Wirkungsquerschnitt für E0-Übergänge bei inelastischer Elektronen- und Positronenstreuung am Atomkern

Von Rudolf Rodenberg

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt a. M.

(Z. Naturforschg. **17 a**, 1036—1037 [1962]; eingegangen am 12. September 1962)

Beschreibt man die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektronen (bestehend aus dem elektromagnetischen Feld, das in der Coulomb-Eichung durch ein Vektorpotential $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ mit $\operatorname{div}\mathfrak{A}(\mathfrak{r})=0$ beschrieben wird), zwischen Kern und Feld und Elektronen und Feld, sowie die direkte Coulombsche Wechselwirkung unter Berücksichtigung der anomalen magnetischen Momente von Protonen und Neutronen, durch folgenden Wechselwirkungsoperator

$$H = H^{\mathrm{S}} + H^{\mathrm{C}} \tag{1}$$

mit

$$H^{\mathrm{S}} = e_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{e}}\cdot\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_{\mathrm{e}})) + \sum_{n=1}^{A}\left\{e_n(\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_n)) - \mu_n\frac{e}{2M_n}\beta_n\boldsymbol{\sigma}_n \operatorname{rot}\mathfrak{A}(\mathfrak{r}_n) - i\,\mu_n\frac{e}{2M_n}\beta_n\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\dot{\mathfrak{A}}(\mathfrak{r}_n)\right\}, \tag{2}$$

$$H^{\mathrm{C}} = \sum_{n=1}^{A}\left\{\frac{e_n e_{\mathrm{e}}}{|\mathfrak{r}_n-\mathfrak{r}_{\mathrm{e}}|} - i\,\mu_n\frac{e}{2M_n}\beta_n\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\nabla_n\frac{e_{\mathrm{e}}}{|\mathfrak{r}_n-\mathfrak{r}_{\mathrm{e}}|}\right\},$$

$e_n=e$ für Protonen, $e_n=0$ für Neutronen, $e_n=-e$ für Elektronen

und

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = \sum_{L,M,\tau}\int_0^\infty \mathrm{d}k\left\{q_{LM}^{\tau}(k)\,\boldsymbol{A}_{LM}^{\tau}(k\,r) + q_{LM}^{\tau*}(k)\,\boldsymbol{A}_{LM}^{\tau*}(k\,r)\right\}, \tag{3}$$

der Entwicklung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}(\mathfrak{r})$ nach divergenzfreien Multipolen $\boldsymbol{A}_{LM}^{\tau}(k\,r)$, so erhält man in erster nichtverschwindender Näherung des S-Matrixformalismus für den Multipolübergang $L=0$ unter Benutzung der bekannten Matrixelemente der Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren $q_{LM}^{\tau*}(k)$ bzw. $q_{LM}(k)$ in bezug auf Zustände und festen Photonenzahlen [1] folgendes Matrixelement:

$$\begin{aligned}
u_{21}(W) = {} & \sum_{n=1}^{A} e_n e_{\mathrm{e}}\left\{\int_0^R\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\frac{1}{r_{\mathrm{e}}}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_0^{r_{\mathrm{e}}}\psi_2^{\mathrm{K}*}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}} + \int_0^R\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_{r_{\mathrm{e}}}^R\psi_2^{\mathrm{K}*}\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}}\right\} \\
& + \sum_{n=1}^{A} e_{\mathrm{e}}\left(-\mu_n\frac{e}{2M_n}\right)\int_0^R\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_{r_{\mathrm{e}}}^R\psi_2^{\mathrm{K}*}\beta_n\,\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\nabla_n\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}} \\
& + \sum_{n=1}^{A} e_n e_{\mathrm{e}}\left\{\int_R^\infty\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\frac{1}{r_{\mathrm{e}}}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_R^{r_{\mathrm{e}}}\psi_2^{\mathrm{K}*}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}} + \int_0^\infty\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}}\int_R^\infty\psi_2^{\mathrm{K}*}\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right. \\
& \qquad\left. + \int_R^\infty\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_{r_{\mathrm{e}}}^R\psi_2^{\mathrm{K}*}\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}}\right\} \\
& + \sum_{n=1}^{A} e_{\mathrm{e}}\left(-\mu_n\frac{e}{2M_n}\right)\left\{\int_0^\infty\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}}\int_R^\infty\psi_2^{\mathrm{K}*}\beta_n\,\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\nabla_n\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right. \\
& \qquad\left. + \int_R^\infty\left[\psi_2^{\mathrm{e}*}\psi_1^{\mathrm{e}}\int_{r_{\mathrm{e}}}^R\psi_2^{\mathrm{K}*}\beta_n\,\boldsymbol{\alpha}_n\cdot\nabla_n\frac{1}{r_n}\psi_1^{\mathrm{K}}\,\mathrm{d}\tau_{\mathrm{K}}\right]\mathrm{d}\tau_{\mathrm{e}}\right\} = u_{21}(W)\big|_{0\le r_n\le R} + u_{21}(W)\big|_{R\le r_n\le\infty}
\end{aligned} \tag{4}$$

für einen E0-Kernübergang bei inelastischer Elektronen- bzw. Positronenstreuung am Atomkern. Wie in [2] für spezielle Kerne gezeigt wurde, geben die ersten drei Glieder $u_{21}(W)\big|_{0\le r_n\le R}$ in (4) den Hauptbeitrag zu den Matrixelementen $u_{21}(W)$. Man hat sich jedoch in den einzelnen Fällen von E0-Übergängen davon zu überzeugen, ob $u_{21}(\mathrm{W})\big|_{R\le r_n\le\infty}$ im $\sigma_{\mathrm{e},\mathcal{N}}^{\mathrm{E0},\,0\to 0}(E_1, W)$ vernachlässigbar ist oder nicht.

[1] R. Rodenberg, Z. Phys. **158**, 44 [1960].

Von dem gesamten Wechselwirkungsausdruck (1) und (2) hat sich für $L=0$ in den Matrixelementen alles weggehoben bis auf diejenigen Anteile, die in der direkten Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung $\langle H^{\mathrm{C}} \rangle$ für $L=0$ noch übrigbleiben, was man sofort durch Vergleich von (2) und (4) sieht.

Der Wirkungsquerschnitt für solche E0-Übergänge lautet:

$$\sigma_{\mathrm{e},\mathcal{N}}^{\mathrm{E0}}\,(E_1\,,W)=\frac{1}{2\,J_1+1}\,\frac{E_1}{k_1}\,S\,w_{21}\,\varrho_{E_2} \tag{5}$$

mit

$$w_{21}=2\,\pi\,|\,u_{21}(W)\,|^2 \tag{6}$$

und $u_{21}(W)$ nach (4). Ferner ist $E^2=k^2+m^2$ und $\varrho_{E_2}=k_2\,E_2/(2\,\pi)^3$ die Dichte der Elektronen- bzw. Positronen-Endzustände. S bezeichnet die Summation und Mittelung über die End- und Anfangszustände und die Integration über den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$ zwischen der Richtung des ankommenden und wegfliegenden Elektrons bzw. Positrons.

Nach Ausreduktion der Kernmatrixelemente ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für E0-Übergänge mit von Null verschiedenen Kernspins der beteiligten Übergangsniveaus und gleicher Parität zu

$$\sigma_{\mathrm{e},\mathcal{N}}^{\mathrm{E0}}(E_1\,,W)=2\,\pi\,\alpha\,\frac{E_1}{k_1}\,\frac{2\,J_2+1}{2\,J_1+1}\,\tilde{S}\,|\,\hat{\bar{u}}_{21}(W)\,|^2\,\varrho_{E_2}\,, \tag{7}$$

wobei $\bar{u}_{21}(W)$ bedeutet, daß die Kernmatrixelemente ausreduziert sind.

Für einen reinen $0+\rightarrow 0+$-Übergang ist dann

$$\sigma_{\mathrm{e},\mathcal{N}}^{0\rightarrow 0}\,(E_1\,,\mathrm{W})=2\,\pi\,\alpha\,\frac{E_1}{k_1}\,\tilde{S}\,|\,\hat{\bar{u}}_{21}(W)\,|^2\,\varrho_{E_2}\,. \tag{8}$$

Das „^" über $\hat{u}_{21}$ bedeutet, daß in (4) das e_{e} aus den u_{21} herausgezogen wurde.

In (8) sind die ausreduzierten Kernmatrixelemente $\hat{\bar{u}}_{21}(W)=\hat{u}_{21}(\mathrm{W})$.

In einer früheren Arbeit [3] haben CHURCH, ROSE und WENESER den Einfluß der E0-Übergänge bei der inneren Konversion angegeben. Für diesen E0-Übergang kommen nur Elektronen in Frage, die mit dem Kern eine direkte Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung haben, d. h. in den endlichen Kern eindringen. Somit kann man aus den von den Verfassern [3] angegebenen Winkelkorrelationen den Beitrag der E0-Matrixelemente angeben und Aussagen über die Kernstruktur gewinnen (s. [3] und die dort zitierte Literatur).

Einfacher liegen die Verhältnisse bei der inelastischen Elektronen- bzw. Positronenstreuung. Hierbei tritt, wie der Wechselwirkungsausdruck (1) und (2) zeigt, nach der störungstheoretischen Berechnung der Matrixelemente $u_{21}(W)$ nur noch der Anteil für $L=0$ in dem Ausdruck H^{C} für die direkte Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung im Matrixelement auf. Für einen Kern mit einem reinen $0+\rightarrow 0+$-Übergang gibt (8) für den totalen bzw. differentiellen Wirkungsquerschnitt mit den in [1, 4] und [5] angegebenen und somit bekannten COULOMB-korrigierten Elektronenmatrixelementen direkt die Kernmatrixelemente, wie sie in (4) enthalten sind. Führt man noch analog wie in [6] die zeitabhängigen GREENschen Einteilchenfunktionen ein und aus der so gewonnenen Einteilchendichte die Einteilchendichtekorrelationsfunktion, so liefert (8) ein direktes Maß für die Abweichungen von der statischen Einteilchendichteverteilung und damit analog dem Verfahren von GOTTFRIED et al. in erster Näherung Aussagen über kollektive Zustände. Außerdem liefern (7) und (8) die Möglichkeit, reduzierte Kernmatrixelemente direkt zu messen.

2 R. RODENBERG, Z. Naturforschg. **17 a**, 537 [1962].
3 E. L. CHURCH, M. E. ROSE u. I. WENESER, Phys. Rev. **109**, 1299 [1958].
4 R. RODENBERG, Z. Phys. **162**, 347 [1961].
5 R. RODENBERG, Z. Phys. **166**, 439 [1962].
6 K. GOTTFRIED et al., preprint, Kopenhagen 1962.