

Ornstein-Uhlenbeck-Fluktuationen im Linienzählprozess anzestraler Selektionsgraphen

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Master of Science

an der Goethe-Universität Frankfurt

vorgelegt von

Anna-Lena Weinel

am Institut für Mathematik (FB 12)

Erstgutachter: Prof. Dr. Anton Wakolbinger

Zweitgutachter und Betreuer: Dr. Florin Boenkost

Frankfurt am Main, den 01. Februar 2022



Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Grundlagen und Resultate	1
1.1 Moran-Modell mit Selektion	1
1.2 Funktionaler Grenzwertsatz für den Moran-ASP	5
1.3 Martingalprobleme und Generatoren	7
1.4 Cannings-Modelle nach [BGPW]	8
1.5 Funktionaler Grenzwertsatz für den Cannings-ASP	13
1.6 Ornstein-Uhlenbeck-Prozess	14
2 Moran-Modell: Beweis von Theorem 1	17
2.1 Martingalproblem	17
2.2 Konvergenz der Generatorenfolge	20
2.3 Compact Containment Condition	22
2.4 Beweis von Theorem 1	28
2.5 Starke Selektion	29
2.6 Schwache Selektion	31
3 Cannings-Modell: Zwei Beweise von Theorem 2 und ein Ausblick	34
3.1 Beweis von Theorem 2	35
3.2 Ein weiterer Blick auf den Fall $b > \frac{2}{3}$	36
3.3 Ausblick auf den Fall $b \leq \frac{2}{3}$	43
Appendix	
A Hilfreiche Aussagen	46

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit zwei funktionalen Grenzwertsätzen für skalierte Linienzählprozesse von ancestralen Selektionsgraphen. Dazu betrachten wir zwei Modelle aus der mathematischen Populationsgenetik.

Ein bekanntes Modell der Populationsgenetik ist das Moran-Modell mit konstanter Populationsgröße N in kontinuierlicher Zeit. Kingman untersuchte die Genealogie einer Stichprobe aus der Population und führte dazu 1982 den Kingman-Koaleszenten ein (siehe [Kin]). Der ancestrale Selektionsgraph ist eine Erweiterung von Krone und Neuhauser um auch die Genealogie in Modellen mit Mutation und Selektion zu beschreiben (siehe [KN]).

Wir betrachten in dieser Arbeit zuerst das Moran-Modell mit gerichteter Selektion mit konstanter Populationsgröße N in kontinuierlicher Zeit. Es gibt zwei Typen von Individuen: die Bevorzugten und die Gewöhnlichen. Dabei haben die bevorzugten Individuen einen Fitnessvorteil s , so dass ein bevorzugtes Individuum in Erwartung approximativ $1 + s$ Kinder bekommt bevor es selbst durch ein anderes Individuum ersetzt wird.

In unserem Fall betrachten wir moderate Selektion, hier gilt für den Fitnessvorteil s_N der bevorzugten Individuen, dass $(s_N)_{N \geq 1}$ eine Folge ist mit

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Im ersten Kapitel werden zunächst das Moran-Modell mit Selektion und eine zugehörige graphische Darstellung vorgestellt. Mit Hilfe dieser Darstellung wird dann der ancestrale Selektionsgraph im Moran-Modell gemäß Krone und Neuhauser ([KN]) eingeführt. Den zugehörigen Linienzählprozess des Moran ancestralen Selektionsgraphen bezeichnen wir als MASP (*Moran ancestral selection process*). Die Hauptaussage dieser Abschlussarbeit, Theorem 1, besagt, dass der MASP mit einer passenden Skalierung für $N \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess konvergiert. Den Beweis von Theorem 1 führen wir in Kapitel 2. Dazu zeigen wir zunächst, dass ein eindeutiges Martingalproblem vorliegt, die Compact Containment Condition erfüllt ist und die Folge der Generatoren gleichmäßig konvergiert. Damit lässt sich mit einem in [Ker] bereitgestellten Satz die Konvergenz der Prozesse zeigen. Am Ende von Kapitel 2 betrachten wir kurz die Fälle $s_N = s$ und $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $s, \alpha \in (0, \infty)$. Während wir in Abschnitt 2.5 zeigen, dass der zuvor bewiesene funktionale Grenzwertsatz auch im Fall der starken Selektion ($s_N = s$)

seine Gültigkeit behält, gilt das im Fall der schwachen Selektion ($s_N = \frac{\alpha}{N}$) nicht (siehe Abschnitt 2.6). In [PP] untersuchen Pokalyuk und Pfaffelhuber ebenfalls den Fall $s_N = \frac{\alpha}{N}$. In Abschnitt 2.6 beweisen wir, dass der skalierte MASP in diesem Fall in Verteilung gegen den Linienzählprozess konvergiert, der in [PP] betrachtet wird.

Das zweite betrachtete Modell ist das Cannings-Modell in diskreter Zeit. Bei diesem handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Wright-Fisher-Modells (siehe Abschnitt 3.3 aus [Ewe]). Im Cannings-Modell ist die Populationsgröße N konstant und die Kinderzahlvektoren sind unabhängig und austauschbar verteilt.

Wir betrachten im Cannings-Modell ebenfalls die gerichtete Selektion. Wir führen in dieser Arbeit gemäß [BGPW] im Cannings-Modell die gerichtete Selektion in Abschnitt 1.4 ein. Dabei sind die Kinderzahlvektoren austauschbar gemischt multinomialverteilt. Für die Einführung verwenden wir die graphische Repräsentation, die von Boenkost, González Casanova, Pokalyuk und Wakolbinger in [BGPW] eingeführt wurde. Diese führt zur Definition des ancestralen Selektionsgraphen im Cannings-Modell und des zugehörigen Linienzählprozesses, der CASP (*Cannings ancestral selection process*) genannt wird. Der CASP beruht auf Ideen von [KN] und [GS] als Analogon zum MASP. In [BGPW] wurde ein Coupling des CASPs und des MASPs für den Fall

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\frac{2}{3}-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$$

konstruiert. Das verwenden wir in Abschnitt 3.1 um Theorem 2 zu beweisen, das besagt, dass auch der CASP mit einer entsprechenden Skalierung in Verteilung gegen einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für $N \rightarrow \infty$ konvergiert. Im Anschluss wird in Abschnitt 3.3 der Fall $N^{-\frac{2}{3}} \leq s_N \leq N^{-\frac{1}{2}-\eta}$ für ein $\eta \in (0, \frac{1}{6})$ betrachtet.

Kapitel 1

Grundlagen und Resultate

1.1 Moran-Modell mit Selektion

Wir betrachten ein Moran-Modell mit zwei Typen (gewöhnlich und bevorzugt) mit konstanter Populationsgröße N und gerichteter Selektion der Stärke s_N in kontinuierlicher Zeit. Dabei haben Individuen des *bevorzugten* Typs einen *Fitnessvorteil* bei der Reproduktion gegenüber Individuen des *gewöhnlichen* Typs. Bei einer Reproduktion wird ein zufällig gewähltes Individuum durch ein Individuum des Typs der Mutter ersetzt. Dabei seien die Raten wie in [BGPW] folgendermaßen gegeben:

- Jedes Individuum reproduziert sich mit der konstanten Rate $\frac{\gamma}{2}$ für $\gamma > 0$.
- Die Individuen mit Fitnessvorteil reproduzieren sich zusätzlich mit der Rate s_N , also mit Gesamtrate $\frac{\gamma}{2} + s_N$.

Dabei sei $(s_N)_{N \geq 1}$ eine Folge mit

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Das Moran-Modell lässt sich nach [KN] folgendermaßen darstellen.

Bemerkung 1.1 ([KN, S.213]). Für jedes Paar $(x, y) \in \{1, 2, \dots, N\}^2$ mit $x \neq y$ betrachtet man einen Poisson'schen Punktprozess auf \mathbb{R} mit Rate $\frac{1}{N} (\frac{\gamma}{2} + s_N)$. Dabei bezeichne $\{W_n^{x,y} : n \geq 1\}$ die Punkte des jeweiligen Poisson-Prozesses. Sei $\{V_n^{x,y} : n \geq 1\}$ eine Folge von unabhängigen uniform auf $[0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen. Zu den Zeiten $W_n^{x,y}$ wird ein Pfeil von x nach y gezeichnet. Falls $V_n^{x,y} < \frac{\gamma}{2} (\frac{\gamma}{2} + s_N)^{-1}$, wird der zugehörige Pfeil als neutraler Pfeil bezeichnet. Ansonsten wird er selektiver Pfeil genannt. Das heißt, dass ein Individuum y von neutralen Pfeilen mit Rate $\frac{\gamma}{2}$ und von selektiven Pfeilen mit Rate s_N getroffen wird. Verfolgt man eine Linie vom bevorzugten Typ in die Zukunft, dann steht ein ausgehender Pfeil für eine Geburt eines neuen Individuums des selben Typs. Das getroffene Individuum stirbt und wird durch das neue Individuum ersetzt. Falls die verfolgte Linie dagegen vom gewöhnlichen Typ ist, geschieht das nur bei ausgehenden neutralen Pfeilen.

Die Konstruktion ist so gewählt, dass die verwendeten Poisson-Prozesse unabhängig von der Typenkonfiguration sind.

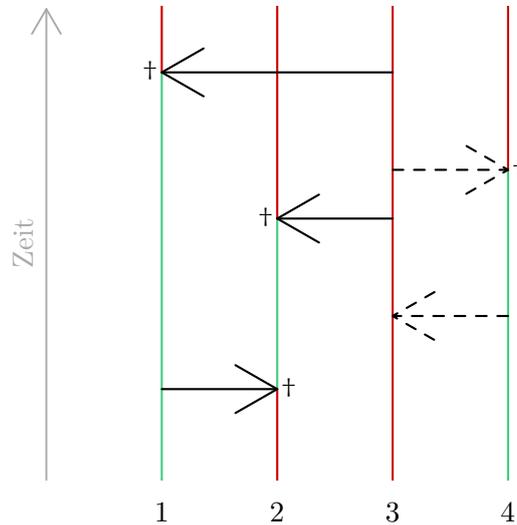


Abbildung 1.1: Gewöhnliche Individuen sind grün gefärbt und bevorzugte Individuen sind rot gefärbt. Gestrichelte Pfeile stellen selektive Pfeile dar und die durchgezogenen Pfeile sind neutrale Pfeile. Der unterste Pfeil ist damit ein neutraler Pfeil ausgehend vom Individuum 1 und trifft das Individuum 2, das zu diesem Zeitpunkt den bevorzugten Typ hat. Das Individuum 2 stirbt und wird durch ein Individuum des gewöhnlichen Typs ersetzt. Der Pfeil, der von Linie 4 zu 3 zeigt, ist ein selektiver Pfeil. Da das Individuum 4 aber den gewöhnlichen Typ hat, wird der Pfeil nicht verfolgt.

Definition 1.2 (vgl. [KN, S.211]). Sei $(Z_t^N)_{t \geq 0}$ der Zählprozess, der die Anzahl der gewöhnlichen Individuen zur Zeit t zählt. Für $k = 0, 1, \dots, N$ hat er die Übergangsraten:

$$r(k, k + 1) = \frac{\gamma}{2} k \frac{N-k}{N} \quad \text{und} \\ r(k, k - 1) = \left(\frac{\gamma}{2} + s_N\right) k \frac{N-k}{N} \quad \text{für } 1 \leq k \leq N.$$

In der obigen Abbildung betrachteten wir die Anzahl der gewöhnlichen Individuen vorwärts in der Zeit und die Anfangskonfiguration war bekannt. Anstatt das Vorwärtbild zu betrachten, kann man auch die Ahnenlinien der Individuen rückwärts in der Zeit betrachten und die Vorfahren von endlichen Stichproben einer Population bei unbekannter Anfangskonfiguration untersuchen. Für das Moran-Modell ohne Selektion ($s_N = 0$) kann die zeitskalierte Genealogie einer endlichen Stichprobe der Größe n für $N \rightarrow \infty$ durch den Kingman-Koaleszenten beschrieben werden, der 1982 von Kingman eingeführt

wurde (siehe [Kin]). Krone und Neuhauser konstruierten dazu analog den ancestralen Selektionsgraphen im Moran-Modell mit Selektion.

Definition 1.3 ([BGPW, Abschnitt 2.4]). Sei $(B_t^N)_{t \geq 0}$ der Zählprozess, der die potentiellen Ahnen einer Stichprobe zur Zeit t zählt. Er entsteht aus dem Moran-Graphen indem man die Ahnenlinien zurückverfolgt. Neutrale Pfeile werden von der Spitze zum Schaft begangen. Dabei kommt es gegebenenfalls zu Verschmelzungen der verbliebenen Ahnenlinien. Bei selektiven Pfeilen werden hereinkommende und weiterführende Linien als potentielle Ahnenlinien verfolgt. Das kann zu einer Verzweigung einer verbliebenen Linie führen. $(B_t^N)_{t \geq 0}$ wird Moran ancestral selection process (MASP) genannt.

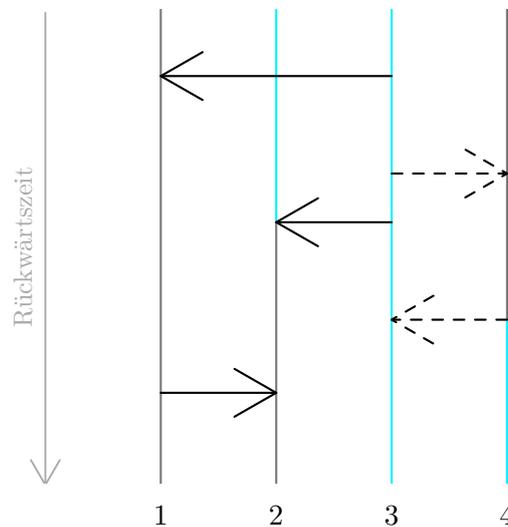


Abbildung 1.2: Die blau gefärbten Ahnenlinien werden zurückverfolgt. Zunächst werden die Linien 2 und 3 verfolgt. Dann wird die Ahnenlinie 2 von einem neutralen Pfeil getroffen und verschmilzt im Zuge dessen mit der Ahnenlinie 3. Linie 3 wird anschließend von einem selektiven Pfeil getroffen. Da die Typenkonfiguration unbekannt ist, müssen an dieser Stelle beide Ahnenlinie weiterverfolgt werden.

Damit ist der MASP $(B_t^N)_{t \geq 0}$ ein Markov-Sprungprozess mit Raten

$$r(k, k + 1) = k s_N \frac{N-k}{N} \quad \text{und}$$

$$r(k, k - 1) = \frac{\gamma}{N} \binom{k}{2}$$

für $k \in [N] := \{1, 2, \dots, N\}$.

Bemerkung 1.4 ([BGPW, Abschnitt 2.4]). Zwischen $(B_r^N)_{r \geq 0}$ und $(Z_t^N)_{t \geq 0}$ besteht eine starke pfadweise Dualität. Aus der graphischen Darstellung folgt, dass eine Stichprobe $\mathcal{J} \subset [N]$ genau dann nur aus gewöhnlichen Individuen besteht, wenn alle potentiellen Vorfahren der gezogenen Individuen gewöhnlich sind.

Proposition 1.5. *Die Gleichgewichtsverteilung des MASP's entspricht der Binomialverteilung mit Parametern N und $p_N = \frac{2s_N}{2s_N + \gamma}$ bedingt darauf größer 0 zu sein.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass die Reversibilitätsbedingung

$$\pi(k)r(k, k+1) = \pi(k+1)r(k+1, k) \quad (1.1)$$

für $k \in [N]$ erfüllt ist.

Sei $X \sim \text{Binomial}\left(N, \frac{2s_N}{2s_N + \gamma}\right)$. Dann folgt für $k \in [N]$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k | X > 0) &= \frac{\mathbb{P}(X > 0 | X = k) \mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X > 0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X > 0)} \\ &= \frac{\binom{N}{k} p_N^k (1 - p_N)^{N-k}}{1 - (1 - p_N)^N}. \end{aligned}$$

Wir setzen in die rechte Seite von (1.1) $\pi(k+1) = \mathbb{P}(X = k+1 | X > 0)$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k+1 | X > 0) r(k+1, k) &= \frac{\binom{N}{k+1} p_N^{k+1} (1 - p_N)^{N-k-1}}{1 - (1 - p_N)^N} \frac{\gamma}{N} \binom{k+1}{2} \\ &= \frac{\binom{N}{k} p_N^k (1 - p_N)^{N-k}}{1 - (1 - p_N)^N} \frac{N-k}{k+1} p_N (1 - p_N)^{-1} \frac{\gamma}{N} \frac{(k+1)k}{2} \\ &= \mathbb{P}(X = k | X > 0) k \frac{N-k}{N} \frac{2s_N}{2s_N + \gamma} \left(1 - \frac{2s_N}{2s_N + \gamma}\right)^{-1} \frac{\gamma}{2} \\ &= \mathbb{P}(X = k | X > 0) k s_N \frac{N-k}{N} \frac{1}{2s_N + \gamma} \left(\frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right)^{-1} \gamma \\ &= \mathbb{P}(X = k | X > 0) k s_N \frac{N-k}{N} \\ &= \mathbb{P}(X = k | X > 0) r(k, k+1). \end{aligned}$$

Das heißt $\pi(k) = \mathbb{P}(X = k | X > 0)$ erfüllt die Reversibilitätsbedingung und damit folgt die Behauptung, da die Gleichgewichtsverteilung eindeutig ist. \square

1.2 Funktionaler Grenzwertsatz für den Moran-ASP

Kommen wir nun zum ersten funktionalen Grenzwertsatz, der in dieser Arbeit bewiesen wird.

Sei $(B_t^N)_{t \geq 0}$ der im vorherigen Abschnitt eingeführte MASP. Wir betrachten den skalierten Prozess \tilde{B}^N :

$$\tilde{B}^N = \left(\tilde{B}_t^N \right)_{0 \leq t \leq T} = \left(\frac{B_{s_N^{-1}t}^N - \mu_N}{\sigma_N} \right)_{0 \leq t \leq T} \quad \text{für } T > 0 \quad (1.2)$$

mit

$$\mu_N = \frac{2s_N}{2s_N + \gamma} N \quad \text{und} \quad (1.3)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{2s_N}{2s_N + \gamma} \left(1 - \frac{2s_N}{2s_N + \gamma} \right) N. \quad (1.4)$$

Es gelte weiterhin

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta} \quad \text{für ein } \eta \in (0, \frac{1}{2}).$$

Wir zeigen, dass dieser Prozess im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ gegen einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess konvergiert. Wir stellen zunächst den Satz für das Moran-Modell vor.

Theorem 1. *Sei $Y = (Y_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (also eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (1.10)) mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$, sowie $Y_0 \stackrel{d}{=} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Konvergiere \tilde{B}_0^N in Verteilung gegen μ . Dann gilt für jedes $T > 0$*

$$\tilde{B}^N \xrightarrow{d} Y \quad \text{für } N \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, T]).$$

Dabei sei $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, T])$ für $T > 0$ der Raum der càdlàg Funktionen, die von $[0, T]$ nach \mathbb{R} abbilden.

Der Beweis des Theorems beruht auf einem Satz aus [Ker]. Dazu werfen wir in Abschnitt 1.3 einen Blick auf Martingalprobleme und Generatoren.

Bei der Definition von \tilde{B}^N wurden μ_N und σ_N gemäß (1.3) und (1.4) gewählt, da nach Proposition 1.5 die Gleichgewichtsverteilung des MASP der Binomialverteilung mit Parametern N und $p_N = \frac{2s_N}{2s_N + \gamma}$, bedingt darauf größer als 0 zu sein, entspricht.

Für den Fall $N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta}$ für $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ verwenden wir dann auch die Notation

$$s_N = N^{-b_N} \quad \text{mit} \quad \eta \leq b_N \leq 1 - \eta,$$

wobei wir das Subskript N bei b_N aus Gründen der Übersichtlichkeit weglassen. Es gilt

$$p_N = \frac{2N^{-b}}{2N^{-b} + \gamma} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und}$$

$$\mu_N = \frac{2N^{1-b}}{2N^{-b} + \gamma} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Da Np_N divergiert, kann die Poissonapproximation hier nicht angewendet werden.

Für $s_N = s$ mit $s \in (0, \infty)$ gilt

$$p_N = \frac{2s}{2s + \gamma} \quad \text{und}$$

$$\mu_N = \frac{2s}{2s + \gamma} N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty.$$

Für $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $\alpha \in (0, \infty)$ erhalten wir

$$p_N = \frac{2\alpha}{2\alpha + \gamma N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und}$$

$$\mu_N = \frac{2\alpha}{\frac{2\alpha}{N} + \gamma} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{2\alpha}{\gamma}.$$

Damit konvergiert die Binomialverteilung mit Parametern N und $p_N = \frac{2\alpha}{2\alpha + \gamma N}$ gegen die Poissonverteilung mit Parameter $\frac{2\alpha}{\gamma}$. Bei moderater und starker Selektion divergiert μ_N und bei schwacher Selektion bleibt μ_N beschränkt.

In Abschnitt 2.5 beweisen wir das folgende Korollar für den Fall der starken Selektion.

Korollar 1.6. *Die Gültigkeit von Theorem 1 bleibt für $s_N = s$ mit $s \in (0, \infty)$ bestehen.*

Für den Fall der schwachen Selektion ($s_N = \frac{\alpha}{N}$) führen wir einen weiteren Prozess ein. Sei $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ der Linienzählprozess aus [PP] mit Wertebereich \mathbb{N} und Sprungraten

$$r(k, k + 1) = \alpha k \quad \text{und}$$

$$r(k, k - 1) = \gamma \binom{k}{2}$$

für $k \in \mathbb{N}$. Nach [PP] ist die Gleichgewichtsverteilung von K gegeben durch die Poissonverteilung mit Parameter $\frac{2\alpha}{\gamma}$ bedingt darauf größer als 0 zu sein.

In Abschnitt 2.6 führen wir den Beweis des folgenden Korollars.

Korollar 1.7. *Sei $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $\alpha \in (0, \infty)$ und sei $Z_0 \stackrel{d}{=} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Konvergiere B_0^N in Verteilung gegen μ . Dann gilt*

$$\left(B_{Nt}^N \right)_{0 \leq t \leq T} \xrightarrow{d} (Z_t)_{0 \leq t \leq T} \quad \text{für } N \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{D}_{\mathbb{N}}([0, T]).$$

1.3 Martingalprobleme und Generatoren

In diesem Abschnitt führen wir zunächst Generatoren und Martingalprobleme ein, um anschließend einen Satz aus [Ker] vorzustellen. Diesen Satz verwenden wir, um Theorem 1 und Korollar 1.7 zu beweisen.

Sei S ein separabler metrischer Raum. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_b(S)$ den Raum der messbaren beschränkten Funktionen von S nach \mathbb{R} und mit $\mathcal{C}_b(S)$ den Raum der stetigen beschränkten Funktionen.

Sei Y ein S -wertiger Markovprozess. Für $f \in \mathcal{M}_b(S)$ definieren wir für $y \in S$

$$P^t f(y) := (P^t f)(y) = \mathbb{E}_y[f(Y_t)].$$

$(P^t)_{t \geq 0}$ wird die zu Y gehörige Halbgruppe genannt ([Ker, S.46]).

Definition 1.8 ([KW, S.139]). Sei $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration und Y ein \mathbf{F} -Markovprozess mit Übergangshalbgruppe (P^t) und Werten im metrischen Raum S . Dann heißt Y Fellerprozess, falls für jede stetige, beschränkte Funktion $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ auch $P^t g$ stetig ist für alle $t \geq 0$.

Definition 1.9 ([KW, S.141]). Der Generator (infinitesimale Erzeuger) der Halbgruppe $P = (P^t)_{t \geq 0}$ eines Fellerprozesses ist der lineare Operator $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_b(S)$ mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in \mathcal{C}_b(S) : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P^t f - f) \text{ existiert im Sinne der punktweisen, beschränkten Konvergenz} \right\}$$

und Werten

$$Gf(y) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (P^t f(y) - f(y))$$

für $y \in S$.

Dabei sagen wir, dass g_t für $t \rightarrow 0$ punktweise beschränkt gegen g konvergiert, falls ein $c > 0$ existiert, so dass $|g_t(y)| \leq c$ und $g_t(y) \rightarrow g(y)$ für alle y .

Definition 1.10 ([Ker, S.27]). Sei S ein separabler metrischer Raum.

i.) Sei Y ein stochastischer Prozess mit Pfaden in $\mathcal{D}_S[0, \infty)$ und \mathbb{P} ein W -Maß (beides auf einem gemeinsamen Ereignisfeld). Man sagt, dass (Y, \mathbb{P}) das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) löst, falls für alle $f \in \mathcal{D}$

$$f(Y_t) - \int_0^t Gf(Y_s) ds, \quad t \geq 0$$

(unter \mathbb{P}) ein Martingal bezüglich der von Y induzierten Filtrierung ist.

- ii.) Ein Martingalproblem (G, \mathcal{D}) heißt *eindeutig*, wenn für je zwei Lösungen (Y, \mathbb{P}) und $(\tilde{Y}, \tilde{\mathbb{P}})$ mit $Y_0 \stackrel{d}{=} \tilde{Y}_0$ gilt: $Y \stackrel{d}{=} \tilde{Y}$.
- iii.) Ein Martingalproblem (G, \mathcal{D}) heißt *wohlgestellt*, falls es *eindeutig* ist und für jedes W -Maß $\mu \in \mathcal{P}(S)$ eine Lösung mit Anfangsverteilung μ existiert.

Damit können wir den folgenden Satz vorstellen mit dem wir Theorem 1 in Kapitel 2 beweisen.

Satz 1.11 ([Ker, Satz 2.8, Bemerkung S.40]). *Sei S vollständig und sei $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_b(S)$ linear. Für $N \in \mathbb{N}$ seien $S_N \subset S$ Borelmengen, $\mathcal{D}_N := \{f|_{S_N} : f \in \mathcal{D}\}$, $G_N : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathcal{M}_b(S_N)$ linear und (Y^N, \mathbb{P}^N) seien Lösungen der Martingalprobleme (G_N, \mathcal{D}_N) . Es gelte mit $f_N := f|_{S_N}$:*

- i.) Das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) ist *eindeutig*,
- ii.) $\mathcal{D}(K)$ ist *dicht* in $\mathcal{C}_b(K)$ für alle kompakten $K \subset (S)$ mit $\mathcal{D}(K) := \{f|_K : f \in \mathcal{D}\}$,
- iii.) $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_N \cap K} |Gf(y) - G_N f_N(y)| = 0$ für alle kompakten $K \subset S$ und $f \in \mathcal{D}$,
- iv.) für alle $\varepsilon, t > 0$ existiere ein kompaktes $K \subset S$, so dass für alle N

$$\mathbb{P}^N \left(Y_s^N \in K \text{ für alle } s \leq t \right) \geq 1 - \varepsilon. \quad (1.5)$$

Konvergiert Y_0^N in Verteilung gegen ein $\mu \in \mathcal{P}(S)$, so konvergiert (Y^N, \mathbb{P}^N) in Verteilung gegen eine Lösung (Y, \mathbb{P}) des Martingalproblems (G, \mathcal{D}) mit Anfangsverteilung μ .

Insbesondere reicht es bei diesem Theorem aus, dass die Compact Containment Condition (1.5) erfüllt ist anstatt der üblichen Forderung nach Straffheit.

1.4 Cannings-Modelle nach [BGPW]

Bevor wir den zweiten funktionalen Grenzwertsatz vorstellen, führen wir zunächst ein weiteres Modell ein. Eine Verallgemeinerung des Wright-Fisher-Modells wurde von Cannings eingeführt (siehe [Can]). Es wird wieder eine Population mit konstanter Größe N betrachtet, diesmal mit diskreten nicht überlappenden Generationen. Nach [Ewe, Abschnitt 3.3] sind die Kinderzahlvektoren $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$ mit $\nu_i \in \mathbb{N}_0$ für $i = 1, \dots, N$ und $\sum_{i=1}^N \nu_i = N$ austauschbar. Das heißt für alle Permutationen $\pi \in S_N$ gilt: $\mathcal{L}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N) = \mathcal{L}(\nu_{\pi(1)}, \nu_{\pi(2)}, \dots, \nu_{\pi(N)})$. Insbesondere folgt damit, dass alle ν_i Erwartungswert 1 haben.

Der folgende Teil dieses Abschnitts beruht auf [BGPW]. Wir schränken uns auf die Teilklasse der Cannings-Modelle ein, deren Nachkommensverteilung ν austauschbar gemischt multinomialverteilt ist. Dabei ist \mathscr{W} multinomialverteilt mit Parametern N

und \mathscr{W} . Der Gewichtsvektor $\mathscr{W} = (W_1, W_2, \dots, W_N)$ ist ein austauschbares zufälliges N -Tupel mit Wertebereich

$$\Delta_N = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 1 \right\}.$$

Im Wright-Fisher-Modell gilt $\mathscr{W} = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N}\right)$ mit Wahrscheinlichkeit 1.

Auf Grund dieser Einschränkung lassen sich die Beziehungen zwischen den Generationen folgendermaßen graphisch darstellen. Alle Individuen einer Generation werden nummeriert mit $1, \dots, N$. Dazu bezeichnen wir mit (i, g) das Individuum $i \in [N]$ in Generation g . Seien nun $\mathscr{W}^{(g)}, g \in \mathbb{Z}$ unabhängig und identisch verteilte Kopien von \mathscr{W} . Jedem Individuum (j, g) wird seine Mutter $(V_{(j,g)}, g-1)$ aus der Generation $g-1$ zugewürfelt gemäß der Zufallsvariable $V_{(j,g)}$ mit

$$\mathbb{P}\left(V_{(j,g)} = i \mid \mathscr{W}^{(g-1)}\right) = W_i^{(g-1)}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, N\}.$$

Gegeben $\mathscr{W}^{(g-1)}$ seien die Zufallsvariablen $V_{(j,g)}$ unabhängig für alle $g \in \mathbb{Z}$. Auf Grund der Austauschbarkeit von $(W_1^{(g-1)}, \dots, W_N^{(g-1)})$ sind die Zufallsvariablen $V_{(1,g)}, \dots, V_{(N,g)}$ uniform verteilt auf $\{1, 2, \dots, N\}$.

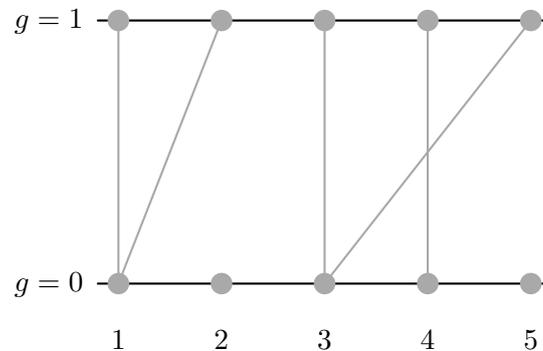


Abbildung 1.3: In diesem Beispiel ist $N = 5$ und der Kinderzahlvektor ist gegeben durch $\nu = (2, 0, 2, 1, 0)$.

Wie im Abschnitt zuvor möchten wir auch hier gerichtete Selektion einführen. Dabei betrachten wir wieder zwei Typen: die selektiv bevorzugten und die gewöhnlichen Individuen. Jedes Individuum erbt den Typ seiner Mutter. Dazu wird das Gewicht W_i der gewöhnlichen Mütter angepasst. Für ein gewöhnliches Individuum (i, g) aus der Müttergeneration reduziert sich das Gewicht zu $\widetilde{W}_i := (1 - s_N)W_i$. Die Gewichte von

bevorzugten Individuen bleiben unverändert: $\widetilde{W}_i := W_i$.

Für die graphische Darstellung wird nun die folgende Konstruktion aus [BGPW] eingeführt.

Zunächst seien $\mathcal{W}^{(g-1)}$ und die Typen der Individuen $(i, g-1)$ aus Generation $g-1$ gegeben. Mit Hilfe von unabhängigen uniform auf dem Einheitsquadrat verteilten Zufallsvariablen wird jedem Individuum (j, g) eine Mutter aus der Generation $g-1$ zugewiesen. Dazu wird das Einheitsquadrat horizontal in N und vertikal in zwei Intervalle unterteilt. Die horizontalen Intervalle sind $[0, 1 - s_N]$ und $(1 - s_N, 1]$. Die vertikalen Intervalle haben die Längen $W_1^{(g-1)}, W_2^{(g-1)}, \dots, W_N^{(g-1)}$. Im Folgenden werden diese Intervalle mit $\mathcal{I}_1^{(g-1)}, \mathcal{I}_2^{(g-1)}, \dots, \mathcal{I}_N^{(g-1)}$ bezeichnet. Sei

$$\mathcal{B}^{(g-1)} := \{i \in [N] : (i, g-1) \text{ ist selektiv bevorzugt}\}$$

und sei

$$\mathcal{C}^{(g-1)} := \{i \in [N] : (i, g-1) \text{ ist gewöhnlich}\}.$$

Dazu definieren wir

$$\Gamma^{(g-1)} := \bigcup_{i \in \mathcal{B}^{(g-1)}} [0, 1] \times \mathcal{I}_i^{(g-1)} \cup \bigcup_{i \in \mathcal{C}^{(g-1)}} [0, 1 - s_N] \times \mathcal{I}_i^{(g-1)}.$$

Für die Zuweisung der Mütter wird die folgende Definition benötigt.

Definition 1.12 ([BGPW, Definition 4.1]). *Sei $U^{(j,g,1)}, U^{(j,g,2)}, \dots$ für $j \in [N]$ und $g \in \mathbb{Z}$ eine Folge von unabhängigen uniform auf $[0, 1] \times [0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen. Es bezeichne*

$$\gamma(j, g) := \min \{l : U^{(j,g,l)} \in \Gamma^{(g-1)}\}.$$

Dann gibt es, gegeben $\mathcal{B}^{(g-1)}, \mathcal{C}^{(g-1)}, \mathcal{W}^{(g-1)}$, fast sicher ein eindeutiges $V_{(j,g)} \in [N]$, so dass $U^{(j,g,\gamma(j,g))} \in [0, 1] \times \mathcal{I}_{V_{(j,g)}}^{(g-1)}$. Das Individuum $(V_{(j,g)}, g-1)$ aus der Müttergeneration wird dann als Mutter von (j, g) definiert.

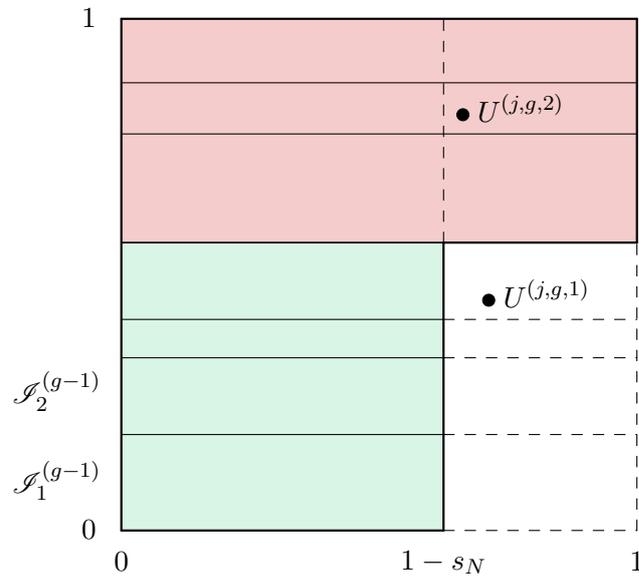


Abbildung 1.4: In diesem Beispiel ist $N = 7$, $\mathcal{C}^{(g-1)} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B}^{(g-1)} = \{5, 6, 7\}$ und $\gamma(j, g) = 2$.

Da (j, g) den Typ seiner Mutter erbt, gilt

$$\{(j, g) \text{ ist gewöhnlich}\} := \{V_{(j,g)} \text{ ist gewöhnlich}\}.$$

Per Konstruktion gilt fast sicher

$$\{V_{(j,g)} \text{ ist gewöhnlich}\} = \left\{ U^{(j,g,\gamma(j,g))} \in [0, 1 - s_N] \times \bigcup_{i \in \mathcal{C}^{(g-1)}} \mathcal{I}_i^{(g-1)} \right\}. \quad (1.6)$$

Damit erhält man iterativ jeweils die Typenkonfiguration der nächsten Generation, in dem wir für $g \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{C}^{(g-1)} := \{j \in [N] : (j, g) \text{ ist gewöhnlich}\}.$$

definieren.

Bisher haben wir angenommen, dass die Typenkonfiguration in der Müttergeneration bekannt ist. Im Moran-Graphen mit Selektion wissen wir beim Zurückverfolgen der Ahnenlinien nicht, ob die selektiven Pfeile verwendet werden dürfen. Für das Cannings-Modell wird nun ebenfalls die Konstruktion erweitert für den Fall, dass die Typenkonfiguration der vorherigen Müttergeneration nicht bekannt ist. Das heißt insbesondere, dass $\mathcal{C}^{(g-1)}$, $\mathcal{B}^{(g-1)}$ und $\Gamma^{(g-1)}$ zuvor nicht bekannt sind. $\mathcal{W}^{(g-1)}$ sei weiterhin bekannt und wir möchten nun die potentiellen Mütter der Individuen aus der Töchtergeneration bestimmen.

Definition 1.13 ([BGPW, Definition 4.3.i]). Wir definieren für festes $j \in [N]$ und $g \in \mathbb{Z}$

$$G(j, g) := \min \left\{ l : U^{(j, g, l)} \in [0, 1 - s_N] \times [0, 1] \right\}.$$

Ein Individuum $(i, g - 1)$ wird potentielle Mutter von (j, g) genannt, falls $U^{(j, g, l)} \in [0, 1] \times \mathcal{I}_i^{(g-1)}$ für $l \leq G(j, g)$. Iteratives Vorgehen führt zur Definition der Menge $\mathcal{A}_m^{(j, g)}$ der Menge der potentiellen Vorfahren von (j, g) in der Generation $g - m$, $m \geq 1$ mit $\mathcal{A}_0^{(j, g)} := \{(j, g)\}$.

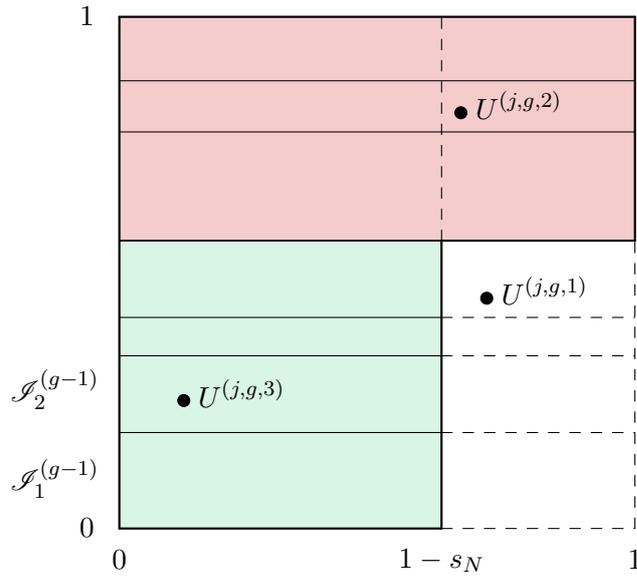


Abbildung 1.5: Wie in der Abbildung zuvor ist $N = 7$, $\mathcal{C}^{(g-1)} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B}^{(g-1)} = \{5, 6, 7\}$ und $\gamma(j, g) = 2$. Ein weiterer Punkt wurde ergänzt. Für ihn gilt, dass $U^{(j, g, 3)} = U^{(j, g, G(j, g))}$. Damit besteht $\mathcal{A}_1^{(j, g)}$ (die Menge der potentiellen Mütter von j) aus $(2, g - 1)$, $(4, g - 1)$ und $(6, g - 1)$.

Definition 1.14 ([BGPW, Definition 4.3.ii]). Seien $j \in [N]$ und $g \in \mathbb{Z}$ fest. Für eine Menge $\mathcal{J} \subset [N]$ und für $m \geq 0$ sei die Menge der potentiellen Vorfahren von $\mathcal{J} \times \{g\}$ in Generation $g - m$ gegeben durch $\mathcal{A}_m^{(\mathcal{J}, g)} := \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{A}_m^{(j, g)}$.

Analog zur Definition des MASPs definieren wir den CASP.

Definition 1.15 ([BGPW, Abschnitt 2.3]). Sei $A^N = (A_m^N)_{m \geq 0}$ der Prozess, der die Anzahl potentieller Vorfahren in Generation $g - m$ einer Stichprobe aus Generation g zählt. Dieser Prozess wird Cannings ancestral selection process (CASP) mit Parametern N , $\mathcal{L}(\mathcal{W})$ und s_N genannt.

Der CASP $(A_m^N)_{m \geq 0}$ ist ein $\{1, \dots, N\}$ -wertiger Markov-Prozess, dessen Übergänge sich aus Verzweigungen und Verschmelzungen zusammensetzen.

- **Verzweigung:** Seien $G^{(l)}$ unabhängige geometrisch verteilte Zufallsvariablen mit Parameter $1 - s_N$. Gegeben $A_m^N = a$ ergibt der Verzweigungsschritt die Summe $H = \sum_{l=1}^a G^{(l)}$. Damit ist H negativ binomialverteilt mit Parametern a und $1 - s_N$ mit Wertebereich $\{a, a + 1, \dots\}$.
- **Verschmelzung:** Zuerst wird ein \mathscr{W} entsprechend der Verteilung $\mathcal{L}(\mathscr{W})$ gewählt. Gegeben \mathscr{W} und H aus dem Verzweigungsschritt, werden H Kugeln unabhängig in N Boxen verteilt, wobei W_i die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine Kugel in Box $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ landet. A_{m+1}^N ist dann verteilt wie die Anzahl der nicht leeren Boxen.

Bemerkung 1.16 ([BGPW, Bemerkung 4.5.i]). Sei $g \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{J} \in [N]$ fest.

$A_m^{(\mathcal{J}, g)} := |\mathcal{A}_m^{(\mathcal{J}, g)}|$ entspricht der Anzahl der potentiellen Vorfahren von $\mathcal{J} \times \{g\}$ in Generation $g - m$. Der Prozess $A_m^{(\mathcal{J}, g)} = |\mathcal{A}_m^{(\mathcal{J}, g)}|$, $m = 0, 1, \dots$ ist ein CASP mit Parametern N , $\mathcal{L}(\mathscr{W})$ und s_N .

1.5 Funktionaler Grenzwertsatz für den Cannings-ASP

Analog zum skalierten MASP stellen wir auch für den skalierten CASP einen funktionalen Grenzwertsatz auf. Mit einer passenden Skalierung und weiteren Annahmen konvergiert auch der skalierte CASP gegen einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit den gleichen Parametern wie der skalierte MASP. Für den Beweis verwenden wir ein Coupling für den MASP und den CASP aus [BGPW]. Dafür werden die folgenden Annahmen benötigt.

Sei $\mathscr{W} = (W_1, W_2, \dots, W_N)$ ein austauschbares zufälliges N -Tupel von Wahrscheinlichkeitsgewichten mit Wertebereich $\Delta_N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \geq 0, \sum_{i=0}^N x_i = 1\}$.

Für $\rho^2 \geq 1$ gelte

$$\mathbb{E}[W_1^2] = \frac{\rho^2}{N^2} + \mathcal{O}(N^{-3}) \quad \text{und} \quad (1.7)$$

$$\mathbb{E}[W_1^3] = \mathcal{O}(N^{-3}). \quad (1.8)$$

Sei $A^N = (A_t^N)_{t \geq 0}$ ein CASP mit Parametern N , $\mathcal{L}(\mathscr{W})$ und s_N . Für die Folge $(s_N)_{N \geq 1}$ gelte

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\frac{2}{3}-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{6}\right). \quad (1.9)$$

Wir betrachten den skalierten Prozess \tilde{A}^N :

$$\tilde{A}^N = (\tilde{A}_t^N)_{0 \leq t \leq T} = \left(\frac{A_{[s_N^{-1}t]}^N - \mu_N}{\sigma_N} \right)_{0 \leq t \leq T} \quad \text{für } T > 0$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2} N \quad \text{und} \\ \sigma_N^2 &= \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2} \left(1 - \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2}\right) N.\end{aligned}$$

Mit dieser Skalierung können wir den folgenden Satz für den CASP aufstellen.

Theorem 2. *Sei $Y = (Y)_{0 \leq t \leq T}$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$, sowie $Y_0 \stackrel{d}{=} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Seien (1.7)-(1.9) erfüllt. Konvergiere \tilde{A}_0^N in Verteilung gegen μ . Dann gilt für jedes $T > 0$*

$$\tilde{A}^N \xrightarrow{d} Y \text{ für } N \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, T]).$$

Wir werden zuerst den Grenzwertsatz für den skalierten MASP beweisen. Für den Beweis von Theorem 2 verwenden wir, dass nach dem folgenden Lemma ein Coupling des CASPs und des MASPs für $N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\frac{2}{3}-\eta}$ mit einem $\eta \in (0, \frac{1}{6})$ existiert.

Lemma 1.17 ([BGPW, Lemma 5.9]). *Sei $0 < \varepsilon < \frac{\eta}{2}$. Dann existiert ein Coupling des MASPs $(B_t^N)_{t \geq 0}$ und des CASPs $(A_t^N)_{t \geq 0}$, so dass für alle gemeinsamen Startwerte k_0 mit $1 \leq k_0 \leq N^{1-b+\varepsilon}$ gilt:*

$$\mathbb{P} \left(|A_t^N - B_t^N| \leq 1, \forall t \in \{0, \dots, N^{b+\varepsilon}\} \right) = 1 - o(1).$$

Dabei ist die Konstante in dem Landau \mathcal{O} uniform in k_0 .

1.6 Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

In beiden Grenzwertsätzen (Theorem 1 und Theorem 2) konvergiert der jeweils betrachtete Prozess in Verteilung gegen einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess. Wir führen ihn in diesem Abschnitt ein.

Definition 1.18 ([KS, Beispiel 6.8]). *Seien $\theta, \sigma > 0$ konstant und sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine standard Brownsche Bewegung. Ein stochastischer Prozess $(Y_t)_{t \geq 0}$, der die stochastische Differentialgleichung*

$$dY_t = -\theta Y_t dt + \sigma dW_t \tag{1.10}$$

löst, heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

Simulation von zwei OU-Prozessen

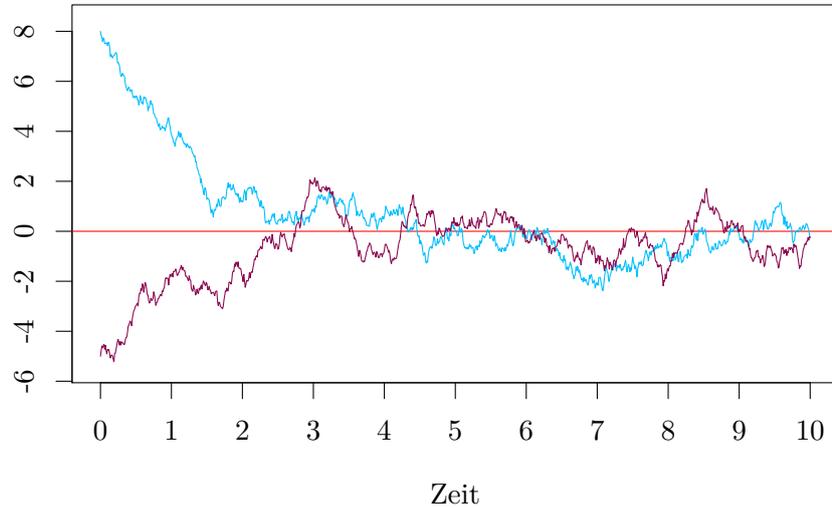


Abbildung 1.6: Die Abbildung zeigt zwei Ornstein-Uhlenbeck-Pfade mit Parametern $\theta = 1$, $\sigma = \sqrt{2}$ und mit Startwert 8 bzw. -5.

Im weiteren Verlauf benötigen wir auch den infinitesimalen Generator des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}_c^k(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}$ den Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

Lemma 1.19. *Der Generator G eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit Parametern $\theta > 0$ und $\sigma > 0$ ist gegeben durch*

$$Gf(x) = -\theta x f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x)$$

mit $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ und sei Y ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit Parametern θ und σ . Mit der Itô-Formel folgt

$$f(Y_t) - f(Y_0) = \int_0^t f'(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(Y_s) d\langle Y_s \rangle. \quad (1.11)$$

Per Definition löst Y die stochastische Differentialgleichung $dY_t = -\theta Y_t dt + \sigma dW_t$. Einsetzen in (1.11) ergibt

$$f(Y_t) - f(Y_0) = \int_0^t \sigma f'(Y_s) dW_s - \int_0^t \theta Y_s f'(Y_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f''(Y_s) ds. \quad (1.12)$$

Insbesondere ist damit

$$f(Y_t) - f(Y_0) + \int_0^t \theta Y_s f'(Y_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f''(Y_s) ds = \int_0^t \sigma f'(Y_s) dW_s$$

ein Martingal mit Erwartungswert 0. Damit folgt

$$\mathbb{E}_x [f(Y_t) - f(Y_0)] = -\mathbb{E} \left[\int_0^t \theta Y_s f'(Y_s) ds \right] + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma^2 f''(Y_s) ds \right].$$

Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz erhalten wir

$$\frac{1}{t} (\mathbb{E}_x [f(Y_t)] - f(x)) \rightarrow -\theta x f'(x) + \frac{\sigma^2}{2} f''(x) \text{ für } t \rightarrow 0.$$

□

Kapitel 2

Moran-Modell: Beweis von Theorem 1

In diesem Kapitel beweisen wir den funktionalen Grenzwertsatz für den skalierten MASP, der in Definition 1.3 eingeführt wurde. Dazu werden zunächst die benötigten Bedingungen für die Anwendung des Satzes 1.11 geprüft. Zuerst wird gezeigt, dass ein Martingalproblem vorliegt und dass dieses eindeutig ist. Danach kommen wir zum Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz des Generators. Anschließend zeigen wir, dass \tilde{B}^N die Compact Containment Condition (1.5) erfüllt. Der Beweis von Theorem 1 wird in Abschnitt 2.4 vervollständigt. In den letzten beiden Abschnitten des Kapitels werden die Fälle $s_N = s$ und $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $s, \alpha \in (0, \infty)$ betrachtet. Wir befinden uns zunächst in dem Fall

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

und verwenden dann auch die Notation: $s_N = N^{-b_N}$ mit $\eta \leq b_N \leq 1 - \eta$, wobei wir das Subskript N aus Gründen der Übersichtlichkeit weglassen.

2.1 Martingalproblem

Wir zeigen zunächst, dass (Y, \mathbb{P}) das Martingalproblem $(G, \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}))$ löst.

Lemma 2.1. *Sei Y ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$. Dann löst (Y, \mathbb{P}) das Martingalproblem $(G, \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}))$ mit $Gf(x) = -xf'(x) + f''(x)$ für $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$.*

Beweis. Sei $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$. Mit (1.12) folgt

$$\begin{aligned} f(Y_t) - f(Y_0) &= \int_0^t \sqrt{2}f'(Y_s)dW_s - \int_0^t Y_s f'(Y_s)ds + \int_0^t f''(Y_s)ds \\ &= \int_0^t \sqrt{2}f'(Y_s)dW_s + \int_0^t Gf(Y_s)ds. \end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$f(Y_t) - \int_0^t Gf(Y_s) ds = f(Y_0) + \int_0^t \sqrt{2}f'(Y_s)dW_s.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht ein Martingal und somit folgt die Behauptung. \square

Als nächstes wird gezeigt, dass dieses Martingalproblem auch eindeutig ist. Analog zu [RWb] betrachten wir dazu die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

mit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und mit einer standard Brownschen Bewegung W . Bei dem folgenden Lemma handelt es sich um ein Resultat von Stroock und Varadhan, dass hier für den eindimensionalen Fall angepasst wurde.

Lemma 2.2 ([RWb, Theorem 24.1, Kapitel 5]). *Angenommen $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar und es gelte*

i.) a ist stetig,

ii.) $a(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und

iii.) es existiert ein $K > 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|a(x)| \leq K(1 + x^2) \text{ und } |b(x)| \leq K(1 + |x|).$$

Dann ist das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) mit Generator

$$Gf(x) = b(x)\frac{df}{dx}(x) + \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2f}{dx^2}(x) \text{ mit } a(\cdot) = \sigma^2(\cdot) \text{ und } f \in \mathcal{D}$$

wohl gestellt.

Damit lässt sich folgendes Korollar zur Eindeutigkeit zeigen.

Korollar 2.3. *Das Martingalproblem $(G, \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}))$ mit Generator $Gf(x) = -xf'(x) + f''(x)$ besitzt eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Für $b(x) = -x$, $\sigma(x) = \sqrt{2}$ und $a(x) = 2$ stimmt der Generator mit dem aus Lemma 2.2 überein. Die Funktionen a und b sind messbar und a erfüllt offensichtlich die Bedingungen i.) und ii.) aus Lemma 2.2. Mit $K = 2$ ist auch die Bedingung iii.) für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, denn

$$|a(x)| = 2 \leq 2(1 + x^2) \text{ und } |b(x)| = |-x| \leq 2(1 + |x|).$$

Somit folgt aus Lemma 2.2, dass das Martingalproblem wohl gestellt ist und damit insbesondere eindeutig ist. \square

Nun zeigen wir, dass auch $(\tilde{B}^N, \mathbb{P}^N)$ Lösungen der Martingalprobleme $(\tilde{G}_N, \mathcal{D}_N)$ sind mit $S_N := \left\{ \frac{1-\mu_N}{\sigma_N}, \frac{2-\mu_N}{\sigma_N}, \dots, \frac{N-\mu_N}{\sigma_N} \right\}$ und $\mathcal{D}_N = \left\{ f|_{S_N} : f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}) \right\}$. Dazu wird zunächst der Generator \tilde{G}_N bestimmt.

Die Raten des MASPs $(B_t^N)_{t \geq 0}$ für $k \in [N]$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} r(k, k+1) &= k s_N \frac{N-k}{N} \quad \text{und} \\ r(k, k-1) &= \frac{\gamma}{N} \binom{k}{2}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Raten von

$$\left(\tilde{B}_t^N \right)_{0 \leq t \leq T} = \left(\frac{B_{s_N^{-1}t}^N - \mu_N}{\sigma_N} \right)_{0 \leq t \leq T}$$

für $x \in S_N$ als

$$\begin{aligned} \tilde{r}\left(x, x + \frac{1}{\sigma_N}\right) &= (x\sigma_N + \mu_N) \frac{N - (x\sigma_N + \mu_N)}{N} \quad \text{und} \\ \tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) &= \frac{\gamma}{s_N N} \binom{x\sigma_N + \mu_N}{2}. \end{aligned}$$

Mit diesen Raten lässt sich der Generator bestimmen.

Lemma 2.4. *Der Generator von \tilde{B}^N ist für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ gegeben durch*

$$\tilde{G}_N f(x) = \tilde{r}\left(x, x + \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x + \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right) + \tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x - \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right)$$

für $x \in S_N$.

Beweis. Per Definition gilt für $x \in S_N$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[f(\tilde{B}_t^N) - f(x) \right] &= t \tilde{r}\left(x, x + \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x + \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right) \\ &\quad + t \tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x - \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right) + o(t) \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x \left[f(\tilde{B}_t^N) - f(x) \right]}{t} \\ &= \tilde{r}\left(x, x + \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x + \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right) + \tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f\left(x - \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x) \right). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5. $(\tilde{B}^N, \mathbb{P}^N)$ löst das Martingalproblem $(\tilde{G}_N, \mathcal{D}_N)$.

Beweis. Mit [KW, Satz 5.5] folgt, dass für alle $x \in S_N$

$$f(\tilde{B}_t^N) - f(x) - \int_0^t \tilde{G}_N f(\tilde{B}_s^N) ds$$

mit $f \in \mathcal{D}_N$ ein Martingal ist. Damit löst $(\tilde{B}^N, \mathbb{P}^N)$ das Martingalproblem $(\tilde{G}_N, \mathcal{D}_N)$. □

2.2 Konvergenz der Generatorenfolge

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass die gleichmäßige Konvergenz des Generators innerhalb kompakter Intervalle $K \subset \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Proposition 2.6. Sei $\tilde{G}_N : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathcal{M}_b(S_N)$ der Generator von \tilde{B}^N und sei $G : \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ der Generator eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Y mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ und alle kompakten $K \subset \mathbb{R}$ mit $f := f|_{S_N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \tilde{G}_N f_N(x_N) - Gf(x_N) \right| = 0.$$

Beweis. Der Generator \tilde{G}_N ist gemäß Lemma 1.19 gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{G}_N f(x_N) &= \tilde{r}\left(x_N, x_N + \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f_N\left(x_N + \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x_N)\right) \\ &\quad + \tilde{r}\left(x_N, x_N - \frac{1}{\sigma_N}\right) \left(f_N\left(x_N - \frac{1}{\sigma_N}\right) - f(x_N)\right). \end{aligned}$$

Wir formen zunächst die beiden Raten um, die in Abschnitt 2.1 bestimmt wurden

$$\begin{aligned} \tilde{r}\left(x_N, x_N + \frac{1}{\sigma_N}\right) &= (x_N \sigma_N + \mu_N) \frac{N - (x_N \sigma_N + \mu_N)}{N} \\ &= x_N \sigma_N + \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma_N \mu_N}{N}\right). \end{aligned}$$

Mit $\mu_N = \frac{2s_N}{2s_N + \gamma} N$ und weiteren Umformungen folgt für die andere Rate

$$\begin{aligned} \tilde{r}\left(x_N, x_N - \frac{1}{\sigma_N}\right) &= \frac{\gamma}{s_N N} \binom{x_N \sigma_N + \mu_N}{2} \\ &= \frac{\gamma}{2s_N N} \left(2x_N \sigma_N \mu_N + \mu_N^2 + \mathcal{O}(\mu_N)\right) \\ &= \frac{\gamma}{2s_N N} \mu_N (2x_N \sigma_N + \mu_N + \mathcal{O}(1)) \\ &= \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma} x_N \sigma_N + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma} \mu_N + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von jeweils einer Taylorentwicklung zweiter Ordnung erhalten wir

$$f_N\left(x_N + \frac{1}{\sigma_N}\right) - f_N(x_N) = \frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right) \quad \text{und}$$

$$f_N\left(x_N - \frac{1}{\sigma_N}\right) - f_N(x_N) = -\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right).$$

Somit lässt sich \tilde{G}_N folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \tilde{G}_N f_N(x_N) &= \left(x_N \sigma_N + \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma_N \mu_N}{N}\right)\right) \left(\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right)\right) \\ &\quad + \left(\frac{2\gamma}{2s_N + \gamma} x_N \sigma_N + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma} \mu_N + \mathcal{O}(1)\right) \left(-\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) \underbrace{\left(\left(1 - \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N}\right)}_{(I)} \\ &\quad + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) \underbrace{\left(\left(1 + \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N}\right)}_{(II)} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N}{N}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Umformungen von (I) ergeben

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} &= \frac{2s_N - \gamma}{2s_N + \gamma} x_N \sigma_N + \frac{\mu_N^2}{N} - \frac{\mu_N^2}{N} \\ &= \frac{2s_N - \gamma}{2s_N + \gamma} x_N \sigma_N. \end{aligned}$$

(II) lässt sich vereinfachen zu

$$\left(1 + \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} = \frac{2s_N + 2\gamma}{2s_N + \gamma} \mu_N + \mathcal{O}(\sigma_N) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N^2}{N}\right).$$

Wir setzen nun diese Umformungen in (2.1) ein und erhalten

$$\tilde{G}_N f_N(x_N) = \underbrace{\frac{2s_N - \gamma}{2s_N + \gamma}}_{\rightarrow -1} x_N f'_N(x_N) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2s_N + 2\gamma}{2s_N + \gamma}}_{\rightarrow 2} \underbrace{\frac{\mu_N}{\sigma_N^2}}_{\rightarrow 1} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N}{N}\right).$$

Da K kompakt ist, existiert ein $\lambda > 0$, so dass $K \subset [-\lambda, \lambda]$. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \tilde{G}_N f_N(x_N) - Gf(x_N) \right| \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \left(\frac{2s_N - \gamma}{2s_N + \gamma} + 1\right) x_N f'(x_N) + \left(\frac{1}{2} \frac{2s_N + 2\gamma}{2s_N + \gamma} \frac{\mu_N}{\sigma_N^2} - 1\right) f''(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N}{N}\right) \right| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap [-\lambda, \lambda]} \left| \frac{2s_N - \gamma}{2s_N + \gamma} + 1 \right| \lambda c_1 + \left| \frac{1}{2} \frac{2s_N + 2\gamma}{2s_N + \gamma} \frac{\mu_N}{\sigma_N^2} - 1 \right| c_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N}{N}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit $c_1, c_2 > 0$. □

An dieser Stelle ist es wichtig zu bemerken, dass in (2.2) $b \in (0, 1)$ verwendet wurde. Im Gegensatz zum Fall $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $\alpha \in (0, \infty)$ konvergiert der Generator \tilde{G}_N zwar mit $s_N = s$ mit $s \in (0, \infty)$ gegen den gleichen Grenzwert, der Beweis benötigt aber Anpassungen (siehe Proposition 2.12).

2.3 Compact Containment Condition

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass die Compact Containment Condition (1.5) erfüllt ist.

Proposition 2.7. *Es gelte $\mathbb{P}_{\tilde{B}_0^N} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_{Y_0}$. Für alle $\varepsilon', T > 0$ gibt es ein kompaktes $K \subset \mathbb{R}$, so dass für alle $N \geq 1$*

$$\mathbb{P}\left(\tilde{B}_t^N \in K \text{ für alle } t \leq T\right) \geq 1 - \varepsilon'$$

gilt.

Um diese Proposition zu beweisen, werden wir zunächst zwei weitere Lemmata aufstellen. Sei $T > 0$. Für den Beweis suchen wir ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die Ungleichung für $K = [-\lambda, \lambda]$ erfüllt ist. Per Definition von \tilde{B}^N gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tilde{B}_t^N \notin [-\lambda, \lambda] \forall t \leq T\right) &= \mathbb{P}\left(B_{tN^b}^N \notin [\mu_N - \lambda\sigma_N, \mu_N + \lambda\sigma_N] \forall t \leq T\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |B_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right). \end{aligned}$$

Die Idee besteht daraus diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe eines Prozesses mit symmetrischen Sprungraten nach oben abzuschätzen. Für diesen Prozess lässt sich dann leicht eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sprünge im Intervall $[0, TN^b]$ größer als ein $m \in \mathbb{N}$ sind, bestimmen. Betrachtet man diesen Prozess anschließend nur an den Sprungzeitpunkten, so lässt er sich als die symmetrische Irrfahrt auf \mathbb{Z} auffassen.

Dazu wird ein weiterer Prozess $\hat{B}^N = \left(\hat{B}_t^N\right)_{0 \leq t \leq T}$ mit $\hat{B}_0^N \stackrel{d}{=} B_0^N$ definiert.

Die Sprungrate von \hat{B}^N soll in jedem Punkt in $[\mu_N - \lambda\sigma_N, \mu_N + \lambda\sigma_N]$ mindestens so hoch wie die Sprungrate von B^N sein. \hat{B}^N soll keinen Drift zur Mitte haben. Dazu maximieren wir für $k \in [N] \cap [\mu_N - \lambda\sigma_N, \mu_N + \lambda\sigma_N]$

$$\begin{aligned} r(k, k+1) + r(k, k-1) &= \left(s_N k \frac{N-k}{k} + \frac{\gamma}{N} \binom{k}{2}\right) \\ &= \left(s_N - \frac{\gamma}{2N}\right) k + \left(-s_N + \frac{\gamma}{2N}\right) k^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Für N groß genug entspricht (2.3), aufgefasst als Funktion in k , einer nach oben geöffneten

Parabel. Das Minimum wird dabei für $k < 0$ angenommen.

Dementsprechend wird die Summe der Raten maximal für $k \in [\mu_N - \lambda\sigma_N, \mu_N + \lambda\sigma_N]$ in $k = \mu_N + \lambda\sigma_N$.

Deshalb setzen wir die Raten von \hat{B}^N für $k \in [N]$ als

$$\begin{aligned}\hat{r}(k, k+1) &= \hat{r}(k, k-1) \\ &= \frac{1}{2}s_N(\mu_N + \lambda\sigma_N)\frac{N-\mu_N-\lambda\sigma_N}{N} + \frac{\gamma}{4N}(\mu_N + \lambda\sigma_N)(\mu_N + \lambda\sigma_N - 1).\end{aligned}$$

Dieser Prozess wird verwendet, um

$$\mathbb{P}\left(\tilde{B}_t^N \notin [-\lambda, \lambda] \forall t \leq T\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |B_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right)$$

nach oben abzuschätzen.

Per Konstruktion ist die Sprungrate von \hat{B}^N in jedem Punkt mindestens so groß wie die Sprungrate von B^N und \hat{B}^N hat im Gegensatz zu B^N keinen Drift zur Mitte. Damit folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |B_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |\hat{B}_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right).$$

Mit Hilfe des Ereignisses

$$J_{N,m} := \left\{ \text{Anzahl der Sprünge von } \hat{B}^N \text{ in } [0, TN^b] \leq m \right\},$$

können wir die obige Wahrscheinlichkeit weiter abschätzen

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |\hat{B}_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |\hat{B}_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N \mid J_{N,m}\right) + \mathbb{P}\left(J_{N,m}^c\right).\end{aligned}\tag{2.4}$$

In $\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |\hat{B}_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N \mid J_{N,m}\right)$ wird darauf bedingt, dass \hat{B}^N im Intervall $[0, TN^b]$ maximal m Sprünge hat. Wir können diese Wahrscheinlichkeit nach oben abschätzen indem wir den Prozess nur an den ersten m Sprungstellen betrachten. Sei nun τ_i der Zeitpunkt des i -ten Sprungs von \hat{B} für $i \in \mathbb{N}$. Damit gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0, TN^b]} |\hat{B}_t^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N \mid J_{N,m}\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\hat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda\sigma_N\right).\tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) folgt

$$\mathbb{P}\left(\widetilde{B}_t^N \notin [-\lambda, \lambda] \forall t \leq T\right) \leq \underbrace{\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\widehat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N\right)}_{(I)} + \underbrace{\mathbb{P}\left(J_{N,m}^c\right)}_{(II)}. \quad (2.6)$$

Im Folgenden werden (I) und (II) mit Hilfe von zwei Lemmata jeweils einzeln abgeschätzt. Wir beginnen mit (II) und damit der Wahrscheinlichkeit, dass mehr als m Sprünge im Intervall $[0, TN^b]$ stattfinden.

Lemma 2.8. Für N groß genug und $m = \left\lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \right\rceil$ mit $\varepsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(J_{N,m}^c\right) \leq \exp\left(-cTN^{1-b}\right)$$

mit $c = c(\varepsilon) > 0$.

Beweis. Sei $m = \left\lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \right\rceil$ mit $\varepsilon > 0$ und sei $E_i \sim \exp(\beta)$ mit $\beta = \hat{r}(k, k+1) + \hat{r}(k, k-1)$. Es gilt

$$\mathbb{P}\left(J_{N,m}^c\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E_i \leq TN^b\right). \quad (2.7)$$

Um die folgenden Rechnungen zu vereinfachen, wird β zunächst nach oben abgeschätzt.

$$\begin{aligned} \beta &= \hat{r}(k, k+1) + \hat{r}(k, k-1) \\ &= s_N (\mu_N + \lambda \sigma_N) \frac{N - \mu_N - \lambda \sigma_N}{N} + \frac{\gamma}{2N} (\mu_N + \lambda \sigma_N) (\mu_N + \lambda \sigma_N - 1) \\ &= N^{-b} \left(\left(1 + \frac{2\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \lambda \sigma_N + \underbrace{\left(1 + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N}_{\rightarrow 2} - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}\left(\frac{\sigma_N \mu_N}{N}\right) \right) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit wurde bereits in der Rechnung für den Generator im Beweis von Proposition 2.6 gezeigt. Die höchste Ordnung für $N \rightarrow \infty$ hat dabei $N^{-b} \left(1 + \frac{\gamma}{2s_N + \gamma}\right) \mu_N$. Für N groß genug gilt deshalb

$$\beta \leq N^{-b} \frac{4}{\gamma} N^{1-b} (1 + o(1)) = \frac{4}{\gamma} N^{1-2b} (1 + o(1)) \leq \frac{8}{\gamma} N^{1-2b}. \quad (2.8)$$

Sei $E'_i \sim \exp(1)$. Damit ist $\sum_{i=1}^m E'_i \sim \text{Gamma}(m, 1)$.

Mit (2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E_i \leq TN^b\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E'_i \leq \beta TN^b\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E'_i \leq \frac{8}{\gamma} TN^{1-b}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E'_i \leq \frac{8}{8 + \gamma \varepsilon} m\right). \end{aligned}$$

An dieser Stelle sieht man, warum wir $m = \lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \rceil$ gewählt haben. Auf der linken Seite der Ungleichung $\sum_{i=1}^m E'_i \leq \frac{8}{8+\gamma\varepsilon} m$ steht nun eine $\text{Gamma}(m, 1)$ -verteilte Zufallsvariable und auf der rechten Seite steht vor m ein Faktor der kleiner als 1 ist. Somit lässt sich die Chernoff-Schranke (Lemma A.1) für gammaverteilte Zufallsvariablen anwenden.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^m E'_i \leq \frac{8}{8+\gamma\varepsilon} m\right) &\leq \exp\left(-m\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon} - 1 - \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right)\right)\right) \\
 &\leq \exp\left(-\frac{8}{\gamma} TN^{1-b} + \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} + \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\varepsilon TN^{1-b} + \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right)\right) \\
 &= \exp\left(\left(\varepsilon + \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right)\right) TN^{1-b}\right) \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

Sei $c(\varepsilon) := -\varepsilon - \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right)$. Wir zeigen, dass $c(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
 &-\varepsilon - \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{8+\gamma\varepsilon}\right) > 0 \tag{2.10} \\
 \iff &\varepsilon + \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{\gamma}\right) < \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \\
 \iff &\underbrace{\frac{8}{\gamma} \ln\left(\frac{8}{\gamma}\right) + \left(1 + \ln\left(\frac{8}{\gamma}\right)\right) \varepsilon}_{=: h_1(\varepsilon)} < \underbrace{\left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) \ln\left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right)}_{=: h_2(\varepsilon)}.
 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 h_1(0) &= h_2(0), \\
 h'_1(\varepsilon) &= 1 + \ln\left(\frac{8}{\gamma}\right), \\
 h'_2(\varepsilon) &= \frac{8}{8+\gamma\varepsilon} + \ln\left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) + \frac{\gamma\varepsilon}{8+\gamma\varepsilon} = 1 + \ln\left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right).
 \end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ folgt also $h'_1(\varepsilon) < h'_2(\varepsilon)$ und damit auch $h_1(\varepsilon) < h_2(\varepsilon)$, da $h_1(0) = h_2(0)$. Somit ist die Ungleichung (2.10) für alle $\varepsilon > 0$ erfüllt.

Zusammen mit (2.7) und (2.9) folgt die Behauptung. \square

Nun betrachten wir (I) aus (2.6) und leiten eine obere Schranke für

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\widehat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N\right) \text{ her.}$$

Lemma 2.9. *Sei $\delta \in (0, 1)$, $\lambda > 0$ und $\lambda_0 > 0$ mit $\mathbb{P}(\widetilde{B}_0^N \in [-\lambda_0, \lambda_0]) \geq 1 - \delta$ für alle $N \geq 1$. Dann gilt für $\varepsilon > 0$ und $m = \lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \rceil$*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\widehat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N\right) \leq \frac{h(\varepsilon)T + \lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta.$$

mit $h(\varepsilon) > 0$.

Die Hauptidee des Beweises besteht darin den Prozess als eine symmetrische Irrfahrt aufzufassen indem wir ihn nur an den Sprungzeitpunkten betrachten. Dabei sind die folgende Ungleichung von Doob für Submartingale und das darauf folgende Lemma für Submartingale hilfreich.

Lemma 2.10 ([RWa, Theorem II.52.1]). *Sei $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ein nicht-negatives Submartingal, dann gilt für alle $c > 0$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$c \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq n} Z_i \geq c \right) \leq \mathbb{E}[Z_n].$$

Lemma 2.11 ([RWa, Lemma II.52.2]). *Sei M ein Martingal und f eine konvexe Funktion mit $\mathbb{E}[|f(M_n)|] < \infty$ für alle n . Dann ist $f(M)$ ein Submartingal.*

Beweis von Lemma 2.9. Per Definition gilt $\widehat{B}_0^N \stackrel{d}{=} B_0^N = \mu_N + \widetilde{B}_0^N \sigma_N$. Betrachtet man $(\widehat{B}_{\tau_i} - \mu_N)_{i \geq 0}$, dann erhält man eine einfache symmetrische Irrfahrt $(S_i)_{i \geq 0}$, deren Startwert wie $\widetilde{B}_0^N \sigma_N$ verteilt ist, denn die Raten von \widehat{B} für einen Sprung nach oben und die Raten für einen Sprung nach unten sind identisch.

Das heißt $S_i \stackrel{d}{=} \widetilde{B}_0^N \sigma_N + \sum_{k=1}^i Z_k$ mit $\mathbb{P}(Z_k = 1) = \mathbb{P}(Z_k = -1) = \frac{1}{2}$ und Z_k und Z_j sind unabhängig für $k \neq j$.

Damit gilt

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\widehat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N \right) = \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda \sigma_N \right). \quad (2.11)$$

Die Voraussetzung für den Startwert \widetilde{B}_0^N besagt, dass für alle $\delta \in (0, 1)$ ein kompaktes $K_0 = [-\lambda_0, \lambda_0]$ existiert, so dass $\mathbb{P}(\widetilde{B}_0^N \in K_0) \geq 1 - \delta$ für alle $N \geq 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda \sigma_N \right) &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda \sigma_N \mid \widetilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \mathbb{P} \left(\widetilde{B}_0^N \notin K_0 \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |S_i| \geq \lambda \sigma_N \mid \widetilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \delta \\ &= \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} (S_i)^2 \geq \lambda^2 \sigma_N^2 \mid \widetilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \delta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die letzte Umformung (2.12) erlaubt uns Lemma 2.11 anzuwenden. $(S_i)_{i \geq 0}$ ist unter der bedingten Verteilung ein Martingal bezüglich der natürlichen Filtration und die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = x^2$ ist konvex. Es gilt

$$\mathbb{E} \left[S_i^2 \mid \widetilde{B}_0^N \in K_0 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{j,k=1}^i Z_j Z_k + 2\widetilde{B}_0^N \sigma_N \sum_{k=1}^i Z_k + (\widetilde{B}_0^N)^2 \sigma_N^2 \mid \widetilde{B}_0^N \in K_0 \right]$$

Da Z_k und Z_j für $k \neq j$ unabhängig und identisch verteilt sind mit $\mathbb{E}[Z_1] = 0$ und $\mathbb{E}[Z_1^2] = 1$ und Z_k und \widetilde{B}_0^N ebenfalls unabhängig für alle $k \in \mathbb{N}$ sind, folgt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left[S_i^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0 \right] = i \mathbb{E}[Z_1^2] + \mathbb{E} \left[\left(\tilde{B}_0^N \right)^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0 \right] \sigma_N^2 \leq i + \lambda_0^2 \sigma_N^2. \quad (2.13)$$

Nach Lemma 2.11 ist $(S_i)_{i \geq 0}^2$ ein Submartingal. Somit lässt sich nun Lemma 2.10 anwenden.

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} (S_i)^2 \geq \lambda^2 \sigma_N^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \delta \leq \frac{\mathbb{E}[S_m^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0]}{\lambda^2 \sigma_N^2} + \delta$$

Zusammen mit (2.13) erhalten wir

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} (S_i)^2 \geq \lambda^2 \sigma_N^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \delta \leq \frac{m}{\lambda^2 \sigma_N^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta.$$

Wir setzen $m = \left\lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon \right) TN^{1-b} \right\rceil$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq i \leq m} (S_i)^2 \geq \lambda^2 \sigma_N^2 \mid \tilde{B}_0^N \in K_0 \right) + \delta &= \frac{\left\lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon \right) TN^{1-b} \right\rceil}{2\lambda^2 \gamma \left(\frac{1}{2s_N + \gamma} \right)^2 N^{1-b}} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta \\ &\leq \frac{h(\varepsilon)T + \lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta \end{aligned}$$

mit $h(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon + 1 \right) (2 + \gamma)^2$. Daraus folgt mit (2.11) und (2.12) die Behauptung. \square

Mit Hilfe der gerade gezeigten Lemmata können wir im Folgenden die Compact Containment Condition beweisen.

Beweis von Proposition 2.7. Nach (2.6) gilt für $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathbb{P} \left(\tilde{B}_s^N \notin [-\lambda, \lambda] \forall s \leq T \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\hat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N \right) + \mathbb{P}(J_{N,m}^c). \quad (2.14)$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $\varepsilon > 0$ und $\lambda > 0$ existieren, so dass für alle $\varepsilon' > 0$, die beiden Ungleichungen

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\hat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N \right) < \frac{\varepsilon'}{2}$$

und

$$\mathbb{P}(J_{N,m}^c) < \frac{\varepsilon'}{2} \quad (2.15)$$

erfüllt sind.

Sei $m = \lceil \left(\frac{8}{\gamma} + \varepsilon\right) TN^{1-b} \rceil$. Nach Lemma 2.8 existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\mathbb{P}(J_{N,m}^c) \leq \exp\left(-c(\varepsilon)TN^{1-b}\right) \quad (2.16)$$

mit $c(\varepsilon) > 0$. Daraus folgt, dass (2.15) für N groß genug erfüllt ist.

Nach der Voraussetzung gilt $\mathbb{P}_{\tilde{B}_0^N} \xrightarrow{w} \mathbb{P}_{Y_0}$. Somit ist $\left\{ \mathbb{P}_{\tilde{B}_0^N} | N \geq 1 \right\}$ straff und es existiert für alle $\delta \in (0, 1)$ ein kompaktes $K_0 = [-\lambda_0, \lambda_0]$, so dass

$$\mathbb{P}(\tilde{B}_0^N \in K_0) \geq 1 - \delta$$

für alle $N \geq 1$. Das heißt wir können für $\delta \in (0, \frac{\varepsilon'}{2})$ ein λ_0 wählen, so dass

$$\mathbb{P}(\tilde{B}_0^N \in [-\lambda_0, \lambda_0]) \geq 1 - \delta.$$

Mit Lemma 2.9 folgt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\hat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N\right) \leq \frac{h(\varepsilon)T + \lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta$$

Daher reicht es $\lambda > 0$ zu wählen, so dass

$$\frac{h(\varepsilon)T + \lambda_0^2}{\lambda^2} + \delta < \frac{\varepsilon'}{2} \quad (2.17)$$

mit $\delta \in (0, \frac{\varepsilon'}{2})$.

Die Wahl von λ hängt somit nicht von N ab und $\lambda \approx a\sqrt{T}$ für eine Konstante $a > 0$.

Mit dieser Wahl von λ und ε folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\tilde{B}_s^N \notin [-\lambda, \lambda] \forall s \leq T\right) &\stackrel{(2.6)}{\leq} \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq i \leq m} |\hat{B}_{\tau_i}^N - \mu_N| \geq \lambda \sigma_N\right) + \mathbb{P}(J_{N,m}^c) \\ &\stackrel{(2.16) \ \& \ (2.17)}{<} \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \\ &= \varepsilon'. \end{aligned}$$

Mit $K = [-\lambda, \lambda]$ folgt die Behauptung. \square

2.4 Beweis von Theorem 1

In diesem Abschnitt vervollständigen wir den Beweis von Theorem 1. Für die Anwendung des Satzes 1.11 müssen die folgenden Bedingungen mit $f_N := f |_{S_N}$ erfüllt sein:

- i.) Das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) ist eindeutig,

- ii.) $\mathcal{D}(K)$ ist dicht in $\mathcal{C}_b(K)$ für alle kompakten $K \subset S$ mit $\mathcal{D}(K) := \{f|_K : f \in \mathcal{D}\}$,
- iii.) $\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_N \cap K} |G_N f_N(y) - Gf(y)| = 0$ für alle kompakten $K \subset S$ und $f \in \mathcal{D}$,
- iv.) für alle $\varepsilon, t > 0$ existiere ein kompaktes $K \subset S$, so dass für alle N

$$\mathbb{P}^N \left(Y_s^N \in K \text{ für alle } s \leq t \right) \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der vorherigen Abschnitte zeigen wir, dass die Bedingungen erfüllt sind.

Beweis von Theorem 1. Sei G der Generator des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Y mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$. Zusätzlich zu den Bedingungen i.)-iv.) wird in Satz 1.11 gefordert, dass S vollständig ist und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_b(S)$. Mit der Wahl $S = \mathbb{R}$ und $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ ist das erfüllt.

Der Wertebereich von \tilde{B}^N ist gegeben durch $S_N = \left\{ \frac{1-\mu_N}{\sigma_N}, \frac{2-\mu_N}{\sigma_N}, \dots, \frac{N-\mu_N}{\sigma_N} \right\}$ an. Nach Lemma 2.5 löst $(\tilde{B}^N, \mathbb{P}^N)$ das Martingalproblem $(\tilde{G}_N, \mathcal{D}_N)$ mit $\mathcal{D}_N = \left\{ f|_{S_N} : f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}) \right\}$.

Nun gehen wir zu den Bedingungen i.)-iv.) über.

- i.) Nach Korollar 2.3 ist das Martingalproblem $(G, \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}))$ eindeutig.
- ii.) Für alle kompakten $K \subset \mathbb{R}$ ist $\mathcal{C}_c^3(K)$ dicht in $\mathcal{C}_b(K)$.
- iii.) Nach Proposition 2.6 gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ und kompakte $K \subset \mathbb{R}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \tilde{G}_N f_N(x_N) - Gf(x_N) \right| = 0.$$

- iv.) Proposition 2.7 besagt, dass die Compact Containment Condition erfüllt ist.

Somit folgt mit Satz 1.11 die Behauptung. □

2.5 Starke Selektion

Zuvor wurde der Fall betrachtet, dass die Folge s_N die Ungleichung

$$N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta} \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

erfüllt. In diesem Abschnitt widmen wir uns dem Fall $s_N = s$ mit $s \in (0, \infty)$ und beweisen Korollar 1.6.

Korollar 1.6 beweisen wir mit Hilfe des Beweises von Theorem 1. Beim Betrachten der Martingalprobleme und dem Beweis der Compact Containment Condition können wir

ohne Änderungen $b = 0$ einsetzen. Allerdings benötigt der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz des Generators Änderungen, da im Beweis der Proposition 2.6 $b \neq 0$ verwendet wurde.

Proposition 2.12. *Sei $s_N = s$, $\tilde{G}_N : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathcal{M}_b(S_N)$ der Generator von \tilde{B}^N und sei $G : \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ der Generator eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Y mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ und kompakten $K \subset \mathbb{R}$ mit $f_N := f|_{S_N}$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \tilde{G}_N f_N(x_N) - Gf(x_N) \right| = 0.$$

Beweis. Mit $s_N = s$ sind μ_N und σ_N^2 gegeben durch

$$\begin{aligned} \mu_N &= \frac{2s}{2s + \gamma} N \quad \text{und} \\ \sigma_N^2 &= \frac{2s}{2s + \gamma} \left(1 - \frac{2s}{2s + \gamma} \right) N. \end{aligned}$$

Der Generator \tilde{G}_N ist nach Lemma 2.4 für $x_N \in S_N$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{G}_N f_N(x_N) &= \tilde{r}(x_N, x_N + \frac{1}{\sigma_N}) \left(f_N(x_N + \frac{1}{\sigma_N}) - f_N(x_N) \right) \\ &\quad + \tilde{r}(x_N, x_N - \frac{1}{\sigma_N}) \left(f_N(x_N - \frac{1}{\sigma_N}) - f_N(x_N) \right). \end{aligned}$$

Wir formen wieder zunächst die Raten um, die in Abschnitt 2.1 bestimmt wurden

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x_N, x_N + \frac{1}{\sigma_N}) &= (x_N \sigma_N + \mu_N) \frac{N - (x_N \sigma_N + \mu_N)}{N} \\ &= x_N \sigma_N + \mu_N - \frac{2x_N \sigma_N \mu_N}{N} - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Für die andere Rate erhalten wir mit den gleichen Umformungen wie im Beweis der Proposition 2.6

$$\tilde{r}(x_N, x_N - \frac{1}{\sigma_N}) = \frac{\gamma}{s_N N} \binom{x_N \sigma_N + \mu_N}{2} = \frac{2\gamma}{2s + \gamma} x_N \sigma_N + \frac{\gamma}{2s + \gamma} \mu_N + \mathcal{O}(1).$$

Mit einer Taylorentwicklung von f erhalten wir

$$\begin{aligned} &\tilde{G}_N f_N(x_N) \\ &= \left(x_N \sigma_N + \mu_N - \frac{2x_N \sigma_N \mu_N}{N} - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}(1) \right) \left(\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right) \right) \\ &\quad + \left(\frac{2\gamma}{2s + \gamma} x_N \sigma_N + \frac{\gamma}{2s + \gamma} \mu_N + \mathcal{O}(1) \right) \left(-\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) \underbrace{\left(\left(1 - \frac{2\gamma}{2s + \gamma} \right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\gamma}{2s + \gamma} \right) \mu_N - \frac{2x_N \sigma_N \mu_N}{N} - \frac{\mu_N^2}{N} \right)}_{(I)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma_N^2} f''_N(x_N) \underbrace{\left(\left(1 + \frac{2\gamma}{2s + \gamma} \right) x_N \sigma_N + \left(1 + \frac{\gamma}{2s + \gamma} \right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} \right)}_{(II)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Wir betrachten (I) und (II) zunächst getrennt voneinander. (I) lässt sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{2\gamma}{2s+\gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\gamma}{2s+\gamma}\right) \mu_N - \frac{2x_N \sigma_N \mu_N}{N} - \frac{\mu_N^2}{N} &= \frac{2s-\gamma}{2s+\gamma} x_N \sigma_N + \frac{\mu_N^2}{N} - \frac{2\mu_N}{N} x_N \sigma_N - \frac{\mu_N^2}{N} \\
 &= \left(\frac{2s-\gamma}{2s+\gamma} - \frac{2\mu_N}{N}\right) x_N \sigma_N \\
 &= \left(\frac{2s-\gamma}{2s+\gamma} - \frac{4s}{2s+\gamma}\right) x_N \sigma_N \\
 &= -x_N \sigma_N.
 \end{aligned}$$

Nun kommen wir zu (II). Mit $\frac{\mu_N}{\sigma_N^2} = \frac{2s+\gamma}{\gamma}$ folgt

$$\begin{aligned}
 \left(1 + \frac{2\gamma}{2s+\gamma}\right) x_N \sigma_N + \left(1 + \frac{\gamma}{2s+\gamma}\right) \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} &= \frac{2s+2\gamma}{2s+\gamma} \mu_N - \frac{\mu_N^2}{N} + \mathcal{O}(\sigma_N) \\
 &= \left(\frac{2s+2\gamma}{2s+\gamma} \frac{2s+\gamma}{\gamma} - \frac{2s}{2s+\gamma} \frac{2s+\gamma}{\gamma}\right) \sigma_N^2 \\
 &= 2\sigma_N^2.
 \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Umformungen von (I) und (II) in (2.19) ergibt

$$\tilde{G}_N f_N(x_N) = -x_N f'_N(x_N) + f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 &\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \tilde{G}_N f_N(x_N) - Gf(x_N) \right| \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| (-x_N + x_N) f'(x_N) + (1-1) f''(x_N) \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Damit lässt sich nun Korollar 1.6 beweisen.

Beweis von Korollar 1.6. Der Beweis kann aus dem Beweis des Theorems 1 im Fall $N^{-1+\eta} \leq s_N \leq N^{-\eta}$ mit einem $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ übernommen werden. Die einzige notwendige Änderung ist der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz des Generators des skalierten MASPs innerhalb kompakter Intervalle $K \subset \mathbb{R}$. □

2.6 Schwache Selektion

Abschließend möchten wir den Fall $s_N = \frac{\alpha}{N}$ mit $\alpha \in (0, \infty)$ betrachten. Wir beweisen in diesem Abschnitt mit Hilfe von Satz 1.11 das Korollar 1.7. Wir wenden den Satz analog zum Fall der moderaten Selektion an.

Die Sprungraten von $(B_{Nt}^N)_{0 \leq t \leq T}$ sind für $k \in [N]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}\tilde{r}(k, k+1) &= \alpha k \frac{N-k}{N} \quad \text{und} \\ \tilde{r}(k, k-1) &= \gamma \binom{k}{2}.\end{aligned}$$

Für den Linienzählprozess $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}r(k, k+1) &= \alpha k \quad \text{und} \\ r(k, k-1) &= \gamma \binom{k}{2}.\end{aligned}$$

Beweis von Korollar 1.7. $(B_{Nt}^N)_{t \geq 0}$ ist ein $[N]$ -wertiger Markovprozess. Analog zum Beweis von Theorem 1 wenden wir Satz 1.11 an und zeigen, dass $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ und $(B_{Nt}^N)_{0 \leq t \leq T}$ die Bedingungen von Satz 1.11 erfüllen.

Sei $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c(\mathbb{N})$, $\mathcal{D}_N = \{f|_{[N]} : f \in \mathcal{D}\}$ und sei $G_N : \mathcal{D}_N \rightarrow \mathcal{M}_b([N])$ der Generator von $(B_{Nt}^N)_{t \geq 0}$. Der Zustandsraum von $(B_{Nt}^N)_{t \geq 0}$ ist ebenfalls abzählbar. Damit entspricht der Generator G_N der Q-Matrix und für $f \in \mathcal{D}_N$ und $k \in [N]$ gilt

$$G_N f(k) = \alpha k \frac{N-k}{N} (f(k+1) - f(k)) + \gamma \binom{k}{2} (f(k-1) - f(k)).$$

Mit [KW, Satz 5.5] folgt, dass für alle $x \in [N]$,

$$f(B_{tN}^N) - f(x) - \int_0^t G_N f(B_{Ns}^N) ds$$

mit $f \in \mathcal{D}_N$ ein Martingal ist. Damit löst $\left((B_{Nt}^N)_{t \geq 0}, \mathbb{P}^N\right)$ das Martingalproblem (G_N, \mathcal{D}_N) .

Zusätzlich dazu zeigen wir, dass die Bedingungen i.)-iv.) von Satz 1.11 ebenfalls erfüllt sind.

i.) Der Zustandsraum von Z ist abzählbar, somit entspricht sein Generator G der Q-Matrix. Für $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{N})$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$Gf(k) = \alpha k (f(k+1) - f(k)) + \gamma \binom{k}{2} (f(k-1) - f(k)).$$

Das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) ist nach [KW, Satz 5.5] und [KW, Satz 5.7] eindeutig.

ii.) Für alle kompakten $K \subset \mathbb{N}$ ist $\mathcal{C}_c(K)$ dicht in $\mathcal{C}_b(K)$.

iii.) Sei $K \subset \mathbb{N}$ kompakt, dann existiert ein $\lambda > 0$, so dass $K \subset [\lambda]$. Damit folgt für $f \in \mathcal{D}_N$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \in [N] \cap K} |G_N f(k) - Gf(k)| \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \in [N] \cap K} \left| \left(\alpha k \frac{N-k}{N} - \alpha k \right) (f(k-1) - f(k)) + \left(\gamma \binom{k}{2} - \gamma \binom{k}{2} \right) (f(k+1) - f(k)) \right| \\
 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \in [N] \cap [\lambda]} \alpha \frac{\lambda^2}{N} |f(k+1) - f(k)| \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

iv.) Für den Nachweis der Compact Containment Condition führen wir einen weiteren Prozess ein. Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Yule-Prozess mit Sprungraten $r(k, k+1) = \alpha k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $X_0 \stackrel{d}{=} B_0^N$. Für alle $k \in [N]$ gilt $r(k, k+1) \geq \tilde{r}(k, k+1)$. Daraus folgt für $\lambda \in \mathbb{N}$ und alle $N \geq 1$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} B_{Nt}^N > \lambda \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} X_t > \lambda \right) = \mathbb{P}(X_T > \lambda).$$

Nach [KW, Satz 5.1] explodiert $(X_t)_{t \geq 0}$ fast sicher nicht. Daraus folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ ein $\lambda \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\mathbb{P}(X_T > \lambda) < \varepsilon.$$

Da $(B_{Nt}^N)_{t \geq 0}$ per Definition nur Werte größer als 0 annehmen kann, existiert somit für alle $\varepsilon > 0$ und $T > 0$ ein $\lambda \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \geq 1$

$$\mathbb{P} \left(B_{Nt}^N \in [\lambda] \text{ für alle } t \leq T \right) \geq 1 - \varepsilon. \tag{2.20}$$

gilt.

Somit ist Bedingung iv.) erfüllt.

Mit Satz 1.11 folgt

$$\left(B_{Nt}^N \right)_{0 \leq t \leq T} \xrightarrow{d} (Z_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ für } N \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{D}_{\mathbb{N}}([0, T]).$$

□

Kapitel 3

Cannings-Modell: Zwei Beweise von Theorem 2 und ein Ausblick

In diesem Kapitel wird zuerst der funktionale Grenzwertsatz für den skalierten CASP (Theorem 2) für $\frac{2}{3} < b < 1$ bewiesen. Dabei handelt es sich um ein Teilregime der moderaten schwachen Selektion. Der Fall $\frac{1}{2} < b < 1$ wird als Regime der moderaten schwachen Selektion bezeichnet. Für den Beweis verwenden wir ein Coupling aus [BGPW] und den funktionalen Grenzwertsatz für den skalierten MASP (Theorem 1). In Abschnitt 3.2 betrachten wir den Ansatz, ein Korollar aus [Ker] anstelle des Couplings anzuwenden, um Theorem 2 zu beweisen. Der Fall $b \leq \frac{2}{3}$ wird in Abschnitt 3.3 betrachtet.

Wir treffen zunächst analog zu [BGPW] und Abschnitt 1.5 die folgenden Annahmen.

Sei $A^N = (A_t^N)_{t \geq 0}$ ein CASP mit Parametern N , $\mathcal{L}(\mathscr{W})$ und $s_N = N^{-b_N}$ mit

$$\frac{2}{3} + \eta \leq b_N \leq 1 - \eta \quad \text{für ein} \quad \eta \in (0, \frac{1}{6}),$$

wobei wir das Subskript N bei b_N aus Gründen der Übersichtlichkeit weglassen. Dabei sei $\mathscr{W} = (W_1, W_2, \dots, W_N)$ ein austauschbares zufälliges N -Tupel von Wahrscheinlichkeitsgewichten mit Wertebereich $\Delta_N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^N x_i = 1\}$.

Für $\rho^2 \geq 1$ gelte

$$\mathbb{E} [W_1^2] = \frac{\rho^2}{N^2} + \mathcal{O}(N^{-3})$$

und

$$\mathbb{E} [W_1^3] = \mathcal{O}(N^{-3}).$$

Wir betrachten den skalierten Prozess \tilde{A}^N :

$$\tilde{A}^N = (\tilde{A}_t^N)_{0 \leq t \leq T} = \left(\frac{A_{\lfloor s_N^{-1}t \rfloor}^N - \mu_N}{\sigma_N} \right)_{0 \leq t \leq T} \quad (3.1)$$

mit

$$\begin{aligned}\mu_N &= \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2} N \quad \text{und} \\ \sigma_N^2 &= \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2} \left(1 - \frac{2s_N}{2s_N + \rho^2}\right) N.\end{aligned}$$

3.1 Beweis von Theorem 2

Zu den zuvor gewählten Parametern verwenden wir nun das Coupling aus [BGPW] (Lemma 1.17). Damit können wir den funktionalen Grenzwertsatz für den skalierten CASP beweisen.

Beweis von Theorem 2. Sei $0 < \varepsilon < \frac{\eta}{2}$. Aus Lemma 1.17 folgt, dass ein Coupling des MASPs $(B_t^N)_{t \geq 0}$ und des CASPs $(A_t^N)_{t \geq 0}$ existiert, so dass für alle gemeinsamen Startwerte $k_0 = k_0(N)$ mit $1 \leq k_0 \leq N^{1-b+\varepsilon}$, $\gamma = \rho^2$ und $T > 0$

$$\mathbb{P}\left(|A_t^N - B_t^N| \leq 1, \forall t \in \{0, \dots, TN^b\}\right) = 1 - o(1) \quad (3.2)$$

gilt.

Die linke Seite von (3.2) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}& \mathbb{P}\left(|A_t^N - B_t^N| \leq 1, \forall t \in \{0, \dots, TN^b\}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{A_{tN^b}^N - \mu_N}{\sigma_N} - \frac{B_{tN^b}^N - \mu_N}{\sigma_N}\right| \leq \frac{1}{\sigma_N}, \forall t \in \left\{0, \frac{1}{N^b}, \dots, T\right\}\right).\end{aligned}$$

Mit $s_N = N^{-b}$ erhalten wir aus (3.1)

$$\tilde{A}_t^N = \frac{A_{tN^b}^N - \mu_N}{\sigma_N}$$

und aus (1.2)

$$\tilde{B}_t^N = \frac{B_{tN^b}^N - \mu_N}{\sigma_N}.$$

Damit folgt, dass ein Coupling für die skalierten Prozesse $(\tilde{B}_t^N)_{0 \leq t \leq T}$ und $(\tilde{A}_t^N)_{0 \leq t \leq T}$ existiert, so dass

$$\mathbb{P}\left(|\tilde{A}_t^N - \tilde{B}_t^N| \leq \frac{1}{\sigma_N}, \forall t \in [0, T]\right) = 1 - o(1). \quad (3.3)$$

Nach Theorem 1 gilt

$$\tilde{B}^N \xrightarrow{d} Y \text{ für } N \rightarrow \infty \text{ in } \mathcal{D}_{\mathbb{R}}([0, T]). \quad (3.4)$$

Mit (3.3) und (3.4) folgt die Behauptung. \square

3.2 Ein weiterer Blick auf den Fall $b > \frac{2}{3}$

Wir bleiben zunächst weiterhin in dem Fall

$$\frac{2}{3} + \eta \leq b \leq 1 - \eta \quad \text{für ein} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{6}\right).$$

Der Beweis des Couplings (Lemma 1.17), das wir im Beweis von Theorem 2 verwendet haben, beruht auf den Übergangswahrscheinlichkeiten des MASPs und des CASPs. In diesem Abschnitt untersuchen wir mit Lemma 3.1 zuerst die Übergangswahrscheinlichkeiten des CASPs. Wir betrachten ebenfalls den zugehörigen Beweis aus [BGPW] als Vorbereitung für weitere Abschätzungen in Abschnitt 3.3. Mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten erklären wir anschließend, warum $b > \frac{2}{3}$ eine untere Schranke für das Coupling bildet. Danach betrachten wir einen weiteren Beweisansatz für Theorem 2. Er besteht daraus ein Korollar aus [Ker] anzuwenden.

Lemma 3.1 ([BGPW, Lemma 5.1]). *Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten des CASPs $(A_m^N)_{m \geq 0}$ sind für $k \leq N^{1-b+\varepsilon}$ gegeben durch*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k \mid A_m^N = k\right) &= 1 - ks_N - \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2} + k^2 s_N^2\right) \\ \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k+1 \mid A_m^N = k\right) &= ks_N + \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2} + k^2 s_N^2\right) \\ \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k-1 \mid A_m^N = k\right) &= \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2} + k^2 s_N^2\right) \\ \mathbb{P}\left(|A_{m+1}^N - k| \geq 2 \mid A_m^N = k\right) &= \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2} + k^2 s_N^2\right). \end{aligned}$$

Beweis. Die Übergänge des CASPs setzen sich aus einem Verzweigungs- und einem Verschmelzungsschritt zusammen (siehe Abschnitt 1.4). Wir beginnen zunächst mit k Individuen und dem Verzweigungsschritt. Jedes Individuum liefert eine geometrisch verteilte Anzahl an Kugeln mit Parameter $1 - s_N$.

Sei $k \in \mathbb{N}$ und seien $G^{(j)}$ unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $1 - s_N$. Dann ist $\sum_{j=1}^k G^{(j)}$ negativ binomialverteilt mit Parametern k und $1 - s_N$.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei k Individuen im Verzweigungsschritt k Kugeln erhält, gegeben durch

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k G^{(j)} = k\right) = (1 - s_N)^k = 1 - ks_N + \mathcal{O}(k^2 s_N^2).$$

$k+1$ Kugeln erhält man mit Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k G^{(j)} = k+1\right) = \binom{k}{k-1} (1 - s_N)^k s_N = k(1 - s_N)^k s_N = ks_N + \mathcal{O}(k^2 s_N^2).$$

Subtrahiert man die obigen Wahrscheinlichkeiten von 1, erhält man die Wahrscheinlichkeit für mindestens $k + 2$ Kugeln

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k G^{(j)} \geq k + 2\right) = \mathcal{O}(k^2 s_N^2).$$

Nun betrachten wir den Verschmelzungsschritt. Dazu benötigen wir die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Individuum mehrmals als Mutter ausgewählt wird.

Mit c_N bezeichnen wir die Paarverschmelzungswahrscheinlichkeit. Mit der Austauschbarkeit der W_i folgt

$$c_N = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N W_i^2\right] = \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (3.5)$$

Analog lässt sich d_N , die Wahrscheinlichkeit für eine Dreifachkollision, bestimmen

$$d_N = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^N W_i^3\right] = \mathcal{O}(N^{-2}). \quad (3.6)$$

Sei $E_{k,2}$ das Ereignis, dass die Anzahl der potentiellen Ahnen nach dem Verschmelzen höchstens $k - 2$ beträgt bei k Kugeln nach der Verzweigung. Bei diesem Ereignis gibt es entweder mindestens zwei Zweierkollisionen oder mindestens eine Dreierkollision. Mit (3.5) und (3.6) folgt

$$\mathbb{P}(E_{k,2}) \leq \binom{k}{4} \frac{\rho^4}{N^2} + \mathcal{O}\left(\binom{k}{3} N^{-2}\right) + \mathcal{O}(k^4 N^{-3}) = \mathcal{O}(k^4 N^{-2}). \quad (3.7)$$

Um die Wahrscheinlichkeit für genau eine Kollision mit Hilfe der Second Moment Methode abzuschätzen, betrachten wir die Zufallsvariable

$$X = \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k X_{i,j} \quad \text{mit} \quad X_{i,j} = \mathbb{1}_{\{i \text{ und } j \text{ kollidieren}\}}.$$

Mit (3.5) folgt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k X_{i,j}\right] = \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^2 N^{-2}).$$

Mit Hilfe von (3.5) und (3.6) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k X_{i,j} \right)^2 \right] \\
 &= \binom{k}{2} \left(\frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(N^{-2}) \right) + \mathcal{O} \left(k^3 \mathbb{E}[X_{1,2}X_{2,3}] \right) + \mathcal{O} \left(k^4 \mathbb{E}[X_{1,2}X_{3,4}] \right) \\
 &= \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^3 N^{-2}) + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}) \\
 &= \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}).
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (siehe Lemma A.2) folgt

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]} = \frac{\left(\binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} \right)^2 + \mathcal{O}(k^4 N^{-3})}{\binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2})} = \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} \left(1 - \mathcal{O}(k^2 N^{-1}) \right).$$

Zusammen mit (3.7) führt das bei k Kugeln vor der Verschmelzung zu

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = 0) &= 1 - \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}) \\
 \mathbb{P}(X = 1) &= \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}) \\
 \mathbb{P}(X \geq 2) &= \mathcal{O}(k^4 N^{-2}).
 \end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Verzweigungs- und Verschmelzungsschritt zusammen.

Die obigen Rechnungen verwenden wir, indem wir auf verschiedene Ausgänge von

$$H = \sum_{j=1}^{A_m} G^{(j)}$$

bedingen. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit für $k+1$ potentielle Ahnen in Generation $g - (m + 1)$ bei k potentiellen Ahnen in Generation $g - m$ berechnen.

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P} \left(A_{m+1}^N = k + 1 \mid A_m^N = k \right) \\
 &= \mathbb{P} \left(A_{m+1}^N = k + 1 \mid A_m^N = k, H = k \right) \mathbb{P} \left(H = k \mid A_m^N = k \right) \\
 &\quad + \mathbb{P} \left(A_{m+1}^N = k + 1 \mid A_m^N = k, H = k + 1 \right) \mathbb{P} \left(H = k + 1 \mid A_m^N = k \right) \\
 &\quad + \mathbb{P} \left(A_{m+1}^N = k + 1 \mid A_m^N = k, H \geq k + 2 \right) \mathbb{P} \left(H \geq k + 2 \mid A_m^N = k \right) \\
 &= 0 + \left(1 - \binom{k+1}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}) \right) \left(k s_N + \mathcal{O}(k^2 s_N^2) \right) + \mathcal{O}(k^2 s_N^2) \\
 &= k s_N + \mathcal{O}(k^4 N^{-2} + k^2 s_N^2)
 \end{aligned}$$

Bei $k - 1$ potentielle Ahnen in Generation $g - (m + 1)$ bei k potentiellen Ahnen in Generation $g - m$ gehen wir analog vor.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k - 1 \mid A_m^N = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k - 1 \mid A_m^N = k, H = k\right) \mathbb{P}\left(H = k \mid A_m^N = k\right) \\
&\quad + \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k - 1 \mid A_m^N = k, H \geq k + 1\right) \mathbb{P}\left(H \geq k + 1 \mid A_m^N = k\right) \\
&= \left(\binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2})\right) \left(1 - k s_N + \mathcal{O}(k^2 s_N^2)\right) \\
&\quad + \mathcal{O}(k^4 N^{-2}) \mathcal{O}(k s_N) \\
&= \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}(k^4 N^{-2} + k^3 s_N N^{-1})
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 potentielle Ahnen mehr, lässt sich durch den Verzweigungsschritt abschätzen. In diesem Fall muss H mindestens den Wert $k + 2$ annehmen.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + 2 \mid A_m^N = k\right) \\
&= \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + 2 \mid A_m^N = k, H \geq k + 2\right) \mathbb{P}\left(H \geq k + 2 \mid A_m^N = k\right) \\
&= \mathcal{O}(k^2 s_N^2)
\end{aligned}$$

Bei dem Ereignis, dass es mindestens 2 potentielle Ahnen weniger sind, muss X mindestens den Wert 2 annehmen. Damit folgt

$$\mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \leq k - 2 \mid A_m^N = k\right) = \mathcal{O}(k^4 N^{-2}).$$

□

Mit Hilfe des vorherigen Lemmas 3.1 bestimmen wir die Raten des skalierten CASPs \tilde{A}^N und erklären anschließend die Schranke $b > \frac{2}{3}$.

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. Die Raten sind für $x \in S_N = \left\{\frac{1-\mu_N}{\sigma_N}, \frac{2-\mu_N}{\sigma_N}, \dots, \frac{N-\mu_N}{\sigma_N}\right\}$ mit $x \leq N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b+\varepsilon}$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\tilde{r}\left(x, x + \frac{1}{\sigma_N}\right) &= N^b \left[(x\sigma_N + \mu_N) s_N + \mathcal{O}\left((x\sigma_N + \mu_N)^2 s_N^2 + (x\sigma_N + \mu_N)^4 N^{-2}\right) \right] \\
&\stackrel{s_N = N^{-b}}{=} x\sigma_N + \mu_N + \mathcal{O}(N^{2-3b})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) &= N^b \left[\binom{x\sigma_N + \mu_N}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}\left((x\sigma_N + \mu_N)^2 s_N^2 + (x\sigma_N + \mu_N)^4 N^{-2}\right) \right] \\
&\stackrel{s_N = N^{-b}}{=} \frac{\rho^2}{s_N N} \binom{x\sigma_N + \mu_N}{2} + \mathcal{O}(N^{2-3b}).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Die Summe der Raten des skalierten CASPs mit Sprüngen, die betragsmäßig größer als $\frac{1}{\sigma_N}$ sind, ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{i \in S_N \setminus \{x - \frac{1}{\sigma_N}, x, x + \frac{1}{\sigma_N}\}} \tilde{r}(x, i) &= N^b \mathcal{O} \left((x\sigma_N + \mu_N)^2 s_N^2 + (x\sigma_N + \mu_N)^4 N^{-2} \right) \\ &= \mathcal{O} \left(N^{2-3b} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mit Hilfe der Raten begründen wir in der folgenden Bemerkung die Schranke $b > \frac{2}{3}$.

Bemerkung 3.2. Für $k \in S_N$, die sich im Attraktionszentrum des CASPs befinden, gilt $r(k, k+1) \approx r(k, k-1)$. Die Gleichgewichtsverteilung sollte um dieses Attraktionszentrum konzentriert sein. Mit Lemma 3.1 folgt

$$\begin{aligned} k s_N &\approx \binom{k}{2} \frac{\rho^2}{N} \\ k &\approx N \frac{2s_N}{\rho^2}. \end{aligned}$$

Also für $k \approx N \frac{2s_N}{\rho^2}$ heben sich der Drift nach oben und unten ungefähr auf. Deshalb betrachten wir die Region um $a_{eq} := N \frac{2s_N}{\rho^2}$. Nach Lemma 3.1 gilt

$$\mathbb{P} \left(|A_{m+1}^N - a_{eq}| \geq 2 \mid A_m^N = a_{eq} \right) = \mathcal{O} \left(a_{eq}^4 N^{-2} + a_{eq}^2 s_N^2 \right).$$

Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich durch die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei Zweierkollisionen gibt, nach unten abschätzen. Damit folgt mit einer Konstante $c > 0$

$$\mathbb{P} \left(|A_{m+1}^N - a_{eq}| \geq 2 \mid A_m^N = a_{eq} \right) \geq c \binom{a_{eq}}{4} \frac{1}{N^2}.$$

Das heißt

$$\mathbb{P} \left(|A_{m+1}^N - a_{eq}| \geq 2 \mid A_m^N = a_{eq} \right) = \Theta \left(a_{eq}^4 N^{-2} + a_{eq}^2 s_N^2 \right).$$

Wir betrachten das Intervall $[0, TN^b]$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es in jeder Generation in diesem Intervall maximal einen Sprung der Größe 1 gibt, lässt sich approximieren durch

$$\left(1 - \Theta \left(a_{eq}^4 N^{-2} + a_{eq}^2 s_N^2 \right) \right)^{TN^b} = \begin{cases} \Theta(1) & \frac{1}{2} < b \leq \frac{2}{3}, \\ 1 - \Theta \left(N^{2-3b} \right) & b > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Das heißt, im Fall $b < \frac{2}{3}$ müssen auch Sprünge, die größer als 1 sind, betrachtet werden.

Das folgende Korollar verwenden wir für einen weiteren Beweisansatz von Theorem 2.

Korollar 3.3 ([Ker, Korollar 2.9, Bemerkung S.41]). *Sei S vollständig und sei $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}_b(S)$ linear. Für $N \in \mathbb{N}$ seien $S_N \subset S$ Borelmengen, $Z^N = (Z^N(k))_{k \geq 0}$ eine Folge von Markov'schen Ketten mit Werten in S_N und Übergangswahrscheinlichkeiten $P_N(z, B)$. Schließlich sei $(m_N)_{N \geq 1}$ eine divergente Folge positiver Zahlen. Es gelte mit $f_N := f|_{S_N}$*

- i.) *Das Martingalproblem (G, \mathcal{D}) ist eindeutig,*
- ii.) *$\mathcal{D}(K)$ ist dicht in $\mathcal{C}_b(K)$ für alle kompakten $K \subset S$,*
- iii.) *$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{y \in S_N \cap K} |Gf(y) - m_N(P_N f_N(y) - f(y))| = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}$ und alle kompakten $K \subset S$,*
- iv.) *für alle $\varepsilon, t > 0$ gibt es ein kompaktes $K \subset S$, so dass für alle N*

$$\mathbb{P}^N \left(Z_s^N \in K \text{ für alle } s \leq tm_N \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Falls dann die Verteilungen von Z_0^N gegen ein W -Maß μ konvergieren, so konvergieren die durch

$$Y_t^N := Z^N(\lfloor m_N t \rfloor), \quad t \geq 0$$

gegebenen Prozesse Y^N in Verteilung gegen eine Lösung des Martingalproblems (G, \mathcal{D}) mit Anfangsverteilung μ .

Analog zum Beweis der gleichmäßigen Konvergenz des Generators des skalierten MASP (Proposition 2.6) lässt sich zeigen, dass der skalierte CASP die Bedingung iii.) von Korollar 3.3 erfüllt.

Proposition 3.4. *Seien $P_N(z, B)$ die Übergangswahrscheinlichkeiten von \tilde{A}^N und sei $G : \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ der Generator eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses Y mit Parametern $\theta = 1$ und $\sigma = \sqrt{2}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$ und kompakten $K \subset \mathbb{R}$ mit $f_N := f|_{S_N}$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| N^b (P_N f_N(x_N) - f(x_N)) - Gf(x_N) \right| = 0.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R})$. Mit (3.8) und (3.9) folgt

$$\begin{aligned} \tilde{G}_N^{(A)} f_N(x_N) &:= N^b (P_N f_N(x_N) - f_N(x_N)) \\ &= \tilde{r} \left(x_N, x_N + \frac{1}{\sigma_N} \right) \left(f_N \left(x_N + \frac{1}{\sigma_N} \right) - f_N(x_N) \right) \\ &\quad + \tilde{r} \left(x_N, x_N - \frac{1}{\sigma_N} \right) \left(f_N \left(x_N - \frac{1}{\sigma_N} \right) - f_N(x_N) \right) \\ &\quad + \sum_{i \in S_N \setminus \{x_N - \frac{1}{\sigma_N}, x_N + \frac{1}{\sigma_N}\}} \tilde{r}(x_N, i) (f_N(i) - f_N(x_N)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Zunächst betrachten wir die Raten getrennt voneinander. Nach (3.9) gilt

$$\tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) = \frac{\rho^2}{s_N N} \binom{x\sigma_N + \mu_N}{2} + \mathcal{O}(N^{2-3b}).$$

Analog zum Beweis der Proposition 2.6 lässt sich zeigen, dass sich das vereinfachen lässt zu

$$\tilde{r}\left(x, x - \frac{1}{\sigma_N}\right) = \frac{2\rho^2}{2s_N + \rho^2} x_N \sigma_N + \frac{\rho^2}{2s_N + \rho^2} \mu_N + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(N^{2-3b}).$$

Da f beschränkt ist, existiert ein $c > 0$, so dass

$$f_N(i) - f_N(x_N) \leq c \text{ für alle } i \in S_N \setminus \left\{x - \frac{1}{\sigma_N}, x + \frac{1}{\sigma_N}\right\}.$$

Zusammen mit (3.10) folgt daraus

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in S_N \setminus \{x_N - \frac{1}{\sigma_N}, x_N + \frac{1}{\sigma_N}\}} \tilde{r}(x_N, i) (f_N(i) - f_N(x_N)) \\ & \leq c \sum_{i \in S_N \setminus \{x_N - \frac{1}{\sigma_N}, x_N + \frac{1}{\sigma_N}\}} \tilde{r}(x_N, i) \\ & = \mathcal{O}(N^{2-3b}). \end{aligned}$$

Mit zwei Taylorentwicklungen und dem Einsetzen der vereinfachten Raten erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{G}_N^{(A)} f_N(x_N) &= (x_N \sigma_N + \mu_N) \left(\frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right) \right) \\ &+ \left(\frac{2\rho^2}{2s_N + \rho^2} x_N \sigma_N + \frac{\rho^2}{2s_N + \rho^2} \mu_N + \mathcal{O}(1) \right) \left(-\frac{1}{\sigma_N} f'(x_N) + \frac{1}{2\sigma_N^2} f''(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N^3}\right) \right) \\ &+ \mathcal{O}(N^{2-3b}) \\ &= \frac{1}{\sigma_N} f'_N(x_N) \underbrace{\left(\left(1 - \frac{2\rho^2}{2s_N + \rho^2}\right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\rho^2}{2s_N + \rho^2}\right) \mu_N \right)}_{(I)} \\ &+ \frac{1}{2\sigma_N^2} f''_N(x_N) \left(1 + \frac{\rho^2}{2s_N + \rho^2}\right) \mu_N + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}(N^{2-3b}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für (I) gilt

$$\left(1 - \frac{2\rho^2}{2s_N + \rho^2}\right) x_N \sigma_N + \left(1 - \frac{\rho^2}{2s_N + \rho^2}\right) \mu_N = \frac{2s_N - \rho^2}{2s_N + \rho^2} x_N \sigma_N + \frac{\mu_N^2}{N}.$$

Das Einsetzen der Umformungen von (I) in (3.12) ergibt

$$\tilde{G}_N^{(A)} f_N(x_N) = \underbrace{\frac{2s_N - \rho^2}{2s_N + \rho^2}}_{\rightarrow -1} x_N f'_N(x_N) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2s_N + 2\rho^2}{2s_N + \rho^2}}_{\rightarrow 2} \underbrace{\frac{\mu_N}{\sigma_N^2}}_{\rightarrow 1} f''_N(x_N) + \mathcal{O}\left(\frac{\mu_N^2}{\sigma_N N}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sigma_N}\right) + \mathcal{O}(N^{2-3b}).$$

Da K kompakt ist, existiert ein $\lambda > 0$, so dass $K \subset [-\lambda, \lambda]$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| N^b (P_N f_N(y) - f_N(y)) - Gf(x_N) \right| \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap K} \left| \left(\frac{2s_N - \rho^2}{2s_N + \rho^2} + 1 \right) x_N f'(x_N) + \left(\frac{1}{2} \frac{2s_N + 2\rho^2}{2s_N + \rho^2} \frac{\mu_N}{\sigma_N^2} - 1 \right) f''(x_N) \right| \\
 & \quad + \mathcal{O} \left(\frac{\mu_N^2}{\sigma_N N} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sigma_N} \right) + \mathcal{O} \left(N^{2-3b} \right) \\
 &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x_N \in S_N \cap [-\lambda, \lambda]} \left| \frac{2s_N - \rho^2}{2s_N + \rho^2} + 1 \right| \lambda c_1 + \left| \frac{1}{2} \frac{2s_N + 2\rho^2}{2s_N + \rho^2} \frac{\mu_N}{\sigma_N^2} - 1 \right| c_2 \\
 & \quad + \mathcal{O} \left(\frac{\mu_N^2}{\sigma_N N} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sigma_N} \right) + \mathcal{O} \left(N^{2-3b} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 > 0$. □

Die obige Rechnung für den skalierten CASP für $\frac{2}{3} + \eta \leq b \leq 1 - \eta$ mit einem $\eta \in (0, \frac{1}{6})$ ist ähnlich zur Rechnung aus Proposition 2.6 für den skalierten MASP. Anstatt nun noch die weiteren Bedingungen von Korollar 3.3 zu prüfen, möchten wir den Fall $b \leq \frac{2}{3}$ betrachten.

3.3 Ausblick auf den Fall $b \leq \frac{2}{3}$

Wir betrachten abschließend auch den Fall $b \leq \frac{2}{3}$, in dem wir das Coupling (Lemma 1.17) nicht verwenden können, da das Coupling nur für $b > \frac{2}{3}$ konstruiert wurde. Wir untersuchen im Folgenden den Fall

$$\frac{1}{2} + \eta \leq b \leq 1 - \eta \quad \text{mit einem} \quad \eta \in \left(0, \frac{1}{4} \right).$$

Wir begründen zunächst, warum $\frac{1}{2}$ eine natürliche untere Schranke für b bildet. Anschließend zeigen wir auf, warum die Anwendung des Korollars 3.3 im Fall $b \leq \frac{2}{3}$ mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Bemerkung 3.5. Wir betrachten den Verzweigungsschritt. Wie in Bemerkung 3.2 betrachten wir auch hier die Region um $a_{eq} = N \frac{2s_N}{\rho^2}$ genauer. Wir berechnen die erwartete Anzahl der Kugeln, die wir im Verzweigungsschritt zusätzlich zu a_{eq} erhalten, wenn $\tilde{A}_0^N = a_{eq}$.

Seien $G^{(j)}$ für $j \in \mathbb{N}$ geometrisch verteilt mit Parameter $1 - s_N$, dann ist $\sum_{j=1}^{a_{eq}} G^{(j)}$ negativ binomialverteilt mit Parametern a_{eq} und $1 - s_N$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{a_{eq}} G^{(j)} - a_{eq} \right] &= \frac{a_{eq}}{1 - s_N} - a_{eq} \\
 &= a_{eq}(s_N + o(s_N)) \\
 &= \Theta \left(N^{1-2b} \right).
 \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ konvergiert die erwartete Anzahl zusätzlicher Kugeln im Verzweigungsschritt für $b > \frac{1}{2}$ gegen 0 und für $b < \frac{1}{2}$ divergiert sie. Das heißt, dass die Analyse der Übergangswahrscheinlichkeiten für $b < \frac{1}{2}$ schwierig ist, weswegen $b > \frac{1}{2}$ eine natürliche untere Schranke ist.

Wir verwenden die folgende Proposition um zu erklären, warum die Anwendung des Korollars 3.3 im Fall $b \leq \frac{2}{3}$ mit Schwierigkeiten verbunden ist.

Proposition 3.6. *Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$. Für festes $h \in \mathbb{N}$ und $x \in S_N$ mit $x \leq N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b + \varepsilon}$ gilt*

$$\sum_{i \geq h} \tilde{r}(x, x + \frac{i}{\sigma_N}) = \Theta\left(N^{h - (2h-1)b}\right).$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die Abschätzung nach oben analog zu [BGPW, Lemma 6.1]. Zunächst betrachten wir den Verzweigungsschritt des (unskalierten) CASPs. Sei wie zuvor $G^{(j)}$ unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $1 - s_N$. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k' = k + h$ und $S_{k'} \sim \text{Binom}(k', 1 - s_N)$. Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^k G^{(j)} \geq k + h\right) \leq \mathbb{P}(S_{k'} \leq k).$$

Mit Hilfe der Chernoff-Schranke für binomialverteilte Zufallsvariablen, $a = \frac{k}{k'}$, $p = 1 - s_N$ und $I(a) = a \ln\left(\frac{a}{p}\right) + (1 - a) \ln\left(\frac{1-a}{1-p}\right)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k'} \leq ak') &\leq \exp(-k'I(a)) \\ &= \exp\left(-k \ln\left(\frac{k}{k+h} \frac{1}{1-s_N}\right) - h \ln\left(\frac{h}{k+h} \frac{1}{s_N}\right)\right) \\ &= \left(\frac{k}{k+h} \frac{1}{1-s_N}\right)^{-k} \left(\frac{h}{k+h} \frac{1}{s_N}\right)^{-h} \\ &= \mathcal{O}\left(k^h s_N^h\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Wie zuvor setzten wir $H = \sum_{j=1}^{A_m^N} G^{(j)}$ und verwenden (3.13) um $\mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + h \mid A_m^N = k\right)$ nach oben abzuschätzen

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + h \mid A_m^N = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + h \mid A_m^N = k, H \geq k + h\right) \mathbb{P}\left(H \geq k + h \mid A_m^N = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k + h \mid A_m^N = k, H \geq k + h\right) \mathcal{O}\left(k^h s_N^h\right) \\ &= \mathcal{O}\left(k^h s_N^h\right). \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit schätzen wir nun nach unten ab. Wir verwenden, dass H gegeben $A_m^N = k$ negativ binomialverteilt ist mit Parametern k und $1 - s_N$. Damit folgt

$$\mathbb{P}\left(H = k + h \mid A_m^N = k\right) = \binom{k+h-1}{k-1} (1 - s_N)^k s_N^h = \Theta\left(k^h s_N^h\right). \tag{3.14}$$

Im Beweis von Lemma 3.1 wurde gezeigt, dass

$$\mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k+h \mid A_m^N = k, H = k+h\right) = 1 - \binom{k+h}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2}\right) \quad (3.15)$$

gilt.

Mit (3.14) und (3.15) folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k+h \mid A_m^N = k\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N \geq k+h, H = k+h \mid A_m^N = k\right) \\ & = \mathbb{P}\left(A_{m+1}^N = k+h \mid A_m^N = k, H = k+h\right) \mathbb{P}\left(H = k+h \mid A_m^N = k\right) \\ & = \left(1 - \binom{k+h}{2} \frac{\rho^2}{N} + \mathcal{O}\left(k^4 N^{-2}\right)\right) \Theta\left(k^h s_N^h\right) \\ & = \Theta\left(k^h s_N^h\right). \end{aligned}$$

Aus der oberen und unteren Schranke folgt für die Raten des (unskalierten) CASPs A^N

$$\sum_{i \geq h} r(k, k+i) = \Theta\left(k^h s_N^h\right).$$

Damit erhalten wir für die Raten des skalierten CASPs \tilde{A}^N

$$\sum_{i \geq h} \tilde{r}\left(x, x + \frac{i}{\sigma_N}\right) = N^b \Theta\left(N^{h-hb} s_N^h\right) = \Theta\left(N^{h-(2h-1)b}\right).$$

□

Nach der vorherigen Proposition gilt für $x \in S_N$ mit $x \leq N^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b + \varepsilon}$ und für festes $h \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i \geq h} \tilde{r}\left(x, x + \frac{i}{\sigma_N}\right) = \Theta\left(N^{h-(2h-1)b}\right).$$

Damit diese Summe für $N \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, muss

$$\begin{aligned} h - (2h-1)b &< 0 \\ \frac{h}{2h-1} &< b \end{aligned}$$

erfüllt sein. Es gilt

$$\frac{h}{2h-1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } h \rightarrow \infty.$$

Wenn man die gleichmäßige Konvergenz des Generators zeigen möchte und dabei die Sprünge bis zu der Größe $h-1$ betrachtet, erhält man durch die Summe der Raten der Sprünge, die mindestens die Größe $h \in \mathbb{N}$ haben, den Fehlerterm $\Theta(N^{h-(2h-1)b})$. Dieser konvergiert für $\frac{h}{2h-1} < b$ gegen 0. Für den Fall $h=3$ und damit betrachtete Sprünge bis zur Größe 2 lässt sich die gleichmäßige Konvergenz des Generators für $b > \frac{3}{5}$ zeigen und damit die Schranke $b > \frac{2}{3}$ verbessern. Eine Anwendung des Korollars 3.3 bei einer Sprunggrößenschranke $h-1 > 2$ (samt damit verbundener abermaliger Verbesserung der unteren Schranke für den Exponenten b) scheint allerdings nur schwer (wenn überhaupt) machbar.

Anhang A

Hilfreiche Aussagen

Hier werden zwei hilfreiche Aussagen aufgeführt, die zuvor verwendet wurden. Die erste Ungleichung ist auch als Chernoff-Ungleichung für gammaverteilte Zufallsvariablen bekannt und die Zweite folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Lemma A.1 ([Jan, Theorem 5.1.iii]). *Sei $S \sim \text{Gamma}(k, 1)$, dann gilt für $a \leq 1$*

$$\mathbb{P}(S \leq ak) \leq e^{-k(a-1-\ln(a))}.$$

Lemma A.2. *Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable mit endlicher Varianz, dann gilt*

$$\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Beweis. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{\{X>0\}}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{E}[(\mathbb{1}_{\{X>0\}})^2] = \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X > 0).$$

□

Literaturverzeichnis

- [BGPW] F. Boenkost, A. González Casanova, C. Pokalyuk, A. Wakolbinger: Haldanes formula in Cannings models: The case of moderately weak selection, *Electron. J. Probab.* 26 (4), 2021
- [Can] C. Cannings: The latent roots of certain Markov chains arising in genetics: a new approach 1. Haploid models, *Adv. Appl. Prob.* 6 (2): 260-290, 1974
- [Dur] R. Durrett: *Probability Models for DNA Sequence Evolution*, Second Edition, Springer Science + Business Media, 2008
- [Ewe] W. Ewens: *Mathematical Population Genetics: I. Theoretical Introduction*, Second Edition, Springer Science + Business Media New York, 2004
- [EK] S. N. Ethier, T. G. Kurtz: *Markov Processes Characterization and Convergence*, Wiley Series in probability and mathematical statistics, 1986
- [GS] A. González Casanova, D. Spanò: Duality and fixation in Ξ -Wright-Fisher processes with frequency-dependent selection, *Ann. Appl. Probab.* 28: 250-284, 2018
- [Jan] S. Janson: Tail bounds for sums of geometric and exponential variables, *Statist. Probab. Lett.* 135: 1–6, 2018
- [Ker] G. Kersting: *Schwache Konvergenz und Martingalprobleme*, 2021, <https://www.math.uni-frankfurt.de/~ismi/kersting/lecturenotes/SchwacheKonvergenz.pdf>
- [Kin] J.F. Kingman: On the genealogy of large populations, *J. Appl. Probab.* 19: 27-43, 1982
- [KN] S. M. Krone, C. Neuhauser: Ancestral processes with selection, *Theor. Popul. Biol.* 51: 210-237, 1997
- [KS] I. Karatzas, S. Shreve: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer Science + Business Media, 1998
- [KW] G. Kersting, A. Wakolbinger: *Stochastische Prozesse*, Springer Basel, 2014

LITERATURVERZEICHNIS

- [PP] C. Pokalyuk, P. Pfaffelhuber: The ancestral selection graph under strong directional selection, *Theor. Popul. Biol.* 87: 25-33, 2013
- [RWa] L.C.G. Rogers, D. Williams: *Diffusions, Markov Processes and Martinagles, Volume One: Foundations, Second Edition*, John Wiley & Sons Ltd, 1994
- [RWb] L.C.G. Rogers, D. Williams: *Diffusions, Markov Processes and Martinagles, Volume Two: Itô Calculus, Second Edition*, Cambridge University Press , 2000

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig abgefasst habe und keine anderen Hilfsmittel als die Angegebenen benutzt habe.

Ich erkläre ferner, dass diejenigen Stellen der Arbeit, die anderen Werken wörtlich oder dem Sinne nach entnommen sind, in jedem einzelnen Falle unter Angabe der Quellen kenntlich gemacht sind.

Frankfurt, den 01.02.2022