Über einige allgemeine, auf Knotenverbindungen bezügliche Gesetze.

Von **Ludwig Koller**,
o. Hörer an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 31. Jänner 1884.)

Führt man durch biegsame Ringe längs deren Mittellinien in sich selbst zurücklaufende Schnitte, so entstehen bekanntlich[1] bei gewissen Umlaufs- und Drehungszahlen der letzteren eigenthümliche Verschlingungen, welche je nach dem Sinne der Drehung als positive oder negative Knotenverbindungen auftreten, sich also stets aus gleichsinnigen Knoten zusammensetzen. Die Anzahl und die Reihenfolge dieser Knoten ist im Allgemeinen eine fixe; nur dann, wenn deren Windungszahlen theilweise verschwinden, wird eine weitere Reduction der betreffenden Knotenverbindung möglich, und zwar gelten speciell für positive Knotenverbindungen die nachstehenden empirischen Transformationsgleichungen:

$$(1)\ldots\quad [(+)_0^k(+)_a(+)_b(+)_c\ldots] = [(+)_a(+)_b(+)_c\ldots],$$

$$(2)\ldots\quad [A_1^{a_3}\,A_2^{a_5}\,A_3^{a_7}\cdots A_{r-1}^{a_{2r-1}}] =$$

$$[(C^{a_2-1}\,C_1^{a_4}\,C_2^{a_6}\ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}})\,C_{r-2}\,(DC^{a_2-1}\,C_1^{a_4}\,C_2^{a_6}\ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}],$$

$$(3)\ldots$$

$$[(A_1^{a_3}\,A_2^{a_5}\,A_3^{a_7}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})\,A_{r-1}\,(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}\,A_2^{a_5}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}] =$$
$$= C^{a_2-1}\,C_1^{a_4}\,C_2^{a_6}\,C_3^{a_8}\ldots C_{r-1}^{a_{2r}}],$$

[1] S. h. die im LXXXV., LXXXVII. und LXXXVIII. Bande der Sitzb. der k. Akad. erschienene Abhandlung meines Lehrers, Prof. Dr Oskar Simony: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze", dessen für Knotenverbindungen gewählte Nomenclatur ich in Folgendem unverändert beibehalten habe.

in welchen die Grössen: $k, a, b, c, \ldots; a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2r-1}, a_{2r}$ beliebige positive ganze Zahlen bedeuten, und die Symbole: A, B, C, D; A_1, C_1; A_2, C_2; A_3, C_3; ..., A_n, C_n; ... ihrerseits durch die Formeln:

$$A = (+)_0,\ B = (+)_1,\ C = (+)_{a_1},\ D = (+)_{a_1+1};$$
$$A_1 = A(BA^{a_1-1})^{a_2},\ C_1 = C(DC^{a_2-1})^{a_3};$$
$$A_2 = A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4},\ C_2 = C_1(DC^{a_2-1}C_1^{a_4})^{a_5}$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$A_n = A_{n-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}})^{a_{2n}},$$
$$C_n = C_{n-1}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\ldots C_{n-1}^{a_{2n}})^{a_{2n+1}}$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

definirt werden. Eine Vertauschung von (+) mit (—) liefert die correspondirenden Transformationsgleichungen für negative Knotenverbindungen, womit sämmtliche Beziehungen gegeben sind, welche die möglichen Umformungen von, in biegsamen Ringen erzeugbaren Knotenverbindungen betreffen.

Indem ich mir die Aufgabe stellte,[1] auch für andere aus gleichsinnigen[2] Knoten gebildete Knotenverbindungen analoge Transformationsgleichungen aufzufinden, gelangte ich nach zahlreichen, mit 2—8 Meter langen, biegsamen Hanfschnüren von 3 mm. Dicke vorgenommenen Experimenten zu folgenden empirischen Relationen:

$$[BA^4\,BA] = [(+)_2\,(+)_5],$$
$$[BA^6\,BA^3] = [(+)_4\,(+)_7],$$
$$[BA^8\,BA^3\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_4\,(+)_9],$$
$$[BA\,BA^2\,BA^3\,BA^4] = [(+)_5\,(+)_4\,(+)_3\,(+)_2],$$
$$[BA^8\,BA^7\,BA^6\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_7\,(+)_8\,(+)_9],$$
$$[BA^8\,BA^2\,BA^7\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_8\,(+)_3\,(+)_9],$$

---

[1] Ich erhielt die Anregung hiezu in zwei, im Juni 1883 über diesen Gegenstand gehaltenen Vorträgen Prof. Simony's und spreche ihm hier auch für die Unterstützung, welche er mir bei der definitiven Formulirung meiner Beweise zu Theil werden liess, meinen Dank aus.

[2] In Folgendem habe ich lediglich die auf positive Knotenverbindungen bezüglichen Typengleichungen angeführt, da hieraus jene für negative Knotenverbindungen durch einfache Vertauschung von (+) mit (—) resultiren.

$$[BA^2\,BABA^3BA^7] = [(+)_8\,(+)_4\,(+)_2\,(+)_3],$$
$$[BA^5BA^3\,BAB^2] = [(+)_1^2\,(+)_2\,(+)_4\,(+)_6],$$
$$[BA^7\,BA^2\,B^2\,A^3\,BA^5] = [(+)_6\,(+)_4\,(+)_1\,(+)_3\,(+)_8],$$
$$[(BA^2)^3\,(BA^4)^2\,BA^3] = [(+)_4\,(+)_5^2\,(+)_3^3].$$
$$[B^4\,A^5\,BA^4\,BA^3\,B] = [(+)_1\,(+)_4\,(+)_5\,(+)_6\,(+)_1^3],$$
$$[(BA^6)^3\,(BA)^4\,B^3] = [(+)_1^3\,(+)_2^4\,(+)_7^3],$$
$$[(BA^6)^3\,(BA)^4\,(BA^3)^3\,(BA^2)^4] = [(+)_3^4\,(+)_4^3\,(+)_2^4\,(+)_7^3],$$
$$[(BA^2)^2\,(BAB)^2] = [\{(+)_1\,(+)_2\}^2\,(+)_3^2],$$
$$[(BA^2\,B)^2\,BA^3\,B] = [(+)_1\,(+)_4\,\{(+)_1\,(+)_3\}^2],$$

welche sich unter keine einzige der Gleichungen: (1), (2), (3) subsumiren lassen und daher den empirischen Ausdruck eines bisher unbekannt gebliebenen Transformationsgesetzes bilden. Ihre inductive Verallgemeinerung führte mich zu der nachstehenden symbolischen Beziehung:

$$\text{(I)} \ldots \quad [BA^{p_1}\,BA^{p_2}\,BA^{p_3} \ldots BA^{p_m}] =$$
$$= [(+)_{p_m+1} \ldots (+)_{p_3+1}\,(+)_{p_2+1}\,(+)_{p_1+1}],$$

in welcher $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ beliebige positive ganze Zahlen vorstellen, aber auch theilweise oder insgesammt verschwinden können, ohne die Giltigkeit von (I) aufzuheben.

Diese Relation ist übrigens noch weiterer Verallgemeinerungen fähig.

Sind nämlich die Exponenten: $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ zum Theile einander gleich, also beispielsweise q_1 der gemeinsame Werth der ersten r_1-Exponenten, q_2 der gemeinsame Werth der nächsten r_2, auf jene r_1-Exponenten folgenden Exponenten,... endlich q_n der gemeinsame Werth der r_n- letzten Exponenten, so verwandelt sich (I) in:

$$[(BA^{q_1})^{r_1}\,(BA^{q_2})^{r_2}\,(BA^{q_3})^{r_3} \ldots (BA^{q_n})^{r_n}] =$$
$$= [(+)_{q_n+1}^{r_n}\,(+)_{q_{n-1}+1}^{r_{n-1}} \ldots (+)_{q_3+1}^{r_3}\,(+)_{q_2+1}^{r_2}\,(+)_{q_1+1}^{r_1}],$$

welche Gleichung die vorhergehende als Specialfall in sich schliesst und in leicht verständlicher, abkürzender Symbolik durch:

$$\text{(II)} \ldots \quad [G_n] = [H_n]$$

ersetzt werden mag. Es ist dann — unter $m_1, m_2, m_3, \ldots m_s$;

$n_1, n_2, n_3, \ldots n_s$ beliebige positive ganze Zahlen gedacht — offenbar:

$$[G_{n_1}^{m_1}] = [H_{n_1}^{m_1}], \quad [G_{n_2}^{m_2}] = [H_{n_2}^{m_2}],$$

$$[G_{n_3}^{m_3}] = [H_{n_3}^{m_3}], \ldots [G_{n_s}^{m_s}] = [H_{n_s}^{m_s}],$$

also kraft dem in (I) enthaltenen Gesetze schliesslich:

$$\text{(III)} \ldots [G_{n_1}^{m_1} G_{n_2}^{m_2} G_{n_3}^{m_3} \ldots G_{n_s}^{m_s}] =$$

$$= [H_{n_s}^{m_s} \ldots H_{n_3}^{m_3} H_{n_2}^{m_2} H_{n_1}^{m_1}],$$

womit die weitgehendste theoretische Verallgemeinerung gewonnen ist, welche die Relation (I) überhaupt gestattet.

Die grosse Allgemeinheit, welche den Beziehungen (II) und (III) zukommt, macht es nunmehr wahrscheinlich, dass auch die Transformationsgleichungen (2) und (3) indirect in denselben enthalten sind.

Jedenfalls gilt dies zunächst von den beiden einfachsten, aus (3) und (2) für $r=1$, $r=2$ entspringenden Specialisirungen:

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1}] = [C^{a_2-1}],$$

$$[\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\}^{a_3}] = [C^{a_2}(DC^{a_2-1})^{a_3-1}],$$

da in der zweiten derselben das symbolische Product linker Hand[1] auch in der Gestalt:

$$A\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1} BA^{a_1}\}^{a_3-1}(BA^{a_1-1})^{a_2}$$

darstellbar, also gemäss (1) dem Ausdrucke:

$$\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1} BA^{a_1}\}^{a_3-1}(BA^{a_1-1})^{a_2}$$

äquivalent ist. — Denn setzen wir in (II) $n=1$, $q_1 = a_1 - 1$, $r_1 = 1$, beziehungsweise $n=2$, $q_1 = a_1 - 1$, $r_1 = a_2 - 1$; $q_2 = a_1$, $r_2 = 1$, so ergibt sich sofort:

$$[BA^{a_1-1}] = [(+)_{a_1}]$$

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1} BA^{a_1}] = [(+)_{a_1+1}(+)_{a_1}^{a_2-1}],$$

---

[1] Natürlich sind hiebei nur solche Umformungen ohne weiteren Commentar zulässig, welche das Princip der Unvertauschbarkeit sämmtlicher Factoren in keinerlei Weise alteriren.

folglich unter Anwendung unserer dritten Fundamentalgleichung einerseits:

$$[(BA^{a_1-1})^{a_2-1}] = [(+)_{a_1}^{a_2-1}],$$

anderseits:

$$[\{(BA^{a_1-1})^{a_2-1} BA^{a_1}\}^{a_3-1} (BA^{a_1-1})^{a_2}] =$$
$$= [(+)_{a_1}^{a_2} \{(+)_{a_1+1} (+)_{a_1}^{a_2-1}\}^{a_3-1}],$$

welche Resultate vorläufig die Richtigkeit unserer speciellen Behauptung erweisen.

Um im Anschlusse hieran auch unsere allgemeine Behauptung zu rechtfertigen, gehen wir von der Betrachtung des symbolischen Productes:

$$A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

aus, welches infolge der Bedeutung von A_1 und der Gleichung (1) die Schreibweise:

$$P = (BA^{a_1-1})^{a_2} A_1^{a_3-1} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

erlaubt, mithin in letzter Linie aus lauter Factoren von der Form BA^q besteht. Es wird daher auch gestattet sein, den, durch die Relation (2) diesem Producte zugeordneten Ausdruck:

$$Q = (C^{a_2-1} C_1^{a_4} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}}) C_{r-2} (DC^{a_2-1} C_1^{a_4} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}$$

in demselben Sinne P gleichzusetzen, wie dies mit H in Bezug auf G geschehen ist, und ebenso das Product:

$$P' = PA_{r-1},$$

welches durch Vertauschung von a_{2r-1} mit $a_{2r-1}+1$ direct aus P abgeleitet werden kann, mit:

$$Q' = (C^{a_2-1} C_1^{a_4} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}}) C_{r-2} (DC^{a_2-1} C_1^{a_4} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}} =$$
$$= (C^{a_2-1} C_1^{a_4} \ldots C_{r-2}^{a_{2r-2}}) C_{r-1}$$

zu identificiren. Dies vorausgeschickt ergeben sich dann für:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = (BA^{a_1-1})^{a_2} A_1^{a_3-1} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_r^{a_{2r+1}}$$

nach Einführung der Gleichung:

$$A_r = A_{r-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\dots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}} =$$
$$= A_{r-1}\{BA^{a_1}(BA^{a_1-1})^{a_2}A_1^{a_3-1}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\dots A_{r-1}^{a_{2r-1}}\}^{a_{2r}} =$$
$$= A_{r-1}(BA^{a_1}P)^{a_{2r}}$$

folgende einfache Transformationen:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = P\{A_{r-1}\,(BA^{a_1}P)^{a_{2r}}\}^{a_{2r+1}} =$$
$$= PA_{r-1}\{(BA^{a_1}P)^{a_{2r}}A_{r-1}\}^{a_{2r+1}-1}(BA^{a_1}P)^{a_{2r}}$$
$$= P'\{(BA^{a_1}P)^{a_{2r}-1}BA^{a_1}P'\}^{a_{2r+1}-1}(BA^{a_1}P)^{a_{2r}},$$

deren letzte eine directe Anwendung der dritten Fundamentalgleichung ermöglicht und so auf das Resultat:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = (QD)^{a_{2r}}\{Q'D(QD)^{a_{2r}-1}\}^{a_{2r+1}-1}Q'$$

führt. Nun ist aber, wenn wir $C^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}\dots C_{r-2}^{a_{2r-2}}$ der Kürze wegen mit E bezeichnen:

$$C_{r-1} = C_{r-2}(DE)^{a_{2r-1}},\quad Q = EC_{r-2}(DE)^{a_{2r-1}-1},$$
$$(QD)^{a_{2r}} = EC_{r-1}^{a_{2r}-1}C_{r-2}(DE)^{a_{2r-1}-1}D,$$
$$Q'D(QD)^{a_{2r}-1} = EC_{r-1}DEC_{r-1}^{a_{2r}-2}C_{r-2}(DE)^{a_{2r-1}-1}D,$$
$$\{Q'D(QD)^{a_{2r}-1}\}^{a_{2r+1}-1}Q' =$$
$$= E(C_{r-1}DEC_{r-1}^{a_{2r}-1})^{a_{2r+1}-2}C_{r-1}DEC_{r-1}^{a_{2r}} =$$
$$= EC_{r-1}(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1},$$

also schliesslich:

$$PA_r^{a_{2r+1}} = EC_{r-1}^{a_{2r}-1}C_{r-1}^2(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1} =$$
$$= (E\,C_{r-1}^{a_{2r}})\,C_{r-1}(DE\,C_{r-1}^{a_{2r}})^{a_{2r+1}-1},$$

wonach für $PA_r^{a_{2r+1}}$ auf Grundlage der Relationen (II) und (III) dieselbe Transformationsgleichung resultirt, welche für den diesem Producte äquivalenten Ausdruck: $APA_r^{a_{2r+1}}$ aus (2) durch Vertauschung von r mit $r+1$ hervorgeht. Auf diese Art bildet die Gleichung (2) eine nothwendige Consequenz von (II) und (III) für $r = r+1$, sobald sie für $r = r$ eine solche vorstellt, und da wir die der Specialisirung $r = 2$ entsprechende Specialform von (2) direct aus (II) und (III) abgeleitet haben, ist nunmehr apagogisch nachgewiesen, dass sich sämmtliche Specialisirungen von (2) unter (II) und (III) subsummiren lassen.

Es sind also auch in den bereits mehrfach verwertheten Relationen:

$$[P] = [Q], \; [P'] = [Q']$$

die Ausdrücke: P, Q; P', Q' einander nicht nur in demselben Sinne, sondern auch nach denselben Gesetzen wie G und H zugeordnet, welche Folgerung im Verein mit (1) und (III) einen directen Beweis von (3) ermöglicht.

Gemäss der Gleichung (1) ist nämlich das in (3) linker Hand stehende symbolische Product gleichbedeutend mit:

$$P' \, (BA^{a_1} P)^{a_{2r}-1},$$

folglich nach (III) transformirbar in:

$$(QD)^{a_{2r}-1} \, Q' =$$

$$= E \, C_{r-1}^{a_{2r}-2} \, C_{r-2} \, (DE)^{a_{2r-1}-1} \, DE \, C_{r-1} = E \, C_{r-1}^{a_{2r}},$$

welch' letzterer Ausdruck in der That mit dem in (3) rechter Hand stehenden symbolischen Producte zusammenfällt.

Nachdem so die Richtigkeit unserer allgemeinen Behauptung für beide Relationen (2) und (3) dargethan ist, recurriren wir nochmals auf Gleichung (I), weil wir dieselbe vorläufig wohl als Ausgangspunkt analytischer Betrachtungen benützt, aber noch nicht geometrisch interpretirt haben.

Zu diesem Zwecke ermitteln wir jetzt die Ordnungszahlen: s, s' jener Knotenverbindungen, deren Typen durch die linke und rechte Seite von (I) wiedergegeben werden.

Da bekanntlich die Ordnungszahl jeder Knotenverbindung der um 1 verminderten Anzahl ihrer Knoten entspricht, ist im vorliegenden Falle:

$$s = m + (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_m) - 1,$$

$$s' = m - 1,$$

also, wenn wir die Summe $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_m$ kurz mit s_1 bezeichnen:

$$s'=s-s_1,$$

d. h. es gilt in Hinblick darauf, dass die linke Seite von (I) durch passende Wahl von $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ jeder beliebigen Knotenverbindung mit den Windungszahlen 0 und 1 angepasst werden kann, der nachstehende Schluss[1]:

(a) Jede Knotenverbindung s^{ter} Ordnung, von deren $s+1$ Windungszahlen etwa s_1 mit der Null zusammenfallen, während die $s-s_1+1$ übrigen Windungszahlen gleich 1 werden, lässt sich in eine Knotenverbindung $(s-s_1)^{\text{ter}}$ Ordnung transformiren.

Diesem Satze steht aber noch ein zweiter gegenüber, der sich sofort ergibt, wenn man die rechte Seite von (I) durch Einführung der Bedingungen:

$$\begin{array}{ccc} p_m+1=a, & p_{m-1}+1=b, & p_{m-2}+1=c \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ p_3+1=u, & p_2+1=v, & p_1+1=w \end{array}$$

mit dem Typus: $[(+)_a\,(+)_b\,(+)_c\ldots(+)_u\,(+)_v\,(+)_w]$ einer Knotenverbindung von irgend welcher Ordnungszahl $m-1$ und beliebigen Windungszahlen: $a, b, c, \ldots u, v, w$ in Übereinstimmung bringt. Denn substituirt man die aus jenen Bedingungen für $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{m-2}, p_{m-1}, p_m$ resultirenden Werthe in (I), so verwandelt sich (I) in:

$$\text{(IV)}\ldots[(+)_a\,(+)_b\,(+)_c\ldots(+)_u\,(+)_v\,(+)_w]=$$
$$=[BA^{w-1}\,BA^{v-1}\,BA^{u-1}\ldots BA^{c-1}\,BA^{b-1}\,BA^{a-1}],\text{ d. h.:}$$

(b) Jede, aus Knoten von beliebigen, aber nicht verschwindenden Windungszahlen bestehende Knotenverbindung ist einer Knotenverbindung äquivalent, deren Ordnungszahl der um 1 verminderten Summe jener Windungszahlen gleichkommt, und

---

[1] Derselbe ist zuerst von Prof. Simony (s. dessen früher citirte Abhandlung, I. Theil, pag. 915) ausgesprochen aber lediglich für die Gleichungen (2) und (3) bewiesen worden, während die vorliegenden Betrachtungen dessen allgemeine Giltigkeit ausser allen Zweifel stellen.

deren Knoten insgesammt solche nullter und erster Art vorstellen.

Unsere letzte Folgerung führt nunmehr auf die Frage, ob auch für solche, aus lauter positiven Knoten zusammengesetzte Knotenverbindungen, welche theils verschwindende, theils beliebige positive ganze Windungszahlen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ aufweisen und daher durch Typenschemata von der Form:

$$[(+)\,a_1\,(+)_0^{p_1}\,(+)\,a_2\,(+)_0^{p_2}\,(+)\,a_3\,(+)_0^{p_3} \ldots (+)\,a_m\,(+)_0^{p_m}]$$

beschrieben werden, analoge Äquivalenzen bestehen? — Indem ich diese Frage zunächst für die in nachstehender Tabelle:

a_1	a_2	a_3	p_1	p_2	p_3	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
2			2			2	3	2					0	0	2				
2			3			3	1	2					1	2	0				
2			5			2	1	3					0	1	1				
3			1			4	1	2					1	5	3				
3			3			4	2	2					2	4	3				
3			6			1	2	3					4	5	1				
4			2			3	4	5					4	0	1				
4			4			2	3	2	1				3	1	4	3			
4			5			2	1	1	2				4	4	4	3			
5			2			2	3	1	2				3	1	5	4			
5			5			4	3	2	2				4	2	3	0			
6			8			4	1	1	3				1	2	4	0			
2	3		1	1		2	3	2	1				2	1	2	1			
2	4		2	0		1	2	3	2	1			1	1	0	2	1		
3	3		1	3		2	3	2	1	2			4	5	3	5	3		
5	2		1	2		3	1	2	1	3			1	3	0	4	2		
4	3		2	1		2	2	2	2	2			1	2	3	0	4		
4	3		1	1		2	1	1	3	3			4	5	3	1	3		
5	1		1	3		2	2	3	1	4	1		3	2	1	4	3	5	
5	2		0	1		2	2	1	1	1	3		4	0	3	2	1	1	
4	1		2	5		3	1	2	1	3	1		0	4	2	3	1	2	
4	2		4	2		3	2	4	3	1	5		1	0	0	3	4	3	
5	2		2	6		2	2	1	3	1	2	2	3	2	4	1	3	4	2
2	2	1	3	2	1	3	1	2	3	1	3	1	1	4	0	3	5	4	3
4	3	2	1	3	5	2	3	1	2	1	2	3	3	1	3	0	1	4	3

angegebenen Werthe von $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$; $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ experimentell zu erledigen suchte, ging ich bei meinen Experimenten von einer eigenthümlichen Darstellungsweise der in

Betracht gezogenen Knotenverbindungen aus, die sich am einfachsten wieder auf Grundlage einer speciellen Knotenverbindung, z. B. jener von dem Typus:

$$T = [(+)_2 (+)_0^2 (+)_3 (+)_0 (+)_1 (+)_0]$$

erörtern lässt. Da die Knoten nullter Art die gemeinschaftliche Basis sämmtlicher Knoten nicht umschlingen, wohl aber mit ihren Schlusstheilen gemäss der Definition des Gattungsbegriffes:[1] „Knotenverbindung der $(r-1)^{\text{ten}}$ Ordnung" sämmtliche Umschlingungen der vorangehenden Knoten durchsetzen müssen, entspricht dem erwähnten Typus ursprünglich die schematische Figur 1 (Taf. I). Es ist aber unmittelbar ersichtlich, dass die Schlusstheile der Knoten nullter Art von Fall zu Fall gegen die Bögen der ihnen vorangehenden Knoten in demselben Sinne verschoben werden können, wie dies speciell für die in Fig. 1 dargestellte Knotenverbindung durch die schematische Figur 2 versinnlicht ist. Dreht man hierauf die betreffende Knotenverbindung derart um 180°, dass ihre Basis hiebei dem Beobachter zugekehrt bleibt, und sucht das auf solche Weise umgewendete Gebilde ohne weitere Drehung abermals als eine Knotenverbindung in ihrer Normalstellung zu legen, so erhält man für die fünfzig, durch die obige Tabelle präcisirten Specialfälle Resultate,[2] welche sich ausnahmslos unter die symbolische Gleichung:

$$\text{(V)} \ldots$$

$$[(+)_{a_1} (+)_0^{p_1} (+)_{a_2} (+)_0^{p_2} (+)_{a_3} (+)_0^{p_3} \ldots (+)_{a_m} (+)_0^{p_m}] =$$
$$= [(+)_{p_m+1} (+)_0^{a_m-1} \ldots$$
$$\ldots (+)_{p_3+1} (+)_0^{a_3-1} (+)_{p_2+1} (+)_0^{a_2-1} (+)_{p_1+1} (+)_0^{a_1-1}]$$

subsumiren lassen. Auch hier verdient jene Reihe von Fällen eine besondere Besprechung, in welchen die in (V) linker Hand auftretenden Knotengruppen:

$$(+)_{a_1} (+)_0^{p_1}, \ (+)_{a_2} (+)_0^{p_2}, \ \ldots \ (+)_{a_m} (+)_0^{p_m}$$

---

[1] S. h. die früher citirte Abhandlung I. Thl. p. 913.

[2] Da die inductive Verallgemeinerung dieser Resultate in ganz analoger Weise wie jene der früher mitgetheilten experimentellen Ergebnisse erfolgt, scheint es überflüssig, die ersteren hier detaillirt anzuführen.

theilweise derart einander gleich sind, dass z. B. die ersten r_1-Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_1}(+)_0^{q_1}]$, die nächsten r_2, auf jene r_1-Knotengruppen folgenden Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_2}(+)_0^{q_2}]$, ... endlich die r_n-letzten Knotengruppen den gemeinsamen Typus: $[(+)_{c_n}(+)_0^{q_n}]$ besitzen.

An die Stelle von (V) tritt dann offenbar die allgemeinere Relation:

$$[\{(+)_{c_1}(+)_0^{q_1}\}^{r_1}\{(+)_{c_2}(+)_0^{q_2}\}^{r_2}\{(+)_{c_3}(+)_0^{q_3}\}^{r_3}\dots$$
$$\dots\{(+)_{c_n}(+)_0^{q_n}\}^{r_n}] =$$
$$= [\{(+)_{q_n+1}(+)_0^{c_n-1}\}^{r_n}\dots\{(+)_{q_3+1}(+)_0^{c_3-1}\}^{r_3}$$
$$\{(+)_{q_2+1}(+)_0^{c_2-1}\}^{r_2}\{(+)_{q_1+1}(+)_0^{c_1-1}\}^{r_1}],$$

oder in, der correspondirenden Umformung von (I) nachgebildeter Symbolik:

$$(\mathrm{VI})\dots\quad [M_n] = [N_n],$$

welche Gleichung — unter $m_1, m_2, m_3, \dots m_s;\ n_1, n_2, n_3, \dots n_s$ wieder beliebige positive ganze Zahlen verstanden — die weiteren Beziehungen:

$$[M_{n_1}^{m_1}] = [N_{n_1}^{m_1}],\ \ [M_{n_2}^{m_2}] = [N_{n_2}^{m_2}],$$
$$[M_{n_3}^{m_3}] = [N_{n_3}^{m_3}], \dots [M_{n_s}^{m_s}] = [N_{n_s}^{m_s}]$$

begründet, mithin kraft dem in (V) enthaltenen Gesetze in letzter Linie zu der symbolischen Formel:

$$(\mathrm{VII})\dots\quad [M_{n_1}^{m_1}M_{n_2}^{m_2}M_{n_3}^{m_3}\dots M_{n_s}^{m_s}] =$$
$$= [N_{n_s}^{m_s}\ \dots N_{n_3}^{m_3}N_{n_2}^{m_2}N_{n_1}^{m_1}]$$

führt. Setzt man in (V): $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 1$ und analog in (VI) und (VII): $c_1 = c_2 = c_3 \dots = c_n = 1$, so erhält man direct die früher aufgestellten Typenrelationen (I), (II) und (III), so dass auf Grundlage unserer zweiten Gruppe von Experimenten nunmehr eine, der theoretischen Verallgemeinerung von (I) weit überlegene empirische Verallgemeinerung derselben Gleichung ermöglicht worden ist.

Ausserdem liefert eine geometrische Interpretation von (V) die gewünschte allgemeine Erledigung unserer früher aufgeworfenen Frage in folgender Fassung:

Jede Knotenverbindung, deren Typus die Gestalt:

$$[(+)_{a_1}(+)_0^{p_1}(+)_{a_2}(+)_0^{p_2}(+)_{a_3}(+)_0^{p_3}\dots(+)_{a_m}(+)_0^{p_m}]$$

besitzt, also: $p_1+p_2+p_3+\dots+p_m = s_1$ verschwindende und m — von der Null verschiedene Windungszahlen: $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ aufweist, ist einer Knotenverbindung mit ebenso vielen von der Null verschiedenen und $(a_1+a_2+a_3+\dots+a_m)-m = s_2-m$ verschwindenden Windungszahlen äquivalent.

Es kann demnach die vorgelegte Knotenverbindung für $m+s_1 > s_2$ stets in eine solche von kleinerer Ordnungszahl transformirt werden, wobei die Anzahl der Knoten von $m+s_1$ auf s_2, also um den Betrag: $m+s_1-s_2$ sinkt.[1]

Ist dagegen für die gegebene Knotenverbindung $m+s_1$ kleiner als s_2, so repräsentirt dieselbe bereits die reducirte Form einer Knotenverbindung von höherer Ordnungszahl, welche ebenso viele Knoten erster oder höherer Art, aber eine um: s_2-s_1-m grössere Anzahl von Knoten nullter Art aufweist.[2]

Ist endlich für die in Betracht gezogene Knotenverbindung: $m+s_1 = s_2$, so liefert deren Transformation jedesmal eine Knotenverbindung von derselben Ordnungszahl, aber anderem Typus, jene Fälle ausgenommen, für welche zwischen $a_1, a_2, a_3, \dots a_m$ und $p_1, p_2, p_3, \dots p_m$ die Relationen:

$$a_1 = p_m+1, \quad a_2 = p_{m-1}+1, \quad a_3 = p_{m-2}+1$$
$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$
$$a_{m-2} = p_3+1, \quad a_{m-1} = p_2+1, \quad a_m = p_1+1$$

bestehen, indem die linke und rechte Seite von (V) bei Erfüllung

---

[1] Für $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_m = 1$ wird $s_2 = m$, so dass diese Folgerung dann mit dem Erfahrungssatze (a) zusammenfällt.

[2] Dieser Schluss liefert für: $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_m = 0$; $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c, \dots a_{m-2} = u$, $a_{m-1} = v$, $a_m = w$ den in Gleichung (IV) formulirten Erfahrungssatz (b).

der genannten Bedingungen mit einander auch formal identisch werden.

Auf diese Art characterisirt das Schema:

$$[(+)_{a_1}(+)_0^{a_m-1}(+)_{a_2}(+)_0^{a_{m-1}-1}(+)_{a_3}(+)_0^{a_{m-2}-1}\dots$$
$$\dots(+)_{a_m}(+)_0^{a_1-1}]$$

speciell jene Knotenverbindungen, welche durch keine wie immer gearteten Transformationen in solche von anderer Ordnungszahl oder von gleicher Ordnungszahl, aber anderem Typus umgeformt werden können und daher kurzweg als eintypige Verschlingungen bezeichnet werden mögen, während alle übrigen Knotenverbindungen insoferne mehrtypige Verschlingungen vorstellen, als sich jede derselben auch in eine Knotenverbindung von anderem Typus und grösserer oder gleicher oder kleinerer Ordnungszahl transformiren lässt.

Gemäss der hier gegebenen Definition einer eintypigen Verschlingung gibt es also speciell unter sämmtlichen positiven Knotenverbindungen nullter, erster und zweiter Ordnung nur sieben eintypige, nämlich jene von den Typen:

$$T=[(+)_1];\ [(+)_1^2],\ [(+)_2(+)_0];\ [(+)_1^3]$$
$$[(+)_1(+)_0(+)_2],\ [(+)_2(+)_1(+)_0],\ [(+)_3(+)_0^2],$$

hingegen, wie das nebenstehende empirische Schema:

(Ordnungszahl 3)

$$T=[(+)_1^4],\ [(+)_1(+)_0(+)_1(+)_2],\ [(+)_1(+)_2(+)_0(+)_1],$$
$$[(+)_2(+)_1^2(+)_0],\ [(+)_1(+)_0^2(+)_3],\ [(+)_3(+)_1(+)_0^2],$$
$$[\{(+)_2(+)_0\}^2],\ [(+)_4(+)_0^3],$$

(Ordnungszahl 4)

$$T=[(+)_1^5],\ [(+)_1(+)_0(+)_1^2(+)_2],\ [(+)_1^2(+)_0(+)_2(+)_1],$$
$$[(+)_1(+)_2(+)_1(+)_0(+)_1],\ [(+)_2(+)_1^3(+)_0],$$
$$[(+)_1(+)_0^2(+)_1(+)_3],\ [(+)_1(+)_3(+)_0^2(+)_1],$$
$$[(+)_3(+)_1^2(+)_0^2],\ [(+)_1(+)_0(+)_2(+)_0(+)_2],$$
$$[(+)_2(+)_0(+)_1(+)_2(+)_0],\ [(+)_2^2(+)_0(+)_1(+)_0],$$
$$[(+)_1(+)_0^3(+)_4],\ [(+)_4(+)_1(+)_0^3],$$
$$[(+)_2(+)_0^2(+)_3(+)_0],\ [(+)_3(+)_0(+)_2(+)_0^2),\ [(+)_5(+)_0^4]$$

ersichtlich macht, bereits acht eintypige positive Knotenverbindungen dritter, und sechzehn eben solche vierter Ordnung, an welche Thatsache sich mit Nothwendigkeit die Frage knüpft, wie gross allgemein die einer beliebigen anderen Ordnungszahl: s zugehörige Anzahl: S eintypiger positiver[1] Knotenverbindungen ausfällt?

Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, berücksichtigen wir, dass die Summen $m+s_1$ und s_2 für die genannte Ordnungszahl den gemeinsamen Werth: $s+1$ erhalten, mithin S als Summe aller Zahlen: $z_0, z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots z_s$ aufzufassen ist, welche angeben, wie viele eintypige positive Knotenverbindungen $s$ter Ordnung für

$$m = 1, 2, 3, \ldots k, \ldots s+1$$

bestehen. Da nun für die Summanden der diesen Specialisirungen von m entsprechenden Summen s_2, nämlich:

$$a_1, \; a_1+a_2, \; a_1+a_2+a_3, \ldots$$
$$a_1+a_2+\ldots+a_k, \ldots a_1+a_2+\ldots+a_{s+1}$$

nur ganze positive Zahlen zulässig sind, und bei eintypigen Knotenverbindungen gemäss deren allgemeinem Typenschema jedem Werthsysteme der Grössen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_k$ ein einziges, durch die Relationen:

$$p_1 = a_k - 1, \; p_2 = a_{k-1} - 1, \ldots p_k = a_1 - 1$$

präcisirtes Werthsystem der symbolischen Exponenten: $p_1, p_2, p_3, \ldots p_k$ zugehört, repräsentiren $z_0, z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots z_s$ zugleich jene Zahlen, welche anzeigen, wie viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen die Gleichungen:

$$a_1 = s+1, \; a_1+a_2 = s+1, \; a_1+a_2+a_3 = s+1$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{k-1}+a_k = s+1$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_s+a_{s+1} = s+1$$

[1] Die Gesammtzahl aller, dieser Ordnungszahl zugehörigen eintypigen Knotenverbindungen ist dann $2S$, da keine einzige positive Knotenverbindung in das Spiegelbild ihrer Rückseite, d. i. in die ihr correspondirende negative Knotenverbindung derselben Ordnungszahl transformirbar ist.

besitzen. — Auf Grundlage dieser einfachen Schlüsse ergeben sich nunmehr unter Anwendung bekannter Sätze aus der Combinationslehre für $z_0, z_1, z_2, \ldots z_k, \ldots z_s$ der Reihe nach die Werthe:

$$z_0 = 1, \; z_1 = \binom{s}{1}, \; z_2 = \binom{s}{2}, \ldots s_k = \binom{s}{k} \ldots$$

$$z_{s-1} = \binom{s}{s-1}, \; z_s = 1,$$

deren Addition für die fragliche Anzahl: S das einfache Resultat:

$$S = 1 + \binom{s}{1} + \binom{s}{2} + \ldots + \binom{s}{s-1} + \binom{s}{s} = 2^s$$

liefert. — Die Gesammtzahl aller positiver eintypiger Knotenverbindungen von der nullten bis inclusive s^{ten} Ordnung ist dann weiter gleich $2^{s+1}-1$.

Zum Schlusse der vorliegenden Arbeit sei es noch gestattet, deren Ergebnisse auf jene Verschlingungen anzuwenden, welche in biegsamen Ringen durch, längs deren Mittellinien in sich selbst zurücklaufende Schnitte herstellbar sind, wobei wir jedoch, da bekanntlich alle derartigen Verschlingungen schon durch Schnitte erster Art erzeugt werden können, lediglich die den letzteren zugeordneten Knotenverbindungen in Betracht zu ziehen haben.

Zur Ableitung unserer Folgerungen genügt hienach die Thatsache, dass — unter u die Umlaufszahl, unter t die Drehungszahl irgend eines Schnittes erster Art verstanden — allgemein für:

$$u = a, \; t = \pm(ak+\rho) \text{ resp. } u = ak+\rho, \; t = \pm a$$

eine und dieselbe negative beziehungsweise positive Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $(a-\rho)$ Knoten k^{ter} Art und $(\rho-1)$ Knoten $(k+1)^{\text{ter}}$ Art entsteht, und die ursprünglich in Form von Überkreuzungen auftretende Gesammtverdrehung des betreffenden Gebildes im ersten Falle: $\mp(a-1)\times 360°$ im zweiten: $\mp(ak+\rho-1)\times 360°$ beträgt. Es ist also hier:

$$m = a-1, \; s_1 = 0, \; s_2 = k(a-1)+(\rho-1)$$

mithin die Bedingung: $m+s_1 = s_2$ ausschliesslich für $k = \rho = 1$ erfüllbar, indem ρ der Natur der Sache nach höchstens gleich $a-1$ werden kann. Hieraus ergibt sich der merkwürdige Satz:

Fig. 1.

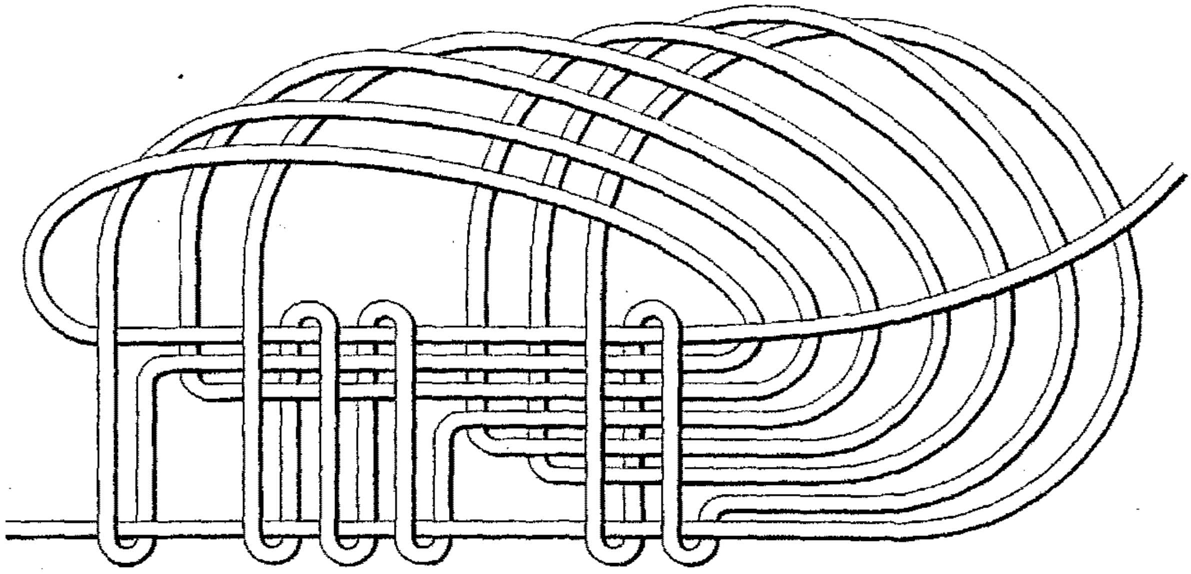
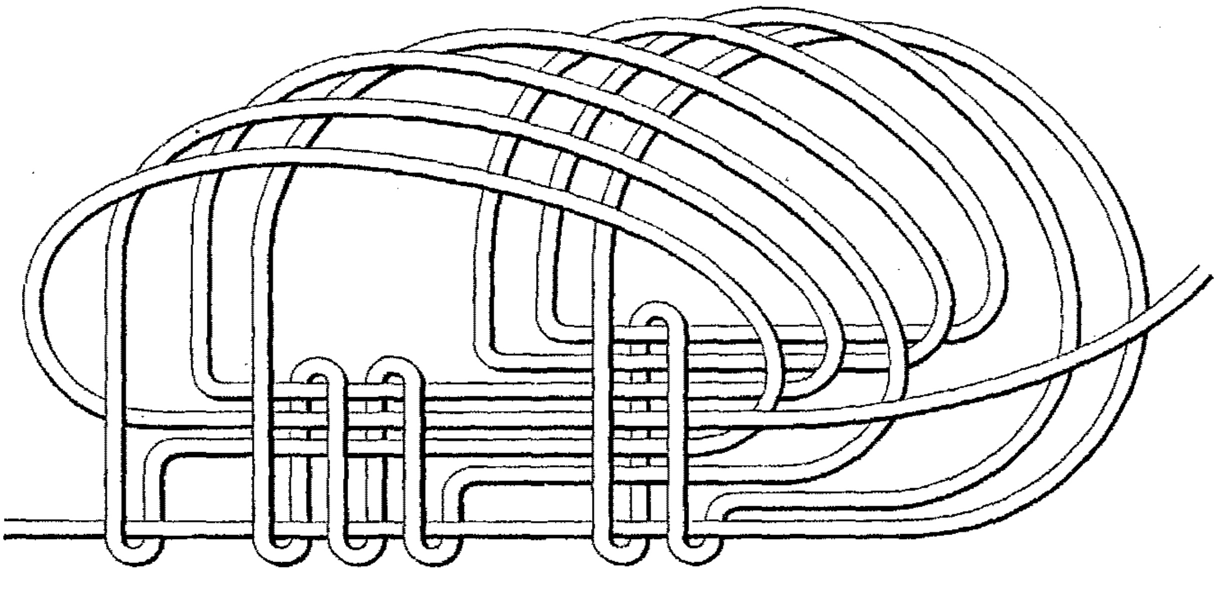


Fig. 2.



Autor del. F. Hesse lith. K.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Unter allen in biegsamen Ringen erzeugbaren Knotenverbindungen sind nur jene eintypig, welche für

$$u = a,\ t = \pm(a+1) \text{ resp. } u = a+1,\ t = \pm a$$

entstehen und daher Specialisirungen der beiden Relationen: $T = [(+)_1^{a-1}]$, $T = [(-)_1^{a-1}]$ bilden.

Dagegen repräsentirt jede andere Knotenverbindung $(a-2)^{\text{ter}}$ Ordnung kraft dem Erfahrungssatze (b) zugleich die reducirte Form einer anderen Knotenverbindung von der Ordnungszahl $k(a-1)+(\rho-2)$, welche aus: $(a-1)$ Knoten erster Art und aus: $\{(k-1)\ (a-1)+(\rho-1)\}$ Knoten nullter Art besteht, und würde somit die Herstellung der letzteren Knotenverbindung im Ganzen $\{(ak+\rho)-k-1\}$ Drehungen um je 360° in Form von Überkreuzungen beanspruchen, indem bekanntlich jede Knotenverbindung so viele Drehungen um je 360° in sich aufnimmt, als der Schlusstheil des letzten Knotens Knotenbögen überkreuzt.

Da nun in dem betreffenden Ringe für $u = ak+\rho$, $t = \pm a$ noch um k-Überkreuzungen mehr vorhanden sind, so ist die reductible Form der Knotenverbindung für diese Specialisirungen von u und t die ursprünglich sich darbietende, folglich auch der wichtige Erfahrungssatz, laut welchem der Typus einer Knotenverbindung durch eine Vertauschung der numerischen Werthe von u und t keine Änderung erfährt, in letzter Linie eine theoretisch ableitbare Consequenz des Erfahrungssatzes (b).