# Zur Axiomatik der Mengenlehre[1]).

Von

A. Schoenflies in Frankfurt a. M.

Die Hilbertsche Grundlegung der Geometrie darf für alle analogen Untersuchungen als vorbildlich gelten. Zwei ihrer Eigenschaften sind es, auf die es hier ankommt. Erstens wird von allen sprachlichen Definitionen der Objekte, mit denen sie operiert, wie Punkt, Gerade, zwischen usw. abgesehen; nur ihre gegenseitigen Beziehungen und deren Grundgesetze werden axiomatisch an die Spitze gestellt[2]). Zweitens werden die Axiome in verschiedene Gruppen gewisser Eigenart und Tragweite gespalten (die des Schneidens und Verbindens, die Axiome der Ordnung, der Kongruenz usw.), und es ist eine wesentliche Aufgabe des axiomatischen Aufbaues, zu prüfen, bis zu welchen Resultaten eine einzelne oder mehrere dieser Gruppen für sich führen. Die gleiche Behandlung eignet sich für die Mengenlehre. Von sprachlicher Einführung der Begriffe Menge, Bereich usw. ist daher ebenso abzusehen, wie von der des Punktes oder Raumes. Ebenso kann man hier gewisse Axiomgruppen unterscheiden, die Axiome der Äquivalenz, die Axiome der Ordnung usw., und kann die gleichen Fragen stellen, wie im Gebiet der Geometrie. Dies soll im folgenden geschehen, und zwar für denjenigen Teil, der nur mit der Äquivalenz der Mengen, der Mengenteilung und Mengenverbindung, sowie der Mengenvergleichung operiert.

---

[1]) Mit Zusatz abgedruckt aus Amsterdam Ac. Proceedings 22 (1920).

[2]) Der Euklidische Aufbau beginnt noch mit den Worten: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite usw. In dem Verzicht auf alle solchen sprachlichen Begriffsbestimmungen liegt einer der wesentlichen durch Hilbert besonders modern gewordenen Gedanken. Übrigens hatte schon Pasch durch seine Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig, 1882) in dieser Richtung vorbildlich gewirkt. Die Mengenlehre hat sich diesem Gedanken bisher nicht erschlossen.

Will man die Probleme der Mengenlehre einer derartigen Behandlung unterwerfen, so ist es oberstes Erfordernis, die Begriffe der endlichen und der unendlichen Menge auf einer Grundlage einzuführen, die nur die ebengenannten Fundamentalbegriffe benutzt. Solche Definitionen sind ja in der Dedekindschen Begriffsbestimmung vorhanden: Eine Menge $M$ heißt unendlich, wenn es eine (echte) Teilmenge $M'$ von $M$ gibt, die äquivalent $M$ ist; sie heißt endlich, wenn es eine solche Teilmenge nicht gibt. *Sie* haben daher den *alleinigen Ausgangspunkt* zu bilden.

Die historische Entwicklung der Mengenlehre ist freilich wesentlich anders vor sich gegangen. Während vorstehend die *unendliche* Menge als das logisch *positiv* bestimmte Objekt erscheint, und die *endliche* Menge als ihr logisches *Gegenteil*, ist die historische Entwicklung umgekehrt von den endlichen Mengen als wohlbekannten mathematischen Objekten ausgegangen, und hat die unendlichen Mengen als Gegensatz der endlichen Mengen eingeführt. Der so benutzte Begriff der endlichen Menge gehört aber bereits einem Gebiet an, das sich nicht mehr ausschließlich an die Äquivalenzbeziehungen anschließt. Der historisch überkommene Begriff der endlichen Menge ruht ja überhaupt nicht auf axiomatischer Grundlage. Mag man ihn sprachlich oder empirisch oder anschaulich auffassen, er war im wesentlichen an der Hand des Zahlbegriffs entstanden und ruht jedenfalls auf Voraussetzungen, in die auch die Ordnung als Grundbegriff eingeht. Diese gehört aber bereits einer Begriffsgruppe an, von der hier abzusehen ist. So laufen in der historischen Entwicklung der Mengenlehre zwei wesentlich verschiedene Bestimmungen der endlichen und unendlichen Mengen unvermittelt nebeneinander her und erschweren infolgedessen die Frage nach dem, was den einzelnen Sätzen axiomatisch zugrunde liegt. Auch insofern ist eine Klärung des Sachverhalts wünschenswert.

Das Resultat erweist sich in zwei Punkten als durchaus eigenartig. Die Vergleichung der Mengen bezüglich ihres Größencharakters ist nämlich nichts, was dem Mengenbegriff allein eigentümlich ist; sie betrifft allgemeiner *alle Objekte*, für die man das *Ganze* und den *Bestandteil* unterscheiden kann. Die Axiomatik, die hier entwickelt wird, ist also richtiger *eine Axiomatik der Größenlehre*, und zwar in dem besonderen Fall, daß es auch Größen von *unendlichem* Charakter gibt. Dies bedingt, daß die *Elemente* der Mengen im folgenden *gar nicht benutzt werden*; immer nur bilden die an sich möglichen Beziehungen zwischen den Ganzen und ihren Teilen den Gegenstand der Untersuchung. Deren auf axiomatischer Grundlage ruhende, umfassende Erörterung bildet den eigentlichen Inhalt der Arbeit. Ich habe aber doch die gewohnten Mengenbezeichnungen beibehalten. Für die *Elemente der Mengen* wird erst am Schluß eine auf den Begriff der Teilmenge sich stützende Einführungsmöglichkeit gezeigt. Sie erscheinen als solche Teilmengen, die selbst nicht weiter in Teilmengen zerlegbar sind (gleichsam als die Atome).

Eine zweite Eigenart der Untersuchung betrifft die logischen Notwendigkeiten, die der axiomatische Aufbau dieses besondern Gebietes verlangt. Außer den selbstverständlichen axiomatischen Festsetzungen über die Regeln, nach denen man mit den Begriffen der Äquivalenz, der Teilmengen usw. zu operieren hat, treten auch noch Annahmen auf, die man wohl nicht erwarten mag. Bei ihrer Einführung handelt es sich aber — und darin besteht die genannte Eigenart — weniger um spezifisch mathematische Notwendigkeiten, als vielmehr um *rein logische;* also um Festsetzungen, die deshalb nötig sind, weil man ohne sie — um welches wissenschaftliche Gebiet es sich handeln mag — aus den in Frage stehenden Voraussetzungen *Schlüsse überhaupt nicht ableiten kann.* Ein allgemeiner Grundsatz der Logik lautet: E mere negativis nihil sequitur; d. h. aus lauter negativen Prämissen kann eine Folgerung nicht gezogen werden. Aus den Sätzen

kein $\mathfrak{A}$ ist ein $\mathfrak{B}$, kein $\mathfrak{B}$ ist ein $\mathfrak{C}$

läßt sich in der Tat eine Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ nicht entnehmen; und ebenso wenig gestatten die Sätze

kein $\mathfrak{B}$ ist ein $\mathfrak{A}$, kein $\mathfrak{C}$ ist ein $\mathfrak{A}$

eine Beziehung zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$[3]. Gerade solche Prämissen sind es aber, die uns bei den mengentheoretischen Problemen mehrfach begegnen, und deshalb der Einführung einer zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ oder zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vorhandenen Beziehung den Stempel der axiomatischen Notwendigkeit aufdrücken.

## § 1.

## Die Äquivalenz.

Die mathematischen Objekte, von denen im folgenden die Rede sein wird, heißen *Mengen* (Teilmengen, Verbindungsmengen). Alle sollen den-

[3]) Aus den Vordersätzen

$\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{C}$

kann freilich in gewissen Fällen doch eine positive Folgerung gezogen werden und zwar für $\mathfrak{A}$ selbst. Nämlich dann, wenn man eine zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestehende positive Beziehung kennt. Aus den Sätzen:

Das Dreieck $\mathfrak{D}$ ist nicht spitzwinklig; und
Das Dreieck $\mathfrak{D}$ ist nicht stumpfwinklig

folgt, daß $\mathfrak{D}$ rechtwinklig ist. Hier liegen nämlich nur scheinbar ausschließlich negative Prämissen vor; zu ihnen kommt als positive der Satz: Jedes Dreieck ist entweder spitzwinklig oder stumpfwinklig oder rechtwinklig. Vgl. auch die Anmerk. auf S. 182.

selben Äquivalenzbeziehungen gehorchen, die wir als *Axiome der Äquivalenz* ($\sim$) einführen. Sie lauten: Sind $M$, $N$, $P$ verschiedene Mengen, so gilt

I. Aus $M \sim N$ folgt $N \sim M$.

II. Aus $M \sim N$ und $N \sim P$ folgt $M \sim P$.

Der Äquivalenzbegriff hat also sowohl *kommutativen*, wie auch *assoziativen* Charakter.

Aus diesen Axiomen folgt:

1. Aus $M \sim N$ und $N$ *nicht* $\sim P$ folgt $M$ *nicht* $\sim P$. Denn wäre $M \sim P$, so würde daraus in Verbindung mit $N \sim M$ gemäß I. weiter $N \sim P$ folgen, im Gegensatz zur Voraussetzung.

Die Axiome I und II zeigen, daß sie die Ausdehnung auf den Fall zulassen, daß $M$ und $N$ dieselbe Menge bedeuten. Wir fügen also als weiteres Axiom hinzu

III. Es ist $M \sim M$.

## § 2.

## Teilmengen und Verbindungsmengen.

Ist $M'$ Teilmenge von $M$, so soll dies durch

$$M' t M$$

bezeichnet werden. Wir nehmen durchweg an, daß $M'$ von $M$ *verschieden* ist, und nennen insofern $M'$ auch echte oder eigentliche Teilmenge von $M$.

Für die Teilmengen sollen folgende Axiome gelten (*Axiome der Teilmengen*):

I. Aus $M' t M$ und $M'' t M'$ folgt $M'' t M$.

II. Jede Teilmenge $M'$ von $M$ bestimmt eindeutig eine zweite Teilmenge $M_1$ von $M$, die ihre *Komplementärmenge* bezüglich $M$ heißt.

III. Die Komplementärmenge von $M_1$ ist wiederum $M'$.

Wir dürfen daher folgende Bezeichnungen einführen. Wir schreiben $M_1 k M'$ resp. $M' k M_1$ und setzen demgemäß (III) in die Form

III'. Aus $M_1 k M'$ folgt $M' k M_1$.

Für die Beziehung von $M_1$ und $M'$ zur Menge $M$ selbst schreiben wir

$$M = (M_1, M') = (M', M_1),$$

und sagen, daß $M$ in die Teilmengen $M'$ und $M_1$ zerfällt. Zusammenfassend können wir also sagen:

Aus $M' t M$ folgt $M_1 t M$, $M_1 k M'$, $M' k M_1$, $M = (M', M_1)$.

Seien nun $M$ und $N$ zwei Mengen, so können bezüglich ihrer Teilmengen zwei Fälle eintreten. Entweder gibt es für $M$ und $N$ identische

Teilmengen, oder es gibt keine solchen Teilmengen. In diesem Fall nennen wir die Mengen *fremd* zueinander, oder kurz fremd, und schreiben

$$M f N \quad \text{resp.} \quad N f M.$$

Für fremde Mengen gilt der Satz:

1. Sind $M$ und $N$ fremde Mengen, so ist auch jede Teilmenge von $M$ zu jeder Teilmenge von $N$ fremd; d. h.

Aus $M f N$, $M' t M$, $N' t N$ folgt $M' f N'$.

Wären nämlich die Teilmengen $M'$ und $N'$ nicht fremd, und ist $P$ eine in beiden enthaltene Teilmenge, so hätte man

$$P t M', \quad M' t M \quad \text{und} \quad P t N', \quad N' t M,$$

und daher gemäß I auch

$$P t M \quad \text{und} \quad P t N,$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung.

1a. Der Satz gilt auch so, daß $M'$ zu $N$ selbst, und ebenso $N'$ zu $M$ fremd ist. Der Beweis ist derselbe.

Wir stellen weiter folgende Axiome auf:

IV. *Die beiden Komplementärmengen $M'$ und $M_1$ einer Menge $M$ sind fremde Mengen*; d. h.

Aus $M_1 k M'$ folgt $M_1 f M'$.

Diese Beziehung soll aber auch umgekehrt gelten; zu diesem Zweck führen wir folgendes weitere Axiom ein (*Axiom der Verbindungsmengen*).

V. *Zwei fremde Mengen $N$ und $P$ bestimmen eine und nur eine Menge $M$, deren Komplementärmengen sie sind*; d. h.

Aus $N f P$ folgt $N t M$, $P t M$ und $N k P$.

Die Axiome IV und V lassen sich also auch so auffassen, daß die Beziehungen $N k P$ und $N f P$ gleichwertig sind. Wir nennen die Menge $(N, P)$ die *Verbindungsmenge* von $N$ und $P$. Es folgt noch

2. Die Mengen $N$ und $P$ sind von ihrer Verbindungsmenge $M = (N, P)$ verschieden.

Denn da sie nach V Komplementärmengen von $M$ sind, so ist jede eine echte Teilmenge von $M$.

Die Menge $(N, P)$ hat außer $N$ und $P$ gemäß Axiom I auch jede Teilmenge $N'$ und $P'$ zu Teilmengen. Damit sind aber, wie wir durch ein weiteres Axiom festsetzen, nicht ihre sämtlichen Teilmengen erschöpft. Gemäß Satz 1 und 1a ist auch $N'$ zu $P'$ fremd, ebenso $N'$ zu $P$ und $N$ zu $P'$; nach Axiom V gibt es daher je eine Menge

$$(N', P'), \quad (N, P') \quad \text{und} \quad (N', P).$$

Für sie setzen wir nun fest:

VI. *Ist $M = (N, P)$, so sind auch die Mengen*

$$(N', P'), \quad (N', P), \quad (N, P')$$

*Teilmengen von $M$; es ist aber auch jede von $N, N'$ $P, P'$ verschiedene Teilmenge von dieser Form.*

Wir folgern hieraus den Satz:

3. Ist $M = (N, P)$ und ist die Menge $Q$ fremd zu $N$ und fremd zu $P$, so ist sie auch fremd zu $M$; d. h. aus $QfN$ und $QfP$ folgt $Qf(N, P)$.

Wäre nämlich die Menge $Q$ nicht fremd zu $M$, so gäbe es für sie und $M$ eine identische Teilmenge; d. h. es gäbe eine Teilmenge $Q'$, die gemäß VI eine der Formen

$$N, N', \quad P, P', \quad (N, P'), \quad (N', P), \quad (N', P')$$

haben müßte. Diese Teilmenge $Q'$ hätte also jedenfalls $N$ oder $P$ oder eine Teilmenge von $N$ oder $P$ als Teilmenge; d. h. es gäbe eine Teilmenge $Q''$ von $Q'$, die mit $N$ oder $P$ oder einer Teilmenge von $N$ oder $P$ identisch wäre. Nun ist aber nach I $Q''$ auch Teilmenge von $Q$ und damit ergibt sich ein Widerspruch gegen die Voraussetzung.

Der Satz 3 läßt sich auch in die Form setzen:

3a. Ist die Menge $Q$ nicht fremd zur Menge $(N, P)$, aber fremd zu $N$, so ist sie nicht fremd zu $P$.

Will man den Begriff der Verbindungsmenge auf mehr als zwei Mengen ausdehnen, so hat man ein neues Axiom nötig. Es ist jedoch für das Folgende nicht erforderlich, dies näher auszuführen.

## § 3.

## Die Verknüpfung der Mengen.

Die verschiedenen Beziehungen, die zwischen zwei Mengen $M$ und $N$ Platz greifen können, sind aus der folgenden von Cantor angegebenen Aufzählung aller Möglichkeiten ersichtlich, die unsern Ausgangspunkt abgeben soll:

a) Es gibt ein $M' \sim N$, und ein $N' \sim M$.

b) Es gibt kein $M_1 \sim N$, aber ein $N' \sim M$.

c) Es gibt ein $M' \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$.

d) Es gibt kein $M_1 \sim N$, und kein $N_1 \sim M$ [4]).

[4]) Die Anwendung oberer und unterer Indizes bei den Teilmengen im positiven und negativen Fall soll im allgemeinen zur Erleichterung der Auffassung beibehalten werden.

Wir wollen diese vier Beziehungen durch

(A) $$MaN, \quad MbN, \quad McN, \quad MdN$$

darstellen. Man erkennt zunächst unmittelbar:

1. Die Beziehungen a), b), c), d) schließen einander gegenseitig aus.

2. Die Beziehungen $MaN$ und $NaM$, ebenso $MdN$ und $NdM$ sind identisch. Die Beziehung $MbN$ ist identisch mit $NcM$.

Wir erörtern sofort, welche dieser Beziehungen sich auf den Fall ausdehnen lassen, daß $M$ und $N$ dieselbe Menge bedeuten. Es findet sich

2a. Die Beziehungen $MbM$ und $McM$ sind widerspruchsvoll. Sie fordern nämlich das gleichzeitige Bestehen von

$$M' \sim M \quad \text{und} \quad \textit{kein}\ M_1 \sim M.$$

Dagegen sind die Beziehungen $MaM$ und $MdM$ widerspruchsfrei. Übrigens läßt sich dies auch als unmittelbare Folge von 1 und 2 auffassen.

Sei $P$ eine weitere Menge, so besteht zwischen $N$ und $P$ ebenfalls eine der Beziehungen

(B) $$NaP, \quad NbP, \quad NcP, \quad NdP,$$

und es entsteht die Frage, welche Folgerung sich für die Mengen $M$ und $P$ einstellt, wenn man eine Beziehung der Reihe (A) mit einer Beziehung der Reihe (B) kombiniert. Diese Aufgabe läßt sich ohne Einführung neuer Axiome nicht erledigen. Ein erstes, das den Begriff der Teilmenge mit dem der Äquivalenz verbindet, sei das folgende:

I. *Aus den Relationen*

$$M'tM, \quad M \sim N$$

*lassen sich die Relationen*

$$N'tN, \quad N' \sim M'$$

*folgern; d. h. ist $M \sim N$, so bedingt eine jede Teilmenge $M'$ von $M$ die Existenz einer Teilmenge $N'$ von $N$, die zu $M'$ äquivalent ist.*

Vielleicht mag man erwarten, daß die Menge $N'$ als diejenige wohlbestimmte Menge eingeführt wird, die der Menge $M'$ *gemäß der zwischen $M$ und $N$ bestehenden Äquivalenz* entspricht. Aber dies ist für den hier vorgenommenen Aufbau — jedenfalls an dieser Stelle — weder möglich noch nötig. Es genügt, die *Existenz* einer Menge $N'$ zu fordern; welches diese Menge ist, darf ganz offen bleiben. Es hängt dies damit zusammen, daß die Äquivalenz $M \sim N$ in ihrer besondern Eigenart hier nicht in Frage kommt; nur die *Relationen*, die die Eigenart des Äquivalenzbegriffs kennzeichnen, und für zwei Mengen und ihre Teilmengen bestehen, werden in Betracht gezogen.

Einen Teil der oben gestellten Frage hat bekanntlich schon Cantor selbst beantwortet; man zeigt leicht

3. Aus $MaN$ und $NaP$ folgt $MaP$.
4. Aus $MaN$ und $NbP$ folgt $MbP$.
5. Aus $MaN$ und $NcP$ folgt $McP$.
6. Aus $MbN$ und $NbP$ folgt $MbP$.
7. Aus $McN$ und $NcP$ folgt $McP$ [5]).

Die Beweise sind natürlich ausschließlich auf die in a), b), c), d) enthaltenen Beziehungen zu stützen. Ein Beispiel möge zeigen, wie sie sich führen lassen. Um aus den Relationen

$$MbN \quad \text{und} \quad NbP \quad \text{weiter} \quad MbP$$

zu folgern, haben wir von

$$\textit{kein}\ M_1 \sim N, \quad \textit{ein}\ N' \sim M,$$
$$\textit{kein}\ N_1 \sim P, \quad \textit{ein}\ P' \sim N$$

auszugehen [5a]), und daraus die Beziehungen

$$\textit{kein}\ M_1 \sim P, \quad \textit{ein}\ P' \sim M$$

abzuleiten. Wir beweisen zunächst den zweiten Teil. Wegen $P' \sim N$ gibt es nach I eine Teilmenge $P'' \sim N'$, und aus $N' \sim M$ folgt nun $P'' \sim M$. Die Richtigkeit der ersten Behauptung erweisen wir indirekt. Wäre nämlich ein $M' \sim P$, so folgte gemäß I aus $N' \sim M$ wiederum die Existenz einer Menge $N''$ von $N'$, für die $N'' \sim M'$ sein müßte, und aus

$$M' \sim P, \quad N'' \sim M' \quad \text{weiter} \quad N'' \sim P,$$

während kein $N_1 \sim P$ sein kann.

Es bleibt noch übrig, das gleichzeitige Bestehen der Beziehungen

$$MbN \quad \text{und} \quad NcP$$

zu untersuchen, sowie die Kombination von $MdN$ mit einer der Beziehungen

$$NaP, \quad NbP, \quad NcP, \quad NdP.$$

Hier gilt zunächst, daß aus $MbN$ und $NcP$ eine bestimmte Beziehung zwischen $M$ und $P$ nicht folgt; d. h.

8. Mit $MbN$ und $NcP$ ist jede der vier Beziehungen $MaP$, $MbP$, $McP$, $MdP$ verträglich.

---

[5]) Diese Tatsachen entsprechen bekanntlich dem Umstand, daß wenn man den Fällen $a$, $b$, $c$ die Beziehungen „gleich", „kleiner", „größer" zuweist, die für diese Beziehungen geltenden assoziativen Gesetze erfüllt sind (z. B. aus $\alpha = \beta$ und $\beta = \gamma$ folgt $\alpha = \gamma$ usw.).

[5a]) Es ist klar, daß *ein* $N' \sim M$ usw. nicht die Bedeutung hat von „nur ein" sondern von „mindestens ein".

Der Beweis darf unterbleiben. Nur sei bemerkt, daß dies dem realen Tatbestand entspricht, dessen axiomatische Grundlegung hier in Frage steht [6]).

Wir gehen nun zu dem Rest unseres Problems über und prüfen zunächst die Kombination von

$$(\alpha) \qquad MdN \quad \text{und} \quad NdP.$$

Die Frage lautet auch hier, ob die Beziehungen $(\alpha)$ eine *bestimmte* Beziehung zwischen $M$ und $P$ bedingen und eventuell *welche*. Hier liegt der in der Einleitung genannte Fall vor, daß es sich um lauter negative Prämissen handelt. Diese Prämissen sind

$$(\alpha') \qquad \begin{cases} \textit{kein } M_1 \sim N, & \textit{kein } N_1 \sim M, \\ \textit{kein } N_1 \sim P, & \textit{kein } P_1 \sim N. \end{cases}$$

Aus ihnen läßt sich auf direktem Wege über die Beziehung von $M$ zu $P$ *nichts schließen*. Teilweise gelingt es allerdings auf indirektem Wege; in einzelnen Fällen kommt nämlich dadurch zu den obigen Prämissen eine neue Tatsache hinzu, die positiver Natur ist. Um die Untersuchung durchzuführen, hat man nämlich zu prüfen, ob die Annahme einer der Beziehungen

$$(\beta) \qquad MaP, \ MbP, \ McP, \ MdP$$

auf Grund der bisherigen axiomatischen Festsetzungen einen Widerspruch mit dem gleichzeitigen Bestehen der Beziehungen $(\alpha)$ bedingt, und zwar kommen naturgemäß hier nur die Axiome von § 1, das obige Axiom § 3, I und der obige Satz 2 in Frage. Diese Prüfung haben wir ausführlich vorzunehmen [7]).

Zunächst sieht man leicht, daß die Beziehungen

$$MbP \quad \text{und ebenso} \quad McP$$

als Folgen von $(\alpha)$ auszuschließen sind. Wegen Satz 2 kann man nämlich die Beziehungen $(\alpha)$ auch in die Form

$$PdN \quad \text{und} \quad NdM$$

setzen, und müßte daher als Folge von $(\alpha)$ ebenso auch

$$PbM \quad \text{oder} \quad PcM$$

erhalten. Aber $MbP$ und $PbM$, und ebenso $McP$ und $PcM$ sind nach Satz 2 nicht identisch, womit die Behauptung erwiesen ist [8]).

[6]) Für Mächtigkeiten würden die Relationen $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n} > \mathfrak{p}$ bestehen; sie bedingen keine Größenbeziehung zwischen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}$.

[7]) In den Math. Ann. 72 (1912), S. 551, ist diese Untersuchung schon teilweise durchgeführt worden.

[8]) Die logische Eigenart des oben behandelten Problems entspricht also nicht ganz dem in der Einleitung genannten Tatbestand. Es lautet nämlich genauer so:

Es ist weiter zu untersuchen, ob sich die Beziehung

$$(\gamma) \qquad MaP$$

als Folge von ($\alpha$) einstellen kann. Hier ist ein Resultat, das dies unmöglich macht, nicht erhältlich. Die Beziehung $MaP$ bedeutet nämlich

$$(\gamma') \qquad \textit{ein } M' \sim P, \quad \textit{ein } P' \sim M.$$

Die Verbindung mit ($\alpha$) liefert gemäß § 1 die weiteren Relationen

$$\textit{kein } N_1 \sim P', \quad \textit{kein } N_1 \sim M'.$$

Genauer bedeutet dies: Es gibt eine Teilmenge $P'$, der keine Teilmenge von $N$ äquivalent ist, und es gibt auch eine Teilmenge $M'$, der keine Teilmenge von $N$ äquivalent ist. Dies stellt aber einen Widerspruch zu ($\alpha'$) oder zu ($\gamma'$) nicht dar.

Es soll noch eine zweite Prüfung vorgenommen werden; wir haben auch den assoziativen Charakter der Beziehungsregeln in Betracht zu ziehen. Ist $MaP$ das Resultat von ($\alpha$), so heißt dies, daß das gleichzeitige Bestehen von

$$MdN, \quad NdP, \quad MaP$$

nicht widerspruchsvoll sein darf. Nun sollen aber zwei von diesen Bedingungen stets eine dritte bedingen, und daraus folgt, daß aus

$$MaP \quad \text{und} \quad PdN \quad \text{wieder} \quad MdN$$

und aus

$$NdM \quad \text{und} \quad MaP \quad \text{wieder} \quad NdP$$

folgen muß. Es ist nun die Frage, ob diese Regeln einen widerspruchslosen Charakter haben. Dies ist in der Tat der Fall. Man sieht es am einfachsten daraus, daß man die assoziativen Gesetze, die die Beziehungen

---

Welche von vier möglichen Beziehungen wird durch die dem Problem eigentümlichen nur negativen Prämissen ausgeschlossen? Bei der Annahme, $MbN$ oder $McN$ seien die Folgen dieser negativen Prämissen, wird von selbst eine neue Tatsache eingeführt; die Symmetrie der Beziehungen $MdN$ und $NdP$ bezüglich $M$ und $P$ steht nämlich im Gegensatz zu der Unsymmetrie der Folgerungen $MbP$ oder $McP$ für $M$ und $P$. Und daher ergab sich oben ein Resultat. Die Annahme, $MaP$ oder $MdP$ seien die Folgen der negativen Prämissen, liefert dagegen eine solche neue Tatsache nicht; es ergibt sich daher, wie das obige weiter zeigt, ein Resultat nicht.

Allgemeiner gesprochen: Wenn die Prämissen: $\mathfrak{A}$ ist nicht $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist nicht $\mathfrak{C}$ sich auch in die Form setzen lassen: $\mathfrak{C}$ ist nicht $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ ist nicht $\mathfrak{A}$, so kann damit nur eine solche Beziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ vereinbar sein, die zugleich die *nämliche* Beziehung zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ bedeutet. Eine genauere Analyse des hiermit mehrfach besprochenen logischen Problems von seiten der Logiker wäre sehr erwünscht. Das letzte Wort soll mit dem vorstehenden nicht gesprochen sein.

$(a)$ und $(d)$ miteinander verbinden, wenn man noch Satz 3 beachtet, in die einfache Form

$$(aa) = (dd) = a, \quad (ad) = (da) = d$$

setzen kann; sie sind das genaue Analogon zu den Vorzeichenregeln

$$(+)(+) = (-)(-) = +; \quad (+)(-) = (-)(+) = -,$$

deren assoziativer Gesamtcharakter feststeht.

Wir haben endlich noch die Beziehung

$$(\delta) \qquad MdP$$

als mögliche Folge der Beziehungen $(\alpha)$ zu erörtern. Sie bedeutet

$$(\delta') \qquad \textit{kein } M_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim M.$$

Hier zeigt sich zunächst, daß sich aus ihr und den Relationen $(\alpha')$ weitere direkte Folgerungen überhaupt nicht entnehmen lassen, da sie jetzt *samt und sonders* negativer Natur sind. Wir prüfen auch hier noch den assoziativen Gesamtcharakter. Ist $MdP$ das Resultat von $MdN$ und $NdP$, so bedingt es jetzt, daß aus

$MdP$ und $PdN$ wieder $MdN$

und aus $MdM$ und $MdP$ wieder $MdP$

folgt; hier aber ist der widerspruchsfreie Charakter evident. Also folgt:

9. *Mit den Beziehungen $MdN$ und $NdP$ kann sowohl die Beziehung $MaP$, wie $MdP$ zugleich bestehen;*

Keine der beiden Annahmen $\gamma$ und $\delta$ führt also auf einen Widerspruch mit den in $(\alpha')$ enthaltenen Prämissen; wir können daher auf diesem Wege nicht zu einem Resultat über die vorliegende Frage gelangen. Man muß daher in der Tat die Folgerung, die sich aus $MdN$ und $NdP$ ergeben soll, *axiomatisch einführen*; naturgemäß so, wie es durch den realen Tatbestand der Mengenlehre gefordert wird. Ihn aufzubauen ist ja einer der Zwecke dieser Darstellung[9]). Wir setzen daher fest (*Axiom der Verknüpfung*)

II. *Aus $MdN$ und $NdP$ folgt $MdP$.*

Dieses Axiom hat einen doppelten Charakter, einen rein logischen, und einen mathematischen. Es enthält die logische Forderung, daß aus zwei bestimmten Prämissen der Reihen (A) und (B) — wenn sie nicht etwa

[9]) Das obige Axiom entspricht im Rahmen der Cantorschen Theorie inhaltlich der Forderung der Vergleichbarkeit. Der Text zeigt, daß dieser Forderung eine gewisse rein logische Bedeutung inne wohnt. Man kann natürlich eine Mengenlehre auch so aufzubauen suchen, daß man die Unvergleichbarkeit als möglich zuläßt. Davon ist hier abgesehen worden; vgl. übrigens auch § 7.

einander widersprechen — stets *ein und nur ein* Schluß gefolgert werden soll; außerdem die mathematische, daß es gerade der in II enthaltene sein soll. Aus ihr erhalten wir nun leicht die Antwort auf die noch ausstehenden Verknüpfungen für die Beziehungen (A) und (B). Zunächst beweist man

10. Aus $MbN$ und $NdP$ folgt $MbP$.

10a. Aus $McN$ und $NdP$ folgt $McP$.

Für den Beweis von (10) haben wir auszugehen von

$$\textit{kein } M_1 \sim N, \quad \textit{ein } N' \sim M,$$
$$\textit{kein } N_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim N,$$

und daraus die Beziehung $MbP$, also

$$\textit{kein } M_1 \sim P, \quad \textit{ein } P' \sim M$$

abzuleiten. Wir folgern zunächst, daß eine Beziehung

$$M'' \sim P$$

unmöglich ist. Aus $N \sim M$ würde nämlich auf Grund dieser Annahme die Existenz einer Teilmenge $N''$ folgen, für die

$$N'' \sim M'' \sim P$$

wäre, im Widerspruch zu *kein* $N_1 \sim P$. Damit ist die Beziehung *kein* $M_1 \sim P$ erwiesen. Es ist jetzt noch zu zeigen, daß es ein $P' \sim M$ gibt. Wäre dies nicht der Fall, so bestände auf Grund des vorstehenden jetzt die Beziehung

$$\textit{kein } M_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim M,$$

also die Relation $MdP$, und zusammen mit der vorausgesetzten Beziehung $PdN$ folgte gemäß Axiom II die Beziehung $MdN$, im Widerspruch zu $MbN$. Damit ist der Beweis wieder geliefert. Ebenso wird der Beweis für $McN$ und $NdP$ geführt, was einer ausführlichen Darstellung nicht bedarf.

Wir haben schließlich noch die Kombination von

$$MaN \quad \text{und} \quad NdP$$

zu erörtern. Wir folgern zunächst, daß diese beiden Relationen an sich nur die Folge

$$MdP$$

gestatten. Wir haben auszugehen von

$$M' \sim N, \quad N' \sim M,$$
$$\textit{kein } N_1 \sim P, \quad \textit{kein } P_1 \sim N,$$

und zeigen zunächst, daß hiermit nur

$$\textit{kein}\ M_1 \sim P, \quad \textit{kein}\ P_1 \sim M,$$

verträglich sind. Gäbe es nämlich eine Menge $M'' \sim P$, so folgerte man wie oben eine Relation

$$N'' \sim M'' \sim P$$

im Widerspruch mit der Voraussetzung: *kein* $N_1 \sim P$; ebenso folgt die Unmöglichkeit einer Beziehung $P'' \sim M$. Es kann also an sich nur die Relation

$$MdP$$

bestehen. Wiederum ist noch der assoziative Charakter des Resultats zu prüfen. Diese Prüfung führt hier auf einen Widerspruch. Aus $MdP$ und $NdP$ würde nämlich gemäß dem Axiom II $MdN$ folgen, im Widerspruch mit der Annahme $MaN$. Das gleichzeitige Bestehen von $MaN$ und $NdP$ führt also auf einen Widerspruch; d. h.

11. *Die Beziehungen* $MaN$ *und* $NdP$ *können nicht zugleich bestehen.*

Dagegen sei ausdrücklich festgestellt, daß die Sätze 10 und 10a einen solchen Widerspruch nicht herbeiführen. Denn gemäß Satz 2 ist $MbP$ mit $PcM$ identisch, und die beiden Beziehungen

$$PcM \quad \text{und} \quad MbN$$

sind, wie wir oben unter 8. erwähnten, mit jeder der vier an sich möglichen Beziehungen zwischen $N$ und $P$ verträglich.

Damit ist unsere Untersuchung abgeschlossen; sie zeigt zugleich *die Widerspruchslosigkeit des Axioms* II. Wir ziehen aus ihm zunächst noch eine Folgerung, nämlich die, daß der Satz 11 auch in der Weise gilt, daß er das gleichzeitige Bestehen von

$$MaM \quad \text{und} \quad MdN, \quad \text{sowie von} \quad MaN \quad \text{und} \quad NdN$$

ausschließt. Aus $MaM$ folgt $M' \sim M$ und hieraus gemäß § 3, I

$$M'' \sim M' \sim M,$$

und daher besteht auch die Relation

$$M'aM;$$

diese kann aber nach Satz 11 nicht mit $MdN$ zugleich bestehen.

Weiter folgt aus $MaN$ zunächst

$$M' \sim N, \qquad N' \sim M,$$

also auch $N'' \sim M' \sim N$, während dagegen $NdN$ besagt, daß *kein* $N_1 \sim N$ ist. Also

11a. *Die Beziehungen $MaM$ und $MdN$, ebenso $MaN$ und $NdN$ schließen einander aus.*

Es ergibt sich damit das folgende Schlußresultat. *Mit den Beziehungen*

$$MdN \quad \text{und} \quad NdP$$

*erscheint sowohl die Folgerung $MaP$ wie auch die Folgerung $MdP$ verträglich.* Wird die Relation $MdP$ axiomatisch als Folgerung eingeführt, so bedingt dies, daß die Beziehungen $MaN$ und $NdP$ nicht zugleich bestehen können; würde man dagegen die Beziehung $MaP$ axiomatisch als Folgerung einführen, so ergibt sich ein derartiges Resultat nicht. Trotzdem erfordert der Aufbau der Mengenlehre die Einführung der Folgerung $MdP$. Auf die Deutungsmöglichkeit der axiomatischen Annahme $MaP$ komme ich in § 7 zurück.

Für die Beziehungen $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ gelten noch die folgenden besonderen Sätze:

12. Aus den Relationen

$$MaN, \quad MbN, \quad McN, \quad MdN$$

und

$$M \sim \mathfrak{M}, \quad N \sim \mathfrak{N}$$

folgt auch

$$\mathfrak{M}aN, \quad \mathfrak{M}bN, \quad \mathfrak{M}cN, \quad \mathfrak{M}dN$$

und

$$Ma\mathfrak{N}, \quad Mb\mathfrak{N}, \quad Mc\mathfrak{N}, \quad Md\mathfrak{N}.$$

Für den Beweis mag ein Beispiel genügen. Werde von

$$MbN \quad \text{und} \quad M \sim \mathfrak{M}$$

ausgegangen, so heißt dies

$$N' \sim M, \quad \text{jedes } M_1 \text{ nicht} \sim N.$$

Wir erhalten daher, falls $\mathfrak{M}_1 \sim M_1$ ist, gemäß § 1 sofort

$$N' \sim \mathfrak{M}, \quad \text{jedes } \mathfrak{M}_1 \text{ nicht} \sim N,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

13. *Aus $M'tM$ folgt $M'aM$ oder $M'bM$; d. h. für jede Teilmenge $M'$ gilt entweder $M'aM$ oder $M'bM$.*

Es gibt nämlich eine Teilmenge von $M$, die äquivalent $M'$ ist, nämlich $M'$ selbst, und daher ist die Beziehung $(c)$ und $(d)$ ausgeschlossen.

14. Aus $M'tM$ und $MbN$ folgt $M'bN$; d. h. besteht die Beziehung $MbN$, so besteht für jede Teilmenge $M'$ von $M$ die Beziehung $M'bN$.

Man hat nämlich gemäß 13. und nach Voraussetzung

$$M'aM \text{ oder } M'bM \quad \text{und} \quad MbN,$$

und damit gemäß Satz 4 und 6 die Behauptung.

15. Aus $M' t M$, $M'' t M'$, $M'' b M'$ folgt $M'' b M$; d. h. sind $M'$ und $M''$ Teilmengen von $M$, für die die Beziehung $M'' b M'$ gilt, so ist auch $M'' b M$ [10]).

Man hat nämlich wieder zugleich (nach 13.)

$$M'' b M' \quad \text{und} \quad M' a M \quad \text{oder} \quad M' b M$$

und folgert daraus wie eben $M'' b M$.

## § 4.

## Endliche und unendliche Mengen.

Nach § 3, Satz 1 und 2 sind $M a M$ und $M d M$ die beiden einzigen der Beziehungen $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$, die eine Menge zu sich selbst haben kann; wir definieren nun: 1. Eine Menge heißt *unendlich*, wenn die Beziehung $M a M$ besteht; sie heißt *endlich*, wenn $M d M$ gilt. Man hat also im ersten oder zweiten Fall

$$\textit{ein } M' \sim M; \quad \textit{kein } M_1 \sim M,$$

und damit die *Dedekindsche Begriffsbestimmung*.

Wir folgern zunächst:

2. Aus $M a M$ oder $M d M$ und $M \sim \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M} a \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M} d \mathfrak{M}$. Dies ist eine unmittelbare Folge von § 3, 12.

Für endliche und unendliche Mengen bestehen gewisse Sondersätze; diese sollen jetzt abgeleitet werden. Das Haupttheorem lautet:

3. *Für unendliche Mengen können nur die Beziehungen* $(a)$, $(b)$, $(c)$ *bestehen; für endliche Mengen nur* $(b)$, $(c)$, $(d)$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den in § 3 abgeleiteten Resultaten.

Sind nämlich $M$ und $N$ unendliche Mengen, und würde die Beziehung $M d N$ bestehen, so hätte man

$$M a M \quad \text{und} \quad M d N,$$

und dies verstößt gegen Satz 11a von § 3.

Ebenso, wenn $M$ und $N$ endliche Mengen sind, so hätte man, falls sie die Beziehung $M a N$ gestatten,

$$N a M \quad \text{und} \quad M d M,$$

und auch dies verstößt gegen Satz 11a von § 3.

Damit ist der Satz 3 bewiesen. Er gibt zugleich den inneren Grund für die im Satz 11 von § 3 enthaltene Unvereinbarkeit von $M a N$ und

[10]) Dieser Satz berührt sich inhaltlich mit dem Satz 25 in Zermelos Grundlagen (Math. Ann. 65, S. 271).

$NdP$. Denn unserem Satz 3 gemäß besagt $MaN$, daß $M$ und $N$ unendliche Mengen sind, und $NdP$, daß $N$ und $P$ endliche Mengen sind. Beides schließt sich aber aus.

4. *Für jede Teilmenge einer endlichen Menge besteht die Beziehung* $M'bM$; d. h. aus $MdM$ und $M'tM$ folgt $M'bM$.

Gemäß Satz 13 von § 3 gilt nämlich für jede Menge $M$ und eine Teilmenge $M'$ von ihr

$$M'aM \quad \text{oder} \quad M'bM.$$

Hierzu kommt, da $M$ eine endliche Menge ist, $MdM$. Diese Beziehung kann aber nach Satz 11 von § 3 mit $M'aM$ nicht zugleich bestehen; also muß es $M'bM$ sein.

Die weiteren noch abzuleitenden Sätze machen die Einführung eines neuen Axioms nötig, und zwar eines *Axioms über die Äquivalenz von Verbindungsmengen.* Es lautet:

I. Aus $M=(N,P)$, $N \sim \mathfrak{N}$, $P \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} f \mathfrak{P}$ folgt $(N,P) \sim (\mathfrak{N},\mathfrak{P})$; d. h. *werden in der Verbindungsmenge* $(N,P)$ *die Mengen* $N$ *und* $P$ *durch die zu ihnen äquivalenten, zueinander fremden Mengen* $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{P}$ *ersetzt, so ist die neue Menge der ursprünglichen äquivalent.*

Das Axiom gilt gemäß § 1, III auch für den Fall, daß nur eine Menge durch eine äquivalente ersetzt wird, d. h.

5. Aus $M=(N,P)$, $N \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} f P$ folgt $(N,P) \sim (\mathfrak{N},P)$ [11].

Wir beweisen nun der Reihe nach folgende Sätze:

6. *Jede Teilmenge einer endlichen Menge ist selbst eine endliche Menge*; d. h. aus $MdM$, $M'tM$ folgt $M'dM'$.

Wäre nämlich $M'$ eine unendliche Menge, so müßte eine Beziehung

$$M'' \sim M'$$

bestehen. Setzt man nun

$$M=(M',M_1),$$

so ist gemäß § 2, VI auch

$$M''' \sim (M'',M_1)$$

eine Teilmenge von $M$ und aus Satz 5 folgte

$$M''' \sim M,$$

was einen Widerspruch gegen $MdM$ darstellt.

7. *Ist* $M$ *eine endliche,* $N$ *eine unendliche Menge, so kann nur die Beziehung* $MbN$ *bestehen* [12]; d. h. aus $MdM$ und $NaN$ folgt $MbN$.

---

[11]) Es liegt nahe, Satz 5 als Axiom hinzustellen, und das Axiom als Folge. Der Beweis hätte aber die sachlich überflüssige Annahme $\mathfrak{N} f P$ nötig.

[12]) Auf diesen Satz wurde ich schon vor längerer Zeit von Herrn H. Hahn aufmerksam gemacht.

Der Beweis wird so geführt, daß die Unvereinbarkeit der Voraussetzungen mit $MaN$, $McN$, $MdN$ gezeigt wird.

Würde zunächst die Beziehung $MaN$ bestehen, so hätte man $M' \sim N$; und demgemäß erhielte man aus der Annahme $MaN$ nach § 3 Satz 12 weiter auch

$$MaM' \quad \text{resp.} \quad M'aM,$$

was aber, da $M$ endliche Menge ist, gegen Satz 4 verstößt.

Wäre zweitens $McN$ in Kraft, so folgte daraus $M' \sim N$, und nun hieraus und aus $NaN$ weiter

$$M'aM',$$

was wiederum einen Widerspruch zum Satz 6 darstellt.

Endlich ist auch die Beziehung $MdN$ unmöglich. Denn aus $NaN$ folgt zunächst

$$N' \sim N;$$

hieraus und aus $NaN$ und der angenommenen Relation $MdN$ folgte dann weiter

$$NaN' \quad \text{und} \quad MdN' \quad \text{resp.} \quad N'dM.$$

Die Beziehungen $NaN'$ und $N'dM$ sind aber gemäß § 3 Satz 11 nicht zugleich möglich. Also gilt in der Tat die Beziehung $MbN$.

8. Ist $M$ eine unendliche Menge, so ist auch die Verbindungsmenge $(M, N)$ eine unendliche Menge.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge des Axioms I. Denn

$$\text{aus } M' \sim M \text{ folgt } (M, N) \sim (M', N),$$

und damit ist der Satz, da $(M', N)$ Teilmenge von $(M, N)$ ist, bewiesen.

9. Eine Menge ist unendlich, wenn sie eine unendliche Teilmenge hat.

Ist nämlich $M'$ diese Teilmenge, so ist

$$M = (M', M_1)$$

und daher gemäß Satz 8 auch $M$ eine unendliche Menge.

Man kann diesen Satz auch noch so formulieren:

9'. Eine Menge ist endlich, wenn jede ihrer Teilmengen endlich ist.

10. *Ist $M$ eine endliche Menge, so ist stets $Mb(M, N)$*; d. h. aus $MdM$ folgt $Mb\,(M, N)$.

Es ist nämlich $M$ Teilmenge von $(M, N)$. Ist nun $(M, N)$ endlich, so folgt der Satz aus 6, ist aber $(M, N)$ unendlich, so folgt er aus 7.

Zur Ableitung weiterer Sätze bedürfen wir neuer Axiome. Das Axiom I besagt, daß die Verbindungsmengen äquivalenter Mengen selbst äquivalent sind; wir haben jetzt noch zwei Axiome nötig, die die *Nichtäquivalenz der Verbindungsmengen nicht äquivalenter Mengen* betreffen.

II. *Sind $M$ und $N$ fremde Mengen, ist $M_1$ Teilmenge von $M$ und $N_1$ Teilmenge von $N$, und ist $M_1$ nicht $\sim M$, $N_1$ nicht $\sim N$, so folgt daraus die Beziehung $(M_1, N_1)$ nicht $\sim (M, N)$;* d. h. *aus $M f N$, $M_1 t N$, $N_1 t N$, $M_1$ nicht $\sim M$, $N_1$ nicht $\sim N$ folgt $(M_1, N_1)$ nicht $\sim (M, N)$.*

Dieses Axiom soll für *alle* Mengen gelten. Für endliche Mengen reicht es aber noch nicht aus, und werde durch das folgende ersetzt und ergänzt:

III. *Sind $M$ und $N$ fremde und zugleich endliche Mengen, und ist $M_1$ Teilmenge von $M$, so soll stets $(M_1, N)$ nicht $\sim (M, N)$ sein, d. h. aus $M f N$, $M d M$, $N d N$, $M_1 t M$ folgt $(M_1, N)$ nicht $\sim (M, N)$.*

Für unendliche Mengen braucht dieses Axiom bekanntlich nicht erfüllt zu sein.

Auch die Voraussetzungen dieser Axiome besitzen durchaus den in der Einleitung genannten logischen Sondercharakter; sie sind sämtlich negativer Natur, soweit es sich um die hier allein in Frage stehenden Äquivalenzbeziehungen handelt. Man könnte freilich annehmen, daß in diesem Fall ein indirektes Beweisverfahren zum Ziele führen werde; die Annahme

$$(M_1, N_1) \sim (M, N) \quad \text{resp.} \quad (M_1, N) \sim (M, N)$$

ist ja von positivem Charakter. Aber diese Vermutung trügt. Die Äquivalenz von Verbindungsmengen ist nämlich keineswegs nur so möglich, daß $M_1 \sim M$ und $N_1 \sim N$ ist, sondern auch auf andere Weise; und daher kann aus der angenommenen Äquivalenzbeziehung ein Widerspruch mit den Voraussetzungen

$$M_1 \text{ nicht } \sim M, \quad N_1 \text{ nicht } \sim N$$

nicht abgeleitet werden.

Die negative Fassung unserer Axiome stellt uns zunächst vor die Aufgabe, die bestimmte Beziehung $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ aufzufinden, die zwischen $(M, N)$ und den Mengen $(M_1, N_1)$ und $(M_1, N)$ besteht. Für das Axiom II kann es erst im nächsten Paragraphen geschehen; für das Axiom III soll es hier folgen.

Da $(M_1, N)$ Teilmenge von $(M, N)$ ist, so kann nach Satz 13 von § 3 nur die Beziehung $(a)$ oder $(b)$ realisiert sein. Aber der Fall $(a)$, d. h.

$$(M_1, N)\, a\, (M, N)$$

ist unmöglich. Jede Teilmenge von $(M_1, N)$ hat nämlich nach § 2, VI eine der Formen

$$M_1, M_2, N, N_1, (M_2, N), (M_1, N_1), (M_2, N_1),$$

wo $M_2$ eine Teilmenge von $M_1$ ist. Keine von ihnen kann aber zu

$(M, N)$ äquivalent sein. Da nämlich $M$ und $N$ endliche Mengen sind, so hat man für sie gemäß 10. die Relationen

$$M b (M, N) \quad \text{und} \quad N b (M, N).$$

Gemäß Satz 4 hat man weiter

$$M_1 b M, \quad M_2 b M, \quad N_1 b N$$

und damit folgt die Behauptung nach Satz 6 von § 3 bereits für $M_1, M_2, N, N_1$. Für die drei Verbindungsmengen folgt sie aus den Axiomen selbst; es ist ja, da $M$ und $N$ endliche Mengen sind,

$$M_1 \textit{ nicht} \sim M, \quad M_2 \textit{ nicht} \sim M, \quad N_1 \textit{ nicht} \sim N$$

und damit ist in der Tat die behauptete Nichtäquivalenz eine Folge von (II) und (III). Also

11. Für endliche (und fremde) Mengen $M$ und $N$ gilt die Beziehung

$$(M_1, N) b (M, N).$$

12. *Die Verbindungsmenge zweier endlichen Mengen ist selbst endlich*; d. h. aus $M d M$ und $N d N$ folgt $(M, N) d (M, N)$.

Wir haben nachzuweisen, daß die Beziehung

$$(M, N) a (M, N)$$

ausgeschlossen ist. Nun hat jede Teilmenge von $(M, N)$ wieder eine der Formen

$$M, M_1, N, N_1, (M, N_1), (M_1, N), (M_1, N_1)$$

und wir beweisen, genau wie eben (vgl. auch § 5, 2), daß keine dieser Mengen zu $(M, N)$ äquivalent ist. Damit ist der Satz bewiesen.

## § 5.

## Das Äquivalenzproblem.

Die wichtigste Aufgabe, die zu behandeln ist, betrifft den Nachweis, daß die Mengen $M$ und $N$ äquivalent sind, falls für sie die Beziehung

$$M a N \quad \text{oder} \quad M d N$$

besteht; also der Satz (Äquivalenzsatz)

1. *Aus $MaN$ oder $MdN$ folgt $M \sim N$.*

Ehe der Beweis geführt wird, sollen die Äquivalenz-Relationen vorangestellt werden, die sich aus den vorstehenden Paragraphen unmittelbar ergeben:

2. *Aus $MbN$ und $McN$ folgt $M$ nicht $\sim N$.*

Wäre nämlich $M \sim N$, so hätte man auch (§ 3, 12)

$$N b N \quad \text{oder} \quad N c N,$$

was aber gemäß § 3, 3 widerspruchsvoll ist. Hieraus folgt unmittelbar weiter

3. *Mit $M \sim N$ ist nur $MaN$ oder $MdN$ verträglich.*

Die Umkehrung dieses Satzes 3 ist es, die den eigentlichen Äquivalenzsatz 1 bildet. Ist er bewiesen, so folgt endlich noch, als Umkehrung von 2.:

4. *Aus $M$ nicht $\sim N$ folgt $MbN$ oder $McN$.*

Man kann diese vier Sätze auch folgendermaßen zusammenfassen: *Die Beziehungen (a) und (d) sind hinreichende und notwendige Bedingungen für die Aequivalenz, (b) und (c) ebenso für die Nichtäquivalenz.*

Als Folge von 4. ergibt sich, was in § 3 und 4 noch offen bleiben mußte,

5. *Aus $M_1 t M$ und $M_1$ nicht $\sim M$ folgt $M_1 b M$*; d. h. *besteht für die Teilmenge $M_1$ von $M$ die Beziehung $M_1$ nicht $\sim M$, so gilt $M_1 b M$.*

Denn nach 4. gilt $M_1 b M$ oder $M_1 c M$; nach Satz 13 von § 3 nur $M_1 a M$ oder $M_1 b M$, also gilt $M_1 b M$.

Eine Anwendung hiervon gibt auch Antwort auf die bezüglich des Axioms II in § 4 gestellte Frage. Es folgt jetzt

6. *Sind $M_1$ und $N_1$ Teilmengen von $M$ und $N$, und ist $M_1$ nicht $\sim M$, $N_1$ nicht $\sim N$, so folgt daraus stets $(M_1, N_1)\, b\, (M, N)$.*

Wir gehen nun zum Satz 1 über und beweisen zunächst den ersten Teil, also den eigentlichen Bernsteinschen Äquivalenzsatz. Sein Beweis folgt aus dem Axiom II von § 4 über die Nichtäquivalenz der Verbindungsmengen.

Aus der Voraussetzung $MaN$ folgt zunächst

$$\text{ein } M' \sim N, \quad \text{ein } N' \sim M.$$

Wäre nun $M$ *nicht* $\sim N$, so hätte man nach § 1, 3

$$M \text{ nicht } \sim M', \quad N' \text{ nicht } \sim N.$$

Mit $M$ und $N$ sind aber auch $M'$ und $N'$ fremde Mengen (§ 2, 1); sie bestimmen daher eine Menge $(M', N')$, und für sie müßte gemäß Axiom II nunmehr

$$(M', N') \text{ nicht } \sim (M, N)$$

folgen. Andererseits folgt aber aus den beiden ersten Relationen unmittelbar nach § 4, I

$$(M', N') \sim (M, N)$$

und damit ergibt sich ein Widerspruch. Damit ist der Beweis bereits geliefert.

Freilich beruht der Beweis auf einer gewissen Voraussetzung, die noch zu erörtern ist. Wir operieren mit der Verbindungsmenge von $M$ und $N$ und haben deshalb die Voraussetzung nötig, daß $M$ und $N$ fremde Mengen sind. Sind sie es nicht, so wird man am einfachsten so vorgehen, daß man folgendes neue Axiom zugrunde legt [13]):

I. *Sind $M$ und $N$ keine fremden Mengen, so gibt es stets zwei ihnen äquivalente, zueinander fremde Mengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$; so daß also*

$$\mathfrak{M} \sim M \quad \textit{und} \quad \mathfrak{N} \sim N, \quad \textit{und} \quad \mathfrak{M} f \mathfrak{N}.$$

Gemäß § 3, 12 besteht auch für sie die Beziehung

$$\mathfrak{M} a \mathfrak{N},$$

und auf sie läßt sich daher der obige Beweis übertragen. Aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ folgt dann auch $M \sim N$.

Es handelt sich nun noch um den gleichen Nachweis für die Beziehung $M d N$. Ehe ich dazu übergehe, erinnere ich daran, daß die Eigenart der Beziehung $M d N$ in der Cantorschen Theorie offen geblieben war; für das durch sie bedingte Verhältnis von $M$ zu $N$ hatte sich ein Resultat nicht ableiten lassen. Das darf nicht wundernehmen; das hierin enthaltene Problem stellt nämlich wieder ein *logisch unlösbares* Problem, und damit eine illusorische Aufgabe dar. Wir haben ja als Prämissen zunächst nur die Aussagen

$$\textit{kein } M_1 \sim N, \quad \textit{kein } N_1 \sim M.$$

Dazu kommen, da $M$ und $N$ endliche Mengen sind,

$$\textit{kein } M_1 \sim M, \quad \textit{kein } N_1 \sim N,$$

also lauter Aussagen von negativem Charakter. Selbst der Weg des indirekten Beweises ändert daran in diesem Fall nichts; denn man müßte noch die Annahme

$$M \textit{ nicht } \sim N$$

hinzufügen. Nun wäre es ja möglich, daß die für den Beweis einzig in Frage kommenden Axiome II und III der Nichtäquivalenz von § 4 die Prämissen positiv beeinflussen könnten; aber auch das ist nicht der Fall. Denn diese Axiome lauten ja in ihrem Schlußteil übereinstimmend

$$(M_1, N_1) \textit{ nicht } \sim (M, N).$$

Wir müssen also von Prämissen ausgehen, die *samt und sonders* negativ sind, und kommen zu dem Schluß, daß sich die Äquivalenz $M \sim N$ im Fall endlicher Menge ohne eine nochmalige neue axiomatische Fest-

[13]) Es entspricht dem von Zermelo in seinen Grundlagen (Math. Ann. 65) enthaltenen Theorem 19. Man könnte auch die größte gemeinsame Teilmenge von $M$ und $N$ axiomatisch einführen und mit ihr operieren; doch scheint dies weniger einfach.

setzung nicht folgern läßt. Das so gewonnene Resultat läßt sich auch in seiner allgemeinen Bedeutung leicht verstehen. Es läuft dem Tatbestand parallel, der uns aus der allgemeinen Theorie der endlichen Zahlgrößen geläufig ist. Dort muß die Festsetzung, *wann* zwei Größen als gleich gelten sollen, erst frei — natürlich zweckmäßig — geformt werden, ehe man die Frage, *ob* zwei gegebene Größen als gleich zu gelten haben, in Betracht ziehen kann. Man denke z. B. an die Weierstraßsche Theorie der Irrationalzahlen; sie setzt bekanntlich die Gleichheit zweier Zahlen $a$ und $b$ so fest, daß jeder Bestandteil von $a$ kleiner ist als $b$ und jeder Bestandteil von $b$ kleiner als $a$. Eine solche axiomatische Festsetzung erweist sich also auch im Gebiet der endlichen Mengen, wenn man sie, wie hier, ausschließlich auf die Mengenbeziehungen, d. h. auf die Nichtäquivalenz von Menge und Teilmenge gründet, als eine Notwendigkeit.

Es fragt sich nur, welche Festsetzung man zweckmäßig zugrunde legt. Beachtet man, daß es sich im Grunde um eine Axiomatik der Größenlehre handelt, so liegt offenbar nichts näher, als die eben genannte Definition zu benutzen, und dies soll in der Tat geschehen. Wir setzen also fest (*Axiom der Äquivalenz endlicher Mengen*):

II. *Zwei endliche Mengen $M$ und $N$ sind äquivalent, wenn für jede Teilmenge $M'$ und $N'$ die Beziehung $M'bN$ resp. $N'bM$ besteht*; d. h. *aus $MdM$, $NdN$, $M'bN$, $N'bM$ für jedes $M'$, $N'$ folgt $M \sim N$.*

Hieraus läßt sich der Satz, daß aus $MdN$ auch $M \sim N$ folgt, unmittelbar folgern. Ehe wir dazu übergehen, wollen wir noch die Berechtigung unseres Axioms und seine Stellung im gesamten Aufbau näher erörtern. Wir wollen zunächst nachweisen, daß von den vier Beziehungen

$$MaN,\quad MbN,\quad McN,\quad MdN$$

*nur die letzte mit dem Axiom verträglich ist.*

Aus $MaN$ folgt

$$\text{ein } M' \sim N;$$

gemäß unserm Axiom ist aber für jedes $M'$

$$M'bN,$$

und man erhielte also $NbN$, was aber nach § 3, 3 widerspruchsvoll ist.

Aus $MbN$ folgt

$$\text{ein } N' \sim M;$$

was analog zur Relation $MbM$ führt, die ebenfalls widerspruchsvoll ist.

Endlich folgt aus $McN$ genau wie eben die widerspruchsvolle Relation $NbN$.

Unser Axiom kann also in der Tat nur mit der Beziehung $MdN$

verträglich sein. Dies ist aber auch wirklich der Fall. Die Folgerungen, die sich aus

$$M' b N \quad \text{und} \quad M d N, \qquad \text{aus} \quad N' b M \quad \text{und} \quad M d N$$

ergeben, lauten gemäß § 3, 9, daß für *jedes* $M'$ und $N'$

$$M' b M \quad \text{und} \quad N' b N$$

ist; sie entsprechen der Endlichkeit von $M$ und $N$ und stellen die in § 4, 4 gefundene Eigenschaft der endlichen Mengen dar.

Zusammenfassend folgt also: Das Axiom II ist nur für endliche Mengen realisiert, und überdies weder im Fall $M b N$, noch $M c N$; damit ist aber der Beweis seiner Berechtigung geliefert. *Es ist für die endlichen Mengen und ihre Äquivalenz charakteristisch.*

Der Beweis des Äquivalenzsatzes ergibt sich nun folgendermaßen.

Gemäß § 4, Satz 4 ist für jedes $M'$ und $N'$

$$M' b M \quad \text{und} \quad N' b N;$$

ferner gilt nach Voraussetzung

$$M d N \quad \text{und} \quad N d M,$$

und hieraus folgt nach § 3, 9 sofort

$$M' b N \quad \text{und} \quad N' b M$$

und nunmehr nach unserm Axiom

$$M \sim N.$$

## § 6.

## Sätze über Verbindungsmengen.

Seien $M$ und $N$ einerseits, und $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ andrerseits fremde Mengen. Zwischen $M$ und $\mathfrak{M}$, sowie zwischen $N$ und $\mathfrak{N}$ bestehe je eine der Beziehungen

$$M a \mathfrak{M}, \quad M b \mathfrak{M}, \quad M c \mathfrak{M}, \quad M d \mathfrak{M}$$

und

$$N a \mathfrak{N}, \quad N b \mathfrak{N}, \quad N c \mathfrak{N}, \quad N d \mathfrak{N}.$$

Es ist die Frage, welche Beziehung für

$$(M, N) \quad \text{und} \quad (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

resultiert, wenn wir irgendeine Beziehung der ersten Zeile mit einer Beziehung der zweiten Zeile kombinieren.

Wir beweisen zunächst folgende Sätze:

1. Aus $M a \mathfrak{M}$ und $N a \mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
2. Aus $M b \mathfrak{M}$ und $N b \mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
3. Aus $M c \mathfrak{M}$ und $N c \mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, c\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
4. Aus $M d \mathfrak{M}$ und $N d \mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, d\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.
5. Aus $M a \mathfrak{M}$ und $N d \mathfrak{N}$ folgt $(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

Die Beweise von Satz 1, 4, 5 lassen sich folgendermaßen zusammenfassen. Die Voraussetzungen lauten gemeinsam

$$M \sim \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N \sim \mathfrak{N},$$

woraus gemäß Axiom I von § 4

$$(M, N) \sim (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

folgt. Im Fall 1 und 5 sind nun $M$ und $\mathfrak{M}$ nach § 4, Satz 3 unendliche Mengen, also gilt dies nach § 4, 8 auch von $(M, N)$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ergibt sich wieder

$$(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Im Fall 4 sind dagegen $M$, $N$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ endliche Mengen, also auch (§ 4, 12) $(M, N)$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ist

$$(M, N)\, d\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wir beweisen nun den Satz 2[14]). Dazu gehen wir von den Relationen

$$M\, b\, \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N\, b\, \mathfrak{N}$$

aus, also von den Beziehungen

$$\text{kein } M_1 \sim \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M}' \sim M,$$
$$\text{kein } N_1 \sim \mathfrak{N} \qquad \mathfrak{N}' \sim N,$$

und erhalten zunächst

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}') \sim (M, N).$$

Wir folgern nun aus den gegebenen Relationen $M\, b\, \mathfrak{M}$ und $N\, b\, \mathfrak{N}$ mittels $M \sim \mathfrak{M}'$ und $N \sim \mathfrak{N}'$ weiter

$$\mathfrak{M}'\, b\, \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \mathfrak{N}'\, b\, \mathfrak{N},$$

oder aber (§ 5, 2)

$$\mathfrak{M}' \textit{ nicht} \sim \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{N}' \textit{ nicht} \sim \mathfrak{N}$$

und daraus endlich, gemäß Satz 6 von § 5

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}')\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

oder

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

---

[14]) Geht man zu Mächtigkeiten über, so bezieht sich der obige Satz auf den Fall, daß

$$\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{n}_2$$

ist; er schließt daraus

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{n}_1 < \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{n}_2 .$$

In der allgemeinen Theorie fehlt noch heute ein Nachweis dieser Folgerung. Sie ist von F. Bernstein unter der Annahme bewiesen worden, daß $\mathfrak{m}_2$ mit $\mathfrak{n}_1$ „vergleichbar" ist. (Math. Ann. 61 (1905), S. 129.) Nun scheidet zwar in dem vorliegenden Aufban die Vergleichbarkeit als offene Frage gemäß § 3 aus, der Bernsteinsche Beweis stützt sich aber außerdem auf den Äquivalenzsatz. Der obige Beweis stützt sich dagegen auf das Axiom II von § 4, das ja auch den Bernsteinschen Äquivalenzsatz zur Folge hat.

In derselben Weise beweist man den Satz 3. Ein letzter Satz, der sich ableiten läßt, lautet:

6. Ist $M$ eine endliche Menge, so folgt aus $M b \mathfrak{M}$ und $N d \mathfrak{N}$

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wegen $M b \mathfrak{M}$ hat man nämlich

$$M \sim \mathfrak{M}',$$

wo mit $M$ auch $\mathfrak{M}'$ eine endliche Menge ist. Hieraus und aus $N \sim \mathfrak{N}$ folgt weiter

$$(M, N) \sim (\mathfrak{M}' \mathfrak{N}).$$

Wir unterscheiden nun, ob $\mathfrak{M}$ eine endliche oder unendliche Menge ist. Im ersten Fall sind $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ endliche Mengen, ferner ist $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ Teilmenge von $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ und daher ist gemäß § 4, 4

$$(\mathfrak{M}' \mathfrak{N})\, b\, (\mathfrak{M} \mathfrak{N}).$$

Ist aber $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge, so ist $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ nach § 4, 8 ebenfalls eine unendliche Menge; dagegen ist $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})$ nach § 4, 12 endlich und daher gilt ebenfalls (§ 4, 7)

$$(\mathfrak{M}', \mathfrak{N})\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

Wegen $\mathfrak{M}' \sim M$, $\mathfrak{N} \sim N$ folgt daraus weiter

$$(M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

In den anderen Fällen lassen sich eindeutige Folgerungen nicht entnehmen. Nur soviel sei bemerkt, daß mit den Relationen

$$M a \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad N b \mathfrak{N}$$

jede der beiden Beziehungen

$$(M, N)\, a\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \quad \text{und} \quad (M, N)\, b\, (\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

verträglich ist.

## § 7.

## Schlußbetrachtung.

Die vorstehende Untersuchung liefert jedenfalls ein *hinreichendes* Axiomensystem für die Sätze, die die Äquivalenzprobleme der Mengen betreffen. Wird für den Augenblick noch die Bezeichnung $M e N$ für die Äquivalenz von $M$ und $N$ eingeführt, so handelt es sich, genauer gesprochen, um die Kombination der Beziehungen, die durch

$$M a N, \quad M b N, \quad M c N, \quad M d N, \quad M e N, \quad M f N, \quad M t N, \quad (M, N)$$

dargestellt sind, und um die Art, wie sie assoziativ einander bedingen und sich miteinander verbinden. Ob die aufgestellten Axiome sämtlich notwendig sind oder auch entbehrliche Bestandteile enthalten, mag offen bleiben. Abgesehen von den Axiomen mehr formaler Bedeutung, wie die über $MeN$, $MfN$, $MtN$ sind es wesentlich die folgenden, die die materiellen Stützen des Aufbaues darstellen: Das Axiom der *Verknüpfung*, die Axiome über die *Äquivalenz der Teilmengen* und der *Verbindungsmengen*, die Axiome über die *Nichtäquivalenz* der Verbindungsmengen *nicht äquivalenter Mengen* und das Axiom über die *Äquivalenz endlicher Mengen*. Die Charakterisierung, die in diesen Bezeichnungen enthalten ist, zeigt schon die Verschiedenheit der Gebiete, denen sie angehören, und zeigt auch ihre allgemeine Notwendigkeit für den Aufbau.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist die vorstehende Betrachtung zugleich eine Axiomatik der Größenlehre; in der Tat ist ja von den Elementen der Menge nirgends die Rede. Dies ist auch die Tatsache, die dem in § 3 gefundenen Resultat seine Stellung im axiomatischen Aufbau anweist. Wir fanden dort, daß mit den Beziehungen $MdN$ und $NdP$ auch die Folgerung $MaP$ verträglich ist. Sie könnte deshalb an sich ebenfalls als axiomatische Festsetzung an Stelle des Axioms II eingeführt werden. Wie wir sahen, bewirkt sie als weitere Folgerung, daß aus $MaP$ und $PdN$ sich $MdN$ ergibt, und liefert ebenfalls ein in sich widerspruchsfreies System von Beziehungen. Es ließ sich durch die Formeln

$$(aa) = (dd) = a; \quad (ad) = (da) = d$$

darstellen.

Dies wollen wir nun deuten. Zunächst ist zu beachten, daß in die vorstehenden Schlüsse die Beziehungen $MbN$ und $McN$ nicht eingehen. daß es sich bei ihnen vielmehr nur um $MaN$ und $MdN$ und deren Kombinationen handelt. Nur auf sie beziehen sich also die obigen Regeln, und auf sie beschränke ich mich zunächst. Die Aufgabe ist dann, Objekte mit Größencharakter zu finden, die sich diesen Regeln fügen. Die in § 3 erwähnte Analogie mit den Vorzeichenregeln macht dies leicht. Man erreicht es, indem man *entgegengesetzte Größen* in Betracht zieht, deren Teile zum Ganzen in der durch $(a)$ festgelegten Beziehung stehen, also der Dedekindschen Definition genügen; die Beziehung $MaN$ gilt dann für gleichartige, dagegen $MdN$ für entgegengesetzte Objekte. Einseitig begrenzte Geraden von unendlicher Länge aber entgegengesetzter Richtung bilden ein einfaches Beispiel, falls man als Teilmenge jeden ebenfalls unendlichen Bestandteil betrachtet und die Äquivalenz z. B. durch eineindeutige Ähnlichkeitsabbildung definiert. Für je zwei von ihnen besteht dann entweder die Relation $(a)$ oder $(d)$.

Man kann leicht erreichen, daß auch die Beziehungen $(b)$ und $(c)$ auftreten. Dies geschieht so, daß man auch *Paare* entgegengesetzt gerichteter Geraden als Objekte zuläßt. Für je zwei solche Paare besteht dann die Beziehung $(a)$, für jedes Paar und eine einzelne Gerade die Beziehung $(b)$ oder $(c)$, und für je zwei einzelne Geraden die Beziehung $(a)$ oder $(d)$. Die Gesetze

$$(aa) = (dd) = a, \quad (ad) = (da) = d$$

bleiben offenbar bestehen. Beziehungen $(bb)$, $(bd)$, $(dc)$ und $(cc)$ sind unmöglich. Dagegen gibt es hier eine Regel für $(bc)$; es kann sowohl $(a)$ wie $(d)$ resultieren. Endlich ergeben die Beziehungen

$$(ab)\ (ba)\ (db), \quad (ac)\ (ca)\ (cd)$$

$(b)$ oder $(c)$ als Resultat.

Die Tatsache, daß die Cantorsche Theorie die Unvereinbarkeit der Annahme, $M$ und $N$ seien unendliche Mengen, mit der Beziehung $MdN$ des § 3 nicht nachzuweisen vermochte, erfährt hierdurch neues Licht. Denn die Zulassung von Elementen von zweierlei Art, die einander entgegengesetzt sind, streitet weder gegen den Mengenbegriff als solchen, noch auch gegen die Dedekindsche Definition der unendlichen Mengen und die auf ihr ruhenden Eigenschaften. Für den so erweiterten Mengenbegriff kann aber, wie wir sahen, im Fall unendlicher Mengen auch die Beziehung $MdN$ realisiert sein. Wie weit sich auf solche Mengen die weiteren Begriffe und Sätze der Cantorschen Theorie übertragen lassen, mag an dieser Stelle auf sich beruhen bleiben[15]).

Nur das sei noch erwähnt, daß die allgemeine Weiterführung der bisher gefundenen Resultate in erster Linie die Beziehung der Menge zu ihren Elementen, ferner den Ordnungsbegriff usw. ins Auge zu fassen hat. Ich will noch kurz zeigen, wie man die Elemente der Menge auf der hier vorhandenen Grundlage einführen kann. Voranzustellen ist das folgende Axiom:

1. *Jede Menge enthält Teilmengen, die nicht mehr selbst in Teilmengen zerlegbar sind*; sie heißen unzerlegbare Teilmengen oder *Elemente*. Sie sollen durch

$$mTM \quad \text{oder kürzer durch } m$$

bezeichnet werden. Von ihnen gilt der Satz:

Ist $M \sim N$, so kann eine nicht zerlegbare Teilmenge von $M$ keiner zerlegbaren Teilmenge von $N$ äquivalent sein und umgekehrt.

Aus der Äquivalenz $M \sim N$ folgt nämlich nach Axiom I von § 3 zu jedem $M'$ die Existenz einer Teilmenge $N'$ von $N$, so daß

$$M' \sim N'$$

---

[15]) Herr A. Fränkel hat mich darauf hingewiesen, daß nicht einmal alle Axiome über Teilmengen gelten. Axiom I bleibt bestehen, Axiom II nicht; es gilt auch Axiom III von § 3.

ist. Würde nun $m = M'$ ein zerlegbares $N'$ bedingen und wäre $N''$ eine Teilmenge von $N'$, so folgt aus $M' \sim N'$ gemäß demselben Axiom, daß $N''$ die Existenz einer Teilmenge von $m$ bedingt, die zu $N''$ äquivalent ist; was aber einen Widerspruch darstellt.

Von diesem Tatbestand kann man nun wieder verlangen, daß er auch umgekehrt gilt; d. h. man kann fordern:

II. *Zwei Mengen M und N* s*ind äquivalent, wenn jedem Element von M ein Element von N zugehört und umgekehrt.*

Daß diese Forderung an sich widerspruchsfrei ist, wurde eben gezeigt; daß sie auch den allgemeinen Axiomen genügt, die die Äquivalenzbeziehung regeln (§ 1, I und II, § 3, I, § 4, I), ist leicht zu sehen. Damit möge diese Betrachtung ihren Abschluß finden. Auf die Frage, wie mit der Einführung der Elemente und der neuen Äquivalenzbeziehung sich der axiomatische Aufbau ändern würde, soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Jedenfalls entspricht die vorstehende Untersuchung den Forderungen, die im Anfang gestellt wurden. Sie sieht von allen Wortdefinitionen ab und benutzt ausschließlich *Beziehungen* zwischen den Objekten, von denen sie handelt. Die Axiome liefern die Grundregeln für das Operieren mit ihnen. Gerade um dies deutlich hervortreten zu lassen, ist jedem Axiom und jedem Satz die ihm entsprechende formale Ausdrucksweise, also die Bindung, die die bezüglichen Beziehungen durch den Satz oder das Axiom erfahren, gegeben worden. Auch sind die einzelnen Axiome immer erst dann eingeführt worden, wenn sie für den Fortgang der Beweise nötig waren.

(Eingegangen am 14. 12. 1920.)