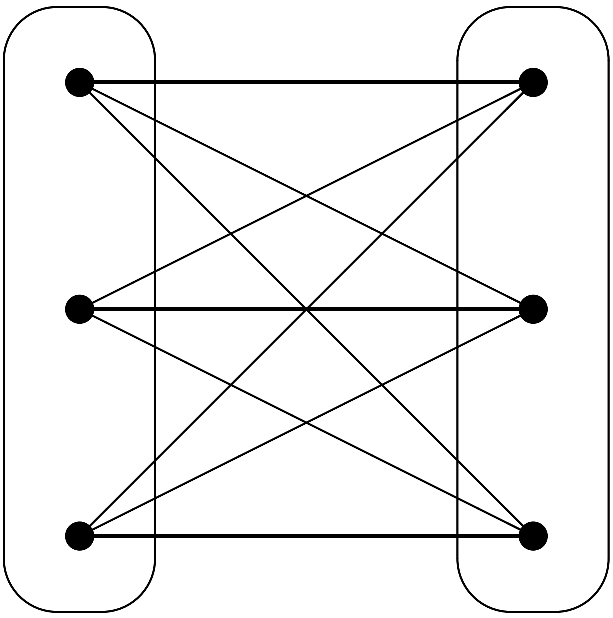
Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main
Fachbereich Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik
Prof. Dr. R. Neininger

Diplomarbeit

Das zufällige Assignment Problem



Michael Morchutt

04.Februar.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem zufälligen Assignment Problem. Unter einem k-Assignment in einer $m \times n$-Matrix mit unabhängigen identisch verteilten Einträgen versteht man k Einträge, von denen keine zwei in derselben Zeile oder Spalte stehen. Das Minimum k-Assignment ist dann das k-Assignment mit minimaler Summe seiner k Einträge. Da diese Summe als Kosten interpretiert werden können, sprechen wir auch von den Kosten $C_{k,m,n}$ des Minimum k-Assignments in unserer $m \times n$-Matrix. Antworten auf die Frage nach Erwartungswert und Varianz wurden zunächst für $C_{n,n,n}$ geliefert, das wir in Zukunft mit C_n abkürzen. D.Walkup zeigte 1979 im Spezialfall der uniformen Verteilung auf $[0,1]$, dass $E(C_n)$ für $n \to \infty$ beschränkt ist [1]. 1985 verwendeten Marc Mézard und Giorgio Parisi [2] Ideen aus der statistischen Physik und vermuteten $E(C_n) \to \frac{\pi^2}{6}$ für $n \to \infty$, was David Aldous 2000 bewies [3,4]. Parisi vermutete darüber hinaus schon 1998 [5], dass

$$E(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \quad \text{gilt}\,, \tag{1}$$

falls die Matrixeinträge exponential zum Parameter 1 verteilt sind.
Don Coppersmith und Gregory Sorkin [6] machten den Vorschlag, die Kosten des Minimum k-Assignments $C_{k,m,n}$ in einer $m \times n$-Matrix mit unabhängigen exponential zur Rate 1 verteilten Zufallsvariablen zu betrachten und vermuteten, dass

$$E(C_{k,m,n}) = \sum_{0 \le i+j < k} \frac{1}{(m-i)(n-j)} \quad \text{gilt.} \tag{2}$$

Gleichung (1) und (2) wurden 2003 zeitgleich und unabhängig voneinander von Svante Linusson und Johan Wästlund [7] sowie Chandra Nair, Balaji Prabhakar und Mayank Sharma [8] bewiesen.
Im ersten Abschnitt dieser Arbeit werden wir einen Beweis der Parisi und Coppersmith-Sorkin Formeln kennenlernen, der 2005 von Johan Wästlund [9] mit Hilfe einer trickreichen Idee erbracht wurde. Im selben Jahr bewies er, ebenfalls für unabhängige exponential zum Parameter 1 verteilte Matrixeinträge,

$$Var(C_n) = 5 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4} - 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \right)^2 - \frac{4}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3}\,, \tag{3}$$

eine explizite Formel zur Berechnung der Varianz von C_n, sowie mit Hilfe von (3)

$$Var(C_n) = \frac{4\zeta(2) - 4\zeta(3)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{4}$$

wobei

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}\,.$$

Dabei ist Abschätzung (4) noch genauer als jene aus [10, 11].
Wir werden im 2.Abschnitt dieser Arbeit den Beweis Wästlunds [12] von (3) und (4) erläutern und damit einen weiteren Beweis der Parisi und Coppersmith-Sorkin Formeln kennenlernen, die automatisch mitbewiesen werden. Dabei wird das Modell unserer $m \times n$-Matrix mit unabhängigen exponential zur Rate 1 verteilten Zufallsvariablen auf voneinander unabhängige Zufallsvariablen erweitert, die zu unterschiedlichen, aber nicht willkürlichen Raten exponential verteilt sind, sondern zum Produkt der Rate der jeweiligen

Zeile und der Rate der jeweiligen Spalte, falls man jeder Zeile und Spalte eine positive reelle Rate zuteilt. Diese Idee des *gewichteten* zufälligen Assignment Problems geht auf Marshall Buck, Clara Chan und David Robbins [13] zurück. Wir werden dieses erweiterte Modell mit Hilfe eines bipartiten Graphen (A, B) mit den Mengen A und B formulieren, dem wir Gewichte $g(x) \in \mathbb{R}_+$ für alle $x \in A \cup B$ zuteilen. Die Kosten $C(a, b)$ der Kante (a, b) seien dann exponential zum Parameter $g(a)g(b)$ verteilt. Ein k-Assignment entspricht nun k Kanten, von denen keine zwei inzident zum selben Punkt sind. Das Minimum k-Assignment in (A, B) ist dann das k-Assignment mit minimalen Gesamtkosten, die der Summe der Kosten aller zum k-Assignment gehörigen Kanten entsprechen. Diese Gesamtkosten des Minimum k-Assignments schreiben wir als $C_k(A, B)$. Auf dem Weg zum Beweis von (3) und (4) werden wir außerdem eine Formel für alle höheren Momente von $C_k(A, B)$ herleiten.

2 Die Parisi und Coppersmith-Sorkin Formel

In diesem Abschnitt stellen wir den Beweis Wästlunds für die folgenden beiden Sätze vor.

Theorem 1. *(Parisi Formel)*
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$E(C_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \,.$$

Theorem 2. *(Coppersmith-Sorkin Formel)*
Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq \min(m, n)$ gilt

$$E(C_{k,m,n}) = \sum_{0 \leq i+j<k} \frac{1}{(m-i)(n-j)} \,.$$

Lemma 1. *Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \leq \min(m, n)$ gilt*

$$E(C_{k,m,n}) - E(C_{k-1,m,n-1}) = \frac{1}{mn} + \frac{1}{(m-1)n} + \cdots + \frac{1}{(m-k+1)n} \,.$$

Als Vorbereitung des Beweises stellen wir grundlegende Eigenschaften exponential verteilter Zufallsvariablen zusammen.

Definition. *X ist eine zum Parameter ϱ exponential verteilte Zufallsvariable, falls $P(X > t) = \exp(-\varrho t)$ für alle $t \geq 0$ oder äquivalent dazu die Dichtefunktion $\varrho exp(-\varrho x)$ für alle $x \geq 0$ entspricht. Wir bezeichnen die Exponentialverteilung zum Parameter ϱ mit Exp_ϱ.*

Satz 1. *Sei X eine Exp_ϱ-verteilte Zufallsvariable. Dann gelten $E(X) = \frac{1}{\varrho}$ und die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit mit*

$$E(X - t \mid X > t) = \frac{1}{\varrho} \text{ für alle } t \geq 0 \,.$$

Satz 2. *Seien $X_1, \dots, X_n$ exponential zu den Parametern $a_1, \dots, a_n$ verteilte unabhängige Zufallsvariablen und sei $X_{min} := \min(X_1, \dots, X_n)$.*
Dann gelten

1. *X_{min} ist $Exp_{(a_1+\dots+a_n)}$-verteilt.*
2. *Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X_i minimal ist unter allen X_i mit $i = 1, \dots, n$ entspricht $\frac{a_i}{a_1+\dots+a_n}$.*
3. *Das Ereignis $\{X_{min} = X_i\}$ ist unabhängig von $\{X_{min} \geq c\}$ für alle $c \geq 0$.*

Beweis. zu 1.: Für alle c mit $c \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} P(X_{min} \geq c) &= P(X_1 \geq c \wedge X_2 \geq c \wedge \dots \wedge X_n \geq c) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq c) \qquad (5) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp(-a_i c) \\ &= \exp(-c \sum_{i=1}^{n} a_i)\,, \end{aligned}$$

wobei in (5) die Unabhängigkeit der X_i benutzt wurde.

Zu 2. und 3.: O.B.d.A. setze man $i = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & P(X_{min} = X_1 \wedge X_{min} \geq c) \\ &= a_1 \cdots a_m \int_{x_1=c}^{\infty} \int_{x_2=x_1}^{\infty} \cdots \int_{x_m=x_1}^{\infty} \exp(-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \\ &= a_1 \cdots a_m \int_{u_1=0}^{\infty} \dots \int_{u_m=0}^{\infty} \exp\Big(-\big(a_1(c+u_1) + a_2(c+u_1+u_2) + \dots \\ & \qquad \dots + a_m(c+u_1+u_m)\big)\Big)\, \mathrm{d}u_1 \cdots \mathrm{d}u_m \qquad (6) \\ &= \exp(-c\sum_{i=1}^{n} a_i)\, a_1 \cdots a_m \int_{u_1=0}^{\infty} \exp(-\sum_{i=1}^{n} a_i u_1)\, \mathrm{d}u_1 \cdot \prod_{i=2}^{n} \int_{u_i=0}^{\infty} \exp(-a_i u_i)\, \mathrm{d}u_i \\ &= \exp(-c\sum_{i=1}^{n} a_i) \frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\,. \end{aligned}$$

In (6) haben wir mit $x_i = u_i + c$ substituiert.
Wegen

$$P(X_{min} = X_i \wedge X_{min} \geq c) = P(X_{min} \geq c) \cdot P(X_{min} = X_i \mid X_{min} \geq c)$$

für alle $i = 1, \dots, n$ und

$$P(X_{min} \geq c) = \exp(-c\sum_{i=1}^{n} a_i) \quad \text{für } c \geq 0$$

aus 1. folgt für alle $c \geq 0$ und $i = 1, \ldots, n$

$$P(X_{min} = X_i \mid X_{min} \geq c) = \frac{a_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\,. \tag{7}$$

Aus (7) folgt die Unabhängigkeit von $\{X_{min} = X_i\}$ und $\{X_{min} \geq c\}$ und damit 2. und 3. □

Behauptung 1. *Aus Lemma 1 folgt die Coppersmith-Sorkin Formel.*

Beweis. durch Induktion über k:

1.Schritt (Induktionsanfang):
$k = 1$: Nach Satz 1 und Satz 2 gilt $E(C_{1,m,n}) = \frac{1}{mn}$, da $C_{1,m,n}$ das Minimum von $m \cdot n$ unabhängigen Exp_1-verteilten Zufallsvariablen ist.

2.Schritt (Induktionsannahme):
Behauptung 1 sei richtig für alle $k-1$ mit $k \in \mathbb{N}$.

3.Schritt (Induktionsschritt): $k-1 \to k$
Es gilt

$$\begin{aligned}
E(C_{k,m,n}) &= E(C_{k-1,m,n-1}) + \frac{1}{mn} + \frac{1}{(m-1)n} + \cdots + \frac{1}{(m-k+1)n} \\
&= \sum_{0 \leq i+j < k-1} \frac{1}{(m-i)} \frac{1}{(n-1-j)} + \frac{1}{mn} + \cdots + \frac{1}{(m-k+1)n} \qquad (8) \\
&= \sum_{0 \leq i+j < k-1} \frac{1}{(m-i)} \frac{1}{\big(n-(j+1)\big)} + \sum_{\substack{j=0 \\ 0 \leq i < k}} \frac{1}{(n-j)} \frac{1}{(m-i)} \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i < k-1 \\ 1 \leq j' < k \\ 1 \leq i+j' < k}} \frac{1}{(m-i)} \frac{1}{(n-j')} + \sum_{\substack{j'=0 \\ 0 \leq i < k}} \frac{1}{(n-j')} \frac{1}{(m-i)} \\
&= \sum_{0 \leq i+j < k} \frac{1}{(m-i)(n-j)}\,,
\end{aligned}$$

wobei in (8) die Induktionsannahme verwendet wurde. □

Behauptung 2. *Theorem 1 folgt aus Theorem 2.*

Beweis. per Induktion über n:

1.Induktionsanfang:
$n = 1$: Es gilt

$$E(C_{1,1,1}) = \sum_{0 \leq i+j < 1} \frac{1}{(1-i)(1-j)} = 1\,.$$

2.Induktionsannahme: Die Behauptung sei wie oben.

3.Induktionsschritt: $n \to n+1$
Falls
$$E[C_{n+1,n+1,n+1}] = E[C_{n,n,n}] + \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{gilt,} \tag{9}$$
so folgt mit der Induktionsannahme
$$E(C_{n+1,n+1,n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}$$
und die Behauptung ist bewiesen. Wir beweisen daher (9).

Wegen Theorem 2 gilt

$$\begin{aligned} &E(C_{n+1,n+1,n+1}) - E(C_{n,n,n}) \\ &\quad = \sum_{0 \leq i+j < n+1} \frac{1}{(n+1-i)} \frac{1}{(n+1-j)} - \sum_{0 \leq i+j < n} \frac{1}{(n-i)} \frac{1}{(n-j)} \,. \end{aligned}$$

Wir müssen also
$$\sum_{0 \leq i+j < n+1} \frac{1}{(n+1-i)} \frac{1}{(n+1-j)} - \sum_{0 \leq i+j < n} \frac{1}{(n-i)} \frac{1}{(n-j)} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{zeigen.} \tag{10}$$
Wegen
$$\sum_{\substack{i':=i+1 \\ j':=j+1 \\ i',j' \geq 1 \\ 2 \leq i'+j' < n+1}} \frac{1}{(n+1-i')} \frac{1}{(n+1-j')} = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j < n-1}} \frac{1}{(n-i)} \frac{1}{(n-j)}$$
heben sich einige Ausdrücke auf der linken Seite von (10) auf.

Es bleiben
$$\begin{aligned} &\sum_{i' \vee j' = 0} \frac{1}{n+1-i'} \frac{1}{n+1-j'} - \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j = n-1}} \frac{1}{(n-i)(n-j)} \\ &\quad = \frac{1}{1 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)n} + \ldots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{(n+1)1} - \left(\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n1} \right) \quad \text{übrig.} \end{aligned}$$

Wir haben also
$$\begin{aligned} &E(C_{n+1,n+1,n+1}) - E(C_{n,n,n}) \\ &\quad = \frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)n} + \ldots \\ &\quad \cdots + \frac{1}{(n+1)1} - \left(\frac{1}{1n} + \frac{1}{2(n-1)} + \cdots + \frac{1}{n1} \right) . \end{aligned}$$
Für alle $i = 1, ..., n$ gilt jedoch
$$\frac{1}{i(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1-i)} = \frac{1}{i(n+1-i)} \,.$$

Es folgt

$$E(C_{n+1,n+1,n+1}) - E(C_{n,n,n}) = \frac{1}{(n+1)^2}\,.$$

□

Ziel ist im Folgenden also der Beweis von Lemma 1.

Definition. *Sei $C_{k,m,n}$ die Summe der Einträge des Minimum k-Assignments in einer $m \times n$-Matrix $X = (X_{i,j})$ mit unabhängig und identisch Exp_1-verteilten Zufallsvariablen $X_{i,j}$.*
Wir erweitern diese Matrix um eine Zeile mit Einträgen

$$X_{m+1,j} = \frac{Y_j}{\varrho} \quad mit \quad j = 1, \ldots, n$$

so, dass die Y_j und $X_{i,j}$ mit $i \neq m+1$ voneinander unabhängig und identisch Exp_1-verteilt sind.
Somit sind die $X_{m+1,j}$ mit $j = 1, \ldots, n$ voneinander unabhängige und identisch Exp_ϱ-verteilte Zufallsvariablen.
Seien $C^*_{k,m,n}$ die Kosten des Minimum k-Assignments dieser erweiterten Matrix, die wir nun X_{erw} nennen mögen. Und X^* seien die Kosten des Minimum k-Assignments von X_{erw}, wobei der Eintrag $X_{m+1,n}$ nicht benutzt werden darf.
$C_{k-1,m,n-1}$ seien die Kosten des Minimum $k-1$-Assignments in der $m \times n-1$-Matrix, die aus X_{erw} durch Streichen der $m+1$-ten Zeile und n-ten Spalte entsteht.

Wir fragen uns, wann $X_{m+1,n}$ am Minimum k-Assignment von X_{erw} teilnimmt.
Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$X_{m+1,n} + C_{k-1,m,n-1} \leq X^*$$

gilt, was in unserem Modell fast sicher äquivalent ist zu

$$X_{m+1,n} < X^* - C_{k-1,m,n-1} =: T\,.$$

Wir nennen T Teilnahmeschwelle für $X_{m+1,n}$. Die Zufallsvariable T ist offensichtlich unabhäbgig von $X_{m+1,n}$. Die Teilnahmewahrscheinlichkeit für $X_{m+1,n}$ ist dann $P(X_{m+1,n} < T)$, wofür wir auch P_{m+1} schreiben.

Definition. *$C(x)$ seien die Kosten des Minimum k-Assignments von X_{erw} mit $X_{m+1,n} = x$ und $x \geq 0$.*

Behauptung 3. *Man bedinge auf das Ereignis $\{T = t\}$ für $t \geq 0$. Dann gilt*

$$C(x) - C(0) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq t, \\ t, & \text{falls } x > t. \end{cases}$$

Man nehme zur Kenntnis, dass $C(x) - C(0) = 0$, falls $t < 0$, da sowohl x als auch 0 nicht im k-Assignment von X_{erw} enthalten sind, so dass $C(x) - C(0) = X^* - X^* = 0$ gilt.

Nun zum Beweis unserer Behauptung:

Beweis. Man betrachte unter $\{T = t\}$ zunächst $C(0)$ für $t \geq 0$:

$$C(0) = \begin{cases} C_{k-1,m,n-1} = X^* & \text{falls } t = 0, \\ C_{k-1,m,n-1} < X^* & \text{falls } t > 0. \end{cases}$$

Wir haben also für alle $t \geq 0$

$$C(0) = C_{k-1,m,n-1}\,.$$

Betrachten wir nun $C(x)$ für $t \geq 0$:

$$C(x) = \begin{cases} x + C_{k-1,m,n-1} < X^* & \text{falls } x < t, \\ x + C_{k-1,m,n-1} = X^* & \text{falls } x = t, \\ X^* & \text{falls } x > t. \end{cases}$$

Daraus folgt für $t \geq 0$

$$C(x) - C(0) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq t, \\ X^* - C_{k-1,m,n-1} & \text{falls } x > t. \end{cases}$$

Wegen $X^* - C_{k-1,m,n-1} = t$ folgt die Behauptung. □

Behauptung 4. *Es sei ein festes $t \geq 0$ gegeben. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) \\ &= E(X_{m+1,n}) + E(C_{k-1,m,n-1} \mid T = t) - E\big((X_{m+1,n} - T)1_{\{X_{m+1,n} > T\}} \mid T = t\big)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} & E(X_{m+1,n} \mid T = t) \\ &= E(C_{k-1,m,n-1} + X_{m+1,n} \mid T = t) - E(C_{k-1,m,n-1} \mid T = t) \\ &= \frac{1}{P(\{T = t\})}\Big(E\big((C_{k-1,m,n-1} + X_{m+1,n})1_{\{X_{m+1,n} \leq T\}}1_{\{T=t\}}\big) \\ &\quad + E\big((C_{k-1,m,n-1} + X_{m+1,n})1_{\{X_{m+1,n} > T\}}1_{\{T=t\}}\big) - E(C_{k-1,m,n-1}1_{\{T=t\}})\Big) \\ &= \frac{1}{P(\{T = t\})}\Big(E(C^*_{k,m,n}1_{\{X_{m+1,n} \leq T\}}1_{\{T=t\}}) \\ &\quad + E\big((C^*_{k,m,n} - T + X_{m+1,n})1_{\{X_{m+1,n} > T\}}1_{\{T=t\}}\big) - E(C_{k-1,m,n-1}1_{\{T=t\}})\Big) \quad (11) \\ &= \frac{1}{P(\{T = t\})}\Big(E(C^*_{k,m,n}1_{\{T=t\}}) + E\big((X_{m+1,n} - T)1_{\{X_{m+1,n} > T\}}1_{\{T=t\}}\big) \\ &\quad - E(C_{k-1,m,n-1}1_{\{T=t\}})\Big)\,, \end{aligned}$$

wobei in (11) Behauptung 3 verwendet wurde. Mit

$$E(X_{m+1,n}) = E(X_{m+1,n} \mid T = t)$$

wegen der Unabhängigkeit von T und $X_{m+1,n}$ folgt Behauptung 4. □

Lemma 2. *Es gilt*

$$E(C^*_{k,m,n}) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0) = \frac{1}{\varrho} P(X_{m+1,n} < T)\,.$$

Beweis. Es sei ein festes $t \leq 0$. Dann gilt für jedes solche t

$$\begin{aligned}
&E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) \\
&\quad = \frac{E(C^*_{k,m,n} 1_{\{T=t\}})}{P(T=t)} - \frac{E((C^*_{k,m,n} 1_{\{T=t\}}) 1_{\{X_{m+1,n}=0\}})}{P(\{T=t\} \cap \{X_{m+1,n} = 0\})} \\
&\quad = \frac{E(X^* 1_{\{T=t\}})}{P(T=t)} - \frac{E(X^* 1_{\{T=t\}}) P(X_{m+1,n} = 0)}{P(T=t) P(X_{m+1,n} = 0)} \\
&\quad = 0\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

In (12) haben wir die Äquivalenz von $C^*_{k,m,n} 1_{\{T=t\}}$ und $X^* 1_{\{T=t\}}$ und die Unabhängigkeit von $X^* 1_{\{T=t\}}$ und $X_{m+1,n}$ mit $t \leq 0$ benutzt.

Jetzt sei ein festes $t \geq 0$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) \\
&\quad = E(X_{m+1,n}) + E(C_{k-1,m,n-1} \mid T = t) - E((X_{m+1,n} - T) 1_{\{X_{m+1,n} > T\}} \mid T = t) \\
&\qquad - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) && (13) \\
&\quad = E(X_{m+1,n}) - P(X_{m+1,n} > t) \cdot E(X_{m+1,n} - T \mid X_{m+1,n} > T, T = t) && (14) \\
&\quad = \frac{1}{\varrho} - P(X_{m+1,n} > t) \cdot \frac{1}{\varrho} && (15) \\
&\quad = \frac{1}{\varrho} \Big(1 - P(X_{m+1,n} > t)\Big) \\
&\quad = \frac{1}{\varrho} P(X_{m+1,n} < t)\,.
\end{aligned}$$

In (13) haben wir Behauptung 4 und in (14)

$$E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) = E(C_{k-1,m,n-1} \mid T = t) \tag{16}$$

angewendet.
Da aus Behauptung 3

$$E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) = E(C_{k-1,m,n-1} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) \quad \text{für } t \geq 0$$

folgt und da aufgrund der Unabhängigkeit von $X_{m+1,n}$ und T sowie der Unabhängigkeit von $C_{k-1,m,n-1} 1_{\{T=t\}}$ und $X_{m+1,n}$ mit $t \geq 0$

$$E(C_{k-1,m,n-1} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t) = E(C_{k-1,m,n-1} \mid T = t) \text{ für } t \geq 0 \quad \text{gilt,}$$

folgt (16).
In (15) haben wir die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung aus Satz 1 verwendet.

Nun folgt

$$
\begin{aligned}
& E(C^*_{k,m,n}) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0) \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \big(E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t)\big) f(t) \mathrm{d}t \\
= & \int_{-\infty}^{0} \big(E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t)\big) f(t) \mathrm{d}t \\
& + \int_{0}^{\infty} \big(E(C^*_{k,m,n} \mid T = t) - E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0, T = t)\big) f(t) \mathrm{d}t \\
= & \ 0 + \int_0^\infty \frac{1}{\varrho} P(X_{m+1,n} < t) f(t) \mathrm{d}t \\
= & \ \frac{1}{\varrho} P(X_{m+1,n} < T) \\
= & \ \frac{1}{\varrho} P_{m+1,n} \,,
\end{aligned}
$$

wobei $f(t)$ die Dichtefunktion der Zufallsvariablen T sei. □

Definition. *Sei $C^j_{k-1,m,n-1}$ die Summe der Einträge des Minimum $k-1$-Assignments der $m \times (n-1)$-Matrix, die aus X_{erw} durch Streichen der letzten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Für $j = n$ entspricht $C^j_{k-1,m,n-1}$ also $C_{k-1,m,n-1}$.*

Und jetzt kommt die Schlüsselvorgehensweise: Man läßt ϱ gegen 0 laufen.

Lemma 3. *Es gilt*

$$
\begin{aligned}
E(C^*_{k,m,n}) & \overset{\varrho \to 0}{\longrightarrow} E(C_{k,m,n}) \text{ und} && (17) \\
E(C^*_{k,m,n} \mid X_{m+1,n} = 0) & \overset{\varrho \to 0}{\longrightarrow} E(C_{k-1,m,n-1})\,. && (18)
\end{aligned}
$$

Beweis. Wir beweisen zunächst (17). Man nehme zur Kenntnis, dass

$$C^*_{k,m,n}(\varrho) = \min\Big\{ \min_{j=1,\dots,n} \big\{ X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1} \big\}, C_{k,m,n} \Big\} \quad \text{gilt.}$$

Weiter haben wir

$$\lim_{\varrho \to 0} (X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1}) = \lim_{\varrho \to 0} \left(\frac{Y_j}{\varrho} + C^j_{k-1,m,n-1} \right) = \infty \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}$$

und somit auch

$$\lim_{\varrho \to 0} \Big(\min_{j=1,\dots,n} \big\{ X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1} \big\} \Big) = \infty\,.$$

Dadurch und, da $C_{k,m,n}$ fast sicher endlich ist, folgt

$$C^*_{k,m,n} \overset{\varrho \to 0}{\longrightarrow} C_{k,m,n}\,.$$

Offensichtlich ist $C_{k,m,n}$ bez. dieser Konvergenz Grenzwert und obere Schranke von $C^*_{k,m,n}(\varrho)$ zugleich.
Wegen $E(C_{k,m,n}) < \infty$ folgt mit dem *Satz von der dominierten Konvergenz*

$$\lim_{\varrho\to 0} E(C^*_{k,m,n}) = E(\lim_{\varrho\to 0} C^*_{k,m,n}) = E(C_{k,m,n})\,.$$

Nun beweisen wir (18). Man mache sich klar, dass die folgenden Betrachtungen bez. desjenigen bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes gemacht werden, welches durch Bedingen auf das Ereignis $\{X_{m+1,n} = 0\}$ entsteht. Offensichtlich gilt

$$1_{\{X_{m+1,n}=0\}} C^*_{k,m,n}(\varrho) = 1_{\{X_{m+1,n}=0\}} \min\Big\{\min_{j=1,\dots,n}\big\{X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1}\big\}, C_{k,m,n}\Big\}\,.$$

Desweiteren haben wir

$$1_{\{X_{m+1,n}=0\}} C_{k-1,m,n-1} \le 1_{\{X_{m+1,n}=0\}} C_{k,m,n}\,,$$

was man schnell bei folgender Fallunterscheidung sieht:
1. $C_{k,m,n}$ benutze keinen Eintrag aus der letzten Spalte.
Dann stehen dem minimalen $k-1$ bzw. k-Assignment dieselben Einträge zur Verfügung, nämlich alle der $m \times n-1$-Matrix, die aus X_{erw} durch Streichen der letzten Zeile und letzten Spalte entsteht, und schon die Summe jeder $k-1$ elementige Teilmenge des zu $C_{k,m,n}$ gehörigen Minimum k-Assignments von X ist größer oder gleich $C_{k-1,m,n-1}$.
2. Angenommen $C_{k,m,n}$ verwendet einen Eintrag aus der letzten Spalte. Dann ist die Summe der restlichen Einträge größer oder gleich $C_{k-1,m,n-1}$.
Also folgt

$$1_{\{X_{m+1,n}=0\}} C^*_{k,m,n}(\varrho) = 1_{\{X_{m+1,n}=0\}} \min\Big\{\min_{j=1,\dots,n-1}\big\{X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1}\big\}, C_{k-1,m,n-1}\Big\}\,.$$

Es gilt

$$\lim_{\varrho\to 0}(X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1}) = \lim_{\varrho\to 0}\left(\frac{Y_j}{\varrho} + C^j_{k-1,m,n-1}\right) = \infty \quad \text{für alle } j \in \{1,\dots,n-1\}\,,$$

so dass

$$\lim_{\varrho\to 0}\Big(\min_{j=1,\dots,n-1}\big\{X_{m+1,j}(\varrho) + C^j_{k-1,m,n-1}\big\}\Big) = \infty\,.$$

$C_{k-1,m,n-1}$ ist jedoch fast sicher endlich.
Daher folgt

$$1_{\{X_{m+1,n}=0\}} \lim_{\varrho\to 0} C^*_{k,m,n}(\varrho) = 1_{\{X_{m+1,n}=0\}} C_{k-1,m,n-1}\,.$$

Da der Erwartungswert von $C_{k-1,m,n-1}$ endlich ist, läßt sich wieder der *Satz von der dominierten Konvergenz* anwenden, und es folgt

$$\lim_{\varrho\to 0} E(C^*_{k,m,n}(\varrho) \mid X_{m+1,n} = 0) = E(C_{k-1,m,n-1})\,,$$

wobei klar ist, dass $X_{m+1,n}$ und $C_{k-1,m,n-1}$ unabhängig sind. □

Mit Lemma 3 folgt also aus Lemma 2

$$E(C_{k,m,n}) - E(C_{k-1,m,n-1}) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} P_{m+1,n} \,.$$

Lemma 1 wäre somit gezeigt, falls wir zeigen könnten, dass

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} P_{m+1,n} = \frac{1}{mn} + \frac{1}{(m-1)n} + \dots + \frac{1}{(m-k+1)n} \quad \text{gilt.} \tag{19}$$

Im Folgenden arbeiten wir daher auf den Beweis von (19) hin.

Definition. *Eine Matrix heißt generisch, falls keine zwei unterschiedlichen Assignments die gleiche Summe haben.*

Lemma 4. *(Nesting Lemma) Sei r mit $0 \leq r < \min(m, n)$ und M eine generische $m \times n$-Matrix mit positiven reellen Einträgen. Dann gilt für das Minimum r-Assignment von M, das wir mit K_r bezeichnen, und K_{r+1}, also das Minimum $r+1$-Assignments von M:*
Jede Zeile, die ein Eintrag von K_r enthält, enthält auch ein Element von K_{r+1}.

Beweis. Man stelle sich vor, zwei Einträge von M durch eine Kante zu verbinden, falls

- die beiden Einträge in derselben Spalte stehen, oder
- sie in derselben Zeile stehen.

Wenn die Rede von einer *Komponente* einer Menge L von Matrixeinträgen ist, so sei damit die maximale Menge von Matrixeinträgen von L gemeint, die durch Kanten so miteinander verbunden sind, dass je zwei Matrixpositionen über einen Kantenweg miteinander zusammenhängen.
Die *Symmetrische Differenz* $\mu \triangle \nu$ zweier k-Assignments μ und ν ist definiert als $(\mu \setminus \nu) \cup (\nu \setminus \mu)$.
Sei nun $S := K_r \triangle K_{r+1}$. Dann ist jede Komponente von S ein (K_r, K_{r+1})-alternierender Pfad, der eine Folge von folgender Form ist: $(i_1, j_1), \dots, (i_l, j_l)$ seien die Matrixpositionen des Pfades der Länge l, die abwechselnd zu K_r und K_{r+1} gehören und für die $i_x = i_{x+1}$ oder $j_x = j_{x+1}$ für alle $x = 1, \dots, l-1$ gilt.
Zyklisch ist ein solcher alternierender Pfad der Länge l, falls $(i_1, j_1) = (i_l, j_l)$ gilt. Angenommen, S bestehe aus einer Komponente. Dann ist diese ein (K_r, K_{r+1})-alternierender Pfad und das Lemma ist bewiesen. Es gilt also zu zeigen, dass die Annahme mehrerer Komponenten zum Widerspruch führt.

Wir nehmen also an, dass S aus mehr als einer Komponente besteht. Dann lässt sich eine Menge $S' \subseteq S$ finden, die genauso viele Elemente von K_r enthält wie von K_{r+1} und mit seinem Komplement nicht zusammenhängt, also kein Eintrag von S' in derselben Zeile oder Spalte eines Elements von $(S')^c$ steht, da die Anzahl der Elemente in S ungerade ist und es mindestens eine Komponente von S mit ungerader Anzahl von Elementen gibt. Das Komplement dieser Komponente in S hat dann eine gerade Anzahl von Elementen und ist eine solche Menge S'. Mit dieser lassen sich $K_r' := K_r \triangle S'$, ein r-Assignment, und $K_{r+1}' := K_{r+1} \triangle S'$, ein $r+1$-Assignment, konstruieren.

Da X eine generische Matrix ist, folgt, dass $K_r \cap S'$ und $K_{r+1} \cap S'$ nicht dieselben Summen ihrer Einträge haben können.
Wir haben daher zwei Möglichkeiten, die jeweils zum Widerspruch führen.
Dazu definieren wir die Summe der Elemente einer Menge M aus Matrixeinträgen als $SumM$. Jetzt sehen wir, dass entweder
$Sum(K_r \cap S') < Sum(K_{r+1} \cap S')$ und damit $SumK'_{r+1} < SumK_{r+1}$ gilt
oder aber
$Sum(K_r \cap S') > Sum(K_{r+1} \cap S')$ und daher $SumK'_r < SumK_r$.

In beiden Fällen haben wir also einen Widerspruch, da nach unserer Annahme K_r ein Minimum r-Assignment und K_{r+1} ein Minimum $r+1$-Assignment von M sind. □

Lemma 5. *Man bedinge darauf, dass das Minimum r-Assignment von X_{erw} kein Element der letzten Zeile enthält. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das $(r+1)$-Assignment von X_{erw} ein Element der letzten Zeile enthält,*

$$\frac{\varrho}{m-r+\varrho}.$$

Beweis. E_{r+1} sei das Ereignis, dass das Minimum $(r+1)$-Assignment von X_{erw} ein Element der letzten Zeile enthält.
Weiter seien $z_1, \ldots, z_{\binom{m}{r}}$ die r-elementigen Teilmengen der ersten m Zeilen von X_{erw}. Das Ereignis, dass die Zeilen von z_i mit $i \in \{1, \ldots, \binom{m}{r}\}$ das Minimum r-Assignment von X_{erw} enthalten, sei als Z_i definiert. Man bedinge nun darauf, dass kein Element des Minimum r-Assignments von X_{erw} in der letzten Zeile steht, also auf das Ereignis E_r^c, und auf Z_i. Nach dem Nesting Lemma stehen dann r Einträge des Minimum $(r+1)$-Assignments von X_{erw} in den Zeilen von z_i. Wir dürfen Lemma 4 hier anwenden, da X_{erw} fast sicher generisch ist. Das Ereignis, dass der $(r+1)$-te Eintrag in der j-ten Spalte steht, sei mit S_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, bezeichnet, auf welches wir zusätzlich bedingen.
Dann gilt

$$\begin{aligned} &P(E_{r+1} \mid E_r^c \cap Z_i \cap S_j) \\ &\quad = P(X_{m+1,j} = \min_{k \notin z_i}(X_{k,j}) \\ &\quad = \frac{\varrho}{m-r+\varrho} \quad \text{für alle } i \in \left\{1, \ldots, \binom{m}{r}\right\}, j \in \{1, \ldots, n\}\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Dabei haben wir in (20) den 2.Teil aus Satz 2 verwendet. Da (20) für beliebige i und j gilt und $\frac{\varrho}{m-r+\varrho}$ unabhängig von der Wahl von i und j ist, folgt

$$P(E_{r+1} \mid E_r^c \cap Z_i \cap S_j) = P(E_{r+1} \mid E_r^c)$$

und wir erhalten

$$P(E_{r+1} \mid E_r^c) = \frac{\varrho}{m-r+\varrho}\,.$$

□

Lemma 6. *Es gilt*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} P_{m+1,n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{m-k+1} \right).$$

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
P(E_k) &= 1 - P(E_k^c) \\
&= 1 - \Big(P(E_k^c \mid E_{k-1}^c) \cdot P(E_{k-1}^c) + P(E_k^c \mid E_{k-1}) \cdot P(E_{k-1}) \Big) && (21) \\
&= 1 - \prod_{r=0}^{k-1} P(E_{r+1}^c \mid E_r^c) P(E_0^c) && (22) \\
&= 1 - \prod_{r=0}^{k-1} \Big(1 - P(E_{r+1} \mid E_r^c) \Big) \\
&= 1 - \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\varrho}{m - r + \varrho} \right) && (23) \\
&= 1 - \prod_{r=0}^{k-1} \left(\frac{m - r}{m - r + \varrho} \right) \\
&= 1 - \prod_{r=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\varrho}{m - r} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{m-k+1} \right) \varrho + O(\varrho^2)\,, \quad \text{falls } \varrho \to 0 \text{ gilt.} && (24)
\end{aligned}
$$

Dabei sind in (21) der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und in (22) dessen rekursive Anwendung benutzt worden, wobei $P(E_r^c \mid E_{r-1}) = 0$ für alle $r \in \{1 \ldots, k\}$. In (23) haben wir Lemma 5 angewendet.
Wir erkennen, dass die Teilnahmewahrscheinlichkeit von $X_{m+1,j}$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ identisch ist, denn die Verteilungen der $X_{m+1,j}$ sind genauso wie die Verteilungen der zugehörigen Teilnahmeschwellen identisch. Da $X_{m+1,j}$ und T unabhängig für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ sind, ist somit $P(X_{m+1,j} < T)$ eindeutig bestimmt und für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gleich.
Außerdem bilden die Ereignisse $\{X_{m+1,j} < T\}$ mit $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine disjunkte Zerlegung von E_k.

Also gilt

$$P(X_{m+1,j} < T) = \frac{1}{n} P(E_k)\,.$$

Mit (24) folgt

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho} P_{m+1,n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{m-k+1} \right).$$

□

Damit sind Lemma 1 und somit auch die Parisi und Coppersmith-Sorkin Formeln bewiesen.

3 Varianz und höhere Momente im zufälligen Assignment Problem

In diesem Abschnitt erweitern wir unser bisheriges Modell auf folgendes Modell des *gewichteten* zufälligen Assignment Problems:
(A, B) sei der bipartite Graph der Mengen A und B. Dann weisen wir jedem $x \in A \cup B$ ein Gewicht $g(x)$, eine positive reelle Zahl, zu. Für $L \subseteq A \cup B$ sei $g(L)$ die Summe der Gewichte aller Elemente von L.
Die Kosten $C(a, b)$ einer Kante (a, b) aus (A, B) seien nun $Exp_{g(a)g(b)}$-verteilt und unabhängig von den Kosten der übrigen Kanten.
Da man sich die Mengen A und B als Mengen der Zeilen und Spalten vorstellen kann, ist die Formulierung des gewichteten zufälligen Assignment Problems mit Hilfe eines bipartiten Graphen äquivalent zur Formulierung des Problems durch Gewichte $g(i)$ und $g(j)$ der Zeilen i und Spalten j einer $m \times n$-Matrix, deren Elemente a_{ij} $Exp_{g(i)g(j)}$-verteilt sind.
Ein k-Assignment entspricht damit k Kanten in (A, B), von denen keine zwei inzident zum selben Punkt sind und das k-Assignment mit minimalen Gesamtkosten stimmt mit dem Minimum k-Assignment von (A, B) überein. Satt von Gesamtkosten sprechen wir in Zukunft auch einfach nur noch von den Kosten $C_k(A, B)$ des Minimum k-Assignments von (A, B). Auch die Begriffe der Komponente und des Pfades lassen sich leicht auf unser neues Modell übertragen.

3.1 Berechnung der höheren Momente von $C_k(A, B)$

Definition. *Sei μ das Minimum $k-1$-Assignment in $(A, B \setminus b_0)$, wobei b_0 ein beliebiges Element aus B sei. ν dagegen sei das Minimum k-Assignment in (A, B). Dann bilden wir die Symmetrische Differenz $\delta := \mu \triangle \nu$.*

Lemma 7. *Es gibt genau einen Pfad ungerader Länge in δ, welcher mit Kanten aus ν beginnt und endet. Es kann noch eine weitere Komponente geben, nämlich einen Pfad gerader Länge mit einem zu b_0 inzidenten Endpunkt und einem anderen Endpunkt, der zu einem Punkt aus $B \setminus b_0$ inzident ist.*

Beweis. Zunächst beweisen wir den 1.Teil des Lemmas durch einen Widerspruch. Dazu nehme man an, dass es eine Komponente δ_1 von δ gebe, die ein Pfad ungerader Länge mit Endpunkten in μ sei, wobei klar ist, dass es mindestens einen Pfad ungerader Länge geben muss, da die Anzahl der Elemente von δ ungerade ist. Dann muss es mindestens zwei Pfade in δ geben, deren Endpunkte in ν liegen. Aber maximal einer der beiden Pfade enthält eine zu b_0 inzidente Kante. Somit finden wir einen Pfad δ_2 mit Endpunkten in ν, in dem keine zu b_0 inzidente Kante vorkommt. Dann sind in $\delta_1 \cup \delta_2$ genauso viele Kanten von ν wie von μ, von denen keine inzident zu b_0 ist. Falls wir diese in ν bzw. μ gegeneinander austauschen, erhalten wir $\nu \triangle (\delta_1 \cup \delta_2)$, ein k-Assignment in (A, B), bzw. $\mu \triangle (\delta_1 \cup \delta_2)$, ein $(k-1)$-Assignment in $(A, B \setminus b_0)$. In unserem Modell kommt es mit Wahrscheinlichkeit 0 vor, dass zwei unterschiedliche Assignments die gleichen Kosten haben, so dass die Kosten von $\mu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$ entweder fast sicher größer oder kleiner als die Kosten von $\nu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$ sind.

Wir haben also zwei Fälle:
Die Kosten von $\mu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$ sind größer als die Kosten von $\nu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$. Dann sind aber die Kosten von $\mu \triangle (\delta_1 \cup \delta_2)$ kleiner als die Kosten von μ. Wir haben jedoch angenommen, dass μ das Minimum $(k-1)$-Assignment in $(A, B \setminus b_0)$ ist. Damit haben wir einen Widerspruch.
Im anderen Fall sind die Kosten von $\mu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$ kleiner als die Kosten von $\nu \cap (\delta_1 \cup \delta_2)$. Das bedeutet aber, dass die Kosten von $\nu \triangle (\delta_1 \cup \delta_2)$ kleiner als die Kosten von ν sind. Das ist offensichtlich ein Widerspruch, da wir angenommen hatten, das ν das Minimum k-Assignment in (A, B) ist.
Damit haben wir bewiesen, dass es mindestens eine Komponente mit ungerader Anzahl von Elementen in δ gibt und alle diese Komponenten jeweils aus einem Pfad ungerader Länge mit Endpunkten in ν bestehen. Es folgt, dass es maximal eine Komponente geben kann, die aus einem Pfad ungerader Länge und Endpunkten in ν besteht.

Nun beweisen wir, dass es höchstens eine weitere Komponente in δ geben kann, nämlich einen Pfad gerader Länge, dessen Anfangspunkt inzident zu b_0 und dessen Endpunkt inzident zu einem $b \in B \setminus b_0$ ist. Wir nehmen also an, dass δ eine Komponente δ_3 enthalte, die aus einem Pfad gerader Länge bestehe. Da nach Definition ν ein Minimum k-Assignment ist, folgt, dass die symmetrische Differenz $\nu \triangle \delta_3$ ein k-Assignment ist, dessen Kosten größer als die Kosten von ν sind. Das bedeutet jedoch, dass die Kosten von $\mu \cap \delta_3$ größer als die Kosten von $\nu \cap \delta_3$ sind. Daraus folgt, dass $\mu \triangle \delta_3$ ein $(k-1)$-Assignment ist, dessen Kosten kleiner als die Kosten von μ sind. μ ist aber minimal in $(A, B \setminus b_0)$. Daher muss δ_3 eine Kante enthalten, die mit b_0 inzidiert. Ein Endpunkt von δ_3 ist also inzident zu b_0. Alle anderen Kanten von δ_3 sind folglich zu einem Punkt aus $B \setminus b_0$ inzident. Außerdem kann es maximal eine solche Komponente geben, da keine zwei Komponenten, die jeweils eine zu b_0 inzidente Kante enhalten, unterschiedlich sein können. □

Definition. *Ist μ ein Minimum Assignment in (A, B), so sei A_μ die Teilmenge von A, deren Elemente mit einer Kante aus μ inzidieren.*

Lemma 8. *Es gilt $A_\mu \subseteq A_\nu$, so dass $A_\nu \setminus A_\mu$ eine einelementige Menge ist.*

Beweis. Mit Lemma 7 können wir $\nu = \mu \triangle \delta$ schreiben und sehen, dass es genau ein Element aus $A \setminus A_\mu$ gibt, dass zu einer Kante aus δ inzident ist, nämlich $A_\nu \setminus A_\mu$. Dieses Element bezeichnen wir als a_ν. □

Theorem 3. *Bedingt darauf, dass die Zufallsvariable A_μ den Wert $\tilde{A}_\mu$ annimmt, ist a_ν auf $A \setminus A_\nu$ den Gewichten entsprechend verteilt, so dass für alle $a \in A \setminus A_\mu$*

$$P(a_\nu = a \mid A_\mu = \tilde{A}_\mu) = \frac{g(a)}{g(A \setminus A_\mu)} \quad \textit{gilt.}$$

Dabei ist a_ν unabhängig von den Kosten von ν.

Beweis. Man definiere das Ereignis, dass die Kante (a_ν, b) zu ν gehört, als S_b mit $b \in B$. Wir gehen nun folgendermaßen vor: Wir bedingen auf $\{A_\mu = \tilde{A}_\mu\}$ und zusätzlich auf S_b für ein festes $b \in B$.
Dann nimmt a_ν als Zufallsvariable genau dann den Wert a mit $a \in A \setminus A_\mu$ an, wenn $C(a, b)$ minimal ist unter allen $C(a, b)$ mit $a \in A \setminus A_\mu$.

Mit Satz 2 folgt

$$P(a_\nu \mid \{A_\mu = \tilde{A}_\mu\} \cap S_b) = \frac{g(a)}{g(A \setminus A_\mu)} \quad \text{für alle } b \in B.$$

Es gilt offensichtlich

$$P(a_\nu = a \mid A_\mu = \tilde{A}_\mu) = P(a_\nu \mid \{A_\nu = \tilde{A}_\nu\} \cap S_b) \quad \text{für alle } b \in B$$

und damit

$$P(a_\nu = a \mid A_\mu = \tilde{A}_\mu) = \frac{g(a)}{g(A \setminus A_\mu)}\,.$$

In Satz 2 haben wir gesehen, dass die Position des Minimums unabhängig von seinem Wert ist. Somit sind die Kosten von ν und a_ν unabhängig voneinander. □

Definition. *Sei $T \subseteq A \cup B$. Dann sei $I_k(T, A, B)$ die Indikatorvariable für das Ereignis, dass jeder Punkt aus T inzident zu einer Kante des Minimum k-Assignments von (A, B) ist.*
Man erweitere A um einen Punkt a^* mit einem Gewicht $g(a^*) = \delta^*$, so dass $A^* = A \cup \{a^*\}$ gilt. Sei S eine $(k-1)$-elementige Teilmenge von A und I_b für jedes $b \in B$ die Indikatorvariable für das Ereignis, dass das Minimum k-Assignment in (A^*, B) die Kante (a^*, b) sowie eine Kante eines jeden Punktes aus S enthält.

Zunächst möchten wir eine rekursive Formel zur Berechnung von $E\big(C_k(A, B)^N \cdot I_k(T, A, B)\big)$ herleiten, wobei T eine k-elementige Teilmenge von A ist.

Definition. *Sei f eine Zufallsvariable, die auf den Kosten der Kanten von (A^*, B) definiert ist, und $E(f)$ sei von der Ordnung δ^*. Dann sei $E^*(f)$ der normalisierte Grenzwert des Erwartungswertes von f bez. des Maßes P genau dann, wenn*

$$E^*(f) = \lim_{\delta^* \to 0} \frac{1}{\delta^*} E(f) \quad \textit{gilt.}$$

Wir bezeichnen das zugehörige Maß als das normalisierte Grenzmaß P^*.

Wir fragen uns nun, wie eine Realisierung von P^* auf den Kosten aller zu a^* inzidenten Kanten in (A^*, B) aussieht. Dazu nehmen wir die Dichtefunktion $\delta^* g(b) \exp(-\delta^* g(b) x)$ der Kosten x einer Kante (a^*, b) mit $b \in B$, teilen diese durch δ^* und lassen die so erhaltene Funktion punktweise, also für ein festes $x \geq 0$, gegen $g(b) \cdot 1$ konvergieren, indem wir mit δ^* gegen 0 gehen. Da das Maß mit der Dichte 1 dem Lebesgue-Maß λ entspricht, gewichtet P^* $C(a^*, b)$ mit $g(b) \cdot \lambda$. Nehmen wir nur a^* als einen Exp_{δ^*}-verteilten Punkt, so ist dieser nach dem normalisierten Grenzmaß einfach Lebesgue-verteilt. Auf diesen Fall werden wir später noch zurückkommen. Lassen wir die Kosten zweier zu a^* inzidenter Kanten kleiner als eine beliebige Konstante $C \geq 0$ sein, dann stellt man durch kurzes Nachrechnen fest, dass das normalisierte Grenzmaß diesen Fall mit 0 gewichtet. Also ist maximal einer der Werte $C(a^*, b)$, $b \in B$, endlich, während alle anderen unendlich groß sind.
Wir wollen P^* nun auf den Kosten aller zu einem Assignment gehörenden Kanten von

(A^*, B) betrachten. Wie schon zuvor erkannt, können wir uns die Werte der Kanten, die mit a^* inzidieren, als n-Tupel $(\infty, \ldots, C(a^*, b_i), \ldots, \infty)$ mit $b_i \in B$ für $i = 1, \ldots, n$ und $C(a^*, b_i) \in \mathbb{R}_+$ vorstellen, falls $|B| = n$ gilt, und gewichten $C(a^*, b)$ mit $g(b) \cdot \lambda$. Auf den Werten aller nicht zu a^* inzidenten Kanten entspricht P^* dem Wahrscheinlichkeitsmaß μ, welches das Produktmaß bez. aller nicht zu a^* inzidenten Kanten ist, deren Kosten wie bisher unabhängig exponential verteilt zu den entsprechenden Gewichten sind. Man bemerke, dass P^* kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, da es unendlich groß werden kann. Mit E bezeichnen wir den Erwartungswert bez. des Maßes μ.
Im folgenden Lemma sei mit f' die Ableitung von f nach den Kosten der Kante (a^*, b_1) mit $b_1 \in B$ gemeint. Außerdem schreiben wir $C(a^*, b)$ als x_b mit $b \in B$.

Lemma 9. *Für jedes $b_1 \in B$ und jede auf $[0, \infty)$ differenzierbare Funktion f mit $f(t)exp(-ct) \to 0$ für $t \to \infty$ und $c > 0$ gilt*

$$\begin{aligned} &E\big(f(C_k(A, B)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\big) \qquad (25)\\ &\quad = E\big(f(C_{k-1}(A, B \setminus b_1)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\big) + \frac{1}{g(b_1)} \cdot E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Im Folgenden berechnen wir $E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big)$.
Es gilt

$$E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big) = \sum_{b \in B} \int_0^\infty \Big(\int f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \,\mathrm{d}\mu\Big) g(b) \mathrm{d}\lambda(x_b)\,. \qquad (26)$$

Wir wissen, dass μ das Produktmaß bez. aller exponential verteilten Kosten der nicht zu a^* inzidenten Kanten ist. In (26) laufe das innere Integral über alle Kosten dieser Kanten.
Offensichtlich ist $f'(C_k(A^*, B))$ unabhängig von μ-meßbaren Ereignissen. Daraus folgt

$$E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big) = \sum_{b \in B} \int_0^\infty f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \; g(b) \mathrm{d}\lambda(x_b)\,.$$

Es gibt $|B|$ Möglichkeiten der Teilnahme aller zu a^* inzidenten Kanten am Minimum k-Assignment. Wegen der Indikatorfunktion I_{b_1} gewichten wir nur den Fall, in dem die Kante (a^*, b_1) mit $b_1 \in B$ daran teilnimmt. Wir haben damit

$$\sum_{j=1}^{|B|} \int_0^\infty f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \; g(b_j) \mathrm{d}\lambda(x_{b_j}) = g(b_1) \int_0^\infty f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \, \mathrm{d}\lambda(x_{b_1})\,.$$

Nun wollen wir $\int_0^\infty f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \; \mathrm{d}\lambda(x_{b_1})$ berechnen. Offensichtlich gilt

$$\frac{d}{dx_{b_1}} f(C_k(A^*, B)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1) = f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\,.$$

Wir werten nun $C_k(A^*, B)$ an der Stelle $x_{b_1} = \infty$ und an der Stelle $x_{b_1} = 0$ aus.
Für $x_{b_1} = \infty$ entsprechen sich $C_k(A^*, B)$ und $C_k(A, B)$, da die Kante (a^*, b_1) dann nicht mehr am Minimum k-Assignment teilnehmen kann.

Falls $x_{b_1} = 0$ gilt, sind $C_k(A^*, B)$ und $C_{k-1}(A, B \setminus b_1)$ äquivalent, da sich das Minimum $(k-1)$-Assignment in $(A, B \setminus b_1)$ mit der 0 an der Stelle (a^*, b_1) zum Minimum k-Assignment von $C_k(A^*, B)$ ergänzt.
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1} \,\mathrm{d}\lambda(x_{b_1})\\ &\qquad = f(C_k(A, B)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1) - f(C_{k-1}(A, B \setminus b_1)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\,.\end{aligned}$$

Damit haben wir nun

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g(b_1)} E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big) \\ &\qquad = f(C_k(A, B)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1) - f(C_{k-1}(A, B \setminus b_1)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Wir bilden auf beiden Seiten von (27) den Erwartungswert bez. μ.
Dann gilt

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g(b_1)} E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_{b_1}\big) \\ &\qquad = E\big(f(C_k(A, B) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\big) - E\big(f(C_{k-1}(A, B \setminus b_1) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b_1)\big)\,.\end{aligned}$$

□

Theorem 4. *Falls T eine k-elementige Teilmenge von A ist, gilt*

$$\begin{aligned}&E\big(f(C_k(A, B)) \cdot I_k(T, A, B)\big) \\ &= \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} \sum_{b \in B} \frac{g(b)}{g(B)} E\big(f(C_{k-1}(A, B \setminus b)) \cdot I_{k-1}(T \setminus A, B \setminus b)\big) \\ &\quad + \frac{1}{g(B)} \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_k(T \setminus a \cup a^*, A^*, B)\big)\,.\end{aligned} \tag{28}$$

Beweis. Wir multiplizieren (25) aus Lemma 9 auf beiden Seiten mit $g(b_1)$ und bilden Summen über alle $b_1 \in B$, so dass wir

$$\begin{aligned}&\sum_{b \in B} g(b) E\big(f(C_k(A, B)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b)\big) \\ &\quad = \sum_{b \in B} g(b) E\big(f(C_{k-1}(A, B \setminus b)) \cdot I_{k-1}(S, A, B \setminus b)\big) \\ &\qquad + E^*\big(f'(C_k(A^*, B)) \cdot I_k(S \cup a^*, A^*, B)\big) \quad \text{erhalten.}\end{aligned} \tag{29}$$

Dabei haben wir

$$I_k(S \cup a^*, A^*, B) = \sum_{b \in B} I_b \quad \text{benutzt.}$$

Ist T eine k-elementige Teilmenge von A, so folgt mit Theorem 3, dass für jedes $b \in B$

$$\begin{aligned}&E\big(f(C_k(A, B)) \cdot I_k(T, A, B)\big) \\ &\quad = \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} E\big(f(C_k(A, B)) \cdot I_{k-1}(T \setminus a, A, B \setminus b)\big) \quad \text{gilt.}\end{aligned}$$

Dann gilt bei zufälliger Wahl von $b \in B$ gemäß der Gewichte

$$\begin{aligned} &E\big(f(C_k(A,B)) \cdot I_k(T,A,B)\big) \\ &\quad = \sum_{a\in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} \sum_{b\in B} \frac{g(b)}{g(B)} E\big(f(C_k(A,B)) \cdot I_{k-1}(T \setminus a, A, B \setminus b)\big) . \end{aligned} \tag{30}$$

Mit $S := T \setminus a$ und Einsetzen von (29) in (30) ergibt sich Theorem 4. $\square$

In Gleichung (28) setzen wir nun $f(t) = t^N$, so dass

$$\begin{aligned} &E\big(C_k(A,B)^N \cdot I_k(T,A,B)\big) \\ &= \sum_{a\in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} \sum_{b\in B} \frac{g(b)}{g(B)} E\big(C_{k-1}(A,B \setminus b)^N \cdot I_{k-1}(T \setminus a, A, B \setminus b)\big) \\ &\quad + \frac{N}{g(B)} \sum_{a\in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} E^*\big(C_k(A^*,B)^{N-1} \cdot I_k(T \setminus a \cup a^*, A^*, B)\big) \quad \text{folgt.} \end{aligned} \tag{31}$$

Unser nächstes Ziel ist, mit Hilfe dieser rekursiven Formel eine geschlossene Formel für $E\big(f(C_k(A,B)^N) \cdot I_k(T,A,B)\big)$ herzuleiten.

Dazu definieren wir uns den sogenannten erweiterten Urnenprozess wie folgt:
Es seien $\{x_a : a \in A\}$ die $Exp_{g(a)}$-verteilten Zeiten, zu denen die entsprechenden Elemente von A gezogen werden, die man sich auch als Kugeln der Urne A vorstellen kann. Analog zu dem Urnenprozess auf A haben wir einen Urnenprozess auf B mit den Zeiten $\{y_b : b \in B\}$, zu denen die Kugeln aus Urne B gezogen werden. Wir haben damit zwei unabhängige Prozesse. Nun erweitern wir unser Modell, indem wir dem Prozess auf A N zusätzliche Punkte $x_1, \dots, x_N$ und auch dem Urnenprozess auf B N weitere Punkte $y_1, \dots, y_N$ hinzufügen. Jetzt versehen wir alle $2N$ zusätzlichen Punkte $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$ mit dem Lebesgue-Maß. Das Maß eines Ereignisses entspricht dann dem Erwartungswert des Lebesgue-Maßes in $2N$ Dimensionen bez. der Menge aller Punkte $x_1, y_1, \dots, x_N, y_N$, die zu dem Ereignis gehören. Wir bezeichnen dieses Maß als E^*. Bis auf eine kleine Ausnahme in Theorem 5, auf die wir dann hinweisen werden, werden wir ausschließlich E^* als Maß auf dem erweiterten Urnenprozess verwenden.
Die Zeiten x_a mit $a \in A$ zusammen mit $x_1, \dots, x_N$ lassen sich ordnen, so dass wir in aufsteigender Reihenfolge Ränge $1, 2, 3, \dots$ vergeben können. Dabei mache man sich kurz klar, dass keine zwei Punkte fast sicher den gleichen Rang haben. Mit r_a, $a \in A$, und $r_1, \dots, r_N$ seien die Ränge der jeweiligen Elemente bezeichnet.
Ebenso ordnen wir y_b mit $b \in B$ und $y_1, \dots y_N$ und nennen die Ränge s_b mit $b \in B$ und $s_1, \dots s_N$.

Dann hat die Rekursionsgleichung in (31) folgende Lösung:

Theorem 5. *Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und jede k-elementige Teilmenge T von A gilt*

$$\begin{aligned} &E\big(C_k(A,B)^N \cdot I_k(T,A,B)\big) \\ &\quad = E^*(\{r_i + s_i \le k + N,\, i = 1, \dots, N\} \cap \{r_a \le k + N,\, a \in T\}) . \end{aligned} \tag{32}$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über k und N.
Induktionsanfang:
Seien $k = 1$ und $N = 1$. Dann ist zu zeigen, dass

$$E\big(C_1(A,B) \cdot I_1(T,A,B)\big) = E^*(\{r_1 + s_1 \leq 2\} \cap \{r_x \leq 2\}) \text{ gilt,} \tag{33}$$

wobei $T := x$ für ein beliebiges x aus A sei.

$$\begin{aligned}
&E\big(C_1(A,B) \cdot I_1(T,A,B)\big) \\
&\quad = E\big(C_1(A,B) \mid I_1(T,A,B) = 1\big) \cdot P(I_1(T,A,B) = 1) \\
&\quad = \frac{1}{\sum_{b \in B} g(x)g(b)} \cdot P(I_1(x,A,B) = 1 \mid I_1(\tilde{b},A,B) = 1) \qquad (34) \\
&\quad = \frac{1}{\sum_{b \in B} g(x)g(b)} \cdot \frac{g(\tilde{b})g(x)}{\sum_{a \in A} g(\tilde{b})g(a)} \qquad (35) \\
&\quad = \frac{1}{\sum_{\substack{a \in A \\ b \in B}} g(a)g(b)}\,.
\end{aligned}$$

In (34) haben wir die Unabhängigkeit von $\{I_1(x,A,B) = 1\}$ und $\{I_1(\tilde{b},A,B) = 1\}$ für ein beliebiges $\tilde{b} \in B$ benutzt, die in (35) klar wird, wo wir Satz 1 und Satz 2 verwendet haben.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
E^*(\{r_1 + s_1 \leq 2\} \cap \{r_x \leq 2\}) &= E^*(\{r_1 = 1\} \cap \{s_1 = 1\} \cap \{r_x = 2\}) \\
&= E(\min_{a \in A} x_a \cdot \min_{b \in B} y_b) \\
&= E(\min_{a \in A} x_a) E(\min_{b \in B} y_b) \qquad (36) \\
&= \frac{1}{\sum_{a \in A} g(a) \sum_{b \in B} g(b)}\,. \qquad (37)
\end{aligned}$$

Nun haben wir in (36) die Unabhängigkeit von $\min_{x \in A} x_a$ und $\min_{b \in B} y_b$ und in (37) wieder Satz 1 und Satz 2 benutzt.
Damit haben wir (33) gezeigt.
Wir nehmen nun an, dass (32) gilt, falls wir N oder k durch eine kleinere Zahl ersetzen und wollen zeigen, dass die rechte Seite von Gleichung (32) die rekursive Formel in (31) erfüllt.
Also betrachten wir das Ereignis

$$\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N, \text{ und } r_a \leq k + N,\, a \in T\}\,.$$

Bei diesem werden die k Elemente aus T vor jedem nicht zu T gehörigen Element gezogen. Wir nennen das zuletzt gezogene dieser k Elemente a_0.
Dann gilt

$$\begin{aligned}
&E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_a \leq k + N,\, a \in T\}) \\
&\quad = \sum_{a \in T} E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap \{a_0 = a\}) \\
&\quad = \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\})\,.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir Satz 2 verwendet. $\frac{g(a)}{g(T^c \cup a)}$ entspricht $P(a_0 = a)$ und lässt sich nach dem Nesting Lemma als $P(I_k(T, A, B) = 1 \mid I_{k-1}(T \setminus a, A, B) = 1)$ interpretieren.
Wir setzen

$$M(x) := \{x = \min_{b \in B}(y_b, y_1, \ldots, y_N)\}.$$

Dann haben wir für jedes $a \in T$

$$\begin{aligned}
&E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\}) \\
&= \sum_{b \in B} E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_b)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_i)).
\end{aligned}$$

Sei

$$B(x) := \{x = \min_{b \in B} y_b\}.$$

Somit gilt für $a \in T$ und $b \in B$

$$\begin{aligned}
&E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_b)) \\
&= \frac{g(b)}{g(B)} E^*(\{r_i + s_i \leq k + N \,\forall i\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_b) \mid B(y_b)),
\end{aligned}$$

wobei nach Satz 2

$$\frac{g(b)}{g(B)} = P\big(B(y_b)\big) \text{ gilt.}$$

Jetzt können wir

$$E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_b) \mid B(y_b)) \quad (38)$$

umformulieren, indem wir den erweiterten Urnenprozess auf $(A, B \setminus b)$ mit Rängen r' und s' betrachten. Dann ist (38) äquivalent zu

$$E^*(\{r'_i + s'_i \leq k - 1 + N, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r'_{a'} \leq k - 1 + N \text{ für alle } a' \in T \setminus a\}),$$

also nach Induktionsannahme identisch mit

$$E\big(C_{k-1}(A, B \setminus b)^N \cdot I_{k-1}(T \setminus a, A, B \setminus b)\big).$$

Andererseits stimmt für $a \in T$ und $i = 1, \ldots, N$

$$E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \cap M(y_i))$$

mit

$$\frac{1}{g(B)} E^*\big(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_{a'} \leq k - 1 + N,\, a' \in T \setminus a\} \mid M(y_i)\big) \quad (39)$$

überein, wobei

$$E^*\big(M(y_i)\big) = \frac{1}{g(B)} \quad \text{gilt.}$$

Wir definieren uns erneut einen erweiterten Urnenprozess, mit dem wir Gleichung (39) anders formulieren können. Da a^* nach P^* wie x_i Lebesgue-verteilt ist, ersetzen wir x_i

durch a^*. Der neue erweiterte Urnenprozess mit Rängen $\tilde{r}$ und $\tilde{s}$ findet also auf (A^*, B) statt.
Nun lässt sich (39) als

$$\frac{1}{g(B)} E^*(\{\tilde{r}_i + \tilde{s}_i \leq k+N-1, i = 1, \ldots, N-1\} \cap \{\tilde{r}_{a'} \leq k+N-1 \,\text{für}\, a' \in T\ a \cup a^*\}) \quad (40)$$

schreiben. E^* tritt an dieser Stelle also offensichtlich in Bezug zum erweiterten Urnenprozess und bez. a^* auf. Man mache sich klar, dass a^* erst Exp_{δ^*}-verteilt war, nun aber Lebesgue-verteilt ist. Nach Induktionsannahme stimmt (40) mit

$$\frac{1}{g(B)} E^*\big(C_k(A^*, B)^{N-1} I_k(T \setminus a \cup a^*, A^*, B)\big) \text{ überein,}$$

wobei E^* in diesem Fall den normalisierten Grenzwert des Erwartungswertes auf den Kosten der Kanten von (A^*, B) darstellt.
Es folgt

$$\begin{aligned} & E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_a \leq k + N,\, a \in T\}) \\ = & \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} \sum_{b \in B} \frac{g(b)}{g(B)} E\big((C_{k-1}(A, B \setminus b)^N) \cdot I_{k-1}(T \setminus A, B \setminus b)\big) \\ & + \frac{N}{g(B)} \sum_{a \in T} \frac{g(a)}{g(T^c \cup a)} E^*\big((C_k(A^*, B)^{N-1}) \cdot I_k(T \setminus a \cup a^*, A^*, B)\big) \end{aligned}$$

und nach (31) Gleichung (32). □

Theorem 5 lässt sich schnell auf Mengen $T \subseteq A$ mit weniger als k Elementen verallgemeinern, indem wir über alle k-elementigen Teilmengen $\tilde{T}$ mit $T \subseteq \tilde{T} \subseteq A$ summieren. Dabei sind die Mengen $\{I_k(\tilde{T}, A, B) = 1\}$ und $\{I_k(\tilde{T}', A, B) = 1\}$ für je zwei unterschiedliche k-elementige Teilmengen $\tilde{T}$ und $\tilde{T}'$ von A disjunkt, und es gilt

$$\begin{aligned} & E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{r_a \leq k + N,\, a \in \tilde{T}\}) \\ & \quad = E^*(\{r_i + s_i \leq k + N,\, i = 1, \ldots, N\} \cap \{I_k(\tilde{T}, A, B) = 1\})\,. \end{aligned}$$

Wir können also auch T als leere Menge wählen, so dass wir folgendes Theorem erhalten:

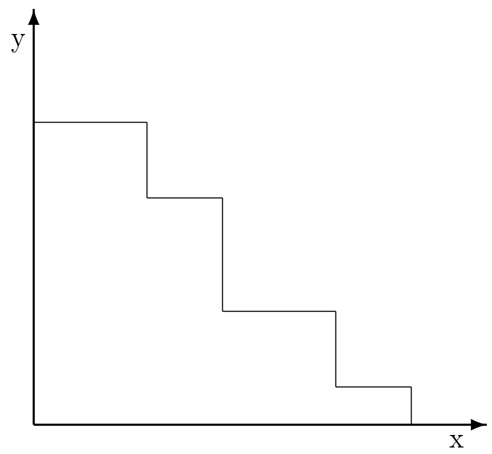
Theorem 6. *Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$E\big(C_k(A, B)^N\big) = E^*(\{r_i + s_i \leq k + N \,\textit{für}\, i = 1, \ldots, N\})\,. \quad (41)$$

Theorem 6 ist von besonderer Bedeutung für uns, nicht nur, weil wir dessen Aussage für den Fall $N = 2$ zur Herleitung der Formel für $Var(C_n)$ benötigen, sondern auch, weil es für den Fall $N = 1$ die Coppersmith-Sorkin Formel und damit die Parisi Formel beweist. Damit letzteres klar wird, formulieren wir Theorem 6 für den Fall $N = 1$ ein wenig anders.

Definition. *Sei $N_A(x)$ die Anzahl der im Intervall $[0, x]$ mit $x \geq 0$ gezogenen Elemente von A. Analog sei $N_B(y)$ die Anzahl der Kugeln, die im Zeitintervall $[0, y]$ mit $y \geq 0$ gezogen werden.*
Dann sei $R_k(A, B) := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \mid N_A(x) + N_B(y) < k\}$ und $Fl(R_k(A, B))$ die zu $R_k(A, B)$ gehörige Fläche im positiven Quadranten der durch die zwei Zeitachsen x und y aufgespannten Ebene.

Die typische Form von $R_k(A, B)$ wird durch das folgende Diagramm für den Fall $k = 4$ veranschaulicht:

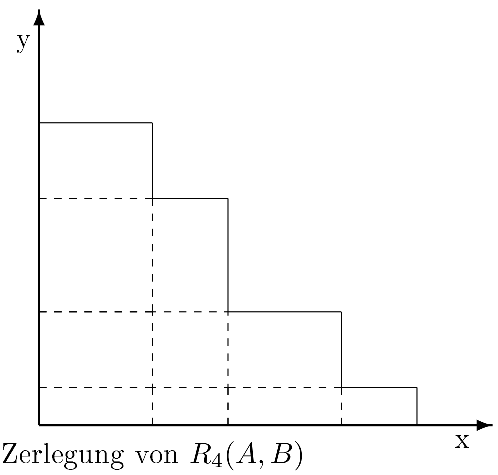


Theorem 6 lässt sich nun für den Fall $N = 1$ umformulieren zu

Theorem 7. *Es gilt*

$$E\big(C_k(A, B)\big) = E\big(Fl(R_k(A, B))\big)\,.$$

Jetzt erkennt man, dass die Coppersmith-Sorkin Formel mit der obigen übereinstimmt, falls alle Gewichte 1 entsprechen. Denn dann entspricht ein einzelner Summand der Coppersmith-Sorkin Formel genau der erwarteten Fläche des jeweiligen Rechtecks aus $R_k(A, B)$. Summiert man über alle Rechtecksflächen so entsteht die gesamte erwartete Fläche von $R_k(A, B)$ wie man gut am unteren Diagramm nachvollziehen kann. Dabei sind die Rechtecksflächen aufgrund der Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung unabhängig voneinander.



Zerlegung von $R_4(A, B)$

3.2 Explizite Formel zur Berechnung von $Var(C_n)$

Nun wollen wir uns den Fall $N = 2$ von Theorem 6 anschauen, der für uns wichtiger ist, da er es uns ermöglicht, Gleichung (3) herzuleiten. Auch dieser Fall lässt sich umformulieren.

Definition. *Zwei Punkte aus $R_k(A,B)$ seien in abfallender Position, falls einer der beiden eine größere x-Koordinate und der andere eine größere y-Koordinate hat. Dann sei $R_k^2(A,B)$ die Menge aller Paare von Punkten $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, die zu $R_k(A,B)$ gehören und in abfallender Position sind oder beide in $R_{k-1}(A,B)$ liegen.*

Nun formulieren wir Theorem 6 für den Fall $N=2$ mit Hilfe dieser Definition erneut.

Theorem 8. *Der Erwartungswert des vierdimensionalen Lebesgue-Maßes von $R_k^2(A,B)$ entspricht dem Erwartungswert von $C_k(A,B)^2$.*

Für den Fall $N=2$ ist (41) identisch mit Theorem 8, da
$A := \{(x_1,y_1),(x_2,y_2) \mid r_i+s_i \leq k+N \,\text{für}\, i=1,2\}$ äquivalent zu $R_k^2(A,B)$ ist.

Es gilt $R_k^2(A,B) \subseteq A$, da für alle Paare $((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ aus $R_k^2(A,B)$ stets $r_i+s_i \leq k+2$ für $i=1,2$ gilt. Für solche Paare mit Punkten aus $R_k(A,B) \setminus R_{k-1}(A,B)$ haben wir $r_i+s_i = k+2$ für $i=1,2$.
Andererseits gilt $A \subseteq R_k^2(A,B)$. Nehmen wir dazu an, dass (x_1,y_1) und (x_2,y_2) Punkte eines Paares sind, das nicht in $R_k^2(A,B)$ liegt. Betrachten wir zunächst Punktpaare mit minimaler Summe r_i+s_i für $i=1,2$ in $\big(R_k(A,B)^c\big)^2$. O.B.d.A. setzen wir $r_1=1$ und $r_2=2$. Dann sieht man durch Nachrechnen, dass das Punktpaar nicht in A liegen kann. Außerdem mache man sich klar, dass $B := A \cap (R_k(A,B) \setminus R_{k-1}(A,B))^2$ nur Punktpaare enthält, die sich in abfallender Position befinden. O.B.d.A. wähle man Punktpaare mit $r_1=1$ und $r_2=2$ in $(R_k(A,B) \setminus R_{k-1}(A,B))^2$, im 1. Fall in abfallender Position mit $s_1=k+1$ und $s_2=k$ und im 2. Fall mit Rängen $s_1=k$ und $s_2=k+1$. Das Punktpaar aus dem 2.Fall liegt im Gegensatz zu dem Punktpaar aus dem 1.Fall nicht in B, da es wegen $s_1+s_2=k+3$ nicht mehr in A liegt.

Mit Hilfe von Theorem 8 sind wir nun in der Lage, die von uns angestrebte Formel zur Berechnung der Varianz von $C_k(A,B)$ herzuleiten, wobei wir den Spezialfall betrachten, in dem alle Gewichte 1 sind und $k=m=n$ mit $m:=|A|$ und $n:=|B|$ gilt.
Im nächsten Theorem halten wir uns mit der Berechnung des zweiten Momentes von $C_{k,m,n}$ im Falle $g(x)=1$ für alle $x \in A \cup B$ noch allgemeiner.

Theorem 9. *Das zweite Moment von $C_{k,m,n}$ ist*

$$\begin{aligned} E(C_{k,m,n}^2) &= 2 \cdot \sum_{\substack{0\leq i_1\leq i_2\\ 0\leq j_2\leq j_1\\ i_1+j_1<k\\ i_2+j_2<k}} \frac{1}{(m-i_1)(m-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} \\ &\quad +2 \cdot \sum_{\substack{0\leq i_1\leq i_2\\ 0\leq j_1\leq j_2\\ i_2+j_2<k-1}} \frac{1}{(m-i_1)(m-i_2)(n-j_1)(n-j_2)}\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Beweis. Da wir annehmen, dass alle Gewichte gleich 1 sind, ist der Erwartungswert der Zeit zwischen i-ter und $i+1$-ter Ziehung der Elemente von A nach Satz 1 und Satz 2 gleich $\frac{1}{m-i}$ und unabhängig von den Zeiten der zuvor gezogenen Kugeln. Analog entspricht der Erwartungswert der Zeit zwischen j-ter und $j+1$-ter Ziehung der Elemente von B $\frac{1}{n-j}$.
Gemäß Theorem 8 betrachten wir im erweiterten Urnenmodell das Ereignis
$\{x_1 < x_2 \,\text{und}\, y_1 > y_2\}$. Wir nehmen an, dass i_1 Elemente von A vor x_1 und i_2 Elemente

von A vor x_2 sowie j_1 Elemente von B vor y_1 und j_2 Elemente von B vor y_2 gezogen werden. Dann gilt

$$E^*(\{x_1 < x_2\} \cap \{y_2 < y_1\}) = \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ 0 \leq j_2 \leq j_1 \\ i_1 + j_1 < k \\ i_2 + j_2 < k}} \frac{1}{(m-i_1)(m-i_2)(n-j_1)(n-j_2)}.$$

Nun kann es noch sein, dass $x_1 > x_2$ und $y_1 < y_2$ gilt. Dieser Fall ist jedoch völlig analog und ergibt dasselbe Gewicht bez. E^* wie im 1.Fall. Anschaulich gesehen erhält man die Äquivalenz durch Vertauschung der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). Damit ergibt sich der erste Summand in (42).
Betrachten wir nun den Fall mit $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$, wobei $i_2 + j_2 < k - 1$ gilt, da nach Theorem 8 $(x_2, y_2) \in R_{k-1}(A, B)$ gelten muss. Mit der Wahl von i_1,i_2,j_1 und j_2 wie oben erhält man

$$\begin{aligned} &E^*(\{x_1 < x_2\} \cap \{y_1 < y_2\} \cap \{(x_2, y_2) \in R_{k-1}(A, B)\}) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ 0 \leq j_1 \leq j_2 \\ i_2 + j_2 < k-1}} \frac{1}{(m-i_1)(m-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} \end{aligned}$$

Der Fall mit $x_1 > x_2$ und $y_1 > y_2$ ist bez. E^* identisch. Auch hier ergibt sich die Symmetrie durch Vertauschung der Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2). □

Nun setzen wir $k = m = n$. Damit folgt aus Theorem 9

$$\begin{aligned} E(C_n^2) &= 2 \cdot \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ 0 \leq j_2 \leq j_1 \\ i_1 + j_1 < n \\ i_2 + j_2 < n}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ 0 \leq j_1 \leq j_2 \\ i_2 + j_2 < n-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Wir wollen nun die Bedingung $i_2 + j_2 < n - 1$ im zweiten Summanden umwandeln in $i_2 + j_2 < n$. Dazu dienen die drei folgenden Lemmas.

Lemma 10. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$C(N) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=N+1-j}^{N} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}.$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
C(N) - C(N-1) &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j}\left(\sum_{k=N+1-j}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{N-j}^{N-1}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{1}^{k} + \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j}\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N-j}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{N(N-j)} \\
&= \frac{1}{N^2}\,.
\end{aligned}$$

Mit $C(1) = 1$ und $C(N) = C(N) - C(N-1) + C(N-1) - \cdots + C(2) - C(1) + C(1)$ folgt Lemma 10. $\square$

Lemma 11. *Sei*

$$L(n) := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{kj}\sum_{m=n+1-j}^{n}\frac{1}{m}\,.$$

Dann gilt für alle $n \geq 1$

$$L(n) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}\,.$$

Beweis. Es gilt $L(1) = 1$. Außerdem haben wir für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&L(N) - L(N-1) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\sum_{n=N+1-j}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{kj}\sum_{n=N+1-j}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{kj}\sum_{n=N-j}^{M-1}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\sum_{n=N+1-j}^{N}\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{kj}\left(\sum_{n=N+1-j}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=N-j}^{N-1}\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}\sum_{n=N+1-j}^{N}\frac{1}{n} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{j=N-k}^{N-1}\frac{1}{j} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2} - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j^2} \qquad (44) \\
&= \frac{1}{N^3}\,.
\end{aligned}$$

In (44) haben wir Lemma 10 benutzt. Wegen

$$L(n) = L(n) - L(n-1) + \cdots - L(1) + L(1)$$

folgt Lemma 11. $\square$

Lemma 12. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq i_2 \\ 0 \leq j_1 \leq j_2 \\ i_2 + j_2 = n-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} = \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}\,.$$

Beweis. Wegen

$$\frac{1}{(n-i_2)(n-j_2)} = \frac{1}{(n+1)(n-i_2)} + \frac{1}{(n+1)(n-j_2)}$$

und Symmetrie folgt

$$\sum_{\substack{0\le i_1\le i_2\\0\le j_1\le j_2\\i_2+j_2=N-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} = \frac{2}{n+1} \sum_{\substack{0\le i_1\le i_2\\0\le j_1\le j_2\\i_2+j_2=n-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)}\,.$$

Nun ist zu zeigen, dass für alle $n \geq 1$

$$\sum_{\substack{0\le i_1\le i_2\\0\le j_1\le j_2\\i_2+j_2=n-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} \text{ gilt.}$$

Wir führen eine kleine Umformung durch :

$$\sum_{\substack{0\le i_1\le i_2\\0\le j_1\le j_2\\i_2+j_2=n-1}} \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{kj} \sum_{m=n+1-j}^{n} \frac{1}{m}\,.$$

Dabei haben wir $k := n - i_1, j := n - i_2$ und $m := n - j_1$ gesetzt. Mit Lemma 11 folgt daher Lemma 12. □

Nun lässt sich das zweite Moment von C_n mit Lemma 12 zu

$$\begin{aligned} E(C_n^2) &= \left(\sum_{\substack{i_1\le i_2\\j_1\le j_2}} + \sum_{\substack{i_2\le i_1\\j_1\le j_2}} + \sum_{\substack{i_1\le i_2\\j_2\le j_1}} + \sum_{\substack{i_2\le i_1\\j_2\le j_1}}\right) \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} \\ &\quad - \frac{4}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3} \quad \text{vereinfachen,} \end{aligned} \tag{45}$$

wobei wir die Bedingung $i_2 + j_2 < n - 1$ im zweiten Summanden von Gleichung (43) zu $i_2 + j_2 < n$ geändert haben, also $i_1 + j_1 < n$ und $i_2 + j_2 < n$ gilt, was im Folgenden stets vorausgesetzt sei.
Die Varianz von C_n lässt sich nun durch die Beobachtung ablesen, dass der quadrierte Erwartungswert von C_n gemäß der Coppersmith-Sorkin Formel

$$\sum_{\substack{0\le i_1\\0\le j_1\\i_1+j_1<n}} \frac{1}{(n-i_1)(n-j_1)} \cdot \sum_{\substack{0\le i_2\\0\le j_2\\i_2+j_2<n}} \frac{1}{(n-i_2)(n-j_2)} \tag{46}$$

entspricht und die beim Ausmultiplizieren entstehenden Terme in (45) vorkommen. Ein Term in (46), für den $i_1 \neq i_2$ und $j_1 \neq j_2$ gilt, kommt in (45) genau einmal vor. Falls entweder $i_1 = i_2$ oder $j_1 = j_2$ gilt, so kommen die jeweiligen Terme genau zweimal in

(45) vor, im Fall $i_1 = i_2$ und $j_1 = j_2$ sogar viermal. Wir suchen die restlichen Terme in (45), die sich wegen $Var(C_n) = E(C_n^2) - E(C_n)^2$ als

$$Var(C_n) = \left(\sum_{i_1=i_2} + \sum_{j_1=j_2} + \sum_{\substack{i_1=i_2 \\ j_1=j_2}} \right) \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} - \frac{4}{n+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} \quad (47)$$

schreiben lassen.
Es tauchen also genau drei weitere Terme mit $i_1 = i_2$ und $j_1 = j_2$ auf, wohingegen solche mit $i_1 = i_2$ und $j_1 \neq j_2$ sowie $j_1 = j_2$ und $i_1 \neq i_2$ nur noch einmal vorkommen.

Unser Ziel ist also das Ersetzen von

$$\left(\sum_{i_1=i_2} + \sum_{j_1=j_2} + \sum_{\substack{i_1=i_2 \\ j_1=j_2}} \right) \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} . \quad (48)$$

Lemma 13. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$D(N) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} .$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=j+1}^{N} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{N} \frac{1}{k} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} , \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} \sum_{k=j}^{N} \frac{1}{k} \text{ benutzt haben.} \quad (49)$$

□

Lemma 14. *Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^4} .$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \right)^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^4} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=k}^{N} \frac{1}{m^2} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} , \quad (50) \end{aligned}$$

wobei wir in (50)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2} \sum_{m=k}^{N} \frac{1}{m^2}\,, \tag{51}$$

ähnlich der Gleichung (49) in Lemma 13 verwendet haben. □

Lemma 15. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=i_2} + \sum_{\substack{i_1=i_2\\ j_1=j_2}}\right) \frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} \\
&\quad = 5\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^4} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Beweis. Die linke Seite der Gleichung ist äquivalent zu

$$R(n) := 2\sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{km} \sum_{j=n+1-m}^{n} \frac{1}{j^2}\,,$$

da sie sich nach Umbenennung als

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m^2} \text{ schreiben lässt}$$

und

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m}\right)^2 &= \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m^2} + \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m} \sum_{j=n+1-k}^{m-1} \frac{1}{j} + \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{j} \\
&= \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m^2} + 2 \cdot \sum_{m=n+1-k}^{n} \frac{1}{m} \sum_{j=n+1-k}^{m-1} \frac{1}{j} \text{ gilt.}
\end{aligned}$$

Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&R(N) - R(N-1) \\
&\quad = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \sum_{j=N+1-m}^{N} \frac{1}{j^2} + 2\sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{km} \left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N-m)^2}\right) \\
&\quad = \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \sum_{j=N+1-m}^{N} \frac{1}{j^2} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} - 2\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m(N-m)^2}\,.
\end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{m(N-m)^2} = \frac{1}{N^2 m} + \frac{1}{N^2(N-m)} + \frac{1}{N(N-m)^2} \tag{52}$$

folgt dann

$$
\begin{aligned}
&R(N) - R(N-1)\\
&= \frac{2}{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\sum_{j=N+1-m}^{N}\frac{1}{j^2} - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m} - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m^2}\\
&= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2} - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=N+1-k}^{N}\frac{1}{j^2} - \sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m^2}\right)\\
&= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2} - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N-k)^2}\right)\\
&= \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j^2} - \frac{2}{N^2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j^2} + \frac{2}{N^3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\frac{1}{(N-k)^2}\,, \qquad (53)
\end{aligned}
$$

wobei wir in (53) Lemma 10 angewendet haben. Wir können abermals (52) anwenden, so dass wir

$$
\begin{aligned}
R(N) - R(N-1) &= \frac{2}{N^4} - \frac{2}{N^3}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} - \frac{2}{N^2}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^2}\\
&= \frac{6}{N^4} - \frac{2}{N^3}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{2}{N^2}\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m^2} \quad \text{erhalten.}
\end{aligned}
$$

Wegen $R(1) = 2$ und $R(n) = R(n) - R(n-1) + \cdots - R(1) + R(1)$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$
R(n) = 6\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^4} - 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^2}\,.
$$

Anwendung von Lemma 14 vervollständigt den Beweis. □

Lemma 16. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$
\sum_{j_1=j_2}\frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^3}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} - \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^2.
$$

Beweis. Sei

$$
T(n) := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=n+1-k}^{n}\frac{1}{m}\right)^2.
$$

Durch Umbenennung sieht man, dass

$$
\sum_{j_1=j_2}\frac{1}{(n-i_1)(n-i_2)(n-j_1)(n-j_2)}
$$

mit $T(n)$ übereinstimmt. Man mache sich klar, dass wir stets annehmen, dass $i_l + j_l < n$ für $l = 1, 2$ gilt.

Für alle $N \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned}
&T(N) - T(N-1) \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N}\right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N-k}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N}\right)^2 - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N-k}\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{2}{N}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N^2}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{2}{N-k}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{(N-k)^2}\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\right)^2 + \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\left(\left(\frac{2}{N} - \frac{2}{N-k}\right)\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N^2} - \frac{1}{(N-k)^2}\right) \\
&= \frac{1}{N^2}\left(\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{m}\right)^2 - \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k(N-k)}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} \\
&\quad + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\frac{1}{(N-k)^2}\,. && (54)
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k(N-k)}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{N-k}\sum_{m=N+1-k}^{N-1}\frac{1}{m} && (55) \\
&\quad = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=N-k}^{N-1}\frac{1}{m} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k(N-k)} + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\sum_{m=k}^{N-1}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^2} \\
&\quad = \frac{1}{N}C(N-1) - \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{N}D(N-1) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N-1}\frac{1}{m^2} && (56) \\
&\quad = -\frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2N}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k^2}\,. && (57)
\end{aligned}$$

In (55) haben wir

$$\frac{1}{k(N-k)} = \frac{1}{N}\frac{1}{N-k} + \frac{1}{N}\frac{1}{k} \quad \text{verwendet.} \qquad (58)$$

In (56) haben wir die Definition von $C(N)$ und $D(N)$ sowie (58) benutzt. Schließlich haben wir in (57) Lemma 10 und Lemma 13 angewendet.

Mit der Partialbruchzerlegung aus (58) und Quadration folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(N-k)^2} &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{(N-k)^2} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k(N-k)} + \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{4}{N^3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} + \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2}. \qquad (59)
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir in (59) den ersten und letzten Summanden der rechten Seite zusammengefasst sowie abermals (58) angewendet.
Durch Einsetzen von (57) und (59) in (54) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&T(N) - T(N-1) \\
&= \frac{1}{N^2} \Big(\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} \Big)^2 + \frac{4}{N^3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{N^2} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \Big)^2 - \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\
&\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} - \frac{4}{N^3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{1}{N^2} \Big(\sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{N} \Big)^2 - \frac{1}{N^2} \Big(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} \Big)^2 - \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{2}{N^3} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{N^4} - \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k^2} \\
&= \frac{2}{N^3} \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m} + \frac{1}{N^4} - \frac{2}{N^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Es gilt $T(1) = 1$ und $T(n) = T(n) - T(n-1) + \cdots - T(1) + T(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$
T(n) = 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^3} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4} - 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m^2}.
$$

Mit Lemma 14 folgt dann Lemma 16. □

Die Formel zur Berechnung der Varianz von C_n ergibt sich nun durch Vereinfachen von (48) und damit (47) mit Hilfe von Lemma 15 und Lemma 16.

3.3 Asymptotisches Verhalten von $Var(C_n)$

Nun, da wir die Formel zur Berechnung der Varianz von C_n bewiesen haben, können wir die Asymptotik von $Var(C_n)$ für $n \to \infty$ beschreiben.

Theorem 10. *Für $\zeta(s) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ und $n \to \infty$ gilt*

$$
Var(C_n) = \frac{4\zeta(2) - 4\zeta(3)}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).
$$

Beweis. Für $s > 1$ konvergiert $\zeta(s)$ und wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^s} &= \zeta(s) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^s} \\
&= \zeta(s) - \int\limits_{n}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} + O\Big(\frac{1}{n^s}\Big) \\
&= \zeta(s) - \frac{1}{(s-1)n^s - 1} + O\Big(\frac{1}{n^s}\Big).
\end{aligned}$$

Anwenden unserer Formel zur Berechnung der Varianz und das Zulassen eines Fehlerterms $O(\frac{1}{n^2})$ ergibt

$$\begin{aligned}
Var(C_n) &= 5\zeta(4) - 2\Big(\zeta(2) - \frac{1}{n}\Big)^2 - \frac{4}{n}\zeta(3) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\
&= 5\zeta(4) - 2\zeta(2)^2 + \frac{4\zeta(2) - 4\zeta(3)}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{18}$. Damit folgt Theorem 10. □

Literatur

[1] Walkup, D.W., *On the expected value of a random assignment problem,* SIAM J. Comput., **8** (1979), 440-442.

[2] Mézard, Marc und Parisi, Giorgio *Replicas and optimization,* J. Phys. Lett. **46** (1985), 771-778.

[3] Aldous, David, *Asymptotics in the random assignment problem,* Prob. Theory Relat. Fields, **93** (1992) 507-534.

[4] Aldous, David, *The* $\zeta(2)$ *limit in the random assignment problem,* Random Structures Algorithms **18** (2001), no 4. 381-418.

[5] Parisi, Giorgio, *A conjecture on random bipartite matching,* arXiv:cond-mat/9801176, 1998

[6] Coppersmith, Don, Sorkin, Gregory B., *Constructive Bounds and Exact Expectations for the Random Assignment Problem,* Random Structures & Algorithms **15** (1999), 133-144.

[7] Linusson, S. und Wästlund, J., *A proof of Parisi's conjecture on the random assignment problem,* Probab. Theory Relat. Fields **128** (2004), 419-440.

[8] Nair, Chandra, Prabhakar, Balaji und Sharma, Mayank, *Proofs of the Parisi and Coppersmith-Sorkin conjectures for the finite random assignment problem,* Proceedings of IEEE FOCS, 2003

[9] Wästlund, J., *A simple proof of the Parisi and Coppersmith-Sorkin formulas for the random assignment problem,* Linköping studies in Mathematics, No. 6, 2005

[10] Alm, Sven Erick und Sorkin, Gregory B., *Exact expectations and distributions in the random assignment problem,* Combin. Probab. Comput. *11* (2002), no. 3, 217-248.

[11] Nair, Chandra, *Proofs of the Parisi and Coppersmith-Sorkin conjectures in the random assignment problem,* PhD thesis, Stanford University 2005

[12] Wästlund, J., *The variance and higher moments in the random assignment problem,* Linköping studies in Mathematics, No. 8, 2005

[13] Buck, Marshall W., Chan, Clara S. and Robbins, David P., *On the Expected Value of the Minimum Assignment, Random Structures & Algorithms* **21** (2002), no. 1, 33-58.