Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen.

Von

PAUL EPSTEIN in Strassburg i./E.

In seiner berühmten Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze hat Riemann die Function $\zeta(s)$ über das Convergenzgebiet der Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

hinaus analytisch fortgesetzt und damit für allgemeine complexe Werthe von s definirt. Diese analytische Fortsetzung, die durch ein Integral mit geschlossenem Integrationsweg bewirkt wird, findet ihren prägnantesten Ausdruck in dem Satz, dass *das Product*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

bei der Vertauschung von s mit $1 - s$ sich nicht ändert, denn dieser Satz führt direct die Function für solche Werthe, für die die Reihe nicht mehr convergirt, auf die Functionswerthe innerhalb des Convergenzgebiets zurück.

An diesen Theil der Riemann'schen Abhandlung haben eine Anzahl von Arbeiten angeknüpft*), in denen für Functionen mit ähnlichen und allgemeineren Bildungsgesetzen entsprechende Functionaltheoreme abgeleitet wurden, und diese Untersuchungen in einer bestimmten Richtung zu einem gewissen Abschluss zu bringen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Den Weg dazu hat Riemann selbst durch eine zweite Integraldarstellung der Function $\zeta(s)$ gewiesen, in der eine *einfach unendliche Thetareihe* mit der

*) Vgl. Hurwitz, Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s)$ Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVII. — Lerch, Sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s)$, Acta Mathematica XI. — Cahen, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Annales de l'École Normale XI, 1894. — Lipschitz, Eigenschaften einer Gattung unendlicher Reihen, Crelle's Journal Bd. 105. — Mellin, Acta soc. scient. Fenn. Bd. 24.

Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ auftritt. Dem entsprechend existirt für die von Herrn Lipschitz untersuchte Function — die allgemeinste bisher betrachtete „Zeta"-function — eine Integraldarstellung mit Hülfe einer einfach unendlichen Thetareihe mit *beliebiger* Charakteristik. Diesem Gedankengange folgend definiren wir als *allgemeine Zetafunction p^{ter} Ordnung* eine p-fach unendliche Reihe, welche in gleicher Weise eine Verallgemeinerung der Riemann'schen ζ-function darstellt, wie die allgemeine Thetareihe p^{ter} Ordnung gegenüber der elliptischen Thetareihe. Dass diese Erweiterung der Zetafunctionen naturgemäss ist, zeigt sich vor allem darin, dass sich der oben angeführte Riemann'sche Satz über die Function $\zeta(s)$ in überraschend einfacher Weise auf die allgemeinste Zetafunction übertragen lässt.

In diesem Zusammenhang treten auch die von Dirichlet in die Analysis eingeführten nach negativen Potenzen quadratischer Formen fortschreitenden Reihen als die einfachsten Zetafunctionen zweiter Ordnung auf. Die Bestimmung der Functionswerthe für $s = 2$ spielt bekanntlich eine sehr wichtige Rolle in den Untersuchungen „zur Theorie der elliptischen Functionen", welche die Reihe der Kronecker'schen Publicationen in den Berliner Monatsberichten in so glänzender Weise beschliessen. Die Resultate Kronecker's auf neuem Wege abzuleiten und so weit als möglich auf allgemeine Zetafunctionen auszudehnen ist die Aufgabe des zweiten Theils der vorliegenden Arbeit. Dabei ist der Gang unserer Untersuchung in gewisser Weise demjenigen Kronecker's entgegengesetzt; denn während Kronecker*) einen aus elliptischen Thetafunctionen zusammengesetzten Ausdruck $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ construirt und dessen Logarithmus in eine Dirichlet'sche Reihe überführt, gehen wir von der Zetafunction aus und gelangen allein durch Anwendung einer Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe zu dem gewünschten Ziel; diese Methode lässt sich dann ihrem Wesen nach unmittelbar auf Zetafunctionen p^{ter} Ordnung übertragen.

§ 1.

Ich bezeichne als *Zetafunction* 1. *Ordnung* mit der Charakteristik $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ eine einwerthige Function der complexen Variablen s, welche für alle Werthe von s, deren reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, durch die Reihe

$$(1) \qquad Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i m h}}{[(g+m)^2]^{\frac{s}{2}}}$$

definirt wird.

*) Vgl. Zur Theorie der elliptischen Functionen I. Berliner Monatsberichte 1883.

Darin bedeuten g, h reelle Zahlen, welche wir vorläufig als *nicht ganzzahlig* annehmen, und die Potenzen im Nenner der Reihenglieder mögen durch

$$[(g+m)^2]^{\frac{s}{2}} = e^{s \log|g+m|} \quad (\log|g+m| \text{ reell})$$

definirt sein.

Infolge der Relationen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\mathsf{Z}\left|\begin{matrix} -g \\ h \end{matrix}\right|(s) = \mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ -h \end{matrix}\right|(s), \qquad \mathsf{Z}\left|\begin{matrix} -g \\ -h \end{matrix}\right|(s) = \mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s), \\ &\mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g+1 \\ h \end{matrix}\right|(s) = e^{-2\pi i h}\,\mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s), \quad \mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h+1 \end{matrix}\right|(s) = \mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s) \end{aligned}$$

dürfen wir die Zahlen g, h auf positive Werthe zwischen 0 und 1 beschränken.

Wir gewinnen eine Darstellung der Z-function durch ein bestimmtes Integral, wenn wir in dem bekannten Integral

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty z^{s-1} e^{-nz}\, dz$$

$\frac{s}{2}$ an Stelle von s, $\pi(g+m)^2$ an Stelle von n setzen, und nach Multiplication mit $e^{2\pi i m h}$ über alle ganzzahligen Werthe von m summiren. Wir erhalten dann

$$(4)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s) = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z (g+m)^2 + 2\pi i m h}.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine einfach unendliche Thetareihe mit dem Parameter zi, welche wir mit leichter Abänderung der gewöhnlichen Schreibweise durch

$$\vartheta\left\|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0, z)$$

bezeichnen, sodass

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathsf{Z}\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s) = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(0, z).$$

Dieses bestimmte Integral verliert, ebenso wie die der Betrachtung zu Grunde liegende Reihe, seine Gültigkeit, sobald der reelle Theil von s kleiner als 1 wird. Spalten wir es aber — ebenso wie es Riemann bei der Function $\zeta(s)$ gethan hat*) — in die beiden Theile

*) Die Aehnlichkeit dieses Verfahrens mit der bekannten Behandlung der Gammafunction durch Herrn Prym scheint noch nicht ausdrücklich hervorgehoben zu sein.

$$\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0,z)+\int_0^1 dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0,z),$$

so existirt das erste Integral für jeden complexen Werth von s und stellt eine ganze transcendente Function dieser Variablen dar.

Im zweiten Integral wenden wir auf die Thetareihe die lineare Transformation $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ an. Wir wollen diese Transformation, von der wir noch wiederholt Gebrauch zu machen haben, aus leicht ersichtlichem Grunde, als *reciproke* Transformation bezeichnen. Es wird dann

$$\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0,z)=\frac{e^{-2\pi igh}}{\sqrt{z}}\,\vartheta\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|\left(0,\frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

worin $\sqrt{z}$ mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist.

Führen wir dies in das obige Integral ein und setzen gleichzeitig $\frac{1}{z}$ an Stelle von z, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)=&\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(0,z)\\&+e^{-2\pi igh}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|(0,z),\end{aligned} \tag{6}$$

und diesen Ausdruck betrachten wir für alle nicht ganzzahligen Werthe von g und h als *Definition der Zetafunction* 1. *Ordnung* bei unbeschränkt veränderlichem s.

Setzen wir $1-s,\ h,\ -g$ an Stelle von $s,\ g,\ h$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|(1-s)=&\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}g\\-h\end{matrix}\right|(0,z)\\&+e^{2\pi igh}\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\left|\begin{matrix}-g\\-h\end{matrix}\right|(0,z);\end{aligned}$$

da aber

$$\vartheta\left|\begin{matrix}-g\\-h\end{matrix}\right|=\vartheta\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|$$

ist, so ergiebt sich die von Herrn Lipschitz gefundene Transformationsgleichung

$$e^{2\pi igh}\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)Z\left|\begin{matrix}h\\-g\end{matrix}\right|(1-s). \tag{7}$$

§ 2.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass eine der beiden Zahlen g, h *ganzzahlig* ist; dabei genügt es, in Folge der Relationen (2) des vorigen Paragraphen sie gleich *Null* anzunehmen.

Sei also zunächst $h = 0$ und g nicht ganzzahlig. Dann ist

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ 0 \end{matrix}\right|(s) = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z (g+m)^2}$$

oder mit Benutzung der Transformationsformel (5)

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ 0 \end{matrix}\right|(s) = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z (g+m)^2}$$
$$+ \int_0^1 dz \frac{z^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{z}} \left(1 + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\frac{\pi m^2}{z} - 2\pi i m g}\right),$$

worin der Accent beim zweiten Summenzeichen andeuten soll, dass das Glied für $m = 0$ aus der Summe wegzulassen ist. Wir erhalten hieraus

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ 0 \end{matrix}\right|(s) = \frac{2}{s-1} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \vartheta\left|\begin{matrix} g \\ 0 \end{matrix}\right|(0, z) \tag{1}$$
$$+ \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{1-s}{2}-1} \left(\vartheta\left|\begin{matrix} 0 \\ g \end{matrix}\right|(0, z) - 1\right)$$

als allgemeine Definition der Zetafunction für diesen Fall.

Ist dagegen $g = 0$, so haben wir aus der Zetareihe das Glied für $m = 0$ fortzulassen, also ist

$$Z\left|\begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix}\right|(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i m h}}{(m^2)^{\frac{s}{2}}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n h}{n^s}, \tag{2}$$

und durch eine ähnliche Betrachtung wie oben finden wir

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix}\right|(s) = -\frac{2}{s} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \left(\vartheta\left|\begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix}\right|(z) - 1\right) \tag{3}$$
$$+ \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{1-s}{2}-1} \vartheta\left|\begin{matrix} h \\ 0 \end{matrix}\right|(z).$$

Jetzt ergiebt sich aber aus den Formeln (1) und (3) die Beziehung

$$(4)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix}(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} 0 \\ g \end{vmatrix}(1-s),$$

d. h. die Transformationsgleichung (7) des vorigen Paragraphen gilt auch für ganzzahlige Werthe von g oder h.

Sind endlich beide Zahlen g, h Null, so haben wir die Riemann'sche Function $\zeta(s)$, welche mit unseren Bezeichnungen in wesentlicher Uebereinstimmung mit Riemann durch den Ausdruck

$$2\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{2}{s} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(0, z) - 1\right)$$
$$+ \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(0, z) - 1\right)$$

definirt ist.

Die bisherigen Entwicklungen lassen folgende Eigenschaften der Zetafunction erkennen:

Die Zetafunction 1. Ordnung $Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s)$ ist — solange nicht h ganze Zahl ist — *ganze transcendente Function von s.*

Ist h ganze Zahl, so wird die Zetafunction nur für $s = 1$ zur ersten Ordnung unstetig und zwar ist in der Umgebung dieses Punktes

$$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s) = \frac{2}{s-1} + c_0 + c_1(s-1) + \cdots \qquad h \text{ ganze Zahl.}$$

Die Function verschwindet für jede Charakteristik in den Punkten $s = -2, -4, -6 \cdots$.

Für $s = 0$ verschwinden die Zetafunctionen jeder Charakteristik ausser denjenigen mit *ganzzahligem* g. Für diese ist

$$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(0) = -e^{-2\pi i g h} \qquad g \text{ ganze Zahl.}$$

Das letzte folgt unmittelbar aus der Transformationsformel (7), wenn man beiderseits mit s multiplicirt und zur Grenze $s = 0$ übergeht.

§ 3.

Es sei

$$\varphi((x)) = \sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \qquad (c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu})$$

eine quadratische Form von p Veränderlichen, deren *reeller Theil positiv* und deren Determinante von Null verschieden sei.

Ersetzen wir darin die Veränderlichen durch $x_\mu + y_\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots p)$, so schreiben wir symbolisch

$$\varphi(\!(x+y)\!) = \sum_\mu \sum_\nu c_{\mu\nu}(x_\mu + y_\mu)(x_\nu + y_\nu)$$
$$= \varphi(\!(x)\!) + \varphi(\!(y)\!) + 2\sum_\mu \sum_\nu c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu.$$

Ferner seien $g_1 g_2 \cdots g_p$, $h_1 h_2 \cdots h_p$ reelle Zahlen, von denen wir vorläufig voraussetzen, dass nicht gleichzeitig alle Zahlen der einen oder der andern Reihe ganzzahlig sind. Wir bilden dann die p-fach unendliche Reihe

$$(1)\qquad \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu}}{\varphi(\!(g+m)\!)^{\frac{s}{2}}},$$

worin die Summation über alle ganzzahligen Werthe der Indices m_μ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist. Dabei sind die Potenzen

$$\varphi(\!(g+m)\!)^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2}\log\varphi((g+m))}$$

durch die Festsetzung eindeutig definirt, dass der imaginäre Theil von $\log\varphi(\!(g+m)\!)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll.

Die *Convergenz* derartiger Reihen lässt sich im Anschluss an die bedeutende Abhandlung von Eisenstein über die elliptischen Doppelproducte (Crelle, Bd. 35) leicht entscheiden*). Eisenstein beweist darin folgenden Satz:

Bildet man mit Hülfe von p^2 *reellen* Constanten $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \cdots p)$ die linearen Verbindungen der Indices $m_1 m_2 \cdots m_p$:

$$w_\mu = a_{\mu 1} m_1 + a_{\mu 2} m_2 + \cdots + a_{\mu p} m_p \qquad \mu = 1, 2, \cdots p$$

und sind $c_1 c_2 \cdots c_p$ weitere *reelle* Zahlen, so convergirt die p-fache Reihe

$$\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{1}{[(w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2]^{\frac{s}{2}}},$$

sobald der reelle Theil von s grösser als p ist.

*) Vgl. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Functionen XX. Berl. Sitzungsberichte 1890, S. 104. Picard, Traité d'analyse Bd. I, S. 269.

Wir wenden auf die quadratische Form $\varphi((x)) = \sum\sum c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ eine lineare Transformation mit reellen Coefficienten an, durch die der reelle Theil derselben in eine Summe von Quadraten verwandelt wird. Sei dieselbe

$$\mathsf{X}_\mu = a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \cdots + a_{\mu p} x_p, \qquad \mu = 1, 2, \cdots p$$

so ist also

$$\varphi((x)) = \mathsf{X}_1^2 + \mathsf{X}_2^2 + \cdots + \mathsf{X}_p^2 + i\psi((\mathsf{X})),$$

folglich

$$\varphi((m+g)) = (w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2 + i\psi((w+c)),$$

worin

$$w_\mu = a_{\mu 1} m_1 + a_{\mu 2} m_2 + \cdots + a_{\mu p} m_p,$$
$$c_\mu = a_{\mu 1} g_1 + a_{\mu 2} g_2 + \cdots + a_{\mu p} g_p.$$

Dann ist aber

$$\operatorname{mod} \varphi((m+g)) > (w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2$$

und daraus ergiebt sich, dass unsere Reihe unter derselben Bedingung convergirt, wie die Eisenstein'sche, also sobald der *reelle Theil von s grösser als p* ist.

Wir dürfen also in dem so begrenzten Gebiet die Reihe (1) als Definition einer Function von s:

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \ldots h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu}}{\varphi((m+g))^{\frac{s}{2}}} \tag{2}$$

ansehen und bezeichnen sie als *Zetafunction p^{ter} Ordnung mit der „Charakteristik" $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ und den „Moduln" $c_{\mu\nu}$.*

Es ergeben sich hieraus sofort die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\mathsf{Z}\begin{vmatrix} -g_1, & -g_2, & \cdots, & -g_p \\ h_1, & h_2, & \cdots, & h_p \end{vmatrix}(s) = \mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1, & g_2, & \cdots, & g_p \\ -h_1, & -h_2, & \cdots, & -h_p \end{vmatrix}(s), \\
&\mathsf{Z}\begin{vmatrix} -g_1, & -g_2, & \cdots, & -g_p \\ -h_1, & -h_2, & \cdots, & -h_p \end{vmatrix}(s) = \mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \ldots h_p \end{vmatrix}(s), \\
&\mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots\ g_\mu\ \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \cdots h_\mu+1, \cdots h_p \end{vmatrix}(s) = \mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots g_\mu \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \cdots h_\mu \cdots h_p \end{vmatrix}(s), \\
&\mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots g_\mu+1, \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \cdots\ h_\mu\ \cdots h_p \end{vmatrix}(s) = e^{-2\pi i h_\mu}\mathsf{Z}\begin{vmatrix} g_1\ g_2 \cdots g_\mu \cdots g_p \\ h_1\ h_2 \cdots h_\mu \cdots h_p \end{vmatrix}(s).
\end{aligned} \tag{3}$$

Führen wir an Stelle der Indices $m_1\, m_2 \cdots m_p$ neue Summationsbuchstaben $n_1\, n_2 \cdots n_p$ durch die lineare Substitution ein:

$$n_\mu = \alpha_{1\mu} m_1 + \alpha_{2\mu} m_2 + \cdots + \alpha_{p\mu} m_p \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

worin die α ganze Zahlen bedeuten, deren Determinante gleich 1 ist, so erhalten wir folgende Transformationsformel für die Zetafunction:

Es ist

$$(4) \qquad Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = Z\left|\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix}\right|(s)_{\varphi'},$$

wenn die Charakteristik der neuen Zetafunction durch die Formeln

$$(4\text{a}) \qquad g'_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{p} \alpha_{\varkappa\mu}\, g_\varkappa, \qquad h'_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{p} \alpha'_{\varkappa\mu}\, h_\varkappa,$$

und die neuen Moduln durch die Formeln

$$(4\text{b}) \qquad c'_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \sum_{\lambda} \alpha'_{\varkappa\mu}\, \alpha'_{\lambda\nu}\, c_{\varkappa\lambda}$$

bestimmt werden. Darin bedeutet $\alpha'_{\mu\nu}$ die zu $\alpha_{\mu\nu}$ gehörende Unterdeterminante der Determinante $\sum \pm \alpha_{11}\, \alpha_{22} \cdots \alpha_{pp} = 1$.

Es bildet also die Zetafunction im Sinne Kronecker's eine Invariante der durch die Gleichungen (4a) und (4b) definirten Aequivalenz.

§ 4.

Um die Zetafunction über den Convergenzbereich der p-fachen Reihe hinaus fortzusetzen, stellen wir sie durch ein bestimmtes Integral dar, und zwar erhalten wir ganz ähnlich wie in § 1 mit Hülfe des dort angeführten Integrals (3) die Formel

$$(1) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g_1\, g_2 \cdots g_p \\ h_1\, h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

$$= \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine p-fach unendliche Thetareihe mit den Moduln

$$a_{\mu\nu} = -\pi c_{\mu\nu} \cdot z,$$

welche bei unserer Annahme über die quadratische Form φ innerhalb der Integrationsgrenzen unter allen Umständen convergirt. Sie würde nach der Schreibweise der Herren Krazer und Prym (Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen) mit

$$e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}\, \vartheta\left|\begin{matrix} g_1\; g_2 \cdots g_p \\ h_1\; h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right|(0\,|\,0 \cdots |\,0)_a$$

zu bezeichnen sein. Um jedoch die Abhängigkeit von der Integrationsvariablen z hervortreten zu lassen, schreiben wir

$$(2)\qquad \sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p} e^{-\pi z\varphi((g+m))+2\pi i\sum\limits_{\mu} m_\mu h_\mu} = \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi$$

und haben dann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \int\limits_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi$$
$$+\int\limits_0^1 dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi,$$

worin das erste Integral für jeden complexen Werth von s gültig bleibt.

Auf die Thetareihe im zweiten Integral wenden wir die *reciproke* Transformation

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0\cdots & 0 & 1 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 1\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 1 \\ \hline -1 & 0\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & -1\cdots & 0 & 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & -1 & 0 & 0\cdots & 0 \end{array}\right|$$

an. Die Transformationsformel lautet*):

$$(3)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i\sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}}{z^{\frac{p}{2}}\sqrt{\Delta}}\,\vartheta\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_p \end{vmatrix}\left(0,\frac{1}{z}\right)_\Phi.$$

Darin bedeutet Δ die Determinante der Form φ:

$$(3\text{a})\qquad \Delta = \sum \pm c_{11}\,c_{22}\cdots c_{pp},$$

deren Quadratwurzel mit positivem reellen Bestandtheil anzunehmen ist, und die Thetareihe auf der rechten Seite ist mit der zu φ *reciproken Form***)

*) Vgl. Krazer und Prym a. a. O. S. 88.

**) Nach der Bezeichnung von Herrn Frobenius.

$$\Phi((x)) = \sum_\mu \sum_\nu c'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

zu bilden, worin

(3b)
$$c'_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{\mu\nu}}.$$

Mit Hülfe dieser Transformationsformel, welche natürlich die Verallgemeinerung der von **Riemann** benutzten Cauchy'schen Formel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z m^2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{z} m^2}$$

darstellt, erhalten wir jetzt, wenn wir noch in dem zweiten Integral oben $\frac{1}{z}$ an Stelle von z einführen:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix} (0, z)_\varphi$$

$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} h_1 \cdots h_p \\ -g_1 \cdots -g_p \end{vmatrix} (0, z)_\Phi$$

oder

(4)
$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu h_\mu}$$

$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \Phi((h+m)) - 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu g_\mu}$$

und diesen Ausdruck betrachten wir als *Definition der allgemeinen Zetafunction* bei unbeschränkt veränderlichem s, solange nicht gleichzeitig alle Zahlen g oder h ganzzahlig sind.

Setzen wir $p-s, h_\mu, -g_\mu, c'_{\mu\nu}$ an Stelle von $s, g_\mu, h_\mu, c_{\mu\nu}$ $\binom{\mu=1,2,\cdots p}{\nu=1,2,\cdots p}$, so erhalten wir mit Benutzung bekannter Determinantensätze die Formel

(5)
$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots h_p \end{vmatrix} (s)_\varphi$$

$$= \frac{e^{-2\pi i \sum\limits_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \cdots & h_p \\ -g_1 & -g_2 \cdots & -g_p \end{vmatrix} (p-s)_\Phi,$$

deren Inhalt man auch durch den folgenden Satz ausdrücken kann:

Der Ausdruck

$$\sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\begin{vmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi$$

ist eine Invariante der Aequivalenz

$$(s,\, g_\mu,\, h_\mu,\, c_{\mu\nu}) \sim (p-s,\, h_\mu,\, -g_\mu,\, c'_{\mu\nu}). \qquad \begin{matrix}\mu = 1, 2, \cdots p \\ \nu = 1, 2, \cdots p\end{matrix}$$

Es lässt sich jetzt ganz ähnlich wie in § 2 zeigen, dass dieser Satz für *alle* Werthe der reellen Zahlen g und h bestehen bleibt. Wir haben nur wieder, falls alle Zahlen g oder h gleichzeitig ganze Zahlen sind, die obige Integraldarstellung der Zetafunction so zu modificiren, dass die Integrale für alle Werthe von s stetig bleiben. Dabei genügt es, in Folge der Relationen (3) des vorigen Paragraphen, die Zahlen g oder h gleich Null anzunehmen. Wir erhalten dann für diese Fälle folgende Integraldarstellungen der Zetafunction:

1) Alle Zahlen $h_1 \cdots h_p$ gleich Null.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\begin{vmatrix} g \\ 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2}{\sqrt{\Delta}\,(s-p)} + \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m))}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \Phi((m)) - 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu g_\mu}.$$

2) Alle Zahlen $g_1 \cdots g_p$ gleich Null.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\begin{vmatrix} 0 \\ h \end{vmatrix}(s)_\varphi = -\frac{2}{s} + \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \varphi((m)) + 2\pi i \sum\limits_\mu m_\mu h_\mu}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \Phi((m+h))}.$$

3) Alle Zahlen $g_1 \cdots g_p$, $h_1 \cdots h_p$ gleich Null.

$$Z\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' \frac{1}{\varphi((m))^{\frac{s}{2}}},$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2}{\sqrt{\Delta}\,(s-p)} - \frac{2}{s} + \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \varphi((m))}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int\limits_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \Phi((m))}.$$

Dabei deutet der Accent bei den Summenzeichen an, dass die Combination $m_1 = 0,\ m_2 = 0, \cdots m_p = 0$ beim Summiren auszulassen ist.

Nach den vorausgegangenen Entwicklungen können wir jetzt folgende Eigenschaften der allgemeinen Zetafunction p^{ter} Ordnung feststellen:

Die Zetafunction $Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(s)$ ist — solange nicht alle Zahlen $h_1 \cdots h_p$ gleichzeitig ganze Zahlen sind — *ganze transcendente Function von s.*

Sind alle Zahlen h ganze Zahlen, so wird die Zetafunction nur für $s = p$ zur ersten Ordnung unstetig und es ist in der Umgebung dieses Punktes:

$$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s-p} + c_0 + c_1(s-p) + \cdots.$$

Alle Zetafunctionen verschwinden in den Punkten $s = -2,\ -4,\ -6 \cdots$.

Für $s = 0$ verschwinden die Zetafunctionen jeder Charakteristik, ausser wenn *alle Zahlen g ganze Zahlen* sind. In diesem Falle ist

$$Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0) = -e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}.$$

Für specielle Charakteristiken kann *identisches Verschwinden* der Zetafunction eintreten, und zwar nicht nur für jeden Werth von s, sondern auch für alle beliebigen Werthe der Moduln $c_{\mu\nu}$.

Wir begnügen uns, folgende Sätze anzuführen:

Seien die Zahlen $g_1 \cdots g_p,\ h_1 \cdots h_p$ entweder Null oder $\frac{1}{2}$ und derart gewählt, dass

$$4 \sum g_\mu h_\mu \equiv 1 \bmod 2,$$

so verschwindet die Zetafunction identisch bezüglich des Argumentes s und der Moduln $c_{\mu\nu}$ und zwar in der Weise, dass *immer zwei Glieder des zur Definition der Zetafunction dienenden Reihenausdrucks sich gegenseitig aufheben.*

Die angegebenen Charakteristiken sind natürlich diejenigen der *ungraden* Thetafunctionen, der obige Satz kann aber leicht ohne Zuhülfenahme der Lehre von den Thetafunctionen abgeleitet werden.

Eine nothwendige Ergänzung dieses Satzes ist der folgende Satz:

Es giebt ausser den angeführten keine anderen aus rationalen Zahlen gebildeten Charakteristiken von der Art, dass immer zwei oder mehr Glieder des Reihenausdrucks einander aufheben.

§ 5.

Wir wenden uns jetzt zu einer eingehenderen Betrachtung der *Zetafunctionen zweiter Ordnung*, die wegen der schönen ihnen gewidmeten Untersuchungen Kronecker's*) ein besonderes Interesse beanspruchen dürfen.

Kronecker beschäftigt sich nur mit Zetafunctionen, bei denen die Zahlen g_1 und g_2 Null sind, und er löst die beiden folgenden Aufgaben:

Erstens bestimmt er den Werth von $Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi$ für $s=2$.

Zweitens bestimmt er die Constante c_0 in der Reihenentwicklung

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}\,(s-2)} + c_0 + c_1(s-2) + \cdots.$$

Wir nehmen zunächst die zweite, einfachere, Aufgabe in Angriff. Wir legen dabei in etwas veränderter Bezeichnung der Zetafunction die quadratische Form

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

zu Grunde mit der Determinante

$$\Delta = ac - b^2. \tag{2}$$

Soll der reelle Theil dieser Form (bei reellen Variablen) positiv sein, so muss sein**):

$$\begin{gathered}(a) > 0, \qquad (c) > 0, \\ (a)\,(c) - (b)^2 > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Wir bezeichnen ferner mit ω_1 und ω_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$az^2 + 2bz + c = 0,$$

also

$$\omega_1 = -\frac{b}{a} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}, \qquad \omega_2 = -\frac{b}{a} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}. \tag{4}$$

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass — bei unserer Voraussetzung über die Form φ — die reellen Theile von $i\omega_1$ und $i\omega_2$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wir können also *das Vorzeichen von* $\sqrt{\Delta}$ so festsetzen, dass

$$(i\omega_1) < 0, \qquad (i\omega_2) > 0 \tag{5}$$

ist. Es genügt zu diesem Zweck, das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta}$ so zu wählen, dass

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right) > 0$$

---

*) Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berliner Sitzungsberichte 1883—1890.

**) Wir bezeichnen mit (a) den *reellen Theil* einer Grösse a.

wird. Dadurch wird dann auch

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{c}\right) > 0.$$

Wir haben jetzt für die einfachste Zetafunction zweiter Ordnung

$$(6)\qquad \mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' \frac{1}{(a m_1^2 + 2 b m_1 m_2 + c m_2^2)^{\frac{s}{2}}}$$

die Integraldarstellung

$$(7)\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(a m_1^2 + 2 b m_1 m_2 + c m_2^2)} - 1\right).$$

Für die hier vorkommende zweifach unendliche Thetareihe, oder vielmehr für die allgemeinere

$$(8)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z[a(m_1+g_1)^2 + 2b(m_1+g_1)(m_2+g_2) + c(m_2+g_2)^2] + 2\pi i(m_1 h_1 + m_2 h_2)}$$

leiten wir eine Transformationsformel ab. Schreiben wir nämlich

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0,z)_\varphi = \sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi a z\left[m_1 + g_1 + \frac{b}{a}(m_2+g_2)\right]^2 - \frac{\pi z \Delta}{a}(m_2+g_2)^2 + 2\pi i m_1 h_1 + 2\pi i m_2 h_2},$$

so können wir die Summe nach m_1 als Thetareihe erster Ordnung betrachten und haben dann mit Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnung:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(0, z) = \sum_m e^{-\pi z(m+g)^2 + 2\pi i m h},$$

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi = \sum_{m_2} e^{-\frac{\pi z \Delta}{a}(m_2+g_2)^2 + 2\pi i m_2 h_2}\, \vartheta\begin{vmatrix} g_1 + \frac{b}{a}(m_2+g_2) \\ h_1 \end{vmatrix}(0, az).$$

Es ist aber in Folge der in § 1 angegebenen reciproken Transformation

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 + \frac{b}{a}(m_2+g_2) \\ h_1 \end{vmatrix}(0, az) = \frac{e^{-2\pi i g_1 h_1 - 2\pi i \frac{b}{a} h_1 (m_2+g_2)}}{\sqrt{az}}\,\vartheta\begin{vmatrix} h_1 \\ -g_1 - \frac{b}{a}(m_2+g_2) \end{vmatrix}\left(0, \frac{1}{az}\right)$$

$$= \frac{e^{-2\pi i g_1 h_1}}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - 2\pi i \frac{b}{a}(m_1+h_1)(m_2+g_2) - 2\pi i m_1 g_1}$$

und wir haben somit die folgende Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe:

$$(9)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi$$

$$= \frac{e^{-2\pi i g_1 h_1}}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z \Delta}{a}(m_2+g_2)^2 - 2\pi i \frac{b}{a}(m_1+h_1)(m_2+g_2) - 2\pi i m_1 g_1 + 2\pi i m_2 h_2}.$$

Diese Thetareihe convergirt, ebenso wie die ursprüngliche Reihe (8) für *alle positiven Werthe von* z.

Auf die in Formel (7) auftretende Thetareihe angewandt ergiebt dies:

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(a m_1^2+2b m_1 m_2+c m_2^2)}=\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-2\pi i\frac{b}{a}m_1 m_2}.$$

Spalten wir hier von der Reihe auf der rechten Seite zuerst die Glieder ab, bei welchen $m_2=0$, dann die, bei welchen $m_1=0$ ist, so erhalten wir

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z\varphi((m))}=\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2}+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-2\pi i\frac{b}{a}m_1 m_2}.$$

worin die Accente andeuten, dass die Summationsbuchstaben nicht den Werth Null annehmen dürfen.

Nun ist aber in Folge der in § 1 benutzten Transformationsformel

$$\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2}=\sum_{m_1} e^{-\pi a z m_1^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi a z n^2},$$

folglich ist

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(a m_1^2+2b m_1 m_2+c m_2^2)}-1=2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi a z n^2}+\frac{2}{\sqrt{az}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi z\Delta}{a}n^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-\frac{2\pi i b}{a}m_1 m_2}.$$

Dies führen wir in Formel (7) ein und erhalten sogleich den Ausdruck:

$$(10)\quad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(s)_\varphi=\frac{2}{a^{\frac{s}{2}}}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$
$$+\frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}}\pi^{-\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta(s-1)+R,$$

worin natürlich $\zeta(s)$ die Riemann'sche Zetafunction bezeichnet und

$$(11)\qquad R=\frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{2\pi i b}{a}m_1 m_2}\int_0^{\infty} dz\cdot z^{\frac{s-1}{2}-1}\,e^{-\frac{\pi\Delta}{a}m_2^2 z-\frac{\pi m_1^2}{az}}.$$

Führen wir hier $\frac{\pi\Delta}{a} m_2^2 z$ an Stelle von z als neue Integrationsvariable ein, so wird

$$(12)\quad R = \frac{1}{\sqrt{a}} \pi^{-\frac{s-1}{2}} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}} \sum_{m_1} \sum_{m_2}{}'' \frac{e^{-\frac{2\pi i b}{a} m_1 m_2}}{(m_2^2)^{\frac{s-1}{2}}} \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s-1}{2}-1} e^{-z-\frac{\pi^2 \Delta \cdot m_1^2 m_2^2}{a^2 z}}.$$

Die hier auftretenden Integrale sind von der Form

$$(13)\qquad \int_0^\infty dz \cdot z^{\alpha-1} e^{-z-\frac{t}{z}},$$

es ist aber vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass der *Integrationsweg* keineswegs die Axe der positiven reellen Zahlen ist, sondern eine Gerade, die den Nullpunkt mit dem Punkt $\frac{\Delta}{a}$ verbindet. Damit die Integrale existiren, muss der reelle Theil von $\frac{\Delta}{a}$ positiv sein, was jederzeit erreichbar ist. Dann behalten aber die Integrale für jeden Werth von s ihre Gültigkeit.

Die Integrale (13) lassen sich durch Bessel'sche Functionen ausdrücken, was wir jedoch hier nicht weiter ausführen wollen. Vielmehr benutzen wir eine schon von Kummer*) angegebene Umformung, nämlich

$$(14)\quad \int_0^\infty dz \cdot z^{\alpha-1} e^{-z-\frac{t}{z}} = \frac{2^{2\alpha+1}\sqrt{\pi}\, t^\alpha e^{-2\sqrt{t}}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty dz (z+z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-4z\sqrt{t}},$$

worin der reelle Theil von $\sqrt{t}$ positiv zu nehmen ist.

Hiermit erhalten wir:

$$R = \frac{2^s \pi^{\frac{s}{2}}}{a^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{m_1} \sum_{m_2}{}'' (m_1^2)^{\frac{s-1}{2}} e^{-\frac{2\pi i b}{a} m_1 m_2 - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{a} |m_1 m_2|} \int_0^\infty dz \cdot (z+z^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a} |m_1 m_2| z},$$

worin $|m_1 m_2|$ wie üblich den absoluten Werth bezeichnet. Lässt man hier m_1 und m_2 gesondert die Werthe von 1 bis ∞ und von -1 bis $-\infty$ durchlaufen, so zerfällt R in vier Doppelreihen, die man paarweise zusammenfassen kann. Dabei treten, wie man sofort sieht, in den Exponenten vor den Integralen die oben eingeführten Lösungen ω_1 und ω_2 auf, und wenn wir

---

*) Kummer, De integralibus quibusdam definitis. Crelle, Journal Bd. 17, S. 232.

(15) $$q_1 = e^{\pi i \omega_1}, \qquad q_2 = e^{-\pi i \omega_2}$$

setzen, so sind nach (5) die *absoluten Werthe von q_1 und q_2 stets kleiner als Eins.*

Gehen wir jetzt auf Formel (10) zurück, so erhalten wir folgenden Ausdruck für unsere Zetafunction zweiter Ordnung:

$$(16)\quad Z\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2}{a^{\frac{s}{2}}}\zeta(s) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(s-1)$$
$$+\frac{2^{s+1}\pi^s}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} n_1^{s-1}\left(q_1^{2n_1n_2}+q_2^{2n_1n_2}\right)\int_0^\infty dz\,(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}n_1n_2z}.$$

Hiermit können wir aber die im Eingang des Paragraphen gestellte Aufgabe, den Anfang der Reihenentwicklung in der Umgebung des Punktes $s = 2$ zu finden, leicht lösen.

Für $s = 2$ haben die Integrale den Werth $\frac{a}{4\pi\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{n_1 n_2}$ und die nach n_2 genommenen Summen lassen sich ausführen.

Ferner ist

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

und es gelten in der Umgebung von $s = 2$ die bekannten Reihenentwicklungen:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{\Delta}}\left[1+\frac{s-2}{2}\log\left(\frac{a}{\Delta}\right)+\cdots\right],$$
$$\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\,[1-(s-2)\log 2+\cdots],$$
$$\zeta(s-1) = \frac{1}{s-2}+\gamma+\cdots,$$

worin

$$\gamma = 0{,}57721566\cdots$$

die *Euler'sche Constante* bedeutet.

Damit erhalten wir schliesslich aus (16) übereinstimmend mit Herrn Weber*) in der Umgebung von $s = 2$:

*) Weber, Math. Annalen Bd. 33, S. 395. Vgl. Franel, Sur une formule fondamentale de Kronecker. Math. Annalen Bd. 48. Bei Kronecker (Berl. Sitzungsberichte, 1889 S. 135) lautet — in unserer Schreibweise — das dritte Glied

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{2\Delta}\right).$$

(17)
$$\lim_{s=2}\left(Z\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(s)_\varphi-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}(s-2)}\right)$$
$$=\frac{\pi^2}{3a}+\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\Delta}}+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{4\Delta}\right)-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_1^{2n})\,(1-q_2^{2n}).$$

oder mit Einführung der Function

$$\eta(\omega)=q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

$$\lim_{s=2}\left(Z\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(s)_\varphi-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}(s-2)}\right)=\frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\Delta}}+\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{4\Delta}\right)-\frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\eta(\omega_1)\,\eta(-\omega_2).$$

Die Formel (16) liefert aber auch die Werthe der Zetafunction für $s=4,6,\cdots$, denn die Integrale auf der rechten Seite lassen sich für diese Fälle auswerthen. So erhalten wir

$$Z\begin{vmatrix}0&0\\0&0\end{vmatrix}(4)_\varphi=\frac{\pi^4}{45a^2}+\frac{\pi a}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\zeta(3)+\frac{2\pi^2}{\Delta}[\psi(q_1)+\psi(q_2)]+\frac{\pi a}{\Delta^{\frac{3}{2}}}[\chi(q_1)+\chi(q_2)],$$

worin

$$\psi(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{n^2(1-q^{2n})^2},$$
$$\chi(q)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{n^3(1-q^{2n})}.$$

§ 6.

Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen lässt sich die entsprechende Aufgabe für die Function

(1)
$$Z\begin{vmatrix}0&0\\h_1&h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi=\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'\frac{e^{2\pi i(m_1h_1+m_2h_2)}}{(am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2)^{\frac{s}{2}}}$$

unschwer erledigen. Wir dürfen dabei die Zahlen h_1 und h_2 zwischen Null und Eins annehmen.

Auf die in der Integraldarstellung

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0&0\\h_1&h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi=\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0&0\\h_1&h_2\end{vmatrix}(0,z)_\varphi-1\right)$$

auftretende Thetareihe wenden wir die Transformationsformel (9) an und erhalten ganz ähnlich wie oben

$$\vartheta\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(0,z)_\varphi - 1 = \sum_{m_1}{}' e^{-\pi a z m_1^2 + 2\pi i m_1 h_1}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z \Delta}{a} m_2^2 - \frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 + 2\pi i m_2 h_2},$$

wobei in der ersten Summe der Werth $m_1 = 0$, in der zweiten (Doppelsumme) der Werth $m_2 = 0$ auszulassen ist.

Wir erhalten damit

$$(2)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{1}{a^{\frac{s}{2}}}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0\\ h_1\end{vmatrix}(s) + R,$$

worin die Zetafunction *erster* Ordnung

$$Z\begin{vmatrix}0\\ h_1\end{vmatrix}(s) = \sum_m{}' \frac{e^{2\pi i m h_1}}{(m^2)^{\frac{s}{2}}}$$

auftritt und

$$R = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 + \pi i m_2 h_2}\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s-1}{2}-1} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z\Delta}{a} m_2^2}.$$

Hier führen wir wieder $\frac{\pi\Delta}{a} m_2^2 z$ als neue Integrationsvariable ein und wenden dann auf die Integrale die Kummer'sche Umformung (14) an. Dann erhalten wir

$$R = \frac{2^s \pi^{\frac{s}{2}}}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' [(m_1+h_1)^2]^{\frac{s-1}{2}} e^{-\frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{a}|(m_1+h_1)m_2| + 2\pi i m_2 h_2}$$
$$\cdot\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}|(m_1+h_1)m_2| z}.$$

R spaltet sich in sechs Summen, wenn wir zuerst die Glieder mit $m_1 = 0$ für positive und negative Werthe von m_2 zusammenfassen und dann m_1 und m_2 gesondert die Werthe von 1 bis ∞ und -1 bis $-\infty$ durchlaufen lassen. Dabei treten wieder die Grössen

$$q_1 = e^{\pi i \omega_1}, \qquad q_2 = e^{-\pi i \omega_2}$$

auf und ferner die Verbindungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} h_2 + h_1\omega_1 &= u_1,\\ h_2 + h_1\omega_2 &= u_2 \end{aligned}$$

und wir erhalten den folgenden Ausdruck, der der Formel (16) des vorigen Paragraphen entspricht:

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{1}{a^{\frac{s}{2}}}\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 \\ h_1 \end{vmatrix}(s)$$

$$+\frac{2^s\pi^s}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} h_1^{s-1}(e^{2\pi i n u_1}+e^{-2\pi i n u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}h_1 n z}$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_1+h_1)^{s-1}(q_1^{2n_1n_2}e^{2\pi i n_2 u_1}+q_2^{2n_1n_2}e^{-2\pi i n_2 u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}(n_1+h_1)n_2 z}$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_1-h_1)^{s-1}(q_1^{2n_1n_2}e^{-\pi i n_2 u_1}+q_2^{2n_1n_2}e^{2\pi i n_2 u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}(n_1-h_1)n_2 z}\Bigg].$$

Nehmen wir jetzt $s=2$, so ist

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 \\ h_1 \end{vmatrix}(2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n h_1}{n^2} = 2\pi^2\left(h_1^2-h_1+\frac{1}{6}\right);$$

ferner lassen sich die Integrale und die nach n_2 genommenen Summen auswerthen. Wir erhalten dann

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a}\left(h_1^2-h_1+\frac{1}{6}\right)$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\Bigg[\log(1-e^{2\pi i u_1})(1-e^{-2\pi i u_2})+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_1^{2n}e^{2\pi i u_1})(1-q_2^{2n}e^{-2\pi i u_2})$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_1^{2n}e^{-2\pi i u_1})(1-q_2^{2n}e^{2\pi i u_2})\Bigg].$$

Nun ist

$$\log(1-e^{2\pi i u_1})(1-e^{-2\pi i u_2}) = \log(4\sin\pi u_1 \sin\pi u_2)+\pi i(u_1-u_2)$$

und

$$u_1-u_2 = h_1(\omega_1-\omega_2) = 2ih_1\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

also

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a}\left(h_1^2+\frac{1}{6}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 2\sin\pi u_1\prod_1^\infty(1-2q_1^{2n}\cos 2\pi u_1+q_1^{4n})$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 2\sin\pi u_2\prod_1^\infty(1-2q_2^{2n}\cos 2\pi u_2+q_2^{4n})$$

und hier können wir durch

$$\vartheta(u, \omega) = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1-q^{2n}) \cdot \sin \pi u \prod_1^\infty (1-2q^{2n} \cos 2\pi u + q^{4n})$$

und

$$\prod_1^\infty (1-q^{2n}) = \frac{q^{-\frac{1}{12}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} \vartheta'(0, \omega)^{\frac{1}{3}} = q^{-\frac{1}{12}} \eta(\omega)$$

die *elliptische Thetafunction* einführen und erhalten schliesslich, wenn wir noch berücksichtigen, dass

$$\log q_1 + \log q_2 = \pi i(\omega_1 - \omega_2) = -2\pi \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

ist, die wichtige *Kronecker'sche Formel:*

$$(4) \quad Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_1 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a} h_1^2 - \frac{2\pi}{3\sqrt{\Delta}} \log(2\pi) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{\vartheta(u_1, \omega_1)\, \vartheta(u_2, -\omega_2)}{\vartheta'(0, \omega_1)^{\frac{1}{3}}\, \vartheta'(0, -\omega_2)^{\frac{1}{3}}},$$

oder in der Bezeichnung Kronecker's*):

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = -\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \Lambda(h_1, h_2, \omega_1, -\omega_2).$$

Auch hier führt die Benutzung der Function $\eta(\omega)$ zu einem etwas einfacheren Ausdruck, nämlich

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a} h_1^2 - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{\vartheta(u_1, \omega_1)\, \vartheta(u_2, -\omega_2)}{\eta(\omega_1)\, \eta(-\omega_2)}.$$

§ 7.

Wir können die eben abgeleitete Formel von Kronecker dazu benutzen, um den Werth der allgemeinen Zetafunction zweiter Ordnung $Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi$ im Punkte $s = 2$ zu bestimmen, wenn die Zahlen g_1 und g_2 *beliebige rationale Zahlen* sind.

Wollen wir zuerst die entsprechende Aufgabe für die Zetafunction *erster* Ordnung lösen, so handelt es sich hier um die Bestimmung des Functionswerthes für $s = 1$, also um die Reihe

$$(1) \qquad Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(1) = \sum_m \frac{e^{2\pi i h m}}{|m+g|},$$

wenn darin g rationale Zahl, also etwa

$$g = \frac{\gamma}{r} \qquad (\gamma < r)$$

ist. Wir können dabei γ von Null verschieden annehmen.

*) Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1889, S. 53.

Wir gehen aus von

$$(2)\qquad Z\left|\begin{matrix}0\\h\end{matrix}\right|(1)=\sum_m{}' \frac{e^{2\pi i h m}}{|m|}=-2\log(2\sin\pi h),$$

verstehen unter ϱ die r^{te} Einheitswurzel

$$(3)\qquad \varrho=e^{\frac{2\pi i}{r}},$$

unter ν irgend eine ganze Zahl und haben dann offenbar

$$\sum_m{}' \frac{\varrho^{\nu(m-\gamma)}\, e^{2\pi i h m}}{|m|}=-2\varrho^{-\nu\gamma}\log 2\sin\pi\left(h+\frac{\nu}{r}\right).$$

Summiren wir hier nach ν über ein vollständiges Restesystem mod r, so sind die Summen $\sum\limits_\nu \varrho^{\nu(m-\gamma)}$ sämmtlich Null, ausser wenn $m-\gamma$ durch r theilbar ist. In diesem Falle haben sie den Werth r. Wir finden also

$$r\sum_m \frac{e^{2\pi i h(mr+\gamma)}}{|mr+\gamma|}=e^{2\pi i h\gamma}\, Z\left|\begin{matrix}\frac{\gamma}{r}\\hr\end{matrix}\right|(1)=-2\sum_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-\nu\gamma}\log 2\sin\pi\left(h+\frac{\nu}{r}\right),$$

woraus sich leicht ergiebt, weil $\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-\nu\gamma}=0$ ist:

$$(4)\qquad Z\left|\begin{matrix}\frac{\gamma}{r}\\h\end{matrix}\right|(1)=-2\sum_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-(\nu+h)\gamma}\log\sin\frac{\pi(h+\nu)}{r}.$$

In ähnlicher Weise behandeln wir jetzt die Zetafunction zweiter Ordnung für $s=2$. Es seien

$$g_1=\frac{\gamma_1}{r},\qquad g_2=\frac{\gamma_2}{r},$$

worin γ_1 und γ_2 ganze Zahlen sind, die wir kleiner als die ganze Zahl r und wenigstens eine als von Null verschieden voraussetzen dürfen.

Wir setzen in der Formel (4) des vorigen Paragraphen für die Zetafunction auf der linken Seite die Reihe und haben, wenn wieder ν_1 und ν_2 irgend welche ganze Zahlen bedeuten

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' \varrho^{\nu_1(m_1-\gamma_1)+\nu_2(m_2-\gamma_2)}\cdot\frac{e^{2\pi i(m_1h_1+m_2h_2)}}{am_1^2+2b\,m_1m_2+cm_2^2}$$

$$=\varrho^{-(\nu_1\gamma_1+\nu_2\gamma_2)}\left[\frac{2\pi^2}{a}\left(h_1+\frac{\nu_1}{r}\right)^2-\frac{2\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log 2\pi\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{\vartheta\left(u_1+\frac{\nu_2+\nu_1\omega_1}{r},\omega_1\right)\vartheta\left(u_2+\frac{\nu_2+\nu_1\omega_2}{r},-\omega_2\right)}{\vartheta'(0,\omega_1)^{\frac{1}{3}}\,\vartheta'(0,-\omega_2)^{\frac{1}{3}}}\right].$$

Hier summiren wir nach ν_1 und ν_2 über vollständige Restesysteme mod r und erhalten für die linke Seite

$$r^2 \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e^{2\pi i(rm_1+\gamma_1)h_1 + 2\pi i(rm_2+\gamma_2)h_2}}{a(rm_1+\gamma_1)^2 + 2b(rm_1+\gamma_1)(rm_2+\gamma_2) + c(rm_2+\gamma_2)^2} = e^{2\pi i(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ rh_1 & rh_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi$$

und haben somit nach einiger Ueberlegung folgende Ergebnisse:

1) Ist γ_2 *von Null verschieden*, so ist $\sum_{\nu_2} \varrho^{-\nu_2\gamma_2} = 0$, also

(5)
$$Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu_1=0}^{r-1} \sum_{\nu_2=0}^{r-1} \varrho^{-(\nu_1+h_1)\gamma_1 - (\nu_2+h_2)\gamma_2} \log \vartheta\left(\frac{u_1+\nu_2+\nu_1\omega_1}{r}, \omega_1\right) \vartheta\left(\frac{u_2+\nu_2+\nu_1\omega_2}{r}, -\omega_2\right).$$

2) Ist $\gamma_2 = 0$, also jedenfalls γ_1 von Null verschieden, so ist $\sum_{\nu_1=0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1\gamma_1} = 0$, also

$$\varrho^{\gamma_1 h_1} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{ar}(2h_1 c_1 + c_2)$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu_1=0}^{r-1} \sum_{\nu_2=0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1\gamma_1} \log \vartheta\left(\frac{u_1+\nu_1\omega_1}{r} + \frac{\nu_2}{r}, \omega_1\right) \vartheta\left(\frac{u_2+\nu_1\omega_2}{r} + \frac{\nu_2}{r}, -\omega_2\right),$$

worin

$$c_1 = \sum_{\nu_1=1}^{r-1} \nu_1 \varrho^{-\nu_1\gamma_1} = \frac{r}{\varrho^{-\gamma_1}-1},$$

$$c_2 = \sum_{\nu_1=0}^{r-1} \nu_1^2 \varrho^{-\nu_1\gamma_1} = \frac{r^2}{\varrho^{-\gamma_1}-1} - \frac{2r\varrho^{-\gamma_1}}{(\varrho^{-\gamma_1}-1)^2}.$$

Diese Formel lässt sich durch Ausführung der nach ν_2 zu nehmenden Summe vereinfachen. Es ist nämlich

(6)
$$\prod_{\nu=0}^{r-1} \vartheta\left(u + \frac{\nu}{r}, \omega\right) = \frac{\eta(\omega)^r}{\eta(r\omega)} \vartheta(ur, r\omega),$$

folglich

$$\sum_{\nu_1=0}^{r-1} \sum_{\nu_2=0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1\gamma_1} \log \vartheta\left(\frac{u+\nu_1\omega_1}{r} + \frac{\nu_2}{r}, \omega\right) = \sum_{\nu_1=0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1\gamma_1} \log \vartheta(u + \nu_1\omega, r\omega),$$

also haben wir schliesslich

(7)
$$\varrho^{\gamma_1 h_1} Z\begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi$$
$$= \frac{2\pi^2}{ar}(2h_1 c_1 + c_2) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \varrho^{-\nu\gamma_1} \log \vartheta(u_1 + \nu\omega_1, r\omega_1)\,\vartheta(u_2 + \nu\omega_2, -r\omega_2).$$

Die Formeln (5) und (7) lassen sich verificiren, indem man sie in die für jedes s geltende Formel

$$\sum_{\gamma_1=0}^{r-1}\sum_{\gamma_2=0}^{r-1} e^{2\pi i(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)} Z\begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ h_1 r & h_2 r \end{vmatrix}(s)_\varphi = r^2 Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi$$

einführt und neben der Gleichung (6) noch die folgende:

$$\prod_{\nu=0}^{r-1} \vartheta\left(u + \frac{\nu\omega}{r}, \omega\right) = i^{r-1} e^{-\pi i u(r-1)} q^{-\frac{(r-1)(2r-1)}{6r}} \frac{\eta(\omega)^r}{\eta\left(\frac{\omega}{r}\right)} \vartheta\left(u, \frac{\omega}{r}\right)$$

benutzt.

Die eben abgeleiteten Formeln sind ebenso wie die Formeln Kronecker's unsymmetrisch in den Constanten g, h, a, b, c der Zetafunction. Es ergiebt sich aber aus der Invariantennatur der Zetafunction ohne Weiteres, dass diese Formeln ungeändert bleiben müssen gegenüber der Aequivalenz:

$$(g_1\, g_2\, h_1\, h_2\, a\, b\, c\, \omega_1\, \omega_2\, u_1\, u_2) \sim (g_2\, g_1\, h_2\, h_1\, c\, b\, a\, \omega_1'\, \omega_2'\, u_1'\, u_2')$$

wo

$$\omega_1' = -\frac{b}{c} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{c} = \frac{1}{\omega_2}, \qquad \omega_2' = -\frac{b}{c} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{c} = \frac{1}{\omega_1},$$
$$u_1' = h_1 + h_2\omega_1' = \frac{u_2}{\omega_2}, \qquad u_2' = h_1 + h_2\omega_2' = \frac{u_1}{\omega_1}.$$

§ 8.

Die in den letzten Paragraphen gegebene Ableitung der Sätze Kronecker's über die Zetafunctionen zweiter Ordnung beruht auf einer bestimmten Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe. Wir können diese Methode ihrem Wesen nach unmittelbar auf Zetafunctionen höherer Ordnung übertragen; es genügt dabei, wenn wir uns auf die einfachste Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$ beschränken. Es handelt sich also um die Zetafunction

(1)
$$Z\begin{vmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}' \frac{1}{\varphi((m))^{\frac{s}{2}}},$$

worin

$$\varphi((m)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu .$$

Wir wollen diese Function etwas einfacher durch

$$Z^{(p)}(s)_\varphi$$

bezeichnen und haben also nach § 4:

$$(2) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z^{(p)}(s)_\varphi = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((m))} - 1 \right).$$

Von der hier auftretenden p-fach unendlichen Thetareihe giebt es eine Reihe von p linearen Transformationen, die wir ähnlich wie in § 5 ableiten, indem wir die Summe nach q Summationsbuchstaben $m_1 \cdots m_q$ zu einer Thetareihe q^{ter} Ordnung zusammenfassen und auf sie die reciproke Transformation (§ 4, Formel (3)) anwenden.

Die letzte Transformation in dieser Reihe ist natürlich die reciproke Transformation selbst. Man erhält dann für die q^{te} Transformation*) folgendes System von Formeln:

Es bedeute Δ_q die Determinante

$$(3) \qquad \Delta_q = \sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{qq}$$

und es sei

$$(4) \qquad c_{\varkappa\lambda}^{(q)} = \frac{1}{\Delta_q} \frac{\partial \Delta_q}{\partial c_{\varkappa\lambda}}, \qquad \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots q$$

dann ist

$$(5) \qquad \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((m))} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \cdot \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{2\pi i \psi((m)) - \frac{\pi}{z} \varphi_1((m)) - \pi z \varphi_2((m))},$$

worin $\sqrt{\Delta_q}$ mit *positiv reellem* Theil zu nehmen ist und ferner

$\psi((m))$ bilineare Form von $m_1 m_2 \cdots m_p$,
$\varphi_1((m))$ quadratische Form von $m_1 \cdots m_q$,
$\varphi_2((m))$ quadratische Form von $m_{q+1} \cdots m_p$.

Und zwar ist

$$(6) \qquad \psi((m)) = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=q+1}^{p} d_{\mu\nu} m_\mu m_\nu, \quad \text{wo} \quad d_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{q} c_{\varkappa\mu}^{(q)} c_{\varkappa\nu},$$

$$(7) \qquad \varphi_1((m)) = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{q} c_{\mu\nu}^{(q)} m_\mu m_\nu,$$

*) Es ist die Transformation $T_{III}(q)$ nach der Terminologie der Herren Krazer und Prym. (Neue Grundlagen . . . S. 86.)

(8) $$\varphi_2((m)) = \sum_{\mu=q+1}^{p} \sum_{\nu=q+1}^{p} e_{\mu\nu} m_\mu m_\nu, \quad \text{wo} \quad e_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} - \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\lambda=1}^{q} c_{\varkappa\lambda}^{(q)} c_{\varkappa\mu} c_{\lambda\nu}.$$

Ich spalte jetzt die p-fache Reihe auf der rechten Seite von Formel (5), indem ich zuerst $m_{q+1}, m_{q+2}, \cdots m_p$ und dann $m_1 \cdots m_q$ gleichzeitig Null setze. Dann wird

$$\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((m))} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_q} e^{-\frac{\pi}{z} \varphi_1((m))}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \sum_{m_{q+1}} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \varphi_2((m))}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' e^{2\pi i \psi((m)) - \frac{\pi}{z} \varphi_1((m)) - \pi z \varphi_2((m))},$$

worin die Accente bei der letzten Reihe andeuten, dass weder gleichzeitig $m_1 \cdots m_q$ noch $m_{q+1} \cdots m_p$ Null sein dürfen.

Hier ist aber offenbar das erste Glied auf der rechten Seite in Folge der in § 4 angewandten Transformationsformel

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_q} e^{-\frac{\pi}{z} \varphi_1((m))} = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_q} e^{-\pi z \bar{\varphi}_q((m))},$$

wobei

(9) $$\bar{\varphi}_q((m)) = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{q} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$$

und wenn wir jetzt auf (2) zurückgehen, so ergiebt sich sofort:

(10) $$Z^{(p)}(s)_\varphi = Z^{(q)}(s)_{\bar{\varphi}_q} + \frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{\Delta_q}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} Z^{(p-q)}(s-q)_{\varphi_2} + R_q,$$

wo jetzt

$$R_q = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sqrt{\Delta_q}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' e^{2\pi i \psi((m))} \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s-q}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\pi}{z} \varphi_1((m)) - \pi z \varphi_2((m))}.$$

Diese Formel entspricht, wie man sieht, vollkommen der Formel (10) in § 5. Die Function $Z^{(p)}(s)_\varphi$ wird nur unstetig für $s = p$; diese Unstetigkeit steckt in dem zweiten Glied auf der rechten Seite, während die Unstetigkeit des ersten Gliedes im Punkte q durch das gleichzeitige Unstetigwerden von $\Gamma\left(\frac{s-q}{2}\right)$ aufgehoben wird. Es ist also R_q *ganze transcendente Function von s.*

Wir stellen uns, wie im Falle $p=2$, die Aufgabe, das constante Glied der Reihenentwicklung im Punkte p:

$$(11)\qquad Z^{(p)}(s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\cdot\frac{1}{s-p} + c_0 + c_1(s-p) + \cdots$$

zu bestimmen.

Wir nehmen die bisher unbestimmte ganze Zahl q gleich $p-1$ an. Dann ist zunächst Δ_q die zu c_{pp} gehörende Unterdeterminante der Determinante

$$\Delta = \sum \pm c_{11}\, c_{22} \cdots c_{pp},$$

also in der im § 4 benutzten Bezeichnung

$$\Delta_q = c'_{pp}\cdot\Delta,$$

und aus einem bekannten Determinantensatz folgt

$$c'_{pp}\cdot c^{(q)}_{\mu\nu} = c'_{pp}\, c'_{\mu\nu} - c'_{p\mu}\cdot c'_{p\nu}.$$

Wenn wir jetzt mit $f_{p-1}(\!(m)\!)$ die *lineare* Form von $m_1 \cdots m_{p-1}$:

$$(12)\qquad f_{p-1}(\!(m)\!) = \sum_1^{p-1} c'_{p\mu}\, m_\mu,$$

ferner mit $\Phi_{p-1}(\!(m)\!)$ die *quadratische* Form derselben Grössen:

$$(13)\qquad \Phi_{p-1}(\!(m)\!) = \sum_1^{p-1}\sum_1^{p-1} c'_{\mu\nu}\, m_\mu\, m_\nu$$

bezeichnen, so ergiebt sich aus (6), (7) und (8):

$$(14)\qquad \psi(\!(m)\!) = -\frac{m_p}{c'_{pp}}\, f_{p-1}(\!(m)\!),$$

$$\varphi_1(\!(m)\!) = \Phi_{p-1}(\!(m)\!) - \frac{1}{c'_{pp}}\, f_{p-1}(\!(m)\!)^2$$

oder auch

$$(15)\qquad \varphi_1(\!(m)\!) = \frac{\Delta_{p-1}}{c'_{pp}},$$

wo

$$(16)\qquad \Delta_{p-1} = c'_{pp}\,\Phi_{p-1} - f^2_{p-1},$$

während $\varphi_2(\!(m)\!)$ sich einfach auf

$$(17)\qquad \varphi_2(\!(m)\!) = \frac{m_p^2}{c'_{pp}}$$

reducirt.

Die Formen f_{p-1} und Φ_{p-1} sind mit der *Reciproken* $\Phi(\!(m)\!)$ der Form φ durch die Beziehung

$$\Phi((m)) = c'_{pp} m_p^2 + 2 f_{p-1} m_p + \Phi_{p-1} \tag{18}$$

verbunden und $\frac{\Delta_{p-1}}{c'_{pp}}$ ist die Reciproke von

$$\bar{\varphi}_{p-1}((m)) = \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu. \tag{19}$$

Die den Zetafunctionen zu Grunde liegende Form φ muss einen *positiv reellen* Bestandtheil haben; dann ist aber auch der reelle Theil der adjungirten Form Φ positiv und es ergiebt sich daraus, dass die reellen Theile von c'_{pp} und Φ_{p-1} positiv sind und auch

$$(c'_{pp}) \cdot (\Phi_{p-1}) - (f_{p-1})^2 > 0$$

ist. Führen wir jetzt noch die Wurzeln der gleich Null gesetzten rechten Seite von (18) ein, nämlich

$$\omega_1^{(p-1)} = -\frac{f_{p-1}}{c'_{pp}} + \frac{i\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}}, \quad \omega_2^{(p-1)} = -\frac{f_{p-1}}{c'_{pp}} - \frac{i\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}}, \tag{20}$$

so haben die reellen Theile von $i\omega_1^{(p-1)}$ und $i\omega_2^{(p-1)}$ entgegengesetzte Vorzeichen und wenn wir das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta_{p-1}}$ so wählen, dass der reelle Theil von $\frac{\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}}$ positiv ist, so ist stets

$$(i\omega_1^{(p-1)}) < 0, \qquad (i\omega_2^{(p-1)}) > 0.$$

Gehen wir jetzt auf Formel (10) zurück, so ist zunächst im zweiten Glied

$$Z^{(p-q)}(s-q)_{\varphi_2} = 2 c'_{pp}{}^{\frac{s-p+1}{2}} \zeta(s-p+1)$$

und daher

$$Z^{(p)}(s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}} c'_{pp}{}^{\frac{s-p}{2}}}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(s-p+1) + Z^{(p-1)}(s)_{\bar{\varphi}_{p-1}} + R_{p-1}, \tag{21}$$

und es ist jetzt

$$R_{p-1} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{c'_{pp}\,\Delta}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' e^{-2\pi i \frac{m_p}{c'_{pp}} f_{p-1}} \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s-p+1}{2}-1} e^{-\frac{\pi m_p^2}{c'_{pp}} z - \frac{\pi \Delta_{p-1}}{c'_{pp} z}},$$

worin beim Summiren sowohl $m_p = 0$, als auch die Combination

$$m_1 = 0 \cdots m_{p-1} = 0$$

auszuschliessen ist.

R_{p-1} behandeln wir jetzt ganz ähnlich, wie den entsprechenden Ausdruck in § 5 und finden mit Hülfe der dort angegebenen Kummer'schen Umformung

$$R_{p-1} = \frac{2^{s-p+2} \pi^{s-\frac{p}{2}+1}}{c_{pp}'^{\frac{s-p}{2}+1} \sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-p}{2}+1\right)}$$

$$\cdot \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' \Delta_{p-1}^{\frac{s-p+1}{2}} e^{-\frac{2\pi i m_p}{c'_{pp}} f_{p-1} - \frac{2\pi\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}} |m_p|} \int_0^\infty dz\, (z+z^2)^{\frac{s-p}{2}} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}} |m_p| z}.$$

Nunmehr ergiebt sich aber für $s = p$, wenn wir die Reihenglieder mit positiven und negativen Werthen des Summationsbuchstabens m_p gesondert zusammenfassen

$$R_{p-1} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{p-1}}{}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{2\pi i n \omega_1^{(p-1)}} + e^{-2\pi i n \omega_2^{(p-1)}}\right)$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log \prod_{m_1} \cdots \prod_{m_{p-1}}{}' \left(1 - e^{2\pi i \omega_1^{(p-1)}}\right)\left(1 - e^{-2\pi i \omega_2^{(p-1)}}\right).$$

Wir haben somit schliesslich aus (21) mit Benutzung bekannter Reihenentwicklungen, wenn wieder γ die Euler'sche Constante bedeutet

$$\lim_{s=p} \left(Z^{(p)}(s)_\varphi - \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s-p} \right)$$

$$= Z^{(p-1)}(p)_{\overline{\varphi}_{p-1}} + \mathsf{A} - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log \prod_{m_1} \cdots \prod_{m_{p-1}}{}' \left(1 - e^{2\pi i \omega_1^{(p-1)}}\right)\left(1 - e^{-2\pi i \omega_2^{(p-1)}}\right),$$

worin

$$\mathsf{A} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\, \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \left(\gamma - \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} + \log \frac{c'_{pp}}{4} \right).$$

Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf eine Zetafunction von niedrigerer Ordnung und auf ein merkwürdiges $(p-1)$ fach unendliches Product, welches eine Verallgemeinerung der Function $q^{-\frac{1}{12}} \eta(\omega) = \prod (1 - q^{2n})$ darstellt. Für $p = 2$ erhalten wir unmittelbar das Kronecker'sche Resultat.

Strassburg i. E., Januar 1902.