die Diskrepanz nur in einem Fehler bei der Bestimmung von $\beta$ liegen. Einen den Erwartungen entsprechenden Wert für $m^*/m_0$ würde man erhalten, wenn $\beta$ etwa die gleiche Größenordnung aufwiese wie beim CdS. Die Ergebnisse von NARITA kommen diesem $\beta$-Wert am nächsten.

### 5. Zusammenfassung

Zur Bestimmung der effektiven Masse von Ladungsträgern in hochohmigen Substanzen kommen vier Methoden in Frage: Messung der Plasmaresonanzfrequenz, der Faraday-Rotation, des Exzitonen Zeeman-Effekts und des Franz-Keldysch-Effekts. Die mit Hilfe der letztgenannten Methode erzielten Werte für die reduzierte effektive Masse in ZnS scheinen zu niedrig zu sein. Es wäre zweckmäßig, andere Verfahren zur Kontrolle heranzuziehen. In dieser Hinsicht sollte die von GOBRECHT und Mitarbeitern an Se durchgeführte Messung der Faraday-Rotation erfolgversprechend sein.

# Der aus dem Noetherschen Theorem folgende Energie-Impulstensor für das elektromagnetische Feld in Materie

U. E. SCHRÖDER *

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt (Main)

(Z. Naturforsch. **24 a**, 1356—1361 [1969]; eingegangen am 24. März 1969)

The often discussed question concerning the energy-momentum tensor of the electromagnetic field in matter can be answered using NOETHER's theorem. The separation of the electromagnetic system from the mechanical system introduced here leads to the asymmetric expression for the energy momentum tensor. From covariance with respect to scale transformations one further concludes that the trace of the energy-momentum tensor vanishes.

## 1. Einleitung

Für den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes in Materie sind in der älteren Literatur verschiedene Ansätze vorgeschlagen worden[1–4], deren Diskussion auch heute noch anhält[5–21, 22]. Nachdem früher die Abrahamsche Auffassung vom symmetrischen Energie-Impulstensor bevorzugt wurde, wandte sich in der jüngeren Vergangenheit das Interesse mehr dem von Minkowski eingeführten asymmetrischen Tensor zu[7, 8], während in neuerer Zeit die Abrahamsche Auffassung wieder diskutiert wird[23].

In den meisten neueren Beiträgen zu dieser strittigen Frage wird von einer bestimmten (anschaulichen) Situation der Wechselwirkung des

* Zur Zeit Institut für Theoret. Physik der Universität Karlsruhe, 75 Karlsruhe, Kaiserstraße 12.

1 H. MINKOWSKI, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 53 [1908]; Math. Ann. **68**, 472 [1910].

2 W. DÄLLENBACH, Ann. Phys. **58**, 523 [1919].

3 M. ABRAHAM, Rendiconti Palermo, **28**, [1909]; **30**, [1910]; Ann. Phys. **44**, 537 [1914].

4 W. PAULI, Encycl. d. Math. Wiss. **5**, 665 [1920]; The Theory of Relativity, Pergamon-Press: New York 1958.

5 J. E. TAMM, J. Phys. USSR **1**, 439 [1939].

6 K. F. NOWOBATZKI, Hung. Acta Phys. **1**, 25 [1949].

7 M. v. LAUE, Z. Phys. **128**, 387 [1950]; Die Relativitätstheorie, 6. Aufl., Bd. 1, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1955.

8 C. MØLLER, The Theory of Relativity, Clarendon Press, Oxford 1952.

9 F. BECK, Z. Phys. **134**, 136 [1953].

10 G. MARX u. G. GYÖRGYI, Acta Phys. Hung. **3**, 213 [1954].

11 G. GYÖRGYI, Acta Phys. Hung. **4**, 121 [1955].

12 G. MARX u. K. NAGY, Acta Phys. Hung. **4**, 297 [1955].

13 G. A. KLUITENBERG u. S. R. DE GROOT, Physica **21**, 169 [1955].

14 E. SCHMUTZER, Ann. Phys. (6) **18**, 171 [1956].

15 G. GYÖRGYI, Am. J. Phys. **28**, 85 [1960].

16 C. L. TANG u. J. MEIXNER, Phys. Fluids **4**, 148 [1961].

17 J. MEIXNER, Relativistic Thermodynamics of Irreversible Processes in a One Component Fluid in the Presence of Electromagnetic Fields, 1961, Radiation Laboratory, Department of Electrical Engineering, University of Michigan, report RL-184, 1961.

18 P. PENFIELD u. H. A. HAUS, Electrodynamics of Moving Media, M.I.T. Press, Cambridge (Mass.) 1967.

19 S. R. DE GROOT u. L. G. SUTTORP, Phys. Lett. **25 Å**, 103 [1967]; Physica **37**, 284; 297 [1968], **39**, 84 [1968].

20 W. SHOCKLEY, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **60**, 807 [1968].

21 C. V. HEER, J. A. LITTLE u. J. R. BUPP, Ann. Inst. Henri Poincare **8 Å**, 311 [1968].

22 Ein Anspruch auf Vollständigkeit der Literaturangaben wird nicht erhoben.

23 Die Argumente für und wider die verschiedenen Auffassungen sollen hier nicht wiederholt werden. Siehe dazu z. B. 7, 8, 10, 18 und 20.

elektromagnetischen Feldes mit der Materie ausgegangen und dann die Divergenz des Energie-Impulstensors durch Summation der auftretenden Kräfte konstruiert. Hierbei sind in den einzelnen Arbeiten verschiedene Kriterien betont worden[24].

Nun weiß man andererseits, daß dem Theorem von NOETHER[25] zufolge die Divergenz des Energie-Impulstensors für ein abgeschlossenes System verschwindet, wenn das betreffende Wirkungsintegral invariant ist gegenüber den Transformationen der inhomogenen Lorentzgruppe. Es liegt daher nahe, das Theorem von Noether zur Definition des Energie-Impulstensors für das elektromagnetische Feld in bewegter Materie heranzuziehen. Wie in einer früheren Arbeit gezeigt wurde[26], folgt aus dem Noetherschen Satz für ein abgeschlossenes System der dort angegebene symmetrische Energie-Impulstensor. Bei der Beschränkung auf ein Untersystem war für Felder mit Spin auch ein antisymmetrischer Teil des Energie-Impulstensors vorhanden.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Anwendung des Noetherschen Theorems bei der hier vorgenommenen Abgrenzung des elektromagnetischen Systems vom mechanischen System auf den asymmetrischen Energie-Impulstensor von Minkowski führt. Dazu werden in den Abschnitten 2 und 3 die Abgrenzung der Untersysteme eingeführt und das Variationsprinzip formuliert. Daraus folgt dann in Abschnitt 4 der Energie-Impulstensor für feldunabhängige und feldabhängige hysteresisfreie Medien. Im letzten Abschnitt wird schließlich gezeigt, daß das Verschwinden der Spur des elektromagnetischen Energie-Impulstensors aus der Invarianz des Systems gegenüber Skalentransformationen folgt.

## 2. Abgrenzung der Systeme

Um den Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes nach der erwähnten Methode[26] herzuleiten, soll zunächst die Abgrenzung der Untersysteme angegeben und das Variationsprinzip formuliert werden, aus dem die kovarianten Grundgleichungen folgen. Die Lagrangedichte des isolierten Systems Materie und elektromagnetisches Feld besteht aus den drei Summanden

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}_{\mathrm{M}} + \mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}.$$

Dabei charakterisiert der Anteil $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ das materielle System[27] und braucht in unserem Zusammenhang nicht näher angegeben zu werden, denn für die im folgenden vorgenommene Abtrennung von Feld und Medium genügt die Feststellung, daß die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ unabhängig von den elektromagnetischen Potentialen ist. Der Anteil $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ hängt andererseits nur von den Potentialen des elektromagnetischen Feldes ab und beschreibt das freie elektromagnetische Feld. Der Term $\mathscr{L}_{\mathrm{W}}$ ist sowohl von den die Materie beschreibenden Größen als auch den elektromagnetischen Potentialen abhängig und kennzeichnet die Wechselwirkung zwischen materiellem System und elektromagnetischem Feld. Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen für das materielle System bzw. der elektromagnetischen Feldgleichungen variiert man die Koordinaten des materiellen Systems bei festgehaltenen elektromagnetischen Potentialen, bzw. die elektromagnetischen Potentiale bei festgehaltenen Koordinaten. Die daraus resultierenden (wegen $\mathscr{L}_{\mathrm{W}}$) gekoppelten Gleichungen beschreiben das vollständige System. Da $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ und $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ nur zu den jeweils entsprechenden Variationen beitragen, ergeben sich daraus die folgenden Definitionen zweier nichtisolierter Untersysteme $\mathscr{L}_{\mathrm{M}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}$ und $\mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}$.

Wir betrachten das durch $\mathscr{L}'$ charakterisierte isolierte System im Hinblick auf das elektromagnetische Feld, ohne auf die mechanischen Bewegungsgleichungen (z.B. geladener Teilchen) einzugehen. Daher wird die Dichte $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ nicht näher untersucht. Die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}$ ergibt bei Variation nach den elektromagnetischen Potentialen $A_\mu$ die Maxwellschen Gleichungen in Materie.

Während $\mathscr{L}'$ eine isolierte Theorie kennzeichnet und der daraus folgende Energie-Impulstensor nach der allgemeinen Theorie symmetrisch sein muß, beschreibt $\mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}$ die nichtisolierte elektromagnetische Theorie in Materie, und der hieraus abzuleitende Energie-Impulstensor wird daher nach dem früheren Ergebnis[28] nicht mehr symmetrisch sein.

[24] Siehe z. B. 7, 10, 18.
[25] E. NOETHER, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. **1918**, 235.
[26] U. E. SCHRÖDER, Fortschr. Phys. **16**, 357 [1968].
[27] Man denke hier z.B. an die Lagrange-Dichte eines Systems freier geladener Teilchen.
[28] Siehe [26], S. 370.

### 3. Die Maxwellschen Gleichungen und die Lagrange-Dichte für das elektromagnetische Feld in Materie

Die Maxwellschen Gleichungen in Materie lauten in der von Minkowski angegebenen Formulierung[29]

$$H^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\, s^{\mu}; \qquad \varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}\, B_{\mu\nu,\,\varrho} = 0 .$$

Die Größen

$$H^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

stellen den elektromagnetischen Erregungstensor und den Feldstärketensor dar, $s^{\mu} = \left(\varrho, \frac{1}{c}\, \boldsymbol{j}\right)$ den Stromdichtevektor. Das Symbol $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\varrho}$ kennzeichnet den total antimetrischen Tensor vierter Stufe mit den Elementen $0, \pm 1$.

Die vorigen Grundgleichungen des elektromagnetischen Feldes legen den zeitlichen Ablauf eines Vorganges erst dann durch einen vorgegebenen Anfangszustand eindeutig fest, wenn zusätzlich die Materialgleichungen $H^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}(B^{\varkappa\lambda})$, $s^{\mu} = g^{\mu}(B^{\varkappa\lambda})$ gelten. Der Zusammenhang zwischen den beiden Feldtensoren werde durch den Materialtensor vierter Stufe $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ hergestellt:

$$H^{\varkappa\lambda} = \tfrac{1}{2}\, \lambda^{\varkappa\lambda}_{\mu\nu}\, B^{\mu\nu} . \tag{1}$$

Allgemein können die Elemente $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ von den Koordinaten $x^{\mu} = (c t, x^1, x^2, x^3)$ und den Feldstärken $B^{\mu\nu}$ abhängen. Sind die $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ konstant, dann wird der Zusammenhang zwischen $H^{\varkappa\lambda}$ und $B^{\mu\nu}$ linear. Bei isotropen, homogenen und feldunabhängigen Medien haben die Komponenten $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ in einem Bezugssystem, das relativ zum Medium ruht, folgende einfache Bedeutung $\lambda^{01}_{01} = \lambda^{02}_{02} = \lambda^{03}_{03} = \varepsilon$, $\lambda^{23}_{23} = \lambda^{31}_{31} = \lambda^{12}_{12} = 1/\mu$, wobei $\varepsilon$ die Dielektrizitätskonstante und $\mu$ die Permeabilität im Ruhesystem kennzeichnen. Alle anderen Größen $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu}$ sind gleich Null. Im Vakuum ist einfach $H^{\varkappa\lambda} = B^{\varkappa\lambda}$, also $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\mu\nu} = 2\, \delta^{\varkappa}_{\mu}\, \delta^{\lambda}_{\nu}$.

Die elektromagnetische Theorie in beliebigen Medien kann mit Hilfe der Lagrange-Dichte[30]

$$\mathscr{L}(x) = -\int \left(\tfrac{1}{2} H^{\mu\nu}\, \mathrm{d}B_{\mu\nu} + s^{\mu}\, \mathrm{d}A_{\mu}\right)$$

und den Materialgleichungen (1) beschrieben werden. Das obige Integral wird von einem Ausgangszustand über bestimmte Zwischenwerte der Tensoren $B_{\mu\nu}$ und $A_{\mu}$ bis zu einem Endzustand erstreckt, für den Tensor $B_{mn}$ zum Beispiel entlang einer vorgegebenen Magnetisierungskurve. Der Summand $\int s^{\mu}\, \mathrm{d}A_{\mu}$ liefert den einfacheren Ausdruck $s^{\mu} A_{\mu}$ als Spezialfall, wenn die Strom- und Ladungsverteilung $s^{\mu}$ unabhängig von den Potentialen $A_{\mu}$ vorgegeben ist. Aus der obigen Lagrange-Dichte folgt

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\mu}} = -\, s^{\mu}, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\mu,\,\nu}} = H^{\mu\nu}, \quad \text{also} \quad H^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\, s^{\mu} .$$

Bei hysteresisfreien Medien ist $\mathrm{d}\mathscr{L}_{\mathrm{E}} = -\tfrac{1}{2} H^{\mu\nu}\, \mathrm{d}B_{\mu\nu}$ ein vollständiges Differential, weil dann die Dichte $\mathscr{L}_{\mathrm{E}}$ von den durchlaufenen Prozessen nicht abhängt. Im hysteresisfreien Fall müssen also die Integrabilitätsbedingungen

$$\partial H^{\mu\nu} / \partial B^{\alpha\beta} = \partial H_{\alpha\beta} / \partial B_{\mu\nu}$$

gelten. Mit (1) folgt

$$\frac{1}{2} \left\{ 2\, \lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} + B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B^{\alpha\beta}} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 2\, \lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} + B_{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}{}^{\varrho\sigma}}{\partial B_{\mu\nu}} \right\},$$

also die Bedingung

$$\lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ B_{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda_{\alpha\beta}{}^{\varrho\sigma}}{\partial B_{\mu\nu}} - B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B^{\alpha\beta}} \right\} . \tag{2}$$

Hieraus ist zu entnehmen, daß bei feldunabhängigen Medien

$$\lambda^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$$

gilt. Nach dieser allgemeinen Bemerkung über die Eigenschaften des Materialtensors $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ bei hysteresisfreien und feldunabhängigen Medien, gehen wir von der spezielleren Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}} = -\tfrac{1}{4} H^{\mu\nu} B_{\mu\nu} - s^{\mu} A_{\mu}$$

aus. Mit den Materialgleichungen (1) wird

$$\mathscr{L} = -\tfrac{1}{8}\, \lambda^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}\, B^{\varrho\sigma} B_{\mu\nu} - s^{\mu} A_{\mu} . \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\mu}} = -\, s^{\mu}$$

und[31]

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\varkappa,\lambda}} = H^{\varkappa\lambda} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} \left\{ (\lambda_{\mu\nu}{}^{\lambda\varkappa} - \lambda^{\lambda\varkappa}{}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} B_{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\varrho\sigma}{}_{\mu\nu}}{\partial B_{\lambda\varkappa}} \right\} .$$

Führt man in die letzte Gleichung die Relation (2) ein, so erhält man

[29] Die von Null verschiedenen Komponenten des metrischen Tensors sind $g^{00} = 1$, $g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$.

[30] Wir folgen hierbei der Arbeit von E. SCHMUTZER[14].

[31] Hier wird auch nach den in $H^{\mu\nu}$ enthaltenen Ableitungen der Potentiale variiert.

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\varkappa,\lambda}} = H^{\varkappa\lambda} + \tfrac{1}{8}\, B^{\mu\nu} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B^{\mu\nu}}\,.$$

Damit folgen die Maxwellschen Gleichungen $H^{\varkappa\lambda}{}_{,\lambda} = -\, s^{\varkappa}$ über die verschwindenden Variationsableitungen $[\mathscr{L}]_{A_\mu} = 0$, wenn im betrachteten Medium die Gleichungen

$$\partial_\lambda \left\{ B^{\mu\nu} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B^{\mu\nu}} \right\} = 0 \tag{4}$$

erfüllt sind, oder insbesondere der Tensor $\lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\varrho\sigma}$ feldunabhängig ist, das heißt

$$\partial \lambda^{\varkappa\lambda}{}_{\varrho\sigma} / \partial B^{\mu\nu} = 0 \tag{5}$$

gilt.

## 4. Der Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes bei hysteresisfreien Medien

Wir nehmen zunächst an, daß das Medium feldunabhängig ist, das heißt es gelte (5), und berechnen den Energie-Impulstensor aus der Lagrange-Dichte $\mathscr{L}_{\mathrm{E}} = -\tfrac{1}{4} H^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ unter Verwendung von

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Phi^{\lambda\mu\nu} \qquad \text{(s. Anm. 32)}$$

mit den Definitionen

$$\Theta^{\mu\nu} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\varkappa,\mu}} A_{\varkappa,}{}^{\nu} + g^{\mu\nu} \mathscr{L},$$

$$\Phi^{\lambda\mu\nu} = \tfrac{1}{2} (H^{\lambda\mu\nu} + H^{\mu\nu\lambda} + H^{\nu\mu\lambda}),$$

$$H^{\lambda\mu\nu} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_{\varrho,\lambda}} I_{\varrho}^{\sigma\mu\nu} A_\sigma\,.$$

Da das elektromagnetische Feld $A^\mu$ ein Vektorfeld darstellt, gilt $I_{\varrho}^{\sigma\mu\nu} = g_{\varrho}^{\mu} g^{\sigma\nu} - g_{\varrho}^{\nu} g^{\sigma\mu}$. Der Bahnanteil des Energie-Impulstensors ist wegen

$$\partial \mathscr{L}_{\mathrm{E}} / \partial A_{\lambda,\mu} = H^{\lambda\mu}$$

durch

$$\Theta^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = H^{\mu\lambda} A_{\lambda,}{}^{\nu} + g^{\mu\nu} \mathscr{L}_{\mathrm{E}}$$

gegeben. Der Spinanteil rührt von der Größe

$$\Phi^{\lambda\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = H^{\lambda\mu} A^\nu$$

her. Es ist

$$\partial_\lambda \Phi^{\lambda\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = H^{\lambda\mu}{}_{,\lambda} A^\nu + H^{\lambda\mu} A^{\nu}{}_{,\lambda} = H^{\lambda\mu} A^{\nu}{}_{,\lambda}\,,$$

wenn, wie zunächst vorausgesetzt werden soll, keine Quellen vorhanden sind ($H^{\lambda\mu}{}_{,\lambda} = 0$). Damit wird

$$T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = -\, \{ H^{\mu\lambda} B_{\lambda}{}^{\nu} + \tfrac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\varkappa\lambda} B_{\varkappa\lambda} \}\,. \tag{6}$$

Das ist der asymmetrische Energie-Impulstensor, der von MINKOWSKI eingeführt wurde.

Nach dem Noetherschen Satz folgt nun

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = 0\,,$$

falls der Materialtensor $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\varrho\sigma}$ nicht explizit von den Koordinaten $x^\mu$ abhängt, also Translationsinvarianz vorliegt.

Wenn dagegen die Lagrange-Dichte $\mathscr{L}$ explizit von $x^\mu$ abhängt, folgt analog wie beim Beweis des Noetherschen Theorems die Relation

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial \mathscr{L} / \partial x_\nu \qquad \text{(s. Anm. 33)}\,. \tag{7}$$

Für den speziellen Fall, daß $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\varrho\sigma}$ explizit von $x^\mu$ abhängt, folgt damit

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} = -\tfrac{1}{8} B^{\varrho\sigma} B_{\varkappa\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma}\,.$$

Bei vorhandenen Quellen ($s^\mu(x) \neq 0$) lautet der aus $\mathscr{L}_{\mathrm{E}} + \mathscr{L}_{\mathrm{W}}$ folgende Energie-Impulstensor

$$T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E+W})} = T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} - g^{\mu\nu} s^{\varrho} A_\varrho + s^\mu A^\nu\,.$$

Bildet man hieraus die Divergenz und vergleicht mit dem Ergebnis nach der Beziehung (7)

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E+W})} = -\tfrac{1}{8} B^{\varrho\sigma} B_{\varkappa\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma} - A_\mu \frac{\partial s^\mu}{\partial x_\nu}\,,$$

so folgt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} + \tfrac{1}{8} B^{\varrho\sigma} B_{\varkappa\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma} = -\, s_\mu B^{\mu\nu}\,. \tag{8}$$

Das heißt, bei vorhandener Stromdichte $s^\mu$ ist die Divergenz des Energie-Impulstensors, vermehrt um den Summanden proportional zu $\frac{\partial}{\partial x_\nu} \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma}$, gleich der Kraftdichte

$$k^\nu = -\, s_\mu B^{\mu\nu} \equiv \left( \frac{1}{c}\, \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}, \varrho\, \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} [\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}] \right).$$

Die Relation (8) folgt auch nach einfacher Rechnung, indem man die Divergenz von $T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})}$ (6) bildet.

Aus der Divergenzfreiheit des asymmetrischen Energie-Impulstensors darf nicht auf das Fehlen einer Wechselwirkung mit der Materie geschlossen werden, denn die Lagrange-Dichte

$$\mathscr{L}_{\mathrm{E}} = -\tfrac{1}{4} H^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$$

kennzeichnet ein nichtisoliertes System.

Wie in der früheren Arbeit[26] festgestellt worden war, kann die Divergenz des nach der Definition $M^{\lambda\mu\nu} = x^\nu T^{\lambda\mu} - x^\mu T^{\lambda\nu}$ gebildeten Drehimpulstensors als Drehimpulsdichte des Feldes angesehen werden. Wenn der Energie-Impulstensor divergenz-

[32] Siehe [26], Gl. (26).

[33] Hier bedeutet $\partial \mathscr{L} / \partial x_\nu$ die explizite Ableitung von $\mathscr{L}$ nach $x_\nu$.

frei ist, folgt aus $M^{\lambda\mu\nu}$ die Drehimpulsdichte $\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$. Im Falle $\partial_\lambda T^{\lambda\mu} = k^\mu$ erhält man

$$\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = x^\nu k^\mu - x^\mu k^\nu + T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu}$$

mit

$$T^{\nu\mu} - T^{\mu\nu} = H^{\mu\lambda} B_\lambda{}^\nu - H^{\nu\lambda} B_\lambda{}^\mu \neq 0 .$$

Der symmetrische Energie-Impulstensor des isolierten Systems läßt sich in einen Feld- und einen Materieanteil zerlegen

$$T'^{\lambda\mu} = T^{\lambda\mu}_{\mathrm{E}} + T^{\lambda\mu}_{\mathrm{M}} .$$

Der Energie-Impulssatz lautet dann $\partial_\lambda T'^{\lambda\mu} = 0$. Somit gilt[34]

$$\partial_\lambda T^{\lambda\mu}_{\mathrm{E}} = - \partial_\lambda T^{\lambda\mu}_{\mathrm{M}} = k^\mu ,$$

das heißt die von $T^{\lambda\mu}_{\mathrm{E}}$ herrührende Kraftdichte wird durch die von $T^{\lambda\mu}_{\mathrm{M}}$ hervorgerufene kompensiert. Entsprechend verschwindet das Drehmoment des abgeschlossenen Systems.

Läßt man die Forderung (5) fallen, dann erhält man für hysteresisfreie Medien nach (3) als Bahnanteil des Energie-Impulstensors

$$\Theta^{\mu\nu} = \left\{ H^{\mu\lambda} + \tfrac{1}{8} B_{\alpha\beta} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\lambda}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} \right\} A_\lambda{}^{,\nu} + g^{\mu\nu} \mathscr{L}_{\mathrm{E}} .$$

Der Spinanteil wird

$$\partial_\varkappa \Phi^{\varkappa\mu\nu} = \partial_\varkappa \left\{ \left( H^{\varkappa\mu} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} \right) A^\nu \right\} .$$

Wegen der Bedingungen (4) und $s^\mu = 0$ folgt

$$\partial_\varkappa \Phi^{\varkappa\mu\nu} = \left( H^{\varkappa\mu} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\varkappa\mu}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} \right) A^\nu{}_{,\varkappa} .$$

Die Addition von Bahn- und Spinanteil ergibt

$$T^{\mu\nu} = - \left\{ \left( H^{\mu\varkappa} + \frac{1}{8} B_{\alpha\beta} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\varkappa}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} \right) B_\varkappa{}^\nu + \tfrac{1}{4} g^{\mu\nu} H^{\varkappa\lambda} B_{\varkappa\lambda} \right\} .$$

Daraus folgt, wenn $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\varrho\sigma}$ nicht explizit von $x^\mu$ abhängt, mit (4) die Kraftdichte

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = - \tfrac{1}{8} B_{\alpha\beta} B^{\varrho\sigma} \frac{\partial \lambda^{\mu\varkappa}{}_{\varrho\sigma}}{\partial B_{\alpha\beta}} B_\varkappa{}^\nu{}_{,\mu} .$$

Bei feldabhängigen Medien kommt also die Wechselwirkung zwischen Materie und elektromagnetischem Feld bereits in der Gleichung für die Energie-Impulsbilanz zum Ausdruck.

Im Rahmen der klassischen Feldtheorie bietet sich zur Definition des Energie-Impulstensors ein konsequentes natürliches Verfahren an, das keinerlei Bezug auf spezielle Modelle der Materie nimmt. Die einzige Annahme, in die die physikalische Struktur der Systeme eingeht, ist die Möglichkeit der in Abschnitt 2 beschriebenen Zerlegung der Lagrange-Dichte.

## 5. Skalentransformationen und die Spur des elektromagnetischen Energie-Impulstensors

Da die elektromagnetische Theorie im Vakuum kovariant ist gegenüber der 15-dimensionalen konformen Gruppe $C \supset P$, folgen aus dem Noetherschen Satz weitere fünf Erhaltungssätze[35], denen aber nicht allen eine unmittelbar anschauliche Deutung gegeben werden kann. Wir werden im folgenden zeigen, wie das Verschwinden der Spur des elektromagnetischen Energie-Impulstensors mit der Kovarianz der Grundgleichungen gegenüber Skalen-Transformationen zusammenhängt.

Die elektromagnetische Theorie im Vakuum ist gegenüber den Skalentransformationen $\delta x_\mu = \gamma x_\mu$, $\delta A_\mu = - \gamma A_\mu$ kovariant.

Daraus folgt nach dem Noetherschen Satz

$$[\mathscr{L}_{\mathrm{E}}]^\lambda \, \bar{\delta} A_\lambda = \partial_\mu \left\{ - \frac{\partial \mathscr{L}_{\mathrm{E}}}{\partial A_{\lambda,\mu}} \delta A_\lambda - \delta x_\nu \, \Theta^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})} \right\} ,$$

d.h. mit den Bewegungsgleichungen $[\mathscr{L}_{\mathrm{E}}]^\lambda = 0$ und den Ausdrücken für $\Theta^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})}$ und $T^{\mu\nu}_{(\mathrm{E})}$

$$T_{(\mathrm{E})}{}^\mu{}_\mu = 0 .$$

Bei Kovarianz der elektrodynamischen Gleichungen gegenüber den Transformationen $\delta x_\mu = \gamma x_\mu$ verschwindet die Spur des Energie-Impulstensors.

In homogener Materie verhalten sich die Maxwellschen Gleichungen gewiß auch kovariant gegenüber den Transformationen $\delta x_\mu = \gamma x_\mu$, denn die Komponenten $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ hängen dann von den Koordinaten nicht explizit ab, während die übrigen in der Lagrangedichte auftretenden Größen die gleichen sind wie im Vakuum. Also muß die Spur des Energie-Impulstensors verschwinden. Sowohl der von Minkowski eingeführte als auch der Abrahamsche Tensor erfüllen diese Bedingung. Dagegen verschwindet die Spur des von Einstein und Laub[4] vorgeschlagenen Tensors nicht. Dies kann als Ein-

[34] Hier wurde der Einfachheit halber $\lambda^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}$ unabhängig von $x^\mu$ angenommen.

[35] E. Bessel-Hagen, Math. Ann. 84, 258 [1921].

wand gegen die Auffassung von EINSTEIN und LAUB erhoben werden.

Die Diskussion zeigt, daß die Frage nach dem Energie-Impulstensor im wesentlichen auf das Problem zurückgeführt werden kann, wie das elektromagnetische System vom mechanischen System abzugrenzen ist. Bei der hier vorgenommenen Abgrenzung folgt nach dem Noetherschen Theorem der von MINKOWSKI eingeführte Energie-Impulstensor. In anderem Zusammenhang kann sich eine andere Abgrenzung als zweckmäßig erweisen.

Herrn Dr. H. D. DOEBNER möchte ich für die kritische Durchsicht des Manuskripts danken. Ferner danke ich Herrn Dr. F. HEHL für zwei Literaturhinweise.

# Direct Photodisintegration of $^{13}$C below 17 MeV. Reaction $^{13}C(\gamma,n)^{12}C$

TERJE AURDAL

Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen

(Z. Naturforsch. 24 a, 1361—1364 [1969]; received 13 June 1969)

A nuclear model where the single-particle states of the valence neutron are vector coupled to the ground ($0^+$) and first excited ($2^+$) $^{12}$C-core states, is considered. The model is applied to calculate total photodisintegration cross sections of the reaction $^{13}C(\gamma, n)^{12}C$ for energies below the Giant dipole resonance. The radial wavefunctions in initial- as well as final states are of the Saxon-Woods type.

Most nuclei possess what is called a dipole state[1], a state strongly excited by $\gamma$-rays and assumed to be responsible for the familiar Giant dipole resonance. In the light $4n$ nuclei this state, or the Giant dipole resonance, is exhausting almost entirely the electric dipole sum-rules. An exception from this are some lighter nuclei like $^{12}$C where the Giant dipole resonance is carrying only about 60% of the "dipole sum"[2], the rest is due to an extraordinary large high-energy tail.

The addition of an extra nucleon to these nuclei seems to have profound effects on their cross sections. In that to $^{12}$C neighbouring nucleus $^{13}$C, there appear in the $(\gamma, n)$ cross sections below the Giant dipole resonance a secondary resonance of the same order of magnitude. The total cross section of $^{13}$C integrated over these resonances comes closer to the sum-rule limit than the $^{12}$C case, as the high-energy tail disappears. This secondary maximum, usually named the Pygmy resonance, is mainly attributed to the added valence neutron (nucleon) and its ability to polarize the core.

This resonance which has importance in revealing the structure of light $4n+1$ nuclei, has been studied by several authors[3-6]. The numerical analyses are, however, accomplished with wavefunctions of incorrect asymptotic behaviour and may not give quantitative correct results.

In a previous paper[7], further referred to a I, the cross sections of the reaction $^{9}Be(\gamma, n)^{8}Be$ were studied in the energy range from threshold through the Pygmy resonance. The nuclear model applied, was a core possibly with internal excitation and an outher valence neutron approximated to be in a spherical-symmetric field. In the present work it is intended to extend this model to the $^{13}$C case, and to calculate within this frame the electric-dipole cross sections of the reaction $^{13}C(\gamma, n)^{12}C$. As in I the radial wavefunctions in initial and final states are of the Saxon-Woods type.

In Section 1 the formulae from I are, without mathematical rigour, adapted to the actual problem. In Section 2 the obtained results, depicted in Fig. 1, are discussed and analysed. Section 3

Reprint requests to TERJE AURDAL, Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen, *D-7400 Tübingen*, Gartenstr. 47.

1 G. E. BROWN, L. CASTILLEJO, and J. A. EVANS, Nucl. Phys. **22**, 1 (1961).
2 E. HAYWARD, Photonuclear Reactions, Scottish Universities, Summer School 1964.
3 S. FUJII, Progr. Theor. Phys. **21**, 511 (1959).
4 F. C. BARKER, Nucl. Phys. **28**, 96 (1961).
5 D. F. MEASDAY, A. B. CLEGG, and P. S. FISHER, Nucl. Phys. **61**, 269 (1965).
6 B. R. EASLEA, Phys. Letters **1**, 163 (1962).
7 T. AURDAL, Z. Naturforsch. **24a**, 1188 [1969].