JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

**Konstantin Korolev/ Kai D. Leifert/
Heinrich Rommelfanger**

Arbitragetheorie bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer

**No. 44
November 1999**

WORKING PAPER SERIES: FINANCE & ACCOUNTING

Konstantin Korolev/ Kai D. Leifert/
Heinrich Rommelfanger*

Arbitragetheorie bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer

No. 44
November 1999

ISSN 1434-3401

* Prof. Dr. Heinrich Rommelfanger, Professor für Wirtschaftsmathematik, Institut für Statistik und Mathematik, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Mertonstr. 17-23, D-60054 Fankfurt/Main,
Tel. +49 69 79822268, Fax +49 69 79823431, E-Mail: Rommelfanger@wiwi.uni-frankfurt.de

Arbitrage Theory In Markets With Fuzzy-Expectations

August 1999

Abstract

The neoclassical arbitrage theory is based on the assumption that market participants have the same expectations about state contingent returns of risky assets. This is a very limited view of uncertainty in such models. Even if we accept that all market participants have the same possibility distribution about the true payoffs in the future, it can not be expected that all have the same set of payoffs.

In this article further uncertainty is implemented in existing models by combining classic financial theories and fuzzy-logic theory. Payoffs are now described by fuzzy numbers. This means that, based on their private expectations, individual market participants contribute to the set of possible future payoffs.

One-period and multi-period arbitrage models are modified in the way that fuzzy expectations can be dealt with.

JEL classification: D82, G14

Keywords: Arbitrage, Fuzzy logic, Completeness of financial markets, Risk neutral valuation, Contingent claims

Arbitragetheorie bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer

August 1999

Zusammenfassung

Die neoklassische Arbitragetheorie setzt voraus, daß alle Marktteilnehmer identische Erwartungen bezüglich der künftigen zustandsabhängigen Auszahlungen von risikobehafteten Wertpapieren bilden. Die Unsicherheit besteht dann im Eintritt des Zustandes selber, jedoch nicht in dessen Ausprägung.

In diesem Artikel wird untersucht, wie eine zusätzliche Unsicherheit in Form des Unwissens über die genaue Ausprägung eines Umweltzustandes modelliert werden kann. Dazu werden die klassischen Finanzwirtschaftstheorien mit der Fuzzy Set Theorie (Theorie unscharfer Mengen) verbunden.

Ziel ist es, sowohl eine einperiodige als auch eine mehrperiodige Arbitragebewertung so zu modifizieren, daß vage Erwartungen der Marktteilnehmer unterstellt werden können.

JEL classification: D82, G14

Schlagworte: Arbitragebewertung, Arbitragefreiheit, derivate Finanzinstrumente,
Fuzzy-Logik, Vollständigkeit des Marktes, risikoneutrale Bewertung

1. Einleitung

Die neoklassische Arbitragetheorie bildet eine Grundlage für alle zur Zeit existierenden Bewertungsmethoden in der Finanzwirtschaft. Dabei werden ausschließlich rational handelnde Marktteilnehmer, die perfekte Information über die Höhe der zustandsabhängigen Zahlungen aller risikobehafteter Wertpapiere besitzen, in die Modellierung einbezogen. Mit einer zusätzlichen Annahme über homogene bedingte Erwartungen kann dann die Unsicherheit auf einen einzigen Risikofaktor reduziert werden. Die Annahme besagt, daß alle Investoren mit den gleichen zustandsabhängigen Zahlungen des Wertpapiers rechnen. Die Unsicherheit besteht also lediglich darin, daß die Investoren nicht wissen, welche der vorher festgelegten Zahlung realisiert wird.

Die Methodik der neoklassischen Arbitragetheorie sieht vor, daß die Zahlungsflüsse eines Derivats durch eine geeignete Mischung der Basiswertpapiere, deren Preise als bekannt vorausgesetzt sind, dupliziert werden. Dabei wird angenommen, daß der Preis eines solchen Duplikationsportfolios dem Preis des Derivats entsprechen muß. Existieren Arbitrage-möglichkeiten, so ist das „Law of One Price“ nicht mehr gültig und die Bewertung scheitert. Eine weitere wichtige Bedingung bei der Arbitragebewertung ist die Vollständigkeit des Kapitalmarktes. Ist diese gegeben, wird eine Arbitragebewertung ohne Kenntnis einzelner Nutzenfunktionen der Investoren möglich – Finanztitel können also präferenzfrei bewertet werden.

Als Ergebnis liefert die Arbitragetheorie auf einem vollständigen und arbitragefreien Markt eindeutige Preise. Die unterstellten Bedingungen sind aber sehr restriktiv und in der Realität häufig nicht erfüllt. Zwar konnten Erwartungen durch in der letzten Zeit immer weiter verbreiteter Standard-Software-Systeme teilweise homogenisiert werden, es besteht jedoch immer noch zwischen verschiedenen Anlegergruppen ein starkes Know-How Gefälle. Institutionale Anleger haben große Vorteile im Vergleich zu privaten Anleger bezüglich der Informationsproduktion und –anwendung. So kommt es häufig zu einer asymmetrischen Informationsverteilung zwischen diesen beiden Anlegergruppen. Auch die Unterstellung, alle Investoren seien rational handelnde Marktteilnehmer, trifft nur bedingt zu. Viele der erfolgreichsten Trader erklären, „aus dem Bauch heraus“ gehandelt zu haben. Aus diesen Gründen sollte die Annahme über homogene bedingte Erwartungen bezüglich der Zahlungen eines risikobehafteten Wertpapers verworfen werden. Die Realität ist viel risikoreicher, als es die Arbitragetheorie unterstellt.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, welche Auswirkungen vage Vorstellungen über die zukünftigen Auszahlungen, die in Form von Fuzzy-Zahlen ausgedrückt werden, auf die risikoneutrale Bewertung haben. Das Arbitragemodell wird also um eine weitere Ungenauigkeitskomponente erweitert.

In Abschnitt 2 wird der Aufbau und die daraus folgende Interpretationen der einperiodigen Arbitragebewertung bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer diskutiert. Dabei lehnen wir uns an die Definitionen und Notation von Rommelfanger[1] an. In Abschnitt 3 wird dieses Modell

[1] Rommelfanger, H. (1994)

auf eine mehrperiodige Betrachtungsweise erweitert. Die vorliegende Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse.

2. Einperiodige Arbitragebewertung bei vagen Erwartungen der Marktteilnehmer

2.1. Modellierung der Unsicherheit mit Fuzzy - Logik

Die neoklassische Arbitragetheorie wird nun im Rahmen des Fuzzy-Logik basierten Modells folgendermaßen modifiziert:
Es existiert zum Terminierungszeitpunkt t = 1 eine Menge von Umweltzuständen mit

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}\,.$$

Jedem dieser Zustände werden aber Fuzzy-Auszahlungen zugewiesen[2]:

$$\tilde{x}_k : \Omega \Rightarrow \tilde{\wp}(X)\,.$$

Daraus läßt sich somit folgende Annahme formulieren:

Annahme 2.1 [Homogene bedingte Erwartungen bezüglich der Zugehörigkeitsfunktionen]

Alle Investoren stimmen darin überein, daß die Zahlung eines Wertpapiers $\tilde{x}_k \in \tilde{\wp}(X)$ bei Eintritt des Ereignisses ω_s genau $\tilde{x}_{sk}$ beträgt.

Diese Annahme stellt eine Auflockerung der im klassischen Modell getroffenen Annahme dar, da jetzt von den Investoren nur eine *ungefähr gleiche Einschätzung* über die Auszahlung der Wertpapiere in den verschiedenen Umweltzuständen gefordert wird.

Dieses Wissen läßt sich in einer Zahlungsmatrix zusammenfassen:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \cdots & \tilde{x}_{1K} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \cdots & \tilde{x}_{2K} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{x}_{S1} & \tilde{x}_{S2} & \cdots & \tilde{x}_{SK} \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Ein Preis für ein Wertpapier mit Fuzzy-Auszahlungen wäre dann $\tilde{p}_k$ [3]. Aus der Menge dieser Wertpapiere kann man ein Portfolio $(n_1,\ldots,n_K) \in \mathbb{R}^n$ bilden, dessen Zahlungen $\sum_{k=1}^{K} \tilde{x}_{sk} n_k$, (s=1,...,S), und dessen Preis $\sum_{k=1}^{K} n_k \tilde{p}_k$ betragen.

Für die Modellierung ist außerdem notwendig, daß keiner der Investoren dominierende Marktmacht besitzt, dies wird mit der nachfolgenden Annahme sichergestellt:

Annahme 2.2 [Atomistische Konkurrenz der Investoren]

Der Preis eines Gutes kann von Investoren nicht durch Käufe oder Verkäufe beeinflußt werden. Alle Investoren sind Preisnehmer.

---

[2] Rommelfanger, H. (1994), S. 11
[3] Es wird später untersucht, welcher Preis sich aus einer Zahlungsmatrix mit Fuzzy-Auszahlungen berechnen läßt. Es erscheint zunächst aber wahrscheinlich, daß auch der Preis fuzzy ist.

Weiterhin sind beliebige Linearkombinationen von Wertpapieren handelbar. Aus der Menge dieser k Wertpapiere läßt sich dann ein Portfolio $\mathbf{n}^T = (n_1, n_2, ..., n_k, ..., n_K)$ bilden[4]. Dies stellt die Annahme 2.3 dar:

Annahme 2.3 [Handel von Portfolios von Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen]

Für beliebige Wertpapiere $\tilde{x}_k$, $k \in \{1, 2, ..., K\}$ *und Skalaren* $n_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2, ..., K\}$ *gilt:*

$$\sum_{k=1}^{K} \tilde{x}_k n_k .$$

Im folgenden wird angenommen, daß die Fuzzy-Auszahlungen und die Fuzzy-Preise durch L-R-Fuzzy-Zahlen dargestellt werden können. Der Einfachheit halber werden in den Abbildungen lineare Referenzfunktionen unterstellt, die Aussagen gelten aber auch für beliebige Referenzfunktionen.

Bevor die Frage nach dem Preis eines solchen Portfolios geklärt werden kann, müssen die Vollständigkeits- und Arbitragebedingungen ausführlich betrachtet werden, der Markt sei gemäß der nachfolgenden Annahme 2.4 friktionslos:

Annahme 2.4 [Friktionsloser Kapitalmarkt]

Der Kapitalmarkt ist friktionslos. Dies bedeutet im einzelnen:

(1) *Es gibt keine Marktzugangsbeschränkungen*
(2) *Es existieren keine Steuern und Transaktionskosten*
(3) *Sämtliche Wertpapiere sind beliebig teilbar*
(4) *Es existieren keinerlei Leerverkaufsbeschränkungen für die Wertpapiere*

2.2. Vollständigkeit, Arbitragefreiheit

Die Definition der Vollständigkeit beim neoklassischen Arbitragemodell erforderte eine scharfe Abgrenzung der Auszahlungen verschiedener Wertpapiere voneinander, um feststellen zu können, ob diese linear unabhängig sind. Im Modell mit Fuzzy-Auszahlungen ist diese Abgrenzung nicht immer möglich, da sich die Referenzfunktionen[5] überlappen können. Daher genügt die Definition des Standardmodells nicht aus, um eine Vollständigkeit im Fuzzy-Bewertungsmodell zu beschreiben. Vielmehr ist auch eine Betrachtung der Präferenzrelationen nötig. Hilfreich hierzu sind die folgenden Definitionen, welche jeweils kurz erläutert werden.

Definition 2.1 [Vollständigkeit eines Portfolios mit Fuzzy-Auszahlungen]

Existiert für jedes Wertpapier $j \in \{1, 2, ..., K\}$ *ein Duplikationsportfolio, so daß gilt:*

$$\sum_{k=1}^{K} x_{sk} n_k = x_{s,j} \quad (s=1,..,S \,;\, j \neq k)$$

und gelte weiterhin, daß die Zugehörigkeitsfunktionen der Wertpapierauszahlungen in den verschiedenen Umweltzuständen auf einem ρ*-Niveau,* $\rho \in [0,1]$*, keine gemeinsamen Elemente auf-*

[4] n_k beschreibt hier die absolute Anzahl des Wertpapiers k im Portfolio.
[5] Zum Begriff der Referenzfunktion vgl. Rommelfanger,H. (1994), S.40

weisen, d.h.:

$$\tilde{x}_{jk} \succ_\rho \tilde{x}_{sk} \text{ oder } \tilde{x}_{jk} \prec_\rho \tilde{x}_{sk} \text{ mit } j,s \in \{1,2,...,S\} \text{ und } j \neq s \tag{2.2}$$

dann heißt der Markt „vollständig auf dem Niveau ρ*“.*

Sind $\tilde{x}_{jk}$ und $\tilde{x}_{sk}$ LR-Fuzzy-Zahlen mit den gleichen Referenzfunktionen, so lassen sich die ρ-Präferenzen vereinfachen zu:

$$x_{jk} \succ_\rho x_{sk} \quad \Leftrightarrow \quad (x_{jk} - \underline{x}^\rho_{jk}) \leq (x_{sk} + \overline{x}^\rho_{sk}) \tag{2.3}$$

und für

$$x_{jk} \prec_\rho x_{sk} \quad \Leftrightarrow \quad (x_{jk} + \overline{x}^\rho_{jk}) \geq (x_{sk} - \underline{x}^\rho_{sk}) \tag{2.4}$$

für alle j, s=1,...,S, k = 1,...,K, $j \neq s$.
wobei:

$$x^\rho_{jk} = \underline{x}_{jk} L^{-1}(\rho),\ x^\rho_{sk} = \underline{x}_{sk} L^{-1}(\rho),\ x^\rho_{jk} = \overline{x}_{jk} R^{-1}(\rho),\ x^\rho_{sk} = \overline{x}_{sk} R^{-1}(\rho).$$

Es stellt sich aber die Frage, ob für eine Vollständigkeitsdefinition nur die ρ-Präferenzrelation ökonomisch sinnvoll ist, oder ob auch „schwächere“ Präferenzrelationen zu Erklärung der Marktvollständigkeit dienen könnten. Dies sei im folgenden anhand eines Beispiels mit einem Wertpapier in zwei Umweltzuständen illustriert.

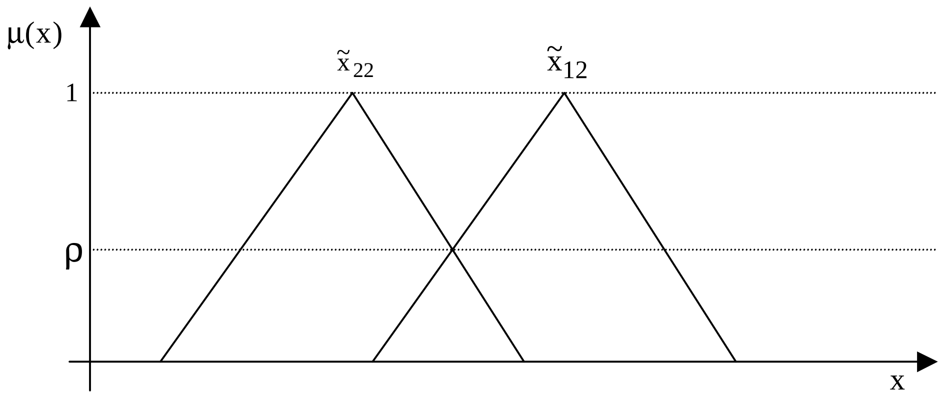

Abb. 2-1 : ρ-Präferenz bei Fuzzy-Zahlen

Für eine Vollständigkeit nach Definition 2.1 muß für $x_{12} > x_{22}$ gelten, daß $\tilde{x}_{12}$ auf dem ρ-Niveau $\tilde{x}_{22}$ vorgezogen (präferiert) wird.
Es muß gelten: $\text{Inf}\,(x_{12})_\alpha > \text{Sup}\,(x_{22})_\alpha$ für alle $\alpha \in [\rho, 1]$.

Wie der Betrachter erkennen kann, impliziert die ρ-Präferenz eine sehr strikte Bedingung für die Abgrenzung von Fuzzy-Zahlen. Daher stellt sich die Frage, ob auch andere, schwächere, Kriterien greifen könnten, um Marktvollständigkeit zu erklären.

Betrachten wir in diesem Zusammenhang die ε-Präferenz, nach der eine Fuzzy-Zahl auf dem Niveau ε präferiert wird – man schreibt $\tilde{x}_{12} \succ_\varepsilon \tilde{x}_{22}$ – wenn gilt :

$$\text{Inf}\,(\tilde{x}_{12})_\alpha \geq \text{Inf}\,(\tilde{x}_{22})_\alpha \text{ und } \text{Sup}\,(\tilde{x}_{12})_\alpha \geq \text{Sup}\,(\tilde{x}_{22})_\alpha \text{ für } \alpha \in [\varepsilon; 1]. \tag{2.5}$$

Sind $\tilde{x}_{12}$ und $\tilde{x}_{22}$ LR-Fuzzy-Zahlen mit den gleichen Referenzfunktionen, so läßt sich die Bedingung (2.6) vereinfachen zu:

$$x_{12} - \underline{x}_{12}L^{-1}(\varepsilon) \geq x_{22} - \underline{x}_{22}L^{-1}(\varepsilon) \text{ und } x_{12} + \overline{x}_{12}R^{-1}(\varepsilon) \geq x_{22} + \overline{x}_{22}R^{-1}(\varepsilon).$$

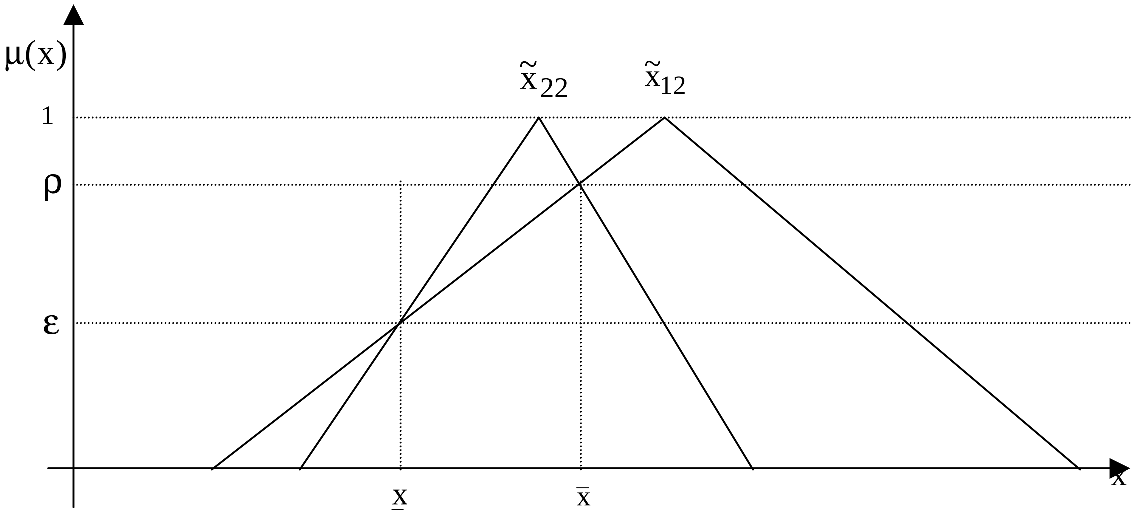

Abb. 2-2 : ε-Präferenz im Vergleich zur ρ-Präferenz bei Fuzzy-Zahlen

Es gibt nun aber ein Intervall $[\underline{x};\overline{x}]$ in dem die Möglichkeit mit positiven Zugehörigkeitswerten existiert, daß der Markt nach Definition 2.1 unvollständig ist. Es gilt also: $\mu_{x_{12}}(x) > 0$ und $\mu_{x_{22}}(x) > 0$ für alle $x \in [\underline{x};\overline{x}]$.

Daraus folgt unmittelbar, daß der Markt auf dem Nullniveau nicht vollständig sein kann. Er kann jedoch auch nicht vollständig auf dem ε-Niveau sein, denn es gilt ebenso: $(\mu_{x_{12}}(x))_\alpha > 0$ und $(\mu_{x_{22}}(x))_\alpha > 0$ für alle $x \in [\underline{x};\overline{x}]$ mit $\alpha \in [\varepsilon;1]$.

Die ε-Präferenz ist aber eine zu schwache Relation um eine Marktvollständigkeitsaussage zu formulieren. Damit kommen aber auch alle „schwächeren“ Präferenzrelationen hier nicht in Betracht[6].

<u>Definition 2.2 [Perfekte Vollständigkeit]</u>

Ein Markt heißt genau dann „perfekt vollständig“, wenn

$$\sum_{k=1}^{K} x_{sk} n_k = x_{s,j} \quad s=1,..,S\ ;\ j \neq k$$

und $\tilde{x}_{jk} \succ_\rho \tilde{x}_{sk}$ oder $\tilde{x}_{jk} \prec_\rho \tilde{x}_{sk}$ mit $j,s \in \{1,2,...,S\}$ und $j \neq s$

für ρ *gleich Null gilt, d.h. wenn der Markt also „vollständig auf einem Niveau* $\rho = 0$ *“ ist.*

Der in Definition 2.2 dargestellte Spezialfall impliziert also meist strengere Anforderungen an Marktvollständigkeit als dies nach Definition 2.1 erforderlich wäre. Ist ein Markt perfekt vollständig, gehen demnach alle verfügbaren Informationen in die Berechnung ein; der Informationsverlust durch die Vernachlässigung von Werten unterhalb des ρ-Niveaus entfällt.

---

[6] vgl. Rommelfanger, H. (1994), S.72ff.

Es stellt sich die Frage, ob dieser Informationsverlust auch mit geringeren Anforderungen ausgeglichen werden könnte, denn die Definition 2.2 ist für den Zweck der Derivatebewertung oftmals zu hart. Ein anderer Vorschlag wäre ein Portfolio mit Fuzzy-Auszahlungen schon als vollständig anzusehen, wenn für die Gipfelpunkte der Fuzzy-Zahlungen die Vollständigkeit im neoklassischen Sinne erfüllt ist. Auch hier entfällt der Informationsverlust wie in einem perfekt vollständigen Markt.

Diese Alternativdefinition führt dazu, daß eine präferenzfreie Bewertung nicht mehr möglich und Nutzenfunktionen der einzelnen Anleger berücksichtigt werden müssen. Dies bedeutet im Gegensatz zum klassischen Modell jedoch nicht, daß der künstliche Wahrscheinlichkeits-vektor nicht mehr eindeutig ist. Es wird in Abschnitt 2.3. gezeigt werden, daß dieser unabhängig von den Spannweiten und somit auch unabhängig von der Definition der Vollständigkeit in einem Portfolio von Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen errechnet wird. Jedoch folgern aus den Eigenschaften der Vollständigkeit nach Definition 2.2. wichtige Implikationen für das Hedging derivativer Positionen.

Diese Überlegung führt zu:

<u>Definition 2.3 [Teilperfekte Vollständigkeit]</u>

Ein Markt heißt genau dann „teilperfekt vollständig“, wenn

$$\sum_{k=1}^{K} x_{sk} n_k = x_{s,j} \quad s = 1,..,S\,; \quad j \neq k$$

und $\tilde{x}_{jk} \succ_\rho \tilde{x}_{sk}$ oder $\tilde{x}_{jk} \prec_\rho \tilde{x}_{sk}$ mit $j,s \in \{1,2,...,S\}$ und $j \neq s$ *für ein beliebiges* $\rho \in [0;1]$ *gilt, wenn der Markt also „vollständig auf einem* ρ*-Niveau“ ist.*

Eine Überlappung von Referenzfunktionen der Wertpapierauszahlungen ist nun zugelassen. Daß dies keine Folgen auf die Existenz und Eindeutigkeit der Eintrittswahrscheinlichkeiten hat, wird in Abschnitt 2.3. bewiesen. Der ökonomische Interpretationgehalt von Marktvollständigkeit hingegen könnte fraglich werden.

Es soll nun gezeigt werden, inwiefern Arbitragemöglichkeiten in einem Portfolio von Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen existieren können. Dazu muß gelten, daß mit einem nicht-positiven Aufwand in t=0 ein nicht-negativer Ertrag in t=1 erzielt werden kann, also daß

$$\sum_{k=1}^{K} \tilde{x}_{sk} n_k \succ 0 \ \text{ für } \ s = 1, 2,..., S \ \text{ und zugleich } \sum_{k=1}^{K} n_k \tilde{p}_k \prec 0\,. \tag{2.6}$$

Hieraus ergibt sich folgende Definition für Arbitragefreiheit des Kapitalmarktes:

<u>Definition 2.4 [Arbitragefreiheit in einem Fuzzy-Portfolio]</u>

Sei $\vec{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2,..., \tilde{p}_K)$ *bekannt und werde ein Duplikationsportfolio aus* K *Wertpapieren gebildet, so daß* $\tilde{x}_{s,K+1} = \sum_{k=1}^{K} \tilde{x}_{sk} n_k$ für $s = 1, 2,..., S$ *mit einem Preis* $\tilde{p}_{K+1} = \sum_{k=1}^{K} n_k \tilde{p}_k$,

dann herrscht genau dann Arbitragefreiheit, wenn für das Portfolio gilt:

$\sup \tilde{p}_{K+1} > 0$ *oder* $\inf \tilde{x}_{s,K+1} < 0$ *für alle* $s = 1,2,...,S$.

Zur Erläuterung sei zunächst die Situation betrachtet, in der gegen Definition 2.4 verstoßen wird. Es ist einsichtig, daß dies nur dann der Fall ist, wenn

$\sup \tilde{p}_{K+1} \leq 0$ *und* $\inf \tilde{x}_{s,K+1} \geq 0$ für alle $s = 1, 2,...,S$.

Ob Arbitragefreiheit wirklich nur dann gilt, wenn diese Situation ausgeschlossen wird, soll hier verbal untersucht werden. Zunächst sei angemerkt, daß Definition 2.4 strengere Bedingungen für die Existenz von Arbitragemöglichkeiten impliziert. Anders als bei dem klassischen Begriff der Arbitragefreiheit genügt es bereits, wenn die *Möglichkeit* einer positiven Preisrealisation bzw. die *Möglichkeit* einer negativen Auszahlungsrealisation mit positiven Zugehörigkeitswerten existiert. Dies ist die Folge der Modellierung von Fuzzy-Auszahlungen, wobei sichere Arbitragemöglichkeiten durch die Spannweiten der Wertpapierauszahlungen unsicherer werden, also in dieser Modellwelt mehr Risiko zugelassen wird.

Würde jetzt gelten, daß $\inf \tilde{x}_{s,K+1} < 0$ und gleichzeitig auch der Preis negativ ist, so kann kein risikoloser Ertrag im Sinne von Arbitrage erwirtschaftet werden. Oder es gilt $\sup \tilde{p}_{K+1} > 0$, dann gibt es einen positiven Preis für eine positive Auszahlung, welches ebf. Arbitragefreiheit unterstellt. Durch diese Überlegungen wird ersichtlich, daß Definition 2.4 alle Möglichkeiten einschließt, in denen Arbitragefreiheit herrscht.

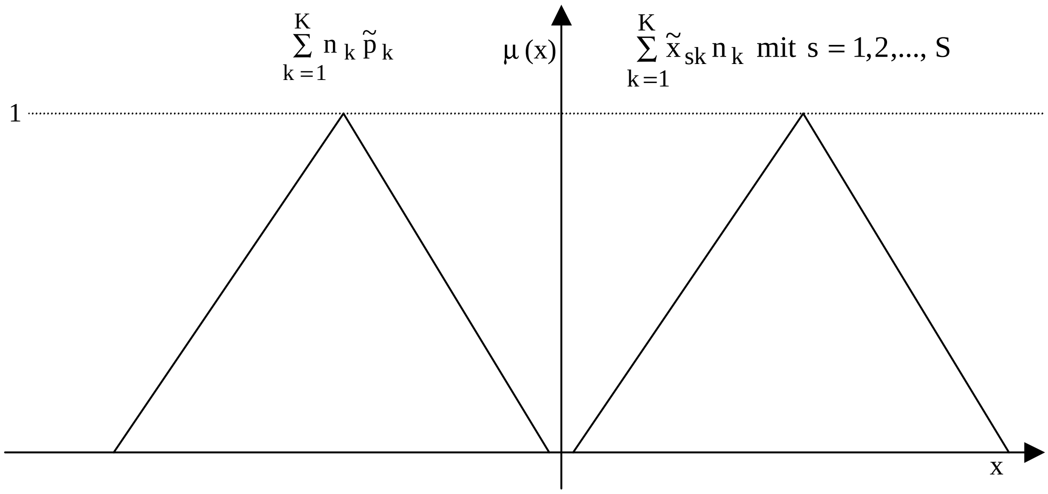

Abb. 2-3 : Arbitragemöglichkeit bei Fuzzy-Auszahlungen in einem Portfolio

Bei der graphischen Veranschaulichung in Abb. 2-3 wird ebenfalls deutlich, warum die Null in beiden Bedingungen der Definition ausgeschlossen werden kann und somit Arbitrage vom Typ I und II nicht länger unterschieden werden muß. Unter den obigen Bedingungen für die Existenz von Arbitragemöglichkeiten ist der Wert der Zugehörigkeitsfunktionen beider Fuzzy-Zahlen an der Stelle Null stets Null und somit unmöglich. Dank dieser Vereinfachung lassen sich Arbitragemöglichkeiten auch mit der Definition positiver und negativer Fuzzy-Zahlen beschreiben und es kann formuliert werden:

Sei $\tilde{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{n}$ eine positive Fuzzy-Zahl und das Produkt $\mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{P}}$ eine negative Fuzzy-Zahl, so ist der Markt nicht arbitragefrei.

Es stellt sich nunmehr die Frage, ob ähnlich wie bei der Vollständigkeit eine Unterscheidung auf einem ρ-Niveau – nachfolgend als ρ_2-Niveau bezeichnet – sinnvoll wäre.

Es solle also gelten, daß

$$\sum_{k=1}^{K} \tilde{x}_{sk} n_k \succ_\alpha 0 \text{ für alle } s = 1, 2, \ldots, S \text{ und zugleich } \sum_{k=1}^{K} n_k \tilde{p}_k \prec_\alpha 0 \text{ für } \alpha \in \{\rho_2; 1\}. \qquad (2.7)$$

Sind $\tilde{x}_{sk}$ und $\tilde{p}_k$ LR-Fuzzy-Zahlen, so läßt sich (2.7) vereinfacht schreiben als:

$$\begin{aligned} &\inf \tilde{x}_{s,K+1} < 0 \quad \text{und} \quad \inf (x_{s,K+1}; \underline{x}^{\rho_2}_{s,K+1}; \overline{x}^{\rho_2}_{s,K+1})_{LR} \quad \text{, und zugleich} \\ &\sup \tilde{p}_{K+1} > 0 \quad \text{und} \quad \sup (p_{K+1}; \underline{p}^{\rho_2}_{K+1}; \overline{p}^{\rho_2}_{K+1})_{LR} < 0. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Oberhalb dieses ρ_2-Niveaus herrscht dann natürlich keine Arbitragefreiheit. Da aber die Möglichkeit einer Realisation unterhalb dieses Niveaus besteht, wenn dieser Bereich nicht ausgeschlossen wird, liegt definitionsgemäß keine Verletzung der Arbitragefreiheit vor. Das ρ_2-Niveau kann lediglich als Grad der Arbitragefreiheit verstanden werden.

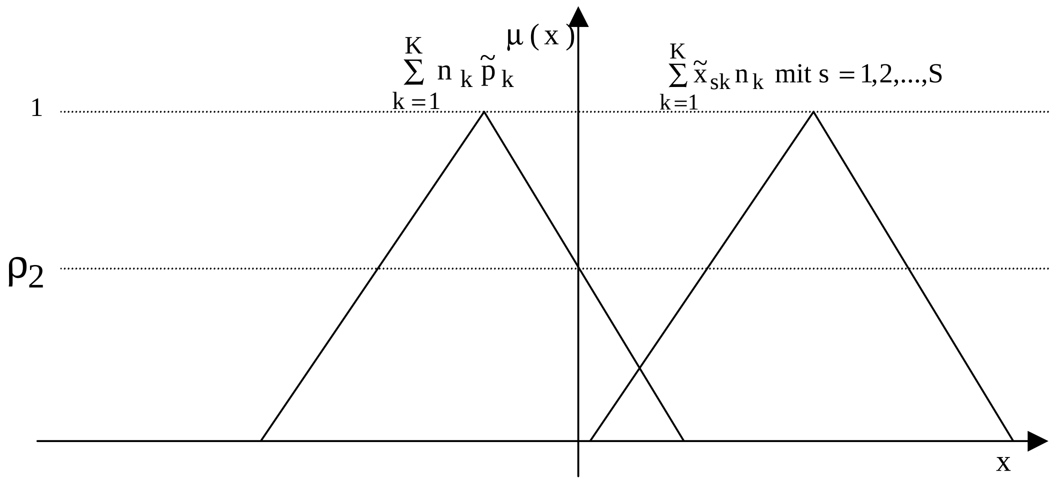

Abb. 2-4 : Der Zusammenhang zwischen ρ-Präferenz und Arbitragemöglichkeiten

<u>Annahme 2.5 [Arbitragefreiheit im Fuzzy-Logik basierten Modell]</u>

Es existieren auf dem Kapitalmarkt keine Arbitragemöglichkeiten gemäß Definition 2.4.

Wie ein solcher Vektor auch in einem Modell mit Fuzzy-Auszahlungen bestimmt werden kann, wird Abschnitt 2.3. zeigen. Ebenfalls wird die Eindeutigkeit des Vektors diskutiert. Ob eine Vereinfachung der Annahmen bezüglich der Vollständigkeit möglich und sinnvoll ist, um u.a. den dargestellten Vorteil besser nutzen zu können, wird später untersucht werden.

2.3. Fuzzy-Logik basierte Bewertung derivater Finanzinstrumente

Im klassischen Modell waren die Definitionen der Arbitragefreiheit und Vollständigkeit für die Existenz und Eindeutigkeit eines Wahrscheinlichkeitsvektors **Q** von Bedeutung. Nachdem analoge Definitionen aufgestellt und die Bedingungen dafür im Abschnitt zuvor dargestellt wurden, kann nun die Existenz und Eindeutigkeit dieses Wahrscheinlichkeitsvektor **Q** auch in einem Modell mit Fuzzy-Auszahlungen untersucht werden. Eine völlig analoge Darstellung zum neoklassischen Arbitragetheorie ist nur über eine zusätzliche Annahme möglich. Zwar ist eine Bewertung auch ohne diese Annahme denkbar, jedoch muß dann überlegt werden, inwiefern eine Normierung mit einer Fuzzy-Größe implementiert wird. Dies stellt zum einen ein mathematisches Problem dar, denn Fuzzy-Rechenregeln haben andere Implikationen als klassische, insbesondere stellt sich aber auch ein ökonomisches Problem, da untersucht werden muß, inwiefern die Ökonomie auf eine derartige Normierung reagiert und ob überhaupt Fuzzy-Rechenregeln angewandt werden dürfen.

Annahme 2.6 [Existenz eines Basiswertpapiers ohne Spannweiten]

Es existiert mindestens ein Basiswertpapier in einer vollständigen Zahlungsmatrix, welches keine Spannweiten aufweist und dessen Preis ebenfalls keine Spannweiten beinhaltet.

Wir sind der Meinung, daß diese Annahme in einer funktionierenden Wirtschaft realistisch ist. Es wird mindestens ein Finanzinstrument geben, dessen Zahlungen so sicher sind, daß Spannweiten nicht vorhanden sind. Daher werden wir in Abschnitt 2.3.2 annehmen, daß eine insolvenzrisikolose Anleihe mit festen Auszahlungen existiert. In den zwei folgenden Unterabschnitten sollen u.a. die folgenden beiden alternativen Lemmas bewiesen werden.

Lemma 2.1 [Unabhängigkeit risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten]

Das äquivalente Martingalmaß hängt nicht von der Fuzzyness der Auszahlungen eines Wertpapiers im Duplikationsportfolio ab, wenn mindestens ein Basiswertpapier keine Spannweiten aufweist.

Lemma 2.2 [Fuzzyness von Preisen eines Duplikationsportfolios]

Ist die Auszahlung von mindestens einem Wertpapier eines Duplikationsportfolios fuzzy, so muß auch der Preis eines anderen Wertpapiers, welches durch dieses Portfolio dargestellt wird, fuzzy sein.

2.3.1. Fuzzy-Logik basierte Bewertung mit normierten Zahlungsmatrizen

Unter der Annahme 2.6 existiert eine Zahlungsmatrix

$$\tilde{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & x_{1k} & \cdots & \tilde{x}_{1K} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & x_{2k} & \cdots & \tilde{x}_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_{S1} & \tilde{x}_{S2} & \dots & x_{Sk} & \cdots & \tilde{x}_{SK} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Aufgrund der Spannweiten von Null eines Basiswertpapiers, hier als Wertpapier k bezeichnet, kann nun die gesamte Matrix mit genau diesem Titel normiert werden:

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{k}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_{11}}{x_{1k}} & \frac{\tilde{x}_{12}}{x_{1k}} & \dots & \frac{x_{1k}}{x_{1k}} & \dots & \frac{\tilde{x}_{1K}}{x_{1k}} \\ \frac{\tilde{x}_{21}}{x_{2k}} & \frac{\tilde{x}_{22}}{x_{2k}} & \dots & \frac{x_{2k}}{x_{2k}} & \dots & \frac{\tilde{x}_{2K}}{x_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\tilde{x}_{S1}}{x_{Sk}} & \frac{\tilde{x}_{S2}}{x_{Sk}} & \dots & \frac{x_{Sk}}{x_{Sk}} & \dots & \frac{\tilde{x}_{SK}}{x_{Sk}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{x}_{11}}{x_{1k}} & \frac{\tilde{x}_{12}}{x_{1k}} & \dots & 1 & \dots & \frac{\tilde{x}_{1K}}{x_{1k}} \\ \frac{\tilde{x}_{21}}{x_{2k}} & \frac{\tilde{x}_{22}}{x_{2k}} & \dots & 1 & \dots & \frac{\tilde{x}_{2K}}{x_{2k}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\tilde{x}_{S1}}{x_{Sk}} & \frac{\tilde{x}_{S2}}{x_{Sk}} & \dots & 1 & \dots & \frac{\tilde{x}_{SK}}{x_{Sk}} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Wie auch zuvor im klassischen Modell muß der Preisvektor mit dem selben Finanztitel normiert werden. Nach Annahme 2.6 lautet der ursprüngliche Preisvektor der gegebenen Zahlungsmatrix $\tilde{\mathbf{X}}$:

$$\left(\tilde{\mathbf{P}}\right)^T = \left(\tilde{p}_1 \quad \tilde{p}_2 \quad \cdots \quad p_k \quad \cdots \quad \tilde{p}_K\right). \tag{2.11}$$

Der normierte Fuzzy-Preisvektor ergibt sich also zu:

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\bar{k}} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{p}_1}{p_k} \\ \frac{\tilde{p}_2}{p_k} \\ \vdots \\ \frac{p_k}{p_k} \\ \vdots \\ \frac{\tilde{p}_K}{p_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{p}_1}{p_k} \\ \frac{\tilde{p}_2}{p_k} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{\tilde{p}_K}{p_k} \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Es soll nunmehr versucht werden, die Erkenntnisse aus dem Satz von Stiemke[7] auch auf Fuzzy-Matrizen zu übertragen. Gesucht wird ein streng positiver Vektor künstlicher Wahrscheinlichkeiten. Lemma 2.1. besagt weiterhin, daß dieser unabhängig von den Spannweiten eines zu bewertenden Wertpapiers oder der Basiswertpapiere ist. Die Gültigkeit des Lemmas angenommen, soll daher das äquivalente Martingalmaß mit $\boldsymbol{\eth}^{\bar{k}}$ bezeichnet werden. Dann muß gelten:

$$\sum_{s=1}^{S} \boldsymbol{\eth}_s^{\bar{k}} = 1 \quad \text{und} \quad (\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{k}})^T \cdot \boldsymbol{\eth}^{\bar{k}} = \tilde{\mathbf{P}}^{\bar{k}}. \tag{2.13}$$

Aus der Definition 2.2. zur Arbitragefreiheit ist bekannt, daß der Preis von den Auszahlungen des Portfolios abhängt. Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt müssen daher auch die Spann-

[7] vgl. Schalg, C. (1995), S.24f.

weiten des Preises durch die der Auszahlungen determiniert sein. Gilt dies, so wird das äquivalente Martingalmaß nur crisp darstellbare künstliche Wahrscheinlichkeiten beinhalten. Die Spannweiten des Preises sind also ebenso über künstliche Wahrscheinlichkeiten verknüpft, wie der Gipfelpunkt des Preises.

Hieraus folgt unmittelbar, daß die Werte des Vektors $\boldsymbol{\eth}^{\bar{k}}$ nur durch die Gipfelpunkte determiniert werden. Rückschlüsse aus der Existenz und der Eindeutigkeit dieses Vektors auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit gemäß den Definitionen 2.2. bis 2.4. sind also nicht mehr ohne weiteres möglich.

Dies bedeutet jedoch auch, daß die Beziehung (2.13) gilt, sofern Arbitragefreiheit nach Definition 2.4. sowie perfekte Vollständigkeit nach Definition 2.2. oder teilperfekte Vollständigkeit nach Definition 2.3. gegeben sind, da diese Definitionen noch strengere Anforderungen implizieren, als es Arbitragefreiheit und Vollständigkeit im neoklassischen Modell tun. Gleichung (2.13) gilt also unter der Annahme 2.5. und 2.6. und einer zusätzlichen Annahme:

Annahme 2.7 [Vollständigkeit eines Fuzzy-Portfolios]

Der Kapitalmarkt ist mindestens teilperfekt vollständig auf einem ρ*-Niveau von eins.*

Aus der Arbitragefreiheitsbedingung und der Erkenntnis über den Zusammenhang von Auszahlungsspannweiten und Preisspannweiten können nun auch weitere Claims, z.B. $\tilde{\mathbf{X}}_{K+1}$, mit Spannweiten bewertet werden. Der Zahlungsvektor wird wieder mit dem Basiswertpapier normiert, $\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{k}}_{K+1}$, und über die in Gleichung (2.13) dargestellte Beziehung gilt für den Preis dieses Titels bei gegebenem Martingalmaß:

$$\tilde{p}^{\bar{k}}_{K+1} = (\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{k}}_{K+1})^{T} \cdot \boldsymbol{\eth}^{\bar{k}} . \tag{2.14}$$

Ebenso wie im klassischen Modell entspricht $\tilde{p}^{\bar{k}}_{K+1}$ nicht dem Marktpreis des Claims, sondern nur dem „mit dem Wertpapier k normierten Marktpreis“.

Galt zuvor für die Normierung in Gleichung (2.12):

$$\tilde{\mathbf{P}}^{\bar{k}} = \frac{\tilde{\mathbf{P}}}{p_k} , \tag{2.15}$$

so wird der Marktpreis des zu bewertenden Claims durch

$$\tilde{p}_{K+1} = \tilde{p}^{\bar{k}}_{K+1} \cdot p_k \tag{2.16}$$

errechnet.

2.3.2. Fuzzy-Logik basierte Bewertung mit risikolosen Finanztiteln

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die allgemeine Fuzzy-Logik basierte Bewertung derivater Finanztitel mit normierten Zahlungsmatrizen dargestellt worden ist, sollen nun wieder Vereinfachungen dieses Modells aufgezeigt werden.

Bei der neoklassischen Arbitragetheorie wird unter der zusätzlichen

Annahme 2.8 [Vollständigkeit des Anleihemarkts]

Der Anleihemarkt ist vollständig im Sinne, daß insolvenzrisikolose Nullkuponanleihen der Fälligkeiten $t = 1, 2, ..., T$ *existieren.*

und der Interpretationen dieser als Nullkuponanleihe bzw. als ausfallrisikoloser Kreditvertrag die Bewertung wesentlich vereinfacht. Dies soll daher auch im Fuzzy-Logik basierten Modell implementiert werden.
Ist der Anleihemarkt vollständig, so impliziert dies einen weiteren – für die Fuzzy-Logik Bewertung wichtigen – Vorteil. Werden auf einem Kapitalmarkt tatsächlich völlig insolvenzrisikolose Titel gehandelt, so werden für diese auf keinen Fall Spannweiten existieren. Der Preis muß dann ebenfalls crisp darstellbar sein. Im folgenden kann also der risikolose Titel als Basiswertpapier nach Annahme 2.6. dienen.

Satz 2.1. [Spannweiten von Nullkuponanleihen]
Existieren insolvenzrisikolose Anleihen der Fälligkeiten $t = 1, 2, ..., T$, *so weisen die Auszahlungen und Preise dieser Finanztitel keine Spannweiten auf.*

Die Bewertung soll wiederum an zwei Beispielen dargestellt werden, der terminrisikoangepaßten Bewertung und der risikoneutralen Bewertung. In beiden Beispielen dient die Definition der teilperfekten Vollständigkeit als Grundlage.

Terminrisikoangepaßte Bewertung:

Gegeben sei folgende Zahlungsmatrix

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & (x_{12}; \underline{x}_{12}; \overline{x}_{12})_{LR} \\ 1 & (x_{22}; \underline{x}_{22}; \overline{x}_{22})_{LR} \end{pmatrix} \text{ und der Preisvektor } \tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{1+r}; 0; 0)_{LR} \\ (p_2; \underline{p}_2; \overline{p}_2)_{LR} \end{pmatrix}.$$

Der Markt ist vollständig und arbitragefrei, wenn die Auszahlungen und der Preis des Wertpapiers x_2 crisp sind, also $\underline{x}_{12}$, $\overline{x}_{12}$, $\underline{x}_{22}$, $\overline{x}_{22}$, $\underline{p}_2$, $\overline{p}_2 = 0$ und $x_{22} < (1+r)p_2 < x_{12}$.

Wenn sich die Auszahlungen nur fuzzy beschreiben lassen, dann ist der Markt arbitragefrei und vollständig, wenn ein ρ-Niveau existiert, bei dem gilt :

$$x_{22} + \overline{x}_{22}^{\rho} < (1+r)p_2 - (1+r)\underline{p}_2^{\rho} \text{ und } (1+r)p_2 + (1+r)\overline{p}_2^{\rho} < x_{12} - \underline{x}_{12}^{\rho}.$$

Das Wertpapier 1 weist keine Spannweiten auf und dient daher idealerweise zur Normierung:

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 1 & (x_{12}; \underline{x}_{12}; \overline{x}_{12})_{LR} \\ 1 & (x_{22}; \underline{x}_{22}; \overline{x}_{22})_{LR} \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{\mathbf{P}}^{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+r) \cdot (p_2; \underline{p}_2; \overline{p}_2)_{LR} \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

Nun werden diese Werte in Gleichung (2.13) eingesetzt und es gilt:

$$(\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{1}})^T \cdot \boldsymbol{\eth}^{\bar{k}} = \tilde{\mathbf{P}}^{\bar{1}}. \tag{2.18}$$

Das hieraus entstehende lineare Gleichungssystem kann gelöst werden. Dies ist gerade deshalb möglich, weil Wertpapier 1 keine Spannweiten aufweist und daher der erste Teil des Gleichungssystems zu $\pi_2 = 1 - \pi_1$ vereinfacht werden kann. Die Lösung ergibt sich zu:

$$\pi_1 \cdot (x_{12}; \underline{x}_{12}; \overline{x}_{12})_{LR} + (1-\pi_1) \cdot (x_{22}; \underline{x}_{22}; \overline{x}_{22})_{LR} = (1+r) \cdot (p_2; \underline{p}_2; \overline{p}_2)_{LR}. \tag{2.19}$$

Die Fuzzy-Logik basierte Bewertungsbeziehung hat also die gleiche Struktur, wie im klassischen Modell. Durch die Hinzunahme einer Nullkuponanleihe entfiel die Notwendigkeit eines äquivalenten Martingalmaßes mit Spannweiten. Es ist leicht vorstellbar, daß ohne diese Vereinfachung eine einfache – noch dazu präferenzfreie – Bewertung kaum möglich gewesen wäre. Um die Gültigkeit von der Beziehung (2.19) nochmals darzustellen, seien nun einige Überlegungen dargelegt, welche zu dem gleichen Ziel führen.

Die Spannweiten wie auch der Gipfelpunkt des Fuzzy-Preises müssen aufgezinst werden[8], beide sind also vom Zins abhängig. Entsprechend dem Grundmodell kann man die Verhältnisse der beiden Wertpapiere der Auszahlungsmatrix zueinander bilden, ohne daß die obige Beziehung verletzt wird. Dazu werden die Terme, indem zunächst mit x_{21} normiert wird:

$$\frac{(x_{22};\underline{x}_{22}^{\rho};\overline{x}_{22}^{\rho})_{LR}}{(x_{21};0;0)_{LR}} = \left(\frac{x_{22}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} \tag{2.20}$$

$$\frac{(1+r)\cdot(p_2;\underline{p}_2^{\rho};\overline{p}_2^{\rho})_{LR}}{(x_{21};0;0)_{LR}} = \left(\frac{(1+r)\cdot p_2}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\underline{p}_2^{\rho}}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\overline{p}_2^{\rho}}{x_{21}}\right) \tag{2.21}$$

$$\frac{(x_{12};\underline{x}_{12}^{\rho};\overline{x}_{12}^{\rho})_{LR}}{(x_{21};0;0)_{LR}} = \left(\frac{x_{12}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR}. \tag{2.22}$$

Die Beziehung läßt sich dann in folgender Doppelungleichung schreiben:

$$\left(\frac{x_{22}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} < \left(\frac{(1+r)\cdot p_2}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\underline{p}_2^{\rho}}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\overline{p}_2^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} < \left(\frac{x_{12}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR}. \tag{2.23}$$

Da aber für $x_{21} = (1;0;0)_{LR}$ angenommen wurde und ebenso gelte, daß

$$(1+r)\tilde{p}_1 = (1+r)\cdot(\frac{1}{1+r};0;0)_{LR} = (1;0;0)_{LR} \ ,$$

läßt sich Gleichung (3.23) zunächst umformulieren zu:

$$\left(\frac{x_{22}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} < \left(\frac{(1+r)\cdot p_2}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\underline{p}_2^{\rho}}{x_{21}};\frac{(1+r)\cdot\overline{p}_2^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} < \left(\frac{x_{12}}{x_{11}};\frac{\underline{x}_{12}^{\rho}}{x_{11}};\frac{\overline{x}_{12}^{\rho}}{x_{11}}\right)_{LR}, \tag{2.24}$$

denn die Zahlungsmatrix aus (2.17) zeigt auf, daß $x_{21} = x_{11}$. Weiterhin wird deutlich, daß $\frac{1+r}{p_1} = x_{21}$ entspricht und Gleichung (2.24) vereinfacht sich zu:

$$\left(\frac{x_{22}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR} < \left(\frac{p_2}{p_1};\frac{\underline{p}_2^{\rho}}{p_1};\frac{\overline{p}_2^{\rho}}{p_1}\right)_{LR} < \left(\frac{x_{12}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}}\right)_{LR}. \tag{2.25}$$

Nach dem Strahlensatz existiert ein $\pi \in (0,1)$, so daß gilt:

$$\pi\cdot\left(\frac{x_{22}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{22}^{\rho}}{x_{21}}\right) \oplus (1-\pi)\cdot\left(\frac{x_{12}}{x_{21}};\frac{\underline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}};\frac{\overline{x}_{12}^{\rho}}{x_{21}}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1};\frac{\underline{p}_2^{\rho}}{p_1};\frac{\overline{p}_2^{\rho}}{p_1}\right) \tag{2.26}$$

[8] Das ergibt sich durch eine Multiplikation einer L-R-Fuzzy-Zahl mit einem Skalar.

Daraus folgt, daß der Preis eines Wertpapiers mit Fuzzy-Auszahlungen nur unscharf beschrieben werden kann, wie dies schon in Lemma 2.2. konstatiert wurde.
Die zusätzliche Unsicherheit bei den Auszahlungen im Vergleich zum neoklassischen Bewertungsmodell schlägt sich in der Unschärfe des Preises nieder. Im Gegenteil dazu bleiben die Wahrscheinlichkeiten für Fuzzy-Auszahlungen crisp darstellbar. Der Preis $\tilde{p}_2$ ist ein aufgezinster Fuzzy-Erwartungswert der Auszahlungen.

Ein dritter Finanztitel kann über Gleichung (3.19) wie folgt bewertet werden:

$$\pi_1 \cdot (x_{13};\underline{x}_{13};\overline{x}_{13})_{LR} + (1-\pi_1)\cdot(x_{23};\underline{x}_{23};\overline{x}_{23})_{LR} = (1+r)\cdot(p_3;\underline{p}_3;\overline{p}_3)_{LR}\,. \qquad (2.27)$$

Diesen Zusammenhang kann man nun auch auf die risikoneutrale Bewertung übertragen.

Risikoneutrale Bewertung
Entsprechend dem Grundmodell werden die Auszahlungsmatrix auf

$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1+r & (x_{12};\underline{x}_{12};\overline{x}_{12})_{LR} \\ 1+r & (x_{22};\underline{x}_{22};\overline{x}_{22})_{LR} \end{pmatrix}$ und der Preisvektor auf $\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (1;0;0)_{LR} \\ (p_2;\underline{p}_2;\overline{p}_2)_{LR} \end{pmatrix}$ modifiziert.

Der Markt ist arbitragefrei und vollständig auf einem ρ-Niveau , wenn gilt:

$$(x_{12};\underline{x}^{\rho}_{12};\overline{x}^{\rho}_{12})_{LR} > ((1+r)\cdot p_2;(1+r)\underline{p}^{\rho}_2;(1+r)\cdot\overline{p}^{\rho}_2)_{LR} > (x_{22};\underline{x}^{\rho}_{22};\overline{x}^{\rho}_{22})_{LR}\,. \qquad (2.28)$$

Wertpapier 1 ist nicht mit Spannweiten behaftet. Die Normierung ergibt jetzt:

$$\tilde{\mathbf{X}}^{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{(x_{12};\underline{x}_{12};\overline{x}_{12})_{LR}}{1+r} \\ 1 & \dfrac{(x_{22};\underline{x}_{22};\overline{x}_{22})_{LR}}{1+r} \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{\mathbf{P}}^{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ (p_2;\underline{p}_2;\overline{p}_2)_{LR} \end{pmatrix} \qquad (2.29)$$

Dies wird wiederum in Gleichung (2.13) eingesetzt und das lineare Gleichungssystem wird gelöst. Auf erweiterte Operatoren nur insofern zurückgegriffen werden, als das Operationen mit einem Skalar durchgeführt werden und unkompliziert zu handhaben sind. Die Lösung ergibt eine zur bekannten risikoneutralen Bewertungsgleichung ähnliche Form:

$$\frac{1}{1+r}[\pi_1 \cdot (x_{12};\underline{x}_{12};\overline{x}_{12})_{LR} + (1-\pi_1)\cdot(x_{22};\underline{x}_{22};\overline{x}_{22})_{LR}] = (p_2;\underline{p}_2;\overline{p}_2)_{LR}\,. \qquad (3.30)$$

Andererseits impliziert Gleichung (2.28) wiederum, daß ein $q\in(0,1)$ existiert, so daß gilt:

$$q\cdot(x_{12};\underline{x}^{\rho}_{12};\overline{x}^{\rho}_{12})_{LR} \oplus (1-q)\cdot(x_{22};\underline{x}^{\rho}_{22};\overline{x}^{\rho}_{22})_{LR} = ((1+r)\cdot p_2;(1+r)\cdot\underline{p}^{\rho}_2;(1+r)\cdot\overline{p}^{\rho}_2)_{LR}\,. \qquad (3.31)$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$q\cdot\left(\frac{x_{12}}{1+r};\frac{\underline{x}^{\rho}_{12}}{1+r};\frac{\overline{x}^{\rho}_{12}}{1+r}\right)_{LR} \oplus (1-q)\cdot\left(\frac{x_{22}}{1+r};\frac{\underline{x}^{\rho}_{22}}{1+r};\frac{\overline{x}^{\rho}_{22}}{1+r}\right)_{LR} = \left(p_2;\underline{p}^{\rho}_2;\overline{p}^{\rho}_2\right)_{LR}\,. \qquad (3.32)$$

Der Preis des Wertpapiers 2 mit Fuzzy-Auszahlungen ist somit ein diskontierter Fuzzy-Erwartungswert. Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bleiben wie auch beim Grundmodell scharf abgrenzbar. Daraus folgt, daß eine präferenzunabhängige Bewertung von Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen möglich ist.

Es läßt sich somit zeigen, daß die Duplikation mit der Fuzzy – Logik basierten RNB möglich ist. Zu bewerten sei ein Wertpapier 3 mit

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} (x_{13}; \underline{x}_{13}; \overline{x}_{13})_{LR} \\ (x_{23}; \underline{x}_{23}; \overline{x}_{23})_{LR} \end{pmatrix}. \tag{2.33}$$

Damit der Preis für Wertpapier 3 berechnet werden kann, müssen die Erwartungswerte für den Gipfel sowie die Spannweiten gebildet werden. Das Ergebnis der Berechnung ist ein aufgezinster Fuzzy-Preis mit
dem Gipfelpunkt bei $q \cdot x_{13} + (1-q) \cdot x_{23}$ und
der rechten Spannweite bei $q \cdot (x_{13} + \overline{x}_{13}) + (1-q) \cdot (x_{23} + \overline{x}_{23})$ sowie
der linken Spannweite bei $q \cdot (x_{13} - \underline{x}_{13}) + (1-q) \cdot (x_{23} - \underline{x}_{23})$.

Der Preis des zu duplizierenden Wertpapiers hängt von Spannweiten der Auszahlungen und den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten ab. Allgemein kann man die Duplikation eines Wertpapiers mit Fuzzy-Auszahlungen folgendermaßen formulieren:

$$\tilde{p}^{\rho}_{K+1} = \frac{1}{1+r} (p_{K+1}; \underline{p}^{\rho}_{K+1}; \overline{p}^{\rho}_{K+1})_{LR} \text{ mit} \tag{2.34}$$

$$p_{K+1} = q \cdot x_{1,K+1} + (1-q) \cdot x_{2,K+1} \text{ und} \tag{2.35}$$

$$\underline{p}_{K+1} = q \cdot (x_{1,K+1} - \underline{x}^{\rho}_{1,K+1}) + (1-q) \cdot (x_{2,K+1} - \underline{x}^{\rho}_{2,K+1}) \tag{2.36}$$

$$\overline{p}_{K+1} = q \cdot (x_{1,K+1} + \overline{x}^{\rho}_{1,K+1}) + (1-q) \cdot (x_{2,K+1} + \overline{x}^{\rho}_{2,K+1}) \tag{2.37}$$

Ein einfacherer Weg wäre der Ausweg der Bewertungsgleichung aus (2.30), man erhält dann:

$$\frac{1}{1+r} \left[q \cdot (x_{13}; \underline{x}_{13}; \overline{x}_{13})_{LR} + (1-q) \cdot (x_{23}; \underline{x}_{23}; \overline{x}_{23})_{LR} \right] = (p_3; \underline{p}_3; \overline{p}_3)_{LR}. \tag{2.38}$$

3. Fuzzy-Logik basiertes mehrperiodiges Arbitragemodell

Bei der einperiodigen Modellierung der Unsicherheit mit Fuzzy-Logik wurde die Annahme getroffen, daß die Vorstellung über die zukünftigen Auszahlungen nur vage möglich sei. Im mehrperiodigen Fuzzy-Logik basierten Modell ist ein zwischenzeitliches Handeln und somit Umschichten möglich. Deshalb können die vagen Vorstellungen über die Auszahlungen nicht nur in der Periode T sondern auch in allen weiteren Zeitperioden (t = 0,...,T-1) vorliegen. Mit Fortschreiten der Zeit kann sich die Unschärfe der Vorstellungen ändern. Das bedeutet, daß die Spannweiten der Fuzzy-Auszahlungen variieren können, die Unschärfe kann im Zeitablauf zunehmen, abnehmen oder konstant bleiben. Alle drei Szenarien sind vorstellbar und plausibel. Wenn die Spannweiten der Fuzzy-Auszahlungen der weiter liegenden Perioden größer sind als die Spannweiten der Auszahlungen der naheliegenden Perioden, dann nimmt die Anzahl von Realisationsmöglichkeiten der Auszahlungen in einem bestimmten Zustand (ω_s) im Zeitablauf zu. Es kommt durch Ausschließung von Umweltzuständen zu einem Informationsfortschritt, dieser wird aber durch eine immer unschärfere Beschreibung der Auszahlungen zu späteren Zeitpunkten neutralisiert. Es existieren also in diesem Fall zwei gegenläufige Entwicklungen, die im Fuzzy-Logik basierten Mehrperiodenmodell beschrieben werden müssen. Wenn die Unschärfe der Fuzzy-Auszahlungen immer weiter im Ablauf abnimmt, dann wird der oben beschriebene Informationsfortschritt verstärkt. Offensichtlich liegen hier bestimmte Lerneffekte vor, so daß nicht nur die Umweltzustände sondern auch Realisationen der Auszahlungen ausgeschlossen werden können. Wenn über die Entwicklung der Unschärfe von Auszahlungen keine Aussagen getroffen werden können, erscheint es am plausibelsten, konstante Spannweiten anzunehmen.

Im folgenden sollen die im Einperiodenmodell hergeleiteten Bedingungen für die Arbitragebewertung im Hinblick auf drei mögliche Szenarien der Entwicklung von Fuzzy-Auszahlungen untersucht werden. Die Entwicklung der Unsicherheit bezüglich des Eintritts eines Umweltzustandes geschieht nach Annahme 3.1. Dabei beschreibt F_t die Filtration im Zeitpunkt t:

Annahme 3.1 [Entwicklung der Unsicherheit]

Die zeitliche Entwicklung der Unsicherheit wird durch eine Folge von Informationsmengen F_t mit $t = 0,1,...,T$, *beschrieben, die folgenden Bedingungen genügt:*

(1) *In* $t = 0$ *herrscht vollständige Unsicherheit bezüglich des Umweltzustands in* $t = T$*:* $F_0 = \{\Omega\}$.

(2) *Mit fortschreitender Zeit wird bessere Information verfügbar:*
Für zwei Zeitpunkte s und t mit $s \geq t$ *ist F_s feiner F_t, d.h.*
$f_s(\omega_j) \subseteq f_t(\omega_j)$ für $j = 1,2,...,K$.

(3) *Zum Zeitpunkt* $t = T$ *herrscht Sicherheit bezüglich des eingetretenen Umweltzustands:* $F_T = \{\{\omega_1\},\{\omega_2\},...,\{\omega_K\}\}$.

Allgemein muß gelten, daß stets einperiodige künstliche Wahrscheinlichkeiten existieren und eindeutig sind. Wenn diese so gewählt werden, daß normierte Preise Martingale werden, so sind die Bedingungen stets erfüllt. Es reicht dann, ebenso wie bei Eindeutigkeit des „äquivalenten Martingalmaßes", die einmalige Überprüfung von Arbitragefreiheit und Vollständigkeit. Dies folgt aus der Beweisführung des Lemmas von Stiemke[9].

3.1. Fuzzy-Logik basierte dynamische Vollständigkeit und Arbitragefreiheit

Im Fuzzy-Logik basierten Einperiodenmodell wurde eine mit

$\mathrm{Inf}\,(x_{jk})_\alpha > \mathrm{Sup}\,(x_{sk})_\alpha$ für alle $\alpha \in [\rho,1]$ und alle $j, s = 1,...,S,\quad k = 1,...,K,\ j \neq s$

sehr harte Bedingung für die Vollständigkeit hergeleitet. Im Fuzzy-Logik basierten Mehrperiodenmodell muß diese Bedingung zu jedem Zeitpunkt überprüft werden. Ist sie erfüllt, so ist es

[9] vgl. Schlag, C. (1995), S.24f.

sichergestellt, das es in der nächsten Periode genau so viele Wertpapiere wie Nachfolgezustände gibt. Die Änderung der Spannweiten im Zeitablauf bewirkt nur, daß die perfekte dynamische Vollständigkeit auf einem anderem ρ-Niveau erreicht werden kann. Wenn die Unschärfe in jedem weiteren Zeitpunkt zunimmt (abnimmt), dann wird der Grad der Vollständigkeit immer kleiner (größer). Bei gleichbleibender Unschärfe der Auszahlungen bleibt das ρ-Niveau konstant.

Es soll an dieser Stelle des weiteren untersucht werden, inwieweit sich Fuzzy-Ereignisse, hier also $\tilde{S}_t$, in einen Wahrscheinlichkeitsbegriff einfügen lassen und ob die Martingalbedingung gültig sein kann. Bedingung hierfür ist ein Wahrscheinlichkeitsraum Ω aus der Ereignismenge $\tilde{\wp}(\Omega)$, welche bereits in Abschnitt 2.1. dieser Arbeit definiert wurde. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion soll auf das Intervall [0;1] abgebildet werden. Sei zunächst ein Ereignisraum der σ-Algebra gegeben[10]:

Definition 3.1 [σ-Algebra Ereignisraum auf einem Fuzzy-Ergebnisraum]

Ein Ereignisraum $\tilde{\wp}(\Omega)$ *heißt genau dann* s*-Algebra, wenn folgende drei Bedingungen gelten:*

(1) $\Omega \in \tilde{\wp}(\Omega)$

(2) $\tilde{S}_t \in \tilde{\wp}(\Omega) \Leftrightarrow C\tilde{S}_t \in \tilde{\wp}(\Omega)$ mit $C\tilde{S}_t$ *Komplement von* $\tilde{S}_t$

(3) $\tilde{S}_t \in \tilde{\wp}(\Omega)$ mit $t = 1, 2, ..., T \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{t=1}^{T} \tilde{S}_t \in \tilde{\wp}(\Omega)$

Bedingung (1) ist laut Definition und Gleichung (2.1) erfüllt. Auch die Bedingung (3) ist zunächst leicht nachvollziehbar, da das Operatorensystem nach Zadeh[11] einen distributiven Verband bildet. Da die Komplementaritätseigenschaft jedoch nicht länger gültig ist, erscheint zunächst fraglich, ob auch Bedingung (2) erfüllt ist. Es gilt jedoch

$$\mu_{CA}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$ [12]

Daraus folgt, daß auch $C\tilde{A} \in \tilde{\wp}(X)$ wenn $\tilde{A} \in \tilde{\wp}(X)$. Bedingung (2) ist somit ebenfalls erfüllt.

Das in Definition 3.2 dargestellt Wahrscheinlichkeitsmaß kann nach Sugeno[13] vereinfacht werden, indem die Bedingung (3) dieser Definition durch die schwächere Monotonie-bedingung ersetzt wird. Sodann kann auch ein Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsmaß – nachfolgend Fuzzy-Maß genannt – definiert werden.

[10] Rommelfanger, H. (1994), S.51
[11] vgl. Zadeh, L.A. (1968), S.421-427
[12] vgl. Rommelfanger, H.(1994), S.19
[13] vgl. Sugeno, M. (1974)

Definition 3.2 [Fuzzy-Wahrscheinlichkeitsmaß]

Eine auf $F_0 \subseteq \tilde{\wp}(\Omega)$ *definierte Funktion* $F\Pr ob: F_0 \to [0,1]$ *heißt Fuzzy-Maß auf* F_0, *wenn folgende vier Bedingungen gelten:*

(1) $F\Pr ob(\varnothing) = 0$

(2) $F\Pr ob(\Omega) = 1$

(3) $S_i, S_j \in F_0$ und $S_i \subseteq S_j \;\Rightarrow\; F\Pr ob\,(S_i) \leq F\Pr ob\,(S_j)$

(4) $S_t \in F_0$ mit $t = \{0,1,...,T\}$ und $S_t \subseteq S_{t+1}$ für $t = 0,1,...,(T\text{-}1)$
$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} F\Pr ob\,(S_t) = F\Pr ob\,(\lim\limits_{t\to\infty} S_t)$

Es wurde somit gezeigt, daß sich der Wahrscheinlichkeitsbegriff auch auf Fuzzy-Zahlen übertragen läßt. Eine analoge Definition der Martingaleigenschaft bei Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen ist also möglich.

Definition 3.3 [Martingaleigenschaft für Fuzzy-Ereignisse]

Seien $\tilde{S}_t$ mit $t = \{0,1,...,T\}$ *Zufallsvariablen, welche auf dem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, F, F\Pr ob)$ *defniert sind und seien* F_t mit $t = 0,1,...,T$ *eine Folge von s-Algebras. Dann ist die Folge eines Paares* $\{(\tilde{S}_t, F_t)\ ,\ t = 0,1,...,(T-1)\}$ *ein Martingal für jedes* t, *wenn folgende vier Bedingungen gelten:*

(1) $F_t \subset F_{t+1}$

(2) $\tilde{S}_t$ ist ein Ereigniss in F_t

(3) $E[|\tilde{S}_t|] < \infty$

(4) $E[\tilde{S}_{t+1}|F_t] = \tilde{S}_t$ für $t = 0,1,...,(T\text{-}1)$ *mit Wahrscheinlichkeit „1"*

Zu bemerken ist jedoch, daß auch die Martingaleigenschaft nach Definition 3.3 nicht genügt, um auf die wiederholte Überprüfung der Vollständigkeit des Marktes in Portfolios von Wertpapieren mit Fuzzy-Auszahlungen zu verzichten, da in diesem Fall die Vollständigkeitsbedingung strenger als im klassischen Modell formuliert wurde.[14]

Ist eine perfekte dynamische Vollständigkeit gegeben, so läßt sich die Bedingung für die Fuzzy-Logik basierte dynamische Arbitragebewertung beschreiben. Es wird angenommen, daß ein Wertpapier K+1 mit Auszahlungen in T und im Zustand (ω_s) $\tilde{x}_{K+1,T}(\omega_s)$ und eine selbstfinanzierende Strategie mit Einstandskosten von

$\tilde{V}_0 = \sum\limits_{k=1}^{K} n_{k,0} \cdot \tilde{x}_{s,k}$ sowie mit Zahlungen von $\tilde{V}_T(\omega_s) = \sum\limits_{k=1}^{K} n_{k,T}(\omega_s) \cdot \tilde{x}_{s,k}$ existiert.

Das Wertpapier K+1 und das Duplikationsportfolio haben zum Terminierungszeitpunkt gleiche Auszahlungen von

$$\tilde{V}_T(\omega_s) = \tilde{x}_{K+1,T}\ .$$

[14] vgl. hierzu Abschnitt 2.2. dieser Arbeit

Beim Fuzzy-Logik basierten Einperiodenmodell wurden Bedingungen für die Arbitragefreiheit hergeleitet. Werden diese auf das Mehrperiodenmodell angewendet, ist eine Arbitragemöglichkeit nur dann gegeben, wenn

$$\tilde{p}_{K+1,0} \prec \tilde{V}_0 \text{ oder } \tilde{p}_{K+1,0} \succ \tilde{V}_0,$$

ansonsten herrscht die Arbitragefreiheit. Hier wird deutlich, daß die Entwicklung der Unschärfe im Zeitablauf auf die dynamische Arbitragefreiheit keinen Einfluß hat. Lediglich zum Zeitpunkt T müssen die Auszahlungen des Duplikationsportfolios größer oder kleiner denen des Derivats sein.

3.3. Fuzzy-Logik basierte risikoneutrale Bewertung

Bei der einperiodigen Fuzzy-Logik basierten Bewertung wurde gezeigt, daß, damit der Preis des Derivats berechnet werden kann, die Erwartungswerte für den Gipfel sowie die Spannweiten gebildet werden müssen. Bei mehrperiodigen Modell müssen diese Erwartungswerte mit einer Pfadwahrscheinlichkeit gebildet werden. Somit ändert sich die risikoneutrale Bewertung für ein mehrperioden Fall mit Fuzzy-Auszahlungen zu:

$$\tilde{p}_{K+1,0} = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{s=1}^{S} \tilde{x}_{K+1,T}(\omega_s) \cdot q(\omega_s)\,. \tag{3.1}$$

Die risikoneutrale Pfadwahrscheinlichkeiten bleiben wie auch in Einperiodenmodell scharf abgrenzbar. Damit ist eine präferenzunabhängige Bewertung über mehrere Perioden möglich und die Implementierung des Fuzzy-Logik basierten Modells in zeit- und zustandsdiskrete oder in zeitstetige Bewertungsmodelle kann erfolgen.

4. Schlußfolgerungen und Zusammenfassung

In diesem Papier wurde aufgezeigt, daß eine risikoneutrale Bewertung auch bei Fuzzy-Auszahlungen möglich ist. Vorsicht ist bei Aussagen über Marktvollständigkeit und Arbitragefreiheit geboten, da die Auszahlungen nur unscharf abgrenzbar sind. Duplikation ist nur dann möglich, wenn das zu bewertende Wertpapier genauso fuzzy ist wie das Hedge-Portfolio. Vollständigkeit ist also keinesfalls einfacher erreicht als beim Grundmodell. Jedoch konnte eine zusätzliche Ungenauigkeitskomponente in Form von vagen Erwartungen der Marktteilnehmer modelliert werden. Es wurde hiermit gezeigt, daß eine Bewertung derivater Finanztitel auch dann möglich ist, wenn die Annahme bedingter homogener Erwartungen gelockert wird. Dadurch wird es möglich, auch dann auf die Arbitragetheorie zurückzugreifen, wenn deren Annahmen nicht vollkommen erfüllt werden können.

Eine weitere grundlegende Erkenntnis liegt in der Eindeutigkeit der künstlichen Wahrscheinlichkeiten, denn diese sind nur von den Gipfelpunkten abhängig, nicht jedoch von den Spannweiten. Da die Eindeutigkeit von künstlichen Wahrscheinlichkeiten der wichtigste Baustein bei den Binomialmodellen oder auch in der Black/Scholes-Welt ist, könnten bei diesen Modellen ebenso Fuzzy-Auszahlungen des Underlyings implementiert werden.

Literaturverzeichnis

Arrow, K.J. (1964): The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing, Review of Economic Studies, 31, S. 91-96

Breeden, D.T., R.H. Litzenberger (1978): Prices of State Contingent Claims Implicit on Option Prices, Journal of Business, 51, S. 621-651

Brennan, M.J. (1979): The Pricing of Contingent Claims in Discrete-Time Models, Journal of Finance 34, S. 53-68

Cox, J.C., S.A. Ross, M. Rubinstein (1979): Option Pricing, A Simplified Approach, Journal of Financial Economics, 7, S. 229-263

Dubois, D., H. Prade (1980): Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications, Academic Press, New York

Duffie, D. (1996): Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, 2nd edition, S. 252ff.

Dvurecenskij, A. (1992): The Radon-Nikodym Theorem for Fuzzy Probability Spaces, Fuzzy Sets and Systems, 45, S.69-78

Harrison, J.M., D. Kreps (1979): Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Journal of Economic Theory, 20, S. 381-408

Harrison, J.M., S.R. Pliska (1981): Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, Stochastic Processes and Their Applications, 11, S. 215-260

Huang, C.-F.; R.H. Litzenberger (1988): Foundations for Financial Economics

Malliaris, A.G.; W.A. Brock (1985): Stochastic Methods in Economics and Finance

Rommelfanger, H. (1994): Fuzzy Decision Support Systeme, Springer Verlag, 2. Auflage

Schalg, C. (1995): Bewertung derivativer Finanztitel in zeit- und zustandsdiskreten Modellen, Wiesbaden

Sugeno, M. (1974): Theory of Fuzzy Integral and Its Appl., Ph.D. Thesis, Tokyo Inst. of Technology, Tokyo

Sundraram, R.K. (1997): Equivalent Martingale Measures and Risk-Neutral Pricing. An Expository Note, Journal of Derivatives

Zadeh, L.A. (1968): Probability Measures of Fuzzy-Events, Journal of Math. Anal. and Appl., 23, S. 421-427

Zadeh, L.A., J. Kacprzyk (1992): Fuzzy Logic for the Management of Uncerainty, John Wiley and Sons, New York