ Punkte}\}$, ein freier Linksmodul bzgl. der Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung, der Gruppe $U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1})$. Die Homologiegruppen des Komplexes sind abhängig davon, ob der Koeffizientenmodul G generisch oder trivial bzgl. $U_{n,1}$ ist.
Die Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und insbesondere der generischen Homologiegruppen des äquivarianten Komplexes werden mit Hilfe des freien Differentialkalküls gewissermaßen als Linearisierungen der Artinschen Automorphismendarstellungen erhalten.
Wesentliche Ergebnisse sind also:

- die Bestimmung der Homologiegruppen $H\left(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})\right)$
- und die Bestimmung der Darstellungen $B_n \to \mathrm{Aut}\left(H_1\left(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})\right)\right)$.

Für spezielle Koeffizientenmoduln G gewinnt man die bekannten Gassner- und Burau-Darstellungen der Zopfgruppen, sowie Darstellungen, die als Monodromiegruppen hypergeometrischer Integrale interpretiert werden können.

Kapitel 3: Iterierte Darstellungen der Zopfgruppen (1) In diesem Kapitel werden iterativ 2-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert, deren Homologiegruppen bestimmt und Darstellungen der Zopfgruppe als Automorphismen der Kettengruppen und der Homologiegruppen dieser Komplexe betrachtet.
Die 2-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexe resultieren einerseits iterativ in dem Sinne, daß im 1-dimensionalen äquivarianten Komplex $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})$ der Koeffizientenmodul G selbst geeignet als ein analog konstuierter 1-dimensionaler äquivarianter Komplex gewählt wird, und zwar als $G = G' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(U_{n+1,1})$, wobei G' ein geeigneter Koeffizientenmodul ist. Andererseits resultieren sie als Komplexe $G' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2})$, und wobei $C(U_{n,2})$ ein gemäß Brady [7] konstruierter azyklischer Komplex freier Linksmoduln zum semidirekten Produkt $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ zweier freier Gruppen vom Rang n bzw. $n+1$ ist. Setzt man ähnlich wie Cohen und Suciu [10] Generizität oder Trivialität des Koeffizientenmoduls voraus, so können die Homologiegruppen dieser 2-dimensionalen äquivarianten Komplexe ebenfalls iterativ bestimmt werden.
Analog zur Konstruktion der Kettenkomplexe können die Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und der Homologiegruppen des 2-dimensionalen äquivarianten Komplexes iterativ bestimmt werden.
Im einzelnen sind also wichtig:

- die Bestimmung einer freien Auflösung $C(U_{n,2})$ von $\mathbf{Z}$ (der Länge 2) für das semidirekte Produkt $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ freier Gruppen vom Rang n bzw. $n+1$,
- die Bestimmung der Homologiegruppen $H(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2})$ eines 2-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexes (im Falle eines generischen oder trivialen Koeffizientenmoduls) als geschachtelte Gruppen $H\Big(H(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(U_{n+1,1})) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})\Big)$,
- die explizite Angabe der iterativ gewonnenen linearen Darstellungen der Zopfgruppen als Automorphismengruppen der generischen Homologiegruppen.

Als Darstellungen resultieren beispielsweise 3-parametrige Burau-Darstellungen der Zopfgruppe, sowie höhere Darstellungen vom Gassner-Typ, die als Monodromiegruppen 2-facher hypergeometrischer Integrale interpretiert werden können.

Kapitel 4: Iterierte Darstellungen der Zopfgruppen (2) Dieses Kapitel enthält Verallgemeinerungen der Ergebnisse. Zunächst werden iterativ m-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert und deren Homologiegruppen bestimmt.
Im Prinzip können die korrespondierenden Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der m-dimensionalen Kettengruppen und Homologiegruppen explizit bestimmt werden. Allerdings zeigt schon der Fall $m = 2$ deren komplizierte Gestalt. Ein Beispiel behandelt daher lediglich die Darstellung einer Zopfgruppe als Gruppe von Automorphismen einer m-dimensionalen Homologiegruppe für den Fall eines speziellen nichtgenerischen Koeffizientenmoduls, eine Darstellung, die die Monodromiegruppe höherer hypergeometrischer Integrale vom Fyp ${}_nF_{n-1}$ liefert.

Motiviert durch die explizite Behandlung des Falls $m = 2$ werden durch Einführung von Relationen gewonnene Faktorgruppen der Ketten- und Homologiegruppen des m-dimensionalen äquivarianten Komplexes betrachtet. Um die korrespondierenden Automorphismendarstellungen der Zopfgruppen explizit anzugeben, ergibt sich hier die Notwendigkeit, eine Art nichtkommutativer Kombinatorik zu betreiben, i.e. Verallgemeinerungen der sogenannten q-deformierten Multinomialkoeffizienten einzuführen.
Von Bedeutung ist also hier:

- die Bestimmung freier Auflösungen von $\mathbf{Z}$ (der Länge m) für ein (iteriertes) semidirektes Produkte von m freien Gruppen,
- die Konstruktion m-dimensionaler äquivarianter Kettenkomplexe, einerseits durch Tensorierung der freien Auflösungen mit einem Modul zum semidirekten Produkt freier Gruppen, andererseits iterativ aus einem 1-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplex durch jeweils geeignete Wahl des Koeffzientenmoduls,
- die Bestimmung der Homologiegruppen der m-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexe im Falle eines generischen Koeffizientenmoduls und im Falle eines trivialen Koeffizientenmoduls,
- die Bestimmung der Integrationszyklen und der Monodromiegruppe höherer hypergeometrischer Integrale vom Typ ${}_nF_{n-1}$,
- die Definition von verallgemeinerten Multinomialkoeffizienten, die Einführung von Relationen von Ketten- und Homologiezyklen des m-dimensionalen äquivarianten Komplexes und die explizite Angabe der korrespondierenden Automorphismendarstellungen der Zopfgruppen.

Beispielhaft werden Darstellungen behandelt, die man für verschiedene explizit gegebene Koeffizientenmoduln erhält: höhere 2-parametrige Burau-Darstellungen der Zopfgruppe und sogenannte Tensordarstellungen der Zopfgruppe, die in verschiedenen physikalischen Theorien relevant sind.

Kapitel 1

Zopfgruppen

In diesem Kapitel sind grundlegende Definitionen und Sätze zu Zopfgruppen zusammengestellt.

In Abschnitt 1.1 werden gemäß Fadell und Neuwirth [16] Konfigurationsräume von Mengen von Punkten in zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten definiert und die Zopfgruppen als die Fundamentalgruppen dieser Konfigurationsräume. Ferner werden einige wichtige Eigenschaften der Konfigurationsräume behandelt, so die Faserungen der Konfigurationsräume und die Asphärizität der Konfigurationsräume zur komplexen Ebene.

In Abschnitt 1.2 werden die Gruppenbeschreibungen der Zopfgruppen zur komplexen Ebene mit Generatoren und definierenden Relationen angegeben, sowie die Artinschen Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen freier Gruppen.

In Abschnitt 1.3 wird kurz auf semidirekte Produkte von Zopfgruppen eingegangen.

1.1 Konfigurationsräume und Zopfgruppen

Es sei M eine zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Es seien Zahlen $m \in \mathbf{N}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ gegeben, sowie Mengen von n paarweise verschiedenen, fest gewählten Punkten in M:

$$\begin{aligned} Q_n &= \{z_{m+n}, z_{m+n-1} \ldots, z_{m+1}\}; \quad z_i \in M; i \neq j : z_i \neq z_j; \quad n > 0 \\ Q_0 &= \{\} \end{aligned}$$

Definition 1.1.1 Es sei $p \in \mathbf{N}$, $p \leq m$. Die Menge $X_{n,p}(M) \subset M^p$ aller p-Tupel paarweise verschiedener Punkte in $M \backslash Q_n$:

$$X_{n,p}(M) = \{(z_m, z_{m-1} \ldots, z_{m-p+1}); z_i \in M \backslash Q_n; i \neq j : z_i \neq z_j\}$$

ist der *Konfigurationsraum einer Menge von p geordneten Punkten in* $M \backslash Q_n$.

Man beachte, daß die n Punktierungen also, beginnend mit z_{m+1}, aufwärts und die Punkte des p-Tupels, beginnend mit z_m, abwärts gezählt werden.

Beispiel 1.1.2 Insbesondere sind:

$$\begin{aligned} X_{n,1}(M) &= \{(z_m); z_m \in M\backslash\{z_{m+n}, \ldots, z_{m+1}\}\} \\ X_{n,2}(M) &= \{(z_m, z_{m-1}); z_i \in M\backslash\{z_{m+n}, \ldots, z_{m+1}\}; z_m \neq z_{m-1}\} \\ X_{0,n}(M) &= \{(z_{m+n}, \ldots, z_{m+1}); z_i \in M; i \neq j : z_i \neq z_j\} \end{aligned}$$

Der Konfigurationsraum $X_{n,p}$ erhalte die von der Produkttopologie des p-fachen direkten Produkts $M \times \ldots \times M$ induzierte Topologie.

Da M zusammenhängend ist, ist auch $X_{n,p}(M)$ eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, siehe [19]. Die Menge aller p-Tupel von Punkten in $M\backslash Q_n$, wobei für mindestens zwei Indices $i \neq j$ gilt: $z_i = z_j$ kann man mit $diag((M\backslash Q_n)^p)$ bezeichnen, und $X_{n,p}(M)$ kann aus $(M\backslash Q_n)^p$ konstruiert werden durch Entfernung der Diagonalen. Deren Kodimension ist gleich der Dimension von $M\backslash Q_n$, also > 1, daher wird $(M\backslash Q_n)^p$ nach einer Verallgemeinerung des Jordanschen Kurvensatzes durch die Diagonale nicht zerlegt, und auch $X_{n,p}(M)$ ist zusammenhängend. Die Homotopiegruppen von $X_{n,p}(M)$ sind also unabhängig vom Basispunkt.

Definition 1.1.3 Die nichtpermutierte oder *reine Zopfgruppe von p Elementen auf* $M\backslash Q_n$ ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(X_{n,p}(M))$ des Konfigurationsraums $X_{n,p}(M)$.

Es sei S_p die symmetrische Gruppe von p Elementen. S_p wirkt oder operiert frei (von rechts) auf $X_{n,p}(M)$ durch Permutation der Koordinaten:

$$(z_m, \ldots, z_{m-p+1})\tau = (z_{m-p+\tau(p)}, \ldots, z_{m-p+\tau(1)}), \qquad \tau \in S_p$$

Diese Wirkung ist frei, da nur die identische Permutation die Elemente von $X_{n,p}$ invariant läßt.

Definition 1.1.4 Der Orbitraum der freien Wirkung von S_p auf $X_{n,p}$ bzw. die Menge aller p-Tupel paarweise verschiedener Punkte in $M\backslash Q_n$ modulo der p-Tupel, die sich nur durch Permutation der Koordinaten unterscheiden:

$$\begin{aligned} X_{n,[p]}(M) &= \{[z_m, \ldots, z_{m-p+1}]; z_i \in M\backslash Q_n, i \neq j : z_i \neq z_j\} = \\ &= X_{n,p}(M)/S_p \end{aligned}$$

ist der *Konfigurationsraum* $X_{n,[p]}(M)$ *einer Menge von p ungeordneten Punkten in* $M\backslash Q_n$.

Definition 1.1.5 Die permutierte *Zopfgruppe von p Elementen auf* $M\backslash Q_n$ ist definiert als die Fundamentalgruppe $\pi_1(X_{n,[p]}(M))$ des Konfigurationsraums $X_{n,[p]}(M)$.

Man hat eine Sequenz von Zopfgruppen, siehe [4], Satz 1.1.:

Satz 1.1.6 (Zopfgruppensequenz) *Es sei* $\pi_p : X_{n,p}(M) \to X_{n,[p]}(M)$ *die kanonische Projektion, definiert durch:*

$$\pi_p(z_m, \ldots, z_{m-p+1}) = [z_m, \ldots, z_{m-p+1}]$$

und es sei $\mu : \pi_1(X_{n,[p]}(M)) \to S_p$ der Homomorphismus, der jedem das Element $\alpha \in \pi_1(X_{n,[p]}(M))$ repräsentierenden Weg $\alpha(t) = (\alpha_m(t), \ldots, \alpha_{m-p+1}(t))$, $0 \leq t \leq 1$, die korrespondierende Permutation im Raum der geordneten p-Tupel zuordnet, nämlich:

$$\begin{pmatrix} \alpha_m(0) & \ldots & \alpha_{m-p+1}(0) \\ \alpha_m(1) & \ldots & \alpha_{m-p+1}(1) \end{pmatrix}$$

dann ist die folgende kurze Sequenz exakt:

$$1 \to \pi_1(X_{n,p}(M)) \xrightarrow{\pi_p^*} \pi_1(X_{n,[p]}(M)) \xrightarrow{\mu} S_p \to 1$$

Hierbei ist π_p^* der von π_p induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppen.

Im weiteren von Bedeutung ist der folgende Satz:

Satz 1.1.7 (Fadell-Neuwirth-Faserung) *Es seien $p \geq 2$ und $1 \leq r \leq p$. Die Projektion $\pi : X_{n,p}(M) \to X_{n,r}(M)$, definiert durch:*

$$\pi(z_m, \ldots, z_{m-p+1}) \quad = \quad (z_m, \ldots, z_{m-r+1})$$

ist eine Faserung mit der Faser $X_{n+r,p-r}(M)$.

Beweisidee. Wir folgen [5] und [19]. Man betrachte einen festen Punkt $(z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0) \in X_{n,r}(M)$ des Basisraums und beschreibe das Urbild dieses Punktes unter π:

$$\begin{aligned} &\pi^{-1}(z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0) = \\ &\quad = \quad \{(z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0, z_{m-r}, \ldots, z_{m-p+1}); z_i \in M \backslash Q_n; i \neq j : z_i \neq z_j\} \end{aligned}$$

Setzt man nun $Q_{n+r} = Q_n \cup \{z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0\}$, dann ist:

$$X_{n+r,p-r}(M) = \{(z_{m-r}, \ldots, z_{m-p+1}); z_i \in M \backslash Q_{n+r}; i \neq j : z_i \neq z_j\}$$

und es gibt einen Homöomorphismus $\chi : X_{n+r,p-r}(M) \to \pi^{-1}(z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0)$, definiert durch:

$$\chi(z_{m-r}, \ldots, z_{m-p+1}) = (z_m^0, \ldots, z_{m-r+1}^0, z_{m-r}, \ldots, z_{m-p+1})$$

Damit ist die typische Faserungseigenschaft gezeigt. □

Im weiteren werden wir ausschließlich den Fall betrachten, daß die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit die komplexe Ebene ist: $M = \mathbf{C}$.

Satz 1.1.8 (Fadell, Neuwirth) *Die Konfigurationsräume $X_{n,p}(\mathbf{C})$ sind asphärisch, d.h. es gilt: $\pi_i(X_{n,p}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$.*

Beweis. Der Beweis ist gemäß [4] und [19].
Es sei $n > 0$. Im Falle $p = 1$ haben alle Räume $X_{n,1}(\mathbf{C})$, $n > 0$, den Homotopietyp einer

Einpunktvereinigung von n 1-Sphären S^1, und sie sind daher asphärisch. Für ein $p > 1$ und $n > 0$ gelte die Behauptung. Man betrachte die Faserung:

$$X_{n+p,1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{i} X_{n,p+1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\pi} X_{n,p}(\mathbf{C})$$

Hierbei ist:

$$X_{n+p,1}(\mathbf{C}) = \{(z_{m-p}); z_{m-p} \in \mathbf{C} \backslash Q_{n+p}; Q_{n+p} = Q_n \cup \{z_m^0, \ldots, z_{m-p+1}^0\}\}$$

und die Inklusion $i : X_{n+p,1}(\mathbf{C}) \rightarrow X_{n,p+1}(\mathbf{C})$ ist definiert durch:

$$i(z_{m-p}) = \{(z_m^0, \ldots, z_{m-p+1}^0, z_{m-p}); z_i \in \mathbf{C} \backslash Q_n; i \neq j : z_i \neq z_j\}$$

Man betrachte nun die folgende exakte Sequenz, Teil der langen exakten Homotopiesequenz der Faserung:

$$\pi_i(X_{n+p,1}(\mathbf{C})) \xrightarrow{i^*} \pi_i(X_{n,p+1}(\mathbf{C})) \xrightarrow{\pi^*} \pi_i(X_{n,p}(\mathbf{C}))$$

Hierbei sind i^* und π^* die von der Inklusion i und der Projektion π induzierten Homomorphismen der Fundamentalgruppen. Nach Induktionsanfang gilt $\pi_i(X_{n+p,1}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$, nach Induktionsannahme $\pi_i(X_{n,p}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$, und folglich gilt auch $\pi_i(X_{n,p+1}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$.
Es sei nun $n = 0$. Man betrachte die Faserung:

$$X_{1,p+1}(\mathbf{C}) \xrightarrow{i} X_{0,p}(\mathbf{C}) \xrightarrow{\pi} X_{0,1}(\mathbf{C})$$

und die folgende exakte Sequenz:

$$\pi_i(X_{1,p+1}(\mathbf{C})) \xrightarrow{i^*} \pi_i(X_{0,p}(\mathbf{C})) \xrightarrow{\pi^*} \pi_i(X_{0,1}(\mathbf{C}))$$

Daß $\pi_i(X_{1,p+1}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$, wurde gerade gezeigt. Die Aussage $\pi_i(X_{0,1}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$ folgt, da $X_{0,1}(\mathbf{C})$ den trivialen Homotopietyp eines Punktes hat. Folglich gilt auch $\pi_i(X_{0,p}(\mathbf{C})) = 0$ für $i > 1$. $\square$

Das Resultat aus den Sätzen von Fadell und Neuwirth, das im weiteren benötigt wird, ist das folgende:

Korollar 1.1.9 *Für alle $p > r > 1$ und $n \in \mathbf{N}_0$ ist die folgende kurze Homotopiesequenz exakt:*

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{n+r,p-r}(\mathbf{C})) \xrightarrow{i^*} \pi_1(X_{n,p}(\mathbf{C})) \xrightarrow{\pi^*} \pi_1(X_{n,r}(\mathbf{C})) \rightarrow 1$$

Notation Wir setzen:

$$\begin{aligned} U_{n,m} &:= \pi_1(X_{n,m}(\mathbf{C})), \qquad n \neq 0 \\ P_n &:= \pi_1(X_{0,n}(\mathbf{C})) \end{aligned}$$

1.2 Gruppenbeschreibungen der Zopfgruppen

Man betrachte zunächst $X_{n,1}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}\backslash\{z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}\}$, d.h. die komplexe z_m-Ebene mit n Punktierungen. Man ordne die Punktierungen gemäß $z_{m+n} < \ldots < z_{m+1} < 0$, $z_i \in \mathbf{R}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, entlang der negativen reellen Achse an. Als Repräsentanten von Elementen $\gamma_{m,i}$ der Fundamentalgruppe $U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}(\mathbf{C}))$ seien vom Bezugspunkt z_m aus in mathematisch positivem Sinn um die Punkte z_i herum geführte Schleifen gewählt, vgl. Abbildung 1.1. Bekanntlich gilt:

Lemma 1.2.1 *Die Gruppe $U_{n,1}$ ist frei vom Rang n mit den Generatoren $\gamma_{m,i}$, wobei $i = m+1, \ldots, m+n$ ist:*

$$U_{n,1} = \langle \gamma_{m,i}; i = m+1, \ldots, m+n \rangle$$

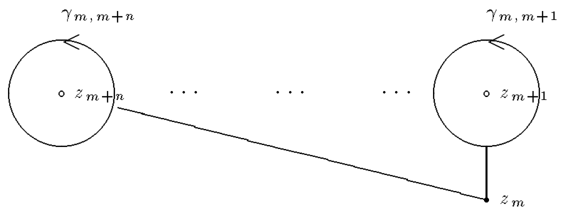


Abbildung 1.1: Generatoren der Fundamentalgruppe $\pi_1(X_{n,1}(\mathbf{C}))$

Weiter betrachte man $X_{0,n}(\mathbf{C})$, d.h. die Konfigurationen des n-Tupels $(z_{m+n}, \ldots, z_{m+1})$ mit paarweise verschiedenen Koordinaten in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$. Man ordne nun die Punkte gemäß $z_{m+n} < \ldots < z_{m+1} < 0$, $z_i \in \mathbf{R}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, entlang der negativen reellen Achse an. Als Repräsentanten von Elementen $\gamma_{i,j}$, $i, j = m+1, \ldots, m+n$, $i < j$, der reinen Zopfgruppe $P_n = \pi_1(X_{0,n}(\mathbf{C}))$ seien von den Punkten z_i aus beziehungsweise in mathematisch positivem Sinn um die Punkte z_j herum geführten Schleifen gewählt, vgl. Abbildung 1.2.

Satz 1.2.2 (Birman) *Die reine Zopfgruppe $P_n = \pi_1(X_{0,n}(\mathbf{C}))$ der Ebene hat eine Beschreibung mit den Generatoren*

$$\gamma_{i,j}, \qquad i, j = m+1, \ldots, m+n; \quad i < j$$

und den Relationen:

$$\gamma_{r,k}\gamma_{i,j} = \gamma_{i,j} \begin{cases} \gamma_{r,i}\gamma_{r,j}\gamma_{r,k}\gamma_{r,j}^{-1}\gamma_{r,i}^{-1} & r < k = i < j, r < i < k = j \\ [\gamma_{r,i}, \gamma_{r,j}]\,\gamma_{r,k}\,[\gamma_{r,i}, \gamma_{r,j}]^{-1} & r < i < k < j \\ \gamma_{r,k} & r < k < i < j, r < i < j < k \end{cases}$$

wobei $[\gamma_{r,i}, \gamma_{r,j}] = \gamma_{r,i}\gamma_{r,j}\gamma_{r,i}^{-1}\gamma_{r,j}^{-1}$.

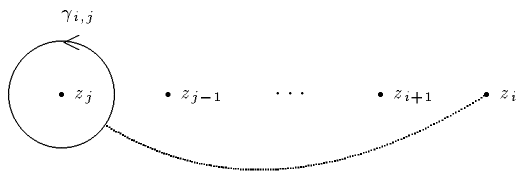


Abbildung 1.2: Generator $\gamma_{i,j}$ der reinen Zopfgruppe P_n

Beweisidee. Wir folgen Birman [5]. Die Gültigkeit der Relationen kann mit Hilfe der geometrischen Repräsentanten der Elemente von P_n gezeigt werden. Die Vollständigkeit der Relationen kann wie folgt induktiv bewiesen werden. Im Falle $n = 1$ hat man die triviale Gruppe. Im Falle $n = 2$ hat man die freie Gruppe $P_2 = \langle \gamma_{m+1,m+2} \rangle$. Es sei nun angenommen, die Gruppe P_n mit $n > 2$ erlaubt die behauptete Beschreibung. Angesichts der kurzen exakten Homotopiesequenz ist P_{n+1} eine Erweiterung von $U_{n,1}$ durch P_n:

$$1 \to U_{n,1} \xrightarrow{i^*} P_{n+1} \xrightarrow{\pi^*} P_n \to 1$$

und der Beweis kann wie folgt geführt werden: man wähle Repräsentanten von Nebenklassen der Gruppe P_{n+1} bezüglich der Untergruppe $U_{n,1}$, zeige, wie die Relatoren von P_n in die erweiterte Grupppe P_{n+1} liften, und daß die Wirkung der Repräsentanten der Nebenklassen auf die Generatoren von $\ker(\pi^*)$ durch die Relatoren in P_{n+1} beschrieben wird. Der Kern der Projektion, $\ker(\pi^*)$, ist bekannt: die Fundamentalgruppe $U_{n,1}$ der n-fach punktierten Ebene $\mathbf{C}$ mit den Generatoren $\gamma_{m,i}$, $i = m+1, \ldots, m+n$. Die Injektion $i^* : U_{n,1} \to P_{n+1}$ ist definiert durch:

$$i^*(\gamma_{m,i}) = \gamma_{m,i}, \qquad i = m+1, \ldots, m+n$$

Die Projektion $\pi^* : P_{n+1} \to P_n$ ist definiert durch:

$$\pi^*(\gamma_{i,j}) = \begin{cases} \gamma_{i,j} & i > m \\ 1 & i = m \end{cases}$$

Unter π^* projizieren also die Elemente $\gamma_{i,j}$, $i > m$, von P_{n+1} auf die korrespondierenden Elemente von P_n. Die Relationen dieser Elemente in P_n sind auch in P_{n+1} erfüllt, so daß es einen zu π^* rechtsinversen Homomorphismus gibt und die Erweiterung zerfällt. Die besagten Elemente können also als Repräsentanten von Nebenklassen von P_{n+1} bezüglich $U_{n,1}$ gewählt werden. Die Menge der Generatoren von P_{n+1} ist die Vereinigung der beiden Mengen von Generatoren, der Repräsentanten von Nebenklassen von P_{n+1} bezüglich $U_{n,1}$ und der Generatoren von $U_{n,1}$. Daß die definierenden Relationen von P_{n+1} die Wirkung der Repräsentanten der Nebenklassen auf die Generatoren von $\ker(\pi^*)$ ausdrücken, sieht man unmittelbar, setzt man in diesen Relationen, analog zu den obigen Relationen von P_n formuliert, $r = m$. $\square$

Bemerkung 1.2.3 (Umkehrung der Argumentation) Definiert man die Zopfgruppe P_{n+1} als abstrakte Gruppe mit Generatoren $\gamma_{i,j}$, $i, j = m, \ldots, m+n$, $i < j$, und mit definierenden Relationen, analog zu den obigen Relationen von P_n, so folgt die zerfallende kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow U_{n,1} \xrightarrow{i} P_{n+1} \xrightarrow{p} P_n \longrightarrow 1$$

Hierbei ist die Projektion p definiert durch: $p(\gamma_{i,j}) = \gamma_{i,j}$ für $i > m$ und $p(\gamma_{m,j}) = 1$.
Und zwar ist zum einen $P_n \subset P_{n+1}$, erzeugt von $\{\gamma_{i,j}\}$ mit $i \neq m$, und die Untergruppe P_n kann in P_{n+1} eingebettet werden. Zum anderen ist $U_{n,1} \subset P_{n+1}$ Normalteiler. Dies folgt aus den Relationen der Beschreibung von P_{n+1} für $r = m$. und schließlich ist $P_{n+1}/U_{n,1} \cong P_n$, denn der Quotient ist isomorph zur Gruppe, erzeugt von Elementen $\gamma_{i,j}$ mit $i \neq m$.

Satz 1.2.4 (Artin) *Die reine Zopfgruppe P_n hat ein treue Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $U_{n,1}$, d.h. die Abbildung $\phi : P_n \longrightarrow Aut(U_{n,1})$, definiert durch:*

$$\phi(\gamma_{i,j})(\gamma_{m,k}) = \begin{cases} \gamma_{m,i}\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}\gamma_{m,j}^{-1}\gamma_{m,i}^{-1} & k = i, j \\ [\gamma_{m,i}, \gamma_{m,j}]\,\gamma_{m,k}\,[\gamma_{m,i}, \gamma_{m,j}]^{-1} & i < k < j \\ \gamma_{m,k} & k < i, k > j \end{cases}$$

ist ein Monomorphismus.

Beweis. Zum Beweis, daß ϕ ein Homomorphismus von Gruppen ist, prüfe man, daß die Relatoren von P_n in $U_{n,1}$ den identischen Automorphismus induzieren. Man beachte dabei, daß für $\gamma, \gamma' \in P_n$ gilt: $\phi(\gamma\gamma') = \phi(\gamma')(\phi(\gamma))$.
Zum Beweis, daß $\mathrm{Kern}(\phi) = 1$, siehe [4], Corollar 1.8.3.

Bemerkung 1.2.5 Die treue Darstellung von P_n als $\mathrm{Aut}(U_{n,1})$ ist induziert durch die folgenden Relationen zwischen den Generatoren $\gamma_{m,j}$, $j = m+1, \ldots, m+n$ von $U_{n,1}$ und den Generatoren $\gamma_{i,j}$, $i, j = m+1, \ldots, m+n$, $i < j$, von P_n, die die Rechtswirkung von P_n auf $U_{n,1}$ beschreiben:

$$\gamma_{m,k}\gamma_{i,j} = \gamma_{i,j} \begin{cases} \gamma_{m,i}\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}\gamma_{m,j}^{-1}\gamma_{m,i}^{-1} & k = i, j \\ [\gamma_{m,i}, \gamma_{m,j}]\,\gamma_{m,k}\,[\gamma_{m,i}, \gamma_{m,j}]^{-1} & i < k < j \\ \gamma_{m,k} & k < i, k > j \end{cases}$$

Der Vollständigkeit halber sei hier auch die Wirkung der Inversen der Generatoren $\gamma_{i,j}$ von P_n auf $U_{n,1}$ angegeben:

$$\gamma_{m,k}\gamma_{i,j}^{-1} = \gamma_{i,j}^{-1} \begin{cases} \gamma_{m,j}^{-1}\gamma_{m,i}^{-1}\gamma_{m,k}\gamma_{m,i}\gamma_{m,j} & k = i, j \\ [\gamma_{m,j}^{-1}, \gamma_{m,i}^{-1}]\,\gamma_{m,k}\,[\gamma_{m,j}^{-1}, \gamma_{m,i}^{-1}]^{-1} & i < k < j \\ \gamma_{m,k} & k < i, k > j \end{cases}$$

Zur Gruppenbeschreibung der Zopfgruppe $B_n = \pi_1(X_{0,[n]}(\mathbf{C}))$ benötigt man die bekannte Gruppenbeschreibung der symmetrischen Gruppe:

Lemma 1.2.6 *Die symmetrische Gruppe S_n hat eine Beschreibung mit den Generatoren:*

$$\tau_i \qquad i = m+1, \ldots, m+n-1$$

und den Relationen:

$$\begin{aligned} \tau_i \tau_{i+1} \tau_i &= \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1} \\ \tau_i \tau_j &= \tau_j \tau_i \qquad \mid i-j \mid \geq 2 \\ \tau_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

Man betrachte nun $X_{0,[n]}(\mathbf{C})$, d.h. Konfigurationen des ungeordneten n-Tupels $[z_{m+n}, \ldots, z_{m+1}]$ mit paarweise verschiedenen Koordinaten in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$. Elemente der Fundamentalgruppe $B_n = \pi_1(X_{0,[n]}(\mathbf{C}))$ sind Elemente σ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$, geometrisch repräsentiert durch einander nicht schneidende Wege in $\mathbf{C}$, die beziehungsweise die Punkte z_i und z_{i+1} in mathematisch positivem Sinn vertauschen, siehe Abbildung 1.3.

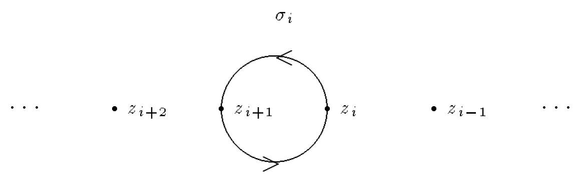


Abbildung 1.3: Generator σ_i der Zopfgruppe B_n

Satz 1.2.7 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Beschreibung mit den Generatoren:*

$$\sigma_i \qquad i = m+1, \ldots, m+n-1$$

und den definierenden Relationen:

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \qquad \mid i-j \mid \geq 2 \\ \gamma_{i,j} &= \sigma_i^{-1} \ldots \sigma_{j-1}^2 \ldots \sigma_i, \qquad i < j \end{aligned}$$

Beweisidee. Wir folgen Birman [5]. Die Gültigkeit der Relationen kann wieder mit Hilfe der geometrischen Repräsentanten der Elemente von B_n gezeigt werden. Die Vollständigkeit der Relationen kann wie folgt mit Hilfe der kurzen exakten Zopfgruppensequenzen bewiesen werden:

$$1 \to P_n \xrightarrow{\pi_p} B_n \xrightarrow{\mu} S_n \to 1$$

Die Gruppe B_n ist eine Erweiterung von P_n durch die symmetrische Gruppe S_n. Als Repräsentanten vom Nebenklassen in B_n bzgl. der Untergruppe P_n wähle man die Elemente $\sigma_i, i = 1, \ldots, n-1$,

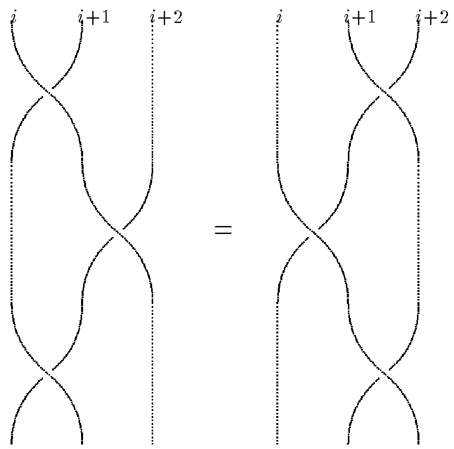


Abbildung 1.4: Definierende Relationen von B_n

die unter dem Homomorphismus μ auf Transpositionen abgebildet werden: $\mu(\sigma_i) = \tau_i$. Die Vereinigung der Menge der Generatoren $\gamma_{i,j}$, $i, j = m+1, \ldots, m+n$, $i < j$, des Kerns P_n der Erweiterung und der Menge der Elemente σ_i, liefert die Generatoren von B_n. Die Relationen in B_n enthalten offensichtlich die gelifteten Relationen von S_n, und man kann leicht zeigen, daß sie auch die Relationen von P_n enthalten, sowie die Relationen, die die Wirkung der Elemente σ_i auf den Kern P_n der Erweiterung ausdrücken. $\square$

Bemerkung 1.2.8 (Geometrische Realisierung in $\mathbf{R}^3$) Die bekannteste Darstellung der Elemente der Zopfgruppe B_n ist die Darstellung als Menge von Wegen in $\mathbf{R}^3$, als verflochtene Fäden, siehe beispielsweise [30]. Man betrachte in der Ebene $y = 0$ Parallelen zur x-Achse durch $z = 0$ und $z = 1$ und darauf Punkte $P_i = (i, 0, 0)$ und $P'_i = (i, 0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann kann ein Element $\sigma \in B_n$ durch eine Menge von n Wegen $(\sigma)_i(t)$ in $\mathbf{R}^3$, die einander nicht schneiden sollen, den verflochtenen Fäden, dargestellt werden: $(\sigma)_i(t) = (x_i(t), y_i(t), t)$, wobei $0 \leq t \leq 1$, $(\sigma)_i(0) = P_i$ und $(\sigma)_i(1) \in \{P'_1, \ldots, P'_n\}$. Siehe Abbildung 1.4. zur geometrischen Darstellung der definierenden Relationen $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ der Zopfgruppe B_n.

Satz 1.2.9 (Artin) *Die Zopfgruppe B_n hat ein treue Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $U_{n,1}$, d.h. die Abbildung $\phi : B_n \to Aut(U_{n,1})$, definiert durch*

$$\phi(\sigma_i)(\gamma_{m,k}) = \begin{cases} \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1} & k = i \\ \gamma_{m,i} & k = i+1 \\ \gamma_{m,k} & k \neq i, i+1 \end{cases}$$

ist ein Monomorphismus.

Beweis. Zum Beweis, daß ϕ ein Homomorphismus von Gruppen ist, prüfe man, daß die Relatoren von B_n in $U_{n,1}$ den identischen Automorphismus induzieren. Zum Beweis, daß $\mathrm{Kern}(\phi) = 1$, siehe [4], Corollar 1.8.3. □

Bemerkung 1.2.10 Die treue Darstellung von B_n als $\mathrm{Aut}(U_{n,1})$ ist induziert durch die folgenden Relationen zwischen den Generatoren $\gamma_{m,j}$, $j = m+1, \ldots, m+n$ von $U_{n,1}$ und den Generatoren σ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$, von B_n, die die Rechtswirkung von B_n auf $U_{n,1}$ beschreiben:

$$\gamma_{m,k}\sigma_i = \sigma_i \begin{cases} \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1} & k = i \\ \gamma_{m,i} & k = i+1 \\ \gamma_{m,k} & k \neq i, i+1 \end{cases}$$

Die Wirkung der Inversen der Generatoren σ_i von B_n auf $U_{n,1}$ ist:

$$\gamma_{m,k}\sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \begin{cases} \gamma_{m,i+1} & k = i \\ \gamma_{m,i+1}^{-1}\gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1} & k = i+1 \\ \gamma_{m,k} & k \neq i, i+1 \end{cases}$$

1.3 Semidirekte Produkte der Zopfgruppen

Im weiteren werden semidirekte Produkte der Zopfgruppen wichtig sein.

Definition 1.3.1 Es seien G und U Gruppen, und es sei $\phi : G \to \mathrm{Aut}(U)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist das *semidirekte Produkt* $G \rtimes_\phi U$ das direkte Produkt $G \times U$ mit der Verknüpfung:

$$(\zeta_i, \gamma_i)(\zeta_j, \gamma_j) = (\zeta_i\zeta_j, \phi(\zeta_j)(\gamma_i)\gamma_j) \qquad \zeta_i, \zeta_j \in G; \quad \gamma_i, \gamma_j \in U$$

Notation Wir setzen für Elemente aus $G \rtimes_\phi U$ abkürzend:

$$(\zeta, \gamma) = \zeta\gamma, \qquad \zeta \in G; \quad \gamma \in U$$

Obige Verknüpfung ist dann:

$$\zeta_i\gamma_i\zeta_j\gamma_j = \zeta_i\zeta_j\phi(\zeta_j)(\gamma_i)\gamma_j, \qquad \zeta_i, \zeta_j \in G; \quad \gamma_i, \gamma_j \in U$$

Das semidirekte Produkt $G \rtimes_\phi U$ ist eine Gruppe, denn die obige Verknüpfung ist assoziativ, und zu jedem Element zu $(\zeta, \gamma) \in G \rtimes_\phi U$ existiert ein Inverses:

$$(\zeta, \gamma)(\zeta^{-1}, \phi(\zeta^{-1})(\gamma^{-1})) = (\mathbf{1}_G, \mathbf{1}_U), \qquad \zeta \in G; \quad \gamma \in U$$

bzw.:

$$\begin{aligned} \zeta\gamma\zeta^{-1}\phi(\zeta^{-1})(\gamma^{-1}) &= \zeta\zeta^{-1}\phi(\zeta^{-1})(\gamma)\phi(\zeta^{-1})(\gamma^{-1}) = \\ &= \mathbf{1}_G\mathbf{1}_U, \qquad \zeta \in G; \quad \gamma \in U \end{aligned}$$

Man hat für das semidirekte Produkt $G \rtimes_\phi U$ die folgende kurze exakte und zerfallende Sequenz:

$$1 \to U \xrightarrow{i^*} G \rtimes_\phi U \xrightarrow{\pi^*} G \to 1$$

Hierbei ist $i^*(\gamma) = (\mathbf{1}_G, \gamma)$ und $\pi^*(\zeta, \gamma) = \zeta$, und schließlich ist $j^*(\zeta) = (\zeta, \mathbf{1}_U)$ rechtsinvers zu π^*.

Lemma 1.3.2 *Die Gruppe P_{n+1} kann als semidirektes Produkt geschrieben werden:*

$$P_{n+1} = P_n \ltimes U_{n,1}$$

Beweis. Die kurze exakte Sequenz von Zopfgruppen:

$$1 \to U_{n,1} \xrightarrow{i^*} P_{n+1} \xrightarrow{\pi^*} P_n \to 1$$

zerfällt. □

Bemerkung 1.3.3 Iteration ermöglicht die Lösung des Wortproblems, d.h. des Problems einer eindeutigen Darstellung eines Worts in P_{n+1}:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n \ltimes U_{n,1} = \\ &= P_{n-1} \ltimes U_{n-1,1} \ltimes U_{n,1} = \\ &= \ldots = \\ &= U_{1,1} \ltimes U_{2,1} \ltimes \ldots \ltimes U_{n-1,1} \ltimes U_{n,1} \end{aligned}$$

Ein Wort in P_{n+1} kann als Produkt von Worten in P_n und $U_{n,1}$ geschrieben werden. Dies Verfahren kann für Worte in P_n wiederholt werden, und man gelangt zu einem eindeutigen Produkt, *Artins Normalform*, eines Wortes in P_{n+1} in Worten in freien Gruppen $U_{i,1}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\gamma = \gamma_{m+n-1}\gamma_{m+n-2}\cdots\gamma_{m+1}\gamma_m, \qquad \gamma \in P_n, \gamma_{m+i} \in U_{n-i,1}$$

Beschreibungen als semidirekte Produkte freier Gruppen existieren auch für die Zopfgruppen $U_{n,m}$, Untergruppen von P_{n+m}. Es gilt:

Lemma 1.3.4 *Die Gruppe $U_{n,m}$ kann als semidirektes Produkt freier Gruppen geschrieben werden:*

$$U_{n,m} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1} \ltimes \ldots \ltimes U_{n+m-2,1} \ltimes U_{n+m-1,1}$$

Beispiel 1.3.5 Die freie Gruppe $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n \rangle$ vom Rang n wirkt durch $\phi : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ (von rechts) als Gruppe von Automorphismen der freien Gruppe $U_{n+1,1} = \langle \gamma_{m-1,j}; j = m, \ldots, m+n \rangle$ vom Rang $n+1$. Das semidirekte Produkt $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ ist die Gruppe mit den Generatoren γ_{k,j_k}, wobei $k = m-1, m$ und $j_k = k+1, \ldots, m+n$, und den definierenden Relationen:

$$\begin{aligned} \gamma_{m-1,k}\gamma_{m,j} &= \gamma_{m,j}\,\phi(\gamma_{m,j})(\gamma_{m-1,k}) = \\ &= \gamma_{m,j} \left\{ \begin{array}{cc} \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m-1,k}\gamma_{m-1,j}^{-1}\gamma_{m-1,m}^{-1} & k = m < j, m < k = j \\ [\gamma_{m-1,m}, \gamma_{m-1,j}]\,\gamma_{m-1,k}\,[\gamma_{m-1,m}, \gamma_{m-1,j}]^{-1} & m < k < j \\ \gamma_{m-1,k} & k < m, j < k \end{array} \right. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Lineare Darstellungen der Zopfgruppe

In diesem Kapitel werden 1-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert und deren Homologiegruppen bestimmt. Ferner werden Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und der Homologiegruppen dieser Komplexe betrachtet.

In Abschnitt 2.1 werden zunächst 1-dimensionale Kettenkomplexe $C(\tilde{X}_{n,1}(\mathbf{C}))$ in der universellen Überlagerung der Konfigurationsräume $X_{n,1}(\mathbf{C})$ konstruiert. Diese Komplexe sind azyklische Komplexe freier Linksmoduln zu $U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}(\mathbf{C}))$ und liefern eine freie Auflösung (der Länge 1) von $\mathbf{Z}$ für $U_{n,1}$.

In Abschnitt 2.2 werden 1-dimensionale äquivariante Komplexe $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}(\mathbf{C}))$ behandelt, wobei G ein Rechtsmodul zu $U_{n,1}$ ist. Sodann werden unter der Voraussetzung der Generizität oder der Trivialität des Koeffizientenmoduls G die Homologiegruppen dieser 1-dimensionalen äquivarianten Komplexe bestimmt.

In Abschnitt 2.3 werden Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und insbesondere der Homologiegruppen des äquivarianten Komplexes bestimmt, die man mit Hilfe des freien Differentialkalküls gewissermaßen als Linearisierungen der Artinschen Automorphismendarstellungen erhält. Außer den Darstellungen der Zopfgruppen im Falle eines beliebigen generischen Koeffizientenmoduls G werden als Beispiele kurz die bekannten Gassner- und Burau-Darstellungen behandelt, die im Falle gewisser explizit gewählter Koeffizientenmoduln resultieren.

Ein weiteres Beispiel behandelt eine natürliche Anwendung zu hypergeometrischen Integralen. Typische explizite Koeffizientenmoduln der Komplexe werden durch die Monodromieeigenschaften komplexer Funktionen der Art $\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\lambda_{i,j}}$ geliefert, und die Darstellungen der Zopfgruppen als Automorphismen der Homologiegruppe der äquivarianten Komplexe können als Monodromiegruppen derjenigen Funktionen interpretiert werden, die durch Integration über Homologiezyklen entstehen, also als Monodromiegruppen hypergeometrischer Integrale.

2.1 1-dimensionale Kettenkomplexe in universeller Überlagerung

2.1.1 Komplex in der Ebene

Die n-fach punktierte Ebene $X_{n,1}(\mathbf{C}) = \mathbf{C} - \{z_{m+1}, \ldots, z_{m+n}\}$ mit (freier) Fundamentalgruppe $U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}; z_m) = \langle \gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n} \rangle$ vom Rang n hat den Homotopietyp einer Einpunktvereinigung von n 1-Sphären mit dem gemeinsamen Punkt z_m. Man betrachte den assoziierten 1-dimensionalen endlichen zellulären Kettenkomplex. Vgl. dazu Abbildung 1.1.

Definition 2.1.1 Der 1-dimensionale Kettenkomplex $C(X_{n,1})$ ist wie folgt definiert. Die Kettengruppe $C_0(X_{n,1})$ werde als freie (additive) abelsche Gruppe erzeugt vom Bezugspunkt z_m, die Kettengruppe $C_1(X_{n,1})$ von der Menge $\{\gamma_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n\}$ der Generatoren von $\pi_1(X_{n,1}; z_m)$. Die Randhomomorphismen $\partial_{(l)} : C_l(X_{n,1}) \to C_{l-1}(X_{n,1})$, $l = 0, 1$, seien:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)} z_m &= 0 \\ \partial_{(1)} \gamma_{m,j} &= 0, \qquad j = m+1, \ldots, m+n \end{aligned}$$

Hierbei entsprechen die Generatoren $\gamma_{m,j}$ der (additiven) Kettengruppe $C_1(X_{n,1})$ bijektiv den (ebenso bezeichneten) Generatoren $\gamma_{m,j}$ der (multiplikativen) Fundamentalgruppe $U_{n,1}$ siehe [39], Satz 5.5.14.

Nach Definition des Komplexes $C(X_{n,1})$ hat man also:

Lemma 2.1.2 *Es gilt:*

$$C_0(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}, \qquad C_1(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}^n = \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{n}$$

Es folgt unmittelbar:

Lemma 2.1.3 *Es gilt:*

$$H_0(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}, \qquad H_1(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}^n$$

Beweis. Es gilt: $\mathrm{Kern}(\partial_{(l)}) = C_l(X_{n,1})$, $l = 0, 1$. Daher hat man für die Homologie $H_l(X_{n,1}) := \mathrm{Kern}(\partial_{(l)})/\mathrm{Bild}(\partial_{(l+1)})$ des Komplexes: $H_l(X_{n,1}) = C_l(X_{n,1})$, $l = 0, 1$. □

2.1.2 Komplex in universeller Überlagerung

Der Lift des Komplexes $C(X_{n,1})$ in die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$ von $X_{n,1}$ liefert einen Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ als freien Linksmodul über $\mathbf{Z}U_{n,1}$, dem Gruppenring der Gruppe $U_{n,1}$ der Decktransformationen von $\tilde{X}_{n,1}$ bzgl. des Rings $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen.

Es sei also $p : \tilde{X}_{n,1} \to X_{n,1}$ die universelle Überlagerung der punktierten Ebene $X_{n,1}$. Der Komplex $C(X_{n,1})$ liftet isomorph zu einem Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$, siehe [39], Satz 6.8.1. Man wähle einen festen Punkt $\tilde{z}_m$ in der Faser $p^{-1}(z_m)$ über dem Bezugspunkt z_m. Die Gruppe $\Pi(\tilde{X}_{n,1}; \tilde{z}_m)$

der Decktransformationen ist dann isomorph zur Fundamentalgruppe $U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}; z_m)$ des Basisraums, und sie permutiert jeweils die Ketten in der Faser $p^{-1}(c)$ über einer Kette $c \in C(X_{n,1})$. Wählt man also eine feste Kette $\tilde{c} \in C(\tilde{X}_{n,1})$ über jeder Kette $c \in C(X_{n,1})$, dann sind $\alpha\tilde{c}$, $\alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ die Ketten in $C(\tilde{X}_{n,1})$. Die Kettengruppen zu $C(\tilde{X}_{n,1})$ sind somit freie Linksmoduln zu $\mathbf{Z}U_{n,1}$.

Definition 2.1.4 Sei R ein nichtkommutativer Ring mit Eins $\mathbf{1}_R$. Ein *R-Linksmodul* ist eine kommutative Gruppe C, zusammen mit einer Multiplikationsabbildung:

$$R \times C \to C \qquad (\alpha, c) \to \alpha c$$

die bilinear und assoziativ ist, d.h. für alle $\alpha, \alpha' \in R$ und $c, c' \in C$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha')c &= \alpha c + \alpha' c & \qquad (\alpha\alpha')c &= \alpha(\alpha' c) \\ \alpha(c + c') &= \alpha c + \alpha c' & \mathbf{1}_R c &= c \end{aligned}$$

Ein R-Linksmodul C ist *frei*, wenn jedes Element eindeutig als endliche Linearkombination $\sum_i \alpha_i c_i$, $\alpha_i \in R$, $c_i \in C$ darstellt werden kann.

Es sei $\tilde{\gamma}$ die Liftung $L_p(\gamma; \tilde{z}_m)$ eines Weges $\gamma \in U_{n,1}$ in die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$, die im Punkt $\tilde{z}_m$ beginnt.

Definition 2.1.5 Der 1-dimensionale Kettenkomplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ ist als freier Linksmodul zu $\mathbf{Z}U_{n,1}$ wie folgt definiert. Die Kettengruppe $C_0(\tilde{X}_{n,1})$ werde erzeugt vom Punkt $\tilde{z}_m$, die Kettengruppe $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ von der Menge $\{\tilde{\gamma}_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n\}$ der Liftungen der Generatoren von $U_{n,1}$. Die Randhomomorphismen $\partial_{(q)} : C_q(\tilde{X}_{n,1}) \to C_{q-1}(\tilde{X}_{n,1})$, $q = 0, 1$, seien Modulhomomorphismen:

$$\partial_{(q)}(\alpha\tilde{c}_q) = \alpha\partial_{(q)}(\tilde{c}_q), \qquad \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}; \tilde{c}_q \in C_q(\tilde{X}_{n,1})$$

mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)}\tilde{z}_m &= 0 \\ \partial_{(1)}\tilde{\gamma}_{m,i} &= (1 - \gamma_{m,i})\tilde{z}_m \end{aligned}$$

Nach Definition des Komplexes $C(X_{n,1})$ hat man also:

Lemma 2.1.6 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} C_0(\tilde{X}_{n,1}) &\cong \mathbf{Z}U_{n,1} \\ C_1(\tilde{X}_{n,1}) &\cong (\mathbf{Z}U_{n,1})^n = \underbrace{\mathbf{Z}U_{n,1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}U_{n,1}}_{n} \end{aligned}$$

wobei die Isomorphismen gegeben sind durch:

$$\begin{aligned} \alpha\tilde{z}_m &\to \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1} \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \tilde{\gamma}_{m,m+j} &\to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbf{Z}U_{n,1})^n \end{aligned}$$

Daß die Projektion p auch für die 1-Ketten $\tilde{\gamma}_{m,i}$, deren Rand als Koeffizienten Elemente von $\mathbf{Z}U_{n,1}$ enthält, eine Kettenabbildung ist, folgt mit der definierenden Eigenschaft der Gruppe $U_{n,1}$ der Decktransformationen, nämlich: $p\,\gamma = p$, $\gamma \in U_{n,1}$. Das folgende Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{array}{lcl} C_1(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{p} & C_1(X_{n,1}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ C_0(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{p} & C_0(X_{n,1}) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ 0 & & 0 \end{array}$$

Bemerkung 2.1.7 (Ableitung einer Gruppe) Die Liftung $\tilde{\gamma}$ eines als Produkt in Generatoren der Fundamentalgruppe gegebenen Weges $\gamma \in U_{n,1}$ kann entwickelt werden als lineare Kombination der Liftungen der Generatoren mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}U_{n,1}$, dem Gruppenring der Decktransformationen. Für $\gamma = \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1} \in U_{n,1}$ beispielsweise hat man:

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{m,i} + \gamma_{m,i}\tilde{\gamma}_{m,i+1}$$

Die Liftung ist somit ein verschränkter Homomorphismus der Gruppe $U_{n,1}$ in den $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmodul $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, eine sogenannte *Ableitung oder Differentiation* der Gruppe $U_{n,1}$.

Lemma 2.1.8 (Azyklizität) *Der Komplex* $(C(\tilde{X}_{n,1})$ *ist azyklisch, d.h. es gilt:*

$$H_1(\tilde{X}_{n,1}) \cong 0, \qquad H_0(\tilde{X}_{n,1}) \cong \mathbf{Z}$$

Beweis. Nach Definition des Komplexes folgt unmittelbar, daß: $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}) = 0$. Weiter werden im Quotienten von $\mathrm{Kern}(\partial_{(0)})$ nach $\mathrm{Bild}(\partial_{(1)})$ alle 0-Ketten identifiziert durch: $\tilde{z}_m = \gamma\,\tilde{z}_m$ für alle Generatoren γ von $U_{n,1}$, und es folgt: $\mathrm{Kern}(\partial_{(0)})/\mathrm{Bild}(\partial_{(1)}) \cong \mathbf{Z}$. □

Man betrachte nun anstelle des Randhomomorphismus $\partial_{(0)} : C_0(\tilde{X}_{n,1}) \to 0$ die sogenannte Augmentationsabbildung.

Definition 2.1.9 Die *Augmentation* $\varepsilon : C_0(\tilde{X}_{n,1}) \cong \mathbf{Z}U_{n,1} \to \mathbf{Z}$ ist definiert durch:

$$\varepsilon\left(\sum_i n_i\gamma_i\right) = \sum_i n_i, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \gamma_i \in U_{n,1}$$

Lemma 2.1.10 *Der augmentierte Komplex zu* $C(\tilde{X}_{n,1})$ *ist eine freie Auflösung von* $\mathbf{Z}$ *über* $\mathbf{Z}U_{n,1}$.

Beweis. Der Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein azyklischer Komplex freier $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Moduln, daher eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U_{n,1}$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul betrachtet wird. Die folgende 0-Sequenz freier $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Moduln ist also exakt:

$$0 \to C_1(\tilde{X}_{n,1}) \xrightarrow{\partial_{(1)}} C_0(\tilde{X}_{n,1}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

Exaktheit bei $C_0(\tilde{X}_{n,1}) \cong \mathbf{Z}U_{n,1}$ kann man auch unmittelbar wie folgt einsehen. Kern(ε) besteht aus Elementen $1-\gamma$, $\gamma \in U_{n,1}$. Diese Elemente haben einen eindeutigen Ausdruck der Form:

$$1-\gamma \quad = \quad \sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j(1-\gamma_{m,j}) \qquad \alpha_j \in \mathbf{Z}U_{n,1}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} \alpha_j(1-\gamma_{m,j}) \quad = \quad \partial_{(1)}\left(\sum_{j=m}^{m+n} \alpha_j\,\tilde{\gamma}_{m,j}\right)$$

Damit hat man gezeigt, daß: Kern(ε) = Bild$(\partial_{(1)})$. □

2.2 1-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe

Im folgenden werden Tensorprodukte der azyklischen Komplexe $C(\tilde{X}_{n,1})$ mit einem Rechtsmodul zum Gruppenring $\mathbf{Z}U_{n,1}$ der Gruppe der Decktransformationen von $\tilde{X}_{n,1}$ betrachtet. Die resultierenden sogenannten äquivarianten Komplexe sind nicht mehr azyklisch.

2.2.1 Definition 1-dimensionaler äquivarianter Kettenkomplexe

Es sei also $\mathbf{Z}U_{n,1}$ der Gruppenring der freien Gruppe $U_{n,1}$ bzgl. des Rings $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen und G ein beliebiger $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul.

Definition 2.2.1 Sei R ein nichtkommutativer Ring mit Eins $\mathbf{1}_R$. Ein *R-Rechtsmodul* ist eine kommutative Gruppe G, zusammen mit einer Multiplikationsabbildung:

$$G \times R \to G \qquad\qquad (g,\alpha) \to g\alpha$$

die bilinear und assoziativ ist, d.h. für alle $\alpha, \alpha' \in R$ und $g, g' \in G$ gilt:

$$\begin{array}{rclcrcl} g(\alpha+\alpha') & = & g\alpha c + g\alpha' & \qquad & g(\alpha\alpha') & = & (g\alpha)\alpha' \\ (g+g')\alpha & = & g\alpha + g'\alpha & & g\mathbf{1}_R & = & g \end{array}$$

Beispiel 2.2.2 Es sei G eine kommutative Gruppe. Dann induziert ein Gruppenhomomorphismus $\Phi : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G)$ einen (ebenso bezeichneten) Ringhomomorphismus $\Phi : \mathbf{Z}U_{n,1} \to \mathrm{End}(G)$, und G ist ein $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul durch die Definition: $g\alpha = \Phi(\alpha)(g)$, $g \in G$, $\alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}$.

Der $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul G und der $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmodul $C(\tilde{X}_{n,1})$ sind auch $\mathbf{Z}$-Moduln, da der Ring $\mathbf{Z}$ als Unterring in $\mathbf{Z}U_{n,1}$ eingebettet werden kann durch die Abbildung $n \to n \cdot 1$, $n \in \mathbf{Z}$, $1 \in U_{n,1}$. Ebenso ist das Tensorprodukt $G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ der beiden kommutativen Gruppen G und $C(\tilde{X}_{n,1})$ ein $\mathbf{Z}$-Modul.

Definition 2.2.3 Es sei ein $\mathbf{Z}$-Submodul des $\mathbf{Z}$-Moduls $G \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ definiert, und zwar durch die Relation:

$$g \otimes_{\mathbf{Z}} \alpha\tilde{c} \quad = \quad g\alpha \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}, \qquad g \in G, \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}, c \in C(X_{n,1})$$

Das *Tensorprodukt* $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ des $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmoduls G und und des $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmoduls $C(\tilde{X}_{n,1})$ ist dann der Quotient des $\mathbf{Z}$-Moduls $G \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ bezüglich dieses Submoduls:

$$G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) = G \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) / \sim$$

Definition 2.2.4 Es sei G ein Rechtsmodul zu $\mathbf{Z}U_{n,1}$. Der *äquivariante Komplex* $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ *mit Koeffizienten in* G ist definiert durch die Ketten:

$$g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \alpha\tilde{c} = g\alpha \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{c}, \qquad g \in G, \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}, \tilde{c} \in C(\tilde{X}_{n,1})$$

und durch die Randhomomorphismen $\partial_{(q)} : G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_q(\tilde{X}_{n,1}) \to G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_{q-1}(\tilde{X}_{n,1})$, $q = 0, 1$, die mit den Elementen $g \in G$ vertauschen:

$$\partial_{(q)}(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \alpha\tilde{c}_q) \quad = \quad g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \alpha\partial_{(q)}(\tilde{c}_q)$$

Lemma 2.2.5 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_0(\tilde{X}_{n,1}) \quad &\cong \quad G \\ G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1}) \quad &\cong \quad G^n = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n} \end{aligned}$$

Beweis. Wegen $C_0(\tilde{X}_{n,1}) \cong \mathbf{Z}U_{n,1}$ ist:

$$G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_0(\tilde{X}_{n,1}) \quad \cong \quad G$$

durch die Abbildung:

$$g \otimes \tilde{z}_m \quad \to \quad g \in G$$

Bezeichnet man mit $(C_1(\tilde{X}_{n,1}))_j$ den von der 1-Kette $\tilde{\gamma}_{m,m+j}$ erzeugten $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Submodul von $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, so ist $(C_1(\tilde{X}_{n,1}))_j \cong \mathbf{Z}U_{n,1}$ und:

$$G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} (C_1(\tilde{X}_{n,1}))_j \quad \cong \quad G$$

durch:

$$g_j \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j} \quad \to \quad g_j \in G$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1}) &\cong G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} (\oplus_{j=1}^n (C_1(\tilde{X}_{n,1}))_j) \cong \\ &\cong \oplus_{j=1}^n (G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1}))_j) \cong \\ &\cong G^n = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n} \end{aligned}$$

durch die Abbildung:

$$\sum_{j=1}^{m} g_j \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j} \quad \to \quad (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$$

Jedes Element der Kettengruppe $G \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{j=1}^m g_j \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j}$. $\square$

Bemerkung 2.2.6 (Homologie mit lokalen Koeffizienten) Der Komplex $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ in der universellen Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$ mit Koeffizienten in einem $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul G gestattet eine äquivalente Formulierung als Komplex $C(X;\mathcal{G})$ in $X_{n,1}$ mit Koeffizienten in einem sogenannten Bündel $\mathcal{G}$ von lokalen Gruppen auf $X_{n,1}$. Man bildet ein Bündel $\mathcal{G}$ von lokalen Gruppen auf $X_{n,1}$, indem man jedem Punkt $z \in X_{n,1}$ eine Gruppe $G(z)$ zuordnet und jeder Homotopieklasse von Wegen einen Homomorphismus der Gruppen im Anfangspunkt und im Endpunkt der Wege. Ein solches Bündel wird beispielsweise durch eine Darstellung $U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G)$ der Fundamentalgruppe von $X_{n,1}$ geliefert, wenn $G = G(z)$ für alle $z \in X_{n,1}$. Wählt man den $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul G als lokale Gruppe $G(z_m)$ im Bezugspunkt z_m, dann ist nach einem Satz von Eilenberg die äquivariante Homologie der universellen Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$ mit Koeffizienten in $G(z_m)$ isomorph zur Homologie von $X_{n,1}$ mit Koeffizienten im Bündel $\mathcal{G}$ lokaler Gruppen auf $X_{n,1}$, d.h.: $H(G(z_m) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) \cong H(X_{n,1};\mathcal{G})$. Eine axiomatische Behandlung dieser *Komplexe mit lokalen Koeffizienten* findet man bei Eilenberg [15] oder Whitehead [42].

2.2.2 Eigenschaften des Koeffizientenmoduls

Die Homologie des Komplexes $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ hängt ab von Eigenschaften des Koeffizientenmoduls G. Im folgenden sei G ein $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul, induziert durch einen Gruppenhomomorphismus $\Phi_g : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G)$, wobei $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n \rangle$. Man unterscheide triviale und generische Moduln G.

Definition 2.2.7 Der $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul G ist *trivial*, wenn für alle $\gamma \in \Gamma$, $\Gamma = \{\gamma_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,1}$, gilt:

$$\Phi_g(\gamma)(g) = g, \qquad g \in G$$

bzw. wenn gilt:

$$(1 - \gamma) \in \mathrm{Kern}(\Phi_g)$$

Im weiteren werden in der Regel generische $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Moduln G betrachtet.

Definition 2.2.8 Der $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul G ist *generisch* bzgl. $U_{n,1}$, wenn für alle $\gamma \in \Gamma$, $\Gamma = \{\gamma_{m,j}\,; j = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,1}$, die Elemente $(1-\gamma) \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ als Endomorphismen von G invertierbar sind:

$$\exists\, [\Phi_g(1-\gamma)]^{-1} \in \mathrm{End}(G)$$

Beispiel 2.2.9 Der Modul $G = \mathbf{C}$, gegeben durch die Multiplikationsabbildung:

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{C} \times \mathbf{Z}U_{n,1} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (1, \gamma_{m,j}) & \rightarrow & e^{2\pi i \lambda_{m,j}}, \qquad \lambda_{m,j} \in \mathbf{R} \end{array}$$

ist generisch, wenn:

$$\lambda_{m,j} \notin \mathbf{Z}, \qquad j = m+1, \ldots, m+n$$

2.2.3 Homologie des äquivarianten Komplexes

Homologie des Komplexes mit trivialem Koeffizientenmodul

Im Falle eines trivialen $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Moduls G erhält man aus der äquivarianten Homologie wieder die gewöhnliche Homologie:

Lemma 2.2.10 *Ist G trivialer $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul, so gilt:*

$$H(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) \;\; \cong \;\; H(G \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1}))$$

Beweis. Für alle $g \in G$, $\gamma \in U_{n,1}$ und $\tilde{c} \in C(\tilde{X}_{n,1})$ ist $g \otimes \gamma\tilde{c} = g \otimes \tilde{c} \in G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$. Daher gibt es zu jeder Kette $g \otimes c \in G \otimes C(X_{n,1})$ genau eine Kette $g \otimes \tilde{c} \in G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ mit $p(\tilde{c}) = c$. □

Satz 2.2.11 *Es gilt:*

$$\begin{array}{rcl} H_1(G \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1})) & \cong & G^n \\ H_0(G \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1})) & \cong & G \end{array}$$

Beweis. In diesem Fall sind alle Ketten Zyklen: $H_q(G \otimes C(X_{n,1})) = G \otimes C_q(X_{n,1})$, und mit $C_0(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}$ und $C_1(X_{n,1}) \cong \mathbf{Z}^n$ folgt die Behauptung. □

Beispiel 2.2.12 Im Falle $G = \mathbf{Z}$ erhält man wieder $H(X_{n,1}; \mathbf{Z}) = H(\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1}))$. Die *Betti-Zahlen* $b_q(X_{n,1}) = \mathrm{Rang}(H_q(X_{n,1}; \mathbf{Z}))$ von $X_{n,1}$ sind also: $b_0(X_{n,1}) = 1$ und $b_1(X_{n,1}) = n$, und die *Euler-Charakteristik* $\chi(X_{n,1}) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j b_j(X_{n,1})$ lautet: $\chi(X_{n,1}) = 1 - n$.

Homologie des Komplexes mit generischem Koeffizientenmodul

Ist der Koeffizientenmodul G des Komplexes $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ generisch bzgl. $U_{n,1}$, so sind Ketten wohldefiniert, die Endomorphismen $[\Phi_g(1-\gamma_{m,j})]^{-1}$ von G enthalten, die sich gegen die unter den Randhomomorphismen auftretenden Endomorphismen aufheben.

Lemma 2.2.13 (Randformel) *Es gilt für alle $g \in G$:*

$$\partial_{(1)}\left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,i}\right) \quad = \quad g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{z}_m$$

Beweis. Man hat:

$$\begin{aligned}
\partial_{(1)}\left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,i}\right) &= [\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} (1-\gamma_{m,i})\tilde{z}_m = \\
&= \Phi_g(1-\gamma_{m,i})\left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g)\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{z}_m = \\
&= g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{z}_m
\end{aligned}$$

mittels der charakteristischen Eigenschaft des Modultensorprodukts. □

Es folgt unmittelbar:

Lemma 2.2.14 (1-Zyklen) *Es gilt für alle $g \in G$:*

$$\partial_{(1)}\left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,i} - [\Phi_g(1-\gamma_{m,j})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,j}\right) \quad = \quad 0$$

Zur Abkürzung und zur Vereinfachung der Rechnungen ersetzen wir im Falle eines generischen $U_{n,1}$-Moduls G den Komplex $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ durch einen isomorphen Komplex mit einfachen Randhomomorphismen.

Definition 2.2.15 Es sei K der 1-dimensionale formale Kettenkomplex, definiert als freier Linksmodul zu $\mathbf{Z}U_{n,1}$ mit den Kettengruppen K_0, erzeugt von $\tilde{z}_m$, und K_1, erzeugt von der Menge $\{e_j; j = m+1, \ldots, m+n\}$, und mit Randhomomorphismen $\partial_{(q)} : K_q \to K_{q-1}$, $q = 0, 1$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\partial_{(0)}(\tilde{z}_m) &= 0 \\
\partial_{(1)}(e_j) &= \tilde{z}_m, \qquad j = m+1, \ldots, m+n
\end{aligned}$$

Und für einen generischen $U_{n,1}$-Modul G sei $G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K$ der 1-dimensionale formale äquivariante Komplex mit Ketten $g \otimes k_q$, $g \in G$, $k_q \in K_q$ und Rand $\partial_{(q)}(g \otimes k_q) = g \otimes \partial_q(k_q)$.

Lemma 2.2.16 *Für einen generischen $U_{n,1}$-Modul G gibt es einen Isomorphismus von Kettenkomplexen:*

$$G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \cong G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K$$

der für 1-Ketten definiert ist durch:

$$\mu\left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i}\right) \quad = \quad g \otimes e_i, \qquad [\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i} \in G \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$$

wobei $i = m+1, \ldots, m+n$ ist, und der für 0-Ketten offensichtlich ist.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar mit Hilfe der Randformel und der Definition des formalen Komplexes. Die Abbildung μ vertauscht mit dem Randhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \partial_1 \, \mu \left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i} \right) &= \partial_1(g \otimes e_i) = g \otimes \tilde{z}_m \\ \mu \, \partial_1 \left([\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i} \right) &= \mu(g \otimes \tilde{z}_m) = g \otimes \tilde{z}_m \end{aligned}$$

und sie ist bijektiv. □

Wir werden im weiteren also im Falle eines generischen Koeffizientenmoduls den Komplex $G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ mit dem formalen Komplex identifizieren und wegen der einfachen Randhomomorphismen in Rechnungen dessen formale Ketten verwenden.

Satz 2.2.17 *Ist G generischer $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul, so gilt:*

$$\begin{aligned} H_1(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong G^{n-1} = \underbrace{G \oplus \ldots \oplus G}_{n-1} \\ H_0(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong 0 \end{aligned}$$

Beweis. Ist G generisch bzgl. $U_{n,1}$, so definiert die Abbildung:

$$(g_1, \ldots, g_n) \quad \longrightarrow \quad \left([\Phi_g(1-\gamma_{m,m+1})]^{-1}(g_1), \ldots, [\Phi_g(1-\gamma_{m,m+n})]^{-1}(g_n) \right) \in G^n$$

einen Automorphismus von G^n. Jedes Element der Kettengruppe $G \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} [\Phi_g(1-\gamma_{m,m+j})]^{-1}(g_j) \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j}, \qquad g_j \in G$$

bzw. eine eindeutige Darstellung der Form

$$\sum_{j=1}^{n} g_j \otimes e_{m+j}, \qquad g_j \in G$$

Der Rand einer 1-Kette ist:

$$\partial_{(1)} \left(\sum_{j=1}^{n} g_j \otimes e_{m+j} \right) = \sum_{j=1}^{n} g_j \otimes \tilde{z}_m$$

d.h. eine 1-Kette ist ein 1-Zyklus unter der Bedingung:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j = 0$$

Nimmt man an, $g_n = -\sum_{j=1}^{n-1} g_j \neq 0$, so hat ein 1-Zyklus die Darstellung:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} g_j \otimes e_{m+j} - (\sum_{j=1}^{n-1} g_j) \otimes e_{m+n} &= \sum_{j=1}^{n-1} g_j \otimes (e_{m+j} - e_{m+n}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} (\sum_{k=1}^{j} g_k) \otimes (e_{m+j} - e_{m+j+1}) = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} h_j \otimes e_{m+j,m+j+1}\end{aligned}$$

mit $e_{m+j,m+j+1} = e_{m+j} - e_{m+j+1}$ und $h_j = (\sum_{k=1}^{j} g_k) \in G$. Es hat also jedes Element der Homologiegruppe $H_1(G \otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$, der Gruppe der Zyklen in der höchsten Dimension des Komplexes, eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \Big([\Phi_g(1-\gamma_{m,m+j})]^{-1} (h_j) \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j} - [\Phi_g(1-\gamma_{m,m+j+1})]^{-1} (h_j) \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+j+1} \Big)$$

bzw. eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{j=1}^{n-1} h_j \otimes e_{m+j,m+j+1}$, $h_j \in G$. Damit hat man durch:

$$\sum_{j=1}^{n-1} h_j \otimes e_{m+j,m+j+1} \quad \to \quad (h_1, \ldots, h_{n-1}) \in G^{n-1}$$

den behaupteten Isomorphismus: $H_1(G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) \cong G^{n-1}$.
Die Aussage $H_0(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) \cong 0$ folgt, da für generisches G alle 0-Ketten als Ränder von 1-Ketten vorkommen. □

2.3 Lineare Darstellungen der Zopfgruppen

Im weiteren werden lineare Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und insbesondere der Homologiegruppen des äquivarianten Komplexes bestimmt. Dazu wird zunächst mit Hilfe des freien Differentialkalküls gezeigt, wie die Zopfgruppen als Kettenabbildungen des Komplexes $C(\tilde{X}_{n,1})$ in der universellen Überlagerung wirken.

2.3.1 Freier Differentialkalkül

Zur Übersicht zum freien Differentialkalkül siehe Fox [17] und auch [5], [9], [27].

Definition 2.3.1 Eine *Differentiation* einer Gruppe U in einen $\mathbf{Z}U$-Linksmodul C ist ein verschränkter Homomorphismus $\Delta : U \to C$, d.h. eine Abbildung mit der Eigenschaft:

$$\Delta(\gamma_i\gamma_j) = \Delta(\gamma_i) + \gamma_i\Delta(\gamma_j), \qquad \gamma_i, \gamma_j \in U$$

Im folgenden sei U eine freie Gruppe vom Rang n mit den Generatoren γ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2.3.2 Für $U = \langle \gamma_i ; i = 1, \ldots, n \rangle$ sind die *partiellen Differentiale* $\frac{\delta}{\delta\gamma_j} : U \to \mathbf{Z}U$ definiert durch:

$$\frac{\delta\gamma_i}{\delta\gamma_j} = \delta_{i,j}, \qquad \frac{\delta\gamma_i^{-1}}{\delta\gamma_j} = \delta_{i,j}(-\gamma_i^{-1})$$

Für ein beliebiges $\gamma \in U$ ist das *totale Differential* $\Delta(\gamma)$ eindeutig bestimmt durch die Werte $\Delta(\gamma_i)$, $i = 1, \ldots, n$, auf den Generatoren von U.

Lemma 2.3.3 (Fundamentalformel des freien Differentialkalküls) *Für $\gamma \in U$, wobei $U = \langle \gamma_i ; i = 1, \ldots, n \rangle$ ist, gilt:*

$$\Delta(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta\gamma}{\delta\gamma_i} \Delta(\gamma_i)$$

Korollar 2.3.4 *Für $\sigma \in Aut(U)$, $U = \langle \gamma_i ; i = 1, \ldots, n \rangle$, gilt:*

$$\Delta(\sigma(\gamma_i)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta\sigma(\gamma_i)}{\delta\gamma_j} \Delta(\gamma_i), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Definition 2.3.5 (Jacobi-Matrix) Für $\sigma \in \mathrm{Aut}(U)$, $U = \langle \gamma_i ; i = 1, \ldots, n \rangle$, heißt die $(n \times n)$-Matrix:

$$J(\sigma) = \left(\frac{\delta\sigma(\gamma_i)}{\delta\gamma_j} \right), \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

mit Einträgen in $\mathbf{Z}U$ die *Jacobi-Matrix* des Automorphismus σ.

Lemma 2.3.6 (Kettenregel des freien Differentialkalküls) *Für $\sigma, \tau \in Aut(U)$, $U = \langle \gamma_i ; i = 1, \ldots, n \rangle$, gilt:*

$$\begin{aligned} \Delta(\tau(\sigma(\gamma_i))) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\tau(\sigma(\gamma_i))}{\delta\gamma_k} \Delta(\gamma_i), \qquad i = 1, \ldots, n \\ \frac{\delta\tau(\sigma(\gamma_i))}{\delta\gamma_k} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta\tau(\sigma(\gamma_i))}{\delta\tau(\gamma_j)} \frac{\delta\tau(\gamma_j)}{\delta\gamma_k} \end{aligned}$$

Korollar 2.3.7 *Für $\sigma, \tau \in Aut(U)$ gilt:*

$$J(\sigma\tau) = \tau\left(J(\sigma)\right) J(\tau)$$

wobei $\tau\left(J(\sigma)\right) = \tau^{-1} J(\sigma) \tau$ das Bild von $J(\sigma)$ unter τ ist.

Insbesondere gilt also für den inversen Automorphismus:

$$J(\sigma^{-1}) = \sigma^{-1}\left(J^{-1}(\sigma)\right)$$

Bemerkung 2.3.8 Eine *Augmentation* ist ein Homomorphismus $\varepsilon : U \to \mathbf{Z}$, definiert durch:

$$\varepsilon(\gamma) = 1, \qquad \gamma \in U$$

Das Differential $\Delta_\varepsilon : U \to \mathbf{Z}U$, wobei $\mathbf{Z}U$ selbst als $\mathbf{Z}U$-Linksmodul mit der offensichtlichen Multiplikationsabbildung betrachtet wird, definiert durch:

$$\Delta(\gamma) = \varepsilon(\gamma) - \gamma = 1 - \gamma, \qquad \gamma \in U$$

heißt *Augmentationsdifferential.*
Der Kern der Erweiterung von ε auf $\mathbf{Z}U$ ist das *Augmentationsideal* $\mathbf{I}U$ von $\mathbf{Z}U$.

2.3.2 Liftung der Artinschen Darstellung der Zopfgruppe B_n

Man betrachte die Zopfgruppe B_n mit den Generatoren σ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$. Die Artinsche Automorphismendarstellung $\phi : B_n \to \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ induziert eine Darstellung $\Phi : B_n \to \mathrm{Aut}(C(\tilde{X}_{n,1}))$ als Gruppe von Automorphismen des freien $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmoduls $C(\tilde{X}_{n,1})$.

Die explizite Gestalt ergibt sich mit Hilfe des freien Differentialkalküls. Implizit wurde bei der Konstruktion des Komplexes $C(\tilde{X}_{n,1})$ als $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmodul durch die Liftung der Generatoren $\gamma_{m,j}$, $j = m+1, \ldots, m+n$, von $U_{n,1}$ bereits eine freie Differentiation definiert, und zwar als Abbildung $\Delta : U_{n,1} \to C_1(\tilde{X}_{n,1})$, definiert durch: $\Delta(\gamma_{m,j}) = \tilde{\gamma}_{m,j}$.

Lemma 2.3.9 *Der Automorphismus $\phi(\sigma_i) \in Aut(U_{n,1})$ induziert Automorphismen $\Phi(\sigma_i)$ der Kettengruppen des augmentierten Komplexes zu $C(\tilde{X}_{n,1})$, und zwar ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{lcccccc}
C_1(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\partial_{(1)}} & C_0(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow \phi(\sigma_i)J(\phi(\sigma_i)) & & \downarrow \phi(\sigma_i) & & \downarrow \phi(\sigma_i) & & \\
C_1(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\partial_{(1)}} & C_0(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Hierbei ist $J(\phi(\sigma_i)) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$ die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\phi(\sigma_i)$.

Beweis. Der Automorphismus $\phi(\sigma_i) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ induziert in $\mathbf{Z}$ die identische Abbildung.
In der Kettengruppe $C_0(\tilde{X}_{n,1})$ induziert der Automorphismus $\phi(\sigma_i) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ die identische Abbildung der erzeugenden 0-Kette $\tilde{z}_m$ und den Ringautomorphismus $\phi(\sigma_i) \in \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}U_{n,1})$ der Koeffizienten $\alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}$:

$$\Phi(\sigma_i)(\alpha\, \tilde{z}_m) \quad = \quad \phi(\sigma_i)(\alpha)\, \tilde{z}_m$$

Der in der Kettengruppe $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, erzeugt von der Menge $\{\tilde{\gamma}_{m,j}\,; j = m+1, \ldots, m+n\}$ induzierte Automorphismus ergibt sich gemäß der Fundamentalformel des freien Differentialkalküls:

$$\begin{aligned}
\Phi(\sigma_i)(\Delta(\gamma_{m,j})) &= \Delta(\phi(\sigma_i)(\gamma_{m,j})) = \\
&= \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{\delta(\phi(\sigma_i)(\gamma_{m,j}))}{\delta\gamma_{m,k}} \Delta(\gamma_{m,k}) = \\
&= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(J(\phi(\sigma_i))\right)_j^k \Delta(\gamma_{m,k})
\end{aligned}$$

wobei $\Delta(\gamma) = \tilde{\gamma}_{m,j}$ ist. Mit anderen Worten ergibt sich $\Phi(\sigma_i)$ aus der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{lcl} U_{n,1} & \xrightarrow{\phi(\sigma_i)} & U_{n,1} \\ \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ C_1(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\Phi(\sigma_i)} & C_1(\tilde{X}_{n,1}) \end{array}$$

Explizit hat man für die Einträge der Jacobi-Matrix $J(\phi(\sigma_i))$:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{m,i}) &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\frac{\delta(\gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1})}{\delta\gamma_{m,k}} \right) \tilde{\gamma}_{m,k} = \\ &= (1 - \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1})\tilde{\gamma}_{m,i} + \gamma_{m,i}\tilde{\gamma}_{m,i+1} \\ \Phi(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{m,i+1}) &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\frac{\delta\gamma_{m,i}}{\delta\gamma_{m,k}} \right) \tilde{\gamma}_{m,k} = \\ &= \tilde{\gamma}_{m,i} \\ \Phi(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{m,j}) &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(\frac{\delta\gamma_{m,j}}{\delta\gamma_{m,k}} \right) \tilde{\gamma}_{m,k} = \\ &= \tilde{\gamma}_{m,j}\,, \qquad j \neq i, i+1 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man auch Koeffizienten $\alpha \in \mathbf{Z}U_{n,1}$, so hat man:

$$\Phi(\sigma_i)(\alpha\,\tilde{\gamma}_{m,j}) = \phi(\sigma_i)(\alpha) \sum_{k=m+1}^{m+n} (J(\phi(\sigma_i)))_j^k\, \tilde{\gamma}_{m,k}$$

Zur Kommutativität des Diagramms hat man folgendes. Es gilt: $\phi(\sigma_i)\, J(\phi(\sigma_i))\, \partial_{(1)} = \partial_{(1)}\, \phi(\sigma_i)$ wegen:

$$\sigma_i \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1} & \gamma_{m,i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{m,i} \\ 1 - \gamma_{m,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{m,i} \\ 1 - \gamma_{m,i+1} \end{pmatrix} \sigma_i$$

denn für alle Generatoren $\gamma_{m,j} \in U_{n,1}$ mit Indices $j \neq i, i+1$ ist $\phi(\sigma_i) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ der identische Automorphismus.
Ferner gilt offensichtlich: $\phi(\sigma_i)\,\varepsilon = \varepsilon\,\phi(\sigma_i)$. □

Lemma 2.3.10 *Die Zopfgruppe B_n hat ein treue Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, d.h. die Abbildung:*

$$\Phi : B_n \;\to\; Aut(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_i) &= \phi(\sigma_i)\, J(\phi(\sigma_i)), \qquad \phi(\sigma_i) \in Aut(\mathbf{Z}U_{n,1}) \\ J(\phi(\sigma_i)) &= \mathbf{1}_{(i-m-1)} \oplus \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{m,i}\gamma_{m,i+1}\gamma_{m,i}^{-1} & \gamma_{m,i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n+m-i-1)} \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{1}_{(n)}$ *die* $(n \times n)$*-Einheitsmatrix bezeichnet, ist ein Monomorphismus.*

Beweis. Die Darstellungseigenschaft kann mit der Kettenregel des freien Differentialkalküls gezeigt werden. Für $\sigma, \tau \in B_n$ und $\gamma \in U_{n,1}$ gilt:

$$\Phi(\sigma\tau)(\gamma\,\tilde{\gamma}_{m,k}) \quad = \quad \Phi(\tau)(\Phi(\sigma)(\gamma\,\tilde{\gamma}_{m,k}))$$

Diese Eigenschaft von Φ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\Phi(\sigma\tau)(\gamma\,\tilde{\gamma}_{m,k}) = \\
&\quad = \phi(\sigma\tau)(\gamma)\,\Phi(\sigma\tau)(\tilde{\gamma}_{m,k}) = \\
&\quad = \phi(\sigma\tau)(\gamma)\sum_j (J(\phi(\sigma\tau)))^j_k\;\tilde{\gamma}_{m,j} = \\
&\quad = \phi(\tau)(\phi(\sigma)(\gamma))\sum_{j,i}\phi(\tau)\left((J(\phi(\sigma)))^i_k\right)\;(J(\phi(\tau)))^j_i\;\tilde{\gamma}_{m,j} = \\
&\quad = \sum_{j,i}\phi(\tau)\left(\phi(\sigma)(\gamma)\;(J(\phi(\sigma)))^i_k\right)\;(J(\phi(\tau)))^j_i\;\tilde{\gamma}_{m,j} = \\
&\quad = \Phi(\tau)\,(\Phi(\sigma)(\gamma\,\tilde{\gamma}_{m,k}))
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im dritten Schritt die Kettenregel des freien Differentialkalküls verwendet, in der Form:

$$J(\phi(\sigma\tau)) = \phi(\tau)\,(J(\phi(\sigma)))\,J(\phi(\tau))$$

Damit kann man nun leicht zeigen, daß die definierenden Relatoren von B_n den identischen Automorphismus von $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ induzieren.
Injektivität von Φ folgt mit der Injektivität von $\phi : B_n \to \mathrm{Aut}(U_{n,1})$, siehe [14]. □

2.3.3 Darstellungen der Zopfgruppen auf äquivarianten Ketten und Zyklen

Vorbemerkungen

Um Darstellungen von B_n als Gruppe von Automorphismen der Kettengruppen des äquivarianten Komplexes $G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ zu gewinnen, bzw. um den Komplex mit der Struktur eines B_n-Moduls zu versehen, fordern wir, daß der Koeffizientenmodul G zusätzlich ein B_n-Rechtsmodul ist. Da später die Konstruktion äquivarianter Komplexe iteriert werden wird, werden außerdem der Koeffizientenmodul und die zugehörige charakterisierende Abbildung mit Indizes versehen.

Definition 2.3.11 Es sei G_{m-1} eine kommutative Gruppe, $B_nU_{n,1} := B_n \rhd\!\!< U_{n,1}$, und $\Phi_g : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Homomorphismus, so daß G_{m-1} ein $B_nU_{n,1}$-(Rechts-)Modul ist, gegeben durch die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned}
G_{m-1} \times B_nU_{n,1} &\to G_{m-1} \\
(g,\beta) &\to g\,\beta := \Phi_g^{(m-1)}(\beta)(g), \qquad \beta \in B_nU_{n,1}
\end{aligned}$$

Mit dieser Definition ist die Kettengruppe $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1})$ ein B_n-Rechtsmodul, gegeben durch die Multiplikationsabildung:

$$\begin{array}{rcl} \left(G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1})\right) \times B_n & \to & G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1}) \\ (g \otimes \tilde{\gamma}_{m,j}\,, \sigma_i) & \to & g\,\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}_{m,j}\,\sigma_i = \\ & = & \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(g) \otimes \Phi^{(m)}(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{m,j}) = \\ & = & \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(g) \otimes \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \left(J(\phi(\sigma_i))\right)_j^k \tilde{\gamma}_{m,k} = \\ & = & \sum\limits_{k=m+1}^{m+n} \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\left(J(\phi(\sigma_i))\right)_j^k\right)(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m,k} \end{array}$$

Mit anderen Worten gilt folgendes:

Lemma 2.3.12 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1})$, und zwar ist der Homomorphiemus:*

$$\chi^{(m-1,m)} : B_n \quad \to \quad Aut(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl} \chi^{(m-1,m)}(\sigma_i) & = & \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\,\Phi^{(m)}(\sigma_i)\right) \\ \Phi^{(m)}(\sigma_i) & = & \phi(\sigma_i)\,J^{(m)}(\phi(\sigma_i)) \end{array}$$

Beispiele von Koeffizientenmoduln

Beispiel 2.3.13 Oben wurde implizit gerade der Fall $G_{m-1} = \mathbf{Z}U_{n,1}$ behandelt. $\mathbf{Z}U_{n,1}$ ist B_n-Modul durch die Erweiterung der Abbildung $\phi : B_n \to \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ auf $\mathbf{Z}U_{n,1}$ und $U_{n,1}$-Modul durch die offensichtliche Multiplikationsabbildung.

Beispiel 2.3.14 (Gassner-Modul) Es sei S_n die symmetrische Gruppe mit den Generatoren τ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$, und den definierenden Relationen:

$$\begin{array}{rcll} \tau_i\tau_{i+1}\tau_i & = & \tau_{i+1}\tau_i\tau_{i+1} & \\ \tau_i\tau_j & = & \tau_j\tau_i & \mid i-j \mid \geq 2 \\ \tau_i^2 & = & 1 & \end{array}$$

und es sei $\mathbf{Z}^n$ die von der Menge $\{\alpha_{m,i}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe. Es gibt eine natürliche (Rechts-)Wirkung von S_n auf $\mathbf{Z}^n$, gegeben durch Permutation der Indizes $i = m+1, \ldots, m+n$. Wir notieren diese Wirkung als definierende Relationen des semidirekten Produkts $S_n\mathbf{Z}^n = S_n \ltimes \mathbf{Z}^n$:

$$\begin{array}{rcll} \alpha_{m,i}\tau_i & = & \tau_i\alpha_{m,i+1} & \\ \alpha_{m,i+1}\tau_i & = & \tau_i\alpha_{m,i} & \\ \alpha_{m,j}\tau_i & = & \tau_i\alpha_{m,j}\,, & j \neq i, i+1 \end{array}$$

Es sei nun G_{m-1} ein Linksmodul zum semidirekten Produkt $S_n\mathbf{Z}^n$. Durch den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$, definiert durch:

$$\begin{array}{rcll} \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(g) & = & \tau_i\, g, & \sigma_i \in B_n, \quad g \in G_{m-1} \\ \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,i})(g) & = & \alpha_{m,i}\, g & \gamma_{m,i} \in U_{n,1} \end{array}$$

ist G_{m-1} dann ein $B_nU_{n,1}$-(Rechts-)Modul mit Multiplikationsabbildung:

$$\begin{array}{rcll} G_{m-1} \times B_nU_{n,1} & \to & G_{m-1} & \\ (g,\beta) & \to & \Phi_g^{(m-1)}(\beta)(g), & \beta \in B_nU_{n,1} \end{array}$$

Dieser Modul liegt der *Gassner-Darstellung* der Zopfgruppen B_n und P_n zugrunde. Zur Gassner-Darstellung siehe auch [4].

Beispiel 2.3.15 (Burau-Modul) Sei $\mathbf{Z}$ die vom Element t frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in t und $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}[t,t^{-1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{array}{rcll} \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(1) & = & 1, & \sigma_i \in B_n \\ \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,i})(1) & = & t, & \gamma_{m,i} \in U_{n,1} \end{array}$$

Damit ist $G_{m-1} = \mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ ein $B_nU_{n,1}$-Modul mit Multiplikationsabbildung:

$$\begin{array}{rcll} \mathbf{Z}[t,t^{-1}] \times B_nU_{n,1} & \to & \mathbf{Z}[t,t^{-1}] & \\ (1,\beta) & \to & \Phi_g^{(m-1)}(\beta)(1), & \beta \in B_nU_{n,1} \end{array}$$

Dieser Modul liegt der *Burau-Darstellung* der Zopfgruppen B_n und P_n zugrunde. Zur Burau-Darstellung siehe auch [4].

Darstellungen der Zopfgruppe B_n

Im folgenden sei der Koeffizientenmodul G_{m-1} als generisch bzgl. $U_{n,1}$ angenommen. Es werden Darstellungen von B_n auf äquivarianten 1-Ketten, $B_n \to \mathrm{Aut}(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, und auf äquivarianten 1-Zyklen, $B_n \to \mathrm{Aut}(H_1(G_{m-1} \otimes C(\tilde{X}_{n,1})))$, bis auf den den Koeffizientenmodul G_{m-1} charakterisierenden Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ angegeben.
Man erinnere, daß jedes Element der Kettengruppe $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ eine eindeutige Darstellung hat der Form: $\sum_{j=1}^n g_j \otimes e_{m,m+j}$ mit $g_j \in G_{m-1}$ und jedes Element der Homologiegruppe $H_1(G_{m-1} \otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$ eine eindeutige Darstellung der Form: $\sum_{j=1}^{n-1} h_j \otimes e_{m+j,m+j+1}$ mit $h_j = \sum_{i=1}^{j} g_i \in G_{m-1}$.

Satz 2.3.16 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$, und zwar ist der Homomorphismus*

$$\chi_c^{(m-1,m)} : B_n \quad \to \quad Aut(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_c^{(m-1,m)}(\sigma_i) &= \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\,\Phi_c^{(m)}(\sigma_i)\right) \\ \Phi_c^{(m)}(\sigma_i) &= R_c^{(m)}(\sigma_i) = \mathbf{1}_{(i-m-1)} \oplus \begin{pmatrix} 1-\gamma_{m,i} & \gamma_{m,i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n+m-i-1)} \end{aligned}$$

Beweis. Die Matrix $R_c^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$ ergibt sich aus der Jacobi-Matrix $J^{(m)}(\sigma_i)$ des Automorphismus $\phi(\sigma_i) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ aus Abschnitt 2.3.2 durch Transformation:

$$\sigma_i R_c^{(m)}(\sigma_i) = (\Gamma^{(m)})^{-1}\sigma_i J^{(m)}(\sigma_i)\Gamma^{(m)}$$

mit der diagonalen Matrix $\Gamma^{(m)}$ mit den Einträgen $(\Gamma^{(m)})_i^j = \delta_{i,j}(1-\gamma_{m,m+i})$. □

Bemerkung 2.3.17 (Alternative Formulierungen) i) Es gilt nach Lemma 2.2.5, daß: $G_{m-1}\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}) \cong (G_{m-1})^n$. Daher kann man die Darstellung auch als $\chi_c^{(m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}((G_{m-1})^n)$ beschreiben. Sei $J = \{1,\dots,n\}$ und $(g_j)_{j\in J} = (g_1,\dots,g_n)$. Dann ist der von $\sigma_i \in B_n$ induzierte Automorphismus von $(G_{m-1})^n$ bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ wie folgt gegeben:

$$(g_j)_{j\in J} \quad\to\quad (g_j)_{j\in J}\,\sigma_i\,R_c^{(m)}(\sigma_i)$$

ii) Alternativ kann man die Darstellung $\chi_c^{(m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}(G\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$ bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ durch Relationen zwischen σ_i und den formalen Ketten $e_{m,j}$, $j = m+1,\dots,m+n$, angeben:

$$(g\otimes e_{m,j})\sigma_i = g\,\sigma_i \otimes \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(R_c^{(m)}(\sigma_i)\right)_j^k e_{m,k}$$

explizit:

$$(g\otimes e_{m,k})\sigma_i = g\,\sigma_i \otimes \begin{cases} (1-\gamma_i)e_{m,i} + \gamma_{m,i}e_{m,i+1} & k = i \\ e_{m,i} & k = i+1 \\ e_{m,k} & k \neq i, i+1 \end{cases}$$

Satz 2.3.18 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $H_1(G_{m-1}\otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_h^{(m-1,m)} : B_n \quad\to\quad \mathit{Aut}(H_1(G_{m-1}\otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_h^{(m-1,m)}(\sigma_i) &= \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\,\Phi_h^{(m)}(\sigma_i)\right) \\ \Phi_h^{(m)}(\sigma_{m+1}) &= R_h(\sigma_{m+1}) = \begin{pmatrix} -\gamma_{m,i} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n-3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_h^{(m)}(\sigma_i) &= R_h(\sigma_i) = \mathbf{1}_{(i-m-2)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{m,i} & 0 \\ 0 & -\gamma_{m,i} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n+m-i-2)} \\
& \qquad m+1 < i < m+n-1 \\
\Phi_h^{(m)}(\sigma_{m+n-1}) &= R_h(\sigma_{m+n-1}) = \mathbf{1}_{(n-3)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{m,i} \\ 0 & -\gamma_{m,i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Beweis. Die Matrix $R_h^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$ ergibt sich unmittelbar mit Hilfe der Definition der 1-Zyklen aus der Matrix $R_c^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$. □

Bemerkung 2.3.19 Alternativ ist die Darstellung $\chi_h^{(m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}(H_1(G \otimes C(\tilde{X}_{n,1})))$ bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_n U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$(g \otimes e_{j,j+1})\sigma_i = g\,\sigma_i \otimes \sum_{k=m+1}^{m+n-1} \left(R_h^{(m)}(\sigma_i)\right)_j^k e_{k,k+1}$$

explizit:

$$(g \otimes e_{k,k+1})\sigma_i = g\,\sigma_i \otimes \begin{cases} e_{i-1,i} + \gamma_{m,i} e_{i,i+1} & k = i-1 \\ -\gamma_{m,i} e_{i,i+1} & k = i \\ e_{i,i+1} + e_{i+1,i+2} & k = i+1 \\ e_{k,k+1} & k \neq i, i+1 \end{cases}$$

Darstellungen der Zopfgruppe P_n

Entsprechende Aussagen gelten für die Untergruppe $P_n \subset B_n$, die reine Zopfgruppe von n Elementen auf $\mathbf{C}$, mit den Generatoren $\gamma_{j,k}$, definiert durch $\gamma_{j,k} = \sigma_j^{-1} \ldots \sigma_{k-1} \ldots \sigma_j$, wobei $j < k$, $j, k = m+1, \ldots, m+n$. Der $B_n U_{n,1}$-Koeffizientenmodul G_{m-1}, generisch bzgl. $U_{n,1}$, ist auch Modul zum semidirekten Produkt $P_n U_{n,1} := P_n \ltimes U_{n,1}$.

Satz 2.3.20 *Die reine Zopfgruppe P_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1})$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_c^{(m-1,m)} : P_n \quad \to \quad Aut(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\chi_c^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k}) &= \Phi_g^{(m-1)}\left(\gamma_{j,k}\, \Phi_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right) \\
\Phi_c^{(m)}(\gamma_{j,k}) &= R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})
\end{aligned}$$

Hierbei hat die Matrix $R_c^{(m)}(\gamma_{j,k}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$ die folgenden nichtverschwindenden Einträge:

$$\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l = 1, \qquad l < j, l > k$$

$$\begin{aligned}
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^j &= 1-\gamma_{m,j}+\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^k &= \gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,k})\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^j &= \gamma_{m,j}\gamma_{m,k}(1-\gamma_{m,k}^{-1})(1-\gamma_{m,j}^{-1}), \qquad j<l<k\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l &= [\gamma_{m,j},\gamma_{m,k}], \qquad j<l<k\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^k &= -\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}(1-\gamma_{m,j}^{-1})(1-\gamma_{m,k}^{-1}), \qquad j<l<k\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_k^j &= 1-\gamma_{m,j}\\
\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_k^k &= \gamma_{m,j}
\end{aligned}$$

Beweis. Die Darstellungsmatrizen $R_c^{(m)}(\gamma_{j,k}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1},n)$ zur reinen Zopfgruppe P_n ergeben sich mit $\gamma_{j,k}=\sigma_j^{-1}\dots\sigma_{k-1}\dots\sigma_j$ durch direkte Rechnung aus den Matrizen $R_c^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1},n)$ zu B_n. □

Bemerkung 2.3.21 Alternativ ist die Darstellung $\chi_c^{(m-1,m)}: P_n \to \mathrm{Aut}(G_{m-1}\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$ bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)}: P_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$(g\otimes e_{m,i})\gamma_{j,k} = g\,\gamma_{j,k}\otimes\sum_{l=m+1}^{m+n}\left(R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_i^l e_{m,l}$$

explizit:

$$\begin{aligned}
&(g\otimes e_{m,l})\gamma_{j,k} =\\
&= \ g\,\gamma_{j,k}\otimes\left\{\begin{array}{cc}
e_{m,l} & l<j, l>k\\
e_{m,j}+\gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,k})(e_{m,k}-e_{m,j}) & l=j\\
e_{m,l}+(1-\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}\gamma_{m,j}^{-1})(1-\gamma_{m,j})(e_{m,j}-e_{m,k})+ & \\
+([\gamma_{m,j},\gamma_{m,k}]-1)(e_{m,l}-e_{m,k}) & j<l<k\\
e_{m,k}+(1-\gamma_{m,j})(e_{m,j}-e_{m,k}) & l=k
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

mit $[\gamma_{m,j},\gamma_{m,k}]=\gamma_{m,j}\gamma_{m,k}\gamma_{m,j}^{-1}\gamma_{m,k}^{-1}$.

Satz 2.3.22 *Die reine Zopfgruppe P_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $H_1(G_{m-1}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}))$, und zwar ist der Homomorphismus*

$$\chi_h^{(m-1,m)}: P_n \;\to\; Aut(H_1(G_{m-1}\otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k}) &= \Phi_g^{(m-1)}\left(\gamma_{j,k}\,\Phi_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)\\
\Phi_h^{(m)}(\gamma_{j,k}) &= R_c^{(m)}(\gamma_{j,k})
\end{aligned}$$

Die Matrix $R_h^{(m)}(\gamma_{j,j+1}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$ lautet:

$$R_h^{(m)}(\gamma_{j,j+1}) = \mathbf{1}_{(j-m-2)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,j+1}) & 0 \\ 0 & \gamma_{m,j}\gamma_{m,j+1} & 0 \\ 0 & 1-\gamma_{m,j} & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n+m-j-2)}$$

Die Matrizen $R_h^{(m)}(\gamma_{j,k}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$, $k > j+1$, haben die folgenden nichtverschwindenden Einträge:

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l &= 1, \qquad l \leq j-1, l \geq k \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_{j-1}^l &= \gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,k}), \qquad l = j, \ldots, k-1 \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^j &= [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\gamma_{m,k} \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^l &= [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}](\gamma_{m,k}-1), \qquad l = j+1, \ldots, k-1 \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l &= [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}], \qquad l = j+1, \ldots, k-2 \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_{k-1}^{k-1} &= [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}](1-\gamma_{m,k}+\gamma_{m,k}\gamma_{m,j}) \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_{k-1}^l &= [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\gamma_{m,k}(\gamma_{m,j}-1), \qquad l = j \ldots, k-2 \\
\left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_k^l &= 1-\gamma_{m,j}, \qquad l = j, \ldots, k-1
\end{aligned}$$

Beweis. Die Darstellungsmatrizen $R_h^{(m)}(\gamma_{j,k}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$ zu P_n ergeben sich mit $\gamma_{j,k} = \sigma_j^{-1} \ldots \sigma_{k-1} \ldots \sigma_j$ durch direkte Rechnung aus den Matrizen $R_h^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$ zu B_n oder mit Hilfe der Definition der Zyklen aus den Matrizen $R_c^{(m)}(\gamma_{j,k}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$. □

Bemerkung 2.3.23 Alternativ ist die Darstellung $\chi_h^{(m-1,m)} : P_n \to \mathrm{Aut}(H_1(G_{m-1} \otimes C(\tilde{X}_{n,1})))$ bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : P_n U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$(g \otimes e_{i,i+1})\gamma_{j,k} = g\, \gamma_{j,k} \otimes \sum_{l=m+1}^{m+n-1} \left(R_h^{(m)}(\gamma_{j,k})\right)_i^l e_{l,l+1}$$

explizit:

$$\begin{aligned}
&(g \otimes e_{l,l+1})\gamma_{j,j+1} = \\
&= \quad g\,\gamma_{j,j+1} \otimes \begin{cases} e_{j-1,j} + \gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,j+1})e_{j,j+1} & l = j-1 \\ \gamma_{m,j}\gamma_{m,j+1}e_{j,j+1} & l = j \\ (1-\gamma_{m,j})e_{j,j+1} + e_{j+1,j+2} & l = j+1 \\ e_{l,l+1} & l \neq j-1, j, j+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

und wobei für $k > j+1$:

$$(g \otimes e_{l,l+1})\gamma_{j,k} = g\,\gamma_{j,k} \otimes$$
$$\otimes \begin{cases} e_{j-1,j} + \gamma_{m,j}(1-\gamma_{m,k})e_{j,k} & l = j-1 \\ e_{j,j+1} + [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\,(\gamma_{m,k}-1)e_{j,k} & l = j \\ [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\,e_{l,l+1} & j+1 \le l \le k-2 \\ [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\,e_{k-1,k} + [\gamma_{m,j}, \gamma_{m,k}]\,\gamma_{m,k}(\gamma_{m,j}-1)e_{j,k} & l = k-1 \\ e_{k,k+1} + (1-\gamma_{m,j})e_{j,k} + \gamma_{j,k}e_{k,k+1} & l = k \\ e_{l,l+1} & l \le j-2, l \ge k+1 \end{cases}$$

2.3.4 Beispiele: Gassner- und Burau-Darstellungen der Zopfgruppen

Reduzierte Gassner-Darstellung der Zopfgruppe B_n

Sei S_n die symmetrische Gruppe mit den Generatoren τ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$, und $\mathbf{Z}^n$ die von der Menge $\{\alpha_{m,i}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe. Es sei G_{m-1} Linksmodul zum semidirekten Produkt $S_n\mathbf{Z}^n = S_n \triangleright\!< \mathbf{Z}^n$. Durch den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$, definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(g) &= \tau_i\, g, \qquad \sigma_i \in B_n, \quad g \in G_{m-1} \\ \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,i})(g) &= \alpha_{m,i}\, g, \qquad \gamma_{m,i} \in U_{n,1} \end{aligned}$$

ist G_{m-1} ein $B_nU_{n,1}$-Modul.
Die Darstellung $\chi_h^{(m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}(H_1(G_{m-1} \otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$ ist die *reduzierte Gassner-Darstellung* der Zopfgruppe B_n. Es ist $\chi_h^{(m-1,m)}(\sigma_i) = \tau_i\, R_h(\sigma_i)$, und hierbei ist die Matrix $R_h(\sigma_i) \in GL\left(\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}], n-1\right)$. $\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}]$ bezeichnet den Ring der Laurent-Polynome in den Variablen $\alpha_{m,i} \in \mathbf{C}$, $i = m+1, \ldots, m+n$. Man hat explizit:

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1} &\to \tau_{m+1} \begin{pmatrix} -\alpha_{m,m+1} & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \tau_{m+1} \cdot \mathbf{1}_{(n-3)} \\ \sigma_i &\to \tau_i \cdot \mathbf{1}_{(i-m-2)} \oplus \tau_i \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{m,i} & 0 \\ 0 & -\alpha_{m,i} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \tau_i \cdot \mathbf{1}_{(n+m-i-2)} \\ & \qquad m+1 < i < m+n-1 \\ \sigma_{m+n-1} &\to \tau_{m+n-1} \cdot \mathbf{1}_{(n-3)} \oplus \tau_{m+n-1} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{m,m+n-1} \\ 0 & -\alpha_{m,m+n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gassner-Darstellung von B_n ist treu, siehe [2].

Reduzierte Burau-Darstellung der Zopfgruppe B_n

Sei $\mathbf{Z}$ die vom Element t frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in t und $\Phi_g^{(m-1)} : B_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}[t, t^{-1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(m-1)}(\sigma_i)(1) &= 1, \qquad \sigma_i \in B_n \\ \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,i})(1) &= t, \qquad \gamma_{m,i} \in U_{n,1} \end{aligned}$$

Damit ist $G_{m-1} = \mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ ein $B_n U_{n,1}$-Modul.
Die Darstellung $\chi_h^{(m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}(H_1(\mathbf{Z}[t,t^{-1}] \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) \cong GL(\mathbf{Z}[t,t^{-1}], n-1)$ ist dann die *reduzierte Burau-Darstellung* der Zopfgruppe B_n. Man hat explizit:

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1} &\to \begin{pmatrix} -t & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n-3)} \\ \sigma_i &\to \mathbf{1}_{(i-m-2)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & -t & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{(n+m-i-2)}, \qquad m+1 < i < m+n-1 \\ \sigma_{m+n-1} &\to \mathbf{1}_{(n-3)} \oplus \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $\chi_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)$ sind 1 (mit der Multiplizität $n-2$) und $-t$ (mit der Multiplizität 1). Die Burau-Darstellung von B_n ist i.A. nicht treu, siehe [29]. Ferner gilt: $\chi_h^{(m-1,m)}$ ist eine Darstellung der Hecke-Algebra $\mathcal{H}_n(t)$, des Quotienten der Gruppenalgebra $\mathbf{C}B_n$:

$$\mathcal{H}_n(t) = \mathbf{C}B_n / < (1-\sigma_i)(1+t) = 0; i = 1, \ldots, n-1 >$$

Reduzierte Gassner-Darstellung der Zopfgruppe P_n

Sei $\mathbf{Z}^n$ wieder die von der Menge $\{\alpha_{m,i}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, $\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in den Variablen $\alpha_{m,i}$, wobei $i = m+1, \ldots, m+n$, und $\Phi_g^{(m-1)} : P_n U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{j,k})(1) &= 1, \qquad \gamma_{j,k} \in P_n \\ \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,i})(1) &= \alpha_{m,i}, \qquad \gamma_{m,i} \in U_{n,1} \end{aligned}$$

Damit ist $G_{m-1} = \mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}]$ ein $P_n U_{n,1}$-Modul.
Die Darstellung $\chi_h^{(m-1,m)} : P_n \to \mathrm{Aut}(H_1(\mathbf{Z}[t,t^{-1}] \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) \cong GL(\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}, \alpha_{m,i}^{-1}], n-1)$ ist dann die *reduzierte Gassner-Darstellung* der Zopfgruppe P_n. Die Matrizen $\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})$ haben die folgenden nichtverschwindenden Einträge:

$$\begin{aligned} \left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l &= 1, \qquad l \leq j-1, \quad j+1 \leq l \leq k-2, \quad l \geq k \\ \left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_{j-1}^l &= \alpha_{m,j}(1-\alpha_{m,k}), \qquad l = j, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^j &= \alpha_{m,k} \\
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_j^l &= \alpha_{m,k}-1, \qquad l=j+1,\ldots,k-1 \\
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_l^l &= 1, \qquad l=j+1,\ldots,k-2 \\
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_{k-1}^{k-1} &= 1-\alpha_{m,k}+\alpha_{m,k}\alpha_{m,j} \\
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_{k-1}^l &= \alpha_{m,k}(\alpha_{m,j}-1), \qquad l=j\ldots,k-2 \\
\left(\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})\right)_k^l &= 1-\alpha_{m,j}, \qquad l=j,\ldots,k-1
\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von $\chi_h^{(m-1,m)}(\gamma_{j,k})$ sind 1 (mit der Multiplizität $n-2$) und $\alpha_{m,j}\alpha_{m,k}$ (mit der Multiplizität 1). Die Gassner-Darstellung von P_n ist treu, siehe [2].

2.3.5 Anwendung: Monodromiegruppe hypergeometrischer Integrale

Komplexe Funktionen

Man betrachte die komplexe Funktion:

$$I(z_m) = \prod_{j=m+1}^{m+n} (z_m - z_j)^{\lambda_{m,j}}, \qquad \lambda_{m,j} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$$

Die Funktion $I(z_m)$ ist holomorph in der unendlichblättrigen Riemannschen Fläche $\tilde{X}_{n,1}$ über der punktierten z_m-Ebene $X_{n,1} = \mathbf{C}\backslash\{z_{m+1},\ldots,z_{m+n}\}$ mit logarithmischen Singularitäten in z_j, $j=m+1,\ldots,m+n$. Ferner ist die Funktion Lösung der folgenden Differentialgleichung erster Ordnung mit (einfachen) Polen in z_j, $j=m+1,\ldots,m+n$:

$$\frac{dI(z_m)}{dz_m} - \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{\lambda_{m,j}}{z_m - z_j} I(z_m) = 0$$

Man wähle ein festes Funktionselement von $I(z_m)$ durch die Hauptwerte der Logarithmen in: $(z_m - z_j)^{\lambda_{m,j}} = e^{\lambda_{m,j}\ln(z_m - z_j)}$, und bezeichne dieses Funktionselement ebenfalls mit $I(z_m)$. Die analytische Fortsetzung entlang einem Weg mit Spur $\gamma_{m,j} \in U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}, z_m)$ ergibt dann das Element $e^{2\pi i\lambda_{m,j}} I(z_m)$. Bezeichnet $V^{(m-1)}$ den komplexen 1-dimensionalen Vektorraum, erzeugt von $I(z_m)$, so hat man also eine 1-dimensionale Darstellung der Fundamentalgruppe $U_{n,1}$ der punktierten z_m-Ebene $X_{n,1} = \mathbf{C}\backslash\{z_{m+1},\ldots,z_{m+n}\}$ durch:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(m-1)} : U_{n,1} &\to GL(V^{(m-1)}) \\
\Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,j})(I(z_m)) &= e^{2\pi i\lambda_{m,j}} I(z_m)
\end{aligned}$$

Das Bild von $U_{n,1}$ in $GL(V^{(m-1)})$ nennen wir die *Monodromiegruppe* der Differentialgleichung bzw. der Funktion $I(z_m)$.
Mit anderen Worten hat man also den $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul $G_{m-1} = V^{(m-1)} = \mathbf{C}$ durch die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} V^{(m-1)} \times \mathbf{Z}U_{n,1} & \to & V^{(m-1)} \\ (I(z_m), \gamma_{m,j}) & \to & I(z_m) \cdot \gamma_{m,j} = \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{m,j})(I(z_m)) = e^{2\pi i \lambda_{m,j}} I(z_m) \end{array}$$

Generizität erfordert, daß $\lambda_{m,j} \notin \mathbf{Z}$ für alle $j = m+1, \ldots, m+n$.

Pochhammersche Doppelumläufe

Es sei also der durch die Monodromieeigenschaft der komplexen Funktion $I(z_m)$ bestimmte $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul $G_{m-1} = V^{(m-1)} = \mathbf{C}$ generisch. Die Funktion kann nun über Homologiezyklen, sogenannte *twisted cycles*, vgl. [21], integriert werden:

$$\int_c dz_m\, I(z_m), \qquad c \in H_1(V^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}))$$

Für Integration über den Zyklus:

$$\begin{array}{rcl} c_{i,i+1} & = & I(z_m) \otimes e_{i,i+1} = \\ & = & \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,i})\right]^{-1}(I(z_m)) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i} - \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,i+1})\right]^{-1}(I(z_m)) \otimes \tilde{\gamma}_{m,i+1} \\ & \in & H_1(V^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) \end{array}$$

hat man beispielsweise:

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int_{[\Phi(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(I)\otimes\tilde{\gamma}_{m,i} - [\Phi(1-\gamma_{m,i+1})]^{-1}(I)\otimes\tilde{\gamma}_{m,i+1}} dz_m\, I(z_m) = \\ = & \displaystyle(1-e^{2\pi i\lambda_{m,i}})^{-1} \int_{I\otimes\tilde{\gamma}_{m,i}} dz_m\, I(z_m) - (1-e^{2\pi i\lambda_{m,i+1}})^{-1} \int_{I\otimes\tilde{\gamma}_{m,i+1}} dz_m\, I(z_m) \end{array}$$

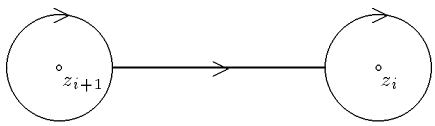


Abbildung 2.1: Zyklus $[\Phi_g(1-\gamma_{m,i})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,i} - [\Phi_g(1-\gamma_{m,i+1})]^{-1}(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{\gamma}_{m,i+1}$

Gewöhnlich wird die Funktion $I(z_m)$ integriert über solche Wege auf $\tilde{X}_{n,1}$, deren Spur in $X_{n,1}$ Kommutatoren der Generatoren von $U_{n,1}$ entsprechen, die sogenannten *Pochhammersche Doppelumläufe* um je zwei Singularitäten, vgl. [23], [33]:

$$\int_{I\otimes\Delta([\gamma_{m,i},\gamma_{m,j}])} dz_m\, I(z_m) =$$

$$= \quad (1-e^{2\pi i\lambda_{m,j}})\int_{I\otimes\tilde\gamma_{m,i}} dz_m\, I(z_m) - (1-e^{2\pi i\lambda_{m,i}})\int_{I\otimes\tilde\gamma_{m,j}} dz_m\, I(z_m)$$

Hierbei ist gemäß dem freien Differentialkalkül:

$$\begin{aligned}
\Delta([\gamma_{m,i},\gamma_{m,j}]) &= \Delta(\gamma_{m,i}\gamma_{m,j}\gamma_{m,i}^{-1}\gamma_{m,j}^{-1}) = \\
&= \Delta(\gamma_{m,i}) + \gamma_{m,i}\Delta(\gamma_{m,j}) - \gamma_{m,i}\gamma_{m,j}\gamma_{m,i}^{-1}\Delta(\gamma_{m,i}) - [\gamma_{m,i},\gamma_{m,j}]\Delta(\gamma_{m,i}) = \\
&= (1-\gamma_{m,i}\gamma_{m,j}\gamma_{m,i}^{-1})\tilde\gamma_{m,i} + \gamma_{m,i}(1-\gamma_{m,j}\gamma_{m,i}^{-1}\gamma_{m,j}^{-1})\tilde\gamma_{m,j}
\end{aligned}$$

Die beiden Typen von Zyklen sind offensichtlich proportional.

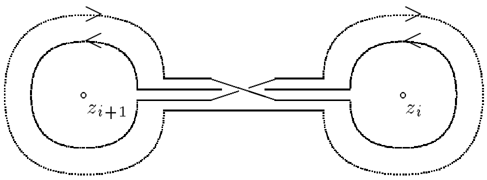


Abbildung 2.2: Pochhammerscher Doppelumlauf

Monodromiegruppe hypergeometrischer Integrale

Es bezeichne $V^{(m)}$ den Vektorraum über $\mathbf{C}$, der von den folgenden $n-1$ linear unabhängigen Integralen, sogenannten *verallgemeinerten hypergeometrischen Integralen*, aufgespannt wird:

$$I_{k,k+1}(z_{m+1},\ldots,z_{m+n}) = \int_{c_{k,k+1}} dz_m \prod_{j=m+1}^{m+n}(z_m - z_j)^{\lambda_{m,j}}, \qquad k = m+1,\ldots,m+n-1$$

wobei $c_{k,k+1} = I\otimes e_{k,k+1} \in H_1(V_{(m-1)}\otimes C(\tilde X_{n,1}))$. Die Integrale $I_{k,k+1}(z_{m+1},\ldots,z_{m+n})$ sind komplexe Funktionen der n Veränderlichen $z_{m+1},\ldots,z_{m+n}$. und singulär in $z_j = z_i$, $i \neq j$, $i,j = m+1,\ldots,m+n$.
Aufgefaßt als Funktionen der komplexen Veränderlichen $z = z_{m+1}$ genügen die Integrale $I_{k,k+1}(z)$ einer linearen Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ mit Singularitäten in $z = z_j$, $j = m+2,\ldots,m+n$. Vgl. dazu auch Pochhammer [35]. Es gilt:

$$\frac{d^{n-1}I_{k,k+1}(z)}{dz^{n-1}} + \sum_{r=2}^{n-1} a_{n-r}(z)\,\frac{d^{n-r}I_{k,k+1}(z)}{dz^{n-r}} + a_0(z)\,I_{k,k+1}(z) = 0$$

mit den Koeffizienten:

$$a_{n-r}(z) \quad = \quad (-1)^r\prod_{i=r}^{3}(\lambda_{m,m+1}-n+i)\left(\sum_{j_2,\ldots,j_r}\frac{(\sum_{i=2}^r\lambda_{m,j_i}+1)+\lambda_{m,m+1}-n+2}{\prod_{i=2}^r(z-z_{j_i})}\right),$$

$$
\begin{aligned}
& r = 3,\ldots,n \\
a_{n-2} &= (-1)\sum_{i=m+2}^{m+n} \frac{\lambda_{m,i}+1+\lambda_{m,m+1}-n+2}{z-z_i}
\end{aligned}
$$

Dabei wird im Ausdruck für $a_{n-r}(z)$ für $r = 3,\ldots,n$ über alle paarweise verschiedenen (d.h. $j_k \neq j_l$ für $j \neq k$) Indizes $j_2,\ldots,j_r \in J$, $J = \{m+2, m+3, \ldots, m+n\}$, summiert.
Man betrachte $G_{m-1} = V^{(m-1)} = \mathbf{C}$ als trivialen Modul bzgl. $U_{n-1,1} \subset P_n$. Das Bild der freien Gruppe $U_{n-1,1} \subset P_n$ in der Gruppe von Automorphismen von $H_1(V^{(m-1)} \otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$ bzw. in $GL(V^{(m)})$ unter der Abbildung $\chi_h^{(m-1,m)}$ heißt *Monodromiegruppe* der Differentialgleichung bzw. der Integrale. Vgl. hierzu auch Mostow [30]. Setzt man $\alpha_{m,i} = e^{2\pi i \lambda_{m,i}}$, so liefert also die im vorigen Abschnitt angegebene reduzierte Gassner-Darstellung von $U_{n-1,1} \subset P_n$:

$$\chi_h^{(m-1,m)} : U_{n-1,1} \to \mathrm{Aut}\left(H_1(V^{(m-1)} \otimes C(\tilde{X}_{n,1}))\right) \cong GL(V^{(m)})$$

die Monodromiegruppe der verallgemeinerten hypergeometrischen Integrale. Vgl. hierzu auch die sogenannten *Umlaufrelationen* von Schlesinger, cf. [37].

Beispiel 2.3.24 (Hypergeometrische Integrale) Man betrachte den Fall $m = 1$ und $n = 3$. Es ist $U_{2,1} \subset P_3$ die freie Gruppe $U_{2,1} = \langle \gamma_{2,3}, \gamma_{2,4} \rangle$. Es sei $V^{(1)}$ der Vektorraum der Dimension 2, aufgespannt von den *hypergeometrischen Integralen*: $I_{2,k}(z_2) = \int_{c_{2,k}} dz_1 \prod_{i=2,3,4}(z_1 - z_i)^{\lambda_{1,i}}$, $k = 3, 4$. Die Darstellung $\chi : U_{2,1} \to \mathrm{Aut}(H_1(V^{(0)} \otimes C(\tilde{X}_{3,1})))$ bzw. $\chi : U_{2,1} \to GL(V^{(1)})$ liefert die bekannte *hypergeometrische Monodromiegruppe*:

$$\chi(\gamma_{2,3}) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{1,3} & 0 \\ -\alpha_{1,2}(1-\alpha_{1,3}) & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi(\gamma_{2,4}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,4}-1 \\ 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,4} \end{pmatrix}$$

Zur Monodromiegruppe der hypergeometrischen Integrale siehe außer Schlesinger [37] auch beispielsweise Beukers und Heckman [3] und Yoshida [43].
In der Standardnotation mit Gaußschen Parametern lautet die hypergeometrische Reihe

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k(1)_k}\, z^k \\
(\alpha)_k &= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)
\end{aligned}
$$

und die (über Zyklen auszuführenden) hypergeometrischen Integrale lauten:

$$I(z) = \int du\, u^{\alpha-\gamma}(u-1)^{\gamma-\beta-1}(u-z)^{-\alpha}$$

Die hypergeometrische Reihe bzw. die hypergeometrischen Integrale sind Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung, der folgenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei (endlichen) Singularitäten, und zwar in $z = 0$ und $z = 1$:

$$z(1-z)\frac{d^2I(z)}{dz^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\,\frac{dI(z)}{dz} - \alpha\beta I(z) = 0$$

Zu diesen Ausdrücken in der Standardnotation gelangt man, wenn man wie folgt identifiziert:

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & u \\ z_2 & = & z \\ z_3 & = & 0 \\ z_4 & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda_{1,2} & = & -\alpha \\ \lambda_{1,3} & = & \alpha-\gamma \\ \lambda_{1,4} & = & \gamma-\beta-1 \end{array}$$

Die hypergeometrische Monodromiegruppe wird in [3] angegeben. Es ist die Gruppe mit Generatoren $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty \in GL(\mathbf{C}, 2)$ und der Relation $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_\infty = 1$, wobei:

$$\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ 1 & -r \end{pmatrix} \qquad \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$$

und wobei a, b und r, s definiert sind durch:

$$\begin{array}{rcl} (x-e^{2\pi i\alpha})(x-e^{2\pi i\beta}) & = & x^2+ax+b \\ (x-e^{2\pi i\gamma})(x-1) & = & x^2+rx+s \end{array}$$

Die Eigenwerte von Γ_0 sind identisch den Eigenwerten von $\chi(\gamma_{2,3})$, und die Eigenwerte von Γ_∞ den Eigenwerten von $\chi((\gamma_{2,3}\gamma_{2,4})^{-1})$. Insbesondere gilt:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 = & & \Theta\,\chi(\gamma_{2,3})\,\Theta^{-1} \\ (\Gamma_\infty)^{-1} & = & \Theta\,\chi(\gamma_{2,3}\gamma_{2,4})\,\Theta^{-1} \end{array}$$

mit:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_{1,2}(\alpha_{1,3}-1) & -\alpha_{1,2}\alpha_{1,3} \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.3.25 (Hyperelliptische Integrale) Man betrachte den hypergeometrischen Fall $m = 1$ und $n = 3$ mit den speziellen Exponenten $\lambda_{1,i} = -\frac{1}{2}$. Dann ist $V^{(1)}$ der Vektorraum der Dimension 2, aufgespannt von den *hyperelliptischen Integralen*: $I_{2,k}(z_2) = \int_{c_{2,k}} dz_1 \prod_{i=2,3,4}(z_1 - z_i)^{-\frac{1}{2}}$, $k = 3, 4$, Die Darstellung $U_{2,1} \to GL(V^{(1)})$ liefert die *hyperelliptische Monodromiegruppe*:

$$\gamma_{2,3} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{2,4} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Gruppe ist also eine Untergruppe von $SL(\mathbf{Z}, 2)$.

Beispiel 2.3.26 (Diedergruppe) Man betrachte den hypergeometrischen Fall $m = 1$ und $n = 3$ mit den speziellen Exponenten $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2n}$ und $\lambda_{1,3} = \lambda_{1,4} = \frac{1-n}{2n}$. Dies ist einer der Fälle, in denen nach Schwarz [36] die hypergeometrischen Integrale algebraische Funktionen sind. Die Darstellung $U_{2,1} \to GL(V^{(1)})$ liefert die endliche Monodromiegruppe:

$$\gamma_{2,3} \to \Gamma_{2,3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -(1+e^{-\frac{\pi i}{n}}) & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma_{2,4} \to \Gamma_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & -(1+e^{\frac{\pi i}{n}}) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$\Gamma_{2,3}^2 = \Gamma_{2,4}^2 = \mathbf{1} \qquad (\Gamma_{2,3}\Gamma_{2,4})^n = -\mathbf{1}$$

Die projektive Untergruppe, d.h. der Quotient nach skalaren Vielfachen der Identität, mit den Generatoren $\alpha = \Gamma_{2,3}\Gamma_{2,4}$ und $\beta = \Gamma_{2,3}$ ist nun isomorph zur Diedergruppe D_{2n} mit der Gruppenbeschreibung, siehe [7]:

$$D_{2n} = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^n = \beta^2 = 1; \alpha\beta\alpha = \beta \rangle$$

Kapitel 3

Iterierte Darstellungen der Zopfgruppen (1)

In diesem Kapitel werden iterativ 2-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert und deren Homologiegruppen bestimmt. Ferner werden Darstellungen der Zopfgruppe als Automorphismen der Kettengruppen und der Homologiegruppen dieser Komplexe betrachtet.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst gemäß Brady [7] die Konstruktion einer freien Auflösung von $\mathbf{Z}$ für das semidirekte Produkt $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ beschrieben, wenn freie Auflösungen von $\mathbf{Z}$ für $U_{n,1}$ und $U_{n+1,1}$ gegeben sind.

In Abschnitt 3.2 werden 2-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe behandelt, die einerseits durch Tensorierung der freien Auflösung mit einem $U_{n,2}$-Modul konstruiert werden können, andererseits iterativ in dem Sinne, daß in einem 1-dimensionalen äquivarianten Komplex der Koeffizientenmodul selbst geeignet als 1-dimensionaler äquivarianter Komplex gewählt wird. Sodann werden unter der Voraussetzung der Generizität oder der Trivialität des Koeffizientenmoduls explizit die Homologiegruppen dieser 2-dimensionalen äquivarianten Komplexe bestimmt.

In Abschnitt 3.3 werden Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und insbesondere der Homologiegruppen des 2-dimensionalen äquivarianten Komplexes bestimmt. Außer den Darstellungen der Zopfgruppen im Falle eines beliebigen generischen Koeffizientenmoduls werden als Beispiele eine 3-parametrige Burau-Darstellung behandelt, sowie eine höhere Gassner-Darstellung, die als Monodromiegruppe 2-facher hypergeometrischer Integrale interpretiert werden kann.

3.1 Freie Auflösung von Z für $U_{n,2}$

Wir folgen Brady [7] und konstruieren aus den freien Auflösungen $\varepsilon^{(m-1)} : C(\tilde{X}_{n+1,1}) \to \mathbf{Z}$ für $U_{n+1,1}$ und $\varepsilon^{(m)} : C(\tilde{X}_{n,1}) \to \mathbf{Z}$ für $U_{n,1}$ eine freie Auflösung $\varepsilon^{(m-1,m)} : C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \to \mathbf{Z}$ von $\mathbf{Z}$ für das semidirekte Produkt $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$. Wir definieren zunächst den Produktkettenkomplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ und zeigen (in dieser Reihenfolge), daß er ein azyklischer

Komplex, ein $U_{n,2}$-(Links-)Modul und $U_{n,2}$-frei ist.
Man vergleiche Lüdde [25] oder Cohen und Suciu [10] zu ähnlichen Konstruktionen freier Auflösungen von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U_{n,2}$.

3.1.1 Definition des Produktkomplexes $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$

Definition 3.1.1 (Produktkomplex) Es sei $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ der 2-dimensionale Komplex, definiert durch die Kettengruppen:

$$\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q = \bigoplus_{\substack{p_{m-1}+p_m=q \\ p_k=0,1;\quad k=m-1,m}} C_{p_{m-1}}(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1})$$

und durch die Randhomomorphismen:

$$\partial^{(m-1,m)}_{(q)} : \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \to \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q-1}$$

mit der Eigenschaft:

$$\partial^{(m-1,m)}_{(q)}(\tilde{c}^{(m-1)} \otimes \tilde{c}^{(m)}) = \partial^{(m-1)}_{(p_{m-1})}(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes \tilde{c}^{(m)} + (-1)^{p_{m-1}} \tilde{c}^{(m-1)} \otimes \partial^{(m)}_{(p_m)}(\tilde{c}^{(m)})$$

wobei:

$$\begin{aligned} \partial^{(k)}_{(0)} \tilde{z}_k &= 0, \qquad k=m-1,m \\ \partial^{(k)}_{(1)} \tilde{\gamma}^{(k)}_{k,j_k} &= (1-\gamma_{k,j_k})\tilde{z}_k, \qquad j_k = k+1,\ldots,m+n; \quad k=m-1,m \end{aligned}$$

Lemma 3.1.2 (Azyklizität) *Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist azyklisch, d.h. es gilt:*

$$\begin{aligned} H_q(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong 0, \qquad q=1,2 \\ H_0(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Beweis. Oben wurde gezeigt, daß die Komplexe $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ und $C(\tilde{X}_{n,1})$ azyklisch sind. Es wird nun zunächst gezeigt, daß die folgende 0-Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 \xrightarrow{\partial^{(m-1,m)}_{(2)}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 \xrightarrow{\partial^{(m-1,m)}_{(1)}} \\ &\xrightarrow{\partial^{(m-1,m)}_{(1)}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \to 0 \end{aligned}$$

exakt ist bei $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$, $q \neq 0$.
Für die Kettengruppe $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ hat man:

$$\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 = C_1(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$$

und es folgt für den Rand einer 2-Kette:

$$\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(c_1^{(m-1)}\otimes c_1^{(m)}\right) \;=\; (\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_1^{(m)}+(-1)c_1^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)})$$

wobei:

$$\begin{aligned}(\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_1^{(m)} &\in C_0(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})\\ c_1^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)}) &\in C_1(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C_0(\tilde{X}_{n,1})\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}^{(k)})=0$, $k=m-1,m$, folgt $\mathrm{Kern}(\partial_{(2)}^{(m-1,m)})=0$.
Für die Kettengruppe $\Big[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_1$ hat man:

$$\Big[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_1 \;=\; C_1(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C_0(\tilde{X}_{n,1})\oplus C_0(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$$

und es folgt für den Rand einer 1-Kette:

$$\partial_{(1)}^{(m-1,m)}\left(c_1^{(m-1)}\otimes c_0^{(m)}+c_0^{(m-1)}\otimes c_1^{(m)}\right) \;=\; (\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_0^{(m)}+c_0^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)})$$

wobei:

$$(\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_0^{(m)},\, c_0^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)}) \;\in\; C_0(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C_0(\tilde{X}_{n,1})$$

Wegen $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}^{(k)})=0$, $k=m-1,m$, verschwindet der Rand einer 1-Kette also nur dann, wenn gilt:

$$(\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_0^{(m)}+c_0^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)}) \;=\; 0$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden, wenn gilt: $c_0^{(m-1)}=\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)}$ und $c_0^{(m)}=-(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)})$.
Für die ursprüngliche 1-Kette folgt dann:

$$\begin{aligned}c_1^{(m-1)}\otimes c_0^{(m)}+c_0^{(m-1)}\otimes c_1^{(m)} &= c_1^{(m-1)}\otimes(\partial_{(1)}^{(m)}c_1^{(m)})-(\partial_{(1)}^{(m-1)}c_1^{(m-1)})\otimes c_1^{(m)}=\\ &= \partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(c_1^{(m-1)}\otimes c_1^{(m)}\right)\end{aligned}$$

Damit hat man gezeigt, daß: $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}^{(m-1,m)})=\mathrm{Bild}(\partial_{(2)}^{(m-1,m)})$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{Kern}(\partial_{(0)}^{(m-1,m)})/\mathrm{Bild}(\partial_{(1)}^{(m-1,m)})\cong\mathbf{Z}$. Dazu beachte man, daß alle 0-Ketten Zyklen sind und daß im Quotienten nach $\mathrm{Bild}(\partial_{(1)}^{(m-1,m)})$ alle 0-Ketten identifiziert werden durch: $\tilde{z}_{m-1}\otimes\tilde{z}_m=\gamma(\tilde{z}_{m-1}\otimes\tilde{z}_m)$ für alle Generatoren γ von $U_{n,2}$. $\square$

3.1.2 Freie Auflösung von Z für $U_{n,2}$

Lemma 3.1.3 (Modulstruktur) *Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein $U_{n,2}$-Linksmodul.*

Beweis. Wir folgen im wesentlichen der Argumentation von Brady [7].
In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß die Abbildung $\Phi^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(C(\tilde{X}_{n+1,1}))$ eine augmentationserhaltende Kettenabbildung ist. $\Phi^{(m-1)}$ ist für $\alpha' \in \mathbf{Z}U_{n+1,1}$ und $\tilde{z}_{m-1} \in C_0(\tilde{X}_{n+1,1})$ auf 0-Ketten definiert durch:

$$\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\alpha'\, \tilde{z}_{m-1}) \quad = \quad \phi(\gamma)(\alpha')\, \tilde{z}_{m-1}$$

und für $\alpha' \in \mathbf{Z}U_{n+1,1}$ und $\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \in C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ auf 1-Ketten durch:

$$\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\alpha'\, \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j}) \quad = \quad \phi(\gamma)(\alpha') \sum_{k=m}^{m+n} \left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma))\right)_j^k \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,k},$$

Hierbei bezeichnet ϕ den (injektiven) Homomorphismus $\phi : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ und dessen Erweiterung auf $\mathbf{Z}U_{n,1}$, also $\phi : \mathbf{Z}U_{n,1} \to \mathrm{End}(\mathbf{Z}U_{n+1,1})$. Und $J^{(m-1)}(\phi(\gamma)) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+1,1}, n+1)$ ist die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\phi(\gamma) \in \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ zu $\gamma \in U_{n,1}$.
Die Abbildung $\Phi^{(m-1)}$ genügt für $\gamma' \in U_{n+1,1}$ und $\tilde{c} \in C(\tilde{X}_{n+1,1})$ den beiden folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\gamma'\, \tilde{c}) &= \phi(\gamma)(\gamma')\, \Phi^{(m-1)}(\tilde{c}) \\
\Phi^{(m-1)}(\gamma_a\gamma_b)(\gamma'\, \tilde{c}) &= \Phi^{(m-1)}(\gamma_b)(\Phi^{(m-1)}(\gamma_a)(\gamma'\, \tilde{c})),
\end{aligned}$$

Die erste Eigenschaft folgt direkt mit der Definition der Abbildung $\Phi^{(m-1)}$. Die zweite Eigenschaft ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(m-1)}(\gamma_a\gamma_b)(\gamma'\, \tilde{z}_{m-1}) = \\
&\quad = \phi(\gamma_a\gamma_b)(\gamma')\, \Phi^{(m-1)}(\gamma_a\gamma_b)(\tilde{z}_{m-1}) = \\
&\quad = \phi(\gamma_b)(\phi(\gamma_a)(\gamma'))\, \Phi^{(m-1)}(\gamma_b)(\Phi^{(m-1)}(\gamma_a)(\tilde{z}_{m-1})) = \\
&\quad = \Phi^{(m-1)}(\gamma_b)(\Phi^{(m-1)}(\gamma_a)(\gamma'\, \tilde{z}_{m-1})) \\
&\Phi^{(m-1)}(\gamma_a\gamma_b)(\gamma'\, \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,k}) = \\
&\quad = \phi(\gamma_a\gamma_b)(\gamma')\, \Phi^{(m-1)}(\gamma_a\gamma_b)(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,k}) = \\
&\quad = \phi(\gamma_a\gamma_b)(\gamma') \sum_j \left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a\gamma_b))\right)_k^j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} = \\
&\quad = \phi(\gamma_b)(\phi(\gamma_a)(\gamma')) \sum_{j,i} \phi(\gamma_b)\left(\left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a))\right)_k^i\right) \left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_b))\right)_i^j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} = \\
&\quad = \sum_{j,i} \phi(\gamma_b)\left(\phi(\gamma_a)(\gamma') \left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a))\right)_k^i\right) \left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_b))\right)_i^j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} = \\
&\quad = \Phi^{(m-1)}(\gamma_b)\left(\Phi^{(m-1)}(\gamma_a)(\gamma'\, \tilde{\gamma}^{(m-1}_{m-1,k})\right)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im dritten Schritt die Kettenregel des freien Differentialkalküls verwendet, und zwar in der Form:

$$J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a\gamma_b)) = \phi(\gamma_b)\left(J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a))\right) J^{(m-1)}(\phi(\gamma_a))$$

Damit erlaubt die freie Auflösung $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ für $U_{n+1,1}$ im Sinne von Brady [7], Definition 1.1, eine Wirkung von $U_{n,1}$, die *kompatibel* ist mit dem Homomorphismus $\phi : U_{n,1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$.
Für Gruppen H und K, einen Gruppenhomomorphismus $\phi : H \rightarrow \mathrm{Aut}(K)$ und $G = H \ltimes K$ erlaubt nach Brady eine freie Auflösung $\varepsilon : F \rightarrow \mathbf{Z}$ für K eine Wirkung von H, kompatibel mit ϕ, wenn für alle $h \in H$ eine augmentationserhaltende Kettenabbildung $\tau(h) : F \longrightarrow F$ existiert, die den folgenden beiden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned} \tau(h)(k\,f) &= \phi(h)(k)\,\tau(h)(f), \qquad \forall k \in K, \quad \forall f \in F \\ \tau(h)\,\tau(h') &= \tau(h\,h'), \qquad \forall h, h' \in H \end{aligned}$$

Auf unseren Fall übertragen hat man $H = U_{n,1}$, $K = U_{n+1,1}$, $G = U_{n,2}$, $F = C(\tilde{X}_{n+1,1})$ und $\tau = \Phi^{(m-1)}$. Im Unterschied zu Brady, wo H von rechts als Automorphismus von K wirkt: $h\,k = \phi(h)(k)\,h$ als Relationen in $H \ltimes K$, wirkt bei uns $U_{n,1}$ von links als Automorphismus von $U_{n+1,1}$: $\gamma'\,\gamma = \gamma\phi(\gamma)(\gamma')$, $\gamma' \in U_{n+1,1}$, $\gamma \in U_{n,1}$, als Relationen in $U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$.
Für eine freie Auflösung $\varepsilon' : P \rightarrow \mathbf{Z}$ für H versieht Brady mit Hilfe der Abbildung τ mit den obigen Eigenschaften den Komplex $F \otimes P$ mit der Struktur eines G-Moduls.
Auf unseren Fall übertragen hat man $P = C(\tilde{X}_{n,1})$, und mittels der Abbildung $\Phi^{(m-1)}$ wird der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ mit der Struktur eines $U_{n,2}$-Moduls versehen.
Angesichts der Injektivität des Homomorphismus $\phi : U_{n,1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ identifizieren wir im weiteren wieder Elemente $\gamma \in U_{n,1}$ mit ihren Bildern $\phi(\gamma) \in \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ in der Automorphismengruppe von $U_{n+1,1}$ und schreiben für die Jacobi-Matrizen $J^{(m-1)}(\gamma)$, $\gamma \in \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$.
Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ werde nun mit der Struktur eines (Links-)Moduls bzgl. $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ versehen. Jedes Element von $U_{n,2}$ hat einen eindeutigen Ausdruck als $\gamma'\gamma$ mit $\gamma' \in U_{n+1,1}$ und $\gamma \in U_{n,1}$. Man setze:

$$\begin{aligned} (\gamma'\gamma)\tilde{z}_{m-1} &= \gamma'\tilde{z}_{m-1}, \qquad \tilde{z}_{m-1} \in C_0(\tilde{X}_{n+1,1}) \\ (\gamma'\gamma)\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} &= \sum_k \gamma' \left(J^{(m-1)}(\gamma^{-1})\right)^k_j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,k}, \qquad \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \in C_1(\tilde{X}_{n+1,1}) \end{aligned}$$

Da wir bereits zuvor $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ als $U_{n,1}$-Rechtsmodul definiert haben mittels der Abbildungen $\Phi^{(m-1)}(\gamma)$, $\gamma \in U_{n,1}$, definieren wir (im Unterschied) zu Brady) $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ also als $U_{n,1}$-Linksmodul durch Konvertierung der Modulstruktur, also mittels der Abbildungen $\Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})$, $\gamma \in U_{n,1}$.
Der Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ werde mit der Struktur eines $U_{n,2}$-(Links-)Moduls, trivial bzgl. $U_{n+1,1}$, versehen durch die Definition:

$$\begin{aligned} (\gamma'\gamma)\tilde{z}_m &= \gamma\tilde{z}_m, \qquad \tilde{z}_m \in C_0(\tilde{X}_{n,1}) \\ (\gamma'\gamma)\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,j} &= \gamma\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,j}, \qquad \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \in C_1(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

Damit ist auch der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ein $U_{n,2}$-(Links-)Modul, und zwar durch die diagonale $U_{n,2}$-(Links-)Wirkung:

$$(\gamma'\gamma)(\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{z}_m) = (\gamma'\tilde{z}_{m-1}) \otimes (\gamma\tilde{z}_m)$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{z}_m \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \\
(\gamma'\gamma)(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m) &= \left(\sum_l \gamma' \left(J^{(m-1)}(\gamma^{-1})\right)^l_j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,l}\right) \otimes (\gamma\tilde{z}_m) \\
& \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 \\
(\gamma'\gamma)(\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) &= (\gamma'\tilde{z}_{m-1}) \otimes (\gamma\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) \\
& \tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 \\
(\gamma'\gamma)(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) &= \left(\sum_l \gamma' \left(J^{(m-1)}(\gamma^{-1})\right)^l_j \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,l}\right) \otimes (\gamma\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) \\
& \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Lemma 3.1.4 (Freier Modul) *Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist freier $U_{n,2}$-Linksmodul. Insbesondere gilt: $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0$ wird als freier $U_{n,2}$-Modul erzeugt vom Element $\{\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{z}_m\}$, $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1$ wird erzeugt von den Elementen $\{\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}, \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m\}$, wobei $j = m, \ldots, m+n$ und $k = m+1, \ldots, m+n$ ist, und $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ wird erzeugt von $\{\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}\}$, wobei wieder $j = m, \ldots, m+n$ und $k = m+1, \ldots, m+n$ ist.*

Beweis. Das Lemma formuliert Aussagen eines Satzes von Brady [7], Satz 1.2. Und zwar zeigt Brady, daß für einen freien K-Modul F, für einen freien H-Modul P und für eine mit $\phi : H \to \mathrm{Aut}(K)$ kompatible Wirkung τ von H auf F das Produkt $F \otimes P$ ein freier Modul bzgl. $G = H \ltimes K$ ist, und insbesondere, daß $F \otimes P$ G-frei ist auf der Menge $\{f_i \otimes p_j\}_{i \in I, j \in J}$, wenn F K-frei ist auf $\{f_i\}_{i \in I}$, und P H-frei auf $\{p_j\}_{j \in J}$.
Wir folgen zunächst dem Beweis von Brady und übertragen dann die Ergebnisse auf unseren Fall. Brady versieht F mit Hilfe der Abbildung τ mit der Struktur eines G-Moduls, P mit der Struktur eines G-Moduls, der trivial ist bzgl. K, und $F \otimes P$ durch die diagonale Wirkung mit der Struktur eines G-Moduls. Es bleibt daher zu zeigen, daß $F \otimes P$ G-frei ist.
Nach Voraussetzung ist P freier H-Modul und damit isomorph zu einer direkten Summe von Kopien des freien H-Moduls $\mathbf{Z}H$. Daher reicht es aus zu zeigen, daß $F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}H$ frei bzgl. G ist.
Dazu verwendet Brady die folgenden Aussagen über induzierte und eingeschränkte Moduln, siehe Brown [8], S.67ff.
Für einen K-Modul F und $K \subset G$ bezeichnet $\mathrm{Ind}_K^G(F)$ die sogenannte Induktion, den G-Modul $\mathbf{Z}G \otimes_{\mathbf{Z}K} F$, und für einen G-Modul F und $K \subset G$ bezeichnet $\mathrm{Res}_K^G(F)$ die sogenannte Einschränkung, den durch die Einschränkung von G auf K erhaltenen K-Modul. Es gilt folgendes:
i) Ist F ein freier K-Modul, dann ist $\mathrm{Ind}_K^G(F)$ ein freier G-Modul. Ist insbesondere F K-frei auf $\{f_i\}_{i \in I}$, so ist $\mathrm{Ind}_K^G(F)$ G-frei auf $\{1 \otimes f_i\}_{i \in I}$, $1 \in \mathbf{Z}G$.
ii) Ist F ein G-Modul und $K \subset G$, dann gibt es einen Isomorphismus von G-Moduln, und zwar:

$\mathrm{Ind}_K^G \mathrm{Res}_K^G(F) \cong \mathbf{Z}[G/K] \otimes_{\mathbf{Z}} F$, wobei $\mathbf{Z}[G/K] \otimes_{\mathbf{Z}} F$ die diagonale G-Wirkung gegeben wird. Der Isomorphismus ist gegeben durch $g \otimes_{\mathbf{Z}K} f \to h \otimes_{\mathbf{Z}} g f$, für $g \in G$, $h \in H = G/K$ und $f \in F$, mit dem Inversen $h \otimes_{\mathbf{Z}} f \to h \otimes_{\mathbf{Z}K} h^{-1} f$.
Es ist $\mathrm{Res}_K^G(F)$ der ursprüngliche K-Modul F. Und da F frei bzgl. K ist, ist $\mathrm{Ind}_K^G(F)$ frei bzgl. G. Und wegen $H = G/K$ folgt, daß auch $\mathbf{Z}H \otimes_{\mathbf{Z}} F \cong F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}H$ frei ist bzgl. G. Ist insbesondere F K-frei auf $\{f_i\}_{i\in I}$, so ist $F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}H$ G-frei auf $\{f_i \otimes 1\}_{i \in I}$, $1 \in \mathbf{Z}H$.
Es folgt, daß $F \otimes P$ ein frei ist bzgl. G, und insbesondere, daß, wenn P H-frei auf $\{p_j\}_{j\in J}$ ist, $F \otimes P$ G-frei ist auf der Menge $\{f_i \otimes p_j\}_{i\in I, j \in J}$.
Auf unserem Fall übertragen hat man: $F = C(\tilde{X}_{n+1,1})$, $K = U_{n+1,1}$, $P = C(\tilde{X}_{n,1})$, $G = U_{n,2}$ und $H = G/K = U_{n,1}$.
Oben wurden $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ und $C(\tilde{X}_{n,1})$ und damit $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ mit der Struktur von $U_{n,2}$-(Links-)Moduln versehen. Es ist zu zeigen, daß $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ $U_{n,2}$-frei ist. Nach Voraussetzung ist $C(\tilde{X}_{n,1})$ freier $U_{n,1}$-(Links-)Modul und damit isomorph zu einer direkten Summe von Kopien des freien $U_{n,1}$-Moduls $\mathbf{Z}U_{n,1}$. Und zwar gilt ja: $C_0(\tilde{X}_{n,1}) \cong \mathbf{Z}U_{n,1}$ und $C_1(\tilde{X}_{n,1}) \cong (\mathbf{Z}U_{n,1})^n$. Daher reicht es aus zu zeigen, daß $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}U_{n,1}$ frei bzgl. $U_{n,2}$ ist. Dies folgt mit den obigen Argumenten. Es ist $\mathrm{Res}^{U_{n,2}}_{U_{n+1,1}}(C(\tilde{X}_{n+1,1}))$ der ursprüngliche $U_{n+1,1}$-Modul $C(\tilde{X}_{n+1,1})$. Und da $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ frei bzgl. $U_{n+1,1}$ ist, ist $\mathrm{Ind}^{U_{n,2}}_{U_{n+1,1}}(C(\tilde{X}_{n+1,1}))$ frei bzgl. $U_{n,2}$. Und wegen $U_{n,1} = U_{n,2}/U_{n+1,1}$ folgt, daß auch $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}U_{n,1}$ frei ist bzgl. $U_{n,2}$. Und damit ist $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ $U_{n,2}$-frei.
Da insbesondere $C_0(\tilde{X}_{n+1,1})$ $U_{n+1,1}$-frei ist auf $\{\tilde{z}_{m-1}\}$ und $C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ $U_{n+1,1}$-frei auf $\{\tilde{\gamma}^{(m)}_{m-1,j}\}$, $j = m, \ldots, m+n$, sowie, da $C_0(\tilde{X}_{n,1})$ $U_{n,1}$-frei ist auf $\{\tilde{z}_m\}$ und $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ $U_{n,1}$-frei auf $\{\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}\}$, $k = m+1, \ldots, m+n$, folgt erstens, daß $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0$ $U_{n,2}$-frei ist auf $\{\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{z}_m\}$, zweitens, daß $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1$ $U_{n,2}$-frei ist auf $\{\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}, \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m\}$, mit $j = m, \ldots, m+n$ und $k = m+1, \ldots, m+n$, und schließlich drittens, daß $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ $U_{n,2}$-frei ist auf $\{\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}\}$, mit $j = m, \ldots, m+n$ und $k = m+1, \ldots, m+n$. □

Beispiel 3.1.5 (Rand) Der Rand einer Kette kann damit in Elementen der Basis des freien $U_{n,2}$-Moduls $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ ausgedrückt werden. Als Beispiel betrachte man den Rand der Kette $\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$:

$$\partial^{(m-1,m)}_{(2)}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) \quad = \quad \partial^{(m-1)}_{(1)}\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} - \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \partial^{(m)}_{(1)}\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}$$

Der erste Term lautet:

$$\begin{aligned} \partial^{(m-1)}_{(1)}\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} &= (1 - \gamma_{m-1,j})\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} = \\ &= (1 - \gamma_{m-1,j})(\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) \end{aligned}$$

Der zweite Term lautet:

$$\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \partial^{(m)}_{(1)}\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k} \quad = \quad \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes (1 - \gamma_{m,k})\tilde{z}_m =$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m - \gamma_{m,k} \left(\Phi^{(m-1)}(\gamma_{m,k})(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j}) \otimes \tilde{z}_m\right) = \\ &= \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m - \gamma_{m,k} \sum_{l=m,\dots,m+n} \left(J^{(m-1)}(\gamma_{m,k})\right)^l_j (\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,l} \otimes \tilde{z}_m) \end{aligned}$$

Lemma 3.1.6 *Für die Kettengruppen des Komplexes $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ freier $U_{n,2}$-Linksmoduln gilt:*

$$\begin{aligned} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 &\cong \mathbf{Z}U_{n,2} \\ \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 &\cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{2n+1} \\ \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 &\cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n} \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussagen folgen mit den Aussagen des vorangegangenen Lemma.
Einerseits folgt oben mit Hilfe des Satzes von Brady, daß die Kettengruppe $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ freier $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul vom Rang $(n+1)n$ ist, erzeugt von der Menge $\{\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}\}$, wobei $j = m, \dots, m+n$ und $k = m+1, \dots, m+n$ ist. Jedes Element von $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ hat also eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Form:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1 \\ k=1,\dots,n}} \eta_{j,k}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}), \qquad \eta_{j,k} \in \mathbf{Z}U_{n,2}$$

Andererseits ist auch $(\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n} = \underbrace{\mathbf{Z}U_{n,2} \oplus \dots \oplus \mathbf{Z}U_{n,2}}_{(n+1)n}$ freier $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul vom Rang $(n+1)n$.
$(\mathbf{Z}U_{n,2})^{((n+1)n}$ ist $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Linksmodul durch die diagonale Wirkung:

$$\eta\,(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{n+1,n}) \quad = \quad (\eta\,\eta_{1,1}, \dots, \eta\,\eta_{n+1,n}), \qquad \eta, \eta_{j,k} \in \mathbf{Z}U_{n,2}$$

Und ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $(\mathbf{Z}U_{n,2})^{((n+1)n}$ über $\mathbf{Z}U_{n,2}$ ist gegeben durch die Menge:

$$\{(\underbrace{1,0,\dots,0}_{(n+1)n}), (\underbrace{0,1,0,\dots,0}_{(n+1)n}), \dots (\underbrace{0,\dots,0,1}_{(n+1)n})\}$$

Jedes Element von $(\mathbf{Z}U_{n,2})^{((n+1)n}$ hat also eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Form:

$$(\eta_{1,1}, \dots, \eta_{n+1,n}) = \eta_{1,1}(1,0,\dots,0) + \dots + \eta_{n+1,n}(0,\dots,0,1) \qquad \eta_{j,k} \in \mathbf{Z}U_{n,2}$$

Der Isomorphismus:

$$\mu : \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 \quad \to \quad (\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n}$$

ist nun gegeben durch:

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \eta_{j,k}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})\right) = \\
&= \quad (\eta_{1,1},\dots,\eta_{n+1,n}) \in (\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n}
\end{aligned}$$

mit dem offensichtlichen Inversen.
Und μ ist ein Modul-Isomorphismus:

$$\begin{aligned}
\mu&\left(\eta \sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \eta_{j,k}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})\right) = \\
&= \mu\left(\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \eta\,\eta_{j,k}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})\right) = \\
&= (\eta\,\eta_{1,1},\dots,\eta\,\eta_{n+1,n}) = \\
&= \eta\,(\eta_{1,1},\dots,\eta_{n+1,n}) = \\
&= \eta\,\mu\left(\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \eta_{j,k}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})\right)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 \cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n}$ ist.
Der Beweis der Isomorphismen $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \cong \mathbf{Z}U_{n,2}$ und $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 \cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{2n+1}$ kann entsprechend geführt werden $\square$

Man betrachte anstelle des Randes $\partial^{(m-1,m)}_{(0)} : \left[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \to 0$ die sogenannte Augmentationsabbildung.

Definition 3.1.7 Die *Augmentation* $\varepsilon^{(m-1,m)} : \left[C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \cong \mathbf{Z}U_{n,2} \to \mathbf{Z}$, ist definiert durch:

$$\varepsilon^{(m-1,m)}(\alpha) = \varepsilon^{(m-1,m)}(\sum_i n_i\gamma_i) \quad = \quad \sum_i n_i, \qquad \alpha\in\mathbf{Z}U_{n,2}, \quad n_i\in\mathbf{Z}, \quad \gamma_i\in U_{n,2}$$

Lemma 3.1.8 (Freie Auflösung) *Der augmentierte Komplex zu* $C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ *ist eine freie Auflösung (der Länge 2) von* $\mathbf{Z}$ *über* $\mathbf{Z}U_{n,2}$.

Beweis. Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein azyklischer Komplex freier $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Moduln, daher eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U_{n,2}$. Die folgende 0-Sequenz freier $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Moduln ist also exakt:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \to & \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 & \overset{\partial^{(m-1,m)}_{(2)}}{\longrightarrow} & \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 & \overset{\partial^{(m-1,m)}_{(1)}}{\longrightarrow} \\ & \overset{\partial^{(m-1,m)}_{(1)}}{\longrightarrow} & \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 & \overset{\varepsilon^{(m-1,m)}}{\longrightarrow} & \mathbf{Z} & \to \quad 0 \end{array}$$

Exaktheit bei $\left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \cong \mathbf{Z}U_{n,2}$ kann man auch unmittelbar wie folgt einsehen. $\mathrm{Kern}(\varepsilon^{(m-1,m)})$ besteht aus Elementen $1-\gamma$, $\gamma \in U_{n,2}$. Diese Elemente haben einen eindeutigen Ausdruck der Form:

$$1-\gamma \quad = \quad \sum_{j=m}^{m+n} \alpha_j(1-\gamma_{m-1,j}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} \beta_k(1-\gamma_{m,k}), \qquad \alpha_j, \beta_k \in U_{n,2}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=m}^{m+n} \alpha_j(1-\gamma_{m-1,j}) + \sum_{k=m+1}^{m+n} \beta_k(1-\gamma_{m,k}) = \\ &= \quad \partial^{(m-1,m)}_{(1)} \left(\sum_{j=m}^{m+n} \alpha_j(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,j} \otimes \tilde{z}_m) + \sum_{k=m}^{m+n} \beta_k(\tilde{z}_{m-1} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,k}) \right) \end{aligned}$$

Damit hat man gezeigt, daß gilt: $\mathrm{Kern}(\varepsilon^{(m-1,m)}) = \mathrm{Bild}(\partial^{(m-1,m)}_{(1)})$. □

3.2 2-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe

Im folgenden wird zunächst für einen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} der 2-dimensionale äquivariante Komplex $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ definiert, der durch Iteration aus dem 1-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ mit Koeffizientenmodul $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ entsteht. Sodann werden unter der Voraussetzung gewisser Eigenschaften des Koeffizientenmoduls G_{m-2} wie Generizität oder Trivialität bzgl. $U_{n,2}$ die Homologiegruppen des 2-dimensionalen äquivarianten Komplexes explizit bestimmt. Es zeigt sich, daß analog zur Konstruktion des Komplexes dessen Homologiegruppen iterativ durch die Homologiegruppen gewisser 1-dimensionaler äquivarianter Komplexe bestimmt sind.

3.2.1 Definition 2-dimensionaler äquivarianter Kettenkomplexe

Für einen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} unterscheiden wir zunächst den 2-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$, der also durch Tensorierung des als freien $\mathbf{Z}U_{n,2}$-(Links-)Moduls definierten Produktkomplexes entsteht, und den 2-dimensionalen äquivarianten Komplex $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$, der durch Iteration aus dem 1-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ mit Koeffizientenmodul $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ entsteht.

Definition 3.2.1 Es sei G_{m-2} ein $U_{n,2}$-Rechtsmodul. Dann ist der 2-dimensionale äquivariante Komplex $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ mit Koeffizienten in G_{m-2} definiert durch die Kettengruppen:

$$\begin{aligned} & G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q = \\ = \quad & G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} C_{p_{m-1}}(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1}) \right) \end{aligned}$$

und Randhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \partial_{(q)} : G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} & \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \to \\ \to \quad G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} & \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q-1} \end{aligned}$$

die mit den Elementen $g \in G_{m-2}$ vertauschen:

$$\begin{aligned} \partial_{(q)}(g \otimes c_q) &= g \otimes \partial_{(q)}(c_q) \\ & \quad c_q \in \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \end{aligned}$$

Lemma 3.2.2 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 &\cong G_{m-2} \\ G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 &\cong (G_{m-2})^{2n+1} \\ G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 &\cong (G_{m-2})^{(n+1)n} \end{aligned}$$

Beweis. Oben wurde gezeigt:

$$\begin{aligned} \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 &\cong \mathbf{Z}U_{n,2} \\ \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_1 &\cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{2n+1} \\ \left[C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 &\cong (\mathbf{Z}U_{n,2})^{(n+1)n} \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \mathbf{Z}U_{n,2} \cong G_{m-2}$ unmittelbar die Behauptung. □

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß für einen $P_nU_{n,1}$-Modul G_{m-1}, gegeben durch eine Abbildung:

$$\Phi_g^{(m-1)} : P_nU_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$$

der Komplex $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ein P_n-Modul ist durch die Abbildung:

$$\begin{aligned} \chi^{(m-1,m)} : P_n &\rightarrow \operatorname{Aut}(G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})) \\ \chi^{(m-1,m)}(\gamma) &= \Phi_g^{(m-1)}(\gamma\, \Phi^{(m)}(\gamma)), \qquad \gamma \in P_n \end{aligned}$$

Entsprechend gilt, daß für einen $P_{n+1}U_{n+1,1}$-Modul G_{m-2}, gegeben durch eine Abbildung:

$$\Phi_g^{(m-2)} : P_{n+1}U_{n+1,1} \rightarrow \operatorname{Aut}(G_{m-2})$$

der Komplex $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ ein P_{n+1}-Modul ist durch die Abbildung:

$$\begin{aligned} \chi^{(m-2,m-1)} : P_{n+1} &\rightarrow \operatorname{Aut}(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})) \\ \chi^{(m-2,m-1)}(\gamma) &= \Phi_g^{(m-2)}(\gamma\, \Phi^{(m-1)}(\gamma)), \qquad \gamma \in P_{n+1} \end{aligned}$$

Wegen $P_{n+1} = P_n \ltimes U_{n,1}$ und $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ gilt insbesondere also, daß für einen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} der Komplex $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ ein $U_{n,1}$-Modul ist. Der Koeffizientenmodul G_{m-1} in $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ kann also selbst als äquivarianter Komplex gewählt werden:

$$G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$$

und die G_{m-1} als $U_{n,1}$-Modul charakterisierende Abbildung ist also:

$$\Phi_g^{(m-1)}(\gamma) = \chi^{(m-2,m-1)}(\gamma) = \Phi_g^{(m-2)}(\gamma\, \Phi^{(m-1)}(\gamma)), \qquad \gamma \in U_{n,1}$$

Auf diese Weise hat man durch Iteration einen 2-dimensionalen äquivarianten Komplex konstruiert.

Definition 3.2.3 Es sei G_{m-2} ein $U_{n,2}$-Rechtsmodul. Dann ist der 2-dimensionale iterierte äquivariante Komplex $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ definiert durch die Kettengruppen:

$$\begin{aligned} &\left[\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q = \\ &= \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} \left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_{p_{m-1}}(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

und Randhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \partial_{(q)}^{(m-1,m)} : &\left[\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \rightarrow \\ \rightarrow &\left[\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \rightarrow \end{aligned}$$

definiert durch:

$$\begin{aligned} \partial_{(q)}^{(m-1,m)}\left((g \otimes c_{p_{m-1}}^{(m-1)}) \otimes c_{p_m}^{(m)}\right) &= \partial_{(p_{m-1})}^{(m-1)}(g \otimes c_p^{(m-1)}) \otimes c_{p_m}^{(m)} + \\ &+(-1)^{p_{m-1}}(g \otimes c_{p_{m-1}}^{(m-1)}) \otimes \partial_{(p_m)}^{(m)}(c_{p_m}^{(m)}) \end{aligned}$$

Lemma 3.2.4 *Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\Big[\Big(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_0 &\cong G_{m-2}\\
\Big[\Big(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_1 &\cong (G_{m-2})^{2n+1}\\
\Big[\Big(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_2 &\cong (G_{m-2})^{(n+1)n}
\end{aligned}$$

Beweis. In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß für einen $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul G_{m-1} gilt:

$$\begin{aligned}
G_{m-1}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_0(\tilde{X}_{n,1}) &\cong G_{m-1}\\
G_{m-1}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1}) &\cong (G_{m-1})^n
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für einen $\mathbf{Z}U_{n+1,1}$-Modul G_{m-2}:

$$\begin{aligned}
G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_0(\tilde{X}_{n+1,1}) &\cong G_{m-1}\\
G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_1(\tilde{X}_{n+1,1}) &\cong (G_{m-1})^{n+1}
\end{aligned}$$

Setzt man nun $G_{m-1} = G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_p(\tilde{X}_{n,1})$, $p = 0, 1$, so folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2.5 *Es gibt einen Isomorphismus von Kettenkomplexen:*

$$G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}}\Big(C(\tilde{X}_{n+1,1})\otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big) \cong \Big(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$$

definiert durch:

$$\begin{aligned}
\mu\Big(g\otimes(\tilde{c}^{(m-1)}\otimes\tilde{c}^{(m)})\Big) &= (g\otimes\tilde{c}^{(m-1)})\otimes\tilde{c}^{(m)}\\
&\in \Big(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})
\end{aligned}$$

für alle $g\in G_{m-2}$, $\tilde{c}^{(m-1)}\in C(\tilde{X}_{n+1,1})$ *und* $\tilde{c}^{(m)}\in C(\tilde{X}_{n,1})$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Abbildungen μ konsistent mit den verschiedenen Modulstrukturen sind und mit den Randhomomorphismen vertauschen.
Man erinnere zunächst die verschiedenen Modulstrukturen.

- Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ war definiert als (freier) $U_{n+1,1}$-Linksmodul, der Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ als (freier) $U_{n,1}$-Linksmodul und der Koeffizientenmodul G_{m-2} als Rechtsmodul bzgl. $U_{n,2} = U_{n,1}\ltimes U_{n+1,1}$.

- $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ war außerdem ein $U_{n,1}$-Rechtsmodul mittels der mit $\phi: U_{n,1}\to \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ kompatiblen Abbildung $\Phi^{(m-1)}: U_{n,1}\to\mathrm{Aut}(C(\tilde{X}_{n+1,1}))$, also durch:

$$\tilde{c}^{(m-1)}\gamma = \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}),\qquad \gamma\in U_{n,1}$$

  bzw. (durch Konvertierung der Modulstruktur) ein $U_{n,1}$-Linksmodul durch:

$$\gamma\,\tilde{c}^{(m-1)} = \Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})$$

- $C(\tilde{X}_{n,1})$ wurde als ein trivialer $U_{n+1,1}$-Linksmodul betrachtet:

$$\gamma'\,\tilde{c}^{(m)} \;=\; \tilde{c}^{(m)}, \qquad \gamma' \in U_{n+1,1}$$

- $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ war $U_{n,2}$-Linksmodul durch die diagonale Wirkung. Für $\gamma'\,\gamma \in U_{n,2}$ mit $\gamma' \in U_{n+1,1}$, $\gamma \in U_{n,1}$:

$$\begin{aligned} \gamma'\gamma\,(\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}) &= (\gamma'\gamma\,\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} (\gamma\,\tilde{c}^{(m)}) = \\ &= (\gamma'\,\Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})) \otimes_{\mathbf{Z}} (\gamma\,\tilde{c}^{(m)}) \end{aligned}$$

Man beachte die Verträglichkeit dieser Definition mit der Struktur von $U_{n,2}$:

$$\begin{aligned} &\gamma'\gamma\,(\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}) = \\ &= \gamma\,\phi(\gamma)(\gamma')\,(\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}) = \\ &= \gamma\,\Big(\phi(\gamma)(\gamma')\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}\Big) = \\ &= \Big(\Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})(\phi(\gamma)(\gamma')\,\tilde{c}^{(m-1)})\Big) \otimes_{\mathbf{Z}} (\gamma\,\tilde{c}^{(m)}) = \\ &= \Big(\phi(\gamma^{-1})(\phi(\gamma)(\gamma'))\,\Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})\Big) \otimes_{\mathbf{Z}} (\gamma\,\tilde{c}^{(m)}) = \\ &= (\gamma'\,\Phi^{(m-1)}(\gamma^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})) \otimes_{\mathbf{Z}} (\gamma\,\tilde{c}^{(m)}) \end{aligned}$$

- Und schließlich war $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ ein $U_{n,1}$-Rechtsmodul durch:

$$\begin{aligned} &(g\,\alpha' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{c}^{(m-1)})\,\gamma = \\ &= g\,\gamma\,\phi(\gamma)(\alpha') \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}), \qquad \alpha' \in \mathbf{Z}U_{n+1,1} \end{aligned}$$

Hierbei beachte man die Verträglichkeit bzgl. $\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}}$:

$$\begin{aligned} &(g\,\alpha' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{c}^{(m-1)})\,\gamma = \\ &= (g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \alpha'\,\tilde{c}^{(m-1)})\,\gamma = \\ &= g\,\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\alpha'\,\tilde{c}^{(m-1)}) = \\ &= g\,\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \phi(\gamma)(\alpha')\,\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}) = \\ &= g\,\gamma\,\phi(\gamma)(\alpha') \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}) \end{aligned}$$

Zur Konsistenz der Abbildung μ mit den Modulstrukturen betrachte man nun ein typisches Element von $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \Big(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big)$ in verschiedenen Darstellungen und zeige, daß die Bilder unter μ identisch sind.

Es seien $\gamma', \varrho' \in U_{n+1,1}$ und $\gamma, \varrho \in U_{n,1}$. Man betrachte das folgende typische Element und verschiebe die Koeffizienten von G_{m-2} nach rechts:

$$\begin{aligned} & g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \;& g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \varrho'\varrho \left(\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\,\tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \;& g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \varrho' \left(\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \varrho\,\gamma\,\tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \;& g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\varrho'\,\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \varrho\,\gamma\,\tilde{c}^{(m)}\right) \in \\ \in \;& G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Definition von $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ als $U_{n,1}$-Linksmodul verwendet, und im dritten Schritt wurden die Eigenschaften von $\Phi^{(m-1)}$, sowie die Definition von $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ als $U_{n+1,1}$-Linksmodul verwendet.
Die Bilder unter μ sind einerseits:

$$\begin{aligned} & \mu\left(g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\tilde{c}^{(m)}\right)\right) = \\ = \;& \left(g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} \in \\ \in \;& \left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

andererseits:

$$\begin{aligned} & \mu\left(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\varrho'\,\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \varrho\,\gamma\,\tilde{c}^{(m)}\right)\right) = \\ = \;& \left(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \varrho'\,\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \varrho\,\gamma\,\tilde{c}^{(m)} \in \\ \in \;& \left(G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

Und die Bilder sind identisch:

$$\begin{aligned} & \left(g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \;& \left(g\,\varrho\,\phi(\varrho)(\varrho') \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \;& \left(g\,\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \phi(\varrho)(\varrho')\,\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \;& \left(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})\left(\phi(\varrho)(\varrho')\,\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right)\right)\,\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \;& \left(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \phi(\varrho^{-1})\,(\phi(\varrho)(\varrho')\,\gamma')\;\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \varrho\,\gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \;& \left(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \varrho'\,\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\Phi^{(m-1)}(\varrho^{-1})(\tilde{c}^{(m-1)})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \varrho\,\gamma\,\tilde{c}^{(m)} \in \\ \in \;& \left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

Hierbei wurden im dritten Schritt die Definition von $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ als $U_{n,1}$-Rechtsmodul verwendet, im vierten Schritt die Eigenschaften von $\Phi^{(m-1)}$.
Man betrachte nun das nämliche typische Element von $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ und verschiebe die Koeffizienten von $C(\tilde{X}_{n+1,1})$ und $C(\tilde{X}_{n,1})$ nach links:

$$\begin{aligned} & g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \quad & g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \gamma' \left(\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \quad & g\,\varrho'\varrho\,\gamma' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \gamma \left(\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}\right) = \\ = \quad & g\,\varrho'\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}\right) \in \\ \in \quad & G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Definition von $C(\tilde{X}_{n+1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ als $U_{n,1}$-Linksmodul verwendet, und im dritten Schritt die Relation:

$$\varrho\gamma' \quad = \quad \phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho$$

in $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$.
Das Bild $\mu\left(g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} (\gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \gamma\tilde{c}^{(m)})\right)$ wurde oben bereits angegeben. Andererseits hat man:

$$\begin{aligned} & \mu\left(g\,\varrho'\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} \left(\Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}} \tilde{c}^{(m)}\right)\right) = \\ = \quad & \left(g\,\varrho'\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{c}^{(m)} \in \\ \in \quad & \left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

Und die Bilder sind identisch:

$$\begin{aligned} & \left(g\,\varrho'\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \gamma'\,\tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \quad & \left(g\,\varrho'\varrho\,\gamma' \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{c}^{(m-1)}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \gamma\tilde{c}^{(m)} = \\ = \quad & \left(g\,\varrho'\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{c}^{(m-1)}\right) \gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{c}^{(m)} = \\ = \quad & \left(g\,\varrho'\phi(\varrho^{-1})(\gamma')\,\varrho\gamma \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{c}^{(m-1)})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} \tilde{c}^{(m)} \in \\ \in \quad & \left(G \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Relation in $U_{n,2} = U_{n,1} \ltimes U_{n+1,1}$ verwendet und im dritten Schritt die Definition von $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ als $U_{n,1}$-Rechtsmodul.
Damit ist die Konsistenz von μ mit den verschiedenen Modulstrukturen gezeigt. Es bleibt zu

zeigen, daß μ mit den Randhomomorphismen vertauscht.
Zur Identität $\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\,\mu = \mu\,\partial_{(2)}^{(m-1,m)}$ betrachte man einerseits den Rand:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(g_{j,k}\otimes(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})\right)=\\
&= g_{j,k}(1-\gamma_{m-1,m+1+j})\otimes(\tilde{z}_{m-1}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})-g_{j,k}\otimes(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m+1+j}\otimes\tilde{z}_m)+\\
&\quad+\sum_{l=1,\ldots,n+1} g_{j,k}\gamma_{m,m+k}\left(J^{(m-1)}(\gamma_{m,m+k})\right)_j^l\otimes(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+l}\otimes\tilde{z}_m)=\\
&= g'_k\otimes(\tilde{z}_{m-1}\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})+\sum_{l=1,\ldots,n+1} g_l\otimes(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+l}\otimes\tilde{z}_m)
\end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned}
g'_k &= g_{j,k}(1-\gamma_{m-1,j})\\
g_l &= g_{j,k}\gamma_{m,m+k}\left(J^{(m-1)}(\gamma_{m,m+k})\right)_j^l-\delta_{l,j}\,g_{j,k}, \qquad l=1,\ldots,n+1
\end{aligned}$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol ist, und andererseits den Rand (des Bildes der betrachteten 2-Kette unter μ):

$$\begin{aligned}
&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left(g_{j,k}\otimes\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\right)\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}\right)=\\
&= \left(g_{j,k}\otimes\partial_{(1)}^{(m-1)}(\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j})\right)\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}-\left(g_{j,k}\otimes\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\right)\otimes\partial_{(1)}^{(m)}(\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k})=\\
&= (g_{j,k}\otimes(1-\gamma_{m-1,m+1+j})\,\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}+\\
&\quad-\left(g_{j,k}\otimes\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+j}\right)\otimes(1-\gamma_{m,m+k})\,\tilde{z}_m=\\
&= (g_{j,k}(1-\gamma_{m-1,m+1+j})\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}-\left(g_{j,k}\otimes\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m+1+j}\right)\otimes\tilde{z}_m+\\
&\quad+\left(g_{j,k}\gamma_{m,m+k}\otimes\sum_{l=1,\ldots,n+1}\left(J^{(m-1)}(\gamma_{m,m+k})\right)_j^l\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+l}\right)\otimes\tilde{z}_m=\\
&= (g'_k\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,m+k}+\left(\sum_{l=1,\ldots,n+1} g_l\otimes\tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,m-1+l}\right)\otimes\tilde{z}_m
\end{aligned}$$

mit $g'_k, g_l\in G_{m-2}$ wie oben. Es ist also $\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\,\mu=\mu\,\partial_{(2)}^{(m-1,m)}$.
Daß μ auch mit den Randhomorphismen $\partial_{(1)}^{(m-1,m)}$ vertauscht, kann man ebenso zeigen. □

3.2.2 Eigenschaften des Koeffizientenmoduls

Generizität des Koeffizientenmoduls

Motivation/Einleitung Im weiteren soll die Gruppe der 2-Zyklen, also der Zyklen in der höchsten Dimension des Komplexes $\left(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ bestimmt werden.

Dazu erinnere man die Modulstrukturen der Kettengruppe $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_1(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_1(\tilde{X}_{n,1})$:

- Die Gruppe $C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ war freier $\mathbf{Z}U_{n+1,1}$-Linksmodul vom Rang $n+1$, die Gruppe $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ freier $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmodul vom Rang n und der Koeffizientenmodul G_{m-2} Rechtsmodul bzgl. $\mathbf{Z}U_{n,2}$, wobei $U_{n,2} = U_{n,1} \bowtie U_{n+1,1}$ ist, mittels eines (zunächst beliebigen) Gruppenhomomorphismus $\Phi_g^{(m-2)} : U_{n,2} \to \mathrm{Aut}(G_{m-2})$, also durch:

$$g\,\theta = \Phi_g^{(m-2)}(\theta)(g), \qquad g \in G_{m-2}, \theta \in U_{n,2}$$

  bzw. mittels eines (ebenso bezeichneten) Ringhomomorphismus $\Phi_g^{(m-2)} : \mathbf{Z}U_{n,2} \to \mathrm{End}(G_{m-2})$, also durch:

$$g\,\alpha = \Phi_g^{(m-2)}(\alpha)(g), \qquad g \in G_{m-2}, \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,2}$$

- $C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ war zudem ein $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul mittels der mit $\phi^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$ kompatiblen Abbildung $\Phi^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$, also durch:

$$\tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}\,\gamma = \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}), \qquad \gamma \in U_{n,1}, \gamma_{m-1,j_{m-1}} \in C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$$

  $\Phi^{(m-1)}(\gamma)$ wird beschrieben durch $J^{(m-1)}(\phi^{(m-1)}(\gamma)) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+1,1}, n+1)$, die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\phi^{(m-1)}(\gamma) \in \mathrm{Aut}(U_{n+1,1})$.

- Und schließlich war $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ ein $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Rechtsmodul durch die Einschränkung von $\chi^{(m-2,m-1)} : P_{n+1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$ auf $U_{n,1} \subset P_{n+1}$, also durch:

$$\begin{aligned}
&(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}})\,\gamma = \\
&= \chi^{(m-2,m-1)}(\gamma)(g \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}) = \\
&= (g\,\gamma) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} (\tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}\,\gamma) = \\
&= \Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} \Phi^{(m-1)}(\gamma)(\tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}), \qquad \gamma \in U_{n,1}
\end{aligned}$$

Gemäß der Konstruktion des Komplexes ist $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ Koeffizientenmodul zu $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, und der G_{m-1} als $U_{n,1}$-Rechtsmodul charakterisierende Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(G_{m-1})$ ist also: $\Phi_g^{(m-1)} = \chi^{(m-2,m-1)}$.

Zur Bestimmung der 2-Zyklen ist zu klären, unter welchen Bedingungen an den Koeffizientenmodul G_{m-2} Elemente der folgenden Form als 2-Ketten des Komplexes wohldefiniert sind. Man wird sehen, daß sich die 2-Zyklen auf einfache Weise aus solchen 2-Ketten zusammensetzen:

$$\left[\Phi_g^{(m-1)}(1 - \gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1 - \gamma_{m-1,j_{m-1}})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}$$

Hierbei ist $g \in G_{m-2}$, $\tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}} \in C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ und $\tilde{\gamma}_{m,j_m} \in C_1(\tilde{X}_{n,1})$. Diese Ketten enthalten (ineinander verschachtelt) Inverse von Endomorphismen der Koeffizientenmoduln, die sich auf bestimmte Weise gegen die unter den Randhomomorphismen auftretenden Endomorphismen aufheben. Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Inversen existieren:

1. Erste Bedingung ist also Generizität von G_{m-2} bzgl. $U_{n+1,1}$, d.h. Invertierbarkeit der Elemente $(1-\gamma_{m-1,j_{m-1}}) \in \mathbf{Z}U_{n+1,1}$ als Endomorphismen von G_{m-2}:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j_{m-1}})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-2})$$

   mit anderen Worten:

$$\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j_{m-1}}) \in \mathrm{Aut}(G_{m-2})$$

2. Zweite Bedingung ist die Generizität von $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ bzgl. $U_{n,1}$, d.h. Invertierbarkeit der Elemente $(1-\gamma_{m,j_m}) \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ als Endomorphismen von G_{m-1}:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-1}) = \mathrm{End}(G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$$

Es soll (wie die erste) auch die zweite Bedingung als Bedingung an den Koeffizientenmodul G_{m-2} formuliert werden. Dazu wird eine Basis der freien Gruppe $U_{n+1,1}$ bestimmt, so daß die die Automorphismen $\Phi^{(m-1)}(\gamma_{m,j_m}) \in \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$, $\gamma_{m,j_m} \in U_{n,1}$, beschreibenden Matrizen obere Dreiecksmatrizen sind. Die Endomorphismen $\chi^{(m-2,m-1)}(1-\gamma_{m,j_m}) \in \mathrm{End}(G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$ sind dann von einfacher Gestalt, und man kann leicht die Bedingungen für deren Invertierbarkeit angeben.

Im weiteren wird zunächst allgemeiner die Frage behandelt, unter welchen Bedingungen an einen $\mathbf{Z}P_nU_{n,1}$-Modul G_{m-1} die Elemente $(1-\gamma_{r,s}) \in \mathbf{Z}P_n$ für beliebige Generatoren $\gamma_{r,s} \in P_n$ als Endomorphismen der Kettengruppe $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ invertierbar sind.

Neue Basis der freien Gruppe Wir folgen Cohen und Suciu [10], Abschnitt 6.1, und betrachten zu jedem $\gamma_{r,s} \in P_n$, $m+1 \le r < s \le m+n$, eine neue Basis der freien Gruppe $U_{n,1}$ vom Rang n. Man erinnere, daß $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n} \rangle$ die freie Gruppe vom Rang n mit Generatoren $\gamma_{m,i}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, bezeichnet.

Lemma 3.2.6 *Für jedes $\gamma_{r,s} \in P_n$, $m+1 \le r < s \le m+n$, bildet die wie folgt definierte Menge $\{y_{m,i}(\gamma_{r,s}), i = m+1, \ldots, m+n\}$ eine Basis der freien Gruppe $U_{n,1}$ vom Rang n:*

$$y_{m,i}(\gamma_{r,s}) = \begin{cases} \gamma_{m,i} & m+1 \le i \le r \\ \gamma_{m,r}\gamma_{m,i}\gamma_{m,r}^{-1} & r < i < s \\ \gamma_{m,r}\gamma_{m,s} & i = s \\ \gamma_{m,i} & s < i \le m+n \end{cases}$$

Beweis. Es reicht aus zu zeigen, daß jedes Element der ursprünglichen Basis von $U_{n,1}$ eine eindeutige Darstellung in Elementen aus $\{y_{m,i}(\gamma_{r,s}), i = m+1, \ldots, m+n\}$ hat. Die obigen Relationen lassen sich wie folgt nach den Elementen aus $\{\gamma_{m,i}, i = m+1, \ldots, m+n\}$ auflösen:

$$\gamma_{m,i} \quad = \quad \begin{cases} y_{m,i}(\gamma_{r,s}) & m+1 \leq i \leq r \\ (y_{m,r}(\gamma_{r,s}))^{-1} y_{m,i}(\gamma_{r,s}) y_{m,r}(\gamma_{r,s}) & r < i < s \\ (y_{m,r}(\gamma_{r,s}))^{-1} y_{m,s}(\gamma_{r,s}) & i = s \\ y_{m,i}(\gamma_{r,s}) & s < i \leq m+n \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Artinscher Automorphismus in neuer Basis der freien Gruppe Nun werde der Automorphismus zu $\gamma_{r,s} \in P_n$ in der neuen Basis von $U_{n,1}$ betrachtet, vgl. [10], Lemma 6.2:

Lemma 3.2.7 *Der Automorphismus $\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in Aut(U_{n,1})$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, der freien Gruppe $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}(\gamma_{r,s}), \ldots, y_{m,m+n}(\gamma_{r,s})\rangle$ ist wie folgt gegeben:*

$$\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,i}(\gamma_{r,s})) = \begin{cases} y_{m,i}(\gamma_{r,s}) & i \neq r \\ y_{m,s}(\gamma_{r,s}) y_{m,r}(\gamma_{r,s})(y_{m,s}(\gamma_{r,s}))^{-1} & i = r \end{cases}$$

Beweis. Man verwende für jedes $\gamma_{r,s} \in P_n$ den Monomorphismus $\phi^{(m)} : P_n \rightarrow \mathrm{Aut}(U_{n,1})$, siehe Satz 1.2.4, für die ursprüngliche Basis $\{\gamma_{m,i}, i = m+1, \ldots, m+n\}$ von $U_{n,1}$:

$$\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\gamma_{m,i}) = \begin{cases} \gamma_{m,r}\gamma_{m,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}^{-1}\gamma_{m,r}^{-1} & i = r, s \\ [\gamma_{m,r}, \gamma_{m,s}]\, \gamma_{m,i}\, [\gamma_{m,r}, \gamma_{m,s}]^{-1} & r < i < s \\ \gamma_{m,k} & i < r, i > s \end{cases}$$

Explizit hat man:

$$\begin{aligned}
\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,i}(\gamma_{r,s})) &= \phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\gamma_{m,i}) = \\
&= \gamma_{m,i} = \\
&= y_{m,i}(\gamma_{r,s}), \qquad i < r, i > s \\
\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,r}(\gamma_{r,s})) &= \phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\gamma_{m,r}) = \\
&= \gamma_{m,r}\gamma_{m,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}^{-1}\gamma_{m,r}^{-1} = \\
&= y_{m,s}(\gamma_{r,s}) y_{m,r}(\gamma_{r,s})(y_{m,s}(\gamma_{r,s}))^{-1} \\
\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,i}(\gamma_{r,s})) &= \phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\gamma_{m,r}\gamma_{m,i}\gamma_{m,r}^{-1}) = \\
&= \gamma_{m,r}\gamma_{m,i}\gamma_{m,r}^{-1} = \\
&= y_{m,i}(\gamma_{r,s}), \qquad r < i < s \\
\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,s}(\gamma_{r,s})) &= \phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}) = \\
&= \gamma_{m,r}\gamma_{m,s} = \\
&= y_{m,s}(\gamma_{r,s})
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Alle Generatoren von $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}(\gamma_{r,s}), \ldots, y_{m,m+n}(\gamma_{r,s})\rangle$ bis auf den Generator $y_{m,r}(\gamma_{r,s})$ sind also invariant unter $\phi(\gamma_{r,s})$. Letzterer wird mit $y_{m,s}(\gamma_{r,s})$ konjugiert: $\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,r}(\gamma_{r,s})) = y_{m,s}(\gamma_{r,s})y_{m,r}(\gamma_{r,s})(y_{m,s}(\gamma_{r,s}))^{-1}$. Dies hat zur Folge, daß auch der induzierte Automorphismus $\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$ von einfacher Gestalt ist.

Neue Basis des freien Moduls Wir betrachten nun zu jedem $\gamma_{r,s} \in P_n$, $m+1 \leq r < s \leq m+n$, korrespondierend zur neuen Basis der freien Gruppe $U_{n,1}$ eine neue Basis des freien $U_{n,1}$-Linksmoduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$. Man erinnere, daß $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ frei erzeugt ist von den Elementen $\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, die (topologisch) gegeben sind durch Liftungen der Generatoren $\gamma_{m,i} \in U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}; z_m)$ in die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$, die im fest gewählten Punkt $\tilde{z}_m$ beginnen, bzw. (algebraisch) durch den verschränkten Homomorphismus $\Delta : U_{n,1} \to C_1(\tilde{X}_{n,1})$, definiert durch $\Delta(\gamma_{m,i}) = \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i}$.

Lemma 3.2.8 *Für jedes $\gamma_{r,s} \in P_n$, $m+1 \leq r < s \leq m+n$, bildet die wie folgt definierte Menge $\{\tilde{y}^{(m)}_{m,i}(\gamma_{r,s}), i = m+1, \ldots, m+n\}$ eine Basis des freien $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmoduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$:*

$$\tilde{y}^{(m)}_{m,i}(\gamma_{r,s}) = \begin{cases} \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i} & m+1 \leq i \leq r \\ (1 - \gamma_{m,r}\gamma_{m,i}\gamma^{-1}_{m,r})\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,r} + \gamma_{m,r}\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i} & r < i < s \\ \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,r} + \gamma_{m,r}\tilde{\gamma}^{(m)}_{m,s} & i = s \\ \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i} & s < i \leq m+n \end{cases}$$

Beweis. Für jedes $\gamma_{r,s} \in P_n$ ist $\tilde{y}^{(m)}_{m,j}$ die in $\tilde{z}_m$ beginnende Liftung von $y_{m,j} \in U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}; z_m)$, gegeben durch den verschränkten Homomorphismus: $\Delta(y_{m,j}) = \tilde{y}^{(m)}_{m,j}$.
Jedes $y_{m,j} \in U_{n,1}$ hat eine eindeutige Darstellung als Wort in den ursprünglichen Generatoren $\{\gamma_{m,k}, k = m+1, \ldots, m+n\}$, und die Fundamentalformel des freien Differentialkalküls liefert die Entwicklung von $\Delta(y_{m,j})$ in $\Delta(\gamma_{m,k})$, $k = m+1, \ldots, m+n$:

$$\begin{aligned} \Delta(y_{m,j}) &= \Delta(y_{m,j}(\gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n})) = \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{\delta(y_{m,j}(\gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n}))}{\delta\gamma_{m,k}}\Delta(\gamma_{m,k}) = \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(L^{(m)}(\gamma_{r,s})\right)^k_j \Delta(\gamma_{m,k}) \end{aligned}$$

Hier ist $L^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$ die Jacobi-Matrix der Basistransformation.
Umgekehrt hat jedes $\gamma_{m,i} \in U_{n,1}$ eine eindeutige Darstellung als Wort in den neuen Generatoren $\{y_{m,j}, j = m+1, \ldots, m+n\}$, und die Fundamentalformel des freien Differentialkalküls liefert die Entwicklung von $\Delta(\gamma_{m,i})$ in $\Delta(y_{m,j})$, $j = m+1, \ldots, m+n$:

$$\begin{aligned} \Delta(\gamma_{m,i}) &= \Delta(\gamma_{m,i}(y_{m,m+1}, \ldots, y_{m,m+n})) = \\ &= \sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{\delta(\gamma_{m,i}(y_{m,m+1}, \ldots, y_{m,m+n}))}{\delta y^{r,s}_{m,j}}\Delta(y_{m,j}) = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=m+1}^{m+n} \left(\left(L^{(m)}(\gamma_{r,s}) \right)^{-1} \right)_i^j \Delta(y_{m,j})$$

explizit:

$$\tilde{\gamma}_{m,i}^{(m)} = \begin{cases} \tilde{y}_{m,i}^{(m)} & m+1 \leq i \leq r \\ (\gamma_{m,i}-1)\gamma_{m,r}^{-1}\tilde{y}_{m,r}^{(m)} + \gamma_{m,r}^{-1}\tilde{y}_{m,i}^{(m)} & r < i < s \\ -\gamma_{m,r}^{-1}\tilde{y}_{m,r}^{(m)} + \gamma_{m,r}^{-1}\tilde{y}_{m,s}^{(m)} & i = s \\ \tilde{y}_{m,i}^{(m)} & s < i \leq m+n \end{cases}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Das Resultat entspricht einem Satz von Birman [6], wonach $\{y_{m,j}, j = m+1, \ldots, m+n\}$ dann und nur dann Basis der freien Gruppe $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n} \rangle$ Gruppe vom Rang n ist, wenn die Jacobi-Matrix $L^{(m)}(\gamma_{r,s}) = \left(\frac{\delta(y_{m,j}(\gamma_{m,m+1},\ldots,\gamma_{m,m+n}))}{\delta\gamma_{m,k}} \right)$ invertierbar ist über $\mathbf{Z}U_{n,1}$.

Automorphismus in neuer Basis des freien Moduls Nun werde der Automorphismus zu $\gamma_{r,s} \in P_n$ in der neuen Basis von $C(\tilde{X}_{n,1})$ betrachtet, vgl. [10], Satz 6.3:

Lemma 3.2.9 *Der Automorphismus $\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in Aut(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, des freien $U_{n,1}$-(Links-)Moduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ mit der Basis $\{\tilde{y}_{m,i}^{(m)}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ ist wie folgt gegeben:*

$$\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\tilde{y}_{m,i}^{(m)}) = \begin{cases} \tilde{y}_{m,i}^{(m)} & i \neq r \\ \gamma_{m,r}\gamma_{m,s}\tilde{y}_{m,r}^{(m)} + (1-\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}^{-1}\gamma_{m,r}^{-1})\tilde{y}_{m,s}^{(m)} & i = r \end{cases}$$

Beweis. Der Automorphismus $\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, des freien $U_{n,1}$-Linksmoduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ mit der Basis $\{\tilde{y}_{m,i}^{(m)}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ ergibt sich einerseits wie folgt mit Hilfe der Fundamentalformel des freien Differentialkalküls:

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\Delta(y_{m,j})) &= \Delta(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,j})) = \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{\delta(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(y_{m,j}))}{\delta y_{m,k}} \Delta(y_{m,k}) = \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+n} \left(K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) \right)_j^k \Delta(y_{m,k}) \end{aligned}$$

wobei $K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))$ die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ zu $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}, \ldots, y_{m,m+n} \rangle$ ist. Mit anderen Worten ergibt sich $\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s})$ aus der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} U_{n,1} & \xrightarrow{\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})} & U_{n,1} \\ \downarrow\Delta & & \downarrow\Delta \\ C_1(\tilde{X}_{n,1}) & \xrightarrow{\Phi^{(m)}(\gamma_{r,s})} & C_1(X_{n,1}) \end{array}$$

Andererseits ergibt sich die Jacobi-Matrix $K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))$ des Automorphismus $\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ zu $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}, \dots, y_{m,m+n} \rangle$ auch als:

$$K^{(m)}(\phi^{(m)}((\gamma_{r,s})) = \phi^{(m)} \left(L^{(m)}(\gamma_{r,s}) \right) J^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) \left(L^{(m)}(\gamma_{r,s}) \right)^{-1}$$

aus der oben gegebenen Jacobi-Matrix $L^{(m)}(\gamma_{r,s})$ der Basistransformation und der Jacobi-Matrix $J^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))$ des Automorphismus $\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}) \in \mathrm{Aut}(U_{n,1})$ zu $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,m+1}, \dots, \gamma_{m,m+n} \rangle$. □

Man hat also zu jedem $\gamma_{r,s} \in P_n$ eine Basis des freien $U_{n,1}$-Moduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, so daß die zugehörige Jacobi-Matrix $K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$ eine obere Dreiecksmatrix ist mit diagonalen Einträgen 1 und $\gamma_{m,r}\gamma_{m,s}$.

Automorphismus der äquivarianten Kettengruppe Endlich werde der Automorphismus zu $\gamma_{r,s} \in P_n$ für die äquivariante Kettengruppe $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ betrachtet. Man vergleiche hier [10], Abschnitt 6.4:

Lemma 3.2.10 *Der Automorphismus $\chi^{(m-1,m)}(\gamma_{r,s}) \in Aut(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, der äquivarianten Kettengruppe $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ ist wie folgt gegeben:*

$$\chi^{(m-1,m)}(\gamma_{r,s})(g_i \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}) =$$
$$= \begin{cases} \Phi^{(m-1)}_g(\gamma_{r,s})(g_i) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i} & i \neq r \\ \Phi^{(m-1)}_g(\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})(g_r) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r} + \Phi^{(m-1)}_g((1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s})(g_r) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s} & i = r \end{cases}$$

Beweis. Die Kettengruppe $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ ist P_n-Modul durch den Homomorphismus:

$$\chi^{(m-1,m)} : P_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

Für $\gamma_{r,s} \in P_n$ und die korrespondierende Basis von $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ bekommt man:

$$\begin{aligned}
&\chi^{(m-1,m)}(\gamma_{r,s})(\sum_{i=m+1}^{m+n} g_i \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}) = \\
&= \sum_{i=m+1}^{m+n} (g_i\,\gamma_{r,s}) \otimes (\tilde{y}^{(m)}_{m,i}\,\gamma_{r,s}) = \\
&= \sum_{i=m+1}^{m+n} \Phi^{(m-1)}_g(\gamma_{r,s})(g_i) \otimes \Phi^{(m)}(\gamma_{r,s})(\tilde{y}^{(m)}_{m,i}) = \\
&= \sum_{i=m+1}^{m+n} \Phi^{(m-1)}_g(\gamma_{r,s})(g_i) \otimes \sum_{k=m+1}^{m+n} (K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})))^k_i\, \tilde{y}^{(m)}_{m,k} = \\
&= \sum_{k=m+1}^{m+n} \sum_{i=m+1}^{m+n} \Phi^{(m-1)}_g \left(\gamma_{r,s} \left(K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) \right)^k_i \right) (g_i) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,k}
\end{aligned}$$

und mit der expliziten Gestalt von $K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))$ folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.2.11 Alternativ kann man angesichts $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}) \cong (G_{m-1})^n$ eine P_n-Rechtsmodulstruktur auf $(G_{m-1})^n$ definieren:

$$(G_{m-1})^n \times P_n \quad \rightarrow \quad (G_{m-1})^n$$

und zwar für $I = \{1, \ldots, n\}$ und $(g_i)_{i\in I} = (g_1, \ldots, g_n)$ durch:

$$\begin{aligned}((g_i)_{i\in I}, \gamma_{r,s}) \rightarrow (g_i)_{i\in I}\, \gamma_{r,s}\, K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) &= \\ = \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} g_k\, \gamma_{r,s}\, (K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})))^i_k\right)_{i\in I} &= \\ = \left(\sum_{k=m+1}^{m+n} \Phi_g^{(m-1)}(\gamma_{r,s}\, (K^{(m)}(\gamma_{r,s}))^i_k)(g_k)\right)_{i\in I}&\end{aligned}$$

Als Korollar zum obigen Lemma hat man:

Korollar 3.2.12 *Der Endomorphismus $\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s}) \in End(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, der äquivarianten Kettengruppe $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ ist wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned}&\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})(g_i \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}) = \\ &= \begin{cases} \Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s})(g_i) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i} & i \neq r \\ \Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})(g_r) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r} + \Phi_g^{(m-1)}((\gamma_{m,r}-1)\gamma_{r,s})(g_r) \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s} & i = r \end{cases}\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.13 Beschränkt man sich auf die relevanten Indizes r und s, so hat man für den P_n-Rechtsmodul $(G_{m-1})^n$ die Abbildung:

$$\begin{aligned}&((g_r, g_s), 1-\gamma_{r,s}) \rightarrow (g_r, g_s)\, \left(\mathbf{1} - \gamma_{r,s}\, K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))\right) = \\ &= (g_r, g_s) \begin{pmatrix} 1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s} & (\gamma_{m,r}-1)\gamma_{r,s} \\ 0 & 1-\gamma_{r,s}\end{pmatrix} = \\ &= \left(\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})(g_r), \Phi_g^{(m-1)}((\gamma_{m,r}-1)\gamma_{r,s})(g_r) + \Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s})(g_s)\right)\end{aligned}$$

Mit diesen Ergebnissen bekommt man:

Satz 3.2.14 *Das Element $1-\gamma_{r,s} \in \mathbf{Z}P_n$ ist invertierbar als Endomorphismus von $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}) \cong (G_{m-1})^n$:*

$$\exists \left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1} \in End(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

wenn die Elemente $1-\gamma_{r,s}, 1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s} \in \mathbf{Z}P_nU_{n,1}$ invertierbar sind als Endomorphismen von G_{m-1}:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}, \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1} \in End(G_{m-1})$$

Beweis. Der inverse Endomorphismus $\left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-1}\otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{r,s} \in P_n$, lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_i\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}) = \\
&= \left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_i)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}, \qquad i\neq r \\
&\left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_r\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r}) = \\
&= \left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r} + \\
&\quad + \left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}\Phi^{(m-1)}_g((1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s})\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\otimes \\
&\quad \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s}
\end{aligned}$$

Die Probe liefert im Falle $i\neq r$:

$$\begin{aligned}
&\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_i\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i})\right) = \\
&= \chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_i)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}\right) = \\
&= \Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_i)\right)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i} = \\
&= g_i\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,i}
\end{aligned}$$

und im Falle $i=r$:

$$\begin{aligned}
&\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}(g_r\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r})\right) = \\
&= \chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r}\right) + \\
&\quad + \chi^{(m-1,m)}(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}\Phi^{(m-1)}_g((1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s})\times\right. \\
&\quad \left.\times\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s}\right) = \\
&= \Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\right)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r} + \\
&\quad + \Phi^{(m-1)}_g((\gamma_{m,r}-1)\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\right)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s} + \\
&\quad + \Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\left(\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}\Phi^{(m-1)}_g((1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s})\times\right. \\
&\quad \left.\times\left[\Phi^{(m-1)}_g(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}(g_r)\right)\otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,s} =
\end{aligned}$$

$$= \quad g_r \otimes \tilde{y}^{(m)}_{m,r}$$

Es ist also notwendig, daß $\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s})\right]^{-1}$ und $\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})\right]^{-1}$ als Endomorphismen von G_{m-1} existieren. □

Bemerkung 3.2.15 Beschränkt man sich wiederum auf die relevanten Indizes r und s und betrachtet man den P_n-Rechtsmodul $(G_{m-1})^n$, so mag man formal einfach die Inverse der Matrix:

$$\begin{aligned} &\mathbf{1} - \gamma_{r,s}\, K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s})) = \\ &= \begin{pmatrix} 1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s} & (\gamma_{m,r}-1)\gamma_{r,s} \\ 0 & 1-\gamma_{r,s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

betrachten und schreiben:

$$\begin{aligned} &\left((g_r, g_s), (1-\gamma_{r,s})^{-1}\right) \to (g_r, g_s)\left(\mathbf{1} - \gamma_{r,s}\, K^{(m)}(\phi^{(m)}(\gamma_{r,s}))\right)^{-1} = \\ &= \quad (g_r, g_s) \begin{pmatrix} (1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})^{-1} & (1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})^{-1}(1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s}(1-\gamma_{r,s})^{-1} \\ 0 & (1-\gamma_{r,s})^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \quad (g'_r, g'_s) \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} g'_r &= \Phi_g^{(m-1)}\left(((1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})^{-1}\right)(g_r) \\ g'_s &= \Phi_g^{(m-1)}\left((1-\gamma_{r,s}\gamma_{m,r}\gamma_{m,s})^{-1}(1-\gamma_{m,r})\gamma_{r,s}(1-\gamma_{r,s})^{-1}\right)(g_r) + \\ &\quad +\Phi_g^{(m-1)}\left((1-\gamma_{r,s})^{-1}\right)(g_s) \end{aligned}$$

Resultate im interessierenden Fall Im eingangs bezeichneten Fall interessiert, unter welchen Bedingungen an den Koeffizientenmodul G_{m-2} bzgl. $U_{n,2} = U_{n+1,1}U_{n,1}$ die Elemente $(1-\gamma_{m,j}) \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ als Endomorphismen von $G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ invertierbar sind.

Korollar 3.2.16 *Das Element* $1-\gamma_{m,j} \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ *ist invertierbar als Endomorphismus von* $G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1}) \cong (G_{m-2})^{n+1}$*:*

$$\exists \left[\chi^{(m-2,m-1)}(1-\gamma_{m,j})\right]^{-1} \in End(G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$$

wenn die Elemente $1-\gamma_{m,j}, 1-\gamma_{m,j}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j} \in \mathbf{Z}U_{n,2}$ *invertierbar sind als Endomorphismen von* G_{m-2}*:*

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m,j})\right]^{-1}, \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m,j}\gamma_{m-1,m}\gamma_m - 1, j)\right]^{-1} \in End(G_{m-2})$$

Mit anderen Worten hat man:

Korollar 3.2.17 *Die Kettengruppe $G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ ist als $U_{n,1}$-Rechtsmodul generisch, wenn für alle $\gamma \in \{\gamma_{m,j}, \gamma_{m,j}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\}$, $j = m+1, \ldots, m+n$, die Elemente $(1-\gamma) \in \mathbf{Z}U_{n,2}$ als Elemente von $End(G_{m-2})$ invertierbar sind:*

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma)\right]^{-1} \in End(G_{m-2})$$

Damit ist die zweite der eingangs formulierten Bedingungen als Bedingung an G_{m-2} formuliert. Die Berücksichtigung der ersten Bedingung, der Generizität von G_{m-2} bzgl. $U_{n+1,1}$, motiviert die folgende Definition:

Definition 3.2.18 (Generizität (2)) Ein $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul G_{m-2} heißt *generisch* bzgl. $U_{n,2}$, wenn für alle $\gamma \in \Gamma = \{\gamma_{m-1,j}, \gamma_{m,j}, \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j}; j = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,2}$ die Elemente $(1-\gamma) \in \mathbf{Z}U_{n,2}$ als Endomorphismen von G_{m-2} invertierbar sind:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma)\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-2}), \qquad \gamma \in \Gamma$$

Mit der Definition der Generizität folgt unmittelbar:

Lemma 3.2.19 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *G_{m-2} ist ein generischer $U_{n,2}$-Modul.*

2. *G_{m-2} ist ein generischer $U_{n+1,1}$-Modul und die Gruppe $G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ ein generischer $U_{n,1}$-Modul.*

Beispiel 3.2.20 Es sei $G_{m-2} = \mathbf{C}$ der 1-dimensionale Modul bzgl. $U_{n,2}$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(m-2)} : U_{n,2} &\rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{C}) \\
\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m-1,j}) &= e^{2\pi i \lambda_{m-1,j}}, \qquad \gamma_{m-1,j} \in U_{n+1,1} \\
\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m,j}) &= e^{2\pi i \lambda_{m,j}}, \qquad \gamma_{m,j} \in U_{n,1}
\end{aligned}$$

Man hat:

$$\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m,j}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}) = e^{2\pi i(\lambda_{m,j}+\lambda_{m-1,m}+\lambda_{m-1,j})}$$

und Generizität (von $G_{m-2} = \mathbf{C}$ bzgl. $U_{n,2}$) erfordert nun:

$$\lambda_{m-1,j}, \lambda_{m,j} \notin \mathbf{Z}, \quad (\lambda_{m-1,m} + \lambda_{m-1,j} + \lambda_{m,j}) \notin \mathbf{Z}$$

Trivialität des Koeffizientenmoduls

Anstelle generischer Koeffizientenmoduln G_{m-2} können auch triviale Koeffizientenmoduln betrachtet werden.

Definition 3.2.21 (Trivialität (2)) Ein $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul G_{m-2} heißt *trivial* bzgl. $U_{n,2}$, wenn für alle $\gamma \in \Gamma = \{\gamma_{m-1,j}, \gamma_{m,k}; j = m, \ldots, m+n; k = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,2}$ gilt:

$$\Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g) = g, \qquad \gamma \in \Gamma,\ g \in G_{m-2}$$

bzw. wenn gilt: $(1-\gamma) \in \mathrm{Kern}(\Phi_g^{(m-2)})$.

Mit der Definition der Trivialität folgt:

Lemma 3.2.22 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. G_{m-2} *ist ein trivialer* $U_{n,2}$*-Modul.*
2. G_{m-2} *ist ein trivialer* $U_{n+1,1}$*-Modul und der Komplex* $G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ *ein trivialer* $U_{n,1}$*-Modul.*

3.2.3 Homologie des äquivarianten Komplexes

Homologie des Komplexes mit generischem Koeffizientenmodul

Ist also der Koeffizientenmodul G_{m-2} des Komplexes $\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ generisch bzgl. $U_{n,2}$, so sind Ketten wohldefiniert, die Endomorphismen $\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j_{m-1}})\right]^{-1}$ von G_{m-2} und Endomorphismen $\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1}$ und $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})$ enthalten, die sich gegen die unter den Randhomomorphismen auftretenden Endomorphismen aufheben.

Lemma 3.2.23 (Randformel) *Es gilt für alle* $g \in G_{m-2}$*:*

$$\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,k}\right) =$$
$$= \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}(g \otimes \tilde{z}_{m-1}) \otimes \tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)} - \left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right) \otimes \tilde{z}_m$$

Beweis. Mit der Definition des Randhomomorphismus hat man:

$$\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,k}\right) =$$
$$= \partial_{(1)}^{(m-1)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,k} +$$
$$+(-1)\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}\right) \otimes \partial_{(1)}^{(m)}(\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)})$$

Mit $\partial_{(1)}^{(m)}(\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)}) = (1-\gamma_{m,k})\tilde{z}_m$ folgt für den zweiten Term:

$$(-1)\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}\right) \otimes (1-\gamma_{m,k})\tilde{z}_m \quad =$$
$$= (-1)\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right) \otimes \tilde{z}_m$$

Mit $\partial_{(1)}^{(m-1)}(\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}) = (1-\gamma_{m-1,j})\tilde{z}_{m-1}$ folgt für den ersten Term, da der Randhomomorphismus $\partial_{(1)}^{(m-1)}$ mit dem Endomorphismus $\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}$, einer Kettenabbildung, vertauscht:

$$\begin{aligned}
&\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\partial_{(1)}^{(m-1)}(\tilde{\gamma}_{m-1,j})\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)} = \\
&= \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes(1-\gamma_{m-1,j})\tilde{z}_{m-1}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)} = \\
&= \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}(g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)}
\end{aligned}$$

Damit hat man das gewünschte Ergebnis. □

Bemerkung 3.2.24 (Zur Kettenabbildung) Die Gruppe $U_{n,1}$ wirkt (von rechts) als Kettenabbildung des 1-dimensionalen Komplexes $G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})$. Jedes $\gamma\in U_{n,1}$, aufgefaßt als Automorphismus von $G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})$, vertauscht mit dem Randhomomorphismus $\partial_{(1)}^{(m-1)}$. Einerseits hat man:

$$\begin{aligned}
\left(\partial_{(1)}^{(m-1)}\left(g\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right)\right)\gamma &= (g\otimes(1-\gamma_{m-1,j})\tilde{z}_{m-1})\,\gamma = \\
&= g\,(1-\gamma_{m-1,j})\,\gamma\otimes\tilde{z}_{m-1}
\end{aligned}$$

Andererseits hat man:

$$\begin{aligned}
\partial_{(1)}^{(m-1)}\left(\left(g\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right)\gamma\right) &= \partial_{(1)}^{(m-1)}\left(g\,\gamma\otimes\sum_{k=m,\ldots,m+n}(J(\gamma))_j^k\,\tilde{\gamma}_{m-1,k}^{(m-1)}\right) = \\
&= \sum_{k=m,\ldots,m+n} g\,\gamma\,(J(\gamma))_j^k\otimes\partial_{(1)}^{(m-1)}(\tilde{\gamma}_{m-1,k}^{(m-1)}) = \\
&= \sum_{k=m,\ldots,m+n} g\,\gamma\,(J(\gamma))_j^k\,(1-\gamma_{m-1,k})\otimes\tilde{z}_{m-1} = \\
&= g\,(1-\gamma_{m-1,j})\,\gamma\otimes\tilde{z}_{m-1}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt verwendet, daß die Kettengruppe $C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ als freier (Links-)Modul zu $U_{n+1,1}$ isomorph ist zum Augmentationsideal $\mathbf{I}U_{n+1,1}$ von $\mathbf{Z}U_{n+1,1}$ durch $\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\to(1-\gamma_{m-1,j})$, und daß das Element $\gamma\in U_{n,1}$ auf die Erzeugenden $(1-\gamma_{m-1,j})$, $j=m,\ldots,m+n$, des Augmentationsideals $\mathbf{I}U_{n+1,1}$ von $\mathbf{Z}U_{n+1,1}$ in gleicher Weise (von rechts) wirkt wie auf die erzeugenden Ketten $\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}$ von $C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$. Daher gilt die Identität:

$$(1-\gamma_{m-1,j})\,\gamma \;=\; \gamma\sum_{k=m,\ldots,m+n}(J(\gamma))_j^k\,(1-\gamma_{m-1,k})$$

Mit Hilfe der Randformel folgt unmittelbar:

Lemma 3.2.25 (2-Zyklen) *Es gilt für alle $g \in G_{m-2}$:*

$$\begin{aligned}
&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,i})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,i}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}\right) \quad + \\
-&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}\right) \quad + \\
-&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,l})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,i})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,i}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,l}\right) \quad + \\
+&\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,l})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,l}\right) \quad = \quad 0
\end{aligned}$$

Wiederum zur Abkürzung und zur Vereinfachung der Rechnungen ersetzen wir den Komplex $\left(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ im Falle eines generischen $U_{n,2}$-Moduls G_{m-2} durch einen isomorphen Komplex mit einfachen Randhomomorphismen.

Definition 3.2.26 Für $r = m-1, m$ sei $K^{(r)}$ der 1-dimensionale formale Kettenkomplex, definiert als freier Linksmodul zu $\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}$ mit den Kettengruppen $K_0^{(r)}$, erzeugt von $\tilde{z}_r$, und $K_1^{(r)}$, erzeugt von der Menge $\{e_j^{(r)}; j = r+1,\ldots,m+n\}$, und mit Randhomomorphismen $\partial_{(q)}^{(r)}: K_q^{(r)} \to K_{q-1}^{(r)}$, $q = 0,1$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\partial_{(0)}(\tilde{z}_r) &= 0 \\
\partial_{(1)}(e_j^{(r)}) &= \tilde{z}_r, \qquad j = r+1,\ldots,m+n
\end{aligned}$$

Und für einen generischen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} sei $(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} K^{(m-1)})\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}$ der 2-dimensionale formale äquivariante Komplex mit Ketten $(g\otimes k_p^{(m-1)})\otimes k_q^{(m)}$, $g \in G_{m-2}$, $k_p^{(m-1)} \in K_p^{(m-1)}$, $k_q^{(m)} \in K_q^{(m)}$ und Randhomomorphismen:

$$\begin{aligned}
\partial_{(p+q)} : &\left(G_{m-2}\otimes K_p^{(m-1)}\right)\otimes K_q^{(m)} \to \\
\to \quad &\left(G_{m-2}\otimes K_{p-1}^{(m-1)}\right)\otimes K_q^{(m)} \oplus \left(G_{m-2}\otimes K_p^{(m-1)}\right)\otimes K_{q-1}^{(m)}
\end{aligned}$$

definiert durch:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(p+q)}\left((g^{(m-2)}\otimes k_p^{(m-1)})\otimes k_q^{(m)}\right) = \\
= \quad &(g^{(m-2)}\otimes \partial_{(p)}k_p^{(m-1)})\otimes k_q^{(m)} \\
&+(-1)^p(g^{(m-2)}\otimes k_p^{(m-1)})\otimes \partial_{(q)}k_q^{(m)}
\end{aligned}$$

Lemma 3.2.27 *Für einen generischen $U_{n,2}$-Moduls G_{m-2} gibt es einen Isomorphismus von Kettenkomplexen:*

$$\left(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \cong \left(G_{m-2}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} K^{(m-1)}\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}$$

der für 2-Ketten definiert ist durch:

$$\mu\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}\right) = \\ = \left(g\otimes e_j^{(m-1)}\right)\otimes e_k^{(m)}$$

für 1-Ketten durch:

$$\mu\left(\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right)\otimes\tilde{z}_m\right) = \left(g\otimes e_j^{(m-1)}\right)\otimes\tilde{z}_m$$

$$\mu\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}(g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)}\right) = (g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes e_k^{(m)}$$

und der für 0-Ketten offensichtlich ist.

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar mit Hilfe der Randformel und der Definition des formalen Komplexes. Die Abbildung μ ist offenichtlich bijektiv, und sie vertauscht mit den Randhomomorphismen. Für 2-Ketten hat man einerseits:

$$\mu\,\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}\right) = \\ = \mu\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}(g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}^{(m)}\right) + \\ -\mu\left(\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}^{(m-1)}\right)\otimes\tilde{z}_m\right) = \\ = (g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes e_k^{(m)} - \left(g\otimes e_j^{(m-1)}\right)\otimes\tilde{z}_m$$

und andererseits:

$$\partial_{(2)}^{(m-1,m)}\,\mu\left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,k})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{m-1,j}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,k}\right) = \\ = \partial_{(2)}^{(m-1,m)}\left(\left(g\otimes e_j^{(m-1)}\right)\otimes e_k^{(m)}\right) = \\ = (g\otimes\tilde{z}_{m-1})\otimes e_k^{(m)} - \left(g\otimes e_j^{(m-1)}\right)\otimes\tilde{z}_m$$

Für 1-Ketten kann man ebenso zeigen, daß $\mu\,\partial_{(1)}^{(m-1,m)} = \partial_{(1)}^{(m-1,m)}\,\mu$ gilt. □

Wir werden im weiteren also im Falle eines generischen Koeffizientenmoduls den Komplex $\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ mit dem formalen Komplex identifizieren und wegen der einfachen Randhomomorphismen in Rechnungen dessen formale Ketten verwenden.

Satz 3.2.28 (Homologie (1)) *Für einen generischen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$H_2\left(\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) \cong (G_{m-2})^{n(n-1)} = \underbrace{G_{m-2}\oplus\ldots\oplus G_{m-2}}_{n(n-1)}$$

Beweis. Jedes Element der Kettengruppe $\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ in der höchsten Dimension des Komplexes hat eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,m+k})\right]^{-1} \left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,m-1+j})\right]^{-1}(g_{j,k}) \otimes \tilde{\gamma}_{m-1,m-1+j}\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,m+k}$$

mit $g_{j,k} \in G_{m-2}$. bzw. eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} \left(g_{j,k} \otimes e_{m-1+j}^{(m-1)}\right) \otimes e_{m+k}^{(m)}, \qquad g_{j,k} \in G_{m-2}$$

Der Rand einer solchen 2-Kette ist:

$$\begin{aligned} \partial_{(2)}^{(m-1,m)} &\left(\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} (g_{j,k} \otimes e_{m-1+j}^{(m-1)}) \otimes e_{m+k}^{(m)} \right) = \\ &= \sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} (g_{j,k} \otimes \tilde{z}_{m-1}) \otimes e_{m+k}^{(m)} - \sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} (g_{j,k} \otimes e_{m-1+j}^{(m-1)}) \otimes \tilde{z}_{m-1} \end{aligned}$$

Eine 2-Kette ist also ein 2-Zyklus unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} g_{j,k} &= 0, \qquad j = 1,\dots,n+1 \\ \sum_{j=1}^{n+1} g_{j,k} &= 0, \qquad k = 1,\dots,n \end{aligned}$$

Mit den Zyklenbedingungen hat man also ein homogenes System von $2n+1$ Gleichungen für die $(n+1)n$ Elemente $g_{j,k} \in G_{m-2}$ mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$. Der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix über $\mathbf{Z}$ ist $2n$. Dies bedeutet, maximal $(n+1)n - 2n = n(n-1)$ der Elemente $g_{j,k} \in G_{m-2}$ sind linear unabhängig über $\mathbf{Z}$.
Es ist möglich, die $2n$ Elemente $g_{j,k}$, $j = n+1$ oder $k = n$, mit Hilfe der übrigen $n(n-1)$ Elemente $g_{j,k}$, $j \neq n+1$, $k \neq n$, auszudrücken. Die Bedingungen zu $j = 1,\dots,n$ und die Bedingungen zu $k = 1,\dots,n-1$ liefern:

$$\begin{aligned} g_{j,n} &= -\sum_{k=1}^{n-1} g_{j,k}, \qquad j = 1,\dots,n \\ g_{n+1,k} &= -\sum_{j=1}^{n} g_{j,k}, \qquad k = 1,\dots,n-1 \end{aligned}$$

Die übrigen beiden Bedingungen, die Bedingungen zu $j = n+1$ und zu $k = n$, liefern das gleiche Resultat:

$$g_{n+1,n} = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{n-1} g_{n+1,k} = \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} g_{j,k} \\ -\sum_{j=1}^{n} g_{j,n} = \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} g_{j,k} \end{cases}$$

Ein 2-Zyklus hat damit die folgende eindeutige Darstellung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n}} (g_{j,k}\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j})\otimes e^{(m)}_{m+k} = \\
&= \sum_{\substack{j=1,\dots,n+1\\k=1,\dots,n-1}} (g_{j,k}\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j})\otimes (e^{(m)}_{m+k}-e^{(m)}_{m+n}) = \\
&= \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} (g_{j,k}\otimes (e^{(m-1)}_{m-1+j}-e^{(m-1)}_{m+n}))\otimes (e^{(m)}_{m+k}-e^{(m)}_{m+n}) = \\
&= \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} \left(\left(\sum_{\substack{i=1,\dots,j\\l=1,\dots,k}} g_{i,l}\right)\otimes (e^{(m-1)}_{m-1+j}-e^{(m-1)}_{m+j})\right)\otimes (e^{(m)}_{m+k}-e^{(m-1)}_{m+k+1}) = \\
&= \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} \left(\left(\sum_{\substack{i=1,\dots,j\\l=1,\dots,k}} g_{i,l}\right)\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j}\right)\otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1} = \\
&= \sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} \left(h_{j,k}\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j}\right)\otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden im ersten Schritt die $g_{j,n}$, $j=1,\dots,n+1$, und im zweiten Schritt die $g_{n+1,k}$, $k=1,\dots,n-1$ ersetzt. Im dritten Schritt wurden die Summen über j und k umgeschrieben. Im vierten Schritt wurden die Abkürzungen $e^{(r)}_{j,k}=e^{(r)}_j-e^{(r)}_k$ für $r=m-1,m$ eingeführt, im letzten Schritt die Abkürzung $h_{j,k}=\sum_{\substack{i=1,\dots,j\\l=1,\dots,k}} g_{i,l}$.

Es hat also jedes Element der Homologiegruppe $H_2((G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1}))\otimes C(\tilde{X}_{n,1}))$ eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} (h_{j,k}\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j})\otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1}$ mit $h_{j,k}\in G_{m-2}$. Damit hat man durch:

$$\sum_{\substack{j=1,\dots,n\\k=1,\dots,n-1}} (h_{j,k}\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j})\otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1} \quad\to\quad (h_{1,1},\dots,h_{n,n-1})\in (G_{m-2})^{n(n-1)}$$

den behaupteten Isomorphismus. □

Es bleibt, die übrigen Homologiegruppen zu bestimmen:

Satz 3.2.29 (Homologie (2)) *Für einen generischen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$H_q(\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})) \quad\cong\quad 0, \quad q\neq 2$$

Beweis. Man definiere für $q=0,1$ (aufsteigende) Homomorphismen

$$D_{(q)}:\left[\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \to \left[\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q+1}$$

mit der Eigenschaft:

$$D_{(q-1)}\partial_{(q)}c_q + \partial_{(q+1)}D_{(q)}c_q \quad = \quad c_q, \qquad c_q \in \left[\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$$

Und zwar seien $D_{(q)}$, $q=0,1$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
D_{(0)}\left((g^{(m-2)}\otimes \tilde{z}_{m-1})\otimes \tilde{z}_m\right) &= (g^{(m-2)}\otimes e^{(m-1)}_{m+n})\otimes \tilde{z}_m\\
D_{(1)}\left((g^{(m-2)}\otimes e^{(m-1)}_{j_{m-1}})\otimes \tilde{z}_m)\right) &= (g^{(m-2)}\otimes (e^{(m-1)}_{m+n}-e^{(m-1)}_{j_{m-1}}))\otimes e^{(m)}_{m+n}\\
D_{(1)}\left((g^{(m-2)}\otimes \tilde{z}_{m-1})\otimes e^{(m)}_{j_m}\right) &= (g^{(m-2)}\otimes e^{(m-1)}_{m+n})\otimes e^{(m)}_{j_m}
\end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\partial_{(1)}D_{(0)}c_0 &= c_0\\
D_{(0)}\partial_{(1)}c_1 + \partial_{(2)}D_{(1)}c_1 &= c_1,
\end{aligned}$$

Ist nun c_q, $q=0,1$, ein q-Zyklus, so ist $D_{(q)}c_q$ eine $(q+1)$-Kette, deren Rand dieser q-Zyklus ist. $\square$

Lemma 3.2.30 (Homologieschachtelung) *Für einen generischen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$\begin{aligned}
&H_q\left(\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\cong\\
&\cong \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} H_{p_m}\left(H_{p_{m-1}}\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)
\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage ist nur im Falle $q=2$ nichttrivial. Oben wurde gezeigt, daß im Falle, G_{m-1} ist generisch bzgl. $U_{n,1}$, gilt:

$$H_1(G_{m-1}\otimes C(\tilde{X}_{n,1})) \quad\cong\quad (G_{m-1})^{n-1}$$

durch:

$$\sum_{k=1}^{n-1} h^{(m-1)}_k\otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1} \quad\to\quad (h^{(m-1)}_1,\ldots,h^{(m-1)}_{n-1})\in (G')^{n-1}$$

Entsprechend, daß im Falle, G_{m-2} generisch bzgl. $U_{n+1,1}$, gilt:

$$H_1(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})) \quad\cong\quad (G_{m-2})^n$$

durch:

$$\sum_{j=1}^{n} h^{(m-2)}_j\otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j} \quad\to\quad (h^{(m-2)}_1,\ldots,h^{(m-2)}_n)\in (G_{m-2})^n$$

Wählt man nun:

$$G_{m-1} \quad = \quad H_1(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1}))$$

und:

$$h_k^{(m-1)} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} h_{j,k}^{(m-2)} \otimes e_{m-1+j,m+j}^{(m-1)}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} H_1\left(H_1\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) \quad &\cong \quad \left(H_1(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1}))\right)^{n-1} \cong \\ &\cong \quad ((G_{m-2})^n)^{n-1} \end{aligned}$$

durch:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} h_k^{(m-1)} \otimes e_{m+k,m+k+1}^{(m)} \rightarrow \\ &\rightarrow \quad (\sum_{j=1}^{n} h_{j,1}^{(m-2)} \otimes e_{m-1+j,m+j}^{(m-1)}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} h_{j,n-1}^{(m-2)} \otimes e_{m-1+j,m+j}^{(m-1)}) \rightarrow \\ &\rightarrow \quad (h_{1,1}^{(m-2)}, \ldots, h_{n,n-1}^{(m-2)}) \in (G_{m-2})^{n(n-1)} \end{aligned}$$

und man hat das gewünschte Ergebnis. □

Homologie des Komplexes mit trivialem Koeffizientenmodul

Der Vollständigkeit halber sei noch kurz der Fall eines trivialen Koeffizientenmoduls G_{m-2} behandelt.

Im Falle eines trivialen $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Moduls G_{m-2} erhält man aus der äquivarianten Homologie wieder die gewöhnliche Homologie:

Lemma 3.2.31 *Ist G_{m-2} trivialer $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul, so gilt:*

$$\begin{aligned} &H\left(\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1}\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \cong \\ &\cong \quad H\left(\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage folgt mit Lemma 3.2.22, da G_{m-2} trivialer $U_{n+1,1}$-Modul ist und der Komplex $G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ ein trivialer $U_{n,1}$-Modul. □

Satz 3.2.32 *Für einen trivialen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$H_q\left((G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) \otimes C(X_{n,1})\right) \quad \cong \quad (G_{m-2})^{\Xi_q^{(n,2)}}$$

wobei $\Xi_0^{(n,2)} = 1$, $\Xi_1^{(n,2)} = 2n+1$, $\Xi_2^{(n,2)} = n(n+1)$.

Beweis. Im Falle eines trivialen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} sind alle Ketten des Komplexes Zyklen. d.h. es gilt für $q = 0, 1, 2$:

$$H_q\left((G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) \otimes C(X_{n,1})\right) \;=\; \left[(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) \otimes C(X_{n,1})\right]_q$$

Mit Lemma 3.2.4 folgt die Behauptung. □

Lemma 3.2.33 (Homologieschachtelung) *Für einen trivialen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$\begin{aligned} &H_q\left((G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) \otimes C(X_{n,1})\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} H_{p_m}\left(H_{p_{m-1}}(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) \otimes C(X_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Beweis. Als trivialer $U_{n,2}$-Modul ist G_{m-2} trivial bzgl. $U_{n+1,1}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} H_1(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) &\cong (G_{m-2})^{n+1} \\ H_0(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})) &\cong G_{m-2} \end{aligned}$$

Für einen trivialen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} liefert der Komplex $G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1})$ und insbesondere dessen Homologie $H(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1}))$ einen trivialen Modul bzgl. $U_{n,1}$, und für einen trivialen $U_{n,1}$-Modul G_{m-1} gilt:

$$\begin{aligned} H_1(G_{m-1} \otimes C(X_{n,1})) &\cong (G_{m-1})^{n+1} \\ H_0(G_{m-1} \otimes C(X_{n,1})) &\cong G_{m-1} \end{aligned}$$

Setzt man also $G_{m-1} = H_p(G_{m-2} \otimes C(X_{n+1,1}))$, $p = 0, 1$, so folgt die Behauptung. □

Homologie des Komplexes mit beliebigem Koeffizientenmodul

Definition 3.2.34 Es sei U eine Gruppe, und $C(U)$ eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U$-Modul betrachtet wird.

Mit dieser Notation kann man angesichts von Lemma 3.2.5 die obigen Ergebnisse zur Homologie, die Sätze 3.2.28, 3.2.29 und 3.2.32, und zur Homologieschachtelung, die Sätze 3.2.30 und 3.2.33, kurz wie folgt zusammenfassen:

Korollar 3.2.35 (Homologie) *Ist G_{m-2} ein $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul, so gilt:*

$$H_q\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2})\right) \cong \begin{cases} (G_{m-2})^{\Xi_q^{(n,2)}} & G_{m-2} \ \textit{trivial} \\ \delta_{q,2}(G_{m-2})^{\Xi_q^{(n-1,2)}} & G_{m-2} \ \textit{generisch} \end{cases}$$

wobei $\Xi_0^{(n,2)} = 1$, $\Xi_1^{(n,2)} = 2n+1$, $\Xi_2^{(n,2)} = n(n+1)$ *und wobei* $\Xi_2^{(n-1,2)} = (n-1)n$.

Korollar 3.2.36 (Homologieschachtelung) *Für einen $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$\begin{aligned} &H_q\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2})\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} H_{p_m}\left(H_{p_{m-1}}\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(U_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Das Ergebnis zur Homologieschachtelung wird nun noch einmal formuliert, und zwar mit Bezug auf die topologischen Räume $X_{n,2}$, $X_{n+1,1}$ und $X_{n,1}$, als deren Fundamentalgruppen die Gruppen $U_{n,2}$, $U_{n+1,1}$ und $U_{n,1}$ definiert sind. Dazu werden die folgenden Aussagen verwendet, siehe Eilenberg [15]:

- Für eine freie Auflösung $C(U)$ von $\mathbf{Z}$ für $\mathbf{Z}U$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U$-Modul betrachtet wird, und für einen $\mathbf{Z}U$-Modul G sind durch:

$$H_q(U;G) = H_q(G \otimes_{\mathbf{Z}U} C(U))$$

  die Homologiegruppen der Gruppe U mit Koeffizienten in G definiert (auch bekannt als die Gruppen $\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U}(\mathbf{Z},G)$).

- Für einen zusammenhängenden und asphärischen Raum X mit $\pi_1(X) = U$ und einen $\mathbf{Z}U$-Modul G gilt:

$$H_q(G \otimes_{\mathbf{Z}U} C(\tilde{X})) \cong H_q(U;G)$$

Mit diesen Aussagen und den obigen Ergebnissen folgt für die Homologieschachtelung die Aussage:

$$\begin{aligned} &H_q\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n,2})\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} H_{p_m}\left(H_{p_{m-1}}\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Hierbei ist G_{m-2} ein beliebiger $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul. Ist insbesondere $G_{m-2} = \mathbf{Z}$, wobei $\mathbf{Z}$ trivialer $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul, so gewinnt man die Betti-Zahlen und die Euler-Charakteristik von $X_{n,2}$.

Man hat zunächst:

Lemma 3.2.37 *Es sei $C(U_{n,2})$ eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ für $\mathbf{Z}U_{n,2}$, $U_{n,2} = \pi_1(X_{n,2})$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul betrachtet wird, G_{m-2} ein $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul und $C(\tilde{X}_{n,2})$ ein Komplex in der universellen Überlagerung $p : \tilde{X}_{n,2} \to X_{n,2}$ von $X_{n,2}$, dann gilt:*

$$H_q(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n,2})) \cong H_q(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2}))$$

Beweis. Zunächst sind durch eine freie Auflösung $C(U_{n,2})$ von $\mathbf{Z}$ für $\mathbf{Z}U_{n,2}$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul betrachtet wird, und durch einen $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul G_{m-2} die Homologiegruppen der Gruppe $U_{n,2}$ mit Koeffizienten in G_{m-2} definiert:

$$H_q(U_{n,2};G_{m-2}) = H_q(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(U_{n,2}))$$

Zu dieser Definition siehe Eilenberg [15], Abschnitt 12, oder auch Lyndon [27]. Diese Gruppen sind auch bekannt unter der Bezeichnung $\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U_{n,2}}(\mathbf{Z},G_{m-2})$. Dazu siehe Ossa [32], S. 226, oder auch Whitehead [42], S. 226. Sie sind bis auf eine kanonische Isomorphie unabhängig von der Wahl der freien Auflösung $C(U_{n,2})$, [32], S.225-226.

Ferner ist $U_{n,2} = \pi_1(X_{n,2})$, und der Konfigurationsraum $X_{n,2}$ ist zusammenhängend und nach einem Satz von Fadell und Neuwirth [16] asphärisch (und damit ein sogenannter Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(U_{n,2}, 1)$). Außerdem existiert, da $X_{n,2}$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist, die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{n,2}$, [39], Abschnitt 6.4.5, und ein (zellulärer) Komplex $C(X_{n,2})$ liftet isomorph zu einem Komplex $C(\tilde{X}_{n,2})$, [39], Satz 6.8.1. Damit folgt nach einem Satz von Eilenberg, [15], Satz 28.1:

$$H_q(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n,2})) \cong H_q(U_{n,2}; G_{m-2})$$

Und damit folgt die Behauptung. □

Es folgt das gewünschte Resultat:

Lemma 3.2.38 (Homologieschachtelung) *Für einen beliebigen $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul G_{m-2} gilt:*

$$\begin{aligned} &H_q\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n,2})\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} H_{p_m}\left(H_{p_{m-1}}\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage von Korollar 3.2.36 lautet mit Hilfe der Tor-Notation wie folgt:

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U_{n,2}}(\mathbf{Z}, G_{m-2}) \quad = \bigoplus_{p_{m-1}+p_m=q} \mathrm{Tor}_{p_m}^{\mathbf{Z}U_{n,1}}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Tor}_{p_{m-1}}^{\mathbf{Z}U_{n+1,1}}(\mathbf{Z}, G_{m-2})\right)$$

Mit Hilfe von Lemma 3.2.37 hat man für die linke Seite:

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U_{n,2}}(\mathbf{Z}, G_{m-2}) \quad = \quad H_q\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n,2})\right)$$

Andererseits kann man auf der rechten Seite schreiben:

$$\mathrm{Tor}_{p_m}^{\mathbf{Z}U_{n,1}}(\mathbf{Z}, G_{m-1}) \quad = \quad H_{p_m}\left(G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$$

mit:

$$\begin{aligned} G_{m-1} \quad &= \quad \mathrm{Tor}_{p_{m-1}}^{\mathbf{Z}U_{n+1,1}}(\mathbf{Z}, G_{m-2}) = \\ &= \quad H_{p_{m-1}}\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung □.

Diese Aussage zur Homologieschachtelung gilt insbesondere im Fall, daß $G_{m-2} = \mathbf{Z}$ trivialer $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Modul ist. Mit Hilfe von Korollar 3.2.35 kann man die Betti-Zahlen und die Euler-Charakteristik von $X_{n,2}$ bestimmen.

Man setze abkürzend: $H(X; \mathbf{Z}) = H(\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} C(X))$.

Definition 3.2.39 Die *Betti-Zahlen* $b_q(X_{n,2})$ von $X_{n,2}$ sind definiert als:

$$b_q(X_{n,2}) \quad = \quad \mathrm{Rang}(H_q(X_{n,2};\mathbf{Z}))$$

Die *Euler-Charakteristik* $\chi(X_{n,2})$ von $X_{n,2}$ ist definiert als:

$$\chi(X_{n,2}) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j b_j(X_{n,2})$$

Lemma 3.2.40 *Es gilt:*

$$\chi(X_{n,2}) \quad = \quad n(n-1)$$

Beweis. Es gilt nach Korollar 3.2.35: $b_j(X_{n,2}) = \Xi_j^{(n,2)}$, $j = 0,1,2$, explizit $b_0(X_{n,2}) = 1$, $b_1(X_{n,2}) = 2n+1$ und $b_1(X_{n,2}) = (n+1)n$. □

3.3 Iterierte Darstellungen der Zopfgruppen (1)

Darstellungen der Zopfgruppe B_n als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen und insbesondere der Homologiegruppen des 2-dimensionalen äquivarianten Komplexes gewinnt man, wenn man voraussetzt, daß der Koeffizientenmodul G_{m-2} auch B_n-Modul ist. Im folgenden werden die Darstellungen von B_n im Falle eines beliebigen generischen Koeffizientenmoduls und beispielhaft für spezielle 1-dimensionale Koeffizientenmoduln explizit angegeben. Außerdem wird der Fall eines Koeffizientenmoduls G'_{m-2} betrachtet, der zusätzlich ein Modul bzgl. B'_2 ist, wobei $B'_2 \subset B_{n+2}$ die vom Element σ_{m-1} erzeugte Zopfgruppe ist. In diesem Fall können Darstellungen von B_n als Gruppen von Automorphismen gewisser Faktorgruppen der Kettengruppen und der Homologiegruppen angeben werden, Darstellungen von einfacher Gestalt.

3.3.1 Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf äquivarianten 2-Ketten und -Zyklen

Man betrachte den äquivarianten Komplex $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ mit generischem $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Koeffizientenmodul G_{m-2}. Man erinnere:

$$\begin{aligned}\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 &\simeq (G_{m-2})^{(n+1)n} \\ H_2\left(\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) &\simeq (G_{m-2})^{n(n-1)}\end{aligned}$$

Um Darstellungen von B_n als Gruppe von Automorphismen dieser Gruppen zu gewinnen, bzw. um diese Gruppen mit der Struktur von B_n-Darstellungsmoduln zu versehen, fordern wir, daß der Koeffizientenmodul G_{m-2} ein B_n-(Rechts-)Modul ist.

Definition 3.3.1 Es sei G_{m-2} eine kommutative Gruppe, $B_nU_{n,2} := B_n \ltimes U_{n,2}$, und $\Phi_g^{(m-2)}$: $B_nU_{n,2} \to \mathrm{Aut}(G_{m-2})$ ein Homomorphismus, so daß G_{m-2} ein $B_nU_{n,2}$-Modul ist, gegeben durch die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned}G_{m-2} \times B_nU_{n,2} &\to G_{m-2} \\ (g,\beta) &\to g\,\beta := \Phi_g^{(m-2)}(\beta)(g), \qquad \beta \in B_nU_{n,2}\end{aligned}$$

Es werden nun die Darstellungen $B_n \to \mathrm{Aut}\left(\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2\right)$, sowie $B_n \to \mathrm{Aut}\left(H_2\left(\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right)$ behandelt.

Darstellung von B_n auf 2-Ketten

Satz 3.3.2 *Es sei G_{m-2} ein $B_nU_{n,2}$-Rechtsmodul, generisch bzgl. $U_{n,2}$. Die Gruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Kettengruppe $\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_c^{(m-2,m-1,m)} : B_n \to Aut\left(\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2\right) \cong Aut\left((G_{m-2})^{(n+1)n}\right)$$

gegeben durch:

$$\chi_c^{(m-2,m-1,m)}(\sigma_i) \quad = \quad \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)$$

Hierbei ist $R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,2},(n+1)n)$*, und die nichtverschwindenden der Einträge* $\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i_{m-1},i_m}^{j_{m-1},j_m}$, $i_k, j_k = k+1,\ldots,m+n$, $k = m-1, m$*, sind:*

$$\begin{aligned}
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,k}^{i,k} &= 1-\gamma_{m-1,i}, \qquad k \neq i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,k}^{i+1,k} &= \gamma_{m-1,i}, \qquad k \neq i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,k}^{i,k} &= 1, \qquad k \neq i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i}^{m,i} &= 1-\gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m,}+\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i}^{m,i+1} &= \gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}+\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i}^{i,j} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}(1-\gamma_{m-1,i}), \qquad j = i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{m,k} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}(1-\gamma_{m-1,i})(1-\gamma_{m-1,m}^{-1}) \\
& \qquad k = i, i+1 \quad m < j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i} &= 1-\gamma_{m,i}[\gamma_{m-1,m},\gamma_{m-1,i}], \qquad m < j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i+1} &= \gamma_{m,i}[\gamma_{m-1,m},\gamma_{m-1,i}], \qquad m < j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{i,i} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}^{-1})(1-\gamma_{m-1,i}^{-1}), \qquad m < j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{i,i+1} &= -\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,i}(1-\gamma_{m-1,m}^{-1})(1-\gamma_{m,i}^{-1}), \qquad m < j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{m,j} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}(1-\gamma_{m-1,i})(1-\gamma_{m-1,m}^{-1}), \qquad j = i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i,i} &= (1-\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m})(1-\gamma_{m-1,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i,i+1} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}(1-\gamma_{m-1,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i+1,i} &= \gamma_{m-1,i}(1-\gamma_{m,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i-1,i+1} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,i}\gamma_{m-1,m}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{m,i} &= -\gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{m,i+1} &= \gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}) \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i,i} &= 1-\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m} \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i,i+1} &= \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m} \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i} &= 1-\gamma_{m,i}, \qquad j \geq i+2 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i+1} &= \gamma_{m,i}, \qquad j \geq i+2 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i+1}^{j,i} &= 1, \qquad j \neq i, i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i+1}^{i,i} &= 1-\gamma_{m-1,i} \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i+1}^{i+1,i} &= \gamma_{m-1,i} \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{i,i} &= 1 \\
\left(R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,k}^{j,k} &= 1, \qquad j,k \neq i, i+1
\end{aligned}$$

Beweis. Für einen $B_n U_{n,1}$-Modul G_{m-1} hat man eine Darstellung von B_n:

$$\chi_c^{(m-1,m)} : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1}))$$

definiert durch:

$$\chi_c^{(m-1,m)}(\sigma_i) = \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\, \Phi_c^{(m)}(\sigma_i)\right) = \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i\, R_c^{(m)}(\sigma_i)\right)$$

wobei $R_c^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n)$. Entsprechend hat man für einen $B_{n+1}U_{n+1,1}$-Modul G_{m-2} eine Darstellung von B_n:

$$\chi_c^{(m-2,m-1)} : B_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$$

definiert durch:

$$\chi_c^{(m-2,m-1)}(\sigma_i) = \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, \Phi_c^{(m-1)}(\sigma_i)\right) = \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, R_c^{(m-1)}(\sigma_i)\right)$$

wobei $R_c^{(m-1)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+1,1}, n+1)$ und insbesondere durch die Einschränkung der Abbildung eine Darstellung von $B_n U_{n,1} \subset B_{n+1}$. Setzt man $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ und somit $\Phi_g^{(m-1)} = \chi_c^{(m-2,m-1)}$, so hat man die Darstellung:

$$\chi_c^{(m-2,m-1,m)} : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2\right)$$

durch:

$$\begin{aligned}
\chi_c^{(m-2,m-1,m)}(\sigma_i) &= \chi_c^{(m-2,m-1)}(\sigma_i\, R_c^{(m)}(\sigma_i)) = \\
&= \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i\, R_c^{(m-1)}(\sigma_i))\, \chi_c^{(m-2,m-1)}(R_c^{(m)}(\sigma_i)) = \\
&= \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i\, R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i))
\end{aligned}$$

Die explizite Gestalt von $R_c^{(m-1,m)}(\sigma_i)$ folgt durch direkte Rechnung. Zu den dazu notwendigen Formeln siehe die Unterabschnitte 2.2.4 und 2.2.5. □

Darstellung von B_n auf 2-Zyklen

Satz 3.3.3 *Es sei G_{m-2} ein $B_nU_{n,2}$-Rechtsmodul, generisch bzgl. $U_{n,2}$. Die Gruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $H_2\left(\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\simeq (G_{m-2})^{n(n-1)}$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_h^{(m-2,m-1,m)} : B_n \to Aut\left(H_2\left(\left(G_{m-2}\otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right) \cong Aut\left((G_{m-2})^{n(n-1)}\right)$$

gegeben durch:

$$\chi_h^{(m-2,m-1,m)}(\sigma_i) \quad = \quad \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)$$

Hierbei ist $R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,2}, n(n-1))$, und die nichtverschwindenden der Einträge $\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i_{m-1},i_m}^{j_{m-1},j_m}$, wobei $i_k, j_k = k+1,\ldots,m+n-1$ und $k = m-1, m$, sind:

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,k}^{j,k} &= 1, \qquad j\neq i,i+1, \quad k\neq i-1,i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i-1,k}^{i,k} &= \gamma_{m-1,i}, \qquad k\neq i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,k}^{i,k} &= -\gamma_{m-1,i}, \qquad k\neq i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,k}^{j,k} &= 1, \qquad j=i,i+1, \quad k\neq i-1,i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i-1}^{m,i-1} &= 1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}, \qquad j=m,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i-1}^{j,i+1} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,i}^{-1}, \qquad j=m+1,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i-1}^{j,i-1} &= 1, \qquad j<i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,i}^{-1}, \qquad j<i \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i-1,i-1}^{i,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}(\gamma_{m-1,m}-1), \qquad j=m,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i-1}^{i,i} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{j,i-1} &= 1, \qquad j=i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}), \qquad j=m,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m,i}, \qquad j=i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i-1}^{j,i-1} &= 1, \qquad j>i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i-1}^{j,i} &= \gamma_{m,i}, \qquad j>i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i}^{m,i} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{m,i}^{j,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}(\gamma_{m-1,i}^{-1}-1), \qquad m=1,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\gamma_{m-1,i}^{-1}, \qquad m<j<i \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i-1,i}^{i,i} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{j,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m}), \qquad j=m,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{j,i} &= \gamma_{m,i}(\gamma_{m-1,m}-1), \qquad j=m,\ldots,i-1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{j,i} &= -\gamma_{m,i}, \qquad j=i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i}^{j,i} &= -\gamma_{m,i}, \qquad j>i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i+1}^{j,l} &= 1, \qquad j>i-2, \quad l=i,i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i-1,i+1}^{i,l} &= \gamma_{m-1,i}, \qquad l=i,i+1
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i,i+1}^{i,l} &= -\gamma_{m-1,i}, \qquad l = i, i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{j,l} &= 1, \qquad j,l = i, i+1 \\
\left(R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)\right)_{j,i+1}^{j,l} &= 1, \qquad j > i+1, \quad l = i, i+1
\end{aligned}$$

Beweis. Für einen $B_n U_{n,1}$-Modul G_{m-1} hat man eine Darstellung von B_n:

$$\chi_h^{(m-1,m)} : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(G_{m-1} \otimes C(\tilde{X}_{n,1})))$$

definiert durch:

$$\chi_h^{(m-1,m)}(\sigma_i) = \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i \, \Phi_h^{(m)}(\sigma_i)\right) = \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i \, R_h^{(m)}(\sigma_i)\right)$$

wobei $R_h^{(m)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n,1}, n-1)$. Entsprechend hat man für einen $B_{n+1}U_{n+1,1}$-Modul G_{m-2} eine Darstellung von B_n:

$$\chi_h^{(m-2,m-1)} : B_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(H_1(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})))$$

definiert durch:

$$\chi_h^{(m-2,m-1)}(\sigma_i) = \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i \, \Phi_h^{(m-1)}(\sigma_i)\right) = \Phi_g^{(m-1)}\left(\sigma_i \, R_h^{(m-1)}(\sigma_i)\right)$$

wobei $R_h^{(m-1)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+1,1}, n)$ und insbesondere durch die Einschränkung der Abbildung eine Darstellung von $B_n U_{n,1} \subset B_{n+1}$. Setzt man $G_{m-1} = H_1(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1}))$ und somit $\Phi_g^{(m-1)} = \chi_h^{(m-2,m-1)}$, so hat man die Darstellung:

$$\chi_h^{(m-2,m-1,m)} : B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(H_2\left(\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right)$$

durch:

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(m-2,m-1,m)}(\sigma_i) &= \chi_h^{(m-2,m-1)}(\sigma_i \, R_h^{(m)}(\sigma_i)) = \\
&= \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i \, R_h^{(m-1)}(\sigma_i)) \, \chi_h^{(m-2,m-1)}(R_h^{(m)}(\sigma_i)) = \\
&= \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i \, R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i))
\end{aligned}$$

Die explizite Gestalt von $R_h^{(m-1,m)}(\sigma_i)$ folgt durch direkte Rechnung. Zu den dazu notwendigen Formeln siehe die Unterabschnitte 2.2.4 und 2.2.5. □

3.3.2 Beispiel: 3-parametrige Burau-Darstellung von B_n

Sei $\mathbf{Z}^3$ die von der Menge $\{r, s, t\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe und $\mathbf{Z}[r^{\pm 1}, s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in den Variablen r, s, t. Und es sei $\Phi_g^{(m-2)}$:

$B_nU_{n,2} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}[r^{\pm1}, s^{\pm1}, t^{\pm1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i)(1) &= 1, & \sigma_i \in B_n \\
\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m-1,m})(1) &= r, & \gamma_{m-1,m} \in U_{n+1,1} \\
\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m-1,i})(1) &= s, & \gamma_{m-1,i} \in U_{n+1,1}, i \neq m \\
\Phi_g^{(m-2)}(\gamma_{m,i})(1) &= t, & \gamma_{m,i} \in U_{n,1}
\end{aligned}$$

Damit ist $G_{m-2} = \mathbf{Z}[r^{\pm1}, s^{\pm1}, t^{\pm1}]$ ein $B_nU_{n,2}$-Modul mit Multiplikationsabbildung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}[r^{\pm1}, s^{\pm1}, t^{\pm1}] \times B_nU_{n,1} &\to \mathbf{Z}[r^{\pm1}, s^{\pm1}, t^{\pm1}] \\
(1, \beta) &\to \Phi_g^{(m-2)}(\beta)(1), \qquad \beta \in B_nU_{n,2}
\end{aligned}$$

Die Darstellung $\chi_h^{(m-2,m-1,m)} : B_n \to \mathrm{Aut}\left(H_2\left(\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right)$, i.e die Darstellung $\chi_h^{(m-2,m-1,m)} : B_n \to GL\left(\mathbf{Z}[r^{\pm1}, s^{\pm1}, t^{\pm1}], n(n-1)\right)$, ist dann eine 3-*parametrige reduzierte Burau-Darstellung* der Zopfgruppe B_n.
Man betrachte den Fall $m = 2$, $n = 3$, d.h. die Darstellung:

$$\chi_h^{(0,1,2)} : B_3 \to GL\left(\mathbf{Z}[r^{\pm}, s^{\pm}, t^{\pm}], 6\right)$$

der Zopfgruppe $B_3 = \langle \sigma_3, \sigma_4 \mid \sigma_3\sigma_4\sigma_3 = \sigma_4\sigma_3\sigma_4 \rangle$:

$$\sigma_3 \quad \to \quad \begin{pmatrix} -st & -st & 0 & 0 & 0 & 0 \\ st(1-r) & st & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t(1-r) & -t & -t & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s & 0 & 1 & s & 0 \\ 0 & -s & 0 & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & st & -t(1-s) & 0 \\ 0 & 1 & s & 0 & t & st \\ 0 & 0 & -s & -st(1-r) & -st(1-r) & -st \\ 0 & 0 & 0 & -st & t(1-s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & -st \\ 0 & 0 & 0 & st(1-r) & st(1-r) & st \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist in beiden Fällen $(\lambda-1)^2(\lambda+s)(\lambda+t)(\lambda^2 - rs^2t^2)$.

3.3.3 Anwendung: Monodromiegruppe 2-facher hypergeometrischer Integrale

In diesem Abschnitt wird eine höhere Gassner-Darstellung der reinen Zopfgruppe P_3 explizit bestimmt und als Monodromiegruppe 2-facher hypergeometrischer Integrale interpretiert.

Höhere Gassner-Darstellung der reinen Zopfgruppe P_3

Man setze $m = 2$ und $n = 3$. Im folgenden wird für einen 1-dimensionalen Modul G_0 die Darstellung $P_3 \to \mathrm{Aut}\left(H_2\left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{4,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{3,1})\right)\right) \cong GL(G_0, 6)$ schrittweise hergeleitet.

Schritt 1: Wahl des Koeffizientenmoduls Zunächst erinnere man, daß für die reine Zopfgruppe P_5 gilt: $P_5 = P_3 \ltimes U_{3,1} \ltimes U_{4,1}$, wobei P_3 von $\gamma_{3,4}$, $\gamma_{3,5}$ und $\gamma_{4,5}$ erzeugt wird und wobei $U_{3,1} = \langle \gamma_{2,3}, \gamma_{2,4}, \gamma_{2,5} \rangle$ ist und $U_{4,1} = \langle \gamma_{1,2}, \gamma_{1,3}, \gamma_{1,4}, \gamma_{1,5} \rangle$.
Es sei der Koeffizientenmodul $G_0 = V^{(0)}$, wobei $V^{(0)}$ ein 1-dimensionaler Vektorraum über $\mathbf{C}$ ist, als P_5-Modul gegeben durch den folgenden Homomorphismus:

$$\begin{array}{rcll}
\Phi_g^{(0)} : P_5 & \to & GL(V^{(0)}) & \\
\Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j})(1) & = & 1, & \gamma_{i,j} \in P_3 \\
\Phi_g^{(0)}(\gamma_{2,j})(1) & = & \alpha_{2,j} = e^{2\pi i \lambda_{2,j}}, & \gamma_{2,j} \in U_{3,1}, \alpha_{2,j} \in \mathbf{C} \\
\Phi_g^{(0)}(\gamma_{1,j})(1) & = & \alpha_{1,j} = e^{2\pi i \lambda_{1,j}}, & \gamma_{1,j} \in U_{4,1}, \alpha_{1,j} \in \mathbf{C}
\end{array}$$

Es sei $G_0 = V^{(0)} = \mathbf{C}$ generisch als Modul bzgl. $U_{3,2} = U_{3,1} \ltimes U_{4,1}$:

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_{1,i}, \alpha_{2,j} & \neq & 1, & i = 2,3,4,5; \quad j = 3,4,5 \\
\alpha_{2,j}\alpha_{1,2}\alpha_{1,j} & \neq & 1, & j = 3,4,5
\end{array}$$

Schritt 2: Gassner-Darstellung Die Homologiegruppe $H_1(V^{(0)} \otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \cong (V^{(0)})^3$ bildet einen $\mathbf{C}$-Vektorraum der Dimension 3, der mit $V^{(1)}$ bezeichnet werde. Man hat dann einen Modul zur reinen Zopfgruppe P_4 durch den Homomorphismus:

$$\begin{array}{rcll}
\chi_h^{(0,1)} : P_4 & \to & GL(V^{(1)}) & \\
\chi_h^{(0,1)}(\gamma) & = & \Phi_g^{(0)}(\gamma\, R_h^{(1)}(\gamma)), & \gamma \in P_4
\end{array}$$

Diese 3-dimensionale *Gassner-Darstellung* der Gruppe P_4 mit den Generatoren $\gamma_{i,j}$, wobei $i, j \in \{2,3,4,5\}$ und $i < j$ ist, lautet explizit:

$$\begin{array}{rcl}
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{2,3}) & = & \Phi_g^{(0)}(\gamma_{2,3}) \begin{pmatrix} \Phi_g^{(0)}(\gamma_{1,2}\gamma_{1,3}) & 0 & 0 \\ 1 - \Phi_g^{(0)}(\gamma_{1,2}) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& = & \alpha_{2,3} \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{1,3} & 0 & 0 \\ 1 - \alpha_{1,2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{2,4}) & = & \alpha_{2,4} \begin{pmatrix} \alpha_{1,4} & \alpha_{1,4} - 1 & 0 \\ \alpha_{1,4}(\alpha_{1,2} - 1) & 1 - \alpha_{1,4} + \alpha_{1,4}\alpha_{1,2} & 0 \\ 1 - \alpha_{1,2} & 1 - \alpha_{1,2} & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{2,5}) &= \alpha_{2,5}\begin{pmatrix} \alpha_{1,5} & \alpha_{1,5}-1 & \alpha_{1,5}-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha_{1,5}(\alpha_{1,2}-1) & \alpha_{1,5}(\alpha_{1,2}-1) & 1-\alpha_{1,5}+\alpha_{1,5}\alpha_{1,2} \end{pmatrix} \\
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{3,4}) &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,3}(1-\alpha_{1,4}) & 0 \\ 0 & \alpha_{1,3}\alpha_{1,4} & 0 \\ 0 & 1-\alpha_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{3,5}) &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{1,3}(1-\alpha_{1,5}) & \alpha_{1,3}(1-\alpha_{1,5}) \\ 0 & \alpha_{1,5} & \alpha_{1,5}-1 \\ 0 & \alpha_{1,5}(\alpha_{1,3}-1) & 1-\alpha_{1,5}+\alpha_{1,5}\alpha_{1,3} \end{pmatrix} \\
\chi_h^{(0,1)}(\gamma_{4,5}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_{1,4}(1-\alpha_{1,5}) \\ 0 & 0 & \alpha_{1,4}\alpha_{1,5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Schritt 3: Höhere Gassner-Darstellung Der Vektorraum $V^{(1)} \cong H_1(V^{(0)} \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ ist nach den Voraussetzungen zu $V^{(0)}$ generisch als $U_{3,1} \subset P_4$-Modul und werde nunmehr als $P_3U_{3,1}$-Koeffizientenmodul in der äquivarianten Homologiegruppe $H_1(V^{(1)} \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ betrachtet:

$$\Phi_g^{(1)} = \chi_h^{(0,1)} : P_3U_{3,1} \quad \rightarrow \quad GL(V^{(1)})$$

Die Gruppe $H_1(V^{(1)} \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \cong (V^{(1)})^2 \cong (V^{(0)})^6$ bildet einen $\mathbf{C}$-Vektorraum der Dimension 6, der mit $V^{(2)}$ bezeichnet werde. Man hat dann einen Modul zur reinen Zopfgruppe P_3 durch den Homomorphismus:

$$\begin{aligned}
\chi_h^{(1,2)} : P_3 &\rightarrow GL(V^{(2)}) \\
\chi_h^{(1,2)}(\gamma) &= \Phi_g^{(1)}(\gamma\, R_h^{(2)}(\gamma)), \qquad \gamma \in P_3
\end{aligned}$$

Diese *höhere Gassner-Darstellung* der Gruppe P_3 mit den Generatoren $\gamma_{i,j}$, wobei $i,j \in \{3,4,5\}$ und $i<j$ ist, wird im folgenden explizit angegeben. Man hat:

$$\chi_h^{(1,2)}(\gamma_{3,4}) = \Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}) \begin{pmatrix} \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3}\gamma_{2,4}) & 0 \\ 1-\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3}) & 1 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned}
&\Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}\gamma_{2,3}\gamma_{2,4}) = \\
&= \alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4} & 0 \\ \beta_{1,2} & 1-\alpha_{1,2}\alpha_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\
&\Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4})(1-\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3})) = \\
&= \begin{pmatrix} 1-\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}(\beta_{1,4}+\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}) & \alpha_{1,3}\beta_{1,4}\beta_{2,3} & 0 \\ -\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{2,3}\beta_{1,2} & \alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\beta_{2,3} & 0 \\ -\alpha_{2,3}\beta_{1,2}\beta_{1,3} & \beta_{1,3}\beta_{2,3} & \beta_{2,3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

wobei abkürzend $\beta_{i,j} = 1 - \alpha_{i,j}$ gesetzt ist. Das charakteristische Polynom von $\chi_h^{(1,2)}(\gamma_{3,4})$ lautet: $(\lambda-1)^2(\lambda-\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\lambda-\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\lambda-\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})^2$.
Weiter hat man:

$$\chi_h^{(1,2)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5}) = \Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5}) \begin{pmatrix} \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3}\gamma_{2,4}\gamma_{2,5}) & \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3}\gamma_{2,4})(\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,5})-1) \\ 0 & \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,3}) \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned} &\Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5}\gamma_{2,3}\gamma_{2,4}\gamma_{2,5}) = \\ &= \gamma \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5} & -\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ 0 & 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,3} \end{pmatrix} \\ &\Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5}\gamma_{2,3}\gamma_{2,4})(\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,5}-1) = \\ &= \delta \begin{pmatrix} -\alpha_{1,4}(\beta_{1,5}+\alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\beta_{2,5}) & \alpha_{1,4}(\alpha_{1,5}-1) & -\alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ \alpha_{1,4}\beta_{1,2}\beta_{1,5} & \epsilon & \alpha_{1,4}\alpha_{2,4}\beta_{1,5}\beta_{2,5} \\ \alpha_{1,4}\beta_{1,5}(1-\alpha_{1,2}\alpha_{2,5}) & \beta_{1,2} & \alpha_{1,2}\alpha_{2,5}-1 \end{pmatrix} \\ &\Phi_g^{(1)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5}\gamma_{2,3}) = \\ &= \alpha_{1,3}\alpha_{2,3} \begin{pmatrix} 1-\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2} & 1-\alpha_{1,4}\alpha_{1,5} & \alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ \alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2} & \alpha_{1,4}\alpha_{1,5} & -\alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei abkürzend $\gamma = \alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}$, $\delta = \alpha_{1,3}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}$ und $\epsilon = \alpha_{1,4}(\beta_{1,5} - \alpha_{1,2}(1-\alpha_{1,5}\alpha_{2,5}))$ gesetzt ist. Das charakteristische Polynom von $\chi_h^{(1,2)}(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5})$ lautet: $(\lambda-\alpha_{1,3}\alpha_{2,3})^2$ $(\lambda-\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,3})(\lambda-\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\lambda-\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})^2$.
Und schließlich hat man:

$$\chi^{(1,2)}(\gamma_{4,5}) = \Phi_g^{(1)}(\gamma_{4,5}) \begin{pmatrix} 1 & \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,4})(1-\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,5})) \\ 0 & \Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,4}\gamma_{2,5}) \end{pmatrix}$$

wobei:

$$\begin{aligned} &\Phi_g^{(1)}(\gamma_{4,5}\gamma_{2,4}\gamma_{2,5}) = \\ &= \alpha_{2,4}\alpha_{2,5} \begin{pmatrix} \alpha_{1,4}\alpha_{1,5} & \alpha_{1,4}\alpha_{1,5}-1 & -\alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ -\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2} & 1-\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2} & \alpha_{1,4}\beta_{1,5} \\ 0 & 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5} \end{pmatrix} \\ &\Phi_g^{(1)}(\gamma_{4,5}\gamma_{2,4})(1-\Phi_g^{(1)}(\gamma_{2,5})) = \\ &= \alpha_{2,4} \begin{pmatrix} \alpha_{1,4}(1-\alpha_{1,5}\alpha_{2,5}) & -\beta_{2,5}+\alpha_{1,4}(1-\alpha_{1,5}\alpha_{2,5}) & \alpha_{1,4}\alpha_{2,5}\beta_{1,5} \\ -\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2}\beta_{2,5} & (1-\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\beta_{1,2})\beta_{2,5} & \alpha_{1,4}\alpha_{2,4}\beta_{1,5}\beta_{2,5} \\ \alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,4}\beta_{1,2} & \alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,4}\beta_{1,2} & \alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,4}(1-\alpha_{1,2}\alpha_{2,5}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom von $\chi_h^{(1,2)}(\gamma_{4,5})$ lautet: $(\lambda-1)^2(\lambda-\alpha_{1,4}\alpha_{1,5})(\lambda-\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})$ $(\lambda-\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})^2$.

Monodromiegruppe 2-facher hypergeometrischer Integrale

Schritt 1: Realisierung des Koeffizientenmoduls als Monodromie komplexer Funktionen Man betrachte die komplexe Funktion:

$$I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)=\prod_{i=2,3,4,5}(z_1-z_i)^{\lambda_{1,i}}\prod_{i=3,4,5}(z_2-z_j)^{\lambda_{2,j}}\qquad \lambda_{1,i},\lambda_{2,j}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$$

Die Funktion $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$ ist holomorph in der universellen Überlagerung von $\mathbf{C}^5-\{z_1=z_j,z_2=z_k\}$, wobei $j=2,3,4,5$ und $k=3,4,5$ ist, mit logarithmischen Singularitäten in $\{z_1=z_j,z_2=z_k\}$. Man wähle ein festes Funktionselement von $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$ durch die Hauptwerte der Logarithmen in: $(z_i-z_j)^{\lambda_{i,j}}=e^{\lambda_{i,j}\ln(z_i-z_j)}$, und bezeichne dieses Funktionselement ebenfalls mit $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$. Die analytische Fortsetzung entlang einem Weg mit Spur $\gamma_{i,j}\in U_{3,2}$ ergibt dann das Element $e^{2\pi i\lambda_{i,j}}I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$. Analytische Fortsetzung entlang einem Weg mit Spur $\gamma\in P_3$ reproduziert das Funktionselement.
Der 1-dimensionale $\mathbf{C}$-Vektorraum $V^{(0)}$, erzeugt von $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$, liefert also einen Modul $P_5=P_3U_{3,2}$, bestimmt durch die *Monodromieeigenschaft* der Funktion $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)$, durch die Abbildung:

$$\begin{array}{lcl}V^{(0)}\times P_5 & \to & V^{(0)}\\ (I^{(0)},\gamma_{i,j}) & \to & I^{(0)}\cdot\gamma_{i,j}=\Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j})(I^{(0)})=e^{2\pi i\lambda_{i,j}}I^{(0)},\qquad \gamma_{i,j}\in U_{3,2}\\ (I^{(0)},\gamma_{i,j}) & \to & I^{(0)}\cdot\gamma_{i,j}=\Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j})(I^{(0)})=I^{(0)},\qquad \gamma_{i,j}\in P_3\end{array}$$

bzw. eine 1-dimensionale Darstellung der Gruppe P_5 durch die Abbildung:

$$\begin{array}{lcl}\Phi_g^{(0)}:P_5 & \to & GL(V^{(0)})\\ \Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j}) & = & e^{2\pi i\lambda_{i,j}},\qquad \gamma_{i,j}\in U_{3,2}\\ \Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j}) & = & 1,\qquad \gamma_{i,j}\in P_3\end{array}$$

$V^{(0)}=\mathbf{C}$ sei generisch bzgl. $U_{3,2}\subset P_5$:

$$\begin{array}{rcl}\lambda_{1,i},\lambda_{2,j} & \notin & \mathbf{Z},\qquad i=2,3,4,5;\quad j=3,4,5\\ \lambda_{2,j}+\lambda_{1,2}+\lambda_{1,j} & \notin & \mathbf{Z},\qquad j=3,4,5\end{array}$$

Schritt 2: Definition hypergeometrischer Integrale und hypergeometrische Monodromiegruppe Nach Voraussetzung ist $V^{(0)}$ also insbesondere generisch bzgl. $U_{4,1}$. Die Funktion $I^{(0)}(z_1)$ der Veränderlichen z_1 ist holomorph in der universellen Überlagerung von $X_{4,1}(\mathbf{C})=\mathbf{C}-\{z_1=z_j\}$, wobei $j=2,3,4,5$ ist, mit logarithmischen Singularitäten in $\{z_1=z_j\}$ und kann nun über Zyklen aus $H_1(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ integriert werden. Es bezeichne $V^{(1)}$ den $\mathbf{C}$-Vektorraum der Dimension $\dim V^{(1)}=3$, der von den folgenden *hypergeometrischen Integralen* aufgespannt wird:

$$I_j^{(1)}(z_2,\ldots,z_5)=\int_{c_j}dz_1\,I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5),\qquad j=2,3,4$$

Hierbei wird integriert über den Zyklus:

$$\begin{aligned} c_j &= \left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j})\right]^{-1}(I^{(0)})\otimes\tilde{\gamma}_{1,j} - \left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j+1})\right]^{-1}(I^{(0)})\otimes\tilde{\gamma}_{1,j+1} = \\ &= (1-e^{2\pi i\lambda_{1,j}})^{-1}\, I^{(0)}\otimes\tilde{\gamma}_{1,j} - (1-e^{2\pi i\lambda_{1,j+1}})^{-1}\, I^{(0)}\otimes\tilde{\gamma}_{1,j+1} \\ &\in H_1(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \end{aligned}$$

Die Integrale $I^{(1)}(z_2,\ldots,z_5)$ sind komplexe Funktionen der 4 Veränderlichen $z_2,\ldots,z_5$ und singulär in $z_2=z_j$, wobei $j=3,4,5$. Der Vektorraum $V^{(1)}$ liefert einen Modul bzgl. P_4 durch die Gassner-Darstellung von P_4, d.h. die Abbildung:

$$\chi_h^{(0,1)} : P_4 \quad\rightarrow\quad GL(V^{(1)})$$

Das Bild von P_4 in $GL(V^{(1)})$ heißt *Monodromiegruppe* der Integrale $I^{(1)}(z_2,\ldots,z_5)$, vgl. [30].

Schritt 3: Definition 2-facher hypergeometrischer Integrale und höhere hypergeometrische Monodromiegruppe Nach den Voraussetzungen über $V^{(0)}$ ist $V^{(1)}$ insbesondere generischer Modul bzgl. $U_{3,1}\subset P_4$. Die Integrale $I_j^{(1)}(z_2)$, wobei $j=2,3,4$ ist, können daher nach z_2 über Zyklen aus $H_1(V^{(1)}\otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ integriert werden. Es bezeichne $V^{(2)}$ den $\mathbf{C}$-Vektorraum der Dimension $\dim V^{(2)}=6$, der von den folgenden 2-*fachen hypergeometrischen Integralen* aufgespannt wird:

$$\begin{aligned} I^{(2)}_{j_1,j_2}(z_3,\ldots,z_5) &= \int_{c_{j_2}} dz_2\, I^{(1)}_{j_1}(z_2,\ldots,z_5) = \\ &= \int_{c_{j_2}} dz_2 \int_{c_{j_1}} dz_1\, I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5) \\ & \qquad j_1 = 2,3,4, \quad j_2 = 3,4 \end{aligned}$$

Hierbei wird integriert über die Zyklen:

$$\begin{aligned} c_{j_1} &= I^{(0)}\otimes e^{(1)}_{j_1,j_1+1} = \\ &= \left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1})\right]^{-1}(I^{(0)})\otimes\tilde{\gamma}_{1,j_1} - \left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1+1})\right]^{-1}(I^{(0)})\otimes\tilde{\gamma}_{1,j_1+1} \\ &\in H_1(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \\ c_{j_2} &= I^{(1)}_{j_1}\otimes e^{(2)}_{j_2,j_2+1} = \\ &= \left[\Phi_g^{(1)}(1-\gamma_{2,j_2})\right]^{-1}(I^{(1)}_{j_1})\otimes\tilde{\gamma}_{2,j_2} - \left[\Phi_g^{(1)}(1-\gamma_{2,j_2+1})\right]^{-1}(I^{(1)}_{j_1})\otimes\tilde{\gamma}_{2,j_2+1} \\ &\in H_1(V^{(1)}\otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \end{aligned}$$

Die Integrale $I^{(2)}(z_3,\ldots,z_5)$ sind komplexe Funktionen der 3 Veränderlichen z_3,z_4,z_5 und singulär in $z_i=z_j$. Der Vektorraum $V^{(2)}$ liefert einen P_3-Modul durch die höhere Gassner-Darstellung von P_3, d.h. die Abbildung:

$$\chi_h^{(1,2)} : P_3 \quad\rightarrow\quad GL(V^{(2)})$$

Wir nennen das Bild von P_3 in $GL(V^{(2)})$ die *Monodromiegruppe* der Integrale $I^{(2)}(z_3, \ldots, z_5)$.
In einem speziellen Fall erhält man daraus die Monodromiegruppe der hypergeometrischen Funktion ${}_3F_2$.

Beispiel 3.3.4 (Monodromie der hypergeometrischen Funktion ${}_3F_2$) Der Fall , daß $\lambda_{1,3} = \lambda_{2,5} = 0$ ist, führt auf die von Pochhammer [34] und Beukers und Heckman [3] betrachteten höheren hypergeometrischen Integrale. In diesem Fall gibt es drei linear unabhängige Integrale, beispielsweise über die Zyklen $(I^{(0)} \otimes e^{(1)}_{2,j_1}) \otimes e^{(2)}_{3,j_2}$ mit $j_1, j_2 = 4, 5$ und $j_1 \geq j_2$, die Lösungen einer linearen Differentialgleichung 3-ter Ordnung sind. Die Darstellung $\chi : U_{2,1} \to GL(V^{(2)})$, $U_{2,1} \in P_3$, lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
\chi(\gamma_{3,4}) &= \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{1,4}\alpha_{2,4} & 0 & 0 \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}(\alpha_{1,4}-1) & \alpha_{2,3}\alpha_{2,4} & 0 \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}(\alpha_{1,4}-1) & \alpha_{2,3}(\alpha_{2,4}-1) & 1 \end{pmatrix} \\
\chi(\gamma_{3,5}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha_{1,5}-1 \\ 0 & 1 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,5}-1 \\ 0 & 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{1,5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zur ausführlichen Herleitung dieser Darstellung siehe Abschnitt 4.3.2.
Zu den Ausdrücken in der Standardnotation gelangt man, wenn man wie folgt identifiziert:

$$\begin{array}{rclcrcl}
z_1 &=& u & \quad & \lambda_{1,2} &=& \sigma - \beta - 1 \\
z_2 &=& v & & \lambda_{1,4} &=& \beta - \rho \\
z_3 &=& z & & \lambda_{1,5} &=& \rho - \alpha - 1 \\
z_4 &=& 0 & & \lambda_{2,3} &=& -\gamma \\
z_5 &=& 1 & & \lambda_{2,4} &=& \gamma - \sigma
\end{array}$$

Man hat dann die höhere hypergeometrische Reihe

$$\begin{aligned}
{}_3F_2(\alpha, \beta, \gamma; \rho, \sigma; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k (\gamma)_k}{(\rho)_k (\sigma)_k (1)_k} z^k \\
(\alpha)_k &= \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)
\end{aligned}$$

und die (über Zyklen auszuführenden) höheren hypergeometrischen Integrale:

$$I(z) = \int dv \int du \, u^{\beta-\rho}(u-1)^{\rho-\alpha-1}(u-v)^{\sigma-\beta-1} v^{\gamma-\sigma}(v-x)^{-\gamma}$$

Zur korrespondierenden linearen Differentialgleichung 3-ter Ordnung siehe [34]. Die Monodromiegruppe dieser höheren hypergeometrischen Integrale wird in [3] angegeben. Es ist die Gruppe mit Generatoren $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty \in GL(\mathbf{C}, 3)$ und der Relation $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_\infty = 1$, wobei:

$$\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -t \\ 1 & 0 & -s \\ 0 & 1 & -r \end{pmatrix} \qquad \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

und wobei a, b, c und r, s, t definiert sind durch:

$$\begin{aligned}(x - e^{2\pi i\alpha})(x - e^{2\pi i\beta})(x - e^{2\pi i\gamma}) &= x^3 + ax^2 + bx + c \\ (x - e^{2\pi i\rho})(x - e^{2\pi i\sigma})(x - 1) &= x^3 + rx^2 + sx + t\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von Γ_0 sind identisch den Eigenwerten von $\chi(\gamma_{3,4})$:

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4} & = & e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{1,4}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,4})} & = & e^{-2\pi i\rho} \\ \alpha_{2,3}\alpha_{2,4} & = & e^{2\pi i(\lambda_{2,3}+\lambda_{2,4})} & = & e^{-2\pi i\sigma}\end{array}$$

Und die Eigenwerte von Γ_∞ sind identisch den Eigenwerten von $\chi((\gamma_{3,4}\gamma_{3,5})^{-1})$:

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5} & = & e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{1,5}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,4}+\lambda_{2,5})} & = & e^{-2\pi i\alpha} \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4} & = & e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,4})} & = & e^{-2\pi i\beta} \\ \alpha_{2,3} & = & e^{2\pi i\lambda_{2,3}} & = & e^{-2\pi i\gamma}\end{array}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma_0 = &\quad \Theta\,\chi(\gamma_{3,4})\,\Theta^{-1} \\ (\Gamma_\infty)^{-1} &= \Theta\,\chi(\gamma_{3,4}\gamma_{3,5})\,\Theta^{-1}\end{aligned}$$

mit:

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}(\alpha_{1,4}-1) & \alpha_{2,3}(\alpha_{2,4}-1) & -\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}(1+\alpha_{1,2}\alpha_{2,4}) \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}^2\alpha_{2,4}(1-\alpha_{1,4}) & \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}^2\alpha_{1,4}\alpha_{2,4}(1-\alpha_{2,4}) & \alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{2,3}^2\alpha_{2,4}^2 \end{pmatrix}$$

3.3.4 Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten äquivarianten 2-Ketten und -Zyklen

Vorbemerkungen

In diesem Unterabschnitt wird der Fall der Darstellung von B_n als Gruppe von Automorphismen gewisser Faktorgruppen der Kettengruppe $\left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ und der Homologiegruppe $H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ behandelt. Hierbei ist der Koeffizientenmodul G'_{m-2} zusätzlich als ein Modul bzgl. B'_2 angenommen, wobei $B'_2 \subset B_{n+2}$ die vom Element σ_{m-1} erzeugte Zopfgruppe ist. Die resultierenden Automorphismendarstellungen von B_n werden eine einfache Gestalt haben.

Notation Es bezeichne $B_n B'_2 U_{n,2}$ das semidirekte Produkt der Zopfgruppe B_n und des semidirekten Produkts von B'_2 und $U_{n,2}$. B'_2 ist hier die Untergruppe von B_{n+2}, erzeugt vom Element σ_{m-1}, also: $B'_2 = \langle\sigma_{m-1}\rangle$. Die Zopfgruppe B'_2 wirkt (von rechts) als Automorphismus von $U_{n,2}$. Und zwar gilt für $\gamma_{j,k} \in U_{n,2}$:

$$\gamma_{j,k}\,\sigma_{m-1} = \sigma_{m-1}\begin{cases} \gamma_{m-1,m}^{-1}\gamma_{m,k}\gamma_{m-1,m} & j = m-1;\ k \neq m \\ \gamma_{m-1,m} & j = m-1;\ k = m \\ \gamma_{m-1,k} & j = m \end{cases}$$

Es sei abkürzend also:

$$B_n B_2' U_{n,2} \quad = \quad B_n \ltimes (B_2' \ltimes U_{n,2})$$

Definition 3.3.5 Es sei G'_{m-2} eine kommutative Gruppe und $\Phi_g^{(m-2)} : B_n B_2' U_{n,2} \to \mathrm{Aut}(G'_{m-2})$ ein Homomorphismus, so daß G'_{m-2} ein $B_n B_2' U_{n,2}$-(Rechts-)Modul ist, gegeben durch die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned} G'_{m-2} \times B_n B_2' U_{n,2} &\to G'_{m-2} \\ (g', \beta) &\to g'\,\beta := \Phi_g^{(m-2)}(\beta)(g'), \qquad \beta \in B_n B_2' U_{n,2} \end{aligned}$$

Faktorgruppen

Man erinnere, für einen Koeffizientenmodul G'_{m-2}, generisch bzgl. $U_{n,2}$, gilt:

$$\begin{aligned} \left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 &\cong (G'_{m-2})^{(n+1)n} \\ H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) &\cong (G'_{m-2})^{n(n-1)} \end{aligned}$$

Definition 3.3.6 Sei $C_2^- = \left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 / \sim$ die Kettengruppe $\left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$ modulo der Relationen $R_{k;j} = 0$, $k, j = 1, \ldots, n$, $k \geq j$, wobei:

$$\begin{aligned} R_{k;j} \quad = \quad & g'(\sigma_{m-1}^{-1} - \sigma_{m-1}) \otimes e_m^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} + \\ & + g'\sigma_{m-1} \otimes e_{m+j}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} - g' \otimes e_{m+k}^{(m-1)} \otimes e_{m+j}^{(m)}, \qquad g' \in G'_{m-2} \end{aligned}$$

Lemma 3.3.7 (Geordnete Ketten) *Es gilt:*

$$C_2^- \quad \cong \quad (G'_{m-2})^{\frac{(n+1)n}{2}}$$

und zwar hat jedes Element aus C_2^- eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\sum_{\substack{k,j=1,\ldots,n \\ k \geq j}} a'_{k,j} \otimes e_{m+k}^{(m-1)} \otimes e_{m+j}^{(m)}, \qquad a'_{k,j} \in G'_{m-2}$$

Beweis. Mit Hilfe der Relationen $R_{k;j} = 0$ folgt für die Darstellung einer 2-Kette aus $\left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j=1,\ldots,n+1 \\ k=1,\ldots,n}} g'_{j,k+1} \otimes e_{m-1+j}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} = \\ & = \sum_{j>k} g'_{j,k+1} \otimes e_{m-1+j}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_k \left[\Phi_g^{(m-2)}(\sigma_{m-1}^{-1}-1)\right]^{-1}(g'_{1,k+1}) \otimes e_{m+k}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} + \\
& + \sum_{1<j\leq k} g'_{j,k+1}\sigma_{m-1}^{-1} \otimes e_{m+k}^{(m-1)} \otimes e_{m+j-1}^{(m)} + \\
& - \sum_{1<j\leq k} g'_{j,k+1}\sigma_{m-1}^{-1}(1-\sigma_{m-1}) \otimes e_{m+k}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)} = \\
= {} & \sum_{l>k} a'_{l,k+1} \otimes e_{m-1+l}^{(m-1)} \otimes e_{m+k}^{(m)}
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
a_{k+1,k+1} &= \left[\Phi_g^{(m-2)}(\sigma_{m-1}^{-1}-1)\right]^{-1}(g'_{1,k+1}) - \sum_{j=2,\ldots,k} g'_{j,k+1}\sigma_{m-1}^{-1}(1-\sigma_{m-1}) + g'_{k+1,k+1} \\
a_{l,k+1} &= g'_{l,k+1} + g'_{k+1,l}\sigma_{m-1}^{-1}, \qquad l > k+1
\end{aligned}
$$

Daß $(\sigma_{m-1}^{-1}-1)$ als Endomorphismus von G'_{m-2} invertierbar ist, folgt aus der Generizität von G'_{m-2} bzgl. $\sigma_{m-1}^2 = \gamma_{m-1,m} \in U_{n,2}$. $\square$

Definition 3.3.8 Sei $H_2^- = H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) / \sim$ die Homologiegruppe $H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ modulo der Relationen $S_{k;j}=0$, $k,j=1,\ldots,n-1$, $k \geq j$, wobei:

$$
\begin{aligned}
S_{k;j} &= g'(\sigma_{m-1}^{-1}-1) \otimes e_{m+k,m+k+1}^{(m-1)} \otimes e_{m+j,m+j+1}^{(m)}) + \\
&\quad + g'(\sigma_{m-1}-1) \otimes e_{m+j,m+j+1}^{(m-1)} \otimes e_{m+k,m+k+1}^{(m)}), \qquad k>j, \quad g' \in G'_{m-2} \\
S_{j;j} &= g'(\sigma_{m-1}^{-1}-\sigma_{m-1}) \otimes e_{m+1,m+j}^{(m-1)} \otimes e_{m+j,m+j+1}^{(m)}) + \\
&\quad + (\sigma_{m-1}^{-1}-1)(e_{m+j,m+j+1}^{(m-1)} \cdot e_{m+j,m+j+1}^{(m)}), \qquad g' \in G'_{m-2}
\end{aligned}
$$

Lemma 3.3.9 (Geordnete Zyklen) *Es gilt:*

$$
H_2^- \quad \cong \quad (G'_{m-2})^{\frac{n(n-1)}{2}}
$$

und zwar hat jedes Element aus $H_2(K^-)$ eine eindeutige Darstellung der Form:

$$
\sum_{\substack{k,j=1,\ldots,n-1 \\ k \geq j}} b'_{k,j} \otimes e_{m+k,m+k+1}^{(m-1)} \otimes e_{m+j,m+j+1}^{(m)}, \qquad b'_{k,j} \in G'_{m-2}
$$

Beweis. Mit Hilfe der Relationen $S_{k;j}=0$ folgt für die Darstellung eines 2-Zyklus aus $H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$:

$$
\sum_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n-1}} h'_{j,k+1} \otimes e_{m-1+j,m+j}^{(m-1)} \otimes e_{m+k,m+k+1}^{(m)} =
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j>k} h'_{j,k+1} \otimes e^{(m-1)}_{m-1+j,m+j} \otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1} + \\
&\quad + \sum_{k} h'_{1,k+1} \sum_{j=2,\dots,k} (-1)\sigma^{-1}_{m-1} \otimes e^{(m-1)}_{m+k,m+k+1} \otimes e^{(m)}_{m-1+j,m+j} + \\
&\quad - \sum_{k} \left[\Phi^{(m-2)}_{g}(1-\sigma_{m-1})\right]^{-1} (h'_{1,k+1}) \otimes e^{(m-1)}_{m+k,m+k+1} \otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1} + \\
&\quad + \sum_{1<j\leq k} h'_{j,k+1}\sigma^{-1}_{m-1} \otimes e^{(m-1)}_{m+k,m+k+1} \otimes e^{(m)}_{m+j-1,m+j} = \\
&= \sum_{l>k} b'_{l,k+1} \otimes e^{(m-1)}_{m-1+l,m+l} \otimes e^{(m)}_{m+k,m+k+1}
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
\begin{aligned}
b_{k+1,k+1} &= h'_{k,k+1} - \left[\Phi^{(m-2)}_{g}(1-\sigma_{m-1})\right]^{-1} (h'_{1,k+1}) \\
b_{l,k+1} &= h'_{l,k+1} + g'_{k+1,l}\sigma^{-1}_{m-1} + h'_{1,k+1}\sigma^{-1}_{m-1}, \qquad l > k+1
\end{aligned}
$$

$(1-\sigma_{m-1})$ ist als Endomorphismus von G'_{m-2} invertierbar wegen der Generizität von G'_{m-2} bzgl. $\sigma^2_{m-1} = \gamma_{m-1,m} \in U_{n,2}$. □

Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten 2-Ketten

Die Faktorgruppe C_2^- erlaubt Automorphismendarstellungen der Zopfgruppe B_n.

Satz 3.3.10 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Gruppe $C_2^- \cong (G'_{m-2})^{\frac{(n+1)n}{2}}$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$
\chi_c^{(m-2,m-1,m),-} : B_n \quad \longrightarrow \quad Aut(C_2^-) \cong Aut\left((G'_{m-2})^{\frac{(n+1)n}{2}}\right)
$$

wie folgt gegeben:

$$
\chi_c^{(m-2,m-1,m),-}(\sigma_i) \quad = \quad \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)
$$

Hierbei ist $R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i) \in GL\left(\mathbf{Z}B'_2U_{n,2}, \frac{(n+1)n}{2}\right)$. Die nichtverschwindenden der Einträge $\left(R_c^{(m-1,m)-}(\sigma_i)\right)^{j_{m-1},j_m}_{i_{m-1},i_m}$ sind für Indizes $i_{m-1} \geq i_m$ und $j_{m-1} \geq j_m$, sowie $i_k, j_k = m+1,\dots,m+n$ für $k = m-1, m$ wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)^{k,j}_{k,j} &= 1, \qquad j,k < i \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)^{i,j}_{i+1,j} &= 1, \qquad j < i \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)^{i,j}_{i,j} &= 1-\gamma_{m-1,i}, \qquad j < i
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,j}^{i+1,j} &= \gamma_{m-1,i}, \qquad j<i \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{i,i} &= 1 \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i,i} &= 1-\sigma_{m-1}\gamma_{m-1,i} \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i+1,i} &= \sigma_{m-1}\gamma_{m-1,i} \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i,i} &= (1-\gamma_{m-1,i})(1-\sigma_{m-1}\gamma_{m-1,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i+1,i} &= (1+\sigma_{m-1})\gamma_{m-1,i}(1-\gamma_{m,i}) \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i+1,i+1} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i} \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i+1}^{k,i} &= 1, \qquad k>i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i}^{k,i} &= 1-\gamma_{m,i}, \qquad k>i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i}^{k,i+1} &= \gamma_{m,i}, \qquad k>i+1 \\
\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,j}^{k,j} &= 1, \qquad j,k>i+1
\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $g' \in G'_{m-2}$ ist die Matrix $R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$\begin{aligned}
&\left(\left(g' \otimes e_{i_{m-1}}^{(m-1)}\right) \otimes e_{i_m}^{(m)}\right)\sigma_i = \\
&= \sum_{\substack{l_{m-1},l_m=m+1,\ldots,m+n \\ l_{m-1}\geq l_m}} \left(g'\,\sigma_i\,\left(R_c^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i_{m-1},i_m}^{l_{m-1},l_m} \otimes e_{l_{m-1}}^{(m-1)}\right) \otimes e_{l_m}^{(m)}
\end{aligned}$$

Die Relationen zur Rechtswirkung von $\sigma_i \in B_n$, $i=m+1,\ldots,m+n-1$, auf die formalen Produkte $e_k^{(m-1)} \otimes e_j^{(m)}$, $k \geq j$, ergeben sich wie folgt. Im Fall $j,k \leq i-1$ oder $j,k \geq i+2$ wirkt σ_i trivial. Im Fall $j \leq i-1$ wirkt σ_i trivial auf den zweiten Faktor. Im Fall $j=i$ und $k=i,i+1$ treten Produkte auf, die umgeordnet werden müssen mit Hilfe der Relationen $R_{i+1;i}=0$ und $R_{i;i}=0$, explizit:

$$\begin{aligned}
&g' \otimes e_i^{(m-1)} \otimes \gamma_{m,i} e_l^{(m)} = \\
&= \; g' \otimes \gamma_{m,i}(1-\gamma_{m-1,m})\, e_m^{(m-1)} \otimes e_l^{(m)} + g' \otimes \gamma_{m,i}\gamma_{m-1,m}\, e_i^{(m-1)} \otimes e_l^{(m)} = \\
&= \; g'\gamma_{m,i}\sigma_{m-1} \otimes e_l^{(m-1)} \otimes e_i^{(m)}, \qquad l=i,i+1
\end{aligned}$$

Im Fall $k \geq i+2$ wirken $\sigma_i \in B_n$ und $\gamma_{m,i} \in U_{n,1}$ trivial auf den ersten Faktor. □

Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten 2-Zyklen

Die Faktorgruppe H_2^- erlaubt ebenfalls Automorphismendarstellungen der Zopfgruppe B_n.

Satz 3.3.11 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Homologiegruppe $H_2^- \cong G'_{m-2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_h^{(m-2,m-1,m),-} : B_n \quad \longrightarrow \quad Aut(H_2^-) \cong Aut\left((G'_{m-2})^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$$

wie folgt gegeben:

$$\chi_h^{(m-2,m-1,m),-}(\sigma_i) \quad = \quad \Phi_g^{(m-2)}\left(\sigma_i\, R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)$$

Hierbei ist $R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i) \in GL\left(\mathbf{Z}B'_2U_{n,2}, \frac{n(n-1)}{2}\right)$. Die nichtverschwindenden der Einträge $\left(R_c^{(m-1,m)-}(\sigma_i)\right)_{i_{m-1},i_m}^{j_{m-1},j_m}$ sind für Indizes $i_{m-1} \geq i_m$ und $j_{m-1} \geq j_m$, sowie $i_k, j_k = m+1, \ldots, m+n-1$ für $k = m-1, m$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,j}^{k,j} &= 1, \qquad j,k < i-1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,j}^{k,j} &= 1, \qquad k = i, i+1, \quad j < i-1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,j}^{i,j} &= -\gamma_{m-1,i}, \qquad j < i-1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i-1,j}^{i-1,j} &= 1, \qquad j < i-1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i-1,j}^{i,j} &= \gamma_{m-1,i}, \qquad j < i-1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{i+1,i+1} &= 1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{i,i} &= 1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i+1}^{i+1,i} &= 1 + \sigma_{m-1}^{-1}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i}^{i,i} &= -\gamma_{m,i}\sigma_{m-1}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,j}^{i+1,i} &= -\gamma_{m,i}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{k,i-1} &= 1, \qquad k = i, i+1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{i,i} &= \gamma_{m,i}\sigma_{m-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i+1,i-1}^{i+1,i} &= \gamma_{m,i}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,i}^{i,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\sigma_{m-1}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,i-1}^{i,i-1} &= -\gamma_{m-1,i}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i,i-1}^{i,i} &= -\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\sigma_{m-1}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i-1,i-1}^{i-1,i-1} &= 1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i-1,i-1}^{i,i-1} &= 1+\sigma_{m-1}^{-1}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i-1,i-1}^{i,i} &= \gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i+1}^{k,j} &= 1, \qquad k>i+1, \quad j=i,i+1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i}^{k,i} &= -\gamma_{m,i}, \qquad k>i+1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i-1}^{k,i-1} &= 1, \qquad k>i+1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,i-1}^{k,i} &= \gamma_{m,i}, \qquad k>i+1\\
\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{k,j}^{k,j} &= 1, \qquad j,k>i+1
\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $g' \in G'_{m-2}$ ist die Matrix $R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$\left(\left(g' \otimes e^{(m-1)}_{i_{m-1},i_{m-1}+1}\right) \otimes e^{(m)}_{i_m,i_m+1}\right)\sigma_i =$$
$$= \sum_{\substack{l_{m-1},l_m=m+1,\ldots,m+n-1\\ l_{m-1}\geq l_m}} \left(g'\,\sigma_i\,\left(R_h^{(m-1,m),-}(\sigma_i)\right)_{i_{m-1},i_m}^{l_{m-1},l_m} \otimes e^{(m-1)}_{l_{m-1},l_{m-1}+1}\right) \otimes e^{(m)}_{l_m,l_m+1}$$

Die Relationen zur Rechtswirkung von $\sigma_i \in B_n$, $i=m+1,\ldots,m+n-1$, auf die formalen Produkte $e^{(m-1)}_{k,k+1} \otimes e^{(m)}_{j,j+1}$, $k \geq j$, ergeben sich wie folgt. Im Fall $j,k<i-1$ oder $j,k>i+1$ wirkt σ_i trivial. Im Fall $j<i-1$ wirkt σ_i trivial auf den zweiten Faktor. Im Fall $k,j=i-1,i,i+1$ treten Produkte auf, die umgeordnet werden müssen mit Hilfe der Relationen $S_{i+1;i}=0$ und $S_{i;i}=0$, explizit:

$$\begin{aligned}
g'_{m-2}\otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\otimes \gamma_{m,i}\,e^{(m)}_{i,i+1} &= g'_{m-2}\,\gamma_{m,i}\sigma_{m-1}\otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\otimes e^{(m)}_{i,i+1}\\
g'_{m-2}\otimes e^{(m-1)}_{i-1,i}\otimes \gamma_{m,i}\,e^{(m)}_{i,i+1} &= g'_{m-2}\,\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}(1-\sigma_{m-1})\otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\otimes e^{(m)}_{i,i+1}+\\
&\quad +g'_{m-2}\,\sigma_{m-1}^{-1}\gamma_{m-1,i}\otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\otimes e^{(m)}_{i-1,i}
\end{aligned}$$

Im Fall $k > i+2$ wirken die Elemente $\sigma_i \in B_n$ und $\gamma_{m,i} \in U_{n,1}$ trivial auf den ersten Faktor. □

Beispiele

Beispiel 3.3.12 (2-parametrige Burau-Darstellung von B_n) Sei $\mathbf{Z}^2$ die von der Menge $\{s,t\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, $\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in den Variablen s, t und $\Phi_g^{(m-2)} : B_n B_2' U_{n,2} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_i)(1) &= 1, && \sigma_i \in B_n \\ \Phi_g^{(m-2)}(\sigma_{m-1})(1) &= s, && \sigma_{m-1} \in B_2' \\ \Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(1) &= t, && \gamma \in \{\gamma_{j,k}; j = m-1, m; k = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,2} \end{aligned}$$

Damit ist $G'_{m-2} = \mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ ein $B_n B_2' U_{n,2}$-Modul mit Multiplikationsabbildung:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \times B_n B_2' U_{n,2} &\to \mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \\ (1, \beta) &\to \Phi_g^{(m-2)}(\beta)(1), \qquad \beta \in B_n B_2' U_{n,2} \end{aligned}$$

Die Darstellung $\chi_c^{(m-2,m-1,m),-} : B_n \to \mathrm{Aut}(C_2^-) \cong GL\left(\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}], \frac{(n+1)n}{2}\right)$ ist dann eine 2-*parametrige Burau-Darstellung* der Zopfgruppe B_n.
Man betrachte den Fall $m = 2$, $n = 3$, d.h. die Darstellung:

$$\chi_c^{(0,1,2),-} : B_3 \to GL\left(\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}], 6\right)$$

der Zopfgruppe $B_3 = \langle \sigma_3, \sigma_4 \mid \sigma_3\sigma_4\sigma_3 = \sigma_4\sigma_3\sigma_4 \rangle$. Man hat explizit:

$$\sigma_3 \to \begin{pmatrix} (1-t)(1-st) & (1+s)t(1-t) & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 1-st & st & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-t)(1-st) & (1+s)t(1-t) & t^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-st & st & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom ist in beiden Fällen $(\lambda-1)^3(\lambda+t)^2(\lambda-st^2)$.

Beispiel 3.3.13 (Rekonstruktion von Darstellungen) Der $B_2' U_{n,2}$-Modul G'_{m-2} kann durch 2 Kopien eines $U_{n,2}$-Moduls G_{m-2} ersetzt werden gemäß :

$$G'_{m-2} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} (\mathbf{Z}U_{n,2})^2 \cong (G_{m-2})^2 = G_{m-2} \oplus G_{m-2}$$

Dazu beachte man folgendes. Elemente von $\mathbf{Z}B_2'U_{n,2}$ sind von der Gestalt $\sum_j n_j\beta_j$, wobei $n_j \in \mathbf{Z}$ und $\beta_j \in B_2'U_{n,2}$. Jedes Element $\sigma \in B_2'$ hat eine eindeutige Darstellung als $\sigma = \gamma\sigma_\tau$, wobei $\gamma \in P_2'$ und $\sigma_\tau \in B_2'/P_2' \subset B_2'$ ein *Permutationszopf* ist, d.h. ein Element der Menge der Repräsentanten (rechter) Nebenklassen für P_2' in B_2', korrespondierend einem Element der symmetrischen Gruppe S_2'. Vgl. hierzu [4], S. 20ff. Elemente von $B_2'U_{n,2}$ sind wegen $P_2' \in U_{n+1,1}$ daher von der Gestalt $\gamma\sigma_\tau$ mit $\gamma \in U_{n,2}$. Jedes Element von $\mathbf{Z}B_2'U_{n,2}$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_j n_j\gamma_j \cdot 1 + \sum_k n_k\gamma_k \cdot \sigma_{m-1}$, wobei $n_j, n_k \in \mathbf{Z}$, $\gamma_j, \gamma_k \in U_{n,2}$ und $1, \sigma_{m-1} \in B_2'$.
Man hat mit anderen Worten also einen freien $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Linksmodul, erzeugt von der Menge $\{1, \sigma_{m-1}\}$. Dieser Modul $(\mathbf{Z}U_{n,2})^2$, im wahrsten Sinne des Wortes ein Permutationsmodul, wird zu einem $\mathbf{Z}B_2'U_{n,2}$-Rechtsmodul durch die Abbildung $\mathbf{Z}B_2'U_{n,2} \to GL(\mathbf{Z}U_{n,2}, 2)$, gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\sigma_{m-1} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_{m-1,m} & 0 \end{pmatrix}, && \sigma_{m-1} \in B_2' \\
\gamma_{m-1,j} &\rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{m-1,j} & 0 \\ 0 & \gamma_{m,j} \end{pmatrix}, && \gamma_{m-1,j} \in U_{n+1,1}, j \neq m \\
\gamma_{m,j} &\rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_{m,j} & 0 \\ 0 & \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m-1,m}^{-1} \end{pmatrix}, && \gamma_{m,j} \in U_{n,1}
\end{aligned}$$

Dies erlaubt, G'_{m-2} gemäß $G'_{m-2} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} (\mathbf{Z}U_{n,2})^2$ zu ersetzen.
Sind G'_{m-2} und G_{m-2} außerdem B_n-Moduln, so gewinnt man aus den in diesem Unterabschnitt betrachteten Darstellungen der Zopfgruppe B_n:

$$\begin{aligned}
B_n &\rightarrow \operatorname{Aut}\left(\left[\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2 / \sim\right) \cong \operatorname{Aut}\left((G'_{m-2})^{\frac{(n+1)n}{2}}\right) \\
B_n &\rightarrow \operatorname{Aut}\left(H_2\left(\left(G'_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) / \sim\right) \cong \operatorname{Aut}\left((G'_{m-2})^{\frac{n(n-1)}{2}}\right)
\end{aligned}$$

die in Unterabschnitt 3.3.1 betrachteten Darstellungen wieder, nämlich:

$$\begin{aligned}
B_n &\rightarrow \operatorname{Aut}\left(\left[\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_2\right) \cong \operatorname{Aut}\left((G_{m-2})^{(n+1)n}\right) \\
B_n &\rightarrow \operatorname{Aut}\left(H_2\left(\left(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right) \cong \operatorname{Aut}\left((G_{m-2})^{n(n-1)}\right)
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Iterierte Darstellungen der Zopfgruppen (2)

In diesem Kapitel werden iterativ m-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe konstruiert und deren Homologiegruppen bestimmt. Ferner werden Darstellungen der Zopfgruppe als Automorphismen der Ketten- und Homologiegruppen dieser Komplexe betrachtet.

In Abschnitt 4.1 wird zunächst die Konstruktion einer freien Auflösung von $\mathbf{Z}$ für das semidirekte Produkt $U_{n,m} = U_{n,1} \rtimes \ldots \rtimes U_{n+m-1,1}$ beschrieben, wenn freie Auflösungen von $\mathbf{Z}$ für die freien Gruppen $U_{n+m-r,1}$, $r = 1, \ldots, m$, gegeben sind.

In Abschnitt 4.2 werden m-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe behandelt, die einerseits durch Tensorierung der freien Auflösung mit einem $U_{n,m}$-Modul konstruiert werden können, andererseits iterativ in dem Sinne, daß jeweils in einem äquivarianten Komplex der Koeffizientenmodul selbst geeignet als äquivarianter Komplex gewählt wird. Sodann werden für generische und für triviale Koeffizientenmoduln explizit die Homologiegruppen dieser m-dimensionalen äquivarianten Komplexe bestimmt.

In Abschnitt 4.3 wird zunächst gezeigt, wie prinzipiell Darstellungen der Zopfgruppen als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen des m-dimensionalen äquivarianten Komplexes gewonnen werden können. Ein Beispiel behandelt die Darstellung einer freien Gruppe vom Rang 2 als Gruppe von Automorphismen der Homologie eines m-dimensionalen äquivarianten Komplexes mit speziellem Koeffizientenmodul und deren Interpretation als Monodromiegruppe höherer hypergeometrischer Integrale vom Typ ${}_nF_{n-1}$.
Schließlich werden durch Einführung von Relationen gewonnene Faktorgruppen der Ketten- und Homologiegruppen des m-dimensionalen äquivarianten Komplexes betrachtet, die erlauben, die korrespondierenden Automorphismendarstellungen der Zopfgruppen mit Hilfe gewisser verallgemeinerter Multinomialkoeffizienten explizit anzugeben. Ein Beispiel gibt eine 2-parametrige höhere Burau-Darstellung. Ein weiteres Beispiel behandelt Darstellungen, die für spezielle nichtgenerische, Koeffizientenmoduln resultieren und durch physikalische Theorien motiviert sind.

4.1 Freie Auflösung von Z für $U_{n,m}$

Im folgenden konstruieren wir aus den freien Auflösungen $\varepsilon^{(r)} : C(\tilde{X}_{n+m-r,1}) \to \mathbf{Z}$ für $U_{n+m-r,1}$, $r = 1, \ldots, m$ induktiv eine freie Auflösung $\varepsilon^{(1,\ldots,m)} : C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \to \mathbf{Z}$ von $\mathbf{Z}$ für $U_{n,m} = U_{n,1} \rhd\!\!< \ldots \rhd\!\!< U_{n+m-1,1}$. Wir definieren zunächst den Produktkettenkomplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ und zeigen dann (in dieser Reihenfolge), daß er ein azyklischer Komplex, ein $U_{n,m}$-(Links-)Modul und $U_{n,m}$-frei ist.

4.1.1 Kombinatorischer Exkurs

Im weiteren werden gewisse Zahlen $\Xi_q^{(n,r)} \in \mathbf{N}$ mit Indizes $n, r \in \mathbf{N}$ und $q \in \mathbf{N_0}$, $q \leq r$, wichtig sein. Diese Zahlen, die auch aus den Stirlingschen Zahlen erster Art bestimmt werden können, werden im folgenden rekursiv definiert.

Definition 4.1.1 Für $n, r \in \mathbf{N}$ und $q \in \mathbf{N_0}$ mit $q \leq r$ seien Zahlen $\Xi_q^{(n,r)} \in \mathbf{N}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} \Xi_0^{(n,r)} &= 1 \\ \Xi_q^{(n,r)} &= \sum_{j=q-1}^{r-1} (n+j)\, \Xi_{q-1}^{(n,r)}, \qquad q > 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.2 (Alternative Definitionen) Alternativ können diese Zahlen definiert werden durch die erzeugenden Funktionen:

$$\prod_{p=1}^{r} (x+n+p-1) = \sum_{q=0}^{r} \Xi_q^{(n,r)}\, x^{r-q}$$

oder mittels der *Strirlingschen Zahlen erster Art* wie folgt:

$$\Xi_{r-j}^{(n,r)} = \sum_{q=j}^{r} s(r,q)\,(-1)^q \binom{q}{j} n^{q-j}$$

Hierbei sind die Strirlingschen Zahlen erster Art $s(r,q)$, siehe [1], definiert durch die erzeugenden Funktionen:

$$\prod_{p=1}^{r} (x-p+1) = \sum_{q=0}^{r} s(r,q)\, x^q$$

Beispiel 4.1.3 *i)* Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \Xi_1^{(n,r)} &= \sum_{j=0}^{r-1} (n+j) \\ \Xi_r^{(n,r)} &= (n)_r = n(n+1)\ldots(n+r-1) \end{aligned}$$

ii) Beispielhaft betrachte man den Fall $r = 5$:

$$
\begin{aligned}
\Xi_0^{(n,4)} &= 1 \\
\Xi_1^{(n,4)} &= n + (n+1) + (n+2) + (n+3) \\
\Xi_2^{(n,4)} &= n(n+1) + n(n+2) + n(n+3) + (n+1)(n+2) + (n+1)(n+3) + \\
&\quad +(n+2)(n+3) \\
\Xi_3^{(n,4)} &= n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n+3) + n(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \\
\Xi_4^{(n,4)} &= n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}
$$

Lemma 4.1.4 *Es gilt für alle $p < m$ und alle q mit $q \leq p$ und $q \leq m - p$:*

$$
\Xi_q^{(n,m)} = \sum_{j=0}^{q} \Xi_{q-j}^{(n,p)} \, \Xi_j^{(n+p,m-p)}
$$

Beweis. Die Aussage folgt durch vollständige Induktion nach q:

$$
\begin{aligned}
\Xi_1^{(n,m)} &= \sum_{j=0}^{m-1} (n+j) = \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} (n+j) + \sum_{j=p}^{m-1} (n+j) = \Xi_1^{(n,p)} + \Xi_1^{(n+p,m-p)} \\
\Xi_{q+1}^{(n,m)} &= \Xi_{q+1}^{(n,p)} + \sum_{j=0}^{m-p-1} (n+p+j) \, \Xi_q^{(n,p+j)} = \\
&= \Xi_{q+1}^{(n,p)} + \sum_{j=0}^{m-p-1} (n+p+j) \sum_{k=0}^{j} \Xi_{q-k}^{(n,p)} \, \Xi_k^{(n+p,j)} = \\
&= \Xi_{q+1}^{(n,p)} + \sum_{k=0}^{q} \Xi_{q-k}^{(n,p} \sum_{j=k}^{m-p-1} (n+p+j) \, \Xi_k^{(n+p,j)} = \\
&= \Xi_{q+1}^{(n,p)} + \sum_{k=0}^{q} \Xi_{q-k}^{(n,p} \, \Xi_{k+1}^{(n+p,m-p)} = \sum_{j=0}^{q+1} \Xi_{q+1-j}^{(n,p} \, \Xi_j^{(n+p,m-p)}
\end{aligned}
$$

Dies war zu zeigen. □

Lemma 4.1.5 *i*) *Es gilt:*

$$
\sum_{j=0}^{r} \Xi_j^{(n,r)} = \Xi_r^{(n+1,r)} = (n+1)_r
$$

ii) Es gilt:

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\,\Xi_j^{(n,r)} = (-1)^r\,\Xi_r^{(n-1,r)} = (-1)^r\,(n-1)_r$$

Beweis. Aussage *i*) folgt durch vollständige Induktion nach r:

$$\begin{aligned}
\Xi_0^{(n,1)} + \Xi_1^{(n,1)} &= 1 + n = (n+1)_1 \\
\sum_{j=0}^{r+1}\Xi_j^{(n,r+1)} &= \Xi_0^{(n,r+1)} + \sum_{j=1}^{r}\Xi_j^{(n,r+1)} + \Xi_{r+1}^{(n,r+1)} = \\
&= \Xi_0^{(n,r)} + \sum_{j=1}^{r}\Big((n+r)\,\Xi_{j-1}^{(n,r)} + \Xi_j^{(n,r)}\Big) + (n+r)\,\Xi_r^{(n,r)} = \\
&= (n+r+1)\sum_{j=0}^{r}\Xi_j^{(n,r)} = (n+1)_{r+1}
\end{aligned}$$

Aussage *ii*) folgt ebenfalls durch vollständige Induktion nach r:

$$\begin{aligned}
\Xi_0^{(n,1)} - \Xi_1^{(n,1)} &= 1 - n = (-1)(n-1)_1 \\
\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^j\,\Xi_j^{(n,r+1)} &= \Xi_0^{(n,r+1)} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j\,\Xi_{j-1}^{(n,r+1)} + (-1)^{r+1}\,\Xi_{r+1}^{(n,r+1)} = \\
&= \Xi_0^{(n,r)} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^r\,\Big((n+r)\,\Xi_{j-1}^{(n,r)} + \Xi_j^{(n,r)}\Big) + (-1)^{r+1}(n+r)\,\Xi_r^{(n,r)} = \\
&= (1-n-r)\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\,\Xi_j^{(n,r)} = \\
&= (-1)^{r+1}(n+r-1)\,\Xi_r^{(n-1,r)} = (-1)^{r+1}\,Xi_{r+1}^{(n-1,r+1)}
\end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

4.1.2 Definition des Produktkomplexes $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$

Definition 4.1.6 (Produktkomplex) Der m-dimensionale Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist definiert durch die Kettengruppen:

$$\begin{aligned}
&\Big[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_q = \\
&= \bigoplus_{\sum_{k=1}^{m} p_k = q} C_{p_1}(\tilde{X}_{n+m-1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1}), \qquad p_k = 0,1; \quad k = 1,\ldots,m
\end{aligned}$$

und durch die Randhomomorphismen:

$$\partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} : \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \to$$
$$\to \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q-1}$$

mit der Eigenschaft:

$$\partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} \left(\bigotimes_{k=1}^{m} \tilde{c}^{(k)} \right) = \sum_{l=1}^{m} (-1)^{\sum_{k=1}^{l-1} p_k} (\tilde{c}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \partial_{p_l}^{(l)}(\tilde{c}^{(l)}) \otimes \ldots \otimes \tilde{c}^{(m)})$$

wobei:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)}^{(k)} \tilde{z}_k &= 0, \qquad k = 1, \ldots, m \\ \partial_{(1)}^{(k)} \tilde{\gamma}_{k,j_k}^{(k)} &= (1 - \gamma_{k,j_k}) \tilde{z}_k, \qquad j_k = k+1, \ldots, m+n, \quad k = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Lemma 4.1.7 (Azyklizität) *Der Komplex ist* $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ *azyklisch, d.h. es gilt:*

$$\begin{aligned} H_q(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong 0, \qquad q \neq 0 \\ H_0(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})) &\cong \mathbf{Z} \end{aligned}$$

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß die folgende 0-Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m \overset{\partial_{(m)}^{(m-n+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \ldots \overset{\partial_{(1)}^{(m-n+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \\ &\overset{\partial_{(1)}^{(m-n+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \left[C(\tilde{X}_{n+n-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \to 0 \end{aligned}$$

exakt ist bei $\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$, $q \neq 0$. Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach $r < m$.

Induktionsanfang: Für den Komplex $C(\tilde{X}_{n,1})$ wurde die Behauptung in Abschnitt 2.1.2 gezeigt. Insbesondere gilt also, daß die 0-Sequenz

$$0 \to C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \overset{\partial_{(1)}^{(m-r)}}{\longrightarrow} C_0(\tilde{X}_{n+r,1}) \to 0$$

exakt ist bei $C_1(\tilde{X}_{n+r,1})$.

Induktionsannahme: Für ein $r < m$ sei die 0-Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\to \left[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_r \overset{\partial_{(r)}^{(m-r+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \ldots \overset{\partial_{(1)}^{(m-r+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \\ &\overset{\partial_{(1)}^{(m-r+1,\ldots,m)}}{\longrightarrow} \left[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \to 0 \end{aligned}$$

exakt bei $\Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_q$, $q \neq 0$.

Induktionsschluß : Es wird wieder verwendet, daß für alle $0 < q < r+1$ die q-ten Kettengruppen von $C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ wie folgt rekursiv bestimmt sind:

$$\begin{aligned} &\Big[C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_q = \\ &= \;C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_{q-1} \oplus \\ &\quad \oplus C_0(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_q \end{aligned}$$

Mit:

$$\begin{aligned} c_1^{(m-r)} \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} &\in C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_{q-1} \\ c_0^{(m-r)} \otimes c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} &\in C_0(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_q \end{aligned}$$

folgt für den Rand einer q-Kette:

$$\begin{aligned} &\partial_{(q)}^{(m-r,\ldots,m)} \Big(c_1^{(m-r)} \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} + c_0^{(m-r)} \otimes c_q^{(m-r+1,\ldots,m)}\Big) = \\ &= \;(\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} + (-1) c_1^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q-1)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)}) + \\ &\quad + c_0^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_q^{(m-r+1,\ldots,m)}) \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} (\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)}&, \\ c_0^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} &\in C_0(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_{q-1} \\ c_1^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q-1)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} &\in C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \Big[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\Big]_{q-2} \end{aligned}$$

Der Rand einer q-Kette verschwindet also nur dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned} (\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} + c_0^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_q^{(m-r+1,\ldots,m)}) &= 0 \\ \partial_{(q-1)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} &= 0 \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}^{(m-r)}) = 0$, kann die erste Bedingung nur erfüllt werden, wenn gilt: $c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} = \partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} \neq 0$ und $c_0^{(m-r)} = -(\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)})$. $c_q^{(m-r+1,\ldots,m)}$ ist wegen $\mathrm{Kern}(\partial_{(q-1)}^{(m-r+1,\ldots,m)}) = \mathrm{Bild}(\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)})$, durch $c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)}$ bestimmt. Damit ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Für die ursprüngliche q-Kette folgt:

$$\begin{aligned} &c_1^{(m-r)} \otimes c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)} + c_0^{(m-r)} \otimes c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} = \\ &= \;c_1^{(m-r)} \otimes (\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} - (\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_q^{(m-r+1,\ldots,m)} = \\ &= \;\partial_{(q+1)}^{(m-r,\ldots,m)} \Big(c_1^{(m-r)}) \otimes c_q^{(m-r+1,\ldots,m)}\Big) \end{aligned}$$

Für alle $0 < q < r+1$ gilt also: $\mathrm{Kern}(\partial_{(q)}^{(m-r+1,\ldots,m)}) = \mathrm{Bild}(\partial_{(q-1)}^{(m-r+1,\ldots,m)})$.
Im Falle $q = r+1$ hat man:

$$\begin{aligned} & \left[C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{r+1} = \\ = \quad & C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \left[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_r \end{aligned}$$

Der Rand einer $(r+1)$-Kette ist:

$$\begin{aligned} & \partial_{(q)}^{(m-r,\ldots,m)} \left(c_1^{(m-r)} \otimes c_r^{(m-r+1,\ldots,m)}\right) = \\ = \quad & (\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_r^{(m-r+1,\ldots,m)} + (-1) c_1^{(m-r)} \otimes (\partial_{(r)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_r^{(m-r+1,\ldots,m)}) \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} (\partial_{(1)}^{(m-r)} c_1^{(m-r)}) \otimes c_r^{(m-r+1,\ldots,m)} & \in C_0(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \left[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_r \\ c_1^{(m-r)} \otimes (\partial_{(r)}^{(m-r+1,\ldots,m)} c_{q-1}^{(m-r+1,\ldots,m)}) & \in C_1(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \left[C(\tilde{X}_{n+r-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{r-1} \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung gilt, daß $\mathrm{Kern}(\partial_{(1)}^{(m-r)}) = 0$ und $\mathrm{Kern}(\partial_{(r)}^{(m-r+1,\ldots,m)}) = 0$, folgt, daß $\mathrm{Kern}(\partial_{(r+1)}^{(m-r,\ldots,m)}) = 0$.
Damit hat man gezeigt, daß die 0-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \left[C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{r+1} & \overset{\partial_{(r+1)}^{(m-r,\ldots,m)}}{\rightarrow} & \ldots & \overset{\partial_{(1)}^{(m-r,\ldots,m)}}{\rightarrow} & \\ & \overset{\partial_{(1)}^{(m-r,\ldots,m)}}{\rightarrow} & \left[C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 & \rightarrow & 0 & & \end{array}$$

exakt ist bei $\left[C(\tilde{X}_{n+r,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$, $q \neq 0$.
Es bleibt noch zu zeigen, daß $\mathrm{Kern}(\partial_{(0)}^{(1,\ldots,m)})/\mathrm{Bild}(\partial_{(1)}^{(1,\ldots,m)}) \cong \mathbf{Z}$. Dazu beachte man, daß alle 0-Ketten Zyklen sind und daß im Quotienten nach $\mathrm{Bild}(\partial_{(1)}^{(1,\ldots,m)})$ alle 0-Ketten identifiziert werden durch: $\tilde{z}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{z}_m = \gamma(\tilde{z}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{z}_m)$ für alle Generatoren γ von $U_{n,m}$. □

4.1.3 Freie Auflösung von Z für $U_{n,m}$

Lemma 4.1.8 (Modulstruktur) *Der Komplex ist $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein $U_{n,m}$-(Links-)Modul.*

Beweis. Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach m.
Wir setzen voraus, der $(m-1)$-dimensionale Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist freier (Links-)Modul zu $U_{n,m-1}$, und betrachten den m-dimensionalen Produktkomplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$.

In Kapitel 2 wurde gezeigt, daß die Abbildung $\Phi^{(1)} : B_{n+m-1} \to \mathrm{Aut}(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ eine augmentationserhaltende Kettenabbildung ist. $\Phi^{(1)}$ ist für $\alpha' \in \mathbf{Z}U_{n+m-1,1}$ und $\tilde{z}_1 \in C_0(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ auf 0-Ketten definiert durch:

$$\Phi^{(1)}(\sigma)(\alpha'\,\tilde{z}_1) = \phi(\sigma)(\alpha')\,\tilde{z}_1$$

und für $\alpha' \in \mathbf{Z}U_{n+m-1,1}$ und $\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,j} \in C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ auf 1-Ketten durch:

$$\Phi^{(1)}(\sigma)(\alpha'\,\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,j}) = \phi(\sigma)(\alpha') \sum_{k=2}^{m+n} \left(J^{(1)}(\phi(\sigma))\right)_j^k \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k},$$

Hierbei bezeichnet ϕ den (injektiven) Homomorphismus $\phi : B_{n+m-1} \to \mathrm{Aut}(U_{n+m-1,1})$. Und $J^{(1)}(\phi(\sigma)) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}, n+m-1)$ ist die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\phi(\sigma) \in \mathrm{Aut}(U_{n+m-1,1})$ zu $\gamma \in B_{n+m-1}$.
Die Abbildung $\Phi^{(1)}$ genügt für $\gamma' \in U_{n+m-1,1}$ und $c^{(1)} \in C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ den beiden folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}(\sigma)(\gamma'\,c^{(1)}) &= \phi(\sigma)(\gamma')\,\Phi^{(1)}(c^{(1)})\\ \Phi^{(1)}(\sigma_a\sigma_b)(\gamma'\,c^{(1)}) &= \Phi^{(1)}(\sigma_b)(\Phi^{(1)}(\sigma_a)(\gamma'\,c^{(1)})),\end{aligned}$$

Insbesondere ist die Einschränkung $\Phi^{(1)} : U_{n,m-1} \to \mathrm{Aut}(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ auf $U_{n,m-1} \subset B_{n+m-1}$ eine augmentationserhaltende Kettenabbildung mit diesen Eigenschaften.
Im Sinne von Brady [7] erlaubt die freie Auflösung $C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ für $U_{n+m-1,1}$ damit eine Wirkung von $U_{n,m-1}$, kompatibel mit dem Homomorphismus $\phi : U_{n,m-1} \to \mathrm{Aut}(U_{n+m-1,1})$, und $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ mit Hilfe dieser Abbildung $\Phi^{(1)}$ mit der Struktur eines $U_{n,m}$-(Links-)Moduls versehen werden.
Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ werde wie folgt mit der Struktur eines (Links-)Moduls bzgl. $U_{n,m} = U_{n,m-1} \bowtie U_{n+m-1,1}$ versehen. Jedes Element von $U_{n,m}$ hat eine eindeutigen Ausdruck als $\gamma'\gamma$ mit $\gamma' \in U_{n+m-1,1}$ und $\gamma \in U_{n,m-1}$. Man setze:

$$(\gamma'\gamma)c^{(1)} = \gamma'\Phi^{(1)}(\gamma^{-1})(c^{(1)}), \qquad c^{(1)} \in C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$$

Man beachte die Verträglichkeit dieser Definition mit der Struktur von $U_{n,m}$:

$$\begin{aligned}(\gamma'\gamma)c^{(1)} &= (\gamma\,\phi(\gamma)(\gamma'))c^{(1)} =\\ &= \gamma\,(\phi(\gamma)(\gamma')c^{(1)}) =\\ &= \Phi^{(1)}(\gamma^{-1})(\phi(\gamma)(\gamma')c^{(1)}) =\\ &= \phi(\gamma^{-1})(\phi(\gamma)(\gamma'))\,\Phi^{(1)}(\gamma^{-1})(c^{(1)}) =\\ &= \gamma'\Phi^{(1)}(\gamma^{-1})(c^{(1)})\end{aligned}$$

Explizit hat man auf den Erzeugenden:

$$\begin{aligned}(\gamma'\gamma)\tilde{z}_1 &= \gamma'\tilde{z}_1, \qquad \tilde{z}_1 \in C_0(\tilde{X}_{n+m-1,1})\\ (\gamma'\gamma)\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,j} &= \sum_k \gamma' \left(J^{(1)}(\phi(\gamma^{-1}))\right)_j^k \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k}, \qquad \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,j} \in C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})\end{aligned}$$

Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ werde gleichfalls mit der Struktur eines $U_{n,m}$-(Links-)Moduls versehen, und zwar eines Moduls, der trivial ist bzgl. des semidirekten Anteils $U_{n+m-1,1}$:

$$(\gamma'\gamma)c^{(2,\ldots,m)} \quad = \quad \gamma c^{(2,\ldots,m)}, \qquad c^{(2,\ldots,m)} \in C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$$

Auch diese Definition ist (offensichtlich) verträglich mit der Struktur von $U_{n,m}$:

$$(\gamma'\gamma)c^{(2,\ldots,m)} \quad = \quad (\gamma\phi(\gamma)(\gamma'))c^{(2,\ldots,m)} = \gamma c^{(2,\ldots,m)}$$

Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ ist dann ein $U_{n,m}$-(Links-)Modul durch die diagonale $U_{n,m}$-(Links-)Wirkung:

$$\begin{aligned} (\gamma'\gamma)(c^{(1)} \otimes c^{(2,\ldots,m)}) &= (\gamma'\Phi^{(1)}(\gamma^{-1})(c^{(1)}) \otimes (\gamma c^{(2,\ldots,m)}) \\ c^{(1)} \otimes c^{(2,\ldots,m)} &\in C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Lemma 4.1.9 (Freier Modul) *Der Komplex ist $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein freier $U_{n,m}$-(Links-)Modul. Insbesondere ist $\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$ freier $U_{n,m}$-(Links-)Modul vom Rang $\Xi_q^{(n,m)}$.*

Beweis. Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach m.
Wir setzen voraus, der $(m-1)$-dimensionale Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ ist freier (Links-)Modul zu $U_{n,m-1}$, und $\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$ ist insbesondere freier $U_{n,m-1}$-(Links-)Modul vom Rang $\Xi_q^{(n,m-1)}$.
Zum Beweis des ersten Teils der Behauptung beachte man, daß der m-dimensionale Produktkomplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ oben mit der Struktur eines $U_{n,m}$-(Links-)Moduls versehen wurde. Es ist daher zu zeigen, daß dieser Produktkomplex $U_{n,m}$-frei ist. Wir folgen wieder der Argumentation von Brady [7].
Nach Voraussetzung ist $C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})$ freier (Links-)Modul zu $U_{n,m-1}$ und damit isomorph zu einer direkten Summe von Kopien des freien $U_{n,m-1}$-Moduls $\mathbf{Z}U_{n,m-1}$. Daher reicht es aus zu zeigen, daß $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}U_{n,m-1}$ frei bzgl. $U_{n,m}$ ist. Dies ergibt sich wieder mit den folgenden Aussagen über induzierte und eingeschränkte Moduln, siehe Brown [8], S.67ff.:
i) Ist F K-frei auf $\{f_i\}_{i\in I}$, so ist $\mathrm{Ind}_K^G(F)$ G-frei auf $\{1 \otimes f_i\}_{i\in I}$, $1 \in \mathbf{Z}G$.
ii) Ist F ein G-Modul und $K \subset G$, dann gibt es einen Isomorphismus von G-Moduln, und zwar: $\mathrm{Ind}_K^G \mathrm{Res}_K^G(F) \cong \mathbf{Z}[G/K] \otimes_{\mathbf{Z}} F$, wobei $\mathbf{Z}[G/K] \otimes_{\mathbf{Z}} F$ die diagonale G-Wirkung gegeben wird.
Es folgt insbesondere: ist F K-frei auf $\{f_i\}_{i\in I}$, so ist $F \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}H$, $H = G/K$, G-frei auf $\{f_i \otimes 1\}_{i\in I}$, $1 \in \mathbf{Z}H$.
Auf unserem Fall übertragen hat man: $F = C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$, $K = U_{n+m-1,1}$, $G = U_{n,m}$ und $G/K = U_{n,m-1}$. Es ist $\mathrm{Res}_{U_{n+m-1,1}}^{U_{n,m}}(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ der ursprüngliche $U_{n+m-1,1}$-Modul $C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$. Da

$C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ frei bzgl. $U_{n+m-1,1}$ ist, ist $\mathrm{Ind}_{U_{n+m-1,1}}^{U_{n,m}}(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ frei bzgl. $U_{n,m}$. Wegen $U_{n,m-1} = U_{n,m}/U_{n+m-1,1}$ folgt, daß auch $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}U_{n,m-1}$ frei ist bzgl. $U_{n,m}$. Damit ist auch $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left(C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ frei ist bzgl. $U_{n,m}$.

Zum Beweis des zweiten Teils der Behauptung beachte man, daß $C_0(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ $U_{n+m-1,1}$-frei vom Rang 1 ist auf $\{\tilde{z}_1\}$ und $C_0(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ $U_{n+m-1,1}$-frei vom Rang $n+m-1$ auf $\{\tilde{\gamma}_{1,j}^{(1)}\}$, $j = 2, \ldots, m+n$. Weiter sind für alle $0 < q < m$ die q-ten Kettengruppen des m-dimensionalen Komplexes $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ wie folgt rekursiv bestimmt:

$$\begin{aligned}
&\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q = \\
&= \quad C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left[C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q-1} \oplus \\
&\qquad \oplus C_0(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \left[C(\tilde{X}_{n+m-2,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q
\end{aligned}$$

Mit der Induktionsannahme, mit den Aussagen des ersten Teils des Beweises und mit der Identität $\Xi_q^{(n,m)} = (n+m-1)\,\Xi_{q-1}^{(n,m-1)} + \Xi_q^{(n,m-1)}$ folgt, daß insbesondere die q-te Kettengruppe $\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q$ freier $U_{n,m}$-(Links-)Modul vom Rang $\Xi_q^{(n,m)}$ ist. □

Lemma 4.1.10 *Für die Kettengruppen des Komplexes $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ freier (Links-)Moduln zu $\mathbf{Z}U_{n,m}$ gilt:*

$$\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \quad \cong \quad (\mathbf{Z}U_{n,m})^{\Xi_q^{(n,m)}}$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt mit den Aussagen des vorangegangenen Lemma. □

Man betrachte anstelle des Randhomomorphismus $\partial_{(0)}^{(1,\ldots,m)} : \mathbf{Z}U_{n,m} \to 0$ die sogenannte Augmentationsabbildung.

Definition 4.1.11 Die *Augmentation* $\varepsilon^{(1,\ldots,m)} : \mathbf{Z}U_{n,m} \to \mathbf{Z}$ ist definiert durch:

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\sum_i n_i \gamma_i) = \sum_i n_i, \qquad \alpha \in \mathbf{Z}U_{n,m}, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad \gamma_i \in U_{n,m}$$

Lemma 4.1.12 *Der augmentierte Komplex zu $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ ist eine freie Auflösung (der Länge m) von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U_{n,m}$.*

Beweis. Der Komplex $C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ ist ein azyklischer Komplex freier $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Moduln, daher eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U_{n,m}$. Die folgende 0-Sequenz freier $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Moduln ist also exakt:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m & \xrightarrow{\partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)}} & \ldots & \xrightarrow{\partial_{(1)}^{(1,\ldots,m)}} & \\
& \xrightarrow{\partial_{(1)}^{(1,\ldots,m)}} & \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 & \xrightarrow{\varepsilon^{(1,\ldots,m)}} & \mathbf{Z} & \to & 0
\end{array}$$

Exaktheit bei $\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_0 \cong \mathbf{Z}U_{n,m}$ kann man auch unmittelbar wie folgt einsehen. $\mathrm{Kern}(\varepsilon^{(1,\dots,m)})$ besteht aus Elementen $1-\gamma$, $\gamma \in U_{n,m}$, und diese Elemente haben einen eindeutigen Ausdruck der Form:

$$1-\gamma \quad = \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m+n} \alpha_{j,k}(1-\gamma_{j,k}), \qquad \alpha_{j,k} \in U_{n,m}$$

Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m+n} \alpha_{j,k}(1-\gamma_{j,k}) = \\ &= \quad \partial_{(1)}^{(1,\dots,m)} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=j+1}^{m+n} \alpha_{j,k}(\tilde{z}_1 \otimes \ldots \otimes \tilde{z}_{j-1} \otimes \tilde{\gamma}_{j,k}^{(j)} \otimes \tilde{z}_{j+1} \otimes \ldots \otimes \tilde{z}_m) \right) \end{aligned}$$

Damit hat man gezeigt, daß: $\mathrm{Kern}(\varepsilon^{(1,\dots,m)}) = \mathrm{Bild}(\partial_{(1)}^{(1,\dots,m)})$. $\square$

4.2 m-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe

Im folgenden werden zunächst für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 der m-dimensionale äquivariante Kettenkomplexe definiert. Sodann werden unter der Voraussetzung gewisser Eigenschaften des Koeffizientenmoduls G_0 wie Generizität oder Trivialität bzgl. $U_{n,m}$ die Homologiegruppen dieser m-dimensionalen äquivarianten Komplexe explizit bestimmt. Es zeigt sich, daß analog zur Konstruktion des Komplexes dessen Homologiegruppen iterativ bestimmt sind.

4.2.1 Definition m-dimensionaler äquivarianter Kettenkomplexe

Für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 unterscheiden wir den m-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$, der also durch Tensorierung des als freien $\mathbf{Z}U_{n,m}$-(Links-)Moduls definierten Produktkomplexes entsteht, und den m-dimensionalen äquivarianten Komplex $\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$, der durch Iteration aus dem 1-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ entsteht, indem im ersten Schritt der Koeffizientenmodul $G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ gesetzt wird, wobei G_{m-2} ein $U_{n,2}$-Modul ist, im zweiten Schritt der Koeffizientenmodul $G_{m-2} = G_{m-3} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+2,1}} C(\tilde{X}_{n+2,1})$, wobei G_{m-3} ein $U_{n,3}$-Modul ist, und im letzten Schritt der Koeffizientenmodul $G_1 = G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})$, wobei G_0 ein $U_{n,m}$-Modul ist.

Definition 4.2.1 Es sei G_0 ein $U_{n,m}$-Rechtsmodul. Dann ist der m-dimensionale äquivariante Komplex $G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ mit Koeffizienten in G_0 definiert durch die Kettengruppen:

$$
\begin{aligned}
&G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q = \\
&= \quad G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \bigoplus_{\sum_{k=1,\ldots,m} p_k = q} \left(C_{p_1}(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1}) \right)
\end{aligned}
$$

und Randhomomorphismen:

$$
\begin{aligned}
&\partial_{(q)} : G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q \to \\
&\to \quad G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_{q-1}
\end{aligned}
$$

die mit den Elementen $g \in G_0$ vertauschen:

$$
\begin{aligned}
\partial_{(q)}(g \otimes c_q) \quad &= \quad g^{(0)} \otimes \partial_{(q)}(c_q) \\
&\qquad c_q \in \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q
\end{aligned}
$$

Lemma 4.2.2 *Es gilt:*

$$
G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q \quad \cong \quad (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}}
$$

Beweis. Oben wurde gezeigt:

$$
\left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q \quad \cong \quad (\mathbf{Z}U_{n,m})^{\Xi_q^{(n,m)}}
$$

Daraus folgt wegen $G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \mathbf{Z}U_{n,m} \cong G_0$ unmittelbar die Behauptung. □

Die Struktur der äquivarianten Komplexe $G_{r-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}} C(\tilde{X}_{n+m-r,1})$, $r = 1, \ldots, m$, wobei G_{r-1} ein (Rechts-)Modul zu $U_{n,m-r+1} = U_{n,m-r} \rhd\!\!< U_{n+m-r,1}$ ist, als Moduln zu $U_{n,m-r}$ ermöglicht die iterative Definition m-dimensionaler äquivarianter Kettenkomplexe.

Im ersten Schritt wurde im 1-dimensionalen äquivarianten Komplex $G_{m-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ der $U_{n,1}$-Koeffizientenmodul G_{m-1} selbst als ein 1-dimensionaler äquivarianter Komplex, und zwar als $G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})$ mit $U_{n,2}$-Koeffizientenmodul G_{m-2}, gewählt:

$$
G_{m-1} = G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})
$$

und der G_{m-1} als $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Modul charakterisierende Homomorphismus $\Phi_g^{(m-1)}$ also als:

$$
\begin{aligned}
\Phi_g^{(m-1)}(\gamma)(g^{(m-1)}) \quad &= \quad \Phi_g^{(m-1)}(\gamma)(g^{(m-2)} \otimes c^{(m-1)}) = \\
&= \quad \Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g^{(m-2)}) \otimes \Phi^{(m-1)}(\gamma)(c^{(m-1)}), \qquad \gamma \in U_{n,1}
\end{aligned}
$$

wobei $\Phi^{(m-1)}(\gamma)$ auf der erzeugenden 0-Kette $\tilde{z}_{m-1}$ die Identität war und auf den erzeugenden 1-Ketten $\{\gamma^{(m-1)}_{m-1,j}\}$ die Jacobi-Matrix $J^{(m-1)}(\gamma) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+1,1}, n+1)$ von $\gamma \in U_{n,1}$. Das resultierende Produkt $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ wurde mit der Struktur eines 2-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexes versehen.

Im zweiten Schritt betrachte man den Komplex $\left(G_{m-2} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,2}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ und wähle den $\mathbf{Z}U_{n,2}$-Koeffizientenmodul G_{m-2} als 1-dimensionalen Komplex $G_{m-3} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+2,1}} C(\tilde{X}_{n+2,1})$ mit einem $U_{n,3}$-Koeffizienetenmodul G_{m-3}:

$$G_{m-2} = G_{m-3} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+2,1}} C(\tilde{X}_{n+2,1})$$

und der G_{m-2} als $U_{n,2}$-Modul charakterisierenden Homomorphismus $\Phi_g^{(m-2)}$ als:

$$\begin{aligned}\Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g^{(m-2)}) &= \Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g^{(m-3)} \otimes c^{(m-2)}) = \\ &= \Phi_g^{(m-3)}(\gamma)(g^{(m-3)}) \otimes \Phi^{(m-2)}(\gamma)(c^{(m-2)}), \qquad \gamma \in U_{n,2}\end{aligned}$$

wobei $\Phi^{(m-2)}(\gamma)$ auf der erzeugenden 0-Kette $\tilde{z}_{m-2}$ die Identität ist und auf den erzeugenden 1-Ketten $\{\gamma^{(m-2)}_{m-2,j}\}$ die Jacobi-Matrix $J^{(m-2)}(\gamma) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+2,1}, n+2)$ von $\gamma \in U_{n,2}$. Das Produkt $\left(\left(G_{m-3} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+2,1}} C(\tilde{X}_{n+2,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ kann mit der Struktur eines 3-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexes versehen werden.

Auf diese Weise fortfahrend gelangt man durch Iteration zu m-dimensionalen äquivarianten Kettenkomplexen mit Koeffizienten in einem (Rechts-)Modul G_0 zu $U_{n,m} = U_{n,1} \bowtie U_{n+1,1} \bowtie \ldots \bowtie U_{n+m-1,1}$, der gegeben sei durch einen Homomorphismus:

$$\Phi_g^{(0)} : U_{n,m} \to \mathrm{Aut}(G_0)$$

Definition 4.2.3 Für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 ist der m-dimensionale iterierte äquivariante Komplex $\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$ definiert durch die Kettengruppen:

$$\begin{aligned}&\left[\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q = \\ &= \bigoplus_{\substack{\sum_{k=1}^m p_k = q \\ p_k = 0,1; \quad k=1,\ldots,m}} \left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C_{p_1}(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C_{p_m}(\tilde{X}_{n,1})\end{aligned}$$

und durch die Randhomomorphismen:

$$\begin{aligned}\partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} : &\left[\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \to \\ \to &\left[\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q-1}\end{aligned}$$

mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(q)}^{(1,\dots,m)}\left(\left(g\otimes c_{p_1}^{(1)}\right)\otimes\dots\otimes c_{p_m}^{(m)}\right)= \\
&= \sum_{l=1}^{m}(-1)^{\sum_{k=1}^{l-1}p_k}\left(\left(g\otimes c_{p_1}^{(1)}\right)\otimes\dots\otimes(\partial_{(p_l)}^{(l)}c_{p_l}^{(l)})\right)\otimes\dots\otimes c_{p_m}^{(m)}
\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
\partial_{(0)}^{(l)}\tilde{z}_l &= 0, \qquad l=1,\dots,m \\
\partial_{(1)}^{(l)}\tilde{\gamma}_{l,j_l}^{(l)} &= (1-\gamma_{l,j_l})\tilde{z}_l, \qquad j_l=l+1,\dots,m+n, \quad l=1,\dots,m
\end{aligned}$$

Lemma 4.2.4 *Für einen* $\mathbf{Z}U_{n,m}$*-Modul* G_0 *gilt:*

$$\left[\left(G_0\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}}C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}}\dots\otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}}C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \cong (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}}$$

Beweis. Der Beweis ist durch vollständige Induktion.
Es gelte für ein r, $1<r<m$:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(G_0\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}}C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}}\dots\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}}C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right]_q\cong \\
&\cong (G_0)^{\Xi_q^{(n+m-r,r)}}
\end{aligned}$$

Für alle $0<q<r+1$ sind die q-ten Kettengruppen des $(r+1)$-dimensionalen Komplexes $\left(\left(G_0\otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}C(\tilde{X}_{n+m-r-1,1})$ wie folgt rekursiv bestimmt:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\left(G_0\otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right)\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}C(\tilde{X}_{n+m-r-1,1})\right]_q= \\
&= \left[\left(G_0\otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right]_q\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}C_0(\tilde{X}_{n+m-r-1,1})\oplus \\
&\oplus\left[\left(G_0\otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right]_{q-1}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}C_1(\tilde{X}_{n+m-r-1,1})
\end{aligned}$$

Die Aussage folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\left(G_0\otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right)\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})\right)\otimes C(\tilde{X}_{n+m-r-1,1})\right]_q\cong \\
&\cong (G_0)^{\Xi_q^{(n+m-r,r)}}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}\oplus \\
&\quad\oplus(G_0)^{\Xi_{q-1}^{(n+m-r,r)}}\otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1}}(\mathbf{Z}U_{n+m-r-1,1})^{n+m-r-1}\cong \\
&\cong (G_0)^{\Xi_q^{(n+m-r-1,r+1)}}
\end{aligned}$$

mit $\Xi_q^{(n+m-r-1,r+1)}=(n+m-r-1)\,\Xi_{q-1}^{(n+m-r,r)}+\Xi_q^{(n+m-r,r)}$. $\square$

Lemma 4.2.5 *Es gibt einen Isomorphismus von Kettenkomplexen:*

$$\begin{aligned} & G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right) \cong \\ \cong \quad & \left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \end{aligned}$$

durch:

$$\begin{aligned} & \mu \left(g^{(0)} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left(c^{(1)}_{p_1} \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} c^{(m)}_{p_m} \right) \right) = \\ \cong \quad & \left(g^{(0)} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} c^{(1)}_{p_1} \right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} c^{(m)}_{p_m} \end{aligned}$$

für alle $g^{(0)} \in G_0$ *und* $c^{(k)}_{p_k} \in C_{p_k}(\tilde{X}_{n+m-k,1})$, $k = 1, \ldots, m$.

Beweis. Mit den Lemmata 4.2.2 und 4.2.4 gilt für die Kettengruppen:

$$\begin{aligned} & G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left[C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q \cong \\ \cong \quad & \left[\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right]_q \\ \cong \quad & (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}} \end{aligned}$$

Die Verträglichkeit von μ mit den Modulstrukturen kann man wie im Falle 2-dimensionaler äquivarianter Komplexe, siehe Kapitel 2, zeigen.
Daß μ mit den Randhomomorphismen vertauscht, folgt direkt mit der Definition der Randhomomorphismen. Für m-Ketten aus $G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} \left(C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(\tilde{X}_{n,1}) \right)$ beispielsweise hat man folgendes:

$$\begin{aligned} & \partial^{(1,\ldots,m)}_{(m)} \left(g^{(0)} \otimes \left(\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,i_{m-1}} \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) \right) = \\ = \quad & \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} g^{(0)} \otimes \left(\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes (\partial^{(r)}_{(1)} \tilde{\gamma}^{(r)}_{r,i_r}) \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) = \\ = \quad & \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} g^{(0)} \otimes \left(\tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes (1 - \gamma_{r,i_r}) \tilde{z}_r \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) \end{aligned}$$

Für m-Ketten aus $\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})$, Bilder obiger m-Ketten unter μ, hat man:

$$\begin{aligned} & \partial^{(1,\ldots,m)}_{(m)} \left(\left(\left(g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \right) \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m-1)}_{m-1,i_{m-1}} \right) \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) = \\ = \quad & \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \left(\left(\left(g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \right) \otimes \ldots \otimes (\partial^{(r)}_{(1)} \tilde{\gamma}^{(r)}_{r,i_r}) \right) \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) = \\ = \quad & \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+1} \left(\left(\left(g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \right) \otimes \ldots \otimes (1 - \gamma_{r,i_r}) \tilde{z}_r \right) \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m} \right) \end{aligned}$$

Und offensichtlich gilt: $\mu \, \partial^{(1,\ldots,m)}_{(m)} = \partial^{(1,\ldots,m)}_{(m)} \mu$. □

4.2.2 Eigenschaften des Koeffizientenmoduls

Generizität des Koeffizientenmoduls

Im weiteren sollen die Homologiegruppen des m-dimensionalen iterierten äquivarianten Komplexes $\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ bestimmt werden, insbesondere die m-Zyklen des Komplexes, also die Zyklen in der höchsten Dimension des Komplexes. Dazu wird geklärt, unter welchen Bedingungen an den Koeffizientenmodul G_0 Elemente der Form:

$$\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1}\left(\ldots\left[\Phi_g^{(1)}(1-\gamma_{2,j_2})\right]^{-1}\left(\left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1})\right]^{-1}(g)\otimes\tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)}\right)\otimes\tilde{\gamma}_{2,j_2}^{(2)}\ldots\right)\otimes\tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)}$$

als m-Ketten des Komplexes wohldefiniert sind. Die m-Zyklen werden sich auf einfache Weise aus solchen m-Ketten zusammensetzen.

- Erste Bedingung ist die Generizität von G_0 bzgl. $U_{n+m-1,1}$, d.h. Invertierbarkeit der $(1-\gamma_{1,j_1}) \in \mathbf{Z}U_{n+m-1,1}$ als Endomorphismen von G_0:

$$\exists \left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1})\right]^{-1} \in \operatorname{End}(G_0)$$

- Zweite Bedingung ist die Generizität von $G_1 = G_0 \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})$ bzgl. $U_{n+m-2,1}$, d.h. Invertierbarkeit der $(1-\gamma_{2,j_2}) \in \mathbf{Z}U_{n+m-2,1}$ als Endomorphismen von G_1:

$$\exists \left[\Phi_g^{(1)}(1-\gamma_{2,j_2})\right]^{-1} \in \operatorname{End}(G_1)$$

  Um diese Bedingung als Bedingung an den Koeffizientenmodul G_0 zu formulieren, sind wegen $\Phi_g^{(1)}(\gamma)(g^{(1)}) = \Phi_g^{(0)}(\gamma)(g^{(0)}) \otimes \Phi^{(1)}(\gamma)(c^{(1)})$ die Eigenwerte der Generatoren γ_{2,j_2} von $U_{n+m-2,1}$ unter $\Phi^{(1)} : U_{n+m-2,1} \longrightarrow \operatorname{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ zu bestimmen.

- Dritte Bedingung ist, daß $G_2 = (G_0 \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-2,1})$ generisch ist bzgl. $U_{n+m-3,1}$, d.h. Invertierbarkeit der $(1-\gamma_{3,j_3}) \in \mathbf{Z}U_{n+m-3,1}$ als Endomorphismen von G_2:

$$\exists \left[\Phi_g^{(2)}(1-\gamma_{3,j_3})\right]^{-1} \in \operatorname{End}(G_2)$$

  Um diese Bedingung als Bedingung an den Koeffizientenmodul G_0 zu formulieren, sind wegen $\Phi_g^{(2)}(\gamma)(g^{(2)}) = \left(\Phi_g^{(0)}(\gamma)(g^{(0)}) \otimes \Phi^{(1)}(\gamma)(c^{(1)})\right) \otimes \Phi^{(2)}(\gamma)(c^{(2)})$ für $r = 1,2$ die Eigenwerte $\rho_{j_r}^{(r)}$ der Generatoren γ_{3,j_3} von $U_{n+m-3,1}$ unter $\Phi^{(r)} : U_{n+m-3,1} \longrightarrow \operatorname{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1}))$, sowie die Eigenwerte der Eigenwerte $\rho_{j_2}^{(2)}$ unter $\Phi^{(1)} : U_{n+m-2,1} \longrightarrow \operatorname{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1}))$ zu bestimmen.

- m-te Bedingung ist, daß $G_{m-1} = (G_0 \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$ generisch ist bzgl. $U_{n,1}$, d.h. Invertierbarkeit der $(1-\gamma_{m,j_m}) \in \mathbf{Z}U_{n,1}$ als Endomorphismen von $(G_0 \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C_1(\tilde{X}_{n+1,1})$:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \in \operatorname{End}(G_{m-1})$$

Um diese Bedingung als Bedingung an den Koeffizientenmodul G_0 zu formulieren, ist die Bestimmung der Eigenwerte der Generatoren γ_{m,j_m} von $U_{n,1}$ $(m-1)$-fach zu iterieren.

Mit Hilfe von Ergebnissen von Cohen und Suciu [10] werden generische $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Moduln G_0 definiert, um also die Zyklen des Komplexes $\Big(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\Big) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ explizit angeben zu können.

Man erinnere, daß in $\Big(G_{m-2} \otimes C(\tilde{X}_{n+1,1})\Big) \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ Generizität des Koeffizientenmoduls G_{m-2} bzgl. $\mathbf{Z}U_{n,2}$, $U_{n,2} = U_{n,1} \rhd\!\!< U_{n+1,1}$, erfordert, daß für den Homomorphismus $\Phi_g^{(m-2)} : U_{n,2} \to \mathrm{Aut}(G_{m-2})$ zum einen sämtliche Eigenwerte der Generatoren von $U_{n+1,1}$ ungleich der Identität sind, zum anderen sämtliche Eigenwerte des Produkts der Generatoren von $U_{n,1}$ mit ihren Eigenwerten unter $\Phi^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$, d.h. also die Eigenwerte der Generatoren von $U_{n,1}$, sowie aller Elemente $\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j} \in U_{n,2}$, wobei $j = m+1, \ldots, m+n$ ist.

Im folgenden werden zunächst für die Darstellung $\Phi^{(m)} : P_n \to \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$ die Eigenwerte von Elementen von P_n bestimmt, die sich auf solche Weise aus den Generatoren zusammensetzen, vgl. [10], Abschnitt 6.4.

Für eine Menge $J_p = \{j_1, j_2, \ldots, j_{p-1}, j_p\}$ mit $m+1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{p-1} < j_p \le m+n$ sei das Element $\gamma_{J_p} \in P_n$ wie folgt definiert:

$$\gamma_{J_p} \quad = \quad \gamma_{j_1,j_2} \cdot \gamma_{j_1,j_3}\gamma_{j_2,j_3} \cdot \ldots \cdot \gamma_{j_1,j_{p-1}} \cdots \gamma_{j_{p-2},j_{p-1}} \cdot \gamma_{j_1,j_p} \cdots \gamma_{j_{p-1},j_p}$$

Beispiel 4.2.6 Für $J_3 = \{m-1, m, j\}$ hat man:

$$\gamma_{J_3} \quad = \quad \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j}$$

Zu jedem Element $\gamma_{J_p} \in P_n$ betrachte man eine neue Basis der freien Gruppe $U_{n,1}$ vom Rang n, gegeben durch:

$$y_{m,i}^{[J_p]} = \left\{ \begin{array}{cc} \gamma_{m,i} & i \le j_1 \\ \gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k} & i = j_k, \quad k = 2, \ldots, p \\ (\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})^{-1} & j_k < i < j_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, p-1 \\ \gamma_{m,i} & i > j_p \end{array} \right.$$

Man hat, vgl. [10], Lemma 6.5:

Lemma 4.2.7 *Der Automorphismus $\phi^{(m)}(\gamma_{J_p}) \in Aut(U_{n,1})$, $\gamma_{J_p} \in P_n$, der freien Gruppe $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}^{[J_p]}, \ldots, y_{m,m+n}^{[J_p]} \rangle$ ist wie folgt gegeben:*

$$\phi^{(m)}(\gamma_{J_p})(y_{m,i}^{[J_p]}) = \left\{ \begin{array}{cc} y_{m,i}^{[J_p]} & i \ne r \\ y_{m,j_p}^{[J_p]} y_{m,i}^{[J_p]} (y_{m,j_p}^{[J_p]})^{-1} & i = j_k \quad k = 1, \ldots, p-1 \end{array} \right.$$

Beweis. Der Beweis durch vollständige Induktion nach p und mit Hilfe der Relationen aus Bemerkung 1.2.4 zur Wirkung von P_n auf $U_{n,1} = \langle \gamma_{m,m+1}, \ldots, \gamma_{m,m+n} \rangle$ wird von Cohen und

Suciu [10] nicht explizit ausgeführt. Der Fall $p = 2$ wurde im vorigen Kapitel behandelt. Es sei nun $p-1 \geq 2$, und es sei für die Menge $J_{p-1} = \{j_1, j_2, \ldots, j_{p-1}\}$ mit $m+1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{p-1} < j_p \leq m+n$ das Element $\gamma_{J_{p-1}} \in P_n$ wie folgt definiert:

$$\gamma_{J_{p-1}} = \gamma_{j_1,j_2} \cdot \gamma_{j_1,j_3}\gamma_{j_2,j_3} \cdot \cdots \cdot \gamma_{j_1,j_{p-1}} \cdots \gamma_{j_{p-2},j_{p-1}}$$

Weiter sei zum Element $\gamma_{J_{p-1}} \in P_n$ die folgende Basis von $U_{n,1}$ gewählt:

$$y_{m,i}^{[J_{p-1}]} = \left\{ \begin{array}{cc} \gamma_{m,i} & i \leq j_1 \\ \gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k} & i = j_k, k = 2, \ldots, p-1 \\ (\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})^{-1} & j_k < i < j_{k+1} \quad k = 1, \ldots, p-2 \\ \gamma_{m,i} & i > j_{p-1} \end{array} \right.$$

Es sei angenommen, $\gamma_{J_{p-1}} \in P_n$ wirkt auf $U_{n,1} = \langle y_{m,m+1}^{[J_{p-1}]}, \ldots, y_{m,m+n}^{[J_{p-1}]} \rangle$ wie folgt als (von rechts) Automorphismus:

$$y_{m,i}^{[J_{p-1}]}\gamma_{J_{p-1}} = \gamma_{J_{p-1}} \left\{ \begin{array}{cc} y_{m,i}^{[J_{p-1}]} & i \neq r \\ y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]} y_{m,i}^{[J_{p-1}]} (y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]})^{-1} & i = j_k \quad k = 1, \ldots, p-2 \end{array} \right.$$

Zur Induktion benötigt man außer der Induktionsannahme auch Relationen für das Element $\mu_{J_p} = \gamma_{j_1,j_p} \cdots \gamma_{j_{p-1},j_p} \in P_n$:

$$\begin{aligned}
\gamma_{m,i}\mu_{J_p} &= \mu_{J_p}\gamma_{m,i}, \qquad i < j_1 \\
\gamma_{m,j_k}\mu_{J_p} &= \mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p} \cdots \gamma_{m,j_1}^{-1})\gamma_{m,j_k}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p} \cdots \gamma_{m,j_1}^{-1})^{-1} \\
&\qquad k = 1, \ldots, p-1 \\
\gamma_{m,i}\mu_{J_p} &= \mu_{J_p}[\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k}, \gamma_{m,j_{k+1}} \cdots \gamma_{m,j_p} \cdots \gamma_{m,j_{k+1}}^{-1}]\gamma_{m,i} \times \\
&\quad \times [\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k}, \gamma_{m,j_{k+1}} \cdots \gamma_{m,j_p} \cdots \gamma_{m,j_{k+1}}^{-1}]^{-1} \\
&\qquad j_k < i < j_{k+1}, k = 1, \ldots, p-1 \\
\gamma_{m,j_p}\mu_{J_p} &= \mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_{p-1}})\gamma_{m,j_p}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_{p-1}})^{-1} \\
\gamma_{m,i}\mu_{J_p} &= \mu_{J_p}\gamma_{m,i}, \qquad i > j_p
\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}
&(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_{p-1}})\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_{p-1}})^{-1}\mu_{J_p} = \\
&\quad = \mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p})\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p})^{-1}, \qquad k = 1, \ldots, p-1 \\
&(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})^{-1}\mu_{J_p} = \\
&\quad = \mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_k})^{-1} \\
&\qquad j_k < i < j_{k+1}, k = 1, \ldots, p-1 \\
&\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}\mu_{J_p} = \\
&\quad = \mu_{J_p}\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Induktionsbehauptung verwende man zunächst den Ausdruck der Elemente $y_{m,i}^{[J_p]}$ in den Elementen $y_{m,i}^{[J_{p-1}]}$ und die Relation $\gamma_{J_p} = \gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p}$. Sodann kommutiere man mit Hilfe der Induktionsannahme das Element $\gamma_{J_{p-1}}$ und mit Hilfe der Relationen das Element μ_{J_p} nach links. Schließlich drücke man die resultierenden Elemente $y_{m,i}^{[J_{p-1}]}$ wieder in den Elementen $y_{m,i}^{[J_p]}$ aus. Im Falle $i < j_1$ oder $i > j_p$ hat man:

$$\begin{aligned} y_{m,i}^{[J_p]}\gamma_{J_p} &= y_{m,i}^{[J_{p-1}]}\gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p}y_{m,i}^{[J_{p-1}]} = \\ &= \gamma_{J_p}y_{m,i}^{[J_p]} \end{aligned}$$

Im Falle $i = j_k$, $k = 1, \ldots, p-1$ hat man:

$$\begin{aligned} y_{m,j_k}^{[J_p]}\gamma_{J_p} &= y_{m,j_k}^{[J_{p-1}]}\gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]}y_{m,j_k}^{[J_{p-1}]}(y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]})^{-1}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})^{-1}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_p})\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_p})^{-1} = \\ &= \gamma_{J_p}y_{m,j_p}^{[J_p]}y_{m,j_k}^{[J_p]}(y_{m,j_p}^{[J_p]})^{-1} \end{aligned}$$

Im Falle $j_k < i < j_{k+1}$, $k = 1, \ldots, p-2$ hat man:

$$\begin{aligned} y_{m,i}^{[J_p]}\gamma_{J_p} &= y_{m,i}^{[J_{p-1}]}\gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}y_{m,i}^{[J_{p-1}]}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k})^{-1}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_k})^{-1} = \\ &= \gamma_{J_p}y_{m,i}^{[J_p]} \end{aligned}$$

Im Falle $j_{p-1} < i < j_p$ hat man:

$$\begin{aligned} y_{m,i}^{[J_p]}\gamma_{J_p} &= y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]}y_{m,i}^{[J_{p-1}]}(y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]})^{-1}\gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]}y_{m,i}^{[J_{p-1}]}(y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]})^{-1}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})^{-1}\mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})\gamma_{m,i}(\gamma_{m,j_1}\cdots\gamma_{m,j_{p-1}})^{-1} = \\ &= \gamma_{J_p}y_{m,i}^{[J_p]} \end{aligned}$$

Im Falle $i = j_p$ schließlich hat man:

$$y_{m,j_p}^{[J_p]}\gamma_{J_p} = y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]}y_{m,j_p}^{[J_{p-1}]}\gamma_{J_{p-1}}\mu_{J_p} =$$

$$\begin{aligned} &= \gamma_{J_{p-1}} y_{m,j_{p-1}}^{[J_{p-1}]} y_{m,j_p}^{[J_{p-1}]} \mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}} \gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p} \mu_{J_p} = \\ &= \gamma_{J_{p-1}} \mu_{J_p} \gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p} = \\ &= \gamma_{J_p} y_{m,j_p}^{[J_p]} \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Es bezeichne nun $\tilde{y}_i^{(m),[J_p]}$ denjenigen Lift des Weges $y_{m,i}^{[J_p]} \in U_{n,1} = \pi_1(X_{n,1}; z_m)$ in die universelle Überlagerung $\tilde{X}_{n,1}$, der im fest gewählten Punkt $\tilde{z}_m$ beginnt. Die Elemente $\tilde{y}_i^{(m),[J_p]}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, bilden eine neue Basis des freien $\mathbf{Z}U_{n,1}$-Linksmoduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$. Es folgt mit Hilfe des freien Differentialkalküls, vgl. [10], Satz 6.6:

Lemma 4.2.8 *Der Automorphismus $\Phi^{(m)}(\gamma_{J_p}) \in Aut(C_1(\tilde{X}_{n,1}))$, $\gamma_{J_p} \in P_n$, des freien $U_{n,1}$-Linksmoduls $C_1(\tilde{X}_{n,1})$ mit der Basis $\{\tilde{y}_i^{(m),[J_p]}; i = m+1, \ldots, m+n\}$ ist wie folgt gegeben:*

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}(\gamma_{J_p})(\tilde{y}_i^{(m),[J_p]}) &= \tilde{y}_i^{(m),[J_p]}, \qquad i \neq j_k, k = 1, \ldots, p-1 \\ \Phi^{(m)}(\gamma_{J_p})(\tilde{y}_i^{(m),[J_p]}) &= \gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p} \tilde{y}_i^{(m),[J_p]} + \\ &\quad + \left(1 - (\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}) \gamma_{m,i} (\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p})^{-1}\right) \tilde{y}_{j_p}^{(m),[J_p]} \\ &\qquad i = j_k, k = 1, \ldots, p-1 \end{aligned}$$

Somit hat man zu jedem $\gamma_{J_p} \in P_n$ eine Basis von $C_1(\tilde{X}_{n,1})$, so daß die Matrix $\Phi^{(m)}(\gamma_{J_p})$ eine obere Dreiecksmatrix ist mit diagonalen Einträgen 1 und $\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}$. Es folgt, daß das Element $(1 - \gamma_{J_p}) \in \mathbf{Z}P_n$ als Endomorphismus von $G_{m-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n,1})$ invertierbar ist, wenn die Elemente $(1 - \gamma_{J_p}) \in \mathbf{Z}P_n$ und $(1 - \gamma_{J_p}\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}) \in \mathbf{Z}P_{n+1}$ als Endomorphismen von G_{m-1} invertierbar sind.

Insbesondere hat man für $j = 1, \ldots, m-1$ zu jedem $\gamma_{J_p} \in U_{n,m-j}$ eine Basis von $C_1(\tilde{X}_{n+m-j,1})$, so daß das Element $(1 - \gamma_{J_p}) \in \mathbf{Z}U_{n,m-j}$ als Endomorphismus von $G_{j-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-j,1})$, G_{j-1} ein $U_{n,m-j+1}$-Modul, invertierbar ist, wenn $(1 - \gamma_{J_p}) \in \mathbf{Z}U_{n,m-j}$ und $(1 - \gamma_{J_p}\gamma_{m,j_1} \cdots \gamma_{m,j_p}) \in \mathbf{Z}U_{n,m-j+1}$ als Endomorphismen von G_{j-1} invertierbar sind.

Beispiel 4.2.9 Im ersten Schritt betrachte man einen Generator von $U_{n,1}$:

$$\gamma_{m,j}$$

Im zweiten Schritt betrachte man Produkte dieses Generators mit dessen verschiedenen Eigenwerten unter dem Homomorphismus $\Phi^{(m-1)} : U_{n,1} \to \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+1,1}))$ die folgenden Elemente von $U_{n,2}$:

$$\gamma_{m,j} \qquad\qquad \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j}$$

Im dritten Schritt betrachte man Produkte dieser Elemente mit deren verschiedenen Eigenwerten unter dem Homomorphismus $\Phi^{(m-2)} : U_{n,2} \to \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+2,1}))$, die folgenden Elemente von $U_{n,3}$:

$$\begin{array}{ll} \gamma_{m,j} & \gamma_{m-2,m}\gamma_{m-2,j}\gamma_{m,j} \\ \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j} & \gamma_{m-2,m}\gamma_{m-2,m-1}\gamma_{m-2,j}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j} \end{array}$$

Auf diese Weise fortfahrend findet man im $(m-1)$-ten Schritt alle Elemente $\gamma_{J_p} \in U_{n,m}$ mit $p = 2, \dots, m+1$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p-1} = m < j_p = j$.

Die obigen Feststellungen motivieren die folgende Definition von Generizität. Vgl. dazu die Definition von Quasi-Generizität von Cohen und Suciu [10], Definition 6.8.

Definition 4.2.10 (Generizität (3)) Ein $U_{n,r}$-Modul G_{m-r} heißt *generisch* bzgl. $U_{n,r}$, wenn für $2 \leq p \leq r+1$ und für Mengen $J_p = \{j_1, j_2, \dots, j_{p-1}, j_p\}$ mit $m-r+1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p-1} \leq m < j_p \leq m+n$ alle Elemente $(1-\gamma_{J_p}) \in \mathbf{Z}U_{n,r}$ als Endomorphismen von G_{m-r} invertierbar sind:

$$\exists \left[\Phi_g^{(m-r)}(1-\gamma_{J_p})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-r})$$

Diese Definition eines generischen $U_{n,r}$-Moduls verallgemeinert die für die Fälle $r = 1, 2$ gegebenen Definitionen.

Beispiel 4.2.11 i) Ein $U_{n,1}$-Modul G_{m-1} heißt generisch bzgl. $U_{n,1}$, wenn für $p = 2$ und für Mengen $J_p = \{j_1, j_2\}$ mit $m = j_1 < j_2 \leq m+n$ für alle Elemente $1 - \gamma_{m,j} \in \mathbf{Z}U_{n,1}$, $j = j_2$, gilt: $\exists \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-1})$.
ii) Ein $U_{n,2}$-Modul G_{m-2} heißt generisch bzgl. $U_{n,2}$, wenn für $2 \leq p \leq 3$ und für Mengen $J_p = \{j_1, j_2, j_3\}$ mit $m-1 \leq j_1 < j_2 \leq m < j_3 \leq m+n$ für alle Elemente $1 - \gamma_{J_p} \in \mathbf{Z}U_{n,2}$, $\gamma_{J_p} = \gamma_{m-1,j}, \gamma_{m,j}, \gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,j}\gamma_{m,j}$, $j = j_3$ gilt: $\exists \left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{J_p})\right]^{-1} \in \mathrm{End}(G_{m-2})$.

Im Falle $G = \mathbf{C}$ erhält man folgendes, vgl. [10], Bemerkung 6.14:

Beispiel 4.2.12 Der $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Modul $G = \mathbf{C}$, gegeben durch die Multiplikationsabbildung:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{C} \times \mathbf{Z}U_{n,m} & \to & \mathbf{C} \\ (1, \gamma_{i,j}) & \to & e^{2\pi i \lambda_{i,j}} \cdot 1, \qquad \gamma_{i,j} \in U_{n,m} \end{array}$$

ist generisch, wenn für alle J_p mit $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p-1} \leq m < j_p \leq m+n$, wobei $2 \leq p \leq m+1$ ist, gilt:

$$\lambda_{J_p} = \sum_{1 \leq k < l \leq p} \lambda_{j_k, j_l} \notin \mathbf{Z}$$

Mit der Definition der Generizität folgt:

Lemma 4.2.13 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. G_{m-r} *ist ein generischer* $U_{n,r}$*-Modul.*

2. G_{m-r} *ist ein generischer* $U_{n+r-1,1}$*-Modul und der Komplex* $G_{m-r} \otimes C(\tilde{X}_{n+r-1,1})$ *ein generischer* $U_{n,r-1}$*-Modul.*

Beweis. Die Generizität von G_{m-r} bzgl. $U_{n+r-1,1}$ folgt aus der Generizität bzgl. aller Elemente γ_{J_p} mit $p = 2$, $J_p = \{j_1, j_2\}$, $j_1 = m - r + 1$, $j_2 = m + 1, \ldots, m + n$, d.h. der Generatoren von $U_{n+r-1,1}$. Generizität von $G_{m-r} \otimes C(\tilde{X}_{n+r-1,1})$ bedeutet, daß für $1 \leq p \leq r$ und für Mengen $J_p = \{j_1, j_2, \ldots, j_{p-1}, j_p\}$ mit $m - r + 2 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_{p-1} \leq m < j_p \leq m + n$ der Komplex $G_{m-r} \otimes C(\tilde{X}_{n+r-1,1})$ bzgl. aller Elemente $\gamma_{J_p} \in U_{n,r-1}$ generisch ist. Dafür ist notwendig, daß G_{m-r} generisch bzgl. aller $\gamma_{J_p} \in U_{n,r-1}$ und aller $\gamma_{J_p}\gamma_{m-r+1,j_1} \cdots \gamma_{m-r+1,j_p} \in U_{n,r}$, d.h. insgesamt generisch bzgl. aller $\gamma_{J'_{p+1}} \in U_{n,r}$, wobei $1 \leq p \leq r$ und J'_{p+1} die Menge $J'_{p+1} = \{j'_1, j'_2, \ldots, j'_{p+1}\}$ mit $j'_1 = m + r - 1 < j'_2 = j_1 < \ldots, j'_p = j_{p-1} < m < j'_{p+1} \leq m + n$ ist. □

Trivialität des Koeffizientenmoduls

Anstelle generischer Koeffizientenmoduln G_0 können auch triviale Koeffizientenmoduln betrachtet werden.

Definition 4.2.14 (Trivialität (2)) Ein $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Modul G_0 heißt *trivial* bzgl. $U_{n,m}$, wenn für alle $\gamma \in \Gamma = \{\gamma_{k,j_k}; j_k = k + 1, \ldots, m + n; k = 1, \ldots, m\} \subset U_{n,m}$ gilt:

$$\Phi_g^{(m-2)}(\gamma)(g) = g, \qquad g \in G_{m-2}$$

bzw. wenn gilt: $(1 - \gamma) \in \mathrm{Kern}(\Phi_g^{(m-2)})$.

Mit der Definition der Trivialität folgt unmittelbar:

Lemma 4.2.15 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *G_{m-r} ist ein trivialer $U_{n,r}$-Modul.*
2. *G_{m-r} ist ein trivialer $U_{n+r-1,1}$-Modul und der Komplex $G_{m-r} \otimes C(\tilde{X}_{n+r-1,1})$ ein trivialer $U_{n,r-1}$-Modul.*

4.2.3 Homologie des äquivarianten Komplexes

Homologie des Komplexes mit generischem Koeffizientenmodul

Ist also der Koeffizientenmodul G_0 in $\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ generisch bzgl. $U_{n,m}$, so sind m-Ketten wohldefiniert, die für jedes $l = 1, \ldots, m$ Endomorphismen $\left[\Phi_g^{(l-1)}(1 - \gamma_{l,j_l})\right]^{-1}$ von $G_{l-1} = \left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-l+1,1})$ enthalten, die sich gegen die unter den Randhomomorphismen auftretenden Endomorphismen aufheben, m-Ketten der Gestalt:

$$\left[\Phi_g^{(m-1)}(1 - \gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \left(\ldots \left[\Phi_g^{(1)}(1 - \gamma_{2,j_2})\right]^{-1} \left(\left[\Phi_g^{(0)}(1 - \gamma_{1,j_1})\right]^{-1} (g) \otimes \tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)}\right) \otimes \tilde{\gamma}_{2,j_2}^{(2)} \ldots\right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)}$$

Wiederum zur Abkürzung und zur Vereinfachung der Rechnungen ersetzen wir im Falle eines generischen $U_{n,m}$-Moduls G_0 den Komplex $\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ durch einen isomorphen Komplex mit einfachen Randhomomorphismen.

Definition 4.2.16 Für $r = 1, \ldots, m$ sei $K^{(r)}$ der 1-dimensionale formale Kettenkomplex, definiert als freier Linksmodul zu $\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}$ mit den Kettengruppen $K_0^{(r)}$, erzeugt von $\tilde{z}_r$, und $K_1^{(r)}$, erzeugt von der Menge $\{e_j^{(r)}; j = r+1, \ldots, m+n\}$, und mit Randhomomorphismen $\partial_{(q)}^{(r)} : K_q^{(r)} \to K_{q-1}^{(r)}$, $q = 0, 1$, definiert durch:

$$\begin{aligned} \partial_{(0)}(\tilde{z}_r) &= 0 \\ \partial_{(1)}(e_j^{(r)}) &= \tilde{z}_r, \qquad j = r+1, \ldots, m+n \end{aligned}$$

Und es sei $(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}$ mit generischem $U_{n,m}$-Modul G_0 der m-dimensionale formale äquivariante Komplex mit Ketten:

$$\begin{aligned} & (g \otimes k_{p_1}^{(1)}) \otimes \ldots \otimes k_{p_m}^{(m)} \in \\ \in \;& \left[(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}\right]_q = \\ = \;& \bigoplus_{\sum_{i=1,\ldots,m} p_i = q} (G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K_{p_1}^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K_{p_m}^{(m)} \end{aligned}$$

und Randhomomorphismen:

$$\begin{aligned} \partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} : & \left[(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}\right]_q \to \\ \to \; & \left[(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)}\right]_{q-1} \end{aligned}$$

definiert durch:

$$\begin{aligned} & \partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} \left(\left(g \otimes k_{p_1}^{(1)} \right) \otimes \ldots \otimes k_{p_m}^{(m)} \right) = \\ = \; & \sum_{l=1}^{m} (-1)^{\sum_{k=1}^{l-1} p_k} \left(\left(g \otimes k_{p_1}^{(1)} \right) \otimes \ldots \otimes (\partial_{(p_l)}^{(l)} k_{p_l}^{(l)}) \right) \otimes \ldots \otimes k_{p_m}^{(m)} \end{aligned}$$

Lemma 4.2.17 *Für einen generischen $U_{n,m}$-Modul G_0 gibt es einen Isomorphismus von Kettenkomplexen:*

$$\begin{aligned} & (G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1}) \cong \\ \cong \; & (G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} K^{(1)}) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} K^{(m)} \end{aligned}$$

der für m-Ketten definiert ist durch:

$$\begin{aligned} & \mu \left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1 - \gamma_{m,j_m}) \right]^{-1} \left(\ldots \left(\left[\Phi_g^{(0)}(1 - \gamma_{1,j_1}) \right]^{-1} (g) \otimes \tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)} \right) \otimes \ldots \right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)} \right) = \\ = \; & \left(\left(g^{(0)} \otimes e_{j_1}^{(1)} \right) \otimes e_{j_2}^{(2)} \right) \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} \end{aligned}$$

und für q-Ketten, $q < m$, entsprechend.

Beweis. Betrachtet man den Komplex $(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$, so gilt für alle $g^{(0)} \in G_0$ die Randformel:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)} \left(\left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \left(\ldots \left(\left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1})\right]^{-1} (g) \otimes \tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)} \right) \otimes \ldots \right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)} \right) = \\
&= \left[\Phi_g^{(m-1)}(1-\gamma_{m,j_m})\right]^{-1} \left(\ldots \left[\Phi_g^{(1)}(1-\gamma_{2,j_2})\right]^{-1} (g \otimes \tilde{z}_1) \otimes \tilde{\gamma}_{2,j_2}^{(2)} \ldots \right) \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)} + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad +(-1)^{m-1} \left(\left[\Phi_g^{(m-2)}(1-\gamma_{m-1,j_{m-1}})\right]^{-1} \left(\ldots \left(\left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,j_1})\right]^{-1} (g) \otimes \tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)} \right) \otimes \ldots \right) \otimes \right. \\
&\quad \left. \otimes\ \tilde{\gamma}_{m-1,j_{m-1}}^{(m-1)} \right) \otimes \tilde{z}_m
\end{aligned}$$

Zum Beweis der Formel verwende man die Definition des Randhomomorphismus und die Tatsache, daß alle Endomorphismen $\left[\Phi_g^{(r-1)}(1-\gamma_{r,j_r})\right]^{-1}$, $r = 2, \ldots, m$, von $G_{r-1} = (G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r+1,1})$ Kettenabbildungen sind.
Betrachtet man andererseits den Komplex $(G_0 \otimes K^{(1)}) \otimes \ldots \otimes K^{(m)}$, so gilt die einfache Randformel:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)} \left(\left(\left(g \otimes e_{j_1}^{(1)} \right) \otimes e_{j_2}^{(2)} \right) \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} \right) = \\
&= \left((g \otimes \tilde{z}_1) \otimes e_{j_2}^{(2)} \right) \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad +(-1)^{m-1} \left(\left(g \otimes e_{j_1}^{(1)} \right) \otimes e_{j_2}^{(2)} \right) \otimes \ldots \otimes \tilde{z}_m
\end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich: $\mu\, \partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)} = \partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)}\, \mu$.
Daß ebenso für alle $q < m$ gilt: $\mu\, \partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)} = \partial_{(q)}^{(1,\ldots,m)}\, \mu$, kann man entsprechend zeigen. □

Wir werden im weiteren also im Falle eines generischen Koeffizientenmoduls den Komplex $\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ mit dem formalen Komplex identifizieren und wegen der einfachen Randhomomorphismen in Rechnungen dessen formale Ketten verwenden. Wir wiederholen noch einmal die einfache Randformel für diese formalen m-Ketten, wobei wir die Klammern vernachlässigen:

Lemma 4.2.18 (Randformel) *Es gilt für alle $g \in G_0$, G_0 generisch bzgl. $U_{n,m}$:*

$$\begin{aligned}
&\partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)} \left(g \otimes e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \left(g \otimes e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_{k-1}}^{(k-1)} \otimes \tilde{z}_k \otimes e_{j_{k+1}}^{(k+1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} \right)
\end{aligned}$$

m-Zyklen setzen sich auf einfache Weise aus solchen m-Ketten zusammen:

Lemma 4.2.19 (m-Zyklen) *Abkürzend sei: $e_{j_r,k_r}^{(r)} = e_{j_r}^{(r)} - e_{k_r}^{(r)}$, $r = 1, \ldots, m$. Es gilt:*

$$\partial_{(m)}^{(1,\ldots,m)} \left(g \otimes e_{j_1,k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m,k_m}^{(m)} \right) = 0$$

Satz 4.2.20 (Homologie (1)) *Für einen generischen $U_{n,m}$-Rechtsmodul G_0 gilt:*

$$H_m\left(\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \quad \cong \quad (G_0)^{(n-1)_m}$$

Beweis. Jedes Element von $\left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m$ hat eine eindeutige Darstellung der Form:

$$\sum_{\substack{j_k=1,\ldots,n+m-k \\ k=1,\ldots,m}} g_{j_1,\ldots,j_m} \otimes e^{(1)}_{1+j_1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m}, \qquad g_{j_1,\ldots,j_m} \in G_0$$

Hierbei wurden der Einfachheit halber die Klammern vernachlässigt.
Der Rand einer solchen m-Kette ist:

$$\partial^{(1,\ldots,m)}_{(m)}\left(\sum_{\substack{j_k=1,\ldots,n+m-k \\ k=1,\ldots,m}} g_{j_1,\ldots,j_m} \otimes e^{(1)}_{1+j_1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m}\right) =$$

$$= \sum_{l=1,\ldots,m} \sum_{\substack{j_k=1,\ldots,n+m-k \\ k=1,\ldots,m}} g_{j_1,\ldots,j_m} \otimes e^{(1)}_{1+j_1} \otimes \ldots \otimes e^{(l-1)}_{l-1+j_{l-1}} \otimes \tilde{z}_l \otimes e^{(l+1)}_{l+1+j_{l+1}} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m}$$

Eine m-Kette ist also ein m-Zyklus, wenn gleichzeitig die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\sum_{j_{m-k+1}=1}^{n+k-1} g_{j_1,\ldots,j_{m-1},j_m} \quad = \quad 0, \qquad \forall k = 1,\ldots,m, \quad \forall j_{m-l+1} = 1,\ldots,n+l-1;\ l \neq k$$

Im folgenden wird durch vollständige Induktion nach r, $1 < r < m$, gezeigt, daß jedes Element von $H_m\left((G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ eine eindeutige Darstellung der folgenden Form hat:

$$\sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\ldots,n+k-2 \\ k=1,\ldots,m}} h_{i_1,\ldots,i_m} \otimes e^{(1)}_{1+i_1,1+i_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+i_m,m+i_m+1}$$

wobei die $(n-1)_m$ Koeffizienten $h_{i_1,\ldots,i_m} \in G_0$ bestimmt sind durch:

$$h_{i_1,\ldots,i_m} \quad = \quad \sum_{\substack{j_{m-k+1}=1,\ldots,i_{m-k+1} \\ k=1,\ldots,m}} g_{j_1,\ldots,j_m}$$

Induktionsanfang: Für $r = 1$ wurde die Behauptung in Kapitel 2, für $r = 2$ in Kapitel 3 gezeigt.

Induktionsannahme: Für ein $1 < r < m$ sei folgendes homogenes System von $\Xi^{(n,r)}_{r-1}$ Gleichungen für die $(n)_r$ Elemente $g_{i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m} \in G$ mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$ gegeben:

$$\sum_{i_{m-k+1}=1}^{n+k-1} g_{i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m} \quad = \quad 0, \qquad k = 1,\ldots,r$$

$$i_{m-l+1} = 1,\ldots,n+l-1;\ l \neq k$$

Der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix über $\mathbf{Z}$ ist $r\,(n)_{r-1}$. Es ist möglich, die $r\,(n)_{r-1}$ Elemente $g_{j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m}$, wobei $j_{m-k+1} = n+k-1$ für mindestens ein $k \in \{1,\dots,r\}$ ist, mit Hilfe der übrigen $(n-1)_r$ Elemente $g_{i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m}$, $i_{m-k+1} = 1,\dots,n+k-2$, $k = 1,\dots,r$, auszudrücken.
Es sei $(j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m)$ ein r-Tupel von Indizes, wobei für l, $1 \le l \le r$, Indizes j_{m-k_s+1}, $s = 1,\dots,l$, $k_s \in \{1,\dots,r\}$, gilt: $j_{m-k_s+1} = n+k_s-1$, und wobei für die übrigen Indizes j_{m-k+1}, $k \in \{1,\dots,r\}$, $k \neq k_s$, gilt: $j_{m-k+1} < n+k-1$. Und es sei $(i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m)$ ein r-Tupel von Indizes mit $i_{m-k+1} \in 1,\dots,n+k-2$, $k = 1,\dots,r$. Dann gilt:

$$g_{j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} = (-1)^l \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\dots,n+k_s-2\\ s=1,\dots,l}} g_{i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m}$$

Ein r-Zyklus hat die folgende Darstellung:

$$\sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-1\\ k=1,\dots,r}} g_{i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} \otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1}} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m} =$$

$$= \sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-2\\ k=1,\dots,r}} \left(\sum_{\substack{j_{m-k+1}=1,\dots,i_{m-k+1}\\ k=1,\dots,r}} g_{j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} \right) \otimes$$
$$\otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1},m-r+1+i_{m-r+1}+1} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m,m+i_m+1}$$

Induktionsschluß: Man hat folgendes homogenes System von $\Xi_r^{(n,r+1)}$ Gleichungen für die $(n)_{r+1}$ Elemente $g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} \in G$ mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$:

$$\sum_{i_{m-k+1}=1}^{n+k-1} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} = 0, \qquad k = 1,\dots,r+1$$
$$i_{m-l+1} = 1,\dots,n+l-1;\ l \neq k$$

Es ist zu zeigen, daß der Rang der zugehörigen Koeffizientenmatrix über $\mathbf{Z}$ gleich $(r+1)(n)_r$ ist und daß die $(r+1)(n)_r$ Elemente $g_{j_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m}$, wobei $j_{m-k+1} = n+k-1$ für mindestens ein $k \in \{1,\dots,r+1\}$ ist, mit Hilfe der übrigen $(n-1)_{r+1}$ Elemente $g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m}$, $i_{m-k+1} = 1,\dots,n+k-2$, $k = 1,\dots,r+1$, ausgedrückt werden können.

i): Man betrachte zunächst die $(n+r)\,\Xi_{r-1}^{(n,r)}$ Gleichungen:

$$\sum_{i_{m-k+1}=1}^{n+k-1} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} = 0, \qquad k = 1,\dots,r$$
$$\forall i_{m-l+1} = 1,\dots,n+l-1;\ l \neq k$$

Hiermit hat man zu jedem $i_{m-r} = 1,\dots,n+r$ ein System von $\Xi_{r-1}^{(n,r)}$ Gleichungen, das gemäß Induktionsannahme erlaubt, die $r\,(n)_{r-1}$ Elemente $g_{j_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m}$, wobei $j_{m-k+1} = n+k-1$

für mindestens ein $k \in \{1,\ldots,r\}$ ist, mit Hilfe der übrigen $(n-1)_r$ Elemente $g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m}$, $i_{m-k+1}=1,\ldots,n+k-2$, $k=1,\ldots,r$, auszudrücken.
Es seien wie in der Induktionsannahme $j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m$ Indizes, von denen für l, $1\le l\le r$, Indizes j_{m-k_s+1}, $s=1,\ldots,l$, $k_s\in\{1,\ldots,r\}$, gilt: $j_{m-k_s+1}=n+k_s-1$, und für die übrigen Indizes j_{m-k+1}, $k\in\{1,\ldots,r\}$, $k\ne k_s$: $j_{m-k+1}<n+k-1$, und es seien $i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m$ Indizes mit $i_{m-k+1}\in 1,\ldots,n+k-2$, $k=1,\ldots,r$.

i.i) Für $i_{m-r}=1,\ldots,n+r-1$ hat man $(n+r-1)\,\Xi^{(n,r)}_{r-1}$ Gleichungen, darunter $(n+r-1)\,r\,(n)_{r-1}$ unabhängige:

$$g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m} = (-1)^l \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\ldots,n+k_s-2\\ s=1,\ldots,l}} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m}$$

i.ii) Für $i_{m-r}=n+r$ hat man $\Xi^{(n,r)}_{r-1}$ Gleichungen, darunter $r\,(n)_{r-1}$ unabhängige:

$$g_{n+r,j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m} = (-1)^l \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\ldots,n+k_s-2\\ s=1,\ldots,l}} g_{n+r,i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m}$$

ii) Weiter betrachte man die $(n)_r$ Gleichungen:

$$\sum_{i_{m-r}=1}^{n+r} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m} = 0, \qquad \forall i_{m-k+1}=1,\ldots,n+k-1$$
$$k=1,\ldots,r$$

ii.i) Für $i_{m-k+1}\ne n+k-1$, $k=1,\ldots,r$, hat man $(n-1)_r$ unabhängige Gleichungen:

$$g_{n+r,i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m} = (-1)\sum_{i_{m-r}=1}^{n+r-1} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m}$$
$$\forall i_{m-k+1}=1,\ldots,n+k-2 \quad k=1,\ldots,r$$

ii.ii) Für Indizes $j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m$, von denen l, $1\le l\le r$, Indizes j_{m-k_s+1}, $s=1,\ldots,l$, $k_s\in\{1,\ldots,r\}$, den höchsten Wert annehmen: $j_{m-k_s+1}=n+k_s-1$, während die übrigen Indizes $j_{m-k+1}<n+k-1$ sind, $k\in\{1,\ldots,r\}$, $k\ne k_s$, hat man wiederum $r\,(n)_{r-1}$ unabhängige Gleichungen:

$$g_{n+r,j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m} = (-1)\sum_{i_{m-r}=1,\ldots,n+r-1} g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m}$$

iii) Man hat also aus *i.i*) die gewünschten Ausdrücke für die $(n+r-1)\,r\,(n)_{r-1}$ Elemente $g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m}$ und aus *ii.i*) die für die $(n-1)_r$ Elemente $g_{n+r,i_{m-r+1},\ldots,i_{m-1},i_m}$. Die gewünschten Ausdrücke für die $r\,(n)_{r-1}$ Elemente $g_{n+r,j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m}$ erhält man einerseits aus *ii.ii*) mit den Gleichungen von *i.i*):

$$g_{n+r,j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m} = (-1)\sum_{i_{m-r}=1}^{n+r-1} g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\ldots,j_{m-1},j_m} =$$

$$= (-1)^{l+1} \sum_{i_{m-r}=1}^{n+r-1} \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\dots,n+k_s-2\\ s=1,\dots,l}} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m}$$

andererseits aus $i.ii$) mit den Gleichungen von $ii.i$):

$$\begin{aligned} g_{n+r,j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} &= (-1)^l \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\dots,n+k_s-2\\ s=1,\dots,l}} g_{n+r,i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} = \\ &= (-1)^{l+1} \sum_{\substack{i_{m-k_s+1}=1,\dots,n+k_s-2\\ s=1,\dots,l}} \sum_{i_{m-r}=1}^{n+r-1} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} \end{aligned}$$

Damit ist der Rang der Koeffizientenmatrix des homogenen Systems von $\Xi_r^{(n,r+1)}$ Gleichungen für die $(n)_{r+1}$ Elemente $g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} \in G$ mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}$ gleich:

$$(n+r-1)\, r\, (n)_{r-1} + (n-1)_r + r\, (n)_{r-1} = (r+1)(n+r-1)n_{r-1} = (r+1)(n)_r$$

und man hat die Ausdrücke der $(r+1)(n)_r$ Elemente $g_{j_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m}$, wobei $j_{m-k+1} = n+k-1$ für mindestens ein $k \in \{1,\dots,r+1\}$ ist, mit Hilfe der übrigen $(n-1)_{r+1}$ Elemente $g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m}$, $i_{m-k+1} = 1,\dots,n+k-2$, $k = 1,\dots,r+1$.

iv) Ein $r+1$-Zyklus hat damit die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-1\\ k=1,\dots,r+1}} g_{i_{m-r},i_{m-r+1},\dots,i_{m-1},i_m} \otimes e^{(m-r)}_{m-r+i_{m-r+1}} \otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1}} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m} = \\ &= \sum_{i_{m-r}=1}^{n+r} \sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-2\\ k=1,\dots,r}} \left(\sum_{\substack{j_{m-k+1}=1,\dots,i_{m-k+1}\\ k=1,\dots,r}} g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} \right) \otimes \\ &\quad \otimes e^{(m-r)}_{m-r+i_{m-r+1}} \otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1},m-r+1+i_{m-r+1}+1} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m,m+i_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-2\\ k=1,\dots,r+1}} \left(\sum_{\substack{j_{m-k+1}=1,\dots,i_{m-k+1}\\ k=1,\dots,r}} g_{i_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} \right) \otimes \\ &\quad \otimes (e^{(m-r)}_{m-r+i_{m-r}} - e^{(m-r)}_{m+n}) \otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1},m-r+1+i_{m-r+1}+1} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m,m+i_m+1} = \\ &= \sum_{\substack{i_{m-k+1}=1,\dots,n+k-2\\ k=1,\dots,r+1}} \left(\sum_{\substack{j_{m-k+1}=1,\dots,i_{m-k+1}\\ k=1,\dots,r+1}} g_{j_{m-r},j_{m-r+1},\dots,j_{m-1},j_m} \right) \otimes \\ &\quad \otimes e^{(m-r)}_{m-r+i_{m-r},m-r+i_{m-r}+1} \otimes e^{(m-r+1)}_{m-r+1+i_{m-r+1},m-r+1+i_{m-r+1}+1} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+i_m,m+i_m+1} \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Es bleibt, die übrigen Homologiegruppen zu bestimmen.

Satz 4.2.21 (Homologie (2)) *Für einen generischen $U_{n,m}$-Rechtsmodul G_0 gilt:*

$$H_q\left(\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \cong 0, \qquad q < m$$

Beweis. Wir zeigen explizit, daß für $q < m$ jeder Zyklus Rand einer Kette ist. Zu diesem Zweck definieren wir Homomorphismen

$$\begin{aligned} D_{(q)} : & \left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \rightarrow \\ \rightarrow & \left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_{q+1} \end{aligned}$$

mit der folgenden Eigenschaft:

$$\begin{aligned} D_{(q-1)}\partial_{(q)}c_q + \partial_{(q+1)}D_{(q)}c_q &= c_q \\ c_q &\in \left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_q \end{aligned}$$

Ist nun c_q ein Zyklus, so ist $D_{(q)}c_q$ eine Kette mit Rand c_q. Die Bestimmung solcher Homomorphismen ist eine bekannte Methode, das Verschwinden von Homologiegruppen zu beweisen, vgl. [15], Kap. 12.
Es sei der Homomorphismus $D_{(q)}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} & D_{(q)}\left(g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\ &= g \otimes e^{(1)}_{m+n} \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} \\ & D_{(q)}\left(g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes e^{(2)}_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\ &= g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes (e^{(2)}_{j_1} - e^{(2)}_{j_2}) \otimes \ldots \otimes (e^{(p)}_{j_{p-1}} - e^{(p)}_{j_p}) \otimes e^{(p+1)}_{j_p} \otimes \\ & \quad \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} \end{aligned}$$

wobei die formalen Faktoren $c^{(k)} \in \{e^{(k)}_{j_k}, \tilde{z}_k\}$, $k = p+2, \ldots, m$, und für genau $q-p$ der $m-p-1$ Indizes k gilt: $c^{(k)} = e^{(k)}_{j_k}$.
Im Falle $p = 0$ hat man nun:

$$\begin{aligned} & \partial_{(q+1)}D_{(q)}\left(g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\ &= \partial_{(q+1)}\left(g \otimes e^{(1)}_{m+n} \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\ &= g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} - g \otimes e^{(1)}_{m+n} \otimes \partial_{(q)}\left(c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) \\ & D_{(q-1)}\partial_{(q)}\left(g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\ &= D_{(q-1)}\left(g \otimes \tilde{z}_1 \otimes \partial_{(q)}(c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)})\right) = \\ &= g \otimes e^{(1)}_{m+n} \otimes \partial_{(q)}\left(c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) \end{aligned}$$

und es folgt unmittelbar:

$$(\partial_{(q+1)}D_{(q)} + D_{(q-1)}\partial_{(q)})\left(g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) \quad = \quad g \otimes \tilde{z}_1 \otimes c^{(2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}$$

Im Falle $p \neq 0$ hat man:

$$\begin{aligned}
&\partial_{(q+1)}D_{(q)}\left(g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes e^{(2)}_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\
&= \partial_{(q+1)}\left(g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (e^{(p)}_{j_{p-1}} - e^{(p)}_{j_p}) \otimes e^{(p+1)}_{j_p} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\
&= (-1)^p g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (e^{(p)}_{j_{p-1}} - e^{(p)}_{j_p}) \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} + \\
&\quad +(-1)^{p+1} g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (e^{(p)}_{j_{p-1}} - e^{(p)}_{j_p}) \otimes \\
&\quad \otimes e^{(p+1)}_{j_p} \otimes \partial_{(q-p)}\left(c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right)
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
&D_{(q-1)}\partial_{(q)}\left(g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes e^{(2)}_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right) = \\
&= D_{(q-1)} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{(i-1)}_{j_{i-1}} \otimes \tilde{z}_i \otimes e^{(i+1)}_{j_{i+1}} \otimes \ldots \otimes \\
&\quad \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} + \\
&\quad + D_{(q-1)}\left((-1)^p g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes e^{(2)}_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes \partial_{(q-p)}\left(c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right)\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (e^{(i)}_{j_{i-1}} - e^{(i)}_{j_i}) \otimes e^{(i+1)}_{j_i} \otimes \\
&\quad \otimes e^{(i+2)}_{j_{i+2}} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} \otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)} + \\
&\quad +(-1)^p g \otimes (e^{(1)}_{m+n} - e^{(1)}_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (e^{(p)}_{j_{p-1}} - e^{(p)}_{j_p}) \otimes \\
&\quad \otimes e^{(p+1)}_{j_p} \otimes \partial_{(q-p)}\left(c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}\right)
\end{aligned}$$

und es folgt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned}
(\partial_{(q+1)}D_{(q)} + D_{(q-1)}\partial_{(q)})(c_q) &= c_q \\
c_q \quad = \quad g \otimes e^{(1)}_{j_1} \otimes e^{(2)}_{j_2} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{j_p} &\otimes \tilde{z}_{p+1} \otimes c^{(p+2)} \otimes \ldots \otimes c^{(m)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Die Homologiegruppen sind im folgenden Sinne rekursiv bestimmt.

Lemma 4.2.22 (Homologieschachtelung) *Für einen generischen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt für alle p, $1 < p < m$:*

$$H_q\left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) \cong$$

$$\begin{aligned}\cong \quad & \bigoplus_{r+s=q} H_r \left(\left(H_s \left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+p,1}) \right) \otimes \right.\right. \\ & \left.\left. \otimes C(\tilde{X}_{n+p-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right)\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage ist nur im Falle $q = m$, $r = p$ und $s = m - p$ nichttrivial. Oben wurde gezeigt, daß für G_{m-p} generisch bzgl. $U_{n,p}$ gilt:

$$H_p \left(\left(G_{m-p} \otimes C(\tilde{X}_{n+p-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right) \quad \cong \quad (G_{m-p})^{(n-1)_p}$$

durch:

$$\begin{aligned}& \sum_{j \in J} h_j^{(m-p)} \otimes e^{(m-p+1)}_{m-p+1+j_{m-p+1}, m-p+1+j_{m-p+1}+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m, m+j_m+1} \rightarrow \\ \rightarrow \quad & (h_j^{(m-p)})_{j \in J} \in (G_{m-p})^{(n-1)_p}\end{aligned}$$

wobei J die Menge aller p-Tupel von Indizes $(j_{m-p+1}, \ldots, j_m)$ mit $j_k = 1, \ldots, n + m - 1 - k$, $k = m - p + 1, \ldots, m$, bezeichnet. Entsprechend gilt, daß für G_0 generisch bzgl. $U_{n+p,m-p}$ gilt:

$$H_{m-p} \left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+p,1}) \right) \quad \cong \quad (G_0)^{(n+p)_{m-p}}$$

durch:

$$\sum_{i \in I} h_i^{(0)} \cdot e^{(1)}_{1+j_1, 1+j_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m-p)}_{m-p+j_{m-p}, m-p+j_{m-p}+1} \quad \rightarrow \quad (h_i^{(0)})_{i \in I} \in (G_0)^{(n+p-1)_{m-p}}$$

wobei I die Menge aller $(m - p)$-Tupel von Indizes $(i_1, \ldots, i_{m-p})$ mit $i_k = 1, \ldots, n + m - 1 - k$, $k = 1, \ldots, m - p$, bezeichnet. Wählt man nun:

$$G_{m-p} \quad = \quad H_{m-p} \left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+p,1}) \right)$$

und:

$$h_j^{(m-p)} \quad = \quad \sum_{i \in I} h_{i,j}^{(0)} \otimes e^{(1)}_{1+i_1, 1+i_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m-p)}_{m-p+i_{m-p}, m-p+i_{m-p}+1}$$

so folgt:

$$\begin{aligned}& H_p \left(\left(H_{m-p} \left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+p,1}) \right) \otimes \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. \otimes C(\tilde{X}_{n+p-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1}) \right) \cong \\ \cong \quad & \left(H_{m-p} \left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+p,1}) \right) \right)^{(n-1)_p} \cong \\ \cong \quad & (G_0^{(n+p-1)_{m-p}})^{(n-1)_p} = (G_0)^{(n-1)_m}\end{aligned}$$

durch:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J} h_j^{(m-p)} \otimes e^{(m-p+1)}_{m-p+1+j_{m-p+1},m-p+1+j_{m-p+1}+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m,m+j_m+1} \to \\
&\to \left(\sum_{i\in I} h^{(0)}_{i,j} \otimes e^{(1)}_{1+j_1,1+j_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m-p)}_{m-p+j_{m-p},m-p+j_{m-p}+1} \right)_{j\in J} \to \\
&\to (h^{(0)}_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \in (G_0)^{(n-1)_m}
\end{aligned}$$

und man hat das gewünschte Ergebnis. □

Homologie des Komplexes mit trivialem Koeffizientenmodul

Im Falle eines trivialen $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Moduls G_0 erhält man aus der äquivarianten Homologie wieder die gewöhnliche Homologie:

Lemma 4.2.23 *Ist G_0 trivialer $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Modul, so gilt:*

$$\begin{aligned}
&H\left(\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(\tilde{X}_{n,1})\right) \cong \\
&\cong \; H\left((G_0 \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n+m-1,1})) \otimes_{\mathbf{Z}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}} C(X_{n,1})\right)
\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage folgt, da G_0 trivialer $U_{n+m-1,1}$-Modul ist und für alle $r = 1, \ldots, m-1$ der Komplex $G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1})$ ein trivialer $U_{n+m-r-1,1}$-Modul. □

Satz 4.2.24 *Für einen trivialen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt:*

$$H_q\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right) \quad \cong \quad (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}}$$

Beweis. Im Falle eines trivialen $U_{n,m}$-Modul G_0 sind alle Ketten des Komplexes Zyklen, d.h. es gilt für $q = 1, \ldots, m$:

$$H_q\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right) \quad = \quad \left[(G_0 \otimes C(X_{n+n-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right]_q$$

Mit Lemma 4.2.4 folgt die Behauptung. □

Lemma 4.2.25 (Homologieschachtelung) *Für einen trivialen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt für jedes p, $1 < p < m$:*

$$\begin{aligned}
&H_q\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right) \cong \\
&\cong \bigoplus_{r+s=q} H_r\left(H_s\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n+p,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right)
\end{aligned}$$

Beweis. Als trivialer $U_{n,m}$-Modul ist G_0 trivial bzgl. $U_{n+p,m-p}$, so daß gilt:

$$H_s\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n+p,1})\right) \quad \cong \quad (G_0)^{\Xi_s^{(n+p,m-p)}}, \qquad s = 0, \ldots, m-p$$

Für einen trivialen $U_{n,m}$-Modul G_0 liefert der Komplex $(G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n+p,1})$ und insbesondere einen trivialen Modul bzgl. $U_{n,p}$, und für einen trivialen $U_{n,p}$-Modul G_{m-p} gilt:

$$H_r\left((G_{m-p} \otimes C(X_{n+p-1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right) \quad \cong \quad (G_{m-p})^{\Xi_r^{(n,p)}}, \qquad r = 0, \ldots, p$$

Setzt man also $G_{m-p} = H_s\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n+p,1})\right)$, $s = 0, \ldots, m-p$, so folgt mit Lemma 4.1.4:

$$\begin{aligned} & \bigoplus_{r+s=q} H_r\left(H_s\left((G_0 \otimes C(X_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(X_{n+p,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(X_{n,1})\right) \cong \\ \cong \quad & \bigoplus_{r+s=q} (G_0)^{\Xi_r^{(n,p)} \Xi_s^{(n+p,m-p)}} \cong (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}} \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. □

Homologie des Komplexes mit beliebigem Koeffizientenmodul

Für eine Gruppe U bezeichne wieder $C(U)$ eine freie Auflösung von $\mathbf{Z}$ über $\mathbf{Z}U$, wobei $\mathbf{Z}$ als trivialer $\mathbf{Z}U$-Modul betrachtet wird.
Mit dieser Notation kann man angesichts von Lemma 4.2.5 die obigen Ergebnisse zur Homologie, die Sätze 4.2.20, 4.2.21 und 4.2.24, und zur Homologieschachtelung, die Sätze 4.2.22 und 4.2.25, kurz wie folgt zusammenfassen:

Korollar 4.2.26 (Homologie) *Ist G_0 ein $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Modul, so gilt:*

$$H_q\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} C(U_{n,m})\right) \cong \begin{cases} (G_0)^{\Xi_q^{(n,m)}} & G_0 \ \textit{trivial} \\ \delta_{q,m}(G_0)^{\Xi_q^{(n-1,m)}} & G_0 \ \textit{generisch} \end{cases}$$

Korollar 4.2.27 (Homologieschachtelung) *Für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt für $1 < p < m$:*

$$\begin{aligned} & H_q\left(G_0 \otimes C(U_{n,m})\right) \cong \\ \cong \quad & \bigoplus_{r+s=q} H_r\left((H_s\left((G_0 \otimes C(U_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(U_{n+p,1})\right) \otimes \right. \\ & \left. \otimes\, C(U_{n+p-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(U_{n,1})\right) \end{aligned}$$

Die Aussage zur Homologieschachtelung läßt sich auch wie folgt formulieren:

Lemma 4.2.28 (Homologieschachtelung) *Für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt für $1 < p < m$:*

$$H_q\left(G_0 \otimes C(U_{n,m})\right) \quad \cong \quad \bigoplus_{r+s=q} H_r\left(H_s\left(G_0 \otimes C(U_{n+p,m-p})\right) \otimes C(U_{n,p})\right)$$

Beweis. Die Behauptung folgt mittels Konstruktion freier Auflösungen:

$$\begin{aligned} C(U_{n+p,m-p}) &= C(U_{n+m-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(U_{n+p,1}) \\ C(U_{n,p}) &= C(U_{n+p-1,1}) \otimes \ldots \otimes C(U_{n,1}) \end{aligned}$$

von **Z** für die semidirekten Produkte:

$$\begin{aligned} U_{n+p,m-p} &= U_{n+m-1,1} \ltimes \ldots \ltimes U_{n+p,1} \\ U_{n,p} &= U_{n+p-1,1} \ltimes \ldots \ltimes U_{n,1} \end{aligned}$$

und mittels der Isomorphismen von Komplexen:

$$\begin{aligned} & G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p,m-p}} C(U_{n+p,m-p}) = \\ &= \Big(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-1,1}} C(U_{n+m-1,1})\Big) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p,1}} C(U_{n+p,1}) \\ & G_{m-p} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,p}} C(U_{n,p}) = \\ &= \Big(G_{m-p} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p-1,1}} C(U_{n+p-1,1})\Big) \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p-2,1}} \ldots \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,1}} C(U_{n,1}) \end{aligned}$$

wobei G_0 und G_{m-p} generische bzw. triviale Moduln bzgl. $U_{n,m}$ bzw. $U_{n,p}$ sind.
In $H\Big(G_{m-p} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,p}} C(U_{n,p})\Big)$ wähle man den Koeffizientenmodul:

$$G_{m-p} = H\Big(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p,m-p}} C(U_{n+p,m-p})\Big)$$

Man beachte, daß $U_{n,m} = U_{n+p,m-p} \ltimes U_{n,p}$ ist. □

Das Ergebnis zur Homologieschachtelung wird nun noch einmal formuliert, und zwar mit Bezug auf die topologischen Räume $X_{n,m}$, als deren Fundamentalgruppen die Gruppen $U_{n,m}$ definiert sind.
Dazu wird wie im vorigen Kapitel verwendet, daß zum einen für eine freie Auflösung $C(U)$ von **Z** für **Z**U, wobei **Z** als trivialer **Z**U-Modul betrachtet wird, und für einen **Z**U-Modul G durch:

$$H_q(U;G) = H_q(G \otimes_{\mathbf{Z}U} C(U))$$

die Homologiegruppen der Gruppe U mit Koeffizienten in G (bzw. die Gruppen $\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U}(\mathbf{Z}, G)$) definiert sind und daß zum anderen für einen zusammenhängenden und asphärischen Raum X mit $\pi_1(X) = U$ und einen **Z**U-Modul G gilt:

$$H_q(G \otimes_{\mathbf{Z}U} C(\tilde{X})) \cong H_q(U;G)$$

Zu diesen Zusammenhängen siehe Eilenberg [15], Abschnitt 12 und Abschnitt 28, insbesondere Satz 28.1 und auch Ossa [32], S.225-226.
In unserem Fall ist $U_{n,m} = \pi_1(X_{n,m})$, und der Konfigurationsraum $X_{n,m}$ ist zusammenhängend und nach einem Satz von Fadell und Neuwirth [16] asphärisch (und damit ein sogenannter Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(U_{n,m}, 1)$). Es gilt (wie im vorigen Kapitel für $m = 2$ ausgeführt):

Lemma 4.2.29 *Es sei $C(U_{n,m})$ eine freie Auflösung von **Z** für **Z**$U_{n,m}$, $U_{n,m} = \pi_1(X_{n,m})$, wobei **Z** als trivialer **Z**$U_{n,m}$-Modul betrachtet wird, G_0 ein **Z**$U_{n,m}$-Modul und $C(\tilde{X}_{n,m})$ ein Komplex in der universellen Überlagerung $p : \tilde{X}_{n,m} \to X_{n,m}$ von $X_{n,m}$, dann gilt:*

$$H_q(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} C(\tilde{X}_{n,m})) \cong H_q(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} C(U_{n,m}))$$

Damit folgt:

Lemma 4.2.30 (Homologieschachtelung) *Für einen $U_{n,m}$-Modul G_0 gilt für jedes p, $1 < p < m$:*

$$\begin{aligned} &H_q\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n,m})\right) \cong \\ &\cong \bigoplus_{r+s=q} H_r\left(H_s\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+p,m-p})\right) \otimes C(\tilde{X}_{n,p})\right)\end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage von Korollar 4.2.28 lautet mit Hilfe der Tor-Notation wie folgt:

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U_{n,m}}(\mathbf{Z}, G_0) = \bigoplus_{r+s=q} \mathrm{Tor}_r^{\mathbf{Z}U_{n,p}}\left(\mathbf{Z}, \mathrm{Tor}_s^{\mathbf{Z}U_{n+p,m-p}}(\mathbf{Z}, G_0)\right)$$

Anwendung des Lemma 4.2.29 für die zusammenhängenden und asphärischen Räume $X_{n,m}$, $X_{n,p}$ und $X_{n+p,m-p}$ liefert für die linke Seite:

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathbf{Z}U_{n,m}}(\mathbf{Z}, G_0) = H_q\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} C(\tilde{X}_{n,m})\right)$$

und für die rechte Seite:

$$\mathrm{Tor}_r^{\mathbf{Z}U_{n,p}}(\mathbf{Z}, G_{m-p+1}) = H_r\left(G_{m-p+1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,p}} C(\tilde{X}_{n,p})\right)$$

mit:

$$\begin{aligned} G_{m-p+1} &= \mathrm{Tor}_s^{\mathbf{Z}U_{n+p,m-p}}(\mathbf{Z}, G_0) = \\ &= H_s\left(G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+p,m-p}} C(\tilde{X}_{n+p,m-p})\right)\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung □.

Diese Aussage zur Homologieschachtelung gilt insbesondere im Fall, daß $G_0 = \mathbf{Z}$ trivialer $\mathbf{Z}U_{n,m}$-Modul ist. Mit Hilfe von Korollar 4.2.26 kann man die Betti-Zahlen und die Euler-Charakteristik von $X_{n,m}$ bestimmen.

Man setze abkürzend: $H(X; \mathbf{Z}) = H(\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} C(X))$.

Definition 4.2.31 Die *Betti-Zahlen* $b_q(X_{n,m})$ von $X_{n,m}$ sind definiert als:

$$b_q(X_{n,m}) = \mathrm{Rang}(H_q(X_{n,m}; \mathbf{Z}))$$

Die *Euler-Charakteristik* $\chi(X_{n,m})$ von $X_{n,m}$ ist definiert als:

$$\chi(X_{n,m}) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_j(X_{n,m})$$

Lemma 4.2.32 *Es gilt:*

$$\chi(X_{n,m}) = (-1)^m \Xi_m^{(n-1,m)} = (-1)^m (n-1)_m$$

Beweis. Es gilt: $b_j(X_{n,m}) = \Xi_j^{(n,m)}$, $j = 0, \ldots, m$. Mit $\sum_{j=0}^m (-1)^j \Xi_j^{(n,m)} = (-1)^m \Xi_m^{(n-1,m)}$ folgt die Behauptung. □

4.3 Iterierte lineare Darstellungen der Zopfgruppen (2)

Im folgenden wird zunächst gezeigt, wie prinzipiell Darstellungen der Zopfgruppe B_n als Gruppen von Automorphismen der Kettengruppen des m-dimensionalen äquivarianten Komplexes gewonnen werden können. Im anschließenden Beispiel wird die Darstellung der freien Gruppe $U_{2,1}$ vom Rang 2 als Gruppe von Automorphismen der Homologie eines m-dimensionalen äquivarianten Komplexes mit einem explizit gegebenen speziellen Koeffizientenmodul G_0 behandelt. Diese Gruppe kann als Monodromiegruppe höherer hypergeometrischer Integrale vom Typ ${}_nF_{n-1}$ interpretiert werden. Außerdem wird der Fall eines Koeffizientenmoduls G'_0 betrachtet, der zusätzlich ein Modul bzgl. B'_m ist, wobei $B'_m \subset B_{n+m}$ die vom Element σ_j, $j = 1, \ldots, m-1$, erzeugte Zopfgruppe ist. In diesem Fall können Darstellungen von B_n als Gruppen von Automorphismen gewisser Faktorgruppen der Kettengruppen und der Homologiegruppen mit Hilfe gewisser verallgemeinerter Multinomialkoeffizienten explizit angeben werden.

4.3.1 Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf äquivarianten m-Ketten

Man erinnere die Resultate zur äquivarianten Kettengruppe $G_{r-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}} C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})$, $1 \leq r \leq m$. Die Gruppe $C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})$ ist treuer (rechter) Darstellungsmodul bzgl. der Zopfgruppe B_{n+m-r} durch den Monomorphismus:

$$\begin{aligned} \Phi^{(r)} : B_{n+m-r} &\longrightarrow \mathrm{Aut}(C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})) \\ \Phi^{(r)}(\sigma_i)(\tilde{\gamma}^{(r)}_{r,j_r}) &= \sum_{k_r} \left(J^{(r)}(\sigma_i)\right)^{k_r}_{j_r} \tilde{\gamma}^{(r)}_{r,k_r} \end{aligned}$$

Hierbei ist $U_{n+m-r,1} = \langle \gamma_{r,i}; i = r+1, \ldots, m+n \rangle$, und $J^{(r)}(\sigma_i)$ ist die Jacobi-Matrix des Automorphismus $\sigma_i \in \mathrm{Aut}(U_{n+m-r,1})$:

$$\begin{aligned} J^{(r)}(\sigma_i) &= \mathbf{1}_{i-r-1} \oplus \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{r,i}\gamma_{r,i+1}\gamma_{r,i}^{-1} & \gamma_{r,i} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{1}_{n+r-i-1} \\ J^{(r)}(\sigma_i) &\in GL(\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}, n+m-r) \end{aligned}$$

Ist der Koeffizientenmodul G_{r-1} ein $B_{n+m-r}U_{n+m-r,1}$-(Rechts-)Modul durch einen Homomorphismus:

$$\Phi_g^{(r-1)} : B_{n+m-r}U_{n+m-r,1} \longrightarrow \mathrm{Aut}(G_{r-1})$$

so ist die äquivariante Kettengruppe $G_{r-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}} C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})$ (rechter) Darstellungsmodul bzgl. der Zopfgruppe B_{n+m-r} durch:

$$\begin{aligned} \chi^{(r-1,r)} : B_{n+m-r} &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G_{r-1} \otimes_{\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}} C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})) \cong \mathrm{Aut}((G_{r-1})^{n+m-r}) \\ \chi^{(r-1,r)}(\sigma_i)(g^{(r-1)} \otimes \tilde{\gamma}^{(r)}_{r,j_r}) &= \Phi_g^{(r-1)}(\sigma_i)(g^{(r-1)}) \otimes \Phi^{(r)}(\sigma_i)(\tilde{\gamma}^{(r)}_{r,j_r}) \end{aligned}$$

Hierbei können die Einträge der Jacobi-Matrix $J^{(r)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}, n+m-r)$ nach links kommutiert und dem Homomorphismus $\Phi_g^{(r-1)}$ unterworfen werden.

Nun ist jeder $B_{n+m-r}U_{n+m-r,1}$-(Rechts-)Modul G_{r-1} auch Modul bzgl. der Untergruppe $B_nU_{n,m-r+1} \subset B_{n+m-r}U_{n+m-r,1}$, und jede Kettengruppe $G_{r-1} \otimes C_1(\tilde{X}_{n+m-r,1})$ selbst ist als (Rechts-)Modul bzgl. B_{n+m-r} auch Modul bzgl. der Untergruppe $B_nU_{n,m-r} \subset B_{n+m-r}$.

Man betrachte nun die m-dimensionale iterierte äquivariante Kettengruppe

$$\left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m \cong (G_0)^{(n)_m}$$

wobei der Koeffizientenmodul G_0 ein $B_nU_{n,m}$-(Rechts-)Modul ist durch einen Homomorphismus:

$$\Phi_g^{(0)} : B_nU_{n,m} \to \mathrm{Aut}(G_0)$$

Die Gruppe $\left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m$ ist dann (rechter) Darstellungsmodul bzgl. der Zopfgruppe B_n durch die Abbildung:

$$\begin{aligned} \chi^{(0,1,\ldots,m)} : B_n \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{Aut}\left(\left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m\right) \cong \\ &\cong \mathrm{Aut}((G_0)^{(n)_m}) \end{aligned}$$

definiert durch:

$$\begin{aligned} &\chi^{(0,1,\ldots,m)}(\sigma_i)(g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)}) = \\ &= \Phi_g^{(0)}(\sigma_i)(g^{(0)}) \otimes \Phi^{(1)}(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{1,j_1}^{(1)}) \otimes \ldots \otimes \Phi^{(m)}(\sigma_i)(\tilde{\gamma}_{m,j_m}^{(m)}) \end{aligned}$$

Hierbei können die Einträge der Jacobi-Matrizen $J^{(r)}(\sigma_i) \in GL(\mathbf{Z}U_{n+m-r,1}, n+m-r)$, $r = 1, \ldots, m$, nach links (bzw. nach innen) kommutiert und letztlich dem Homomorphismus $\Phi_g^{(0)}$ unterworfen werden.

4.3.2 Anwendung: Monodromiegruppe höherer hypergeometrischer Integrale

In diesem Beispiel werden Darstellungen der Zopfgruppe $U_{2,1} \subset P_3$, einer freien Gruppe vom Rang 2 betrachtet, und zwar Darstellungen als Automorphismen der Homologiegruppe $H_m\left(\left(G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{3+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})\right)$, wobei $G_0^{\wp}$ spezieller 1-dimensionaler Koeffizientenmodul ist. Diese Darstellungen können als Monodromiegruppen Pochhammerscher höherer hypergeometrischer Integrale vom Typ ${}_nF_{n-1}$ interpretiert werden.

Motivation: Höhere hypergeometrische Integrale

Man betrachte die komplexe Funktion:

$$\begin{aligned} I^{(0)}(z_1, \ldots, z_{m+3}) \quad &= \quad \prod_{i=1}^{m}(z_i - z_{i+1})^{\lambda_{i,i+1}} \prod_{i=1}^{m}(z_i - z_{m+2})^{\lambda_{i,m+2}} \times \\ &\times (z_1 - z_{m+3})^{\lambda_{1,m+3}}, \qquad \lambda_{i,j} \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{aligned}$$

holomorph in der universellen Überlagerung von:

$$\mathbf{C}^{m+3} \backslash \{z_i = z_{i+1}, z_i = z_{m+2}, z_1 = z_{m+3}; i = 1, \ldots, m\}$$

mit logarithmischen Singularitäten in $z_i = z_{i+1}$, $z_i = z_{m+2}$ und $z_1 = z_{m+3}$. Es bezeichne $V^{(0)}$ den 1-dimensionalen komplexen Vektorraum, erzeugt von $I^{(0)}(z_1, \ldots, z_{m+3})$. Die Monodromieeigenschaft von $I^{(0)}(z_1, \ldots, z_{m+3})$ bestimmt einen Modul $G_0^{\wp} = V^{(0)} = \mathbf{C}$ bzgl. $P_{m+3} = \pi_1(X_{0,m+3})$ durch die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} V^{(0)} \times P_{m+3} & \rightarrow & V^{(0)} \\ (I^{(0)}, \gamma_{i,j}) & \rightarrow & I^{(0)} \cdot \gamma_{i,j} = \Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j})(I^{(0)}) = e^{2\pi i \lambda_{i,j}} I^{(0)} \end{array}$$

bzw. 1-dimensionale Darstellung der Gruppe P_{m+3} durch die Abbildung:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_g^{(0)} : P_{m+3} & \rightarrow & GL(V^{(0)}) \\ \Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j}) & = & e^{2\pi i \lambda_{i,j}}, \qquad \gamma_{i,j} \in P_{m+3} \end{array}$$

Hierbei genügen nach Voraussetzung die Exponenten $\lambda_{i,j}$ den folgenden Bedingungen:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_{i,i+1}, \lambda_{i,m+2} & \notin & \mathbf{Z}, \qquad i = 1, \ldots, m \\ \lambda_{1,m+3} & \notin & \mathbf{Z} \\ \lambda_{i,j} & = & 0 \qquad \text{sonst} \end{array}$$

Weiter betrachte man folgende (geeignet über Zyklen auszuführende) m-fache Integrale als Funktionen der 3 Veränderlichen z_j, $j = m+1, m+2, m+3$:

$$I^{(m)}(z_{m+1}, \ldots, z_{m+3}) \quad = \quad \int dz_m \int dz_{m-1} \ldots \int dz_1 \, I^{(0)}(z_1, \ldots, z_{m+3})$$

Diese Integrale wurden von Pochhammer [34] als verallgemeinerte hypergeometrische Integrale eingeführt, die gewissen linearen Differentialglaeichungen $(m+1)$-ter Ordnung genügen. Sie werden hier als Integrale vom *höheren hypergeometrischen Typ* bezeichnet. Setzt man $z_{m+1} = z$, $z_{m+2} = 0$ und $z_{m+3} = 1$, so liefern sie Funktionen von z mit zwei endlichen Singularitäten, nämlich in $z = 0$ und $z = 1$.

Im folgenden sollen zum einen die linear unabhängigen zulässigen geschlossenen Integrationswege bestimmt werden. Dies wird iterativ geschehen, indem im ersten Schritt Integrale $\int dz_1 I^{(0)}$ betrachtet werden, mithin die Homologiegruppe $H_1(G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$, im zweiten Schritt Integrale $\int dz_2 \int dz_1 I^{(0)}$, mithin die Homologiegruppe $H_2((G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes C(\tilde{X}_{m+1,1})) \cong H_1(H_1(G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes C(\tilde{X}_{m+1,1}))$, und im letzten Schritt die Integrale $\int dz_m \int dz_{m-1} \ldots \int dz_1 \, I^{(0)}$, mithin die Homologiegruppe $H_m((G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$.

Zum anderen soll das Verhalten der Integrale für analytische Fortsetzung in z_{m+1} entlang Wegen $\gamma_{m+1,j} \in U_{2,1}$, $j = m+2, m+3$, untersucht werden, die die singulären Punkte z_{m+2} und z_{m+3} vermeiden. Das bedeutet:

- Bestimmung der Homologiegruppe $H_m((G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$
- Bestimmung der Darstellung $U_{2,1} \rightarrow \mathrm{Aut}(H_m((G_0^{\wp} \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})))$

Bestimmung der Homologiegruppe

Es sei also $n = 3$, und es sei zunächst $G_0^\wp = V^{(0)} = \mathbf{C}$ der obige 1-dimensionale Modul bzgl. $P_{m+3} = P_3 U_{3,m}$, Im folgenden werden an die Exponenten $\lambda_{i,j}$ weitere Forderungen gestellt werden. Es soll die Homologie $H_m((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{3+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ bestimmt werden.

Beispiel 4.3.1 Im Falle $m = 1$ hat man nach Voraussetzung $\lambda_{1,j} \notin \mathbf{Z}$, $j = 2, 3, 4$, so daß der Modul $G_0^\wp$ generisch ist bzgl. $U_{3,1} = \langle \gamma_{1,j}; j = 2, 3, 4\rangle$. Jedes Element von $H_1(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ hat dann eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von 2-Zyklen: $\sum_{k=3,4} g_k^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}$, $g_k^{(0)} \in G_0^\wp$, und es gilt:

$$H_1(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^2$$

Beispiel 4.3.2 Im Falle $m = 2$ hat man nach Voraussetzung $\lambda_{1,j} \notin \mathbf{Z}$, $j = 2, 4, 5$, und $\lambda_{1,3} = 0$, sowie $\lambda_{2,j} \notin \mathbf{Z}$, $j = 3, 4$, und $\lambda_{2,5} = 0$. Man fordere außerdem, daß folgendes gilt: $(\lambda_{2,3} + \lambda_{1,2}) \notin \mathbf{Z}$, $(\lambda_{2,4} + \lambda_{1,2} + \lambda_{2,5}) \notin \mathbf{Z}$, $(\lambda_{1,2} + \lambda_{1,5}) \notin \mathbf{Z}$.
Im ersten Schritt ist festzustellen, daß der Modul $G_0^\wp$ generisch ist bzgl. der Generatoren $\gamma_{1,j}$, $j = 2, 4, 5$, von $U_{4,1}$, da $\Phi_g^{(0)}(\gamma_{1,j}) = e^{2\pi i \lambda_{1,j}} \neq 1$, $j = 2, 4, 5$, und daß der Modul $G_0^\wp$ trivial ist bzgl. $\gamma_{1,3} \in U_{4,1}$, da $\Phi_g^{(0)}(\gamma_{1,3}) = e^{2\pi i \lambda_{1,3}} = 1$. 1-Zyklen sind daher die *wesentlichen Zyklen* $g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}$, $k = 4, 5$, sowie der *triviale Zyklus* $g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,3}$. Wir betrachten im weiteren ausschließlich wesentliche Zyklen. Bezeichnet man die Untergruppe wesentlicher Zyklen mit $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$, so hat man also zunächst das Resultat, daß jedes Element von $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ eine eindeutige Darstellung $\sum_{k=4,5} g_k^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}$, $g_k^{(0)} \in G_0^\wp$, hat und daß gilt:

$$H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^2$$

Im zweiten Schritt ist festzustellen, daß $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ als $U_{3,1}$-Modul $G_1^\wp$ generisch ist bzgl. der Generatoren $\gamma_{2,j}$, $j = 3, 4$, von $U_{3,1}$, da die Eigenwerte unter $\Phi_g^{(0)}$, nämlich $e^{2\pi i \lambda_{2,3}}$ und $e^{2\pi i (\lambda_{2,3} + \lambda_{1,2})}$, bzw. $e^{2\pi i \lambda_{2,4}}$ und $e^{2\pi i (\lambda_{2,4} + \lambda_{1,2} + \lambda_{1,4})}$, ungleich 1 sind. Daher sind die Elemente $(g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}) \otimes e_{3,4}^{(2)}$, $k = 4, 5$, wohldefiniert und Zyklen von $H_2^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$.
$H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ als $U_{3,1}$-Modul ist nicht generisch bzgl. des Generators $\gamma_{2,5} \in U_{3,1}$, da der Eigenwert $e^{2\pi i \lambda_{2,5}} = 1$ ist. Jedoch wird der Eigenwert $e^{2\pi i (\lambda_{1,2} + \lambda_{1,5})} \neq 1$ auf dem Zyklus $g^{(0)} \otimes e_{2,5}^{(1)} \in H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ angenommen, so daß $g^{(0)} \otimes e_{2,5}^{(1)} \otimes e_{3,5}^{(2)}$ einen weiteren Zyklus von $H_2^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1})) \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ liefert. Jedes Element von $H_2^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}) \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ hat also eine eindeutige Darstellung: $\sum_{\substack{k_1, k_2 = 4,5 \\ k_1 \geq k_2}} (g_{k_1,k_2}^{(0)} \otimes e_{2,k_1}^{(1)}) \otimes e_{3,k_2}^{(2)}$, $g_{k_1,k_2}^{(0)} \in G_0^\wp$, und es gilt:

$$H_2^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{4,1}) \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^3$$

Die Aussagen über die Eigenschaften des Koeffizientenmoduls $G_0^\wp$ können abstrakt und für beliebiges m formuliert werden.

Definition 4.3.3 Es sei $\Gamma \subset U_{3,m}$ die folgende Menge:

$$\begin{aligned} \Gamma \quad = \quad & \{\gamma_{i,i+1}, \gamma_{i,m+2}, \gamma_{1,m+3}, \gamma_{i,i+1} \cdots \gamma_{1,2}\gamma_{1,m+3}, \\ & \gamma_{i,i+1}\gamma_{i,m+2} \cdots \gamma_{1,2}\gamma_{1,m+2}; i = 1, \ldots, m\} \end{aligned}$$

Es sei $G_0^\wp$ eine kommutative Gruppe und $\Phi_g^{(0)} : P_3U_{3,m} \to \mathrm{Aut}(G_0^\wp)$ ein Homomorphismus mit den Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(0)}(\gamma)(g^{(0)}) &= g^{(0)}, \qquad g^{(0)} \in G_0^\wp, \quad \gamma \in P_3 \\
\Phi_g^{(0)}(\gamma)(g^{(0)}) &= g^{(0)}, \qquad \gamma \in U_{3,m}\backslash\Gamma \\
\left[\Phi_g^{(0)}(1-\gamma)\right]^{-1} &\in \mathrm{End}(G_0^\wp), \qquad \gamma \in \Gamma \subset U_{3,m}
\end{aligned}$$

Damit ist $G_0^\wp$ ein (Rechts-)Modul bzgl. $P_3U_{3,m}$ mit der Multiplikationsabbildung $G_0^\wp \times P_3U_{3,m} \to G_0^{wp}$, gegeben durch:

$$(g^{(0)}, \gamma) \to g^{(0)}\gamma := \Phi_g^{(0)}(\gamma)(g^{(0)})$$

Beispiel 4.3.4 Der oben betrachtete 1-dimensionale $P_3U_{3,m}$-Modul $V^{(0)}$, gegeben durch die Abbildung:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(0)} : P_3U_{3,m} &\to GL(V^{(0)}) \\
\Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j}) &= e^{2\pi i\lambda_{i,j}}, \qquad \gamma_{i,j} \in P_{m+3}
\end{aligned}$$

genügt den an $G_0^\wp$ gestellten Forderungen, wenn die Exponenten $\lambda_{i,j}$ (außer den obigen Bedingungen $\lambda_{i,i+1}, \lambda_{i,m+2} \notin \mathbf{Z}$ für $i = 1,\ldots,m$, $\lambda_{1,m+3} \notin \mathbf{Z}$ und $\lambda_{i,j} = 0$ sonst) auch den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{i,i+1} + \lambda_{1,m+3} &\notin \mathbf{Z}, \qquad p = 1,\ldots,m \\
\sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_{i,i+1} + \lambda_{i,m+2}) &\notin \mathbf{Z}, \qquad p = 1,\ldots,m
\end{aligned}$$

Auch die Aussagen über die Homologie $H_m^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{3+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ können für beliebiges m formuliert werden.

Satz 4.3.5 (Homologie) *Elemente von $H_m^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{3+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ haben eine eindeutige Darstellung der Form:*

$$\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m = m+2, m+3 \\ k_j \geq k_{j+1}}} (g^{(0)}_{k_1,\ldots,k_m} \otimes e^{(1)}_{2,k_1}) \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+1,k_m}, \qquad g^{(0)}_{k_1,\ldots,k_m} \in G_0^\wp$$

d.h. es gilt:

$$H_m^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^{m+1}$$

Beweis. Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach r, $1 \leq r \leq m$.

Induktionsanfang: **i)** $G_0^\wp$ als $U_{m+2,1}$-Modul ist generisch nur bzgl. $\gamma_{1,2}, \gamma_{1,m+2}, \gamma_{1,m+3} \in U_{m+2,1}$, d.h. nur die Elemente $(1-\gamma_{1,2}), (1-\gamma_{1,m+2}), (1-\gamma_{1,m+3}) \in \mathbf{Z}U_{m+2,1}$, sind als Endomorphismen von $G_0^\wp$ invertierbar. Zyklen in $G_0^\wp \otimes C_1(\tilde{X}_{m+2,1})$ sind daher die trivialen Zyklen $g^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,j}$, $j \neq 2, m+2, m+3$, sowie die wesentlichen Zyklen, die durch Differenzen der Ketten $g^{(0)} \otimes e_{1,j}^{(1)}$, $j = 2, m+2, m+3$, gebildet werden. Jedes Element von $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form: $\sum_{k=m+2,m+3} g_k^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}$, $g_k^{(0)} \in G_0^\wp$, d.h. es gilt:

$$H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^{m+1}$$

ii) Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 und mit den Eigenschaften des Moduls $G_0^\wp$ bzgl. $U_{3,m}$ folgt für die Wirkung der Elemente $\gamma_{2,k} \in U_{m+1,1}$, wobei $k = m+2, m+3$ ist, auf $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ unmittelbar:

$$\begin{aligned}
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)} \gamma_{2,3} &= g^{(0)}\gamma_{2,3} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \qquad k = m+2, m+3 \\
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)} \gamma_{2,j} &= g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \qquad k = m+2, m+3; j = 4, \ldots, m+1 \\
g^{(0)} \otimes e_{2,m+2}^{(1)} \gamma_{2,m+2} &= g^{(0)}\gamma_{2,m+2}\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+2} \otimes e_{2,m+2}^{(1)} \\
g^{(0)} \otimes e_{2,m+3}^{(1)} \gamma_{2,m+2} &= g^{(0)}\gamma_{2,m+2}\gamma_{1,2}(\gamma_{1,m+2}-1) \otimes e_{2,m+2}^{(1)} + \\
&\quad + g^{(0)}\gamma_{2,m+2} \otimes e_{2,m+3}^{(1)} \\
g^{(0)} \otimes e_{2,m+2}^{(1)} \gamma_{2,m+3} &= g^{(0)} \otimes e_{2,m+2}^{(1)} + g^{(0)}(\gamma_{1,m+3}-1) \otimes e_{2,m+3}^{(1)} \\
g^{(0)} \otimes e_{2,m+3}^{(1)} \gamma_{2,m+3} &= g^{(0)}\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+3} \otimes e_{2,m+3}^{(1)}
\end{aligned}$$

wobei nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{2,3}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp) \\
\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{2,m+2}\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp) \\
\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{2,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp) \\
\Phi_g^{(0)}(1-\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+3}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp)
\end{aligned}$$

$H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ liefert also einen (Rechts-)Modul $G_1^\wp$ bzgl. $U_{m+1,1}$, der generisch ist bzgl. der Elemente $\gamma_{2,j} \in U_{m+1,1}$, $j = 3, m+2$, und trivial bzgl. aller Elemente $\gamma_{2,j} \in U_{m+1,1}$, $j \notin \{3, m+2\}$. Die Elemente $(1-\gamma_{2,3})$ und $(1-\gamma_{2,m+2})$ von $\mathbf{Z}U_{m+1,1}$ sind als Endomorphismen von $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ invertierbar. Alle $(1-\gamma_{2,j}) \in \mathbf{Z}U_{m+1,1}$, wobei $j \notin \{3, m+2, m+3\}$ ist, sind als Endomorphismen nicht invertierbar. Das Element $(1-\gamma_{2,m+3}) \in \mathbf{Z}U_{m+1,1}$ ist invertierbar als Endomorphismus des Submoduls von $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$, erzeugt vom Zyklus $g^{(0)} \otimes e_{2,m+3}^{(1)}$. Jedes Element von $H_2^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes C(\tilde{X}_{m+1,1}))$ hat also eine eindeutige Darstellung: $\sum_{\substack{k_1,k_2=m+2,m+3 \\ k_1 \geq k_2}} (g_{k_1,k_2}^{(0)} \otimes e_{2,k_1}^{(1)}) \otimes e_{3,k_2}^{(2)}$, $g_{k_1,k_2}^{(0)} \in G_0^\wp$, und es gilt:

$$H_2^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes C(\tilde{X}_{m+1,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^3$$

iii) Man bemerke weiterhin, die Wirkung von Elementen $\gamma_{i,j} \in U_{3,m-2}$, wobei $i = 3, \ldots, m$ ist, $j = 4, \ldots, m+3$ und $i < j$, und von $\gamma_{m+1,k} \in P_3$, wobei $k = m+1, m+2$, auf $H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}\,\gamma_{j,m+2} &= g^{(0)}\gamma_{j,m+2} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad j = 3, \ldots, m+1 \\
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}\,\gamma_{j,m+3} &= g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad j = 3, \ldots, m+1 \\
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}\,\gamma_{i,i+1} &= g^{(0)}\gamma_{i,i+1} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad i = 3, \ldots, m \\
g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}\,\gamma_{i,j} &= g^{(0)} \otimes e_{2,k}^{(1)}, \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad 3 \leq i < j-1 \leq m
\end{aligned}$$

Hierbei ist:

$$\begin{aligned}
\Phi_g^{(0)}(1 - \gamma_{j,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp), \qquad j = 3, \ldots, m+1 \\
\Phi_g^{(0)}(1 - \gamma_{i,i+1}) &\in \mathrm{Aut}(G_0^\wp), \qquad i = 3, \ldots, m
\end{aligned}$$

$H_1^{gen}(G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ liefert also inbesondere einen Modul $G_1^\wp$ bzgl. $P_3U_{3,m-2}$, der generisch ist bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+2}$, $j = 3, \ldots, m+1$, und $\gamma_{i,i+1}$, $i = 2, \ldots, m$, und trivial bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+3}$, $j = 3, \ldots, m+1$, und $\gamma_{i,j}$, $3 \leq i < j-1 \leq m$.

Induktionsannahme: Für ein $1 < r \leq m$ sei nun angenommen, daß jedes Element von $H_r^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$ eine eindeutige Darstellung der Form hat: $\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r = m+2,m+3 \\ k_j \geq k_{j+1}}} (g_{k_1,\ldots,k_r}^{(0)} \otimes e_{2,k_1}^{(1)}) \otimes \ldots \otimes e_{r+1,k_r}^{(r)}$, $g_{k_1,\ldots,k_r}^{(0)} \in G_0^\wp$, d.h. daß gilt:

$$H_r^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1})) \quad \cong \quad (G_0^\wp)^{r+1}$$

Insbesondere bedeutet dies, daß $H_{r-1}^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+4-r,1}))$ einen Modul $G_{r-1}^\wp$ bzgl. $U_{m+3-r,1}$ liefert, der generisch ist bzgl. der Elemente $\gamma_{r,j} \in U_{m+3-r,1}$, $j = r+1, m+2$, und trivial bzgl. aller Elemente $\gamma_{2,j} \in U_{m+3-r,1}$, $j \notin \{r+1, m+2\}$, und daß $(g^{(0)} \otimes e_{2,m+3}^{(1)}) \otimes \ldots \otimes e_{r,m+3}^{(r-1)} \in H_{r-1}^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+4-r,1}))$ generisch ist bzgl. des Elements $\gamma_{r,m+3} \in U_{m+3-r,1}$.
Ferner sei angenommen, daß $G_{r-1}^\wp = H_{r-1}^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+4-r,1}))$ als Modul bzgl. $P_3U_{3,m-r}$, generisch ist bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+2}$, $j = r+1, \ldots, m+1$, und $\gamma_{i,i+1}$, $i = r+1, \ldots, m$, und trivial bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+3}$, $j = r+1, \ldots, m+1$, und der Elemente $\gamma_{i,j}$, $r+1 \leq i < j-1 \leq m$.

Induktionsschluß: **i**) Es folgt für die Wirkung der Elemente $\gamma_{r+1,k} \in U_{m+2-r,1}$, wobei $k = r+2, \ldots, m+3$, auf $H_r^{gen}((G_0^\wp \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$:

$$g^{(r-1)} \otimes e_{r+1,k}^{(r)}\,\gamma_{r+1,r+2} \quad = \quad g^{(r-1)}\gamma_{r+1,r+2} \otimes e_{r+1,k}^{(r)}, \qquad k = m+2, m+3$$

$$\begin{aligned}
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}\,\gamma_{r+1,j} &= g_{r-1} \otimes e^{(r)}_{r+1,k} \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad r+2 < j < m+2 \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+2}\,\gamma_{r+1,m+2} &= g^{(r-1)}\gamma_{r+1,m+2}\gamma_{r,r+1}\gamma_{r,m+2} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+2} \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3}\,\gamma_{r+1,m+2} &= g^{(r-1)}\gamma_{r+1,m+2}\gamma_{r,r+1}(\gamma_{r,m+2}-1) \otimes e^{(r)}_{r+1,m+2} + \\
&\quad + g^{(r-1)}\gamma_{r+1,m+2} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3} \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+2}\,\gamma_{r+1,m+3} &= g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+2} + g^{(r-1)}(\gamma_{r,m+3}-1) \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3} \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3}\,\gamma_{r+1,m+3} &= g^{(r-1)}\gamma_{r,r+1}\gamma_{r,m+3} \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3}
\end{aligned}$$

wobei nach Induktionsannahme:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(r-1)}_g(1-\gamma_{r+1,r+2}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1}) \\
\Phi^{(r-1)}_g(1-\gamma_{r+1,m+2}\gamma_{r,r+1}\gamma_{r,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1}) \\
\Phi^{(r-1)}_g(1-\gamma_{r+1,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1}) \\
\Phi^{(r-1)}_g(1-\gamma_{r,r+1}\gamma_{r,m+3}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1})
\end{aligned}$$

Hierbei ist $g^{(r-1)} \in G^{\wp}_{r-1} = H^{gen}_{r-1}((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+4-r,1}))$. Die Gruppe $H^{gen}_r((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$ liefert also einen Modul $G^{\wp}_r$ bzgl. $U_{m+2-r,1}$, der generisch ist bzgl. der Elemente $\gamma_{r+1,j} \in U_{m+2-r,1}$, $j = r+2, m+2$, und trivial bzgl. aller Elemente $\gamma_{r+1,j} \in U_{m+3-r,1}$, $j \notin \{r+2, m+2\}$. Und ferner ist der Zyklus $(g^{(0)} \otimes e^{(1)}_{2,m+3}) \otimes \ldots \otimes e^{(r)}_{r+1,m+3}$ aus $H^{gen}_r((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$ generisch bzgl. des Elements $\gamma_{r+1,m+3} \in U_{m+2-r,1}$. Man hat folglich das Resultat, daß jedes Element von $H^{gen}_{r+1}((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+2-r,1}))$ eine eindeutige Darstellung der Form hat: $\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{r+1}=m+2,m+3 \\ k_j \geq k_{j+1}}} (g^{(0)}_{k_1,\ldots,k_{r+1}} \otimes e^{(1)}_{2,k_1}) \otimes \ldots \otimes e^{(r+1)}_{r+2,k_{r+1}}$, $g^{(0)}_{k_1,\ldots,k_{r+1}} \in G^{\wp}_0$, d.h. daß gilt:

$$H^{gen}_{r+1}((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+2-r,1})) \quad \cong \quad (G^{\wp}_0)^{r+2}$$

ii) Weiter gilt für die Wirkung von Elementen $\gamma_{i,j} \in U_{3,m-r-1}$, $i = r+2, \ldots, m$, $j = r+3, \ldots, m+3$, $i < j$, und von $\gamma_{m+1,k} \in P_3$, $k = m+1, m+2$, auf $H^{gen}_r((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$:

$$\begin{aligned}
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}\,\gamma_{j,m+2} &= g^{(r-1)}\gamma_{j,m+2} \otimes e^{(r)}_{r+1,k} \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad j = r+2, \ldots, m+1 \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}\,\gamma_{j,m+3} &= g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k} \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad j = r+2, \ldots, m+1 \\
g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}\,\gamma_{i,i+1} &= g^{(r-1)}\gamma_{i,i+1} \otimes e^{(r)}_{r+1,k} \\
&\qquad k = m+2, m+3; \quad i = r+2, \ldots, m
\end{aligned}$$

$$g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}\,\gamma_{i,j} \;=\; g^{(r-1)} \otimes e^{(r)}_{r+1,k}$$
$$k = m+2, m+3; \quad r+2 \leq i < j-1 \leq m$$

Hierbei ist:

$$\begin{aligned} \Phi_g^{(r-1)}(1-\gamma_{j,m+2}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1}), & j &= r+2,\dots,m+1 \\ \Phi_g^{(r-1)}(1-\gamma_{i,i+1}) &\in \mathrm{Aut}(G^{\wp}_{r-1}), & i &= r+2,\dots,m+1 \end{aligned}$$

Somit ist $G^{\wp}_r = H^{gen}_r((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \dots \otimes C(\tilde{X}_{m+3-r,1}))$ als Modul bzgl. $P_3U_{3,m-r-1}$, generisch bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+2}$, $j = r+2,\dots,m+1$, und $\gamma_{i,i+1}$, $i = r+2,\dots,m$, und trivial bzgl. der Elemente $\gamma_{j,m+3}$, $j = r+2,\dots,m+1$, und $\gamma_{i,j}$, $r+2 \leq i < j-1 \leq m$.
Damit ist die Induktion vollständig. □

Darstellung der Zopfgruppe $U_{2,1}$

Es kann nun die Darstellung $\chi : U_{2,1} \to \mathrm{Aut}(H^{gen}_m((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \dots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})))$ von $U_{2,1} = \langle \gamma_{m+1,m+2}, \gamma_{m+1,m+3} \rangle$, einer freien Untergruppe von P_3, explizit angegeben werden.

Es sei $\mathcal{P}(m) = p + (m-p)$ eine Partition von m, wobei p und $m-p$ beziehungsweise die Anzahl der formalen Faktoren $e^{(j)}_{j+1,k_j}$ mit den Indices $k_j = m+2, m+3$ im Produkt $(g^{(0)} \otimes e^{(1)}_{2,k_1}) \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+1,k_m}$ angeben:

$$\begin{aligned} & g^{(0)} \otimes e^{(1)}_{2,m+3} \otimes \dots \otimes e^{(p)}_{p+1,m+3} \otimes e^{(p+1)}_{p+2,m+2} \otimes \dots \otimes e^{(m)}_{m+1,m+2} \in \\ & \in \; H^{gen}_m((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \dots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \end{aligned}$$

Satz 4.3.6 *Die Zopfgruppe $U_{2,1}$ hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Homologiegruppe $H^{gen}_m((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \dots \otimes C(\tilde{X}_{3,1})) \cong (G^{\wp}_0)^{m+1}$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi : U_{2,1} \;\to\; Aut(H^{gen}_m((G^{\wp}_0 \otimes C(\tilde{X}_{m+2,1})) \otimes \dots \otimes C(\tilde{X}_{3,1}))) \cong Aut\left((G^{\wp}_0)^{m+1}\right)$$

gegeben durch:

$$\chi(\gamma) \;=\; \Phi^{(0)}_g \left(\gamma\, R^{(1,\dots,m)}_{\wp}(\gamma)\right)$$

Hierbei ist die Matrix $R^{(1,\dots,m)}_{\wp}(\gamma) \in GL(\mathbf{Z}U_{3,m}, m+1)$, und die nichtverschwindenden der Einträge $\left(R^{(1,\dots,m)}_{\wp}(\gamma_{m+1,m+2})\right)^q_p$, $p,q = 0,\dots,m$, sind:

$$\begin{aligned} \left(R^{(1,\dots,m)}_{\wp}(\gamma_{m+1,m+2})\right)^p_p &= \gamma_{m,m+1}\gamma_{m,m+2}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,m+2}\cdots\gamma_{p+1,p+2}\gamma_{p+1,m+2} \\ \left(R^{(1,\dots,m)}_{\wp}(\gamma_{m+1,m+2})\right)^q_p &= \gamma_{m,m+1}\gamma_{m,m+2}\gamma_{m-1,m}\gamma_{m-1,m+2}\cdots\gamma_{p-q+2,p-q+3}\gamma_{p-q+2,m+2} \times \\ & \quad \times \gamma_{p-q+1,p-q+2}(\gamma_{p-q+2,m+2}-1), \qquad q = 0,\dots,p-1 \end{aligned}$$

Die nichtverschwindenden der Einträge $\left(R_\wp^{(1,\dots,m)}(\gamma_{m+1,m+3})\right)_p^q$, $p,q=0,\dots,m$, *sind:*

$$\begin{aligned}\left(R_\wp^{(1,\dots,m)}(\gamma_{m+1,m+3})\right)_p^p &= 1\\ \left(R_\wp^{(1,\dots,m)}(\gamma_{m+1,m+3})\right)_p^m &= \gamma_{m,m+1}\gamma_{m+1,m+2}\cdots\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+3}-1\end{aligned}$$

Beweis. Für alle $g^{(0)}\in G_0^\wp$ ist die Matrix $R_\wp^{(1,\dots,m)}(\gamma)$ durch die folgenden Relationen gegeben:

$$\begin{aligned}&\left(g^{(0)}\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{p+1,m+3}^{(p)}\otimes e_{p+2,m+2}^{(p+1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\right)\gamma=\\ =&\sum_{q=0,\dots,m} g^{(0)}\gamma\left(R_\wp^{(1,\dots,m)}(\gamma)\right)_p^q\otimes\\ &\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{q+1,m+3}^{(q)}\otimes e_{q+2,m+2}^{(q+1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln aus dem Beweis des Satzes zur Homologie folgt für die Wirkung des Generators $\gamma_{m+1,m+2}\in U_{2,1}$:

$$\begin{aligned}&\left(g^{(0)}\otimes e_{2,m+2}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\right)\gamma_{m+1,m+2}=\\ =\;& g_0\,\gamma_{m,m+1}\gamma_{m,m+2}\cdots\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+2}\otimes\\ &\otimes e_{2,m+2}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\\ &\left(g^{(0)}\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+3}^{(m)}\right)\gamma_{m+1,m+2}=\\ =\;& g^{(0)}\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+3}^{(m)}+\\ &+\sum_{q=1}^{m} g^{(0)}\,\gamma_{m,m+1}\gamma_{m,m+2}\cdots\gamma_{m-q+1,m-q+2}(\gamma_{m-q+1,m+2}-1)\otimes\\ &\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m-q+1,m+3}^{(m-q)}\otimes e_{m-q+2,m+2}^{(m-q+1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\end{aligned}$$

und für die Wirkung des Generators $\gamma_{m+1,m+3}\in U_{2,1}$ auf diese Zyklen:

$$\begin{aligned}&\left(g^{(0)}\otimes e_{2,m+2}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}\right)\gamma_{m+1,m+3}=\\ =\;& g^{(0)}\otimes e_{2,m+2}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+2}^{(m)}+\\ &+g^{(0)}\,(\gamma_{1,m+3}-1)\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+3}^{(m)}\\ &\left(g^{(0)}\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+3}^{(m)}\right)\gamma_{m+1,m+3}=\\ =\;& g_0\,\gamma_{m,m+1}\cdots\gamma_{1,2}\gamma_{1,m+3}\otimes e_{2,m+3}^{(1)}\otimes\dots\otimes e_{m+1,m+3}^{(m)}\end{aligned}$$

Die behauptete Wirkung der Generatoren $\gamma_{m+1,m+2}$ und $\gamma_{m+1,m+3}$ von $U_{2,1}$ auf beliebige Zyklen, $p\neq 0,m$, aus $H_m^{gen}((G_0^\wp\otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))\otimes\dots\otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$ ergibt sich daraus leicht. □

Monodromiegruppen höherer hypergeometrischer Integrale

Es sei nun wieder $V^{(0)}$ der 1-dimensionale $\mathbf{C}$-Vektorraum, erzeugt von $I^{(0)}(z_1,\ldots,z_{m+3})$, und $G_0^{\wp}=V^{(0)}=\mathbf{C}$, der 1-dimensionale $P_3U_{3,m}$-Modul, gegeben durch die Abbildung:

$$\begin{aligned}\Phi_g^{(0)} P_3U_{3,m} &\longrightarrow GL(V^{(0)})\\ \Phi_g^{(0)}(\gamma_{i,j}) &= \alpha_{i,j}=e^{2\pi i\lambda_{i,j}}, \qquad \gamma_{i,j}\in P_3U_{3,m}\end{aligned}$$

Die m-fachen Pochhammerschen höheren hypergeometrischen Integrale:

$$I^{(m)}_{k_1,\ldots,k_m}(z_{m+1},\ldots,z_{m+3}) = \int_{c_{k_m}} dz_m \ldots \int_{c_{k_1}} dz_1\, I^{(0)}(z_1,\ldots,z_{m+3})$$

sind wohldefiniert, wenn im ersten Schritt über die 1-dimensionalen Homologiezyklen $c_{k_1}=I^{(0)}\otimes e^{(1)}_{2,k_1}\in H_1^{gen}(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ integriert wird, im zweiten Schritt über die 1-dimensionalen Homologiezyklen $c_{k_2}=c_{k_1}\otimes e^{(2)}_{3,k_2}\in H_1^{gen}(V^{(1)}\otimes C(\tilde{X}_{m+1,1}))$, wobei $V^{(1)}=H_1^{gen}(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{m+2,1}))$ ist, und im m-ten Schritt über die 1-dimensionalen Homologiezyklen $c_{k_m}=c_{k_{m-1}}\otimes e^{(m)}_{m+1,k_m}\in H_1^{gen}(V^{(m-1)}\otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$, wobei $V^{(m-1)}=H_1^{gen}(V^{(m-2)}\otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ ist. Es sei $V^{(m)}$ der Vektorraum der Dimension $m+1$, der von den linear unabhängigen Integralen aufgespannt wird. Die Darstellung $\chi: U_{2,1}\to GL(V^{(m)})$ liefert die Monodromiegruppe der Integrale, aufgefaßt als Funktionen von z_{m+1}.
Die Fälle $m=1$ und $m=2$ wurden beispielhaft in den Absdchnitten 2.3.5 und 3.3.3 betrachtet.

Beispiel 4.3.7 Im Falle $m=3$ hat man den $\mathbf{C}$-Vektorraum $V^{(3)}$ der Dimension $\dim V^{(3)}=4$, aufgespannt von den *3-fachen hypergeometrischen Integralen*:

$$\begin{aligned}I_{k_1,k_2,k_3}(z_4,z_5,z_6) &= \int_{c_{k_3}} dz_3\, I^{(2)}_{k_1,k_2}(z_3,\ldots,z_6)=\\ &= \int_{c_{k_3}} dz_3 \int_{c_{k_2}} dz_2\, I^{(1)}_{k_1}(z_2,\ldots,z_6)=\\ &= \int_{c_{k_3}} dz_3 \int_{c_{k_2}} dz_2 \int_{c_{k_1}} dz_1\, I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5)\\ I^{(0)}(z_1,\ldots,z_5) &= (z_1-z_2)^{\lambda_{1,2}}(z_1-z_5)^{\lambda_{1,5}}(z_1-z_6)^{\lambda_{1,6}}\times\\ &\quad\times(z_2-z_3)^{\lambda_{2,3}}(z_2-z_5)^{\lambda_{2,5}}(z_3-z_4)^{\lambda_{3,4}}(z_3-z_5)^{\lambda_{2,5}}\end{aligned}$$

Hierbei wird erst integriert über den Zyklus $c_{k_1}=I^{(0)}\otimes e^{(1)}_{2,k_1}\in H_1^{gen}(V^{(0)}\otimes C(\tilde{X}_{5,1}))$, dann über den Zyklus $c_{k_2}=I^{(1)}_{k_1}\otimes e^{(2)}_{3,k_2}\in H_1^{gen}(V^{(1)}\otimes C(\tilde{X}_{4,1}))$ und schließlich über den Zyklus $c_{k_3}=I^{(2)}_{k_2}\otimes e^{(3)}_{4,k_3}\in H_1^{gen}(V^{(2)}\otimes C(\tilde{X}_{3,1}))$. Die Indizes sind $k_1,k_2,k_3=5,6$, $k_1\geq k_2\geq k_3$. Die Darstellung $\chi: U_{2,1}\to GL(V^{(3)})$ lautet wie folgt:

$$\gamma_{4,5} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,5}\alpha_{2,5}\alpha_{3,5} & 0 & 0 & 0\\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,5}\alpha_{3,5}(\alpha_{1,5}-1) & \alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,5}\alpha_{3,5} & 0 & 0\\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,5}\alpha_{3,5}(\alpha_{1,5}-1) & \alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}(\alpha_{2,5}-1) & \alpha_{3,4}\alpha_{3,5} & 0\\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,5}\alpha_{3,5}(\alpha_{1,5}-1) & \alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}(\alpha_{2,5}-1) & \alpha_{3,4}(\alpha_{3,5}-1) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{4,6} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_{1,6}-1 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{1,6}-1 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{1,6}-1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6} \end{pmatrix}$$

Zu den Ausdrücken in der Standardnotation gelangt man, wenn man wie folgt identifiziert:

$$\begin{array}{rcl} z_1 &=& u \\ z_2 &=& v \\ z_3 &=& w \\ z_4 &=& z \\ z_5 &=& 0 \\ z_6 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \lambda_{1,2} &=& \sigma-\beta-1 \\ \lambda_{1,5} &=& \beta-\rho \\ \lambda_{1,6} &=& \rho-\alpha-1 \\ \lambda_{2,3} &=& \tau-\gamma-1 \\ \lambda_{2,5} &=& \gamma-\sigma \\ \lambda_{3,4} &=& -\delta \\ \lambda_{3,5} &=& \delta-\tau \end{array}$$

Man hat die höhere hypergeometrische Reihe

$$\begin{array}{rcl} {}_4F_3(\alpha,\beta,\gamma,\delta;\rho,\sigma,\tau;z) &=& \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k(\gamma)_k(\delta)_k}{(\rho)_k(\sigma)_k(\tau)_k(1)_k}\, z^k \\ (\alpha)_k &=& \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1) \end{array}$$

und die (über Zyklen auszuführenden) höheren hypergeometrischen Integrale:

$$I(z) = \int dw \int dv \int du\, u^{\beta-\rho}(u-1)^{\rho-\alpha-1}(u-v)^{\sigma-\beta-1}v^{\gamma-\sigma}(v-w)^{\tau-\gamma-1}(w-x)^{-\delta}w^{\delta-\tau}$$

Zur diesen höheren hypergeometrischen Integralen korrespondierenden linearen Differentialgleichung 3-ter Ordnung siehe Pochhammer [34].
Die Monodromiegruppe dieser höheren hypergeometrischen Integrale wird von Beukers und Heckman [3] angegeben. Es ist die Gruppe mit Generatoren $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_\infty \in GL(\mathbf{C}, 4)$ und der Relation $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_\infty = 1$, wobei:

$$\Gamma_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -t \\ 1 & 0 & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 1 & -q \end{pmatrix} \qquad \Gamma_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

und wobei a, b, c, d und q, r, s, t definiert sind durch:

$$\begin{array}{rcl} (x-e^{2\pi i\alpha})(x-e^{2\pi i\beta})(x-e^{2\pi i\gamma})(x-e^{2\pi i\delta}) &=& x^4+ax^3+bx^2+cx+d \\ (x-e^{2\pi i\rho})(x-e^{2\pi i\sigma})(x-e^{2\pi i\tau})(x-1) &=& x^4+qx^3+rx^2+sx+t \end{array}$$

Die Eigenwerte von Γ_0 sind identisch den Eigenwerten von $\chi(\gamma_{4,5})$:

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5} &=& e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{1,5}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,5}+\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} &=& e^{-2\pi i\rho} \\ \alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5} &=& e^{2\pi i(\lambda_{2,3}+\lambda_{2,5}+\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} &=& e^{-2\pi i\sigma} \\ \alpha_{3,4}\alpha_{3,5} &=& e^{2\pi i(\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} &=& e^{2\pi i\sigma} \end{array}$$

Und die Eigenwerte von Γ_∞ sind identisch den Eigenwerten von $\chi((\gamma_{4,5}\gamma_{4,6})^{-1})$:

$$\begin{array}{rcccl} \alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5} & = & e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{1,5}+\lambda_{1,6}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,5}+\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} & = & e^{-2\pi i\alpha} \\ \alpha_{1,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5} & = & e^{2\pi i(\lambda_{1,2}+\lambda_{2,3}+\lambda_{2,5}+\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} & = & e^{-2\pi i\beta} \\ \alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5} & = & e^{2\pi i(\lambda_{2,3}+\lambda_{3,4}+\lambda_{3,5})} & = & e^{-2\pi i\gamma} \\ \alpha_{3,4} & = & e^{2\pi i\lambda_{3,4}} & = & e^{-2\pi i\delta} \end{array}$$

Insbesondere gibt es eine Matrix $\Theta \in GL(\mathbf{C}, 4)$, so dass gilt:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0 & = & \Theta\,\chi(\gamma_{4,5})\,\Theta^{-1} \\ (\Gamma_\infty)^{-1} & = & \Theta\,\chi(\gamma_{4,5}\gamma_{4,6})\,\Theta^{-1} \end{array}$$

4.3.3 σ-deformierte Kombinatorik

Im folgenden werden rekursiv Analoga der q-deformierten Gauß-Multinomialkoeffizienten definiert, und zwar als Elemente des Gruppenrings $\mathbf{Z}B_m$ der Zopfgruppe B_m, erzeugt von den Elementen σ_j, $j = 1, \ldots, m-1$. Die Einführung insbesondere der Analoga der q-Binomialkoeffizienten und der q-Fakultät wird sich bei der Darstellung der Zopfgruppe B_n auf gewissen Faktorgruppen der m-dimensionalen Ketten- und Homologiegruppen als nützlich erweisen.

Bemerkung 4.3.8 Die m-Zyklen werden Relationen genügen, die für alle $r = 1, \ldots, m-1$ durch die folgenden formalen Relationen induziert werden:

$$(e^{(r)}_{j,j+1} \otimes e^{(r+1)}_{k,k+1}) \quad = \quad \sigma_r^{-1}(e^{(r)}_{k,k+1} \otimes e^{(r+1)}_{j,j+1})$$

Hierbei ist $j, k = m+1, \ldots, m+n-1$ und $k > j$. Es werden sich nun p-fache Produkte von jeweils r-fachen Summen als Summe von geordneten p Faktoren mit in diesem Unterabschnitt definierten sogenannten σ-deformierten Multinomialen als Koeffizienten schreiben lassen, wobei über alle Partitionen $\mathcal{P}(p) = p_r + \ldots + p_1$ von p mit r Summanden zu summieren ist:

$$\begin{array}{rcl} & & (\sum_{k=m+1}^{m+r} e^{(1)}_{k,k+1}) \otimes \ldots \otimes (\sum_{k=m+1}^{m+r} e^{(p)}_{k,k+1}) = \\ & = & \sum_{\mathcal{P}(p)} \left[\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right]^{(p)}_{\sigma^{-1}} \left(e^{(1)}_{k_1,k_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(p)}_{k_p,k_p+1}) \right) \\ k_1, \ldots, k_{p_r} & = & m+r \\ \ldots & & \ldots \\ k_{p_r+\ldots+p_2+1}, \ldots, k_p & = & m+1 \end{array}$$

Diese Formel ist offensichtlich eine Verallgemeinerung der bekannten Formel zu gewöhnlichen Multinomialkoeffizienten, d.h. des Ausdrucks der Potenz von Summen komplexer Zahlen $z_k \in \mathbf{C}$ als Summe von Potenzen:

$$\left(\sum_{k=1}^{r} z_k \right)^p \quad = \quad \sum_{\mathcal{P}(p)} \left(\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right) z_r^{p_r} \ldots z_1^{p_1}$$

Es seien $p, m, r \in \mathbf{N}, r \leq p \leq m$ und $p = \sum_{i=1}^{r} p_i$ eine Partition $\mathcal{P}(p)$ von p. Jeder solchen Partition entspreche eine Menge mit jeweils p_i Elementen mit Farbe i, und jeder Partition sei die Menge aller Permutationen $\pi(\mathcal{P}(p))$ dieser jeweils p_i Elemente mit Farbe i zugeordnet. Weiter sei S_p die symmetrische Gruppe, erzeugt von den Transpositionen τ_i, wobei $i = m-p+1, \ldots, m-1$. Jede Permutation $\pi(\mathcal{P}(p))$ definiert ein Wort $\tau(\pi)$ in den Generatoren von S_p. Endlich sei $\psi : S_p \rightarrow B_p/P_p$ der Isomorphismus, definiert durch $\psi(\tau_i) = \sigma_i$.

Definition 4.3.9 Der *σ-deformierte r-Multinomialkoeffizient* zu einer Partition $\mathcal{P}(p)$ von p ist das folgende Element aus $\mathbf{Z}B_m$:

$$\left[\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = \sum_{\pi(\mathcal{P}(p))} \psi(\tau(\pi))$$

Insbesondere ist für die triviale Partition $\mathcal{P}(p)$ mit $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, r$ die *σ-deformierte r-Fakultät*:

$$[r]!_\sigma^{(m)} = \left[\begin{array}{c} r \\ 1, \ldots, 1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = \sum_{\pi(r)} \psi(\tau(\pi))$$

Beispiel 4.3.10

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} 2 \\ 1,1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} &= [2]!_\sigma^{(m)} = 1 + \sigma_{m-1} \\
\left[\begin{array}{c} 3 \\ 1,2 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} &= 1 + \sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}\sigma_{m-2} \\
\left[\begin{array}{c} 3 \\ 2,1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} &= 1 + \sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}\sigma_{m-1}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.11 Im Falle $\sigma \mapsto q \in \mathbf{C}$ bekommt man die Gauß-Multinomialkoeffizienten vom Grad $\prod_{j=1}^{r} p_j$ in der Variablen q, cf. [1]:

$$\left[\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right]_q = \frac{[p]!_q}{\prod_{i=1}^{r} [p_i]!_q}, \qquad [l]!_q = \prod_{j=1}^{l} (1 - q^j)$$

Beispiel 4.3.12 Im Falle $q \mapsto 1$ bekommt man die gewöhnlichen Multinomialkoeffizienten:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \left[\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right]_q = \left(\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right) = \frac{p!}{\prod_{j=1}^{r} p_j!}$$

Man beachte, daß im Unterschied zu den q-deformierten die σ-deformierten Multinomialkoeffizienten als Elemente von $\mathbf{Z}B_p$ zum einen i.A. nicht invariant bzgl. der Vertauschung der p_i sind und zum anderen vom (oberen) Index (m) abhängig.

Die σ-deformierten Multinomialkoeffizienten zur Partition $\mathcal{P}(p)$ können rekursiv durch solche zu Partitionen $\mathcal{P}(p-1)$ ausgedrückt werden.

Lemma 4.3.13 (Rekursionsrelationen) *Es sei* $\sum_{i=1}^{r} p_i = p \leq m \in \mathbf{N}$, *dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p \\ 0,\ldots,p,\ldots,0 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= 1 \\
\begin{bmatrix} p \\ p_r,\ldots,p_1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= \sum_{i=1}^{r} \begin{bmatrix} p-1 \\ p_r,\ldots,p_{i+1},p_i-1,p_{i-1},\ldots,p_1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} \times \\
&\quad \times \sigma_{m-p+1} \ldots \sigma_{m-\sum_{j\leq i} p_j} \\
\begin{bmatrix} p \\ p_r,\ldots,p_1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= \sum_{i=1}^{r} \begin{bmatrix} p-1 \\ p_r,\ldots,p_{i+1},p_i-1,p_{i-1},\ldots,p_1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m-1)} \times \\
&\quad \times \sigma_{m-1} \ldots \sigma_{m-\sum_{j<i} p_j}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.14

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 4 \\ 2,2 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1,2 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2,1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} \sigma_{m-3}\sigma_{m-2} = \\
&= 1 + \sigma_{m-2} + \sigma_{m-1}\sigma_{m-2} + (1 + \sigma_{m-1} + \sigma_{m-2}\sigma_{m-1})\sigma_{m-3}\sigma_{m-2} \\
&= 1 + \sigma_{m-2} + \sigma_{m-3}\sigma_{m-2} + (1 + \sigma_{m-3} + \sigma_{m-2}\sigma_{m-3})\sigma_{m-1}\sigma_{m-2} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 2,1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m-1)} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1,2 \end{bmatrix}_\sigma^{(m-1)} \sigma_{m-1}\sigma_{m-2}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.15 Die σ-deformierten Binomialkoeffizienten mit $p_i = 1$ lassen sich leicht explizit angeben:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p+1 \\ 1,p \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= 1 + \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{m+j} \ldots \sigma_m \\
\begin{bmatrix} p+1 \\ p,1 \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} &= 1 + \sum_{j=0}^{p-1} \sigma_{m+p-1} \ldots \sigma_{m+p-1-j}
\end{aligned}$$

Beispiel 4.3.16 Die entsprechenden Rekursionsrelationen für q-Multinomialkoeffizienten lauten:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} p \\ p_r,\ldots,p_1 \end{bmatrix}_q &= \sum_{i=1}^{r} \begin{bmatrix} p-1 \\ p_r,\ldots,p_{i+1},p_i-1,p_{i-1},\ldots,p_1 \end{bmatrix}_q q^{\sum_{j>i} p_j} = \\
&= \sum_{i=1}^{r} \begin{bmatrix} p-1 \\ p_r,\ldots,p_{i+1},p_i-1,p_{i-1},\ldots,p_1 \end{bmatrix}_q q^{\sum_{j<i} p_j}
\end{aligned}$$

Ferner sind analog zu q-deformierten, cf. [1], die σ-deformierten Multinomialkoeffizienten als Produkte von Binomialkoeffizienten darstellbar.

Lemma 4.3.17 (Produktdarstellung) *Es sei $\sum_{i=1}^{r} p_i = p \leq m \in \mathbf{N}$, dann gilt:*

$$\left[\begin{array}{c} p \\ p_r, \ldots, p_1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = \prod_{i=r-1}^{1} \left[\begin{array}{c} p_{i+1} + \ldots + p_1 \\ p_{i+1}, p_i + \ldots + p_1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = $$

$$= \prod_{i=1}^{r-1} \left[\begin{array}{c} p_r + \ldots + p_i \\ p_r + \ldots + p_{i+1}, p_i \end{array} \right]_\sigma^{(m-\sum_{j<i} p_j)}$$

Insbesondere gilt für die σ-deformierte Fakultät:

$$[r]!_\sigma^{(m)} = \prod_{i=r-1}^{0} \left[\begin{array}{c} i+1 \\ 1, i \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = \prod_{i=r-1}^{0} \left[\begin{array}{c} i+1 \\ i, 1 \end{array} \right]_\sigma^{(i+1)}$$

Weitere wichtige Formeln für σ-deformierte Binomialkoeffizienten sind im folgenden zusammengestellt, vgl. auch [24]. Zur Abkürzung definiere man folgende Elemente von B_m:

$$\sigma_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i \sigma_{i+1} \ldots \sigma_j & i < j \\ 1 & i = j \\ \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \ldots \sigma_j & j < i \end{cases}$$

Lemma 4.3.18 *i) Es gilt:*

$$[n]!_\sigma^{(m)} = \left[\begin{array}{c} n \\ n-k, k \end{array} \right]_\sigma^{(m)} [k]!_\sigma^{(m)} [n-k]!_\sigma^{(m-k)}, \qquad n \leq m; k = 0, 1, \ldots, n$$

ii) Es gilt:

$$\prod_{k=1}^{m} (1 - \gamma_{k,i} \sigma_{k,1}) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \left[\begin{array}{c} m \\ l, m-l \end{array} \right]_\sigma^{(m)} \prod_{j=0}^{l} \gamma_{j,i} \sigma_{j,1}$$

iii) Es gilt:

$$\left[\begin{array}{c} p \\ n, p-n \end{array} \right]_\sigma^{(m)} = \sum_{j=0}^{n} \left[\begin{array}{c} j+p-n-1 \\ j, p-n-1 \end{array} \right]_\sigma^{(m)} \sigma_{m-p+1+n-j, m-p+1+n}$$

Beispiel 4.3.19 Formel *i)* ist analog zur Formel für q-deformierte Binomialkoeffizienten:

$$[n]!_q = \left[\begin{array}{c} n \\ n-k, k \end{array} \right]_q [k]!_q \, [n-k]!_q, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

ii) ist analog zur Formel, vgl. [1], Satz 3.3.:

$$\prod_{k=1}^{m} (1 - z q^{k-1}) = \sum_{l=0}^{m} \left[\begin{array}{c} m \\ l, m-l \end{array} \right]_q (-z)^l q^{\frac{l(l-1)}{2}}$$

und *iii)* analog zur Formel, vgl. [1], Satz 3.4.:

$$\left[\begin{array}{c} p \\ n, p-n \end{array} \right]_q = \sum_{j=0}^{n} q^j \left[\begin{array}{c} j+p-n-1 \\ j, p-n-1 \end{array} \right]_q$$

Beispiel 4.3.20 Formel i) lautet für $n = 4 \leq m, k = 2$:

$$\begin{aligned}
[4]!_\sigma^{(m)} &= (1+\sigma_{m-1}+\sigma_{m-2}\sigma_{m-1}+\sigma_{m-3}\sigma_{m-2}\sigma_{m-1}) \times \\
&\quad \times(1+\sigma_{m-2}+\sigma_{m-3}\sigma_{m-2})(1+\sigma_{m-3}) = \\
&= (1+\sigma_{m-2}+\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}+(1+\sigma_{m-1}+\sigma_{m-2}\sigma_{m-1})\sigma_{m-3}\sigma_{m-2}) \times \\
&\quad \times(1+\sigma_{m-3})(1+\sigma_{m-1}) = \\
&= \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2,2 \end{array}\right]_\sigma^{(m)} [2]!_\sigma^{(m)}\,[2]!_\sigma^{(m-2)}
\end{aligned}$$

4.3.4 Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten äquivarianten m-Ketten und -Zyklen

Vorbemerkungen

In Analogie zum 2-dimensionalen Fall werden in diesem Unterabschnitt Darstellungen von B_n als Gruppen von Automorphismen von Faktorgruppen der m-dimensonalen Ketten- und Homologiegruppen des Komplexes $(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})$ behandelt. Hierbei ist der Koeffizientenmodul G_0' nicht nur als ein $B_n U_{n,m}$-Modul, sondern auch als ein B_m'-Modul angenommen, wobei B_m' die Untergruppe von B_{n+m} ist, erzeugt von den Elementen σ_j, $j = 1, \ldots, m-1$. Die resultierenden Automorphismendarstellungen von B_n werden sich explizit angeben lassen.

Notation Man erinnere, daß $U_{n,m}$ das mehrfache semidirekte Produkt der m freien Gruppen $U_{p,1} = \langle \gamma_{m+n-p,j}; j = m+n-p+1, \ldots, m+n \rangle$, $p = n, \ldots, n+m-1$, vom jeweiligen Rang p bezeichnet. Hierbei wirken die Gruppen $U_{p,1}$ jeweils als Gruppen von Automorphismen aller Gruppen $U_{q,1}$ mit $q > p$. Weiter sei $B_n U_{n,m}$ wieder das semidirekte Produkt der Zopfgruppe B_n und $U_{n,m}$. Die Zopfgruppe B_n mit den Generatoren σ_i, $i = m+1, \ldots, m+n-1$, wirkt als Gruppe von Automorphismen der Gruppe $U_{n,m}$ und des Gruppenrings $\mathbf{Z}U_{n,m}$ bzgl. des Rings $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen. Schließlich sei $B_n B_m' U_{n,m}$ das semidirekte Produkt der Zopfgruppe B_n und des semidirekten Produkts von B_m' und $U_{n,m}$. B_m' bezeichnet hier die Untergruppe von B_{n+m}, erzeugt von den Elementen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$. Die Zopfgruppe B_m' wirkt (von rechts) als Automorphismus von $U_{n,m}$. Und zwar gilt für $\sigma_j \in B_m'$, $\gamma_{k,l} \in U_{n,m}$:

$$\gamma_{k,l}\sigma_j = \sigma_i \begin{cases} \gamma_{k,l} & j < k-1 \\ \gamma_{k-1,l} & j = k-1 \\ \gamma_{k,k+1}^{-1}\gamma_{k+1,l}\gamma_{k,k+1} & j = k \\ \gamma_{k,l} & k < j < l-1 \\ \gamma_{k,l-1} & j = l-1 \\ \gamma_{k,l}\gamma_{k,l+1}\gamma_{k,l}^{-1} & j = l \\ \gamma_{k,l} & j > l \end{cases}$$

Insgesamt hat man die Abkürzungen:

$$U_{n,m} = U_{n,1} \bowtie U_{n+1,1} \bowtie \ldots \bowtie U_{n+m-1,1}$$

$$\begin{aligned} B_n U_{n,m} &= B_n \ltimes U_{n,m} \\ B_n B'_m U_{n,m} &= B_n \ltimes (B'_m \ltimes U_{n,m}) \end{aligned}$$

Definition 4.3.21 Es sei G'_0 eine kommutative Gruppe und $\Phi_g^{(0)} : B_n B'_m U_{n,m} \to \mathrm{Aut}(G'_0)$ ein Homomorphismus, so daß G'_0 ein $B_n B'_m U_{n,m}$-(Rechts-)Modul, generisch bzgl. $U_{n,m}$, ist, gegeben durch die Multiplikationsabbildung

$$\begin{aligned} G'_0 \times B_n B'_m U_{n,m} &\to G'_0 \\ (g', \beta) &\to g'\,\beta := \Phi_g^{(0)}(\beta)(g'), \qquad \beta \in B_n B'_m U_{n,m} \end{aligned}$$

Faktorgruppen

Man erinnere, für einen Koeffizientenmodul G'_0, generisch bzgl. $U_{n,m}$, gilt:

$$\begin{aligned} \left[\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m &\cong (G'_0)^{(n)_m} \\ H_q\left(\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) &\cong (G'_0)^{(n-1)_m} \end{aligned}$$

Definition 4.3.22 Sei $C_m^- = \left[\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m / \sim$ die Kettengruppe $\left[\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m$ modulo der Relationen $R_{k;j}^{(r-1,r)} = 0$, $k, j = 1, \ldots, n$, $k \geq j$, $r = 2, \ldots, m$, wobei:

$$\begin{aligned} R_{k;j}^{(r-1,r)} &= \Big(g^{(r-2)}\,(\sigma_{r-1}^{-1} - \sigma_{r-1}) \otimes e_r^{(r-1)} \otimes e_{r+k}^{(r)} + \\ &\quad + g^{(r-2)}\,\sigma_{r-1} \otimes e_{r+j}^{(r-1)} \otimes e_{r+k}^{(r)} - g^{(r-2)} \otimes e_{r+k}^{(r-1)} \otimes e_{r+j}^{(r)}\Big) \otimes \\ &\quad \otimes e_{j_{r+1}}^{(r+1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)} = 0 \end{aligned}$$

mit $g^{(r-2)} \in G_{r-2} = \left[\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r+2,1})\right]_{r-2}$.

Lemma 4.3.23 (Geordnete Ketten) *Es gilt:*

$$C_m^- \cong (G'_0)^N$$

wobei $N = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m, n-1 \end{pmatrix}$, *und zwar hat jedes Element aus* C_m^- *eine eindeutige Darstellung der Form:*

$$\sum_{\substack{k_j = 1, \ldots, n \\ k_j \geq k_{j+1}}} a'_{k_1, \ldots, k_m} \otimes e_{m+k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{m+k_m}^{(m)}, \qquad a'_{k_1, \ldots, k_m} \in G'_0$$

Beweis. Sei $g' \otimes e_{1+j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{r-1+j_{r-1}}^{(r-1)} \otimes e_{r+j_r}^{(r)} \otimes \ldots \otimes e_{m+j_m}^{(m)} \in C_m^-$, eine Kette, wobei $j_{r-1} < j_r + 1$ für mindestens ein $r \in \{2, \ldots, m\}$ ist. Dann hat man im Falle $j_{r-1} = 1$ mittels der C_m^- definierenden Relationen $R_{j_r;j_r}^{(r-1,r)} = 0$:

$$g^{(r-2)} \otimes e_r^{(r-1)} \otimes e_{r+j_r}^{(r)} = \left[\Phi_g^{(0)}(1 + \sigma_{r-1}^{-1})\right]^{-1} (g^{(r-2)}) \otimes e_{r+j_r}^{(r-1)} \otimes e_{r+j_r}^{(r)}$$

und im Falle $j_{r-1} > 1$ mittels der C_m^- definierenden Relationen $R^{(r-1,r)}_{j_r;j_{r-1}-1} = 0$:

$$\begin{aligned} g^{(r-2)} \otimes e^{(r-1)}_{r-1+j_{r-1}} \otimes e^{(r)}_{r+j_r} &= g^{(r-2)}\,\sigma^{-1}_{r-1} \otimes e^{(r-1)}_{r+j_r} \otimes e^{(r)}_{r-1+j_{r-1}} + \\ &\quad + g^{(r-2)}\,(\sigma^{-1}_{r-1} - 1) \otimes e^{(r-1)}_{r+j_r} \otimes e^{(r)}_{r+j_r}) \end{aligned}$$

Hierbei ist wieder $g^{(r-2)} \in G_{r-2} = \left[\left(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r+2,1})\right]_{r-2}$. Daß $(1 + \sigma_{r-1})$ als Endomorphismus von G_{r-2} invertierbar ist, folgt aus der Generizität von G_0' bzgl. $U_{n,m}$. Die Kette hat also in jedem Falle einen Ausdruck in Ketten der Gestalt: $g' \otimes e^{(1)}_{1+j_1} \otimes \ldots \otimes e^{(r-1)}_{r+k_{r-1}} \otimes e^{(r)}_{r+k_r} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m} \in C_m^-$ mit $k_{r-1} \geq k_r$.
Auf diese Weise haben alle Ketten der Faktorgruppe C_m^- einen Ausdruck in geordneten Ketten: $g' \otimes e^{(1)}_{m+k_1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+k_m}$ mit $k_{r-1} \geq k_r$ für alle $r = 2, \ldots, m$. □

Definition 4.3.24 Sei $H_m^- = H_m\left(\left(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) / \sim$ die Homologiegruppe $H_m\left(\left(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)$ modulo der Relationen $S^{(r-1,r)}_{k;j} = 0$, $k, j = 1, \ldots, n-1$, $k \geq j$, $r = 2, \ldots, m$, wobei:

$$\begin{aligned} S^{(r-1,r)}_{k;j} &= \Big(g^{(r-2)}\,(\sigma^{-1}_{r-1} - 1) \otimes e^{(r-1)}_{r+k,r+k+1} \otimes e^{(r)}_{r+j,r+j+1}) + \\ &\qquad + g^{(r-2)}\,(\sigma_{r-1} - 1) \otimes e^{(r-1)}_{r+j,r+j+1} \otimes e^{(r)}_{r+k,r+k+1})\Big) \otimes \\ &\quad \otimes e^{(r+1)}_{j_{r+1},j_{r+1}+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{j_m,j_m+1} = 0 \\ &\qquad k > j \\ S^{(r-1,r)}_{j;j}, &= \Big(g^{(r-2)}\,(\sigma^{-1}_{r-1} - \sigma_{r-1}) \otimes e^{(r-1)}_{r+1,r+j} \otimes e^{(r)}_{r+j,r+j+1})+ \\ &\qquad + g^{(r-2)}\,(\sigma^{-1}_{r-1} - 1) \otimes e^{(r-1)}_{r+j,r+j+1} \otimes e^{(r)}_{r+j,r+j+1})\Big) \\ &\quad \otimes e^{(r+1)}_{j_{r+1},j_{r+1}+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{j_m,j_m+1} = 0 \end{aligned}$$

mit $g^{(r-2)} \in G_{r-2} = \left[\left(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r+2,1})\right]_{r-2}$.

Lemma 4.3.25 (Geordnete Zyklen) *Es gilt:*

$$H_m^- \cong (G_0')^N$$

wobei $N = \begin{pmatrix} n+m-2 \\ m, n-2 \end{pmatrix}$, *und zwar hat jedes Element aus* H_m^- *eine eindeutige Darstellung der Form:*

$$\sum_{\substack{k_j = 1,\ldots,n-1 \\ k_j \geq k_{j+1}}} b'_{k_1,\ldots,k_m} \otimes e^{(1)}_{m+k_1,m+k_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+k_m,m+k_m+1}, \qquad b'_{k_1,\ldots,k_m} \in G_0'$$

Beweis. Sei $g' \otimes e^{(1)}_{1+j_1,1+j_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(r-1)}_{r-1+j_{r-1},r+j_{r-1}} \otimes e^{(r)}_{r+j_r,r+j_r+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m,m+j_m+1} \in H^-_m$, ein Zyklus, wobei $j_{r-1} < j_r + 1$ für mindestens ein $r \in \{2, \ldots, m\}$ ist. Dann hat man im Falle $j_{r-1} = 1$ mittels der Relationen $S^{(r-1,r)}_{j_r;j_r} = 0$:

$$g^{(r-2)} \otimes e^{(r-1)}_{r,r+j_r} \otimes e^{(r)}_{r+j_r,r+j_r+1} = \left[\Phi^{(0)}_g(1+\sigma^{-1}_{r-1})\right]^{-1} (g^{(r-2)}) \otimes e^{(r-1)}_{r+j_r,r+j_r+1} \otimes e^{(r)}_{r+j_r,r+j_r+1}$$

und im Falle $j_{r-1} > 1$ mittels der Relationen $S^{(r-1,r)}_{j_r;j_{r-1}-1} = 0$:

$$g^{(r-2)} \otimes e^{(r-1)}_{r-1+j_{r-1},r+j_{r-1}} \otimes e^{(r)}_{r+j_r,r+j_r+1} = g^{(r-2)}\sigma^{-1}_{r-1} \otimes e^{(r-1)}_{r+j_r} \otimes e^{(r)}_{r-1+j_{r-1}}$$

Invertierbarkeit von $(1+\sigma_{r-1})$ als Endomorphismus von G_{r-2} folgt aus der Generizität von G'_0 bzgl. $U_{n,m}$. Der Zyklus hat also in jedem Falle einen Ausdruck in Zyklen der Gestalt $g' \otimes e^{(1)}_{1+j_1,1+j_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(r-1)}_{r+k_{r-1},r+k_{r-1}+1} \otimes e^{(r)}_{r+k_r,r+k_r+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+j_m,m+j_m+1}$ mit $k_{r-1} \geq k_r$.
Auf diese Weise haben alle Zyklen in H^-_m einen Ausdruck in geordneten Zyklen $g' \otimes e^{(1)}_{m+k_1,m+k_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{m+k_m,m+k_m+1}$ mit $k_{r-1} \geq k_r$ für alle $r = 2, \ldots, m$. □

Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten m-Ketten

Es bezeichne nun $\mathcal{P}(m)$ eine Partition von m:

$$m = m_{\succ i+1} + m_{i+1} + m_i + m_{\prec i}$$

wobei die Zahlen m_j die Anzahl der formalen Faktoren $e^{(j)}_{k_j}$ mit den Indices $k_j > i+1$, $k_j = i+1$, $k_j = i$ und $k_j < i$ angeben, die in $g' \otimes e^{(1)}_{k_1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{k_m} \in C^-_m$ vorkommen:

$$\begin{array}{rcl} k_1, \ldots, k_{m_{\succ i+1}} & \geq & i+2 \\ k_{m_{\succ i+1}+1}, \ldots, k_{m_{\succ i}} & = & i+1 \\ k_{m_{\succ i}+1}, \ldots, k_{m_{\succ i-1}} & = & i \\ k_{m_{\succ i-1}+1}, \ldots, k_m & \leq & i-1 \end{array}$$

oder:

$$g' \otimes \underbrace{e^{(1)}_{k_1} \otimes \ldots}_{m_{\succ i+1}} \otimes \underbrace{e^{(m_{\succ i+1}+1)}_{i+1} \otimes \ldots}_{m_{i+1}} \otimes \underbrace{e^{(m_{\succ i}+1)}_{i} \otimes \ldots}_{m_i} \otimes \underbrace{e^{(m_{\succ i-1}+1)}_{k_{m_{\succ i-1}+1}} \otimes \ldots e^{(m)}_{k_m}}_{m_{\prec i}}$$

wobei $p > i+1$ und $q < i$ ist.

Satz 4.3.26 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Kettengruppe $C^-_m \cong (G'_0)^N$ mit $N = \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m, n-1 \end{pmatrix}$, und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi^{(0,\ldots,m),-}_c : B_n \quad \rightarrow \quad Aut(C^-_m) \cong Aut\left((G'_0)^N\right)$$

wie folgt gegeben:

$$\chi_c^{(0,\dots,m),-}(\sigma_i) = \Phi_g^{(0)}\left(\sigma_i R_c^{(1,\dots,m),-}(\sigma_i)\right)$$

Es ist $R_c^{(1,\dots,m),-}(\sigma_i) \in GL\left(\mathbf{Z}B'_m U_{n,m}, \begin{pmatrix} n+m-1 \\ m, n-1 \end{pmatrix}\right)$ *mit den Einträgen:*

$$\left(R_c^{(1,\dots,m),-}(\sigma_i)\right)_{k_1,\dots,k_m}^{l_1,\dots,l_m} = \begin{bmatrix} m_i \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}_\sigma^{(m-m_{\prec i})} \prod_{j=1}^{p_{i+1}} \gamma_{r+j,i}\sigma_{r+j,r+j-m_{i+1}} \times$$
$$\times \prod_{k=1}^{p_i}(1-\gamma_{s+k,i}\sigma_{s+k,s+1-m_{i+1}})$$

Hierbei ist $r = m_{\succ i+1} + m_{i+1}$, $s = m_{\succ i+1} + m_{i+1} + p_{i+1}$ *und* $\mathcal{P}(m_i) = p_{i+1} + p_i$, *und die Indices* l_j *nehmen folgende Werte an:*

$$\begin{aligned} l_1, \dots, l_{m_{\succ i+1}} &\geq i+2 \\ l_{m_{\succ i+1}+1}, \dots, l_{m_{\succ i+1}+p_{i+1}} &= i+1 \\ l_{m_{\succ i+1}+p_{i+1}+1}, \dots, l_{m_{\succ i-1}} &= i \\ l_{m_{\succ i-1}+1}, \dots, l_m &\leq i-1 \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist durch vollständige Induktion nach m. Die Fall $m = 2$ wurde im vorigen Kapitel behandelt.
Es sei angenommen, die Behauptung gelte für ein $m > 2$.
Für alle $g' \in G'_0$ ist die Matrix $R_c^{(1,\dots,m),-}(\sigma_i)$ durch die folgenden Relationen gegeben

$$\left(g' \otimes e_{k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{k_m}^{(m)}\right) \sigma_i =$$
$$= \sum_{l_j} g' \sigma_i \left(R_c^{(1,\dots,m),-}(\sigma_i)\right)_{k_1,\dots,k_m}^{l_1,\dots,l_m} \otimes e_{l_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{l_m}^{(m)}, \qquad l_{j-1} \geq l_j$$

Die Induktion ist nichttrivial nur dann, wenn ein formaler Faktor e_{i+1} oder e_i multipliziert wird. Daher kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen: $m_{\succ i+1} = m_{\prec i} = 0$ und $\mathcal{P}(m) = m_{i+1} + m_i$. Man betrachte zunächst den Fall $m = m_i$. Induktionsannahme ist:

$$\left(g' \otimes e_i^{(1)} \otimes \dots \otimes e_i^{(m)}\right) \sigma_i =$$
$$= \sum_{\mathcal{P}(m)} g' \sigma_i \begin{bmatrix} m \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}_\sigma^{(m)} \prod_{k=1}^{p_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p_{i+1}+1}) \otimes$$
$$\otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \dots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1})} \otimes e_i^{(p_{i+1}+1)} \otimes \dots \otimes e_i^{(m)}$$

Man betrachte nun den Fall $m+1 = m'_i = m_i + 1$, d.h. den Fall von $m+1$ Faktoren $e_i^{(j)}$:

$$\left(g' \otimes e_i^{(1)} \otimes \dots \otimes e_i^{(m)} \otimes e_i^{(m+1)}\right) \sigma_i =$$

$$
\begin{aligned}
= & \left(\sum_{\mathcal{P}(m)} g'\,\sigma_i \left[\begin{array}{c} m \\ p_{i+1}, p_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \prod_{k=1}^{p_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p_{i+1}+1}) \otimes \right. \\
& \left. \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1})} \otimes e_i^{(p_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m)} \right) \otimes \\
& \otimes \left[(1-\gamma_{m+1,i})e_i^{(m+1)} + \gamma_{m+1,i}e_{i+1}^{(m+1)}\right]
\end{aligned}
$$

Nun nehmen die Koeffizienten $\gamma_{m+1,i}$ zu den Faktoren $e_j^{(m+1)}, j = i, i+1$ bei der Kommutation mit $e_i^{(p_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m)}$ gemäß der Relationen:

$$
\left(g^{(k-2)} \otimes e_i^{(k-1)}\right) \otimes \gamma_{k,i}\, e_l^{(k)} \quad = \quad \left(g^{(k-2)}\gamma_{k,i}\sigma_{k-1} \otimes e_l^{(k-1)}\right) \otimes e_i^{(k)}, \qquad l = i, i+1
$$

wobei $g^{(k-2)} \in G_{k-2} = \left[\left(G_0' \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+m-k+2,1})\right]_{k-2}$ ist, die p_i Faktoren $\sigma_m \ldots \sigma_{m+1-p_i}$ auf. Die resultierenden Koeffizienten kommutieren mit den Faktoren $e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1})}$:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\mathcal{P}(m)} g' \left[\begin{array}{c} m \\ p_{i+1}, p_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \prod_{k=1}^{p_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p_{i+1}+1})(1-\gamma_{m+1,i}\sigma_{m+1,m+1-p_i}) \otimes \\
& \quad \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1})} \otimes e_i^{(p_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m+1)} + \\
& + \sum_{\mathcal{P}(m)} g' \left[\begin{array}{c} m \\ p_{i+1}, p_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \prod_{k=1}^{p_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p_{i+1}+1})\gamma_{m+1,i}\sigma_{m+1,m+1-p_i} \otimes \\
& \quad \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1}+1)} \otimes e_i^{(p_{i+1}+2)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m+1)}
\end{aligned}
$$

Man kommutiere im zweiten Summanden die Faktoren $\gamma_{m+1,i}\sigma_{m+1,m+1-p_i}$ nach links mit Hilfe von Relationen:

$$
\gamma_{k,i}\sigma_{k,k-l}\gamma_{k+1,i}\sigma_{k+1,k-l} = \gamma_{k+1,i}\sigma_{k+1,k-l}\gamma_{k+1,i}\sigma_{k+1,k-l+1}
$$

und beachte:

$$
\gamma_{k,i}\sigma_{k,j} = \sigma_{k,j}\gamma_{j,i}, \qquad k > j
$$

Dann sieht man, daß die zwei Summanden zu jeder nichttrivialen Partition von $m+1$ gemäß der Rekursion der Gauß-Multinomialkoeffizienten kombinieren:

$$
\left[\begin{array}{c} m+1 \\ p'_{i+1}, p'_i \end{array}\right]_\sigma^{(m+1)} \quad = \quad \left[\begin{array}{c} m \\ p'_{i+1}, p'_i - 1 \end{array}\right]_\sigma^{(m)} + \left[\begin{array}{c} m \\ p'_{i+1} - 1, p'_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \sigma_{m+1,m+1-p'_i}
$$

Es folgt:

$$
\left(g' \otimes e_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m+1)}\right) \sigma_i =
$$

$$= \sum_{\mathcal{P}(m+1)} g'\,\sigma_i \left[\begin{array}{c} m+1 \\ p'_{i+1}, p'_i \end{array}\right]_\sigma^{(m+1)} \prod_{k=1}^{p'_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=p'_{i+1}+1}^{m+1} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p'_{i+1}+1}) \otimes$$
$$\otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p'_{i+1})} \otimes e_i^{(p'_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m+1)}$$

Damit ist die Induktion für den Fall $m = m_i$ vollständig.
Die Induktion für den Fall $m = m_{i+1} + m_i$ erübrigt sich, denn für $m = m_{i+1} + m_i$ folgt leicht:

$$\left(g' \otimes e_{k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{k_m}^{(m)}\right) \sigma_i =$$
$$= \Bigg(g'\,\sigma_i \otimes e_i^{(1)} \cdot \ldots \cdot e_i^{(m_{i+1})} \times$$
$$\times \sum_{\mathcal{P}(m_i)} \left[\begin{array}{c} m_i \\ p_{i+1}, p_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \prod_{k=m_{i+1}+1}^{m_{i+1}+p_{i+1}} \gamma_{k,i} \prod_{k=m_{i+1}+p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,m_{i+1}+p_{i+1}+1})\Bigg) \otimes$$
$$\otimes e_{i+1}^{(m_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(m_{i+1}+p_{i+1})} \otimes e_i^{(m_{i+1}+p_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m)}$$

Die Koeffizienten $\gamma_{k,i}$ zu den Faktoren $e_j^{(k)}, j = i, i+1$ nehmen bei Kommutation mit den m_{i+1} Faktoren $e_i^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m_{i+1})}$ jeweils m_{i+1} Faktoren $\sigma \in B'_m$ auf:

$$\sum_{\mathcal{P}(m_i)} g'\,\sigma_i \left[\begin{array}{c} m_i \\ p_{i+1}, p_i \end{array}\right]_\sigma^{(m)} \prod_{k=m_{i+1}+1}^{m_{i+1}+p_{i+1}} \gamma_{k,i}\sigma_{k,k-m_{i+1}} \prod_{k=m_{i+1}+p_{i+1}+1}^{m} (1-\gamma_{k,i}\sigma_{k,p_{i+1}+1}) \otimes$$
$$\otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{i+1}^{(p_{i+1})} \otimes e_i^{(p_{i+1}+1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(m)}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Beispiel 4.3.27 Kurz kann man sich die Formeln zur Darstellung von $\sigma_i \in B_n$ als Automorphismus von C_m^- bis auf den Homomorphismus $\Phi_g^{(0)} : B_n B'_m U_{n,m} \to \mathrm{Aut}(G'_0)$ zustandegekommen denken durch die (Rechts-)Wirkung von $\sigma_i \in B_n$ auf die einzelnen Faktoren im formalen Produkt $e_{j_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{j_m}^{(m)}$. Und zwar wird $e_{i+1}^{(k)}$ zu $e_i^{(k)}$, und $e_i^{(k)}$ wird zu $(1-\gamma_{k,i})e_i^{(k)} + \gamma_{k,i}e_{i+1}^{(k)}$, die $\gamma_{k,i}e_j^{(k)}$, $j = i, i+1$ sind nach links durch alle $e_i^{(l)}$, $l > k$, zu kommutieren, und schließlich sind die Koeffizienten aller Produkte mit gleicher Anzahl von Faktoren e_i und e_{i+1} mit Hilfe der Gauß-Multinomialkoeffizienten zusammenzufassen.
Im folgenden sind beispielhaft die expliziten Formeln für $m = 3$ zusammengestellt. $\sigma_i \in B_n$ wirkt auf $g' \otimes e_{k_1}^{(1)} \otimes e_{k_3}^{(3)} \otimes e_{k_3}^{(3)} \in C_3^-$, $g' \in G'_0$, $k_j = 4, \ldots, 3+n$, gemäß der typischen Relationen:

$$\left(g' \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_{i+1}^{(2)} \otimes e_{i+1}^{(3)}\right) \sigma_i =$$
$$= g'\,\sigma_i \otimes e_i^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}$$
$$\left(g' \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_i^{(3)}\right) \sigma_i =$$

$$
\begin{aligned}
&= g'\sigma_i\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1 \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)} + \\
&\quad + g'\,\sigma_i(1-\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1) \otimes e_i^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(g' \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}\right)\,\sigma_i = \\
&= g'\,\sigma_i\gamma_{2,i}\sigma_1\gamma_{3,i}\sigma_2 \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_{i+1}^{(2)} \otimes e_i^{(3)} + \\
&\quad + g'\,\sigma_i[2]!_\sigma^{(3)}\gamma_{2,i}\sigma_1(1-\gamma_{3,i}\sigma_2) \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)} + \\
&\quad + g'\,\sigma_i(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)(1-\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1) \otimes e_i^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(g' \otimes e_i^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}\right)\,\sigma_i = \\
&= g'\,\sigma_i\gamma_{1,i}\gamma_{2,i}\gamma_{3,i} \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_{i+1}^{(2)} \otimes e_{i+1}^{(3)} + \\
&\quad + g'\,\sigma_i \begin{bmatrix} 3 \\ 2,1 \end{bmatrix}_\sigma^{(3)} \gamma_{1,i}\gamma_{2,i}(1-\gamma_{3,i}) \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_{i+1}^{(2)} \otimes e_i^{(3)}) + \\
&\quad + g'\,\sigma_i \begin{bmatrix} 3 \\ 1,2 \end{bmatrix}_\sigma^{(3)} \gamma_{1,i}(1-\gamma_{2,i})(1-\gamma_{3,i}\sigma_2) \otimes e_{i+1}^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)} + \\
&\quad + g'\,\sigma_i(1-\gamma_{1,i})(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)(1-\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1) \otimes e_i^{(1)} \otimes e_i^{(2)} \otimes e_i^{(3)}
\end{aligned}
$$

Darstellungen der Zopfgruppe B_n auf geordneten m-Zyklen

Es bezeichne wieder $\mathcal{P}(m)$ eine Partition von m:

$$m = m_{\succ i+1} + m_{i+1} + m_i + m_{i-1} + m_{\prec i-1}$$

wobei nun die Zahlen m_j die Anzahl der Faktoren e_{k_j,k_j+1} mit beziehungsweise den Indices $k_j > i+1, k_j = i+1, k_j = i, k_j = i-1, k_j < i-1$ angeben, die im formalen Produkt $g' \otimes e_{k_1,k_1+1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_{k_m,k_m+1}^{(m)} \in H_m^-$ vorkommen:

$$
\begin{aligned}
k_1, \ldots, k_{m_{\succ i+1}} &\geq i+2 \\
k_{m_{\succ i+1}+1}, \ldots, k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}} &= i+1 \\
k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+1}, \ldots, k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i} &= i \\
k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i+1}, \ldots, k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i+m_{i-1}} &= i-1 \\
k_{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i+m_{i-1}+1}, \ldots, k_m &\leq i-2
\end{aligned}
$$

Satz 4.3.28 *Die Zopfgruppe B_n hat eine Darstellung als Gruppe von Automorphismen von $H_m^- \cong (G_0')^N$ mit $N = \begin{pmatrix} n+m-2 \\ m, n-2 \end{pmatrix}$ und zwar ist der Homomorphismus:*

$$\chi_h^{(0,\ldots,m),-} : B_n \quad \longrightarrow \quad Aut(H_m^-) \cong Aut\left((G_0')^N\right)$$

gegeben durch:

$$\chi_h^{(0,\ldots,m),-}(\sigma_i) \quad = \quad \Phi_g^{(0)}\left(\sigma_i R_h^{(1,\ldots,m),-}(\sigma_i)\right)$$

Es ist $R_h^{(1,\ldots,m),-}(\sigma_i) \in GL\left(\mathbf{Z}B'_m U_{n,m}, \begin{pmatrix} n+m-2 \\ m, n-2 \end{pmatrix}\right)$ *mit den Einträgen:*

$$\begin{aligned}
\left(R_h^{(1,\ldots,m),-}(\sigma_i)\right)_{k_1,\ldots,k_m}^{l_1,\ldots,l_m} &= \\
= \; & \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}_{\sigma^{-1}}^{(m_{\succ i+1}+m_{i+1})} (-1)^{m_i} \prod_{k=m_{\succ i+1}+m_{i+1}+1}^{m_\succ + m_{i+1}+m_i} \gamma_{k,i}\sigma_{k,m_{\succ i+1}+m_{i+1}+1} \times \\
& \times \begin{bmatrix} m_{i-1} \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}_{\sigma^{-1}}^{(m-m_{\prec i-1})} \prod_{k=m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i+1}^{m_{\succ i+1}+m_{i+1}+m_i+q_i} \gamma_{k,i}\sigma_{k,k-m_i-p_i}
\end{aligned}$$

Hierbei sind $m_{i+1} = p_i + p_{i+1}$ *und* $m_{i-1} = q_{i-1} + q_i$ *beziehungsweise Partitionen* $\mathcal{P}(m_{i+1})$, $\mathcal{P}(m_{i-1})$, *und die Indizes* l_j *sind:*

$$\begin{aligned}
l_1, \ldots, l_{m_{\succ i+1}} &\geq i+2 \\
l_{m_{\succ i+1}+1}, \ldots, l_{m_{\succ i+1}+p_{i+1}} &= i+1 \\
l_{m_{\succ i+1}+p_{i+1}+1}, \ldots, l_{m_{\succ i}+q_i} &= i \\
l_{m_{\succ i}+q_i+1}, \ldots, l_{m_{\succ i-2}} &= i-1 \\
l_{m_{\succ i-2}+1}, \ldots, l_m &\leq i-2
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes (Anfang). Für alle $g' \in G'_0$ ist die Matrix $R_h^{(1,\ldots,m),-}(\sigma_i)$ durch die folgenden Relationen gegeben

$$\begin{aligned}
& \left(g' \otimes e^{(1)}_{k_1,k_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{k_m,k_m+1}\right) \sigma_i = \\
= \; & \sum_{l_j} g' \sigma_i \left(R_h^{(1,\ldots,m),-}(\sigma_i)\right)_{k_1,\ldots,k_m}^{l_1,\ldots,l_m} \otimes e^{(1)}_{l_1,l_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{l_m,l_m+1}, \qquad l_{j-1} \geq l_j
\end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes benötigt man die folgenden Lemmata zur Rechtswirkung von $\sigma_i \in B_n$ auf formale Produkte von Faktoren $e^{(j)}_{k_j,k_j+1}$ mit den Indizes $k_j = i-1, i, i+1$. □

Lemma 4.3.29 *Es gilt für* $\sigma_i \in B_n$*:*

$$\begin{aligned}
& \left(g' \otimes e^{(1)}_{i-1,i} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i-1,i}\right) \sigma_i = \\
= \; & \sum_{\mathcal{P}(m)} g' \sigma_i \begin{bmatrix} m \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}_{\sigma^{-1}}^{(m)} \prod_{k=1}^{q_i} \gamma_{k,i} \otimes e^{(1)}_{l_1,l_1+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{l_m,l_m+1}
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}(m) = q_{i-1} + q_i$ *ist, und die Indizes sind:*

$$\begin{aligned}
l_1, \ldots, l_{q_i} &= i \\
l_{q_i+1}, \ldots, l_m &= i-1
\end{aligned}$$

Beweis. Die Behauptung sei richtig für ein r, $1 < r < m$. Es ist der folgende Ausdruck auszuwerten:

$$\left(g'\,\sigma_i \otimes (e^{(1)}_{i-1,i} + \gamma_{1,i}\,e^{(1)}_{i,i+1})\right) \otimes$$
$$\otimes \sum_{\mathcal{P}(r)} \begin{bmatrix} r \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}^{(r+1)}_{\sigma^{-1}} \prod_{k=2}^{q_i+1} \gamma_{k,i}\,e^{(2)}_{l_2,l_2+1} \otimes \ldots \otimes e^{(r+1)}_{l_r,l_{r+1}+1}$$

wobei:

$$\begin{aligned} l_2, \ldots, l_{q_i+1} &= i \\ l_{q_i+2}, \ldots, l_{r+1} &= i-1 \end{aligned}$$

Die Gauß-Faktoren $\begin{bmatrix} r \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}^{(r+1)}_{\sigma^{-1}} \in B'_m$ kommutieren nach links. Mit Hilfe der Relationen:

$$\begin{aligned} \left(g^{(m-2)} \otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\right) \gamma_{m,i} \otimes e^{(m)}_{i,i+1} &= \left(g^{(m-2)}\,\gamma_{m,i}\sigma_{m-1} \otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\right) \otimes e^{(m)}_{i,i+1} \\ \left(g^{(m-2)} \otimes e^{(m-1)}_{i-1,i}\right) \gamma_{m,i} \otimes e^{(m)}_{i,i+1} &= \left(g^{(m-2)}\,\gamma_{m-1,i}\gamma_{m,i}(1-\sigma_{m-1}) \otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\right) \otimes e^{(m)}_{i,i+1} + \\ &\quad + \left(g^{(m-2)}\,\sigma^{-1}_{m-1}\gamma_{m-1,i} \otimes e^{(m-1)}_{i,i+1}\right) \otimes e^{(m)}_{i-1,i} \end{aligned}$$

mit $g^{(m-2)} \in G_{m-2} = H_{m-2}\left(\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n+2,1})\right)$ und durch Zusammenfassen der Terme mit Hilfe der Regeln zu den Gauß-Faktoren folgt die Behauptung. □

Lemma 4.3.30 *Es gilt für $\sigma_i \in B_n$:*

$$\left(g' \otimes e^{(1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i,i+1}\right)\,\sigma_i =$$
$$= \quad g'\,\sigma_i(-1)^m \prod_{k=1}^{m} \gamma_{k,i}\sigma_{k,1} \otimes e^{(1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i,i+1}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$\left(g' \otimes e^{(1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i,i+1}\right)\,\sigma_i =$$
$$= \quad g'\,\sigma_i(-1)^m \otimes \gamma_{1,i}\,e^{(1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes \gamma_{m,i}\,e^{(m)}_{i,i+1}$$

Die Kommutation der $\gamma_{j,i}, j = 1, \ldots, m$ der Reihe nach durch die $e^{(1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(j-1)}_{i,i+1}$ nach links produziert die Faktoren $\sigma_{j-1} \ldots \sigma_1$. □

Lemma 4.3.31 *Es gilt für $\sigma_i \in B_n$:*

$$\left(g' \otimes e^{(1)}_{i+1,i+2} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i+1,i+2}\right)\,\sigma_i =$$
$$= \quad \sum_{\mathcal{P}(m)} g'\,\sigma_i \begin{bmatrix} m \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}^{(m)}_{\sigma^{-1}} \otimes e^{(j)}_{l_j,l_j+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{l_m,l_m+1}$$

wobei $\mathcal{P}(m) = p_i + p_{i+1}$ *ist und:*

$$\begin{aligned} l_1, \ldots, l_{p_{i+1}} &= i+1 \\ l_{p_{i+1}+1}, \ldots, l_m &= i \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} &\left(g' \otimes e^{(1)}_{i+1,i+2} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i+1,i+2}\right) \sigma_i = \\ &= \quad g' \sigma_i \otimes (e^{(1)}_{i,i+1} + e^{(1)}_{i+1,i+2}) \otimes \ldots \otimes (e^{(m)}_{i,i+1} + e^{(m)}_{i+1,i+2} \end{aligned}$$

Umordnung der 2^m Summanden rechts mit Hilfe der Relationen der Zyklen und Zusammenfassen der Summanden mit gleicher Anzahl von Faktoren $e_{i,i+1}$ und $e_{i+1,i+2}$ erzeugt die $m+1$ den Partitionen $\mathcal{P}(m)$ assoziierten Terme mit den Gauß-Koeffizienten. □

Beweis des Satzes (Fortsetzung). Es sei angenommen $\mathcal{P}(m) = m_{i-1} + m_i + m_{i+1}$. Folgender Term ist also auszuwerten:

$$\begin{aligned} &\left(\left(\sum_{\mathcal{P}(m_{i+1})} g' \sigma_i \begin{bmatrix} m_{i+1} \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}^{(m_{i+1})}_{\sigma^{-1}} \otimes e^{(1)}_{i+1,i+2} \otimes \ldots \otimes e^{(p_{i+1})}_{i+1,i+2} \otimes \right.\right. \\ &\otimes e^{(p_{i+1}+1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m_{i+1})}_{i,i+1} \Big) (-1)^{m_i} \prod_{k=m_{i+1}+1}^{m_{i+1}+m_i} \gamma_{k,i} \sigma_{k,m_{i+1}+1} \otimes \\ &\otimes e^{(m_{i+1}+1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m_{i+1}+m_i)}_{i,i+1} \Big) \sum_{\mathcal{P}(m_{i-1})} \begin{bmatrix} m_{i-1} \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}^{(m)}_{\sigma^{-1}} \prod_{l=m_{i+1}+m_i+1}^{m_{i+1}+m_i+q_i} \gamma_{l,i} \otimes \\ &\otimes e^{(m_{i+1}+m_i+1)}_{i,i+1} \otimes \ldots \otimes e^{(m_{i+1}+m_i+q_i)}_{i,i+1} \otimes \\ &\otimes e^{(m_{i+1}+m_i+q_i+1)}_{i-1,i} \otimes \ldots \otimes e^{(m)}_{i-1,i} \end{aligned}$$

Nun nehmen die Faktoren $\gamma_{k,i}\sigma_{k,m_{i+1}+1}$ bei Kommutation mit den p_i Faktoren $e_{i,i+1}$ jeweils die p_i Faktoren $\sigma_{m_{i+1}+1,m_{i+1}+1-p_i}$ auf. Weiter kommutieren die Gauß-Faktoren $\begin{bmatrix} m_{i-1} \\ q_i, q_{i-1} \end{bmatrix}^{(m)}_{\sigma^{-1}} \in B_m$ nach links. Und endlich nehmen die Faktoren $\gamma_{l,i}$ bei Kommutation mit den $p_i + m_i$ Faktoren $e_{i,i+1}$ jeweils die Faktoren $\sigma_{l,l-m_i-p_i}$ auf. Dies liefert die Behauptung. □

Beispiele

Beispiel 4.3.32 (2-parametrige Burau-Darstellung von B_n) Es sei $\mathbf{Z}^2$ die von der Menge $\{s,t\}$ frei erzeugte (multiplikativ geschriebene) abelsche Gruppe, $\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in den Variablen s, t und $\Phi^{(0)}_g : B_n B'_m U_{n,m} \to \operatorname{Aut}(\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$ der Homomorphismus, definiert durch:

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}_g(\sigma_i)(1) &= 1, & \sigma_i &\in B_n \\ \Phi^{(0)}_g(\sigma_j)(1) &= s, & \sigma_j &\in B'_m \\ \Phi^{(0)}_g(\gamma)(1) &= t, & \gamma &\in \{\gamma_{j,k}; j = 1, \ldots, m; k = m+1, \ldots, m+n\} \subset U_{n,m} \end{aligned}$$

Damit ist $G'_0 = \mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ ein $B_n B'_m U_{n,m}$-Modul mit Multiplikationsabbildung:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \times B_n B'_m U_{n,m} &\rightarrow \mathbf{Z}[s^{\pm 1}, t^{\pm 1}] \\ (1, \beta) &\rightarrow \Phi_g^{(0)}(\beta)(1), \qquad \beta \in B_n B'_m U_{n,m}\end{aligned}$$

Da der semidirekte Faktor $\sigma_i \in B_n$ mittels $\Phi_g^{(0)}$ auf die Identität abgebildet wird, nennen wir die resultierende Darstellung eine 2-*parametrige Burau-Darstellung* der Zopfgruppe B_n:

$$\chi_c^{(0,\dots,m),-} : B_n \quad \rightarrow \quad \mathrm{Aut}(C_m^-) \cong GL\left(\mathbf{Z}[s^{\pm}, t^{\pm 1}], \binom{n+m-1}{m}\right)$$

Man hat explizit:

$$\left(\chi_c^{(0,\dots,m),-}(\sigma_i)\right)_{k_1,\dots,k_m}^{l_1,\dots,l_m} = \begin{bmatrix} m_i \\ p_{i+1}, p_i \end{bmatrix}_s s^{p_{i+1} m_{i+1}} t^{p_{i+1}} \prod_{k=1}^{p_i} (1 - s^{m_{i+1}+k-1} t)$$

wobei den Indices k_j und l_j, $j = 1, \dots, m$, wie in 4.3.26 gemäß der Partitionen $\mathcal{P}(m) = \sum_{k=1}^n m_k$ und $\mathcal{P}(m_i) = p_{i+1} + p_i$ die Werte $m+1, \dots, m+n$ zugeordnet sind. Die verschiedenen Eigenwerte der Matrix $\chi_c^{(0,\dots,m),-}(\sigma_i)$ sind:

$$1, (-1)^k s^{\sum_{j=1}^{k-1} j} t^k, \quad k = 1, \dots, m$$

und die Matrizen $\chi_c^{(0,\dots,m),-}(\sigma_i)$ liefern eine Darstellung der verallgemeinerten Hecke-Algebra $\mathcal{H}_n(s,t)$, des folgenden Quotienten der Algebra $\mathbf{C}B_n$:

$$\left\langle (\sigma_i - 1) \prod_{k=1}^m \left(\sigma_i - (-1)^k s^{\sum_{j=1}^{k-1} j} t^k\right) = 0; i = 1, \dots, n-1 \right\rangle$$

Beispiel 4.3.33 (Rekonstruktion von Darstellungen von B_n) Der $B'_m U_{n,m}$-Modul G'_0 kann durch $m!$ Kopien eines $U_{n,m}$-Moduls G_0 ersetzt werden gemäß :

$$G'_0 = G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} (\mathbf{Z}U_{n,m})^{m!} \cong (G_0)^{m!}$$

Dazu beachte man folgendes. Elemente von $\mathbf{Z}B'_m U_{n,m}$ sind von der Gestalt $\sum_j n_j \beta_j$, wobei $n_j \in \mathbf{Z}$ und $\beta_j \in B'_m U_{n,m}$. Jedes Element $\sigma \in B'_m$ hat nun eine eindeutige Darstellung als $\sigma = \gamma\sigma_\tau$, wobei $\gamma \in P'_m$ und $\sigma_{tau} \in B'_m / P'_m \subset B'_m$ ein Permutationszopf ist, d.h. ein Element der Menge der Repräsentanten (rechter) Nebenklassen für P'_m in B'_m, korrespondierend einem Element der symmetrischen Gruppe S'_m. Vgl. hierzu [4], S. 20ff. Elemente von $B'_m U_{n,m}$ sind wegen $P'_m \subset U_{n,m}$ daher von der Gestalt $\gamma\sigma_\tau$, wobei $\gamma \in U_{n,m}$ ist. Jedes Element von $\mathbf{Z}B'_m U_{n,m}$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{\tau \in S'_m} \sum_j n_j \gamma_j \cdot \sigma_\tau$, wobei $n_j, n_k \in \mathbf{Z}$, $\gamma_j, \gamma_k \in U_{n,m}$, und $\sigma_\tau \in B'_m / P'_m$. Man hat mit anderen Worten also einen freien $\mathbf{Z}U_{n,m}$-(Links-)Modul der Dimension $m!$, der Ordnung von S'_m, erzeugt von der Menge $\{\sigma_\tau; \tau \in S'_m\}$. Dieser Modul $(\mathbf{Z}U_{n,m})^{m!}$ wird zu einem $\mathbf{Z}B'_m U_{n,m}$-(Rechts-)Modul durch die Abbildung

$$\Phi' : \mathbf{Z}B'_m U_{n,m} \quad \rightarrow \quad GL(\mathbf{Z}U_{n,m}, m!)$$

gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Phi'(\sigma)(\sigma_\tau) &= \sigma_\tau\,\sigma = \gamma\,\sigma'_\tau, \qquad \sigma \in B'_m, \quad \gamma \in P'_m \subset U_{n,m} \\
\Phi'(\gamma)(\sigma_\tau) &= \sigma_\tau\,\gamma = \gamma'\,\sigma_\tau, \qquad \gamma, \gamma' \in U_{n,m}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß jedes Element $\sigma \in B'_m$ eindeutig darstellbar ist als $\sigma = \gamma\sigma_\tau$ mit $\gamma \in P'_m$ und daß $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in U_{n,m}$ für $\gamma \in U_{n,m}$ und $\sigma \in B'_m$ ist.
Dies erlaubt also, G'_0 gemäß $G'_0 = G_0 \otimes_{\mathbf{Z}U_{n,m}} (\mathbf{Z}U_{n,m})^{m!}$ zu ersetzen.
Sind G'_0 und G_0 außerdem B_n-Moduln, so gewinnt man aus den in diesem Unterabschnitt betrachteten Darstellungen der Zopfgruppe B_n:

$$\begin{aligned}
B_n &\to \mathrm{Aut}\left(\left[\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m / \sim\right) \cong \mathrm{Aut}\left((G'_0)^{\frac{(n)_m}{m!}}\right) \\
B_n &\to \mathrm{Aut}\left(H_m\left(\left(G'_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right) / \sim\right) \cong \mathrm{Aut}\left((G'_0)^{\frac{(n-1)_m}{m!}}\right)
\end{aligned}$$

Darstellungen:

$$\begin{aligned}
B_n &\to \mathrm{Aut}\left((G_0)^{(n)_m}\right) \\
B_n &\to \mathrm{Aut}\left((G_0)^{(n)_m}\right)
\end{aligned}$$

die interpretierbar sein sollten als Darstellungen:

$$\begin{aligned}
B_n &\to \mathrm{Aut}\left(\left[\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right]_m\right) \\
B_n &\to \mathrm{Aut}\left(H_m\left(\left(G_0 \otimes C(\tilde{X}_{n+m-1,1})\right) \otimes \ldots \otimes C(\tilde{X}_{n,1})\right)\right)
\end{aligned}$$

4.3.5 Anwendung: Tensordarstellungen der Zopfgruppe B_n

In diesem Abschnitt werden iterierte Darstellungen der Zopfgruppe B_n als Gruppen von Automorphismen der geordneten äquivarianten Kettengruppen C_m^- für spezielle nichtgenerische Koeffizientenmoduln betrachtet.
Diese Darstellungen sind relevant in verschiedenen physikalischen Theorien: sie liefern Lösungen der Yang-Baxter Gleichungen integrabler Modelle der 2-dimensionalen statistischen Mechanik bzw. Darstellungen der sogenannten R-Matrizen in rationalen konformen Feldtheorien.
Es sei allerdings betont, daß die folgenden Ausführungen mathematisch unbefriedigend bleiben müssen und lediglich anhand von Beispielen einige Zusammenhänge illustrieren.
Die relevanten Objekte rationaler konformer Feldtheorien, die Korrelationsfunktionen, erlauben Darstellungen durch Integrale vom hypergeometrischen Typ und genügen den sogenannten Knizhnik-Zamolodchikov Gleichungen, einem System von Differentialgleichungen, beschrieben in Begriffen der Darstellungstheorie einfacher Lie-Algebren. Die Symmetrien der Modelle rationaler konformer Feldtheorien werden durch Quantengruppen beschrieben, insbesondere die Monodromieeigenschaften der Korrelationsfunktionen in Begriffen der Darstellungstheorie der R-Matrix der den einfachen Lie-Algebren korrespondierenden Quantengruppen. Zu diesen Themen siehe Gomez und Sierra [18] und Varchenko [38] und [41].
Im folgenden wird zunächst kurz darauf eingegangen, inwiefern man durch die Eigenschaften einer Familie durch Differenzenprodukte, gewichtet mit Exponenten $\lambda_{i,j}$, gegebener komplexer Funktionen $\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\lambda_{i,j}}$ Koeffizientenmoduln bzgl. $B_n B'_m U_{n,m}$ erhält. Die speziellen Exponenten $\lambda_{i,j}$, die Funktionen definieren, die Integralen vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ zugrundeliegen, enthalten einen gemeinsamen komplexen Parameter und symmetrische Bilinearformen aus einfachen Wurzeln und Höchstgewichten einer irreduziblen Darstellung einer einfachen Lie-Algebra.
Weiter wird kurz auf einige Aspekte der Konturdarstellung der Quantengruppen eingegangen. Die Gesamtheit der äquivarianten Ketten, die um eine Singularität z_i der verallgemeinerten hypergeometrischen Integrale vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ zu einer irreduziblen Darstellung einer einfachen Lie-Algebra herumgeführt werden, kann als Höchstgewichtsmodul zur Quantengruppe der betrachteten Lie-Algebra interpretiert werden. Kriterium dafür, welche Ketten den Höchstgewichtsmodul bilden, ist die im Falle eines nichtgenerischen Koeffizientenmoduls eintretende Entartung einer gewissen Transformation äquivarianter Ketten. Nach einem Satz von Kohno und Drinfeld, siehe [41], ist die Darstellung der Zopfgruppe B_n als Monodromiegruppe solcher Integrale äquivalent zur Darstellung der universellen R-Matrix der Quantengruppe. Diese Darstellung hat die Gestalt einer Darstellung auf einem Tensorprodukt von Vektorräumen, die als Höchstgewichtsmoduln der Quantengruppe der betrachteten Lie-Algebra interpretiert werden.
Als explizite Beispiele werden Darstellungen der Zopfgruppe B_n betrachtet, die der irreduziblen Darstellung $\Gamma(\{1\})$ von $sl(2,\mathbf{C})$ und der irreduziblen Darstellung $\Gamma(\{1,0\})$ von $sl(3,\mathbf{C})$ korrespondieren.

Koeffizientenmodul durch permutierte komplexe Funktionen

Man betrachte die folgende Familie von Funktionen von N komplexen Veränderlichen $z_1,\ldots,z_N$:

$$I_\tau^{(0)}(z_1,\ldots,z_N) = \prod_{\substack{k,l=1,\ldots,N\\ k<l}} (z_k - z_l)^{\lambda_{\tau(k),\tau(l)}}, \qquad \tau \in S_N$$

indiziert durch Elemente $\tau \in S_N$ der symmetrischen Gruppe S_N. Die Exponenten seien als symmetrisch angenommen: $\lambda_{i,j} = \lambda_{j,i}$.
Die Wirkung der Zopfgruppe B_n auf die Funktionen $I_\tau^{(0)}(z_1, \ldots, z_N)$ wird von Tsuchiya und Kanie [40] angegeben: die Funktionen $I_\tau^{(0)}(z_1, \ldots, z_N)$ sind holomorph in $\tilde{X}_{0,N}$, insbesondere in $\tilde{X}_{0,N}^<$, wobei $X_{0,N}^< \subset X_{0,N}$ ist, definiert durch:

$$X_{0,N}^< = \{(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbf{R}^N; z_N < \ldots < z_2 < z_1 < 0\}$$

und das Element $\sigma_i \in B_N$ wirkt als analytische Fortsetzung von $I_\tau^{(0)}(z_1, \ldots, z_N)$ entlang dem Weg $(\sigma_i(t)(z_1), \ldots, \sigma_i(t)(z_N))$, $t \in [0,1]$, in $X_{0,N}$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\sigma_i(t)(z_j) &= z_j, \qquad j \neq i, i+1 \\
\sigma_i(t)(z_i) &= \frac{(z_i + z_{i+1})}{2} - e^{\pi i t}\frac{(z_i - z_{i+1})}{2} \\
\sigma_i(t)(z_{i+1}) &= \frac{(z_i + z_{i+1})}{2} + e^{\pi i t}\frac{(z_i - z_{i+1})}{2}
\end{aligned}$$

Es sei $V^{(0)}$ der Vektorraum der Dimension $N!$, erzeugt von allen Funktionen $I_\tau^{(0)}(z_1, \ldots, z_N)$, $\tau \in S_N$, mit paarweise verschiedenen Exponenten. Durch die Abbildung $\Phi^{(0)} : B_N \to GL(V^{(0)})$, definiert durch:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)}(\sigma_i)(I_\tau^{(0)}) &= \prod_{k<l}(z_{\tau_i(k)} - z_{\tau_i(l)})^{\lambda_{\tau^{-1}(k),\tau^{-1}(l)}} = \\
&= e^{\pi i \lambda_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(i+1)}} \prod_{k<l}(z_k - z_l)^{\lambda_{(\tau\tau_i)^{-1}(k),(\tau\tau_i)^{-1}(l)}} = \\
&= e^{\pi i \lambda_{\tau^{-1}(i),\tau^{-1}(i+1)}} I_{\tau\tau_i}^{(0)}, \qquad \sigma_i \in B_N
\end{aligned}$$

hat man also den $N!$-dimensionalen B_N-Modul $G_0' = V^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
V^{(0)} \times B_N &\to V^{(0)} \\
(I_\tau^{(0)}, \beta) &\to \Phi^{(0)}(\beta)(I_\tau^{(0)}), \qquad \beta \in B_N
\end{aligned}$$

Setzt man $N = m + n$, so ist $G_0' = V^{(0)}$ damit insbesondere ein Modul bzgl. $B_n B_m' U_{n,m}$.

Beispiel 4.3.34 Man betrachte den Fall $m = 1$ und $n = 3$ und die Darstellung des semidirekten Produkts $B_3 U_{3,1} \subset B_4$.
Der Vektorraum $V^{(0)}$ der Dimension $3! = 6$ wird aufgespannt von den Funktionen $I_\tau^{(0)}$, wobei $\tau \in S_3$ ist, explizit von $(I_{id}^{(0)}, I_{\tau_2}^{(0)}, I_{\tau_3}^{(0)}, I_{\tau_2\tau_3}^{(0)}, I_{\tau_3\tau_2}^{(0)}, I_{\tau_2\tau_3\tau_2}^{(0)})$.
Die Darstellung $\Phi^{(0)} : B_3 \to GL(V^{(0)})$ der Zopfgruppe $B_3 = \langle \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_3\sigma_2\sigma_3 = \sigma_2\sigma_3\sigma_2 \rangle$ ist wie folgt gegeben:

$$\sigma_2 \quad \to \quad \begin{pmatrix}
0 & e^{\pi i \lambda_{2,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
e^{\pi i \lambda_{2,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^{\pi i \lambda_{2,4}} & 0 & 0 \\
0 & 0 & e^{\pi i \lambda_{2,4}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i \lambda_{3,4}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i \lambda_{3,4}} & 0
\end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{\pi i\lambda_{3,4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i\lambda_{2,4}} & 0 \\ e^{\pi i\lambda_{3,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\pi i\lambda_{2,3}} \\ 0 & e^{\pi i\lambda_{2,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\pi i\lambda_{2,3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung $\Phi^{(0)} : U_{3,1} \rightarrow GL(V^{(0)})$ der freien Gruppe $U_{3,1} = \langle \gamma_{1,j}\,; j = 2,3,4\rangle$ ist gegeben durch:

$$\gamma_{1,2} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,4}} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{1,3} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_{1,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,3}} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_{1,4} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} e^{2\pi i\lambda_{1,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,4}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\pi i\lambda_{1,2}} \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht, daß man damit auch eine Darstellung $\Phi^{(0)} : B_3U_{3,1} \rightarrow GL(V^{(0)})$ hat.

Hypergeometrische Integrale vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ

Es wird nun der Fall betrachtet, daß die Exponenten $\lambda_{i,j}$ in den Differenzenprodukten $\prod_{i<j}(z_i - z_j)^{\lambda_{i,j}}$ einen gemeinsamen komplexen Parameter und symmetrische Bilinearformen aus einfachen Wurzeln und Höchstgewichten einer irreduziblen Darstellung einer einfachen Lie-Algebra enthalten. Die resultierenden Funktionen liegen den hypergeometrischen Integralen vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ zugrunde. Dazu siehe [38].

Man betrachte die einfache Lie-Algebra $\mathbf{g} = sl(r+1, \mathbf{C})$ mit den einfachen Wurzeln $\alpha_{(i)}$, wobei $i = 1, \ldots, r$ ist. Die irreduzible Darstellung von $sl(r+1, \mathbf{C})$ mit Höchstgewicht Λ wird wie gewöhnlich durch Angabe einer Menge nichtnegativer ganzer Zahlen bezeichnet: $\Gamma(\{n_1, \ldots, n_r\})$, $n_i \in \mathbf{N}_0$. Der entsprechende Darstellungsmodul mit Höchstgewicht Λ sei V_Λ. Es sei $(,)$ die normierte Cartan-

Killing-Form:

$$\begin{aligned}(\alpha_{(i)},\alpha_{(i)}) &= 1,\\ (\alpha_{(i)},\alpha_{(i+1)}) &= -\frac{1}{2},\\ (\alpha_{(i)},\alpha_{(j)}) &= 0, \qquad \mid i-j\mid > 1\\ (\alpha_{(i)},\Lambda) &= \frac{n_i}{2}\end{aligned}$$

Ein korrespondierender $B_m U_{n,m}$-Modul $G'_0(\mathbf{g},\Gamma) = V^{(0)}$ wird nun durch die komplexen Funktionen (vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ):

$$I_\tau^{(0)}(z_1,\ldots,z_{m+n}) = \prod_{\substack{k=1,\ldots,m;l=1,\ldots,m+n\\ k<l}} (z_k - z_l)^{\lambda_{\tau^{-1}(k),\tau^{-1}(l)}}, \qquad \tau\in S_{m+n}$$

geliefert, wobei für $\kappa\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$ die Exponenten wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned}\lambda_{i,j} &= \kappa^{-1}(\alpha_{(i)},\alpha_{(j)}), \qquad 1\le i,j\le m\\ \lambda_{i,j} &= -\kappa^{-1}(\alpha_{(i)},\Lambda), \qquad 1\le i\le m, m+1\le j\le m+n\end{aligned}$$

Jedem Index $i=1,\ldots,m$ wird also eine einfache Wurzel und jedem Index $j>m$ das Höchstgewicht Λ zugeordnet. Die Dimension von $G'_0(\mathbf{g},\Gamma) = V^{(0)}$ ist abhängig von dieser konkreten Zuordnung und höchstens gleich $m!$.

Zur Lie-Algebra $\mathbf{g} = sl(r+1,\mathbf{C})$ und der irreduziblen Darstellung $\Gamma(\{n_1,\ldots,n_r\}), n_i\in\mathbf{N}_0$, mit Höchstgewicht Λ betrachte man für eine konkrete Zuordnung der einfachen Wurzeln $\alpha_{(i)}$, $i=1,\ldots,r$, zu den Indizes $j=1,\ldots,m$ die folgenden iterativ gebildeten m-fachen Integrale, *verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen (vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ)* von n Variablen:

$$I^{(m)}_{\tau;j_1,\ldots,j_m}(z_{m+1},\ldots,z_{m+n}) = \int_{c_{j_m}} dz_m \ldots \int_{c_{j_1}} dz_1 I_\tau^{(0)}(z_1,\ldots,z_{m+n}, \qquad \tau\in S_m$$

Hierbei werde im r-ten Schritt, $1\le r\le m$, integriert über äquivariante Ketten

$$c_{j_r} = I^{(r-1)}_{\tau;j_1,\ldots,j_{r-1}} \otimes \tilde\gamma^{(r)}_{r,j_r} \in V^{(r-1)}\otimes C_1(\tilde X_{n+m-r,1})) = V^{(r)}, \quad j_r = m+1,\ldots,m+n\le j_{r-1}$$

Integrale vom Typ $\int dz_m \ldots \int dz_1 \varphi\, I_\tau^{(0)}$, wobei φ gewisse rationale Funktionen von $z_1,\ldots,z_{m+n}$ sind, sind Lösungen der sogenannten *Knizhnik-Zamolodchikov Gleichung*, eines Systems totaler Differentialgleichungen für Funktionen mit Werten im n-fachen Tensorprodukt $V=\bigotimes^n V_\Lambda$ von Darstellungsmoduln V_Λ der Lie-Algebra.

Konturinterpretation der Quantengruppen

Quantengruppen In diesem Unterabschnitt werden gemäß [41] kurz sogenannte Quantengruppen charakterisiert.

Die universelle Einhüllende $U(\mathbf{g})$ einer einfachen Lie-Algebra $\mathbf{g}$ kann zu einer einhüllenden Algebra

$U_q(\mathbf{g})$, die von einem Parameter $q \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ abhängt, deformiert werden. Diese *Quantengruppe* oder *q-deformierte universelle einhüllende Algebra* $U_q(\mathbf{g})$ von $\mathbf{g}$ hat die Struktur einer *quasitriangulären Hopf-Algebra*, wobei eine Hopf-Algebra ein Vektorraum ist mit assoziativer Multiplikation, Existenz einer Einheitsabbildung, ko-assoziativer Komultiplikation, Existenz einer Ko-Einheitsabbildung und einer Antipode und wobei Quasitriangularität der Algebra bedeutet, daß ein Operator R existiert, die *universelle R-Matrix* der Quantengruppe, der Komultiplikation und die permutierte Komultiplikation durch Konjugation verbindet.
Für generisches $q \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$ (q ungleich einer Einheitswurzel) ist die Deformation des Darstellungsmoduls V_Λ der Lie-Algebra zum Darstellungsmodul V_Λ^q der Quantengruppe kanonisch, d.h. die irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungsmoduln der Quantengruppe können wie die der Lie-Algebren nach Höchstgewichten parametrisiert werden, und die Dimensionen der Darstellungsmoduln V_Λ und V_Λ^q sind gleich.
Sind zwei Darstellungen $V_{\Lambda_i}^q$ und $V_{\Lambda_{i+1}}^q$ der Quantengruppe gegeben, so induziert die Komultiplikation eine Darstellung aud dem Tensorprodukt, und der Isomorphismus: $V_{\Lambda_i}^q \otimes V_{\Lambda_{i+1}}^q \to V_{\Lambda_{i+1}}^q \otimes V_{\Lambda_i}^q$ enthält eine Darstellung der R-Matrix und liefert gleichzeitig eine Darstellung des Elements $\sigma_i \in B_n$ der Zopfgruppe. Nach einem Satz von Kohno und Drinfeld ist nun die Darstellung der Zopfgruppe B_n als Monodromiegruppe der der Lie-Algebra $\mathbf{g}$ assoziierten Integrale von Knizhnik-Zamolodchikov-Typ äquivalent zur Darstellung der R-Matrix zur Quantengruppe $U_q(\mathbf{g})$ wobei der Parameter $q = e^{-\pi i \kappa^{-1}}$ ist.

Relevante Transformation In diesem Unterabschnitt wird kurz auf einige Aspekte der sogenannten Konturinterpretation der Quantengruppen eingegangen, d.h. der Darstellung der Quantengruppen auf Ketten oder Konturen der Integrale vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ.
Die Gesamtheit der äquivarianten Ketten, die um eine Singularität z_i der verallgemeinerten hypergeometrischen Integrale vom Knizhnik-Zamolodchikov Typ zu einer irreduziblen Darstellung einer einfachen Lie-Algebra herumgeführt werden, d.h. der äquivarianten γ-Konturen mit Indizes i, kann als Höchstgewichtsmodul zur Quantengruppe der betrachteten Lie-Algebra interpretiert werden. Ein Kriterium dafür, welche Konturen den Darstellungsmodul bilden, lieferen die Eigenschaften (die Entartung) der im folgenden angebenen Transformation äquivarianter Ketten, siehe [18].

Man betrachte zunächst für $B_n B'_m U_{n,m}$-Moduln G'_0, generisch bzgl. $U_{n,m}$, eine Basis des B_n-Moduls C_m^-, bestehend aus geordneten γ-Ketten oder Schleifen und bestimme den Ausdruck dieser Basis in der Basis, bestehend aus sogenannten weggeordneten Ketten oder Segmenten. Für die nichtgenerischen Koeffizientenmoduln, korrespondierend irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra, können mittels der Entartung dieser Transformation die Basen der Kettengruppen C_m^- bestimmt werden, die sich als Elemente des Darstellungsmoduls der Quantengruppe interpretieren lassen.

Wir geben die relevante Transformation nur für den Fall derjenigen geordneten Ketten $g' \otimes \tilde{\gamma}_{1,k_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_{m,k_m}^{(m)} \in C_m^-$, $k_j = m+1, \ldots, m+n$, wobei $k_j \geq k_{j+1}$ für alle $j = 1, \ldots, m$, für welche alle Indizes k_j identisch sind: $k_j = i$ für alle $j = 1, \ldots, m$, $i \in \{m+1, \ldots, m+n\}$. Der allgemeine Fall ergibt sich daraus leicht.

Die geordnete Kette $g' \otimes \tilde{\gamma}_{1,i}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}_{m,i}^{(m)} \in C_m^-$ hat folgenden Ausdruck in der weggeordneten

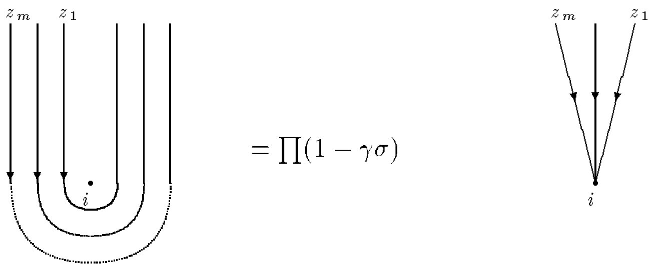


Abbildung 4.1: Schleifen und Segmente

Kette $h' \otimes e^{(1)}_{1,2} \otimes \ldots \otimes e^{(m-1)}_{m-1,m} \otimes e^{(m)}_{m,i} \in C^-_m$:

$$
\begin{aligned}
&g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i} = \\
&= \quad g' \prod_{j=1}^{m} (1-\gamma_{j,i}\sigma_{j-1}\ldots\sigma_1)[m!]^{(m)}_{\sigma^{-1}} \otimes e^{(1)}_{1,2} \otimes \ldots \otimes e^{(m-1)}_{m-1,m} \otimes e^{(m)}_{m,i}
\end{aligned}
$$

Hierbei ist $g', h' \in G'_0$ und $i \in \{m+1, \ldots, m+n\}$.

Dieser Ausdruck kommt wie folgt zustande. Die e-Ketten sind elementar definiert durch:

$$\tilde{\gamma}^{(j)}_{j,i} = (1-\gamma_{j,i})e^{(j)}_{j,i}$$

Für Produkte hat man daher zunächst:

$$\bigotimes_{j=1}^{m} \tilde{\gamma}^{(j)}_{j,i} = \bigotimes_{j=1}^{m} (1-\gamma_{j,i})e^{(j)}_{j,i}$$

Nun nehmen in C^-_m die Faktoren $\gamma_{j,i}$ bei Kommutation nach links Faktoren $\sigma \in B_m$ auf gemäß :

$$\left(\ldots \otimes e^{(j-1)}_{j-1,i}\right) \otimes \gamma_{j,i}\, e^{(j)}_{j,i} \otimes \ldots = \left(\ldots \gamma_{j,i}\, \sigma_{j-1} \otimes e^{(j-1)}_{j-1,i}\right) \otimes e^{(j)}_{j,i} \otimes \ldots$$

Die Wegordnung der e-Ketten geschieht mittels der C^-_m definierenden Relationen und liefert zusätzlich eine σ-deformierte Fakultät:

$$g' \otimes e^{(1)}_{1,i} \otimes \ldots \otimes e^{(m-1)}_{m-1,i} \otimes e^{(m)}_{m,i} \quad = \quad g'\,[m!]^{(m)}_{\sigma^{-1}} \otimes e^{(1)}_{1,2} \otimes \ldots \otimes e^{(m-1)}_{m-1,m} \otimes e^{(m)}_{m,i}$$

Insgesamt bekommt man so den obigen Ausdruck.

Beispiel: Darstellung der Zopfgruppe B_n auf γ-Konturen

Im folgenden wird noch einmal beispielhaft die Wirkung der Zopfgruppe B_n auf C^-_m für $m = 1, \ldots, 3$ angegeben, und zwar für geordnete Ketten, bestehend aus γ-Konturen oder Schleifen. Die Forderung nach Generizität des Koeffizientenmoduls G'_0 bzgl. $U_{n,m}$ ist nicht notwendig.

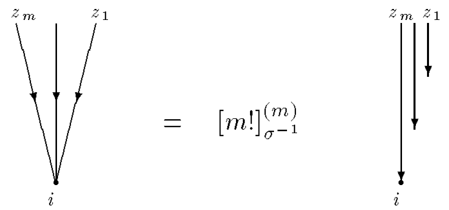


Abbildung 4.2: Wegordnung der e-Segmente

Für $m = 1$ verwende man die Resultate aus Kapitel 2. $\sigma_i \in B_n$ wirkt auf $g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k} \in C_1^-$, $g' \in G_0'$, (von links) gemäß der typischen Relationen:

$$\begin{aligned}
(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1})\,\sigma_i &= g'\,\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \\
(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i})\,\sigma_i &= g'\,(1-\gamma_{1,i})\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} + g'\,\gamma_{1,i+1}\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{i+1}
\end{aligned}$$

Für $m = 2$ verwende man die Resultate aus Kapitel 3. $\sigma_i \in B_n$ wirkt auf $g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k_1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,k_2} \in C_2^-$, $k_1 \geq k_2$, (von links) gemäß der typischen Relationen:

$$\begin{aligned}
(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1})\,\sigma_i &= g'\,\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{2,i} \\
(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i})\,\sigma_i &= g'\,\gamma_{2,i+1}\sigma_1\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} + \\
&\quad + g'\,(1-\gamma_{2,i})\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} \\
(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i})\,\sigma_i &= g'\,\gamma_{1,i+1}\gamma_{2,i+1}\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1} + \\
&\quad + g'\,[2]!^{(2)}_{\sigma}(1-\gamma_{1,i}\sigma_1)\gamma_{1,i+1}\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} + \\
&\quad + g'\,(1-\gamma_{1,i})(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i}
\end{aligned}$$

Bei der Herleitung der Gleichungen wurde hierbei folgende Identität verwendet:

$$(1-\gamma_{1,i})(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)[2]!^{(2)}_{\sigma} = [2]!^{(2)}_{\sigma}(1-\gamma_{1,i}\sigma_1)(1-\gamma_{1,i})$$

Für $m = 3$ verwende man die Resultate aus Kapitel 4, den Satz 4.3.26 und das zugehörige Beispiel. $\sigma_i \in B_n$ wirkt auf $g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k_1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,k_2} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,k_3} \in C_3^-$, $k_1 \geq k_2 \geq k_3$, (von links) gemäß der typischen Relationen:

$$(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i+1})\,\sigma_i = g'\,\sigma_i \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i}$$

$$(g' \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i})\,\sigma_i =$$

$$
\begin{aligned}
&= g'\,\gamma_{3,i+1}\sigma_2\sigma_1\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} + \\
&\quad + g'\,(1-\gamma_{3,i})\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} \\
&(g' \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i})\,\sigma_i = \\
&= g'\,\gamma_{2,i+1}\sigma_1\gamma_{3,i+1}\sigma_2\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} + \\
&\quad + g'\,[2]!^{(3)}_\sigma(1-\gamma_{2,i}\sigma_2)\gamma_{2,i+1}\sigma_1\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} + \\
&\quad + g'\,(1-\gamma_{2,i})(1-\gamma_{3,i}\sigma_2)\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} \\
&(g' \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i})\,\sigma_i = \\
&= g'\,\gamma_{1,i+1}\gamma_{2,i+1}\gamma_{3,i+1}\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i+1} + \\
&\quad + g'\,[3]!^{(3)}_\sigma(1-\gamma_{1,i}\sigma_1\sigma_2)([2]!^{(2)}_\sigma)^{-1}\gamma_{1,i+1}\gamma_{2,i+1}\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} + \\
&\quad + g'\,[3]!^{(3)}_\sigma(1-\gamma_{1,i}\sigma_1\sigma_2)(1-\gamma_{1,i}\sigma_1) \times \\
&\quad\quad \times([2]!^{(3)}_\sigma)^{-1}\gamma_{1,i+1}\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i} + \\
&\quad + g'\,(1-\gamma_{1,i})(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)(1-\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1)\sigma_i \otimes \tilde\gamma^{(1)}_{1,i} \otimes \tilde\gamma^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde\gamma^{(3)}_{3,i}
\end{aligned}
$$

Bei der Herleitung der Gleichungen wurde hierbei folgende Identität verwendet:

$$(1-\gamma_{1,i})(1-\gamma_{2,i}\sigma_1)(1-\gamma_{3,i}\sigma_2\sigma_1)[3]!^{(3)}_\sigma \;=\; [3]!^{(3)}_\sigma(1-\gamma_{1,i}\sigma_1\sigma_2)(1-\gamma_{1,i}\sigma_1)(1-\gamma_{1,i})$$

Beispiel: $sl(2,\mathbf{C})$, $\Gamma(\{1\})$**-Darstellung**

Tensordarstellung der Zopfgruppe Wir leiten zunächst, ohne auf die Quantengruppeninterpretation zurückzugreifen, für einen nichtgenerischen Koeffizientenmodul eine Darstellung der Zopfgruppe B_n her, die als Darstellung auf einem Tensorprodukt von Vektorräumen interpretiert werden kann.

Es sei $G'_0 = \mathbf{C} = V^{(0)}$ ein 1-dimensionaler $B_n B'_m U_{n,m}$-Modul, gegeben durch einen Homomorphismus $\Phi^{(0)} : B_n B'_m U_{n,m} \to \mathrm{Aut}(\mathbf{C}) = GL(V^{(0)})$, definiert durch:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(0)}(\sigma_i) &= 1, && \sigma_i \in B_n \\
\Phi^{(0)}(\sigma_j) &= q^{-1}, && \sigma_j \in B'_m, \quad q \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \\
\Phi^{(0)}(\gamma) &= q, && \gamma \in \{\gamma_{j,k}; j=1,\ldots,m; k=m+1,\ldots,m+n\} \subset U_{n,m}
\end{aligned}
$$

Man bemerke, daß dieser Koeffizientenmodul nicht generisch ist bzgl. $U_{n,m}$, da für je drei Indizes i,j,k mit $i,j \neq m$ und $k > m$ gilt:

$$\Phi^{(0)}(\gamma_{i,j}\gamma_{i,k}\gamma_{j,k}) = q^{-2}\,q\,q = 1$$

Man bekommt 1-parametrige Darstellungen der Zopfgruppe B_n:

$$\chi^{(0,\ldots,m),-} : B_n \;\to\; \mathrm{Aut}(C^-_m) \cong GL(V^{(m)})$$

wobei $V^{(m)}$ ein **C**-Vektorraum der Dimension $\binom{n+m-1}{m}$ ist, aufgespannt von den Elementen:

$$\begin{aligned} v_{i_1,\ldots,i_m} &= I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{\gamma}^{(m)}_{m,i_m}, \\ & \qquad i_k = m+1,\ldots,m+n, \quad i_k \geq i_{k+1} \end{aligned}$$

Beispiel 4.3.35 Als ausführliches Beispiel betrachten wir die 1-parametrigen Darstellungen der Zopfgruppe $B_3 = \langle \sigma_3, \sigma_4 \mid \sigma_3\sigma_4\sigma_3 = \sigma_4\sigma_3\sigma_4 \rangle$ für die Fälle $m = 0, 1, 2, 3$. Im Falle $m = 0$ hat man die triviale Darstellung $B_n \rightarrow GL(V^{(0)})$:

$$\sigma_3 \rightarrow 1, \qquad \sigma_4 \rightarrow 1$$

Im Falle $m = 1$ hat man die Burau-Darstellung: $B_n \rightarrow GL(V^{(1)})$, $\dim V^{(1)} = 3$, explizit:

$$\sigma_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle 5} \\ {\scriptstyle 4} \\ {\scriptstyle 3} \end{array} \qquad \sigma_4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle 5} \\ {\scriptstyle 4} \\ {\scriptstyle 3} \end{array}$$

Im Falle $m = 2$ hat man die Darstellung $B_n \rightarrow GL(V^{(2)})$, $\dim V^{(2)} = 6$:

$$\sigma_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5} \\ {\scriptstyle 5,4} \\ {\scriptstyle 5,3} \\ {\scriptstyle 4,4} \\ {\scriptstyle 4,3} \\ {\scriptstyle 3,3} \end{array}$$

$$\sigma_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5} \\ {\scriptstyle 5,4} \\ {\scriptstyle 5,3} \\ {\scriptstyle 4,4} \\ {\scriptstyle 4,3} \\ {\scriptstyle 3,3} \end{array}$$

Im Falle $m = 3$ hat man die Darstellung $B_n \rightarrow GL(V^{(3)})$, $\dim V^{(3)} = 10$:

$$\sigma_3 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-1} & 1-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^3 & q^2-q^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5,5} \\ {\scriptstyle 5,5,4} \\ {\scriptstyle 5,5,3} \\ {\scriptstyle 5,4,4} \\ {\scriptstyle 5,4,3} \\ {\scriptstyle 5,3,3} \\ {\scriptstyle 4,4,4} \\ {\scriptstyle 4,4,3} \\ {\scriptstyle 4,4,3} \\ {\scriptstyle 3,3,3} \end{array}$$

$$\sigma_4 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ q^3 & q^2-q^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5,5} \\ {\scriptstyle 5,5,4} \\ {\scriptstyle 5,5,3} \\ {\scriptstyle 5,4,4} \\ {\scriptstyle 5,4,3} \\ {\scriptstyle 5,3,3} \\ {\scriptstyle 4,4,4} \\ {\scriptstyle 4,4,3} \\ {\scriptstyle 4,4,3} \\ {\scriptstyle 3,3,3} \end{array} \end{array}$$

Nun erlauben diese 1-parametrigen Darstellungen gewisse invariante Unterräume. Und zwar kann man zeigen, daß für alle $m \geq 2$ alle Vektoren $v_{i_1,\ldots,i_m} \in V^{(m)}$, wobei mindestens zwei der Indizes i_k identisch sind, einen invarianten Unterraum bilden. Die korrespondierenden Quotientenräume $W^{(m)} = V^{(m)}/\sim$ werden von allen Vektoren $v_{i_1,\ldots,i_m} \in V^{(m)}$ gebildet mit $i_1 > i_2 > \ldots > i_m$.

Beispiel 4.3.36 Wir betrachten wieder die 1-parametrigen Darstellungen der Zopfgruppe B_3 für die Fälle $m = 2, 3$.
Im Falle $m = 2$ bilden die Vektoren $v_{5,5}, v_{4,4}, v_{3,3}$ einen invarianten Unterraum. Die korrespondierende Darstellung ist:

$$\sigma_3 \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & q^2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5} \\ {\scriptstyle 4,4} \\ {\scriptstyle 3,3} \end{array} \end{array} \qquad \sigma_4 \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,5} \\ {\scriptstyle 4,4} \\ {\scriptstyle 3,3} \end{array} \end{array}$$

Die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum $W^{(2)} = V^{(2)}/\sim$ ist eine Burau-Darstellung:

$$\sigma_3 \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,4} \\ {\scriptstyle 5,3} \\ {\scriptstyle 4,3} \end{array} \end{array} \qquad \sigma_4 \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 1-q \end{pmatrix} & \begin{array}{l} {\scriptstyle 5,4} \\ {\scriptstyle 5,3} \\ {\scriptstyle 4,3} \end{array} \end{array}$$

Im Falle $m = 3$ bilden alle Vektoren mit Ausnahme des Vektors $v_{5,4,3}$ einen invarianten Unterraum. Die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum $W^{(3)} = V^{(3)}/\sim$ ist trivial:

$$\sigma_3 \rightarrow 1, \qquad \sigma_4 \rightarrow 1$$

Betrachtet man nun $W = \bigoplus_{i=1}^{m} W^{(i)}$, wobei $W^{(0)} = V^{(0)}$, $W^{(1)} = V^{(1)}$ und $W^{(i)} = V^{(i)}/\sim$, $i \geq 2$, ist, so bekommt man eine Darstellung $B_n \rightarrow GL(W)$, $\dim W = 2^n$. Bezeichnet man nun mit V einen $\mathbf{C}$-Vektorraum mit $\dim V = 2$, so bekommt man durch geeignetes Umordnen daraus eine Darstellung:

$$\begin{array}{rcl} B_n & \rightarrow & GL(\underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n}) \\ \sigma_i & \rightarrow & \underbrace{\mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}}_{i-1} \otimes R \otimes \underbrace{\mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}}_{n-i-1} \end{array}$$

mit:

$$R \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(V \otimes V)$$

Beispiel 4.3.37 Für unser Beispiel der Zopfgruppe B_3 und $m = 0, 1, 2, 3$ bekommt man die Darstellung $B_3 \to GL(W)$, $\dim W = 8 = 2^3$, gegeben durch:

$$\sigma_3 \quad \to \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ 5 \\ 4 \\ 5,4 \\ 3 \\ 5,3 \\ 4,3 \\ 5,4,3 \end{array} \end{array}$$

$$\sigma_4 \quad \to \quad \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ 5 \\ 4 \\ 5,4 \\ 3 \\ 5,3 \\ 4,3 \\ 5,4,3 \end{array} \end{array}$$

und durch Umordnen die Darstellung $B_3 \to GL(V \otimes V \otimes V)$, gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl} \sigma_3 & \to & \mathbf{1} \otimes R \\ \sigma_4 & \to & R \otimes \mathbf{1} \end{array}$$

Quantengruppeninterpretation der Darstellung Im einfachsten Fall der Lie-Algebra $\mathbf{g} = sl(2, \mathbf{C})$ mit der einfachen Wurzel α und der irreduziblen Darstellung $\Gamma(\{1\})$ hat man für die Exponenten der Funktionen $I_\tau^{(0)}$:

$$\begin{array}{rcll} \lambda_{i,j} & = & \kappa^{-1}(\alpha, \alpha) = \kappa^{-1}, & 1 \leq i, j \leq m \\ \lambda_{i,j} & = & -\kappa^{-1}(\alpha, \Lambda) = -(2\,\kappa)^{-1} & 1 \leq i \leq m, m+1 \leq j \leq m+n \end{array}$$

Es gilt $I_\tau^{(0)} = I_{id}^{(0)}$ für alle $\tau \in S_m$, so daß für die Dimension des Koeffizientenmoduls $G_0'(\mathbf{g}, \Gamma) = V^{(0)}$ gilt: $\dim V^{(0)} = 1$. Die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung ist:

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{(0)} : B_m' U_{n,m} & \to & GL(V^{(0)}) \\ \Phi^{(0)}(\sigma_i) & = & e^{\frac{\pi i}{\kappa}} = q^{-1}, \quad \sigma_i \in B_m' \\ \Phi^{(0)}(\gamma_{i,j}) & = & e^{-\frac{\pi i}{\kappa}} = q, \quad \gamma_{i,j} \in U_{n,m} \end{array}$$

Der Darstellungsmodul V_Λ^q der Quantengruppe zu $sl(2,\mathbf{C})$, $\Gamma(\{1\})$, ist von der Dimension $\dim V_\Lambda^q = 2$, aufgespannt von den Vektoren v_Λ, $v_{\Lambda-\alpha}$. Wir betrachten nun 3 Kopien $V_\Lambda^{q,(j)}$ dieses Darstellungsmoduls, indiziert durch $j = i+2, i+1, i$, und ordnen den Vektoren von $V = V_\Lambda^{q,(i+2)} \otimes V_\Lambda^{q,(i+1)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}$ wie folgt Ketten bzw. Integrale zu:

$$\begin{array}{rcl}
v_\Lambda^{(i+2)} \otimes v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \in V^{(0)} \\
v_{\Lambda-\alpha}^{(i+2)} \otimes v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+2}^{(1)} \in V^{(1)} \\
v_\Lambda^{(i+2)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+1}^{(1)} \in V^{(1)} \\
v_\Lambda^{(i+2)} \otimes v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i}^{(1)} \in V^{(1)} \\
v_{\Lambda-\alpha}^{(i+2)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+2}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,i+1}^{(2)} \in V^{(2)} \\
v_{\Lambda-\alpha}^{(i+2)} \otimes v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+2}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,i}^{(2)} \in V^{(2)} \\
v_\Lambda^{(i+2)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+1}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,i}^{(2)} \in V^{(2)} \\
v_{\Lambda-\alpha}^{(i+2)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha}^{(i)} & \rightarrow & I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,i+2}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,i+1}^{(2)} \otimes \tilde\gamma_{3,i}^{(3)} \in V^{(3)}
\end{array}$$

Alle übrigen Ketten bzw. Integrale zu den Indizes $i+2, i+1, i$ verschwinden wegen der Entartung der relevanten Transformation. So hat man für alle k:

$$\begin{aligned}
I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,k}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,k}^{(2)} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,k})(1-\gamma_{2,k}\sigma_1)(1+\sigma_1^{-1}) \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = \\
&= (1-e^{-2\pi i\kappa^{-1}(\alpha,\Lambda)})(1-e^{\pi i\kappa^{-1}(-2(\alpha,\Lambda)+(\alpha,\alpha))})(1-e^{-\pi i\kappa^{-1}(\alpha,\alpha)}) \times \\
&\quad \times I^{(0)} \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = 0
\end{aligned}$$

wegen $2(\alpha,\Lambda) = (\alpha,\alpha)$. Und ebenso hat man für $l \geq k \geq j$:

$$\begin{aligned}
I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,k}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,k}^{(2)} \otimes \tilde\gamma_{3,j}^{(2)} &= 0 \\
I^{(0)} \otimes \tilde\gamma_{1,l}^{(1)} \otimes \tilde\gamma_{2,k}^{(2)} \otimes \tilde\gamma_{3,k}^{(2)} &= 0
\end{aligned}$$

Die korrespondierende Darstellung der Elemente $\sigma_i, \sigma_{i+1} \in B_n$ der Zopfgruppe B_n ist:

$$\begin{array}{rcl}
B_n & \rightarrow & GL(V_\Lambda^{q,(i+2)} \otimes V_\Lambda^{q,(i+1)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}) \\
\sigma_i & \rightarrow & \mathbf{1} \otimes R \\
\sigma_{i+1} & \rightarrow & R \otimes \mathbf{1}
\end{array}$$

wobei

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 1-q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Darstellung der universellen R-Matrix der Quantengruppe zu $sl(2,\mathbf{C})$ ist.

Beispiel: $sl(3,\mathbf{C})$, $\Gamma(\{1,0\})$**-Darstellung**

Man betrachte den Fall der Lie-Algebra $\mathbf{g} = sl(3,\mathbf{C})$ mit den beiden einfachen Wurzeln $\alpha_{(1)}$ und $\alpha_{(2)}$ und die irreduzible Darstellung $\Gamma(\{1,0\})$.

Der Darstellungsmodul V_Λ^q der Quantengruppe zu $sl(3,\mathbf{C})$, $\Gamma(\{1,0\})$, ist von der Dimension $\dim V_\Lambda^q = 3$, aufgespannt von den Vektoren v_Λ, $v_{\Lambda-\alpha_{(1)}}$, $v_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}}$. Wir betrachten nun 2 Kopien $V_\Lambda^{q,(j)}$ dieses Darstellungsmoduls, indiziert durch $j = i+1, i$, und ordnen im weiteren den Vektoren von $V = V_\Lambda^{q,(i+1)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}$ Ketten bzw. Integrale zu.

Im Falle $m = 1$ wird dem Index 1 eine Wurzel aus $\{\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}\}$ zugeordnet. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Wird dem Index 1 die Wurzel $\alpha_{(1)}$ zugeordnet, so hat man für die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung:

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)} : U_{n,1} &\rightarrow GL(V^{(0)}) \\ \Phi^{(0)}(\gamma_{1,j}) &= e^{-2\pi i\kappa^{-1}(\alpha_{(1)},\Lambda)} = e^{-\pi i \kappa^{-1}} = q, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n,1}\end{aligned}$$

und es resultiert die Burau-Darstellung von B_n:

$$\sigma_i \rightarrow \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle i+1} \\ {\scriptstyle i} \end{array} \end{array}$$

Die relevante Transformation entartet nicht:

$$\begin{aligned} I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,j}^{(1)} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,j}) \otimes e_{1,j}^{(1)} = \\ &= (1-q)\, I^{(0)} \otimes e_{1,j}^{(1)} \neq 0, \qquad j = i, i+1\end{aligned}$$

und wir ordnen daher die Ketten wie folgt Vektoren von $V = V_\Lambda^{q,(i+i)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}$ zu:

$$\begin{aligned} v_{\Lambda-\alpha_{(1)}}^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} &\rightarrow I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i+1}^{(1)} \in V^{(1)} \\ v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha_{(1)}}^{(i)} &\rightarrow I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i}^{(1)} \in V^{(1)}\end{aligned}$$

Wird dem Index 1 die Wurzel $\alpha_{(2)}$ zugeordnet, so hat man für die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung:

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)} : U_{n,1} &\rightarrow GL(V^{(0)}) \\ \Phi^{(0)}(\gamma_{1,j}) &= e^{-2\pi i\kappa^{-1}(\alpha_{(2)},\Lambda)} = 1, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n,1}\end{aligned}$$

und es resultiert eine Darstellung der symmetrischen Gruppe S_n:

$$\sigma_i \rightarrow \begin{array}{@{}c@{}c@{}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle i+1} \\ {\scriptstyle i} \end{array} \end{array}$$

Die relevante Transformation entartet:

$$I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,j}^{(1)} = I^{(0)}(1-\gamma_{1,j}) \otimes e_{1,j}^{(1)} = 0, \qquad j = i, i+1$$

Im Falle $m = 2$ werden den Indizes 1 und 2 Wurzeln aus $\{\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}\}$ zugeordnet. Es sind drei Fälle zu unterscheiden.
Im Falle der Zuordnung $(1,2) \rightarrow (\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)})$ hat man für die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung:

$$\begin{array}{rcl}
\Phi^{(0)} : B_2' U_{n,2} & \rightarrow & GL(V^{(0)}) \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{1,j})(I_{id}^{(0)}) & = & q\, I_{id}^{(0)}, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n+1,1} \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{1,j})(I_{\tau_1}^{(0)}) & = & I_{\tau_1}^{(0)}, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n+1,1} \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{2,j})(I_{id}^{(0)}) & = & I_{id}^{(0)}, \quad \gamma_{2,j} \in U_{n,1} \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{2,j})(I_{\tau_1}^{(0)}) & = & q\, I_{\tau_1}^{(0)}, \quad \gamma_{2,j} \in U_{n,1} \\
\Phi^{(0)}(\sigma_1)(I_{id}^{(0)}) & = & q^{\frac{1}{2}}\, I_{\tau_1}^{(0)}, \quad \sigma_1 \in B_2' \\
\Phi^{(0)}(\sigma_1)(I_{\tau_1}^{(0)}) & = & q^{\frac{1}{2}}\, I_{id}^{(0)}, \quad \sigma_1 \in B_2'
\end{array}$$

Man bekommt 1-parametrige Darstellungen der Zopfgruppe B_n:

$$\chi^{(0,1,2),-} : B_n \quad \rightarrow \quad \mathrm{Aut}(C_2^-) \cong GL(V^{(2)})$$

wobei $V^{(2)}$ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum der Dimension $6 = 2 \cdot 3$ ist, aufgespannt von den Elementen:

$$\begin{array}{rcl}
v_{\tau;i_1,i_2} & = & I_\tau^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i_1}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i_2}^{(2)}, \\
& & \qquad i_k = i+1, i, \quad i_1 \geq i_2, \quad \tau \in S_2
\end{array}$$

Explizit resultiert die folgende Darstellung von B_n:

$$\sigma_i \rightarrow \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & q^2 & 0 & 0 & 1-q \\
q & 0 & q(1-q) & 1-q & 1-q & 1-q \\
0 & q & 0 & 1-q^2 & 0 & 0
\end{array}\right) & \begin{array}{c}
{\scriptstyle id;i+1,i+1} \\ {\scriptstyle \tau_1;i+1,i+1} \\ {\scriptstyle id;i+1,i} \\ {\scriptstyle \tau_1;i+1,i} \\ {\scriptstyle id;i,i} \\ {\scriptstyle \tau_1;i,i}
\end{array}\end{array}$$

Die Vektoren $v_{\tau_1;i+1,i+1}, v_{id;i+1,i}, v_{\tau_1;i+1,i}, v_{\tau_1;i,i}$ bilden einen invarianten Unterraum. Die korrespondierende Darstellung ist:

$$\sigma_i \rightarrow \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & q^2 & 0 & 1-q \\
q & 0 & 1-q^2 & 0
\end{array}\right) & \begin{array}{c}
{\scriptstyle \tau_1;i+1,i+1} \\ {\scriptstyle id;i+1,i} \\ {\scriptstyle \tau_1;i+1,i} \\ {\scriptstyle \tau_1;i,i}
\end{array}\end{array}$$

Die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum, gebildet von den Vektoren $v_{id;i+1,i+1}$, $v_{id;i,i}$, ist die Burau-Darstellung:

$$\sigma_i \rightarrow \begin{array}{cc}\left(\begin{array}{cc}
0 & 1 \\
q & 1-q
\end{array}\right) & \begin{array}{c}
{\scriptstyle id;i+1,i+1} \\ {\scriptstyle id;i,i}
\end{array}\end{array}$$

Die relevante Transformation liefert nun:

$$
\begin{aligned}
I_{id}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,k}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,k}^{(2)} &= I_{id}^{(0)}(1-\gamma_{1,k})(1-\gamma_{2,k}\sigma_1)(1+\sigma_1^{-1}) \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = \\
&= (1-q)^2 q^{-\frac{1}{2}} I_{id}^{(0)} \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} \neq 0, \qquad k = i, i+1 \\
I_{\tau_1}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,k}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,k}^{(2)} &= I_{\tau_1}^{(0)}(1-\gamma_{1,k})(1-\gamma_{2,k}\sigma_1)(1+\sigma_1^{-1}) \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = 0 \\
I_{\tau}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i+1}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i}^{(2)} &= I_{\tau}^{(0)}(1-\gamma_{1,i+1})(1-\gamma_{2,i}) \otimes e_{1,i+1}^{(1)} \otimes e_{2,i}^{(2)} = 0, \qquad \tau \in S_2
\end{aligned}
$$

Wir ordnen daher die Ketten wie folgt Vektoren von $V = V_\Lambda^{q,(i+i)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}$ zu:

$$
\begin{aligned}
v_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}}^{(i+1)} \otimes v_\Lambda^{(i)} &\rightarrow I_{id}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i+1}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i+1}^{(2)} \in V^{(2)} \\
v_\Lambda^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}}^{(i)} &\rightarrow I_{id}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i}^{(2)} \in V^{(2)}
\end{aligned}
$$

Im Falle der Zuordnung $(1,2) \rightarrow (\alpha_{(1)}, \alpha_{(1)})$ hat man für die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung:

$$
\begin{aligned}
\Phi^{(0)} : B_2' U_{n,2} &\rightarrow GL(V^{(0)}) \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{1,j})(I^{(0)}) &= q\, I^{(0)}, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n+1,1} \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{2,j})(I^{(0)}) &= q\, I^{(0)}, \quad \gamma_{2,j} \in U_{n,1} \\
\Phi^{(0)}(\sigma_1)(I^{(0)}) &= q^{-1}\, I^{(0)}, \quad \sigma_1 \in B_2'
\end{aligned}
$$

und es resultiert die folgende Darstellung von B_n:

$$
\sigma_i \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-q \\ q^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle i+1,i+1} \\ {\scriptstyle i+1,i} \\ {\scriptstyle i,i} \end{array} \end{array}
$$

Hierbei bilden die Vektoren $v_{i+1,i+1}$ und $v_{i,i}$ einen invarianten Unterraum. Die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum ist trivial. Die relevante Transformation liefert:

$$
\begin{aligned}
I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,k}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,k}^{(2)} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,k})(1-\gamma_{2,k}\sigma_1)(1+\sigma_1^{-1}) \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = \\
&= (1-q)(1-q\,q^{-1})(1+q) I^{(0)} \otimes e_{1,2}^{(1)} \otimes e_{2,k}^{(2)} = 0, \qquad k = i, i+1 \\
I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i+1}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i}^{(2)} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,i+1})(1-\gamma_{2,i}) \otimes e_{1,i+1}^{(1)} \otimes e_{2,i}^{(2)} = \\
&= (1-q)^2 I^{(0)} \otimes e_{1,i+1}^{(1)} \otimes e_{2,i}^{(2)} \neq 0
\end{aligned}
$$

und die Zuordnung zu Vektoren von $V = V_\Lambda^{q,(i+i)} \otimes V_\Lambda^{q,(i)}$ ist:

$$
v_{\Lambda-\alpha_{(1)}}^{(i+1)} \otimes v_{\Lambda-\alpha_{(1)}}^{(i)} \rightarrow I_{id}^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}_{1,i+1}^{(1)} \otimes \tilde{\gamma}_{2,i}^{(2)} \in V^{(2)}
$$

Im Falle der Zuordnung $(1,2) \rightarrow (\alpha_{(2)}, \alpha_{(2)})$ hat man für die den Koeffizientenmodul charakterisierende Abbildung:

$$
\Phi^{(0)} : B_2' U_{n,2} \rightarrow GL(V^{(0)})
$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{(0)}(\gamma_{1,j})(I^{(0)}) &= qI^{(0)}, \quad \gamma_{1,j} \in U_{n+1,1} \\
\Phi^{(0)}(\gamma_{2,j})(I^{(0)}) &= qI^{(0)}, \quad \gamma_{2,j} \in U_{n,1} \\
\Phi^{(0)}(\sigma_1)(I^{(0)}) &= q^{-1}\, I^{(0)}, \quad \sigma_1 \in B_2'
\end{aligned}$$

und es resultiert die folgende Darstellung von B_n:

$$\sigma_i \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q^{-1} & 0 \\ q & 1-q^{-2} & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle i+1,i+1} \\ {\scriptstyle i+1,i} \\ {\scriptstyle i,i} \end{array} \end{array}$$

Die relevante Transformation liefert:

$$\begin{aligned}
I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,k} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,k} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,k})(1-\gamma_{2,k}\sigma_1)(1+\sigma_1^{-1}) \otimes e^{(1)}_{1,2} \otimes e^{(2)}_{2,k} = 0 \\
I^{(0)} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} &= I^{(0)}(1-\gamma_{1,i+1})(1-\gamma_{2,i}) \otimes e^{(1)}_{1,i+1} \otimes e^{(2)}_{2,i} = 0
\end{aligned}$$

Im Falle $m = 3$ hat man für die Zuordnung $(1,2,3) \to (\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \alpha_{(1)})$ die folgenden Symmetrien: $I^{(0)}_{id} = I^{(0)}_{\tau_1\tau_2\tau_1}$, $I^{(0)}_{\tau_1} = I^{(0)}_{\tau_1\tau_2}$ und $I^{(0)}_{\tau_2} = I^{(0)}_{\tau_2\tau_1}$ und zunächst eine Darstellung der Dimension $12 = 4 \cdot 3$. Alle Vektoren bis auf die Vektoren $v_{id;i+1,i+1,i}$ und $v_{\tau_2;i+1,i,i}$ bilden einen invarianten Unterraum, und die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum ist die Burau-Darstellung:

$$\sigma_i \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & 1-q \end{pmatrix} & \begin{array}{c} {\scriptstyle id;i+1,i+1,i} \\ {\scriptstyle \tau_2;i+1,i,i} \end{array} \end{array}$$

Die Zuordnung zu Vektoren von $V = V^{q,(i+i)}_\Lambda \otimes V^{q,(i)}_\Lambda$ ist:

$$\begin{aligned}
v^{(i+1)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}} \otimes v^{(i)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}} &\longrightarrow I^{(0)}_{id} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i} \in V^{(3)} \\
v^{(i+1)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}} \otimes v^{(i)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}} &\longrightarrow I^{(0)}_{\tau_2} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i} \in V^{(3)}
\end{aligned}$$

Im Falle $m = 4$ hat man für $(1,2,3,4) \to (\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \alpha_{(1)}, \alpha_{(2)})$ auf Grund der Symmetrien zunächst eine Darstellung der Dimension $30 = 5 \cdot 6$. Alle Vektoren bis auf den Vektor $v_{id;i+1,i+1,i,i}$ bilden einen invarianten Unterraum, und die Darstellung auf dem korrespondierenden Quotientenraum ist trivial. Die Zuordnung zu Vektoren von $V = V^{q,(i+i)}_\Lambda \otimes V^{q,(i)}_\Lambda$ ist:

$$v^{(i+1)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}} \otimes v^{(i)}_{\Lambda-\alpha_{(1)}-\alpha_{(2)}} \longrightarrow I^{(0)}_{id} \otimes \tilde{\gamma}^{(1)}_{1,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(2)}_{2,i+1} \otimes \tilde{\gamma}^{(3)}_{3,i} \otimes \tilde{\gamma}^{(4)}_{4,i} \in V^{(4)}$$

Insgesamt bekommt man für die Darstellung $B_n \to GL(V) = GL(V^{q,(i+i)}_\Lambda \otimes V^{q,(i)}_\Lambda)$: $\sigma_i \to R \in GL(V)$, wobei die Matrix R lautet:

$$R = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 1-q & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1-q & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Ausblick und offene Fragen

Abschließend werden diverse Fragen und Vermutungen zusammengestellt, denen in der vorliegenden Arbeit nicht nachgegangen wurde.

Zopfgruppen zu Σ_g

In dieser Arbeit wurden kurz gesagt homologische Darstellungen der Zopfgruppen zur komplexen Ebene $\mathbf{C}$ behandelt. Mit ähnlichen Methoden sollten auch die Zopfgruppen zu anderen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten betrachtet werden können. Im Falle der orientierbaren geschlossenen Flächen Σ_g vom Geschlecht $g > 0$ sind die Konfigurationsräume $X_{n,m}(\Sigma_g)$ nach Fadell und Neuwirth [16] wie die Räume $X_{n,m}(\mathbf{C})$ asphärisch, und sie genügen ebenso kurzen exakten Homotopiesequenzen, mit deren Hilfe Birman [5] die Gruppenbeschreibungen der Zopfgruppen $\pi_1(X_{0,n}(\Sigma_g))$ und $\pi_1(X_{0,[n]}(\Sigma_g))$ angibt.

Monodromie konfluenter hypergeometrischer Integrale

Eine verallgemeinerte Zopfgruppe wurde implizit von Nekrassoff [31] im Zusammenhang mit der Monodromie konfluenter hypergeometrischer Integrale definiert.
Und zwar betrachtet Nekrassoff Integrale der Gestalt:

$$\int dz \prod_{j=1}^{n} (z - z_j)^{\lambda_j} e^{\sum_{l=1}^{p_j} \frac{\beta_{j;l}}{(z-z_j)^l}}, \qquad \lambda_j, \beta_{j;l} \in \mathbf{C}$$

mit irregulären Singularitäten in z_j, die Lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen der Ordnung $n - 1 + \sum_{j=1}^{n} p_j$ sind. Die zulässigen geschlossenen Integrationswege sind einerseits wie im Falle gewöhnlicher hypergeometrischer Integrale Pochhammersche Doppelumläufe um je zwei Singularitäten, andererseits Wege, die innerhalb solcher Winkelbereiche von Singularität zu Singularität laufen, daß stets gilt:

$$\lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{\lambda_{m,j}} e^{\frac{\beta_{j;p,j}}{(z-z_j)^{p_j}}} = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

Die Bedingung wird erfüllt für $\mathrm{Re}(\frac{\beta_{j;p_j}}{(z-z_j)^{p_j}}) < 0$. Nekrassoff definiert nun implizit eine Zopfgruppe durch eine Erweiterung von P_n durch zusätzliche Generatoren, die Drehungen der Winkelbereiche

zu z_j, $j = 1, \ldots, n$, um den Winkel $\frac{2\pi}{p_j}$ entsprechen, und die Monodromiegruppe der konfluenten hypergeometrischen Integrale als Bild dieser Zopfgruppe in der Automorphismengruppe des Vektorraums, der von den linear unabhängigen Integralen aufgespannt wird.
Nekrassoffs Resultate sollten ausgearbeitet werden. Dies beinhaltet die Definition geeigneter äquivarianter Kettenkomplexe und die Bestimmung deren Homologie, die Definition der erweiterten Zopfgruppe und ihre Darstellung als Gruppe von Automorphismen der Homologiegruppe. Ferner sollten die Resultate verallgemeinert werden mit dem Ziel, die Monodromiegruppen mehrfacher konfluenter hypergeometrischer Integrale zu bestimmen.

Bilineare Invarianten und Irreduzibilität der Darstellungen

Die Darstellungen der Zopfgruppen erlauben bilineare Invarianten, mit deren Hilfe die Irreduzibilität der Darstellungen gezeigt werden kann.
Man betrachte zunächst die reduzierte Gassner-Darstellung der reinen Zopfgruppe P_n, den Monomorphismus $\chi_h : P_n \to \mathrm{Aut}(G^{n-1})$, wobei $G = \mathbf{Z}[\alpha_{m,i}^{\pm 1}]$ der Ring der Laurent-Polynome in den Variablen $\alpha_{m,i}$, $i = m+1, \ldots, m+n$, war, ein generischer 1-dimensionaler $U_{n,1}$-Modul, gegeben durch $\Phi_g(\gamma_{m,i}) = \alpha_{m,i}$, $\gamma_{m,i} \in P_n$ und $\alpha_{m,i} \neq 1$. In [12] konnten wir durch direkte Rechnung zeigen, daß es eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte antihermitesche Matrix $Q_h \in GL(\mathbf{Z}[\alpha_{m,i}^{\pm 1}], n-1)$ gibt, die in folgendem Sinne invariant ist bzgl. der Gassner-Darstellung der Zopfgruppe P_n:

$$\chi_h(\gamma_{j,k})\, Q_h\, \chi_h^*(\gamma_{j,k}) = Q_h, \qquad \gamma_{j,k} \in P_n$$

Hierbei bezeichnet * die adjungierte Matrix. Explizit lautet die invariante Matrix Q_h, die von Kita und Yoshida [22] als Homologie-Schnittmatrix interpretiert wird, wie folgt:

$$\begin{aligned}
(Q_h)_j^{j-1} &= -(1-\alpha_{m,j})^{-1} \\
(Q_h)_j^{j} &= (1-\alpha_{m,j})^{-1} + (1-\alpha_{m,j+1})^{-1} - 1 \\
(Q_h)_j^{j+1} &= 1 - (1-\alpha_{m,j+1})^{-1} \\
(Q_h)_i^{j} &= 0, \qquad i \neq j-1, j, j+1
\end{aligned}$$

Man bemerke nun, daß die Gassner-Darstellung von P_n eine Darstellung als Gruppe von Reflektionen ist, denn es gilt:

$$\chi_h(\gamma_{j,k}) = \mathbf{1} - \Gamma_{j,k}, \qquad \mathrm{Rang}(\Gamma_{j,k}) = 1$$

Mit dieser Eigenschaft und mit der Forderung, daß die Invariante Q_h nicht entarte, zeigen Matsumoto et alteri [28], daß die Gassner-Darstellung von P_n im generischen Fall irreduzibel ist.
Die Invariante Q_h kann verallgemeinert werden zu einer Invariante $\mathcal{Q}_h$ bzgl. der Darstellungen der Zopfgruppe B_n, der Darstellungen $\chi_h : B_n \to \mathrm{Aut}(G^{n-1})$ mit beliebigem generischen $U_{n,1}$-Modul G:

$$\Phi_h(\sigma_i)\, \mathcal{Q}_h\, \Phi_h^*(\sigma_i) = \mathcal{Q}_h, \qquad \sigma_i \in B_n$$

Hierbei ist die adjungierte Matrix definiert als transponierte Matrix mit konjugierten Einträgen gemäß $\bar\beta = \beta^{-1}$, $\beta \in B_n U_{n,1}$, und die Einträge von $\Phi_h(\sigma_i)$ und $\mathcal{Q}_h$ sind als Endomorphismen des

Koeffizientenmoduls G zu verstehen. Explizit hat man:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{Q}_h)_j^{j-1} &= -(1-\gamma_{m,j})^{-1} \\
(\mathcal{Q}_h)_j^{j} &= (1-\gamma_{m,j})^{-1} + (1-\gamma_{m,j+1})^{-1} - 1 \\
(\mathcal{Q}_h)_j^{j+1} &= 1-(1-\gamma_{m,j+1})^{-1} \\
(\mathcal{Q}_h)_i^{j} &= 0, \qquad i \neq j-1, j, j+1
\end{aligned}$$

Die oben angegebene Invariante Q_h resultiert offensichtlich für $\gamma_{m,i} \to \alpha_{m,i} \in \mathbf{C}$.
Vermutlich wird man wie im Falle der Gassner-Darstellung von P_n zeigen können, daß die homologischen Darstellungen von B_n im Fall eines beliebigen generischen Koeffizientenmoduls G irreduzibel sind. Die Invariante $\mathcal{Q}_h$ sollte ebenfalls als Homologie-Schnittmatrix interpretiert werden können.

Hypergeometrische Differentialsysteme und infinitesimale Zopfrelationen

Verallgemeinerte hypergeometrische Integrale genügen gewissen totalen Differentialsystemen.
Man definiere rekursiv Integrale mit Werten in einem komplexen Vektorraum $V^{(r)}$ der Dimension $m+n-r$, $r>0$, durch:

$$\begin{aligned}
(I^{(r)})_k &= \int \frac{dz_r}{z_r - z_k} I^{(r-1)}, \qquad k = r+1, \ldots, m+n \\
I^{(0)} &= \prod_{1 \leq i < j \leq m+n} (z_i - z_j)^{\lambda_{i,j}}
\end{aligned}$$

wobei über Zyklen aus $H_1(V^{(r-1)} \otimes C(\tilde{X}_{n+m-r,1}))$, $V^{(r-1)}$ ein generischer $U_{n+m-r,1}$-Modul, integriert werde. Es kann durch vollständige Induktion gezeigt werden, daß die Integrale vollständig integrierbaren totalen Differentialsystemen von der folgenden Gestalt genügen:

$$\begin{aligned}
dI^{(r)} &= \Gamma^{(r)} I^{(r)} \\
\Gamma^{(r)} &= \sum_{r \leq i < j \leq m+n} \Omega_{i,j}^{(r)} d \log(z_i - z_j)
\end{aligned}$$

wobei die Endomorphismen $\Omega_{i,j}^{(r)} \in \mathrm{End}(V^{(r)})$ rekursiv bestimmt sind und $\Omega_{i,j}^{(0)} = \lambda_{i,j}$. Die Endomorphismen genügen jeweils den folgenden Relationen, sogenannten infinitesimalen Relationen der reinen Zopfgruppe P_{n+m-r}:

$$\begin{aligned}
\left[\Omega_{i,j}^{(r)} + \Omega_{j,k}^{(r)}, \Omega_{i,k}^{(r)}\right] &= \left[\Omega_{i,j}^{(r)} + \Omega_{i,k}^{(r)}, \Omega_{j,k}^{(r)}\right] = 0 \\
\left[\Omega_{i,j}^{(r)}, \Omega_{k,l}^{(r)}\right] &= 0, \qquad i,j,k,l \text{ verschieden}
\end{aligned}$$

Umgekehrt kann man mit Hilfe des sogenannten Arnoldschen Lemma zeigen, daß diese Relationen notwendig und hinreichend sind, damit die Differentialsysteme vollständig integrierbar sind.
Die Monodromiedarstellung der reinen Zopfgruppe sollte sich mit Hilfe einer Verallgemeinerung von Picards Methode der sukzessiven Approximation aus der Darstellung der Algebra der Endomorphismen $\Omega_{i,j}$ wiedergewinnen lassen, so daß die Bezeichnung der Relationen der Endomorphismen als infinitesimale Zopfrelationen begründet wird.

Knizhnik-Zamolodchikov Differentialsysteme und Quantengruppen

Oben wurden hypergeometrische Integrale vom sogenannten Knizhik-Zamolodchikov Typ betrachtet, d.h. Integrale über Differenzenprodukte mit nichtgenerischen Exponenten $\lambda_{i,j}$, die gewissen durch die Cartan-Form einfacher Lie-Algebren induzierten Rationalitätsbedingungen genügen. Es wurde darauf hingewiesen, daß diese Integrale als Elemente von Höchstgewichtsmoduln der Quantengruppe der Lie-Algebra interpretiert werden können und die Monodromiedarstellung der Zopfgruppe B_n als Darstellung der R-Matrix der Quantengruppe (auf einem Tensorprodukt von Höchstgewichtsmoduln). Es wurden aber lediglich beispielhaft für die irreduziblen Darstellungen Darstellungen $\Gamma(\{1\})$ von $sl(2, \mathbf{C})$ und $\Gamma(\{1,0\})$ von $sl(3, \mathbf{C})$ die korrespondierenden Tensordarstellungen der Zopfgruppen bestimmt. In [13] haben wir ebenso lediglich beispielhaft die Darstellungen $\Gamma(\{r\})$ von $sl(2, \mathbf{C})$, die Darstellungen $\Gamma(\{1,0,\dots,0\})$ von $sl(r, \mathbf{C})$, sowie die Darstellungen $\Gamma(\{2,0\})$ und $\Gamma(\{1,1\})$ von $sl(3, \mathbf{C})$ behandelt.
Man sollte jedoch die nichtgenerischen iterierten Darstellungen der Zopfgruppen B_n systematisch untersuchen, und es sollten dann auch diejenigen Tensordarstellungen der Zopfgruppen bestimmt werden können, die beliebigen irreduziblen Darstellungen von $sl(r, \mathbf{C})$ korrespondieren.

Literaturverzeichnis

[1] G. E. Andrews: *The Theory of Partitions.* Vol. 2 of *Encycl. of Math. and its Appl.*, Addison-Wesley, 1976.

[2] S. Bachmuth: Braid Groups are Linear Groups. *Advances in Math.*, **121**: 50-61, 1996.

[3] F. Beukers, G. Heckman: Monodromy for the Hypergeometric Function ${}_nF_{n-1}$. *Invent. Math.*, **95**, pp. 325-353, 1989.

[4] J. Birman: *Braids, Links and Mapping Class Groups.* Vol. 82 of *Ann. of Math. Stud.*, Princeton U.P., 1974.

[5] J. Birman: On Braid Groups. *Comm. Pure Appl. Math.*, **22**: 41-72, 1969.

[6] J. Birman: An Inverse Function Theorem for Free Groups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41**: pp 673-678, 1973.

[7] T. Brady: Free Resolutions for Semi-Direct Products. *Tohoku Math. J.*, **45**: 535-537, 1993.

[8] K.S. Brown: *Cohomology of Groups.* Vol. 87 of *GTM*, Springer, 1982.

[9] Burde, H. Zieschang: *Knots.* Stud. in Math., vol. 5, de Gruyter, New York, 1985.

[10] D. C. Cohen, A. I. Suciu: Homology of Iterated Semidirect Products of Free Groups. Preprint, Univ. of California, Davis, 1997, erscheint in *Journ. Pure Appl. Algebra.*

[11] F. Constantinescu, M. Lüdde: Braid Modules. *Journ. Phys. A: Math. and Gen.*, **25**: L1273-L1280, 1992.

[12] F. Constantinescu, F. Neumann: Monodromy Groups and Bilinear Monodromy Invariant Combinations of Generalized Hypergeometric Type Integrals. *Math. Methods in the Appl. Sciences*, **19**, No. 4, pp.257-286, 1996.

[13] F. Constantinescu, F. Neumann: Representations of the Braid Group and Monodromy of Knizhnik-Zamolodchikov Type Integrals. Preprint, Frankfurt/M., 1997.

[14] F. Constantinescu, F. Toppan: On the Linearized Artin Braid Representation. Preprint, J. W. Goethe-Universität, Frankfurt/M., 1992.

[15] S. Eilenberg: Homology of Spaces with Operators, I. *Transact. Amer. Math. Soc.*, **61**, pp. 378-417, 1947.

[16] E. Fadell, L. Neuwirth: Configuration Spaces. *Math. Scand.*, **10**: 111-118, 1962.

[17] R. H. Fox: Free Differential Calculus, I. *Ann. of Math.*, **57**, No. 2, pp.547-559, 1953.

[18] C. Gomez, G. Sierra: The Quantum Symmetry of Rational Conformal Field Theories. *Nucl. Phys.*, B**352**, pp. 791-828, 1991.

[19] V. L. Hansen: *Braids and Coverings.* Vol. 18 of *London Math. Soc. Stud. Texts*, Cambridge U.P., 1989.

[20] A. Hurwitz: Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, **39**, S.1-61, 1891.

[21] M. Kita: On Hypergeometric Functions in Several Variables, II. *J. Math. Soc. Japan*, **45**, No. 4, pp.645-668, 1993.

[22] M. Kita, M. Yoshida: Intersection Theory for Twisted Cycles, I. *Math. Nachrichten*, **166**, pp.287-304, 1994.

[23] F. Klein: *Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion.* Springer, Berlin, 1933.

[24] M. Lüdde: *Treue Darstellungen der Zopfgruppe und einige Anwendungen.* Dissertation, Phys. Inst., Univ. Bonn, 1992.

[25] M. Lüdde: Notes on Generalised Magnus Modules over the Braid Group. Sfb 288 Preprint No. 170, Humboldt-Universität Berlin, 1995.

[26] M. Lüdde: A Cellular Braid Action and the Yang-Baxter Equation. Sfb 288 Preprint, Humboldt-Universität Berlin, 1996.

[27] R. C. Lyndon: Cohomology Theory of Groups with a Single Defining Relation. *Ann. of Math.*, **52**, No. 3, pp.650-665, 1950.

[28] K. Matsumoto, T. Sasaki, N. Takayama, M. Yoshida: Monodromy of the Hypergeometric Differential Equation of Type $(3,6)$, II. *Ann. Scuola Norm. Pisa*, pp.617-631, 1993.

[29] J. Moody: The Burau Representation is Unfaithful for Large n. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **25**: 379-384, (1991).

[30] G. D. Mostow: Braids, Hypergeometric Functions, and Lattices. *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **16**, No. 2, pp.225-246, 1987.

[31] P. A. Nekrassoff: Über lineare Differentialgleichungen, welche mittelst bestimmter Integrale integriert werden. *Math. Ann.*, **38**, pp. 509-560, 1890.

[32] E. Ossa: *Topologie.* Vieweg, Braunschweig, 1992.

[33] L. Pochhammer: Über eine Klasse von Integralen mit geschlossener Integrationskurve. *Math. Ann.*, **37**, 1890.

[34] L. Pochhammer: Über die Differentialgleichung der allgemeineren hypergeometrischen Reihe mit zwei endlichen singulären Punkten. *Journ. Reine Angew. Math.*, **102**, S.76-159, 1888.

[35] L. Pochhammer: Über hypergeometrische Funktionen n-ter Ordnung. *Crelles Journ.*, **71**: S.316ff., 1870.

[36] H. A. Schwarz: Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußsche hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elements darstellt. *J. Reine Angew. Math.*, **75**: 292-335, 1873.

[37] L. Schlesinger: Über die hypergeometrischen Differentialsysteme. *Math. Zeitung*, **28**, S.504-518, 1928

[38] V. V. Schechtman, A. N. Varchenko: Integral Representations of n-point Conformal Correlators in the WZW-Model. Preprint MPI/89-51, Bonn, 1989.

[39] R. Stöcker, H. Zieschang: *Algebraische Topologie*. Teubner, Stuttgart, 1988.

[40] A. Tsuchiya, Y. Kanie: Conformal Field Theory on $\mathbf{P}^1$. *Adv. Stud. Pure Math.*, **16**, pp. 297-372, 1988.

[41] A. N. Varchenko: Multidimensional Hypergeometric Functions in Conformal Field Theory, Algebraic K-Theory, Algebraic Geometry. Proc. ICM, Kyoto, 1990.

[42] G. W. Whitehead: *Elements of Homotopy Theory*. Vol. 61 of *GTM*, Springer, 1978.

[43] M. Yoshida: *Hypergeometric Functions, My Love*. Vieweg, Wiesbaden, 1997.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Florin Constantinescu möchte ich für die fachliche Betreuung der vorliegenden Arbeit herzlich danken.
Besonderer Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. R. Kulze und Herrn Dipl. math. Christian Nassau, die sich intensiv mit der Arbeit beschäftigt haben und mit deren Hilfe ich zahlreiche Unzulänglichkeiten beheben konnte, sowie Herrn Prof. Dr. J. Wolfart für wertvolle kritische Anmerkungen.
Dem Land Hessen und der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main danke ich für ein Graduiertenstipendium, das diese Arbeit finanziell gefördert hat.
Meinen Freundinnen und Freunden und nicht zuletzt meinen Eltern danke ich für moralische Unterstützung.

Lebenslauf

Geboren am 26.9.1964 in Bergneustadt, Nordrhein-Westfalen, als Sohn von Hedwig Neumann, geb. Wischinski, und Hartmut Neumann. Staatsangehörigkeit: deutsch. Keine Konfession. Familienstand: ledig.

1971 - 1972	Besuch des Colegio Aleman San Bonifacio in Gijon, Spanien
1972 - 1975	Besuch der Grundschule Steinenbrück, Gummersbach
1975 - 1984	Besuch des Städtischen Gymnasiums Moltkestraße, Gummersbach
30.5.1984	Erwerb der allgemeinen Hochschulreife
1.7.1984 - 15.12.1984	Wehrdienst an der Fernmeldeschule der Marine, Eckernförde
1.2.1985 - 31.7.1985	Zivildienst im Altenpflegeheim der Arbeiterwohlfahrt, Gummersbach
1.8.1985 - 30.11.1985	Zivildienst in der Jugendherberge des DJV, Cuxhaven
1.12.1985 - 15.4.1986	Zivildienst im Altenpflegeheim der Evang. Kirche, Cuxhaven
1.10.1986	Aufnahme des Diplomstudiengangs Physik an der J. W. Goethe-Universität in Frankfurt am Main
28.2.1989	Vordiplom Physik
1990 - 1992	Anfertigung der Diplomarbeit unter Betreuung von Prof. Dr. F. Constantinescu und Prof. Dr. R. Jelitto
23.10.1992	Diplom Physik
7.1994	Teilnahme am International Congress of Mathematical Physics, Paris, mit Teilstipendium der UNESCO
9.9.1994	Beginn der Promotion am Fachbereich Mathematik der J. W. Goethe-Universität in Frankfurt am Main unter Betreuung von Prof. Dr. F. Constantinescu
1.7.1995 - 30.6.1997	Graduiertenstipendium des Landes Hessen

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Prof. Dr. Constantinescu, Prof. Dr. Dreizler, Dr. Heise, Prof. Dr. Jelitto, Prof. Dr. Kulze, Prof. Dr. Martienssen, Prof. Dr. Müller, Prof. Dr. Schaarschmidt und Prof. Dr. Stöcker.