

Das Profil zufälliger Binärsuchbäume

Diplomarbeit am Institut für Stochastik und Mathematische Informatik
Fachbereich Informatik und Mathematik
J. W. Goethe Universität Frankfurt

von

cand. math.

Henning Sulzbach

Betreuer:

Prof. Dr. Ralph Neininger

Tag der Abgabe: 21. Dezember 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Eigenschaften zufälliger Binärsuchbäume	1
1.1 Konstruktion zufälliger Binärsuchbäume	2
1.2 Wichtige Größen zufälliger Binärsuchbäume	4
2 Martingale in Binärsuchbäumen	7
2.1 Yule-Prozess und Einbettung	7
2.2 Martingale und Unterbäume	9
2.3 Konvergenz der Martingale	18
2.4 Ableitungsmartingale	21
2.5 Erwartungswert des Profils	26
3 Kontraktionsmethode	29
3.1 Die Idee der Kontraktionsmethode	29
3.2 Funktionenräume und Zolotarev-Metrik	32
3.3 Kontraktionsmethode in Hilberträumen	34
3.4 Konvergenz des Profil-Polynoms	36
4 Extraktion des Profils	45
4.1 Satz und Diskussion	45
4.2 Beweis	47

Einleitung

Die Arbeit befasst sich mit dem Profil zufälliger Binärsuchbäume. Diese werden in Kapitel 1 anschaulich eingeführt, und das Problem wird ausführlich erläutert. Hauptsächlich betrachten wir das externe Profil $U_k(n)$, die Anzahl externer Knoten auf Level k eines mit n Daten gefüllten Binärsuchbaums. Hauptresultat ist dabei ein funktionaler Grenzwertsatz des am Erwartungswert skalierten Profils. Demnach existieren ein stochastischer Prozess $(M(z))_{z \in \mathbb{C}}$ und reelle Zahlen $0 < \alpha_- < \alpha_+$, so dass für kompakte $K \subseteq (\alpha_-, \alpha_+)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} \left| \frac{U_{\lfloor z \log n \rfloor}(n)}{\mathbb{E}U_{\lfloor z \log n \rfloor}(n)} - M\left(\frac{z}{2}\right) \right| = 0 \quad f.s.$$

Wie im ersten Kapitel klar wird, ist (α_-, α_+) der vollständige offene Bereich, in dem das Profil asymptotisch nicht verschwindet. Wir stellen zwei unterschiedliche Zugänge zu diesem Problem vor. Zentral ist dabei das Profil-Polynom:

$$W_n(z) = \sum_{k \geq 0} U_k(n) z^k.$$

Die Konvergenz des skalierten Profil-Polynoms $M_n(z) = W_n(z) / \mathbb{E}W_n(z)$ ist ein wichtiger Schritt zum Beweis des Grenzwertsatzes.

Im **ersten** Kapitel werden zufällige Binärsuchbäume eingeführt und einige ihrer Eigenschaften diskutiert. Die Höhe, das Sättigungslevel und die Profile werden dabei entscheidend sein.

Im **zweiten** Kapitel wird ein Martingalzugang zu dem Problem erörtert. $M_n(z)$ wurde erstmals von Jabbour-Hattab als Martingal in einer Arbeit von 2001 identifiziert, siehe [JH01]. In einer Arbeit mit Chauvin und Drmota bestimmte er die Konvergenz des Profils im Intervall $[1.2 \log n, 2.8 \log n]$, siehe [CDJH01]. Wegen der verwendeten L^2 -Methode hofften sie, den Bereich auf das Intervall $[(2 - \sqrt{2}) \log n, (2 + \sqrt{2}) \log n]$, der mit der L^2 -Konvergenz von $M_n(z)$ korrespondiert, ausdehnen zu können. In der aktuellsten Arbeit über dieses Thema [CKMR05] wurde die Konvergenz schließlich auf das gesamte Intervall ausgedehnt. Idee dieser Arbeit [CKMR05] ist eine Einbettung des diskreten Prozesses

in ein kontinuierliches Modell, in dem sich ein zu $M_n(z)$ korrespondierendes Martingal finden lässt.

Diese Vorgehensweise wird in Kapitel 3 ausführlich dargestellt. Es wird die Konvergenz des skalierten Profil-Polynoms formuliert, sowie Fixpunktgleichungen für den Grenzprozess hergeleitet. Anschließend werden noch Ergebnisse über die Ableitungsmartingale der beiden Prozesse erwähnt und ein interessanter Zusammenhang zur Pfadlänge dargestellt. Das Kapitel schließt mit einer Diskussion des Erwartungswerts des Profils. Dabei werden ein neuer, intuitiver Beweis der exakten Erwartung gezeigt sowie ausreichende Entwicklungen formuliert.

Im **dritten** Kapitel wird ein völlig anderer Zugang gewählt. Ziel ist ebenfalls die Konvergenz von $M_n(z)$, man bedient sich hierbei lediglich der rekursiven Struktur des Problems. Das Profil-Polynom wird als zufällige analytische Funktion betrachtet, und die auf \mathbb{R}^d bekannte Kontraktionsmethode mit Hilfe der Zolotarev-Metrik wird dazu auf allgemeinere Räume ausgedehnt. Ziel ist dabei, die Verteilungskonvergenz von $M_n(z)$ gegen die eindeutige Lösung einer Fixpunktgleichung zu zeigen. Dieses Kapitel lehnt sich stark an die aktuelle Arbeit von Drmota, Janson und Neininger an, siehe [DJN06]. Sie entwickeln die Kontraktionsmethode auf allgemeineren Räumen und verwenden diese für einen funktionalen Grenzwertsatz der Profile allgemeiner Suchbäume, in denen kein Martingalzugang bekannt ist. Wir schließen das Kapitel mit einem Beweis der Konvergenz des skalierten Profil-Polynoms im größtmöglichen Intervall.

Erwähnenswert ist hier, dass Fuchs, Hwang und Neininger in [FHN06] u.a. einen Grenzwertsatz für die Randverteilung des Profils mit Hilfe der Kontraktionsmethode bewiesen haben, ohne das Profil-Polynom zu verwenden.

Im **vierten** und letzten Kapitel wird schließlich der Grenzwertsatz bewiesen und auch mit Hilfe einer Simulation ausführlich diskutiert. Die Extraktion verwendet dabei eine Variante der Fourier-Inversionsformel gemäß

$$U_k(n) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(e^{it}) e^{-ikt} dt.$$

Die Konvergenz des Profils wird dann auf die des skalierten Profil-Polynoms zurückgeführt.

An dieser Stelle möchte ich allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beitragen haben, herzlichst danken. Ganz besonders danke ich Prof. Dr. Ralph Neininger für die außergewöhnlich gute und intensive Betreuung. Mein spezieller Dank gilt Prof. Dr. Kersting für die Bereitstellung seiner Simulationsergebnisse.

Zunächst werden einige Notationen eingeführt. In der Arbeit treten unterschiedliche diskrete und kontinuierliche univariate Verteilungen auf. Dichten beziehen sich dabei jeweils auf das eindimensionale Lebesguemaß.

- Eine Zufallsvariable X heißt uniform auf $[0,1]$ verteilt, kurz $\text{unif}[0,1]$ verteilt, falls $f_X(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ ihre Dichte ist.
- Für $a, b \in \mathbb{Z}, a \leq b$ heißt X uniform auf $\{a, \dots, b\}$ verteilt, falls für alle $a \leq i \leq b$ gilt $\mathbb{P}(X = i) = 1/(b - a + 1)$.
- Für $p \in [0, 1]$ heißt X geometrisch zum Parameter p verteilt, falls für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(X = i) = (1 - p)^{i-1}p$.
- Für $p \in [0, 1]$ heißt X Bernoulli verteilt zum Parameter p , kurz $\text{Ber}(p)$ verteilt, falls $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.
- Für $n \in \mathbb{N}$ heißt X exponentialverteilt zum Parameter n , kurz $\text{exp}(n)$ verteilt, falls $f_X(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)ne^{-nt}$ ihre Dichte ist.
Hier erinnern wir an die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, die wir häufig verwenden. Für $s \leq t$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t - s)$$

- Für $n \in \mathbb{N}$ heißt X gammaverteilt zu den Parametern $\alpha > 0, \beta > 0$, kurz $\Gamma(\alpha, \beta)$ verteilt, falls $f_X(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} t^{\beta-1} e^{-\alpha t}$ ihre Dichte ist. Wir brauchen lediglich den Fall $\beta = 1$, dennoch unterdrücken wir diesen Parameter nicht, um die Gammaverteilung von der Gammafunktion zu unterscheiden.

Die Verteilung \mathbb{P}_X einer Zufallsvariable X bezeichnen wir auch mit $\mathcal{L}(X)$. Für zwei Zufallsvariablen X, Y heißt $X \stackrel{d}{=} Y$, dass sie dieselbe Verteilung haben, dass also gilt $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. Die Begriffe der stochastischen, fast sicheren und Verteilungskonvergenz setzen wir als bekannt voraus.

Für komplexwertige Folgen a_n, b_n sei

$$a_n \sim b_n : \Leftrightarrow \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Leftrightarrow a_n = b_n(1 + o(1)).$$

Kapitel 1

Eigenschaften zufälliger Binärsuchbäume

Wir befassen uns mit zwei unterschiedlichen Konstruktionsmethoden für zufällige Binärsuchbäume. Erstere ist aus algorithmischer Sichtweise interessant, zweite ist mehr dynamischer Natur und ist speziell im zweiten Kapitel wichtig. Zur formalen Vereinfachung wird zunächst der Raum der binären Bäume definiert. Dazu sei

$$\mathbb{U} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{0,1\}^n$$

die Menge aller endlichen Wörter im Alphabet $\{0,1\}$, \emptyset bezeichne das leere Wort. Für $u, v \in \mathbb{U}$ sei uv die Verkettung von u und v . Dabei ist uv Nachfolger von u und u Vorgänger von uv .

$u0$ (resp. $u1$) wird als linkes (resp. rechtes) Kind von u bezeichnet. Ein Binärbaum T ist eine endliche Teilmenge von \mathbb{U} mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \emptyset &\in T \\ uv \in T &\Rightarrow u \in T \\ u1 \in T &\Leftrightarrow u0 \in T \end{aligned}$$

Die Elemente von T heißen Knoten, \emptyset wird als Wurzel bezeichnet. $|u|$ bezeichnet die Anzahl der Buchstaben in u , dies entspricht dem Level des Knotens u . T ist eindeutig durch seine externen Knoten ∂T beschrieben, diese sind die Knoten aus T , die keine Nachfolger in T haben. Alle übrigen Knoten $T \setminus \partial T$ werden als intern bezeichnet. Die Menge aller Binärbäume ist **BinTree**.

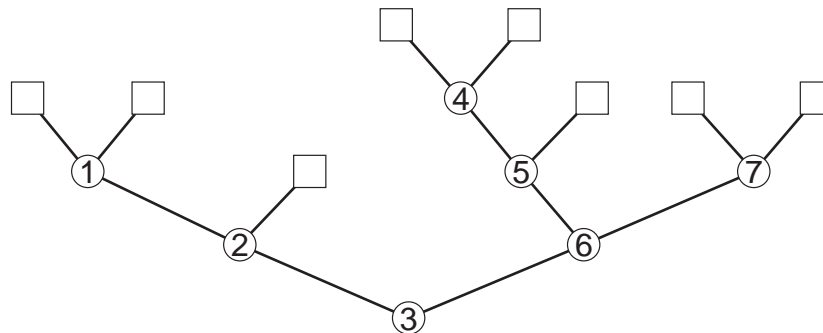
1.1 Konstruktion zufälliger Binärsuchbäume

Binärsuchbäume sind eine Datenstruktur in der Informatik. Ziel ist es, Daten effizient zu speichern und auszulesen. Die Daten seien x_1, x_2, \dots, x_n , paarweise verschiedene Zahlen. Wir können annehmen, es gelte $\{x_1, \dots, x_n\} = \{1, \dots, n\}$. Die Konstruktion eines Binärsuchbaums verläuft nach folgendem rekursiven Schema:

- Speichere x_1 in der Wurzel.
- Sämtliche x_i mit $x_i < x_1$ für $2 \leq i \leq n$ werden im linken Teilbaum gespeichert.
- Sämtliche x_i mit $x_i > x_1$ für $2 \leq i \leq n$ werden im rechten Teilbaum gespeichert.
- In den Teilbäumen wird das Verfahren rekursiv angewandt.

Sind alle Daten eingefügt, erhält man einen beschrifteten Baum mit n Knoten. Man ergänzt $n + 1$ unbeschriftete externe Knoten um einen Binärbaum mit n internen Knoten zu erhalten.

Ein typisches Beispiel für die Daten 3,6,2,5,7,4,1:



Spricht man von der Größe eines Binärsuchbaums, so meint man die Anzahl eingefügter Daten, die der Anzahl interner Knoten entspricht. Bildet der zu verarbeitende Datensatz eine rein zufällige Permutation der Zahlen $1, \dots, n$, so spricht man von einem zufälligen Binärsuchbaum.

Im Unterschied zum **Catalan-Modell**, in dem jeder Binärbaum gleichwahrscheinlich ist, sind Binärsuchbäume gut ausbalanciert. Dies wird später quantifiziert, algorithmisch ist dies von großer Bedeutung, da man versucht ist, die Komplexität, beispielsweise die Suchzeit nach einem bestimmten Datum, möglichst gering zu halten.

Für unsere Zwecke ist dieses erste Modell alleine noch nicht ausreichend, tatsächlich sind wir nur an der Struktur des Baums interessiert, die Beschriftungen der Knoten sind daher unbedeutend. Zudem ist problematisch, dass man nicht ohne weiteres von einem zufälligen Baum der Größe n zu einem der Größe $n+1$ gelangen kann. Dieses Problem lässt sich zwar beheben, indem man als zufällige Permutation die globalen Ränge von n unabhängig $\text{unif}[0, 1]$ verteilten Zufallsvariablen wählt, dennoch wäre eine dynamischere Sicht des Prozesses wünschenswert. Folgender Satz ist hilfreich:

Satz 1.1 *In einem zufälligen Binärsuchbaum ist der nächst zu besetzende externe Knoten uniform unter allen verteilt.*

Beweis: Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine zufällige Permutation der Zahlen $1, \dots, n$. Als lokaler Rang von x_i in x wird

$$R_i(x) := |\{1 \leq j \leq i \mid x_j \leq x_i\}|$$

bezeichnet. Sei T_n der Binärsuchbaum mit n internen und $n+1$ externen Knoten. Wir wählen einen bestimmten externen Knoten aus und betrachten den Pfad von der Wurzel zu ihm. Um das $n+1$ -te Datum in diesen externen Knoten einzufügen, muss es größer sein, als alle Daten in linken Teilbäumen von internen Knoten des Pfades, an denen dieser nach rechts abbiegt, sowie kleiner als alle übrigen. Der lokale Rang ist damit eindeutig festgelegt. Da es $n+1$ externe Knoten und ebensoviele mögliche lokale Ränge für das neue Datum gibt, ergibt sich die Behauptung sofort aus nachfolgendem Lemma. \square

Lemma 1.1 *Die lokalen Ränge $R_i(x)$ für $i = 1, \dots, n$ sind unabhängig und gleichverteilt auf $\{1, \dots, i\}$.*

Beweis: Bezeichne S_n die symmetrische Gruppe der Permutationen von n Elementen. Sei

$$\begin{aligned} \varphi : S_n &\rightarrow W := \{1\} \times \{1, 2\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, n\}, \\ \varphi(x) &:= (R_1(x), \dots, R_n(x)) \end{aligned}$$

die Abbildung, die jeder Permutation den Vektor ihrer lokalen Ränge zuordnet. Die Kardinalitäten von S_n und W stimmen überein. Zudem hat jedes Element aus W offensichtlich höchstens ein Urbild, das sich auf eindeutige Weise sukzessiv aus den lokalen Rängen bestimmen lässt, falls es existiert. Man beginnt dabei mit $R_n(x)$ und endet bei $R_1(x)$. φ ist somit injektiv und damit bijektiv. Die

gewünschten Aussagen folgen nun leicht. Sei $1 \leq k \leq i$ und beschreibe $A \subseteq S_n$ die Menge aller Permutation, für die $R_i(x) = k$ gilt. Dann gilt

$$\mathbb{P}(R_i(x) = k) = \frac{|A|}{n!} = \frac{n!}{i} \frac{1}{n!} = \frac{1}{i}$$

und für beliebiges $(j_1, \dots, j_n) \in W$

$$\mathbb{P}(R_1(x) = j_1, \dots, R_n(x) = j_n) = \frac{1}{n!} = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(R_i(x) = j_i).$$

Dies beweist das Lemma. □

Satz 1.1 ermöglicht uns eine zweite Konstruktion zufälliger Binärsuchbäume als homogenen Markov-Prozess T_n auf dem Raum der Binärbäume **BinTree**.

- $T_0 = \{\emptyset\}$,
- $T_{n+1} = T_n \cup \{D_n 0, D_n 1\}$, wobei $\mathbb{P}(D_n = u | T_n) = (n+1)^{-1} \forall u \in \partial T_n$.

D_n beschreibt dabei den externen Knoten von T_n , in den das $n+1$ -te Datum eingefügt wird.

Nach Satz 1.1 ist T_n verteilungsgleich zum zufälligen Binärsuchbaum im ersten Modell.

1.2 Wichtige Größen zufälliger Binärsuchbäume

Wir erläutern bei weitem nicht alle bekannten Größen im Binärsuchbaum. Unser Hauptinteresse liegt im externen Profil

$$U_k(n) := |\{u \in \partial T_n : |u| = k\}|,$$

die Anzahl externer Knoten eines bestimmten Levels k . Analog definiert man auch das interne Profil

$$Z_k(n) := |\{u \in T \setminus \partial T_n : |u| = k\}|, \tag{1.1}$$

das wir aber kaum verwenden werden.

Da jeder interne Knoten genau zwei Nachfolger in T hat und diese entweder interne oder externe Knoten sind, gilt für $0 \leq k \leq n$

$$2Z_k(n) = U_{k+1}(n) + Z_{k+1}(n). \tag{1.2}$$

Damit lässt sich das interne Profil aus dem externen bestimmen. Es gilt $Z_k(0) = 1 - \delta_{0k}$ und für $n \geq 1$:

$$Z_k(n) = \sum_{i=k+1}^n 2^{k-i} U_i(k) = 2^k - \sum_{i=1}^k 2^{k-i} U_i(k),$$

wie man aus (1.2) sofort induktiv einsehen kann.

Bezeichne $V_1(n)$ (resp. $V_2(n)$) die Anzahl interner Knoten im linken (resp. rechten) Teilbaum eines Binärsuchbaums der Größe n . Trivialerweise gilt $V_1(n) + V_2(n) = n - 1$. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in S_n$ die zugrundeliegende Permutation. Dann gilt offensichtlich $V_1(n) = k \Leftrightarrow x_1 = k + 1$ für $0 \leq k \leq n - 1$. Somit ist $V_1(n)$ uniform auf $\{0, \dots, n - 1\}$ verteilt. Wir bezeichnen deshalb die Größe des linken Teilbaums mit $I(n)$. Bedingt auf $I(n)$, bilden linker und rechter Teilbaum bekanntermaßen wieder unabhängige zufällige Binärsuchbäume, siehe beispielsweise [Mah92]. Somit gilt folgende Rekursion, die im dritten Kapitel verwendet wird:

$$U_k(n) \stackrel{d}{=} U_{k-1}^{(1)}(I(n)) + U_{k-1}^{(2)}(n - 1 - I(n)). \quad (1.3)$$

Dabei sind $U_i^{(1)}(\ell), U_j^{(2)}(m), I(n)$ für $i, j \leq k, \ell, m \leq n$ unabhängig mit $U_\ell^{(i)}(m) \stackrel{d}{=} U_\ell(m)$ für $i = 1, 2, \ell \leq k, m \leq n$.

Weitere wichtige Größen sind das Sättigungslevel h_n und die Höhe H_n :

$$h_n := \min\{|u| : u \in \partial T_n\}, \quad H_n := \max\{|u| : u \in \partial T_n\}.$$

Bekanntere Resultate (siehe beispielsweise [Dev98]) beschreiben die Asymptotik dieser Größen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{\log n} = \alpha_- = 0.373\dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = \alpha_+ = 4.311\dots \quad f.s. \quad (1.4)$$

Dabei bezeichnen die beiden Konstanten α_-, α_+ die Nullstellen von $\eta_2(x)$ mit

$$\eta_2(x) = x \log \frac{x}{2} - x + 1. \quad (1.5)$$

Da $\eta_2'(x) = \log \frac{x}{2}$, hat $\eta_2(x)$ nur ein Extremum und demnach höchstens zwei Nullstellen. Wie man sofort sieht, hat $\eta_2(x)$ tatsächlich zwei Nullstellen und für spätere Zwecke bemerken wir, dass für $\alpha_- < x < \alpha_+$ gilt $\eta_2(x) < 0$.

Diese Ergebnisse spiegeln die bereits erwähnte Ausbalanciertheit wider, im Catalan-Modell wächst beispielsweise die Höhe von der Ordnung \sqrt{n} , siehe [FO82]. (1.4) suggeriert, dass die richtige Skalierung zur Betrachtung des Profils logarithmisch ist. Genauer gilt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein zufälliges N_0 *f.s.* existiert, so dass für alle $n \geq N_0$ gilt:

$$U_k(n) = 0 \text{ für } k \notin [(\alpha_- - \varepsilon) \log n, (\alpha_+ + \varepsilon) \log n].$$

Unser Ziel ist deshalb eine Asymptotik für das Profil im gesamten Intervall $(\alpha_- \log n, \alpha_+ \log n)$.

Kapitel 2

Martingale in Binärsuchbäumen

Wie bereits in der Einleitung angekündigt, beschäftigen wir uns zunächst mit dem klassischen Zugang zu diesem Problem und werden einige Martingale finden und verwenden. Hauptidee dieses Abschnitts ist es, den diskreten Markov-Prozess in einen zeitstetigen einzubetten. Die gewünschten Ergebnisse im diskreten Fall werden dann auf bekannte Resultate im kontinuierlichen Fall zurückgeführt. Zunächst wird die Einbettung, eine Art Poissonisierung des Prozesses, beschrieben.

2.1 Yule-Prozess und Einbettung

Wir definieren zunächst den kontinuierlichen Yule-Prozess, in den später T_n geeignet eingebettet wird. $(\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ ist ein zeitstetiger Prozess auf **BinTree**, in dem sich jeder externe Knoten unabhängig von den übrigen verhält.

- Der Prozess startet zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem lebendigen Individuum, demnach ist \mathbb{T}_0 reduziert zu einem externen Knoten, $\mathbb{T}_0 = \{\emptyset\}$.
- Jedes Individuum hat eine $\exp(1)$ -verteilte Lebenszeit, unabhängig von allen anderen, und wird nach seinem Ableben durch zwei Kinder ersetzt.

Die Menge der lebendigen Individuen zum Zeitpunkt t wird mit $\partial\mathbb{T}_t$ bezeichnet, die Menge der gestorbenen mit $\mathbb{T}_t \setminus \partial\mathbb{T}_t$. $(\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ ist nach Konstruktion ein Markov-Sprungprozess auf \mathbb{U} mit deterministischen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Der Zählprozess $(N_t)_{t \geq 0}$ beschreibt die Anzahl lebendiger Individuen zum Zeitpunkt t und bildet den klassischen Yule-Prozess. Dabei gilt:

$$N_t = |\partial\mathbb{T}_t|.$$

Seien $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ die sukzessiven Sprungzeiten von \mathbb{T}_t ,

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : N_t = n + 1\}.$$

τ_n ist der Zeitpunkt, an dem zum ersten Mal $n + 1$ Individuen leben. Man beachte: $N_{\tau_n} = n + 1$. Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung sind die Sprungintervalle $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n \geq 0}$ unabhängig und genügen $\tau_n - \tau_{n-1} \stackrel{d}{=} \min(E_1, \dots, E_n)$. Dabei sind E_1, \dots, E_n , wie im folgenden, unabhängig $\exp(1)$ verteilt.

Bekannte Identitäten besagen, dass $\min(E_1, \dots, E_n) \stackrel{d}{=} \exp(n) \stackrel{d}{=} E_1/n$. Dazu betrachte man beispielsweise die Verteilungsfunktion einer $\exp(n)$ -verteilten Zufallsvariablen: $F(t) = 1 - e^{-nt}$, oder erinnere sich an bekannte Eigenschaften des Poissonprozess. Es folgt:

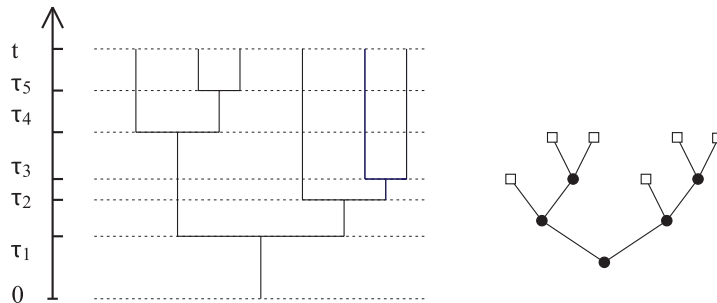
$$\tau_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{i}. \quad (2.1)$$

Wichtig ist, dass die Sprungzeiten nicht von der Struktur des Baums abhängen und umgekehrt, da Sprungzeiten und Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig sind. Somit sind die Prozesse $(\tau_n)_{n \geq 0}$ und $(\mathbb{T}_{\tau_n})_{n \geq 0}$ unabhängig.

Erneut wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung ist das nächst sterbende Individuum uniform unter allen lebendigen verteilt. Dies führt zur Einbettung des diskreten Prozesses, es gilt: $(\mathbb{T}_{\tau_n})_{n \geq 0} \stackrel{d}{=} (T_n)_{n \geq 0}$. Wie können also $(T_n)_{n \geq 0}$ aus $(\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ durch Stoppen gewinnen und deshalb annehmen, dass gilt:

$$(\mathbb{T}_{\tau_n})_{n \geq 0} = (T_n)_{n \geq 0}.$$

Dies kommt nicht von ungefähr, $(\mathbb{T}_t)_{t \geq 0}$ wurde natürlich bewusst so konstruiert. Wir sind von einer diskreten Markov-Kette gestartet und haben Wartezeiten hinzugefügt, die nicht von den Übergangswahrscheinlichkeiten abhängen. Stoppt man nun den zeitstetigen Prozess zu den Sprungzeiten ab, erhält man selbstverständlich den ursprünglichen, diskreten Prozess zurück. Dies mag unfruchtbar erscheinen, hilft es uns doch im folgenden, Ergebnisse im kontinuierlichen Fall auf den diskreten zu übertragen. Folgendes Bild veranschaulicht den Zusammenhang zwischen diskretem und kontinuierlichem Prozess.



2.2 Martingale und Unterbäume

Um im weiteren von Martingalen sprechen zu können, definieren wir vorab die natürlichen Filtrationen

$$F_{(n)} = \sigma(T_1, \dots, T_n), \quad F_t = \sigma(\mathbb{T}_s : 0 \leq s \leq t). \quad (2.2)$$

Zunächst befassen wir uns mit dem Binärsuchbaum und definieren das zentrale Objekt, das Profil-Polynom, in dem die Profile der einzelnen Levels als Koeffizienten auftreten:

$$W_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} U_k(n) z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tatsächlich gilt $\deg(W_n) = H_n \leq n$. Nur endlich viele Koeffizienten sind demnach von 0 verschieden. Zur Vollständigkeit erwähnen wir noch $U_k(0) = \delta_{0k}$, $W_0(z) = 1$ und $U_k(n) = 0$ für $k < 0$ oder $k > n$.

Eine triviale Umsummierung bringt eine alternative Darstellung des Profil-Polynoms als

$$W_n(z) = \sum_{u \in \partial T_n} z^{|u|}.$$

Bei gegebenem Anlass werden wir auf diese Darstellung zurückkommen. Folgender Satz gibt Auskunft über das Verhalten der Größen.

Satz 2.1 *Es gilt:*

$$\text{i)} \quad \mathbb{E}[U_k(n+1)|F_{(n)}] = \frac{1}{n+1} (nU_k(n) + 2U_{k-1}(n)), \quad (2.3)$$

$$\text{ii)} \quad \mathbb{E}[W_{n+1}(z)|F_{(n)}] = \frac{n+2z}{n+1} W_n(z). \quad (2.4)$$

Beweis: i) ist eine Beobachtung, die die Dynamik des Baums verwendet. Es gibt drei zu unterscheidene Fälle, das $n+1$ -te Datum kann auf Level k , auf Level $k-1$ oder auf einem anderen Level eingefügt werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_k(n+1)|F_{(n)}] &= (U_k(n) - 1) \frac{U_k(n)}{n+1} + (U_k(n) + 2) \frac{U_{k-1}(n)}{n+1} \\ &\quad + U_k(n) \left(1 - \frac{U_k(n) + U_{k-1}(n)}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Vereinfachung dieses Ausdrucks führt direkt zu i).

ii) ist eine Konsequenz aus i), dabei wird verwendet, dass $U_k(n) = 0$ für $k > n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W_{n+1}(z)|F_{(n)}] &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}[U_k(n+1)|F_{(n)}] z^k \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k \geq 0} (nU_k(n) + 2U_{k-1}(n)) z^k \\
&= \frac{1}{n+1} \left(nW_n(z) + 2z \sum_{k \geq 0} U_{k-1}(n) z^{k-1} \right) \\
&= \frac{n+2z}{n+1} W_n(z).
\end{aligned}$$

□

Sei

$$C_n(z) := \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+2z}{k+1} = (-1)^n \binom{-2z}{n}, \quad (2.5)$$

sowie $C_0(z) := 1$. Aus dem obigen Satz folgt unmittelbar die Martingaleigenschaft des normierten Profil-Polynoms.

Korollar 2.1 Für $z \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}^-$ ist

$$(M_n(z))_{n \geq 0} := \left(\frac{W_n(z)}{C_n(z)} \right)_{n \geq 0} \quad (2.6)$$

ein Martingal mit Erwartung 1 bezüglich der Filtration $F_{(n)}$.

Dabei folgt $\mathbb{E}M_n(z) = 1$ aus $\mathbb{E}M_0(z) = \mathbb{E}W_0(z)/C_0(z) = 1$.

Man beachte $M_n(\frac{1}{2}) = M_n(1) = 1$ fast sicher für alle n .

Für spätere Zwecke ist die Asymptotik von $C_n(z)$ wichtig.

Lemma 2.1 Es gilt:

$$C_n(z) = \frac{n^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right), \quad n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für jede beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}^-$.

Beweis: Der Beweis beruht auf der Stirling-Approximation und geeigneten Fehlerabschätzungen. Wir verwenden die Stirlingsche Formel aus [AS64]. Für alle z mit $|\arg(z)| < \pi$, insbesondere für $\Re(z) \geq 0$, gibt es eine Funktion $0 < \vartheta(z) < \frac{1}{12z}$ mit:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} e^{\vartheta(z)}. \quad (2.7)$$

Damit folgt für n groß genug:

$$\begin{aligned}
C_n(z) &= \frac{\Gamma(2z+n)}{\Gamma(2z)\Gamma(n+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(2z)} \frac{\sqrt{2\pi}(2z+n)^{2z+n-1/2} e^{-2z-n+1} e^{\vartheta(2z+n)}}{\sqrt{2\pi}(n+1)^{n+1/2} e^{-n} e^{\vartheta(n+1)}} \\
&= \frac{(n+2z)^{2z}}{\Gamma(2z)(n+1)} \left(1 + \frac{2z-1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{2z-1}{n+1}\right)^{-3/2} e^{1-2z} e^{\vartheta(2z+n)-\vartheta(n+1)}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
(n+2z)^{2z} &= n^{2z} + O(2zn^{2z-1}) = n^{2z} \left(1 + O\left(\frac{2z}{n}\right)\right) \\
\left(1 + \frac{2z-1}{n+1}\right)^{-3/2} &= 1 + O\left(\frac{2z-1}{n}\right) \\
e^{\vartheta(2z+n)-\vartheta(n+1)} &= 1 + O\left(\frac{1}{2z+n}\right).
\end{aligned}$$

Aus der Analysis, siehe z.B. [Kön03, Kapitel 9], verwenden wir folgendes bekanntes Resultat:

$$\left(1 + \frac{2z-1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{2z-1} \left(1 + O\left(\frac{e^{2z-1}}{n}\right)\right).$$

Da wir uns auf beschränkte komplexe Mengen einschränken, sind sämtliche O -Terme $O\left(\frac{1}{n}\right)$ gleichmäßig in z und die Behauptung folgt. \square

Kehren wir nun zum Yule-Prozess zurück. Bevor wir das zu $(M_n(z))_{n \geq 0}$ analoge Martingal betrachten, beschäftigen wir uns näher mit dem Zählprozess $(N_t)_{t \geq 0}$. Folgendes Lemma ist hilfreich.

Lemma 2.2 *Seien E_1, \dots, E_n unabhängig $\exp(1)$ verteilt. Dann gilt:*

$$\max(E_1, \dots, E_n) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{i}\right).$$

Beweis: Man betrachte E_1, \dots, E_n parallel. Für $1 \leq j \leq n$ bezeichne I_j die Differenz zwischen der $j-1$ größten und j größten Werte der E_i . Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung gilt, dass I_j wie das Minimum von j unabhängigen, $\exp(1)$ -verteilten Zufallsvariablen ist, ergo $I_j \stackrel{d}{=} E_j/j$. Offensichtlich gilt $I_1 + \dots + I_n = \max(E_1, \dots, E_n)$ und die Behauptung folgt. \square

Mit $\{N_t > n\} = \{\tau_n < t\}$, der Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung,

sowie des obigen Lemmas lässt sich nun leicht die Verteilung von N_t bestimmen.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t > n) &= \mathbb{P}(\tau_n < t) \\
 &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{i} < t\right) \\
 &= \mathbb{P}(\max(E_1, \dots, E_n) < t) \\
 &= (1 - e^{-t})^n.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

N_t ist folglich geometrisch zum Parameter e^{-t} auf \mathbb{N} verteilt, man beachte $\mathbb{E}N_t = e^t$. Nachfolgender Satz beschreibt das Wachstum des Prozesses genauer.

Satz 2.2 *Es gilt:*

- i) $(N_t e^{-t})_{t \geq 0}$ ist ein (F_t) -Martingal mit Erwartung 1,
- ii) $\lim_t N_t e^{-t} = \xi$ f.s. mit $\mathcal{L}(\xi) = \exp(1)$.

Beweis: Betrachtet man den Prozess zum Zeitpunkt $s \leq t$, so hat nach Konstruktion jedes lebendige Individuum eine von allen anderen unabhängige Nachkommenschaft mit gleicher Verteilung wie das erste Individuum zum Zeitpunkt $t = 0$. Betrachtet man ein lebendiges Individuum separat, lässt sich somit keine Information gewinnen, in welchem Teil des Baums man sich befindet. Dies wird im nächsten Kapitel über Unterbäume ausgenutzt. Somit gilt:

$$N_t = \sum_{i=1}^{N_s} N_{t-s}^i.$$

Dabei beschreibt N_t^i die Nachkommenschaft des i -ten Individuums zum Zeitpunkt s und ist verteilungsgleich zu N_t sowie für verschiedene i paarweise unabhängig. Da N_s unter F_s messbar ist und N_{t-s}^i für alle i unabhängig von F_s sind, gilt nach Wald'scher Identität:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[N_t | F_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_s} N_{t-s}^i \middle| F_s\right] \\
 &= N_s \mathbb{E}N_{t-s} \\
 &= N_s e^{-s} e^t
 \end{aligned}$$

und i) folgt, da $\mathbb{E}N_t e^{-t} = 1$ trivialerweise gilt.

Wegen $N_t e^{-t} > 0$ konvergiert das Martingal, nach dem bekannten Konvergenzsatz für nicht-negative Martingale, fast sicher. Sei $\xi := \lim_t N_t e^{-t}$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t e^{-t} < x) &= \mathbb{P}(N_t < x e^t) \\
 &= 1 - \left((1 - e^{-t})^{e^t}\right)^x \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 - e^{-x}
 \end{aligned}$$

und ii) folgt. \square

Wegen (2.8) gilt, $\lim_n \tau_n = \infty$ in Wahrscheinlichkeit und fast sicher entlang einer Teilfolge. Da τ_n zudem fast sicher monoton wachsend ist, folgt unmittelbar $\lim_n \tau_n = \infty$ *f.s.* Mit $N_{\tau_n} = n + 1$ und Satz 2.2 führt dies direkt zu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{\tau_n} = \xi \quad \textit{f.s.} \quad (2.9)$$

Es gilt $\mathbb{E}[\tau_n] = H_n$, dabei bezeichnet H_n die n -te harmonische Zahl:

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}. \quad (2.10)$$

Bekanntlich gilt $\frac{H_n}{\log n} \rightarrow 1$. Wegen $\mathbf{Var}[\tau_n] = \sum_{i=1}^n i^2 < \infty$, folgt mit der Ungleichung von Tschebyscheff unmittelbar

$$\frac{\tau_n}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

in Wahrscheinlichkeit. Dies gilt auch fast sicher, wie man leicht zeigen kann: Logarithmieren von (2.9) bringt

$$\log n - \tau_n = \log \xi + o(1), \quad (2.11)$$

dabei gilt $o(1) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ fast sicher. Division durch $\log n$ liefert die Behauptung

$$\frac{\tau_n}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \textit{f.s.} \quad (2.12)$$

Unterbäume

Viele Ergebnisse lassen sich aufgrund der Selbstähnlichkeit des Baums auf Unterbäume übertragen. Eine weitere interessante Eigenschaft der Exponentialverteilung kommt hier zum Tragen.

Lemma 2.3 *Seien X, Y unabhängig $\exp(1)$ verteilt. Dann gilt:*

$$\mathcal{L}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \text{unif}[0, 1].$$

Beweis: Wir betrachten die Verteilungsfunktion. Offensichtlich ist $\frac{X}{X+Y} \in [0, 1]$ *f.s.* Sei $t \in [0, 1]$ und $f_X(x) = e^{-x}$ die Dichte von X . Bedingen auf X liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{X}{X+Y} < t\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(Y > \frac{x}{t} - x\right) f_X(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x} e^{-(x/t-x)} dx = \int_0^\infty e^{-x/t} dx = t \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. \square

Für $u \in \mathbb{U}$ sei

$$\tau^{(u)} := \inf\{t \geq 0 : u \in \mathbb{T}_t\}. \quad (2.13)$$

Nach Konstruktion ist $\tau^{(u)} \stackrel{d}{=} E_1 + \dots + E_{|u|}$. Nach einer bekannten Identität gilt somit $\mathcal{L}(\tau^{(u)}) = \Gamma(1, |u|)$, vergleiche etwa [Kle06, Übung 14.2.1]. Wir werden dies an dieser Stelle nicht verwenden, lediglich $\tau^{(u)} < \infty$ *f.s.* ist entscheidend.

Für $t > 0$ sei

$$\mathbb{T}_t^{(u)} = \{v : uv \in \mathbb{T}_{t+\tau^{(u)}}\}$$

der Baum ab u in relativer Zeit. Sei weiter

$$N_t^{(u)} = \left| \partial \mathbb{T}_t^{(u)} \right|$$

der Zählprozess für diesen Unterbaum und für $t > \tau^{(u)}$ sei $n_t^{(u)} = N_{t-\tau^{(u)}}^{(u)}$ dieser Prozess in absoluter Zeit. Nach Konstruktion gilt offensichtlich analog zu (2.9) für jeden Unterbaum mit Wurzel u

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_t^{(u)} e^{-t} = \xi_u, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} n_t^{(u)} e^{-t} = \xi_u e^{-\tau^{(u)}} \quad f.s. \quad (2.14)$$

Dabei ist $\xi_u \stackrel{d}{=} \exp(1)$. Liegen u, v nicht in einem Ast des Baums, so sind die Dynamiken ihrer Teilbäume offensichtlich unabhängig, d.h. ξ_u, ξ_v sind unabhängig. Da für $t > \tau^{(u_0)}$

$$n_t^{(u)} = n_t^{(u_0)} + n_t^{(u_1)}, \quad \tau^{(u_0)} = \tau^{(u_1)}$$

gilt, folgt mit (2.14) und Lemma 2.3

$$\frac{n_t^{(u_0)}}{n_t^{(u)}} = \frac{n_t^{(u_0)}}{n_t^{(u_0)} + n_t^{(u_1)}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\xi_{u_0}}{\xi_{u_0} + \xi_{u_1}} =: U^{(u_0)} \quad f.s.$$

mit $\mathcal{L}(U^{(u_0)}) = \text{unif}[0, 1]$. Analog folgt:

$$\frac{n_t^{(u_1)}}{n_t^{(u)}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1 - U^{(u_0)} \quad f.s.$$

Dies besagt, dass der Anteil aller Nachkommen von u im linken Teilbaum von u asymptotisch uniform verteilt ist. Ein Resultat, das wir im diskreten Fall bereits in (1.3) benutzten und sehr einfach erhielten. Diese Konstruktion ermöglicht es uns, jedem Knoten u eine uniform verteilte Zufallsvariable $U^{(u)}$ zuzuordnen.

Die wichtigste Zerlegung des Prozesses ist die in den linken und rechten Teilbaum. Man beachte hierbei $\tau^{(0)} = \tau^{(1)} = \tau_1$. Wir setzen

$$U := U^{(0)} = \frac{\xi_0}{\xi_0 + \xi_1}, \quad (2.15)$$

und erhalten:

$$\xi = \lim_{t \rightarrow \infty} N_t e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} (n_t^{(0)} + n_t^{(1)}) e^{-t} = (\xi_0 + \xi_1) e^{-\tau_1}, \quad (2.16)$$

sowie

$$\xi_0 = U \xi e^{\tau_1} \quad \xi_1 = (1 - U) \xi e^{\tau_1}. \quad (2.17)$$

Sind u, v keine Geschwister, d.h. haben sie nicht dengleichen direkten Vorfahren, so sind $U^{(u)}, U^{(v)}$ offensichtlich unabhängig. Multipliziert man nun entlang des Pfads der Vorgänger eines Knotens u ergibt sich

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{n_t^{(u)}}{N_t} = \prod_{v \prec u} U^{(v)} \quad f.s.$$

dabei bezeichne $v \prec u$ Vorgänger von u , zu denen auch u selbst zählt. Die zugehörigen Zufallsvariablen $U^{(v)}$ sind unabhängig. Ein analoges Resultat gilt im Binärsuchbaum.

Kehren wir nun zum Yule-Prozess zurück und beschäftigen uns näher mit dem zum Profil-Polynom äquivalenten Objekt. Für $t \geq 0$ sei:

$$\mathcal{W}(t, z) := \sum_{u \in \partial \mathbb{T}_t} z^{|u|}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Man beachte $\mathcal{W}(\tau_n, z) = W_n(z)$. Abgreifen der kontinuierlichen Größen zu den Sprungzeiten τ_n liefert uns hier wie auch im folgenden die Verbindung mit den diskreten Größen im Binärsuchbaum. Sei weiterhin der maßwertige Prozess $(\varrho_t)_{t \geq 0}$ definiert als:

$$\varrho_t = \sum_{u \in \partial \mathbb{T}_t} \delta_{|u|}. \quad (2.18)$$

Dann gilt folgender zur Definition von $W_n(z)$ analoge Ausdruck für $\mathcal{W}(t, z)$:

$$\mathcal{W}(t, z) = \sum_{k \geq 0} \varrho_t(\{k\}) z^k.$$

und die Identität $\rho_{\tau_n}(\{k\}) = U_k(n)$. Man beachte, dass $\varrho_t(\{k\})$ das kontinuierliche Analogon des Profils ist, es misst die Anzahl lebendiger Individuen in der k -ten Generation zum Zeitpunkt t .

Um die Struktur in den Unterbäumen ausnutzen zu können, definieren wir noch

$$\mathcal{W}^{(u)}(t, z) := \sum_{u \in \partial \mathbb{T}_t^{(u)}} z^{|u|} e^{t(1-2z)}. \quad (2.19)$$

Auch diese Größen sind für solche u, v , die nicht auf einem Ast liegen, unabhängig. Folgendes Lemma ist nützlich um nähere Aussagen über die Größe von $\mathcal{W}(t, z)$ zu machen.

Lemma 2.4 Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}[\varrho_t(\{k\})] = \frac{(2t)^k}{k!} e^{-t}.$$

Beweis: Seien die 2^k Knoten auf Level k beliebig nummeriert als u_1, \dots, u_{2^k} . Dann gilt offensichtlich:

$$\varrho_t(\{k\}) = \sum_{i=1}^{2^k} \mathbb{1}_{\{u_i \in \partial\mathbb{T}_t\}}.$$

Es gilt:

$$\{u_i \in \partial\mathbb{T}_t\} = \{\tau^{(u_i)} < t, \tau^{(u_i0)} > t\},$$

dabei ist $\tau^{(u)}$ in (2.13) definiert mit $\tau^{(u_i0)} = \tau^{(u_i)} + E_{u_i}$. E_{u_i} beschreibt dabei die Lebensdauer des betrachteten Individuums u_i . Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses und verwenden dazu $\mathcal{L}(\tau^{(u)}) = \Gamma(1, k)$. Sei demnach $f_{\tau^{(u_i)}}(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x}$ die Dichte von $\tau^{(u_i)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau^{(u_i)} < t, \tau^{(u_i0)} > t) &= \int_0^t \mathbb{P}(E_{u_i} > t - x) f_{\tau^{(u_i)}}(x) dx \\ &= \int_0^t \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} e^{-(t-x)} dx \\ &= \frac{e^{-t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} dx = \frac{t^k e^{-t}}{k!}, \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt. □

Nachfolgender Satz beschreibt $\mathcal{W}(t, z)$ näher. Dabei sei an die natürliche Filtration in (2.2) erinnert.

Satz 2.3 Es gilt:

$$\text{i) } \mathbb{E}[\mathcal{W}(t, z) | \mathcal{F}_s] = \mathcal{W}(s, z) \mathbb{E}\mathcal{W}(t - s, z), \quad (2.20)$$

$$\text{ii) } \mathbb{E}\mathcal{W}(t, z) = e^{t(2z-1)}. \quad (2.21)$$

Beweis: i) beweist man analog zur Vorgehensweise in Satz 2.2. Man betrachtet dazu den Prozess zum Zeitpunkt $s \leq t$ und bezeichnet für ein $u \in \partial\mathbb{T}_s$ den relativen Prozess ab u mit \mathbb{T}_t^u . Diese Prozesse sind verteilungsgleich zum Ursprungsprozess und $\{\mathbb{T}_t^u : u \in \partial\mathbb{T}_s\}$ ist offensichtlich eine unabhängige Familie.

Somit folgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathcal{W}(t, z)|F_s] &= \mathbb{E}\left[\sum_{u \in \partial\mathbb{T}_t} z^{|u|} \middle| F_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{u \in \partial\mathbb{T}_s} z^{|u|} \sum_{v \in \partial\mathbb{T}_{t-s}^u} z^{|v|} \middle| F_s\right] \\ &= \mathcal{W}(s, z)\mathbb{E}\mathcal{W}(t-s, z)\end{aligned}$$

mit der F_s -Messbarkeit von \mathbb{T}_s und F_s -Unabhängigkeit von \mathbb{T}_{t-s}^u . Für ii) verwendet man obiges Lemma. Es gilt:

$$\mathbb{E}\mathcal{W}(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[\varrho_t(\{k\})] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2tz)^k}{k!} e^{-t} = e^{t(2z-1)}.$$

Betrachtet man $\mathcal{W}(t, z)$ mit passender Skalierung, ergibt sich sofort das wichtige Martingal im Yule-Prozess.

Korollar 2.2 Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$(\mathcal{M}(t, z))_{t \geq 0} := (\mathcal{W}(t, z)e^{t(1-2z)})_{t \geq 0} \quad (2.22)$$

ein Martingal mit Erwartung 1 bezüglich der Filtration F_t .

Man beachte $\mathcal{M}(\tau_n, z) = \sum_{u \in \mathbb{T}_n} z^{|u|} e^{\tau_n(1-2z)}$, die Ähnlichkeit zu $M_n(z)$, siehe (2.6), ist offensichtlich, es fehlt lediglich die passende Normierung. Wir definieren noch

$$\mathcal{C}_n(z) = e^{\tau_n(1-2z)} C_n(z)$$

und können nun den Zusammenhang der Martingale im diskreten und kontinuierlichen Prozess formulieren.

Satz 2.4 i) $(\mathcal{C}_n(z))_{n \geq 0}$ ist ein (F_{τ_n}) -Martingal mit Erwartung 1. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n(z) = \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \quad f.s. \quad (2.23)$$

dabei wurde ξ in Satz 2.2 definiert.

ii) Die beiden Martingale $(\mathcal{C}_n(z))_{n \geq 0}$, $(M_n(z))_{n \geq 0}$ sind unabhängig und es gilt:

$$\mathcal{M}(\tau_n, z) = \mathcal{C}_n(z)M_n(z). \quad (2.24)$$

Beweis: i) ist leicht zu berechnen. Man verwendet (2.1) für die Darstellung von τ_n und dessen Messbarkeit unter F_{τ_n} . $X_{n+1} := \tau_{n+1} - \tau_n \stackrel{d}{=} \exp(n+1)$ ist unabhängig von F_{τ_n} .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{C}_{n+1}(z)|F_{\tau_n}] &= C_{n+1}(z)\mathbb{E}[e^{\tau_n(1-2z)}e^{X_{n+1}(1-2z)}|F_{\tau_n}] \\ &= C_{n+1}(z)e^{\tau_n(1-2z)}\mathbb{E}e^{X_{n+1}(1-2z)} \\ &= C_n(z)e^{\tau_n(1-2z)} = \mathcal{C}_n(z). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{E}\mathcal{C}_n(z) = \mathbb{E}\mathcal{C}_0(z) = 1$. Für die Asymptotik verwende man Lemma 2.1 und (2.9).

$$\mathcal{C}_n(z) = e^{\tau_n(1-2z)} \frac{n^{2z-1}}{\Gamma(2z)} (1 + o(1)) = \frac{(ne^{-\tau_n})^{2z-1}}{\Gamma(2z)} (1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \quad f.s.$$

ii) folgt nach Konstruktion. Die Zerlegung spaltet $\mathcal{M}(t, z)$ in eine räumliche Komponente $M_n(z)$ und eine zeitliche $\mathcal{C}_n(z)$. \square

2.3 Konvergenz der Martingale

Zunächst wird die Konvergenz der Martingale $(M_n(z))_{n \geq 0}$ und $(\mathcal{M}(t, z))_{n \geq 0}$ formuliert, anschließend werden die Grenzprozesse mittels Fixpunktgleichungen charakterisiert.

Satz 2.5 Für $1 < q < 2$, sei $V_q := \{z : \sup_t \mathbb{E}|\mathcal{M}(t, z)|^q < \infty\}$. Dann gilt $V_q = \{z : f(z, q) > 0\}$ mit

$$f(z, q) := 1 + q(2\Re(z) - 1) - 2|z|^q. \quad (2.25)$$

Sei zudem $V := \cup_{1 < q < 2} V_q$. Dann gilt:

i) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $\mathcal{M}(t, z)$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $C \subseteq V$ f.s. und in L^1 .

ii) Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert $M_n(z)$ gleichmäßig auf jedem Kompaktum $C \subseteq V$ f.s. und in L^1 .

Beweis: : siehe [Big92, Theorem 6]. \square

Für unsere Zwecke relevant ist der Bereich $(\alpha_-/2, \alpha_+/2)$, der im Konvergenzbereich der Martingale enthalten ist. Dies sieht man durch Betrachtung von $f'(z, 1)$

und wird später in Abschnitt 3.4 ausgeführt. Der Faktor $1/2$ verwundert zunächst, wird aber bei der Extraktion des Profils im vierten Kapitel klar. Wir setzen $z_c^- = \alpha_-/2$ und $z_c^+ = \alpha_+/2$. Gleichung (2.25) wird in Kürze motiviert.

Für den folgenden Satz definieren wir noch

$$\mathcal{M}^{(i)}(t, z) := \mathcal{W}^{(i)}(t, z)e^{(1-2z)t}, \quad \mathcal{M}_\infty^{(i)}(z) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{M}^{(i)}(t, z) \quad (2.26)$$

für $i = 0, 1$, dabei ist $\mathcal{W}^{(i)}(t, z)$ in (2.19) definiert. $\mathcal{M}^{(0)}(t, z)$ (resp. $\mathcal{M}^{(1)}(t, z)$) ist das Analogon von $\mathcal{M}(t, z)$ im linken (resp. rechten) Teilbaum. Im Binärsuchbaum seien die entsprechenden Objekte analog definiert.

Satz 2.6 Sei $z \in (z_c^-, z_c^+)$:

i) Die Verbindung der Grenzmartingale lautet wie folgt:

$$\mathcal{M}(\infty, z) = \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M_\infty(z), \quad (2.27)$$

dabei ist ξ in Satz 2.2 definiert.

ii) Folgende Fixpunktgleichungen charakterisieren die Grenzprozesse:

a) im Yule-Prozess,

$$\mathcal{M}(\infty, z) = ze^{\tau_1(1-2z)} (\mathcal{M}_\infty^{(0)}(z) + \mathcal{M}_\infty^{(1)}(z)) \quad f.s. \quad (2.28)$$

dabei sind $\mathcal{M}_\infty^{(0)}(z), \mathcal{M}_\infty^{(1)}(z)$ unabhängige Kopien von $\mathcal{M}(\infty, z)$, definiert in (2.26), unabhängig von τ_1 .

b) im Binärsuchbaum,

$$M_\infty(z) = z[U^{2z-1}M_\infty^{(0)}(z) + (1-U)^{2z-1}M_\infty^{(1)}(z)] \quad f.s. \quad (2.29)$$

dabei ist $\mathcal{L}(U) = \text{unif}[0, 1]$ in (2.15) definiert, sowie $M_\infty^{(0)}(z), M_\infty^{(1)}(z)$ unabhängige Kopien von $M_\infty(z)$, unabhängig von U .

Beweis: i) folgt unmittelbar aus Satz 2.4.

ii) verläuft nach bekanntem Schema.

a) Für $t > \tau_1$ sei $s := t - \tau_1$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t, z) &= e^{\tau_1(1-2z)} \sum_{u \in \partial \mathbb{T}_{s+\tau_1}} z^{|u|} e^{s(1-2z)} \\ &= e^{\tau_1(1-2z)} \left[\sum_{u \in \partial \mathbb{T}_s^{(0)}} z^{|u|+1} e^{s(1-2z)} + \sum_{u \in \partial \mathbb{T}_s^{(1)}} z^{|u|+1} e^{s(1-2z)} \right] \\ &= ze^{\tau_1(1-2z)} [\mathcal{M}^{(0)}(s, z) + \mathcal{M}^{(1)}(s, z)] \end{aligned} \quad (2.30)$$

und mit $t \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung.

b) analog zu i) gilt für den linken Teilbaum $\mathcal{M}^{(0)}(\infty, z) = \frac{\xi_0^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M_\infty^{(0)}(z)$, analog für den rechten. ξ_0, ξ_1 wurden im Abschnitt 2.2 über Unterbäume definiert. Es folgt dann aus (2.30)

$$\frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M_\infty(z) = ze^{\tau_1(1-2z)} \left(\frac{\xi_0^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M_\infty^{(0)}(z) + \frac{\xi_1^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M_\infty^{(1)}(z) \right).$$

Mit (2.17) vereinfacht sich dies zu

$$\xi^{2z-1} M_\infty(z) = ze^{\tau_1(1-2z)} \left((U\xi e^{\tau_1})^{2z-1} M_\infty^{(0)}(z) + ((1-U)\xi e^{\tau_1})^{2z-1} M_\infty^{(1)}(z) \right)$$

und die Behauptung folgt. \square

Folgender Satz gibt Auskunft über die übrigen Fälle:

Satz 2.7 Für $z \in (0, \infty) \setminus (z_c^-, z_c^+)$ gilt $\lim_t \mathcal{M}(t, z) = 0$ und $\lim_n M_n(z) = 0$ f.s.

Beweis: Da die beiden Martingale für $z \in \mathbb{R}^+$ nicht-negativ sind, konvergieren sie fast sicher. Für den kontinuierlichen Prozess $\mathcal{M}(t, z)_{t \geq 0}$ ist der Beweis in [Big92]. Das Resultat für das diskrete Profil-Polynom folgt dann direkt aus der Verbindung der Grenzmartingale (2.27), die offensichtlich auf \mathbb{R}^+ gilt. \square

Bemerkung 2.1 Die L^1 -Konvergenz der beiden Martingale stammt wie üblich von einer L^q -Schranke für ein $1 < q \leq 2$. Im Falle von Konvergenz und endlichem q -ten Moment des Grenzprozess folgt aus (2.29)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} |M_\infty(z)|^q &= |z|^q \mathbb{E} \left| U^{2z-1} M_\infty^{(0)}(z) + (1-U)^{2z-1} M_\infty^{(1)}(z) \right|^q \\ &\geq 2|z|^q \mathbb{E} \left| U^{2z-1} M_\infty^{(0)}(z) \right|^q \\ &= \frac{2|z|^q}{(2\Re(z) - 1)q + 1} \mathbb{E} |M_\infty(z)|^q, \end{aligned}$$

und damit gilt:

$$q(2\Re(z) - 1) - 2|z|^q + 1 \geq 0.$$

Ist $M_\infty(z)$ in L^q beschränkt, so muss demnach $f(z, q) > 0$ gelten. Der Bereich V aus Satz 2.5 ist in diesem Sinne maximal. Insbesondere gilt L^2 -Konvergenz des Martingals höchstens im Intervall $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)$. Tatsächlich konvergiert das Martingal in diesem Bereich in L^2 , siehe [CDJH01, Korollar 2].

2.4 Ableitungsmartingale

Dieser Abschnitt wird im weiteren keine Rolle mehr spielen, die Resultate werden deshalb hauptsächlich zitiert und auf technisch anspruchsvolle Beweise wird verzichtet. Am Ende des Abschnitts wird noch eine interessante Anwendung bezüglich der externen Pfadlänge dargestellt.

Offensichtlich sind die beiden Martingale $M_n(z)$ und $\mathcal{M}(t, z)$ innerhalb ihrer Definitionsbereiche holomorph. Wir betrachten deshalb ihre Ableitungen.

$$\mathcal{M}'(t, z) := \frac{d}{dz} \mathcal{M}(t, z), \quad M'_n(z) := \frac{d}{dz} M_n(z). \quad (2.31)$$

Für $z \in \mathbb{R}^+$ sind diese Prozesse nicht mehr stets positiv, die Konvergenz und die Martingaleigenschaft bleiben jedoch erhalten, wie nachfolgender Satz zeigt. Wir beginnen mit folgendem wichtigen Lemma.

Lemma 2.5 i) Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Für $z \in U$ sei $X(z)$ eine reellwertige, integrierbare Zufallsvariable, differenzierbar in U . Für alle $z \in U$ existiere eine Umgebung $U(z)$ mit

$$\mathbb{E} \sup_{z \in U(z)} |X'(z)| < \infty. \quad (2.32)$$

Dann gilt:

$$(\mathbb{E}X(z))' = \mathbb{E}X'(z). \quad (2.33)$$

ii) Ist $(X_n(z))_{n \geq 1}$ für alle $z \in U$ ein Martingal bezüglich einer Filtration \tilde{F}_n und gelten die Eigenschaften aus i) gliedweise für alle $n \geq 1$, so ist auch $(X'_n(z))_{n \geq 1}$ ein (\tilde{F}_n) -Martingal.

Beweis: i) Sei $z \in U$ und $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert für alle Umgebungen $U(z)$ ein n_0 , sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{X(z) - X(z_n)}{z - z_n} \right| \leq \sup_{z \in U(z)} |X'_n(z)| \quad f.s.$$

Nach dem Satz der majorisierten Konvergenz folgt (2.33) nun wegen (2.32):

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}X(z))' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X(z) - \mathbb{E}X(z_n)}{z - z_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{X(z) - X(z_n)}{z - z_n} \right] \\ &= \mathbb{E} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X(z) - X(z_n)}{z - z_n} = \mathbb{E}X'(z). \end{aligned}$$

ii) folgt analog mit dem Satz der majorisierten Konvergenz für bedingte Erwartungen. \square

Obiges Lemma gilt analog für zeitstetige Prozesse. Nachfolgender Satz gibt zudem die Verbindung der Grenzprozesse und deren Charakterisierung. Dazu seien in den Teilbäumen die Größen $\mathcal{M}'^{(i)}(t, z)$, $M_n'^{(i)}(z)$ für $i = 0, 1$ analog zu (2.31) definiert.

Satz 2.8 i) a) Für $z \in \mathbb{R}^+$ sind $(\mathcal{M}'(t, z))_{t \geq 0}$ und $(M_n'(z))_{n \geq 0}$ Martingale bezüglich der natürlichen Filtrationen F_t , bzw. $F_{(n)}$ und werden im folgenden als Ableitungsmartingale bezeichnet.

b) Für $z \in (z_c^-, z_c^+)$ sind die Martingale f.s. konvergent. Ihre Grenzwerte $\mathcal{M}'(\infty, z)$ und $M_\infty'(z)$ sind dabei die Ableitungen der Grenzprozesse der Martingale $(\mathcal{M}(t, z))_{t \geq 0}$ und $(M_n(z))_{n \geq 0}$.

ii) Sei $z \in (z_c^-, z_c^+)$.

a) Die Verbindung der Grenzprozesse der Ableitungsmartingale lautet:

$$\mathcal{M}'(\infty, z) = \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \left(M_\infty'(z) + 2 \left(\log \xi - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty(z) \right) \quad f.s. \quad (2.34)$$

dabei ist ξ unabhängig von $\mathcal{M}'(\infty, z)$, $M_\infty(z)$, in Satz 2.2 definiert.

b) Wir erhalten folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} M_\infty'(z) &= zU^{2z-1}M_\infty'^{(0)}(z) + z(1-U)^{2z-1}M_\infty'^{(1)}(z) + z^{-1}M_\infty(z) \\ &\quad + 2z(U^{2z-1}\log U)M_\infty^{(0)}(z) \\ &\quad + 2z((1-U)^{2z-1}\log(1-U))M_\infty^{(0)}(z), \end{aligned} \quad (2.35)$$

dabei sind $M_\infty'^{(0)}(z)$, $M_\infty'^{(1)}(z)$ unabhängige Kopien von $M_\infty'(z)$ und $M_\infty^{(0)}(z)$, $M_\infty^{(1)}(z)$ unabhängige Kopien von $M_\infty(z)$, unabhängig von U , mit $\mathcal{L}(U) = \text{unif}[0, 1]$.

Beweis: i) a) Nach obigem Lemma bleibt (2.32) zu prüfen. Im diskreten Fall reicht es wegen der stetigen Differenzierbarkeit von $C_n(z)$ und $\mathbb{E}|W_n(z)| \leq C_n(|z|)$ (2.32) für $W_n'(z)$ zu zeigen. Dies folgt leicht.

$$\begin{aligned} |W_n'(z)| &\leq \sum_{k \geq 1} kU_k(n) \leq n^2 \quad \text{für } |z| \leq 1, \\ |W_n'(z)| &\leq \sum_{k \geq 1} kU_k(n)|z|^n \leq n^2|z|^n \quad \text{für } |z| > 1. \end{aligned}$$

Analog reicht es im kontinuierlichen Fall (2.32) für $\mathcal{W}'(t, z)$ zu prüfen. Dazu sei $z_0 \in \mathbb{R}^+$ und $U(z_0)$ eine z_0 -Umgebung sowie $\bar{z} = \sup_{z \in U(z_0)} |z|$. Mit $|\mathcal{W}'(t, z)| \leq \mathcal{W}(t, |z|)$ und Lemma 2.4 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup_{z \in U(z_0)} |\mathcal{W}'(t, z)| &\leq \mathbb{E} \mathcal{W}'(t, \bar{z}) \\ &= \sum_{k \geq 1} k \mathbb{E}[\varrho_t(\{k\})] \bar{z}^k \\ &= e^{-t} \sum_{k \geq 1} \frac{k(2t\bar{z})^k}{k!} \\ &= 2t\bar{z}e^{t(2\bar{z}-1)}. \end{aligned}$$

b) Da $\mathcal{M}(t, z)$ nach Satz 2.5 fast sicher gleichmäßig auf jedem Kompaktum von V konvergiert und V offen ist, folgt wegen der angesprochenen Holomorphie des Martingals nach dem Satz von Weierstrass, vergleiche etwa [Kön97, Kapitel 6.7], dass die Ableitungsfolge fast sicher gegen die Ableitung des ebenfalls holomorphen Grenzprozess $\mathcal{M}(\infty, z)$ konvergiert. Dies gilt auch für sämtliche höhere Ableitungen. Gleiches gilt für das Martingal im diskreten Prozess.

ii) Bilden der Ableitung der Martingalverbindung (2.24) bringt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'(\tau_n, z) &= \mathcal{C}'_n(z)M_n(z) + \mathcal{C}_n(z)M'_n(z) \\ &= \left(\frac{\mathcal{C}'_n(z)}{\mathcal{C}_n(z)} - 2\tau_n \right) \mathcal{C}_n(z)M_n(z) + \mathcal{C}_n(z)M'_n(z) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mit $(\log C_n(z))' = \frac{C'_n(z)}{C_n(z)}$ folgt

$$\frac{C'_n(z)}{C_n(z)} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{i+2z}, \quad (2.37)$$

zudem wird folgende Identität der logarithmischen Gammafunktion verwendet:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{x+i} \right). \quad (2.38)$$

Mit Hilfe von (2.11) folgt nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{C'_n(z)}{C_n(z)} - 2\tau_n \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{i+2z} - 2 \log n + 2 \log \xi \right) \\ &= 2 \left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} + \log \xi \right) \quad f.s. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Damit folgt a). Wir definieren die Grenzprozesse der Ableitungsmartingale in den Teilbäumen als $\mathcal{M}'^{(i)}(\infty, z)$, $M_\infty'^{(i)}(z)$ für $i = 0, 1$.

Für b) differenziere man (2.40) und verwende diese Identität anschließend erneut. Für $t > \tau_1$ erhält man

$$\mathcal{M}'(t, z) = (z^{-1} - 2\tau_1)\mathcal{M}(t, z) + ze^{(1-2z)\tau_1} \left(\mathcal{M}'^{(0)}(t - \tau_1, z) + \mathcal{M}'^{(1)}(t - \tau_1, z) \right),$$

und mit $t \rightarrow \infty$ folgt mit (2.27), (2.34) sowie dessen Analogon für $(\mathcal{M}'^{(i)}, M^{(i)}, M'^{(i)}, \xi_i)_{i=0,1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} M'_\infty(z) &= \frac{\xi^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \left((z^{-1} - 2\tau_1) - 2 \left(\log \xi - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) \right) M_\infty(z) \\ &\quad + ze^{\tau_1(1-2z)} \frac{\xi_0^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \left(M'_\infty^{(0)}(z) + 2 \left(\log \xi_0 - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty^{(0)}(z) \right) \\ &\quad + ze^{\tau_1(1-2z)} \frac{\xi_1^{2z-1}}{\Gamma(2z)} \left(M'_\infty^{(1)}(z) + 2 \left(\log \xi_1 - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty^{(1)}(z) \right). \end{aligned}$$

Mehrfaches Anwenden von (2.17) sowie geschicktes Klammern vereinfacht die Gleichung zu:

$$\begin{aligned} M'_\infty(z) &= z^{-1} M_\infty(z) + zU^{2z-1} M'_\infty^{(0)}(z) + z(1-U)^{2z-1} M'_\infty^{(1)}(z) \\ &\quad + 2zU^{2z-1} \left(\log U \xi e^{\tau_1} - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty^{(0)}(z) \\ &\quad + z(1-U)^{2z-1} \left(\log(1-U) \xi e^{\tau_1} - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty^{(1)}(z) \\ &\quad - 2 \left(\log \xi e^{\tau_1} - \frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right) M_\infty(z), \end{aligned}$$

und mit (2.29) folgt die Behauptung. \square

Folgender Satz komplettiert das Resultat über Ableitungsmartingale.

Satz 2.9 i) Die Martingale $(\mathcal{M}'(t, z_c^-))_{t \geq 0}$ und $(M'_n(z_c^-))_{n \geq 0}$ (resp. $(\mathcal{M}'(t, z_c^+))_{t \geq 0}$ und $(M'_n(z_c^+))_{n \geq 0}$) konvergieren f.s. Ihre Grenzwerte $\mathcal{M}'(\infty, z_c^-)$ und $M'_\infty(z_c^-)$ (resp. $\mathcal{M}'(\infty, z_c^+)$ und $M'_\infty(z_c^+)$) sind positiv (resp. negativ) und erfüllen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathcal{M}'(\infty, z_c^-) &= \mathbb{E} M'_\infty(z_c^-) = +\infty, \\ \mathbb{E} \mathcal{M}'(\infty, z_c^+) &= \mathbb{E} M'_\infty(z_c^+) = -\infty. \end{aligned}$$

ii) Es gelten zu (2.27) - (2.29) ähnliche Gleichungen:

$$\mathcal{M}'(\infty, z_c^\pm) = \frac{\xi^{2z_c^\pm-1}}{\Gamma(2z_c^\pm)} M'_\infty(z_c^\pm) \quad (2.40)$$

$$\mathcal{M}'(\infty, z_c^\pm) = z_c^\pm e^{\tau_1(1-2z_c^\pm)} \left(\mathcal{M}'^{(0)}(\infty, z_c^\pm) + \mathcal{M}'^{(1)}(\infty, z_c^\pm) \right) \quad (2.41)$$

$$M'_\infty(z_c^\pm) = z_c^\pm \left(U^{2z_c^\pm-1} M_\infty^{(0)}(z_c^\pm) + (1-U)^{z_c^\pm-1} M_\infty^{(1)}(z_c^\pm) \right) \quad (2.42)$$

Beweis: i) Für $z = z_c^\pm$ sind die Konvergenz von $\mathcal{M}'(t, z)$, die Vorzeichen der Grenzwerte und das Resultat

$$\mathcal{M}'(\infty, z_c^-) = -\mathcal{M}'(\infty, z_c^+) = \infty \quad f.s.$$

in [BR] bewiesen. (2.40) liefert analoges Ergebnis für $M'_\infty(z_c^\pm)$.

ii) (2.40) ist eine Konsequenz aus (2.34), da $M(\infty, z_c^\pm) = 0$. Man beachte, dass (2.34) gilt, sobald die auftretenden Martingale konvergieren.

(2.42) ist (2.35) für $z = z_c^\pm$. (2.41) ergibt sich sofort durch Differentiation von (2.30) und $z = z_c^\pm$. \square

Eine einfache aber interessante Folgerung ergibt die Wahl von $z = 1$ in Satz 2.8, mit $M_n(1) \equiv 1$, sowie (2.37) und (2.38).

Korollar 2.3 *Es gilt:*

$$\mathcal{M}'(\infty, 1) = \xi \left(M'_\infty(1) + 2(\log \xi + \gamma - 1) \right) \quad f.s.$$

dabei ist γ die Euler-Konstante und $M'_\infty(1)$ erfüllt folgende Gleichung:

$$M'_\infty(1) = UM'_\infty(0)(1) + (1-U)M'_\infty(1)(1) + 2U \log U + 2(1-U) \log(1-U) + 1 \quad f.s. \quad (2.43)$$

wobei erneut $M'_\infty(0)(1), M'_\infty(1)(1)$ unabhängige Kopien von $M'_\infty(1)$, unabhängig von U , sind und $\mathcal{L}(U) = \text{unif}[0, 1]$.

Gleichung (2.43) ist die fast sichere Version der **Quicksort** Gleichung. Ihr Auftreten an dieser Stelle lässt sich erklären. Sei X eine Zufallsvariable die Gleichung (2.43) erfüllt. Man erinnere sich an das interne Profil $Z_k(n)$ aus (1.1). Die Komplexität des Quicksortalgorithmus, die bekanntlich verteilungsgleich zur internen Pfadlänge $Q_n := \sum_{k \geq 0} k Z_k(n)$ eines Binärsuchbaums ist, konvergiert passend normiert gegen $M_\infty(1)$, siehe [Rös91, Rég89]. Genauer gilt:

$$Q_n^* := \frac{Q_n - \mathbb{E}Q_n}{n+1} \xrightarrow{d} X \quad (2.44)$$

mit

$$\mathbb{E}Q_n = 2(n+1)H_{n+1} - 4n$$

dabei bezeichne H_n die n -te harmonische Zahl, definiert in (2.10).

Die interne Pfadlänge Q_n unterscheidet sich von der externen Pfadlänge $\tilde{Q}_n := \sum_{k \geq 0} k U_k(n)$ lediglich deterministisch um $2n$, wie man leicht induktiv einsieht. Somit gilt (2.44) analog für die normierte externe Pfadlänge \tilde{Q}_n^* . Aus dieser Überlegung lässt sich die Konvergenz $M'_n(1) \rightarrow X$ in Verteilung gewinnen, $W'_n(1) =$

\tilde{Q}_n liefert hierbei die Verbindung. Mit Lemma 2.5 folgt analog zu Satz 2.8 a) $\mathbb{E}W'_n(z) = (\mathbb{E}W_n(z))' = C'_n(z)$. Mit $W_n(1) = C_n(1) = n + 1$ folgt nun:

$$\begin{aligned} M'_n(1) &= \frac{W'_n(1)C_n(1) - W_n(1)C'_n(1)}{C_n^2(1)} \\ &= \frac{W'_n(1) - C'_n(1)}{n + 1} = \tilde{Q}_n^*. \end{aligned}$$

Mit (2.44) für \tilde{Q}_n folgt unmittelbar $M'_n(1) \xrightarrow{d} X$.

2.5 Erwartungswert des Profils

Bislang hatten wir noch keine Aussagen über den Erwartungswert des Profils gemacht. Da der gewünschte Grenzwertsatz für das am Erwartungswert normierte Profil bestimmt wird, ist eine gute Kenntnis des Erwartungswert von großer Bedeutung. Wir beginnen mit einem interessanten Lemma aus dem wir analog zur Vorgehensweise im kontinuierlichen Fall in Lemma (2.4) die Erwartung des Profils bestimmen.

Lemma 2.6 *Sei $u \in \mathbb{U}$ mit $|u| = k$ und $S_n^{(k)}$ die Stirling-Zahl erster Art, d.h. die Anzahl Permutationen von n Elementen, die in genau k Zyklen zerfallen. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(u \in \partial T_n) = \frac{S_n^{(k)}}{n!}. \quad (2.45)$$

Beweis: Da jeder Knoten eines Levels durch einen eindeutigen Pfad mit der Wurzel verbunden ist und die Wahrscheinlichkeit einen externen Knoten zu besetzen nach Lemma 1.1 nicht von der Position des Knotens abhängt, ist $\mathbb{P}(u \in \partial T_n)$ für alle Knoten eines Levels identisch. Wir wählen deshalb $u = (1, \dots, 1)$.

Sei $x \in S_n$, die dem Baum zugrundeliegende Permutation und bezeichne Y die Anzahl der Aufwärtsrekorde in x . Offensichtlich ist u genau dann extern, falls $Y = k$. Nach Lemma 1.1 gilt:

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \mathcal{L}(X_i) = \text{Ber}(1/i), \quad (2.46)$$

und X_1, \dots, X_n unabhängig. Man beobachtet nun, dass Y und die Anzahl der Zyklen einer rein zufälligen Permutation identisch verteilt sind, da sich diese ebenfalls wie (2.46) zerlegen lässt. Dabei ist X_i eine Indikatorvariable, die angibt, ob bei chronologischer Anordnung der Zyklen zwischen i -ter und $i + 1$ -ter Stelle ein Zyklus beendet wird. Diese Zerlegung wird als „Feller coupling“ bezeichnet und

ist beispielsweise in [ABT03, Kapitel 1] sehr anschaulich dargestellt. Dies beweist das Lemma. \square

Nachfolgender Satz geht auf W. Lynch zurück, siehe [Lyn65].

Satz 2.10 *Für den Erwartungswert des Profils gilt:*

$$\mathbb{E}U_k(n) = \frac{2^k S_n^{(k)}}{n!}. \quad (2.47)$$

Beweis: Es gibt 2^k potentielle Knoten auf Level k . Seien diese beliebig nummeriert als u_1, \dots, u_{2^k} . Es gilt die einfache Zerlegung:

$$U_k(n) = \sum_{i=1}^{2^k} \mathbb{1}_{\{u_i \in \partial T_n\}}$$

und mit der Linearität des Erwartungswerts folgt die Behauptung aus obigem Lemma. \square

Die Schwierigkeit dieser Formel liegt in $S_n^{(k)}$. Obgleich dieses Objekt sehr anschaulich ist, lässt es sich schwer berechnen und dessen Asymptotik bestimmen. Bevor wir uns dessen widmen, hier eine interessante Anwendung des Satzes.

Korollar 2.4 *Sei D_n die Tiefe des n -ten eingefügten Datums. Dann gilt:*

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k) = \frac{2^k S_n^{(k)}}{(n+1)!}$$

für $0 \leq k \leq n$, sowie

$$\mathbb{E}D_{n+1} = 2(H_{n+1} - 1), \quad \mathbf{Var}[D_{n+1}] = 2(H_{n+1} - 1) - 4 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}.$$

Dabei ist H_n die n -te harmonische Zahl, definiert in 2.10.

Beweis: i) Es gilt offensichtlich:

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k | T_n) = \frac{U_k(n)}{n+1}.$$

Bilden der Erwartung liefert

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = k) = \frac{\mathbb{E}U_k(n)}{n+1}, \quad (2.48)$$

und mit (2.47) folgt die gewünschte Verteilung. Mit Hilfe von (2.48) und (2.5) lässt sich die Erzeugendenfunktion von D_{n+1} leicht bestimmen und daraus die Momente berechnen. \square

Bemerkung 2.2 Devroye bestimmte die Verteilung der Knotentiefe in Analogie zu (2.46) direkt, siehe [Dev88]. Es gilt:

$$D_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=2}^n Y_i, \quad \mathcal{L}(Y_i) = \text{Ber}(2/i),$$

und Y_1, \dots, Y_n unabhängig. Daraus lassen sich die Momente direkt ablesen.

Kehren wir zur Asymptotik des Erwartungswerts zurück. Hwang, siehe [Hwa95], bestimmte eine Entwicklung für die Stirling-Zahlen: Für alle $\ell > 0$ und für $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$ mit $k/\log n \leq \ell$ gilt insbesondere

$$\mathbb{E}U_k(n) = \frac{(2 \log n)^k}{k! n \Gamma(\frac{k}{\log n})} (1 + o(1)),$$

woraus mit der Stirling'schen Formel, siehe (2.7), unmittelbar folgt:

$$\mathbb{E}U_k(n) = \frac{n^{-\eta_2(\frac{k}{\log n})}}{\Gamma(\frac{k}{\log n}) \sqrt{2\pi k}} (1 + o(1)). \quad (2.49)$$

Dabei ist $o(1)$ gleichmäßig für $k/\log n \leq \ell$ und $\eta_2(x)$ in (1.5) definiert. Wir gehen darauf im vierten Kapitel über die Extraktion des Profils näher ein und fahren nun mit dem zweiten Zugang zu dem Problem fort.

Kapitel 3

Kontraktionsmethode

In diesem Abschnitt wird nun eine alternative Betrachtungsweise des Problems geschildert. Martingale werden hier nicht verwendet, man bedient sich lediglich der rekursiven Struktur des Problems. Bereits im zweiten Kapitel sind einige rekursive Gleichungen aufgetreten, die dann z.B. in Satz 2.6 und Satz 2.8 auf Fixpunktgleichungen für Verteilungen der Grenzprozesse führten. Ganz natürlich stellen sich dabei zwei Hauptfragen:

- Ist die auftretende Gleichung lösbar? Wenn ja, ist die Lösung dann eindeutig?
- Konvergiert die betrachtete Folge von Zufallsvariablen gegen diese Lösung der Gleichung? Wenn ja, in welchem Sinne?

Diese beiden Probleme werden wir lösen. Für reellwertige Zufallsvariablen ist eine Lösung dieses Problems mit Hilfe der Kontraktionsmethode seit Jahren bekannt, siehe [Rös91, Rös01, NR04]. In unserem Fall treten allerdings Zufallsvariablen in den Raum der analytischen Funktionen auf; die Kontraktionsmethode muss demnach auf allgemeinere Räume übertragen werden. Zunächst erläutern wir unseren Fall und stellen die Kontraktionsmethode allgemein vor.

3.1 Die Idee der Kontraktionsmethode

Sei $I(n)$ die Größe des linken Teilbaums. Es gilt $\mathcal{L}(I(n)) = \text{unif}\{0, \dots, n-1\}$. Durch Zerlegung in linken und rechten Teilbaum gilt, wie wir bereits in (1.3) gesehen hatten:

$$U_k(n) \stackrel{d}{=} U_{k-1}^{(0)}(I(n)) + U_{k-1}^{(1)}(n-1-I(n))$$

mit $U_i^{(1)}(\ell), U_j^{(2)}(m), I(n)$ für $i, j \leq k, \ell, m \leq n$ unabhängig und $U_\ell^{(i)}(m) \stackrel{d}{=} U_\ell(m)$ für $i = 1, 2, \ell \leq k, m \leq n$.

Für das Profil-Polynom folgt daraus unmittelbar

$$W_n(z) \stackrel{d}{=} zW_{I(n)}^{(0)}(z) + zW_{n-1-I(n)}^{(1)}(z) \quad (3.1)$$

mit $W_i^{(0)}(z), W_j^{(1)}(z), I(n)$ für $i, j \leq n$ unabhängig und $W_\ell^{(i)}(z) \stackrel{d}{=} W_\ell(z)$ für $i = 1, 2, \ell \leq n$.

Daraus ergibt sich eine Rekursion für die Erwartung:

$$\mathbb{E}W_n(z) = \frac{2z}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}W_i(z) = C_n(z).$$

Normieren wir nun das Profil-Polynom mit dessen Erwartungswert $C_n(z)$ und erweitern noch geschickt, schreibt sich (3.1) um zu

$$M_n(z) \stackrel{d}{=} z \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} M_{I(n)}^{(0)}(z) + z \frac{C_{n-1-I(n)}(z)}{C_n(z)} M_{n-1-I(n)}^{(1)}(z) \quad (3.2)$$

mit $M_i^{(0)}(z), M_j^{(1)}(z), I(n)$ für $i, j \leq n$ unabhängig und $M_\ell^{(i)}(z) \stackrel{d}{=} M_\ell(z)$ für $i = 1, 2, \ell \leq n$.

Aus Lemma 2.1 folgt für $I(n) > 0$ unmittelbar

$$\frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} = \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2z-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{I(n)} \right) \right) \xrightarrow{d} U^{2z-1}$$

gleichmäßig auf jeder beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \frac{1}{2}\mathbb{Z}^-$, mit $\mathcal{L}(U) = \text{unif}[0, 1]$. Aus (3.2) folgt, dass, falls $M_n(z)$ schwach gegen einen Prozess $M_\infty(z)$ konvergiert, der Grenzprozess folgende Fixpunktgleichung erfüllen muss:

$$M_\infty(z) \stackrel{d}{=} zU^{2z-1}M_\infty^{(0)}(z) + z(1-U)^{2z-1}M_\infty^{(1)}(z) \quad (3.3)$$

mit unabhängigen Kopien $M_\infty^{(0)}(z), M_\infty^{(1)}(z)$ von $M_\infty(z)$, unabhängig von U .

Das ist nicht anderes als (2.29) auf Verteilungsebene, ein Resultat, das wir bereits kannten. In diesem Kapitel wird nun geklärt, dass $M_n(z)$ tatsächlich gegen die unter gewissen Nebenbedingungen eindeutige Lösung von Gleichung (3.3) konvergiert. Dazu wird das Problem zunächst allgemein betrachtet und die Kontraktionsmethode für Banachräume formuliert.

Im allgemeinen steht man vor folgender Rekursion:

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^K A_r^{(n)} \left(X_{I_r^{(n)}}^{(r)} \right) + b^{(n)}. \quad (3.4)$$

Dabei sind $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungen in einem Banachraum B , $A_r^{(n)}$ zufällige lineare Operatoren auf B , b_n ebenfalls eine B -wertige Zufallsvariable. Zudem gilt:

- K ist die Anzahl Teilprobleme, in unserem Fall ist stets $K = 2$,
- $X_n^{(r)} \stackrel{d}{=} X_n$,
- $I^{(n)} = (I_1^{(n)}, \dots, I_K^{(n)})$ sind die Größen der Teilprobleme,
- $(X_n^{(1)}), \dots, (X_n^{(K)}), (A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)}, I^{(n)})$ unabhängig.

Wir fassen X_n bereits als geeignet normiert auf. In der Regel muss die ursprünglich betrachtete Zufallsvariable normiert werden, da sie für wachsendes n unkontrollierbar groß wird. In unserem Fall, siehe (3.1) und (3.2), wurde $W_n(z)$ mit dessen Erwartung normiert. Die Normierungsgrößen müssen dabei separat gewonnen werden und von Fall zu Fall mehr oder weniger genau bekannt sein, dazu später mehr.

Konvergieren nun die Koeffizienten, d.h. existieren A_1^*, \dots, A_K^*, b^* mit $A_r^{(n)} \rightarrow A_r^*$ für alle $1 \leq r \leq K$, sowie $b^{(n)} \rightarrow b^*$, so hofft man auf passende Konvergenz von X_n gegen eine Zufallsvariable X . Folgende Fixpunktgleichung muss X dann erfüllen:

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^K A_r^*(X^{(r)}) + b^*. \quad (3.5)$$

Eine Zufallsvariable X mit Verteilung μ löst diese Gleichung offensichtlich genau dann, wenn μ Fixpunkt folgender Abbildung ist:

$$\begin{aligned} T & : \mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(B) \\ \mu & \mapsto \mathcal{L} \left(\sum_{r=1}^K A_r^*(Z^{(r)}) + b^* \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*), Z^{(1)}, \dots, Z^{(K)}$ unabhängig und $\mathcal{L}(Z^{(r)}) = \mu$.

Dabei bezeichne:

$$\mathcal{M}(B) := \text{Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf } B.$$

Die Vorgehensweise ist nun wie folgt. Wir statuen den Raum $\mathcal{M}(B)$, bzw. einen geeigneten Teilraum dessen, mit einer vollständigen Metrik, bezüglich der T eine Kontraktion ist, aus. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert somit die eindeutige Lösbarkeit der Fixpunktgleichung in dem Teilraum. Damit ist das erste Hauptproblem beseitigt. Schließlich zeigt man noch die Konvergenz $X_n \rightarrow X$ und unser Problem ist gelöst.

Im nächsten Kapitel behandeln wir zunächst die passenden Räume, die wir verwenden und die für unsere Zwecke relevante Metrik.

3.2 Funktionenräume und Zolotarev-Metrik

In diesem Kapitel stellen wir die analytischen Hilfsmittel vor und verzichten dabei auf Beweise, die teilweise technisch sind und den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden.

Für analytische Funktionen in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ verwenden wir folgende topologische Vektorräume:

- $\mathcal{H}(D)$: Raum der analytischen Funktionen auf D versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen. $\mathcal{H}(D)$ lässt sich mit einer vollständigen Metrik versehen und ist separabel.
- $\mathcal{B}(D)$: Raum der quadratintegrablen analytischen Funktionen auf D , ausgestattet mit der Norm $\|f\|_{\mathcal{B}(D)} = (\int_D |f(z)|^2 d\lambda^2(z))^{1/2}$, dabei ist λ^2 das zweidimensionale Lebesgue-Maß. $\mathcal{B}(D)$ ist ein Hilbertraum, vergleiche etwa [Kra82].

$\mathcal{H}(D)$ ist der natürliche Raum für analytische Funktionen, $\mathcal{B}(D)$ hat allerdings den Vorteil ein Hilbertraum zu sein, was sich für unsere Zwecke als entscheidend herausstellen wird.

Die Einbettung $\mathcal{B}(D) \rightarrow \mathcal{H}(D)$ ist stetig [Kra82, Lemma 1.2.1], somit impliziert Verteilungskonvergenz in $\mathcal{B}(D)$ Konvergenz in $\mathcal{H}(D)$. Ist $D' \subseteq D$ ein Teilgebiet, so sind die Einschränkungabbildungen $\mathcal{H}(D) \rightarrow \mathcal{H}(D')$ und $\mathcal{B}(D) \rightarrow \mathcal{B}(D')$ stetig, und somit impliziert Verteilungskonvergenz in $\mathcal{H}(D)$ Konvergenz in $\mathcal{H}(D')$, analog für $\mathcal{B}(D)$. Folgender Satz ist eine Art Umkehrung dessen und erlaubt es in Beweisen lokal vorzugehen. Der Beweis findet sich in [DJN06, Theorem 4.1].

Satz 3.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(W_n)_{n \geq 0}$ eine Folge zufälliger analytischer Funktionen in D , so dass für alle $x \in D$ ein offenes Teilgebiet D_x mit $x \in D_x \subseteq D$ und eine zufällige Funktion Z_x in D_x mit $W_n \xrightarrow{d} Z_x$ in $\mathcal{H}(D_x)$ für $n \rightarrow \infty$ existiert. Dann existiert eine zufällige analytische Funktion Z in D mit $W_n \xrightarrow{d} Z$ in $\mathcal{H}(D)$ für $n \rightarrow \infty$ und $Z|_{D_x} \stackrel{d}{=} Z_x$ für alle x .*

Seien im folgenden B ein Banachraum und X, Y zwei B -wertige Zufallsvariablen.

Definition 3.1 *Seien B, B_1 Banachräume, $U \subseteq B$ offen, $f : U \rightarrow B_1$. f heißt (Fréchet) differenzierbar in $x \in U$, falls ein linearer Operator $Df(x) : B \rightarrow B_1$ existiert mit*

$$\|f(x+y) - f(x) - Df(x)y\|_{B_1} = o(\|y\|_B)$$

f heißt differenzierbar in U , falls f in allen $x \in U$ differenzierbar ist.

Diese Definition ist die logische Erweiterung der Differentiation im \mathbb{R}^d . Die Fréchet Ableitung ist eindeutig und stimmt auf \mathbb{R}^d - ausgestattet mit der euklidischen Metrik - mit der gewöhnlichen Ableitung überein, ebenso gelten bekannte Ableitungsregeln, siehe etwa [Car71]. Man beachte: Df ist eine Funktion $U \rightarrow L(B, B_1)$ und da $L(B, B_1)$ erneut ein Banachraum ist, lässt sich das Ableitungsprinzip iterieren. Dabei ist $D^m f$, falls es existiert, eine Abbildung von U in den Raum der multilinearen Abbildungen $B^m \rightarrow B_1$.

Mit diesen Überlegungen lässt sich nun problemlos die Zolotarev-Metrik auf Banachräumen definieren, vergleiche [Zol76], Kapitel 3.

Definition 3.2 Sei B ein Banachraum und für $s \geq 0$ mit $s = m + \alpha$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in (0, 1]$ sei

$$\mathcal{F}_s = \{f \in C^m(B, \mathbb{R}) : \|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha\}$$

die Menge der m -fach stetig-differenzierbaren Funktionen, deren m -te Ableitung hölderstetig zum Parameter α mit Hölderkonstante 1 ist.

Dann ist der Zolotarev-Abstand für B -wertige Zufallsvariablen X, Y wie folgt definiert:

$$\zeta_s(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \sup_{f \in \mathcal{F}_s} |\mathbb{E}[f(X) - f(Y)]|.$$

Man beachte, dass der Abstand zwischen Verteilungen gemessen wird. Für Zufallsvariablen spielen hier nur die Marginalverteilungen eine Rolle, die gemeinsame Verteilung ist unerheblich.

Zur Notation setzen wir deshalb $\zeta_s(X, Y) := \zeta_s(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y))$.

Der Zolotarev-Abstand zwischen zwei Zufallsvariablen kann unendlich sein. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall $s \leq 2$, der für unsere Zwecke ausreichend ist. Es ist

$$\mathbb{E}X = \int X dP$$

als B -wertiges Bochner-Integral aufzufassen.

Damit definieren wir für $1 < s \leq 2$ zu gegebenem $z \in B$ durch

$$\mathcal{M}_{s,z}(B) := \{\mathcal{L}(X) : \mathbb{E}\|X\|^s < \infty, \mathbb{E}X = z\}$$

die Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf B mit endlichem absoluten s -ten Moment und gleichem Erwartungswert z . ζ_s ist nach folgendem Lemma endlich auf $\mathcal{M}_{s,z}(B)$ und dort offensichtlich eine Metrik.

Lemma 3.1 Seien $X, Y \in \mathcal{M}_{s,z}(B)$, dann gilt:

$$\zeta_s(X, Y) \leq \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(1 + s)} (\mathbb{E}\|X\|^s + \mathbb{E}\|Y\|^s).$$

Beweis: Der Beweis verwendet die Taylorentwicklung der Funktionen $f \in \mathcal{F}_s$ und findet sich in [Zol76, Lemma 2]. \square

In allgemeinen Banachräumen ist nicht bekannt, ob ζ_s eine vollständige Metrik auf $\mathcal{M}_{s,z}(B)$ ist und ob Konvergenz in der ζ_s Metrik schwache Konvergenz impliziert. Für $0 < s \leq 1$ impliziert ζ_s -Konvergenz schwache Konvergenz. Deshalb beschränken wir uns im folgenden, für uns entscheidenden Satz auf separable Hilberträume. Sein Beweis findet sich ebenfalls in [DJN06, Theorem 5.1].

Satz 3.2 *Sei H ein separabler Hilbertraum und $0 < s \leq 2$, dann ist ζ_s eine vollständige Metrik auf $\mathcal{M}_{s,z}(H)$. Weiter, seien X_n, X H -wertige Zufallsvariablen mit Verteilungen in $\mathcal{M}_{s,z}(H)$ und $\zeta_s(X_n, X) \rightarrow 0$, dann folgt $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Dieser Satz besagt, dass falls in (3.5) B ein separabler Hilbertraum und T eine ζ_s -Kontraktion auf einem unter T invarianten Teilraum von $\mathcal{M}(B)$ ist, T nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt in diesem Teilraum besitzt. Somit ist die von uns betrachtete Fixpunktgleichung eindeutig lösbar. Zudem reicht es, Konvergenz in ζ_s zu zeigen.

3.3 Kontraktionsmethode in Hilberträumen

Nun erweitern wir die für \mathbb{R}^d bereits bekannte Kontraktionsmethode auf separable Hilberträume. Dazu sei im folgenden H ein separabler Hilbertraum. Die von uns betrachteten Grenzverteilungen werden durch die Fixpunkte folgender Abbildung charakterisiert:

$$\begin{aligned} T & : M(H) \rightarrow M(H) \\ \mathcal{L}(Z) & \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{r=1}^K A_r^*(Z^{(r)}) + b^*\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

dabei sind A_1^*, \dots, A_K^* zufällige lineare Operatoren in H , b^* eine H -wertige Zufallsvariable und $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*), Z^{(1)}, \dots, Z^{(K)}$ unabhängig mit $\mathcal{L}(Z^{(r)}) = \mathcal{L}(Z)$. Dies wurde bereits in (3.6) geschildert.

Für Operatoren verwenden wir die gewöhnliche Operatornorm

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

s -Integrabilität von A heißt nichts anderes als $\mathbb{E}\|A\|_{\text{op}}^s < \infty$ und zur weiteren Vereinfachung setzen wir noch $\mathcal{M}_s := \mathcal{M}_s(H)$ sowie $\mathcal{M}_{s,0} := \mathcal{M}_{s,0}(H)$.

Zunächst stellt man fest, dass diese Teilräume T -invariant sind.

Lemma 3.2 *Seien $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)$ wie in (3.7) und s -integrierbar für ein $0 < s \leq 2$. Für $0 < s \leq 1$ gilt dann $T(M_s) \subseteq M_s$ und für $1 < s \leq 2$ und $\mathbb{E}b^* = 0$ gilt $T(M_{s,0}) \subseteq M_{s,0}$.*

Beweis: Die Existenz der Momente von Ordnung s von $T(\mathcal{L}(Z))$ folgt aus der gegebenen Unabhängigkeit von A_r^* und $Z^{(r)}$. Für $1 < s \leq 2$ folgt $\mathbb{E}T(\mathcal{L}(Z)) = 0$ aus $\mathbb{E}b^* = 0$.

Nachfolgendes Lemma gibt die Kontraktionsbedingung für T an. Der Beweis läuft analog zu Lemma 3.1 in [NR04].

Lemma 3.3 *Seien $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*)$ wie in (3.7) und s -integrierbar für ein $0 < s \leq 2$ sowie*

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^K \|A_r\|_{\text{op}}^s < 1. \quad (3.8)$$

Für $0 < s \leq 1$ ist die Einschränkung von T auf \mathcal{M}_s eine Kontraktion, und für $1 < s \leq 2$ und $\mathbb{E}b^ = 0$ ist die Einschränkung von T auf $M_{s,0}$ eine Kontraktion.*

Nach diesem Lemma haben die Einschränkungen von T auf die jeweiligen Räume eindeutige Fixpunkte.

Kommen wir nun zur Konvergenz der betrachteten Zufallsvariablen. Dazu sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Folge H -wertiger Zufallsvariablen, die folgende Rekursion erfüllt:

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^K A_r^{(n)} \left(X_{I_r^{(n)}}^{(r)} \right) + b^{(n)}, \quad (3.9)$$

dabei sind $A_r^{(n)}$ zufällige, lineare Operatoren in H , $b^{(n)}$ eine H -wertige Zufallsvariable, $I^{(n)} = (I_1^{(n)}, \dots, I_K^{(n)})$ ein zufälliger Vektor ganzer Zahlen mit $I_r^{(n)} \in \{0, \dots, n\}$, sowie $(X_n^{(1)}), \dots, (X_n^{(K)}), (A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)}, I^{(n)})$ unabhängig mit $\mathcal{L}(X_n^{(r)}) = \mathcal{L}(X_n)$.

Dies ist (3.4) mit $B = H$. Folgender Satz gibt die technischen Voraussetzungen für die Konvergenz von $(X_n)_{n \geq 0}$ an.

Satz 3.3 *Seien (X_n) wie in (3.9) und alle auftretenden Größen s -integrierbar für ein $0 < s \leq 2$. Für $1 < s \leq 2$ sei zudem $\mathbb{E}X_n = 0$ für alle $n \geq 0$. Für geeignet gewählte $(A_1^*, \dots, A_k^*, b^*)$ gelte*

$$\mathbb{E} \|A_r^{(n)} - A_r^*\|_{\text{op}}^s \rightarrow 0, \quad \mathbb{E} \|b^{(n)} - b^*\|^s \rightarrow 0, \quad (3.10)$$

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^K \|A_r\|_{\text{op}}^s < 1, \quad (3.11)$$

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{I_r^{(n)} \leq \ell\}} \|A_r^{(n)}\|_{\text{op}}^s] \rightarrow 0, \quad (3.12)$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $r = 1, \dots, K$. Dann gilt

$$\zeta_s(X_n, X) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

wobei $\mathcal{L}(X)$ der eindeutige Fixpunkt von T in (3.7) in \mathcal{M}_s für $0 < s \leq 1$ bzw. in $\mathcal{M}_{s,0}$ für $1 < s \leq 2$ ist.

Beweis: Auch dieser Satz beweist sich ähnlich zu Theorem 4.1 in [NR04]. \square

An das System werden demnach drei Forderungen zur Konvergenz gestellt, die allesamt nicht überraschend sind. (3.10) beschreibt die Konvergenz der Koeffizienten und des absoluten Gliedes, ohne die an Konvergenz gar nicht zu denken wäre. (3.11) ist die Kontraktionsbedingung für T . Diese beiden Forderungen sind selbstverständlich und schränken uns nicht näher ein. Natürlich muss auch $I_r^{(n)} \rightarrow \infty$ für alle $r = 1, \dots, K$ gelten und (3.12) gibt an, in welchem Sinne diese Konvergenz stattzufinden hat. Ist $A_1^{(n)}$ fast sicher beschränkt, so ist stochastische Konvergenz ausreichend. Diese Forderung sorgt in der Regel für keine Schwierigkeiten, kritisch ist zumeist die Kontraktionsbedingung (3.11), wie wir auch in unserem Fall sehen werden.

3.4 Konvergenz des Profil-Polynoms

Wir wenden nun die Resultate über allgemeine Hilberträume aus dem letzten Abschnitt auf unseren Fall an. Dazu verwenden wir als Hilbertraum den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Raum $\mathcal{B}(D)$ für ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ und müssen die Ergebnisse für Zufallsvariablen mit Verteilungen im Raum der analytischen Funktionen umformulieren.

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Folge zufälliger analytischer Funktionen auf dem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$X_n \stackrel{d}{=} \sum_{r=1}^K A_r^{(n)} \cdot X_{I_r^{(n)}}^{(r)} + b^{(n)}, \quad (3.13)$$

dabei sind $A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}$ und $b^{(n)}$ zufällige analytische Funktionen in D , $I^{(n)} = (I_1^{(n)}, \dots, I_K^{(n)})$ ein zufälliger Vektor ganzer Zahlen mit $I_r^{(n)} \in \{0, \dots, n\}$, sowie $(X_n^{(1)}, \dots, X_n^{(K)}), (A_1^{(n)}, \dots, A_K^{(n)}, b^{(n)}, I^{(n)})$ unabhängig mit $\mathcal{L}(X_n^{(r)}) = \mathcal{L}(X_n)$.

Der Punkt in (3.13) bedeutet eine komplexe Multiplikation. Damit operiert ein Operator $A(z)$ durch punktweise Multiplikation, $(Af)(z) := A(z) \cdot f(z)$ auf $\mathcal{B}(D)$

und die Norm wird zu

$$\|A\|_{\text{op}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{B}(D)}=1} \|Af\|_{\mathcal{B}(D)}.$$

Offensichtlich ist (3.13) somit ein Spezialfall der Rekurrenz (3.9).

Die Abbildung T lautet nun für ein Gebiet \tilde{D} :

$$\begin{aligned} T & : \mathcal{M}(\mathcal{H}(\tilde{D})) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{H}(\tilde{D})) \\ \mathcal{L}(Z) & \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{r=1}^K A_r^* Z^{(r)} + b^*\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

dabei sind A_1^*, \dots, A_K^* und b^* zufällige analytische Funktionen in $\mathcal{H}(\tilde{D})$, sowie $(A_1^*, \dots, A_K^*, b^*), Z^{(1)}, \dots, Z^{(K)}$ unabhängig mit $\mathcal{L}(Z^{(r)}) = \mathcal{L}(Z)$.

In unserem speziellen Fall des Profil-Polynoms sind, wie man bereits an (3.3) erahnen kann, $A_1^*(z) = zU^{2z-1}$ und $A_2^*(z) = z(1-U)^{2z-1}$ und die Kontraktionsbedingung (3.8) lautet nun:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{\|f\|=1} \|A_1^* f\|^s + \sup_{\|f\|=1} \|A_2^* f\|^s \right] < 1,$$

und dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn

$$\mathbb{E} \sup_{\|f\|=1} \|A_1^* f\|^s < \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

gilt. Unser Ziel ist Konvergenz in einem komplexen Gebiet D , welches das reelle Intervall (z_c^-, z_c^+) enthält. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{\|f\|=1} \|A_1^* f\| &= \left(\sup_{\|f\|=1} \left(\int_D |A^2(z) f^2(z)| d\lambda^2(z) \right)^{1/2} \right)^s \\ &\leq \sup_{z \in D} |A(z)|^s. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Falls $(2x-1)s > -1$ für $x \in \mathbb{R}^+$, ist $\mathbb{E}|A_1^*(x)|^s = \frac{x^s}{(2x-1)s+1} =: g_x(s)$ endlich. Insbesondere gilt $g_x(1) = \frac{1}{2}$ für $x \in \mathbb{R}^+$. Somit existiert für beliebiges $s \in (1, 2]$ und jedes $x \in (z_c^-, z_c^+)$ ein $1 < s(x) < s$ mit $g_x(s(x)) < \frac{1}{2}$, falls $g'_x(1) < 0$. Dann ist die Kontraktionsbedingung lokal für jedes x im angestrebten reellen Intervall und aus Stetigkeitsgründen auch in einer komplexen Umgebung dessen erfüllt. Es gilt:

$$g'_x(1) < 0 \Leftrightarrow \eta_2(2x) = 2x \log x + 2x - 1 < 0, \quad (3.17)$$

dabei ist $\eta_2(x)$ in (1.5) definiert. Wie wir bereits im Abschnitt 1.2 gesehen hatten, ist (3.17) genau im Intervall (z_c^-, z_c^+) erfüllt.

Die Kontraktionsbedingung (3.15) ist allerdings für kein $s \in (1, 2]$ erfüllbar. Es gilt $g'_{z_c^-}(1) = 0$ und $g''_{z_c^-}(1) > 0$, $g_{z_c^-}(s)$ ist monoton wachsend in $\left(1, \frac{1}{1-\alpha_-}\right)$ und ∞ in $\left[\frac{1}{1-\alpha_-}, 2\right]$. Es folgt also $g_{z_c^-}(s) > 1/2$ für $s \in (1, 2]$. Somit existiert aus Stetigkeitsgründen für jedes $s \in (1, 2]$ ein $x \in (z_c^-, z_c^+)$ mit $g_x(s) > 1/2$ und die Kontraktionsbedingung lässt sich nicht erfüllen.

Wir verwenden Satz 3.1 um die lokale Konvergenz des Prozesses, die aus der lokalen Kontraktionseigenschaft folgt, auf ein geeignetes komplexes Gebiet zu übertragen. Dabei sagen wir noch, dass eine zufällige Funktion $f(z)$ lokal beschränkt in L^s ist, falls die Funktion $z \mapsto \mathbb{E}|f(z)|^s$ lokal beschränkt ist.

Satz 3.4 *Seien $0 < s \leq 2$ und (X_n) wie in (3.13) mit zufälligen, von z abhängigen, lokal in L^s beschränkten, analytischen Funktionen $X_n, A_r^{(n)}, b^{(n)}$ in D . Für $1 < s \leq 2$ sei zudem $\mathbb{E}X_n(z) = 0$ für alle $n \geq 0$ und $z \in D$. Weiter seien A_1^*, \dots, A_K^* und b^* geeignet gewählte zufällige analytische Funktionen in D und $\Delta \subseteq D$ eine zusammenhängende Teilmenge, so dass für alle $x \in \Delta$ eine Umgebung $U_x \subseteq D$ von x und eine Zahl $s(x) \leq s$ existieren mit*

$$\sup_{z \in U_x} \mathbb{E} |A_r^{(n)}(z) - A_r^*(z)|^{s(x)} \rightarrow 0, \quad \sup_{z \in U_x} \mathbb{E} |b^{(n)}(z) - b^*(z)|^{s(x)} \rightarrow 0, \quad (3.18)$$

$$\sup_{z \in U_x} \mathbb{E} |A_r^*(z)|^{s(x)} < \infty, \quad (3.19)$$

$$\mathbb{E} \sum_{r=1}^K |A_r^*(x)|^{s(x)} < 1, \quad (3.20)$$

$$\sup_{z \in U_x} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{I_r^{(n)} \leq \ell\}} |A_r^{(n)}(z)|^{s(x)} \right] \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $r = 1, \dots, K$. Dann existiert ein Gebiet $\tilde{D} \subseteq D$ mit $\Delta \subseteq \tilde{D}$ und eine zufällige analytische Funktion X in \tilde{D} , so dass, für $n \rightarrow \infty$ gilt:

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{in} \quad \mathcal{H}(\tilde{D})$$

Dabei ist $\mathcal{L}(X)$ ein Fixpunkt von T in (3.14), eindeutig unter der Bedingung, dass für alle $x \in \Delta$ ein \tilde{U}_x existiert, in dem $X(z)$ gleichmäßig in $L^{s(x)}$ beschränkt ist. Für $s(x) > 1$ gilt zudem $\mathbb{E}X(z) = 0$ für alle $z \in \tilde{U}_x$.

Beweis: (Idee) Man zeigt die Konvergenz gegen den unter Nebenbedingungen eindeutigen Fixpunkt von Gleichung (3.14) mit Satz 3.3. Aus der Stetigkeit der Einbettung von $\mathcal{H}(U_x)$ in $\mathcal{B}(U_x)$ folgt die Konvergenz in $\mathcal{H}(U_x)$ und nach Satz

3.1 lässt sich die Konvergenz auf $\tilde{D} = \bigcup_{x \in \Delta} U_\varepsilon(x)$ fortsetzen. Der vollständige Beweis findet sich unter [DJN06, Theorem 7.1] \square .

Man beachte, dass die Konvergenz lediglich auf einem Teilgebiet von D gezeigt wird. Jedoch enthält dieses Teilgebiet die Menge Δ , in dem man Konvergenz erzielen möchte. Genau dies wenden wir nun auf unser Problem an, die Menge Δ gilt es dabei, als reelles Intervall größtmöglich zu wählen.

Mit Hilfe des obigen Satzes können wir nun den Hauptsatz über die Konvergenz des normierten Profil-Polynoms $M_n(z)$ in einem geeigneten Intervall beweisen.

Satz 3.5 *Es existiert ein komplexes Gebiet B mit $(z_c^-, z_c^+) \subseteq B$ und ein stochastischer Prozess $(Y(z))_{z \in B}$, der die Fixpunktgleichung (3.3) erfüllt und $\mathbb{E}Y(z) = 1$, so dass in $\mathcal{H}(B)$ gilt:*

$$M_n(z) \xrightarrow{d} Y(z).$$

Man beachte hierbei, dass Konvergenz in $\mathcal{H}(B)$ gleichmäßige Konvergenz in jedem Kompaktum von B bedeutet. Dieser Satz ist demnach das Analogon von Satz 2.5 auf Verteilungsebene.

Beweis: Zunächst stellt man fest, dass die Folge $(M_n(z))_{n \geq 0}$ die Rekursion (3.3) erfüllt. Mit

$$X_n(z) := M_n(z) - 1$$

gilt $\mathbb{E}X_n(z) = 0$, und (3.3) wird zu

$$X_n(z) \stackrel{d}{=} A_1^{(n)}(z)X_{I(n)}^{(0)}(z) + A_2^{(n)}(z)X_{n-1-I(n)}^{(1)}(z) + b^{(n)}(z)$$

mit $A_1^{(n)}(z) = z \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)}$, $A_2^{(n)}(z) = z \frac{C_{n-1-I(n)}(z)}{C_n(z)}$ und $b^{(n)}(z) = z \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} + z \frac{C_{n-1-I(n)}(z)}{C_n(z)}$ und Bedingungen wie in (3.13).

Wir zeigen, dass für beliebiges $1 < s \leq 2$ die Bedingungen in Satz 3.4 erfüllt werden mit $D = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$ und

$$A_1^*(z) = zU^{2z-1}, \quad A_2^*(z) = z(1-U)^{2z-1}, \quad b^*(z) = zU^{2z-1} + z(1-U)^{2z-1} - 1,$$

sowie $\Delta = (z_c^-, z_c^+)$.

Dann impliziert Satz 3.4 $X_n \xrightarrow{d} X$ in $\mathcal{H}(\tilde{D})$ mit $\mathbb{E}X(z) = 0$. Dabei ist \tilde{D} eine komplexes Gebiet mit $\Delta \in \tilde{D}$ und $\mathcal{L}(X)$ der Fixpunkt von T in (3.14) mit der Integrabilitätsbedingung aus Satz 3.4.

Somit folgt unmittelbar in $\mathcal{H}(\tilde{D})$

$$M_n(z) \xrightarrow{d} X(z) + 1 =: Y(z),$$

und $Y(z)$ erfüllt die Fixpunktgleichung (3.3), und der Satz ist bewiesen. Es bleibt also die Bedingungen des Satzes 3.4 zu prüfen.

Zunächst stellt man fest, dass $z \mapsto \mathbb{E}|A_i^{(n)}(z)|^s$ für $i = 1, 2$ und $z \mapsto \mathbb{E}|b^{(n)}(z)|^s$ stetig in z sind. Dies sieht man leicht mit

$$\mathbb{E}C_{I(n)}(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k(z) \quad (3.22)$$

und der Stetigkeit von $C_n(z)$ ein. Wir beginnen mit der L_s -Beschränktheit von $X_n(z)$, die offensichtlich äquivalent zur L_s -Beschränktheit von $M_n(z)$ ist. $C_n(z)$ ist stetig und damit in L_s beschränkt. Es reicht demnach, die L_s -Beschränktheit von $W_n(z)$ zu zeigen. Wir gehen dabei wie in Satz 2.3 vor. Für $|z| \leq 1$ gilt

$$\mathbb{E}|W_n(z)|^s \leq \left(\sum_{k \geq 0} U_k(n) |z|^k \right)^s \leq (n+1)^s$$

und für $|z| > 1$ ist $\mathbb{E}|W_n(z)|^s$ monoton wachsend in s . Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|W_n(z)|^2 &\leq \sum_{k, \ell \geq 0} U_k(n) U_\ell(n) |z|^{k+\ell} \\ &\leq (n+1)^2 |z|^{2n+4} \end{aligned}$$

und die L_s -Beschränktheit folgt für beliebiges $s \in (1, 2]$.

Die L_s -Beschränktheit von $A_1^{(n)}(z)$, $A_2^{(n)}(z)$ und $b^{(n)}(z)$ folgt aus obiger Stetigkeitsbemerkung. Im folgenden liefern wir die Beweise der gewünschten Eigenschaften jeweils für $A_1^{(n)}(z)$ bzw. $A_1^*(z)$, die anderen beiden Größen behandelt man dann stets analog.

Es bleibt die Bedingungen (3.18)-(3.21) zu prüfen.

Die lokale Kontraktionsbedingung (3.20) hatten wir bereits zu Beginn des Kapitels eingesehen. Die Umgebung U_x sei so gewählt, dass $\Re(z) \in \Delta$ für $z \in U_x$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U_x} \mathbb{E}|A_1^*(z)|^{s(x)} &\leq \sup_{z \in U_x} |z|^{s(x)} \sup_{z \in U_x} \mathbb{E} |U^{(2\Re(z)-1)s(x)}| \\ &\leq \sup_{z \in U_x} |z|^{s(x)} \frac{1}{(2 \inf_{z \in U_x} \Re(z) - 1)s(x) + 1} < \infty \quad (3.23) \end{aligned}$$

für $s(x) < \frac{1}{1-\alpha_-}$. Für beliebiges $s \in (1, 2]$ lässt sich $s(x) \leq s$ passend wählen. Dies beweist (3.19) für $A_1^*(z)$.

(3.18) und (3.21) sind für $x > 1/2$ relativ leicht zu zeigen. In [DJN06] ist nur dieser Fall ausgeführt, wir interessieren uns allerdings für das gesamte Intervall Δ , in dem die auftretenden Zufallsvariablen nicht mehr beschränkt sind. Zunächst widmen wir uns dem Monotonieverhalten von $|C_n(z)|$. Es gilt: $C_{n+1}(z) = \frac{n+2z}{n+1} C_n(z)$ und somit

$$|C_{n+1}(z)| \geq |C_n(z)| \Leftrightarrow |n+2z| \geq n+1.$$

$|C_n(z)|$ ist demnach monoton wachsend, falls $\Re(z) \geq 1/2$ und fallend, falls $z < 1/2$ reell ist. Gilt $\Re(z) < 1/2$, so existiert ein von z abhängiges n_0 , so dass $|C_n(z)|$ monoton fallend ab n_0 ist.

Wir definieren deshalb $U_x^+ := U_x \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 1/2\}$ und $U_x^- := U_x \setminus U_x^+$ und zeigen die jeweiligen Eigenschaften für beide Teilmengen separat.

Aus der Integraldarstellung der Gammafunktion folgt $|\Gamma(z)| \leq |\Gamma(\Re(z))|$ und wegen der Monotonie und Lemma 2.1 folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} \right| &\leq \left| \frac{\Gamma(2\Re(z) + I(n))\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2z+n)} \right| \\ &\leq \left| \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(2z+n)} \right| \\ &\leq n^{1-2\Re(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

gleichmäßig in jeder beschränkten Menge mit $z_c^- < \Re(z) < 1/2$.

Für U_x^+ folgt (3.21) aus $|A_1^*(z)|^s \leq |z|^s$, sowie der uniformen Verteilung von $I(n)$, da für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(I(n) < \ell) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Für U_x^- ist dies etwas komplizierter zu zeigen. Wir erinnern an die bereits getroffene Wahl $s(x) < \frac{1}{1-\alpha_-}$. Man rechnet sofort nach, dass gilt

$$\sup_{z \in U_x^-} (1 - 2\Re(z))s(x) - 1 = (1 - 2 \inf_{z \in U_x^-} \Re(z))s(x) - 1 < 0. \quad (3.25)$$

Dann folgt noch mit der Asymptotik von $C_n(z)$ sowie (3.24)

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U_x^-} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{I(n) \leq \ell\}} \left| A_1^{(n)}(z) \right|^{s(x)} \right] &\leq \sup_{z \in U_x^-} |z|^{s(x)} \sup_{z \in U_x^-} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{I(n) \leq \ell\}} \left| \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} \right|^{s(x)} \right] \\ &\leq O(1) \mathbb{P}(I(n) \leq \ell) \sup_{z \in U_x^-} n^{(1-2\Re(z))s(x)} \\ &= O \left(\sup_{z \in U_x^-} n^{(1-2\Re(z))s(x)-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

wegen der Gleichmäßigkeit des Fehlerterms und (3.25). Dies zeigt die Behauptung (3.21) für U_x^- .

Für (3.18) koppeln wir die Zufallsvariablen durch $I(n) = \lfloor nU \rfloor$ und können die L_s -Norm verwenden, da offensichtlich gilt:

$$\sup_z \mathbb{E} |X_n(z)|^s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \sup_z (\mathbb{E} |X_n(z)|^s)^{\frac{1}{s}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für eine Folge komplexwertiger, integrierbarer Zufallsvariablen. Wir zerlegen nach der Größe von $I(n)$, da die Asymptotik von $C_n(z)$ für $I(n) = 0$ nicht verwendet

werden kann. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)=0\}} \left(\frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} - U^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} &\leq \sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)=0\}} \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} \right\|_{s(x)} \\ &\quad + \sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)=0\}} U^{2z-1} \right\|_{s(x)}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass beide Summanden gegen 0 konvergieren. Für U_x^+ ist dies wegen der Beschränktheit der Zufallsvariablen klar. Im anderen Fall verwenden wir $C_0(z) = 1$ und die Asymptotik von $C_n(z)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)=0\}} \frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} \right\|_{s(x)} &= (\mathbb{P}(I(n) = 0))^{\frac{1}{s(x)}} C_n^{-1}(z) \\ &\leq \Gamma(2z) (1 + O(n^{-1})) n^{((1-2z)s(x)-1)\frac{1}{s(x)}} \end{aligned}$$

gleichmäßig in jeder beschränkten Umgebung von x . Wegen (3.25) zeigt dies die Behauptung für den ersten Summanden. Den zweiten Summanden errechnen wir exakt. Man beachte hierbei $\{I(n) = 0\} = \{U < 1/n\}$.

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)=0\}} U^{2z-1} \right\|_{s(x)} &= \int_0^{1/n} u^{(2z-1)s(x)} du \\ &= n^{(1-2z)s(x)-1}. \end{aligned}$$

Erneut mit (3.25) folgt die Behauptung. Nun widmen wir uns dem schwierigeren Fall $I(n) > 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} - U^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} \\ &\leq \sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} - \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} \\ &\quad + \sup_{z \in U_x} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2z-1} - U^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wir verwenden die Asymptotik von $C_n(z)$ und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{C_{I(n)}(z)}{C_n(z)} - \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} \\ &= \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2\Re(z)-1} O\left(\frac{1}{I(n)} \right) \right\|_{s(x)} \\ &\leq \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2\Re(z)-1} \right\|_{2s(x)} \times \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} O\left(\frac{1}{I(n)} \right) \right\|_{2s(x)}. \end{aligned}$$

Wir setzen $H_n(\alpha) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^\alpha}$. $H_n(\alpha)$ ist monoton fallend in α . Es gilt $H_n(1) = H_n$, und für $n \rightarrow \infty$

$$H_n(\alpha) = \begin{cases} n^{1-\alpha} + O(n^{-\alpha}) & : \alpha < 1, \\ O(\log n) & : \alpha = 1, \\ O(1) & : \alpha > 1, \end{cases}$$

Bedingen auf $I(n)$ liefert:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} O\left(\frac{1}{I(n)}\right) \right\|_{2s(x)} &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} C i^{-2s} \right)^{\frac{1}{2s(x)}} \\ &\leq \left(\frac{C}{n} \right)^{\frac{1}{2s(x)}} H_n(2s(x))^{\frac{1}{2s(x)}} \\ &= O\left(n^{-\frac{1}{2s(x)}}\right). \end{aligned}$$

Analoge Rechnung liefert im anderen Fall:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\frac{I(n)}{n}\right)^{2\Re(z)-1} \right\|_{2s(x)} &= \left(2n^{(1-2\Re(z))2s(x)-1} H_n(1-2\Re(z))_{s(x)}\right)^{\frac{1}{2s(x)}} \\ &= O(1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

gleichmäßig in z . Somit verschwindet der erste Summand in (3.26) für $n \rightarrow \infty$. Um uns im zweiten Summanden in (3.26) auf reelle Exponenten beschränken zu können, bemerken wir, dass für $z = a + bi$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x^a \geq y^a$ gilt:

$$|x^z - y^z| \leq |x^a - y^a| + |abx^a \log(x/y)|,$$

wie man leicht elementargeometrisch einsehen kann. Wir wenden diese Identität auf (3.26) an und erhalten für U_x^+

$$\begin{aligned} \sup_{z \in U_x^+} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\left(\frac{I(n)}{n}\right)^{2z-1} - U^{2z-1} \right) \right\|_{s(x)} &\leq \\ \sup_{z \in U_x^+} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} \left(\left(\frac{I(n)}{n}\right)^{2\Re(z)-1} - U^{2\Re(z)-1} \right) \right\|_{s(x)} &+ \\ + \sup_{z \in U_x^+} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n)>0\}} (2\Re(z) - 1) 2\Im(z) U^{2\Re(z)-1} \log\left(\frac{U}{I(n)/n}\right) \right\|_{s(x)} &, \end{aligned} \quad (3.28)$$

sowie das analoge Ergebnis mit vertauschten Rollen von U und $\frac{I(n)}{n}$ für U_x^- . Der zweite Summand verschwindet für U_x^+ wegen der Beschränktheit der Umgebung und der Beschränktheit von $U^{2\Re(z)-1}$ für $n \rightarrow \infty$ aufgrund der Beziehung $\frac{I(n)}{n} \leq$

$U \leq \frac{I(n)+1}{n}$. Auch im Fall U_x^- verschwindet der Term, ganz analog zu (3.27). Wir können uns also auf den ersten Summanden in (3.28) beschränken.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in U_x^+} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n) > 0\}} \left(\left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2\Re(z)-1} - U^{2\Re(z)-1} \right) \right\|_{s(x)} \\ &= \sup_{z \in U_x^+} \left\| \mathbb{1}_{\{I(n) > 0\}} O \left(\frac{I(n)^{2\Re(z)-2}}{n^{2\Re(z)-1}} \right) \right\|_{s(x)} = O \left(\frac{1}{n} \right), \end{aligned}$$

gleichmäßig in z , analog zu (3.27). Im Fall U_x^- gehen wir anders vor. Wegen $I(n) = \lfloor nU \rfloor$ gilt $\frac{I(n)}{n} \leq U$. Die Funktion $x \mapsto x^\alpha$ ist für $\alpha < 0$ und $x > 0$ konvex, somit gilt für $I(n) > 0$

$$U^\alpha = \left(\frac{I(n)}{n} + \left(U - \frac{I(n)}{n} \right) \right)^\alpha \geq \left(\frac{I(n)}{n} \right)^\alpha + \alpha \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{\alpha-1} \left(U - \frac{I(n)}{n} \right),$$

und damit

$$\left(\frac{I(n)}{n} \right)^\alpha - U^\alpha \leq \alpha \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{\alpha-1} \left(U - \frac{I(n)}{n} \right).$$

Wir berechnen noch

$$\mathbb{E} \left[\left(U - \frac{I(n)}{n} \right)^s \mid I(n) = j \right] = \int_{j/n}^{(j+1)/n} (u - j/n)^s du = \frac{1}{s+1} n^{-(s+1)}$$

und können erneut durch Bedingen auf $I(n)$ die Behauptung zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbb{1}_{\{I(n) > 0\}} \left(\left(\frac{I(n)}{n} \right)^{2\Re(z)-1} - U^{2\Re(z)-1} \right) \right\|_{s(x)}^{s(x)} \\ & \leq \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{I(n) > 0\}} (2\Re(z) - 1)^{s(x)} \left(\frac{I(n)}{n} \right)^{(2\Re(z)-2)s(x)} \left(U - \frac{I(n)}{n} \right)^{s(x)} \right] \\ & = \frac{(2\Re(z) - 1)^{s(x)}}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n} \right)^{(2\Re(z)-2)s(x)} \mathbb{E} \left[\left(U - \frac{I(n)}{n} \right)^{s(x)} \mid I(n) = i \right] \\ & \leq \frac{(2\Re(z) - 1)^{s(x)}}{s(x) + 1} n^{(1-2\Re(z))s(x)-2} H_n((2 - 2\Re(z))s(x)) \\ & \leq \frac{(2\Re(z) - 1)^{s(x)}}{s(x) + 1} n^{(1-2\Re(z))s(x)-2} H_n((1 - 2\Re(z))s(x)) \\ & = O(n^{-1}) \end{aligned}$$

gleichmäßig in z . Dies vollendet den Beweis. \square

Kapitel 4

Extraktion des Profils

Im letzten Kapitel wird nun das Hauptresultat über das Grenzverhalten des Profils formuliert. Die Extraktion der Asymptotik des Profils aus der des Profil-Polynoms ist technisch aufwendig und wird auch hier nicht vollständig durchgeführt. Im ersten Abschnitt wird lediglich der Hauptsatz postuliert und diskutiert, der Beweis folgt im zweiten Abschnitt.

4.1 Satz und Diskussion

Folgender Satz beschreibt die Asymptotik des Profils. Wir verwenden dabei die Notation aus dem zweiten Kapitel.

Satz 4.1 *Sei $K \subseteq (\alpha_-, \alpha_+)$ kompakt. Dann gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} \left| \frac{U_{\lfloor z \log n \rfloor}(n)}{\mathbb{E}U_{\lfloor z \log n \rfloor}(n)} - M_\infty\left(\frac{z}{2}\right) \right| = 0 \quad f.s. \quad (4.1)$$

Das normierte Profil konvergiert demnach ebenfalls gegen den bereits ausführlich diskutierten Grenzprozess des normierten Profil-Polynoms, an passender Stelle abgegriffen. Dabei entspricht z im Polynom dem Level $\lfloor 2z \log n \rfloor$ im Binärsuchbaum. Dies erklärt den Faktor $1/2$, der stets bei dem Konvergenzbereich der Martingale auftrat. Man beachte, dass die Konvergenzaussage sich gleichmäßig auf jedes Kompaktum aus dem Intervall (α_-, α_+) bezieht. Damit ist die Asymptotik des Profils bis auf die beiden Grenzen α_-, α_+ geklärt.

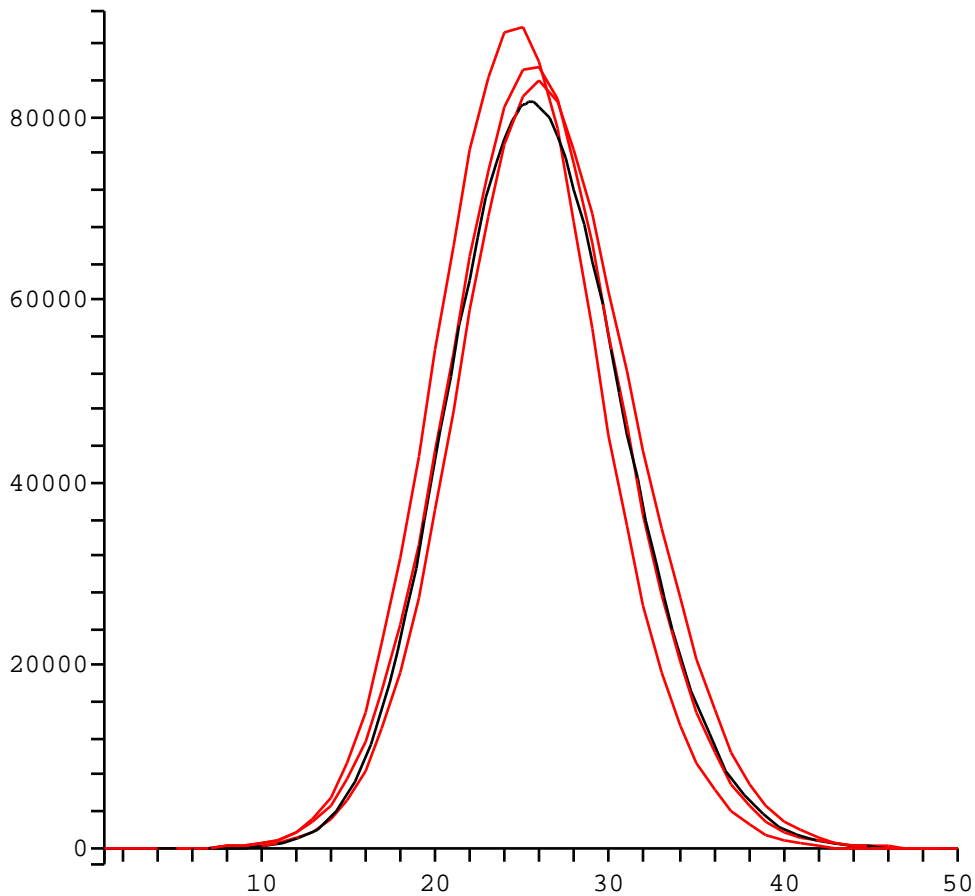
In der zentralen Region um den Erwartungswert lässt sich genaueres zeigen. Wegen der Stetigkeit des Grenzprozesses, auf die im Beweis von Satz 4.1 eingegangen wird, folgt dass $M_\infty\left(\frac{k}{2 \log n}\right) \rightarrow M_\infty(1) = 1$ für $k = 2 \log n + \lambda \sqrt{\log n}$. Damit gilt,

dass

$$\lambda \rightarrow \frac{U_{2 \log n + 2\lambda\sqrt{\log n}}(n)}{n/\sqrt{4\pi \log n}}$$

fast sicher auf jedem Kompaktum gegen die Funktion $\lambda \rightarrow e^{-\lambda^2}$ konvergiert. Ein Beweis dessen findet sich in [CDJH01, Theorem 5].

Folgende Grafik zeigt drei Simulationen sowie den Erwartungswert des Profils für $n = 2^{20} - 1 = 1048575$.



Die Konvergenzaussage lässt sich gut an der Grafik erkennen. Zwar nähern sich die simulierten Werte denen des Erwartungswerts an, dennoch ist eine deutliche Abweichung in Größenordnung des Erwartungswerts, insbesondere rechts vom Maximum des Erwartungswerts bei $2 \log n$, hier 27.6, sichtbar. Diese stammt von der Zufälligkeit des Grenzwerts. Einige Werte sind gesondert zu behandeln.

Für $z = \frac{1}{2}$ und $z = 1$ ist der Grenzwert deterministisch 1, hier wurde demnach zu stark skaliert und die Abweichung des Profils von dessen Erwartung ist von kleinerer Ordnung als der Erwartungswert selbst, was sich auch gut in der Simulation erkennen lässt. Die jeweiligen Werte sind hier 13.8 und 27.6.

4.2 Beweis

In der ersten Arbeit, die zum Beweis der Konvergenzaussage das Profil-Polynom verwendet von Chauvin, Drmota und Jabbour-Hattab von 2001 [CDJH01], wurden L^2 -Abschätzungen verwendet und die Konvergenz wurde zunächst nur im Bereich $[1.2 \log n, 2.8 \log n]$ gezeigt. Wegen der Bemerkung 2.1 über die L^2 -Konvergenz des Martingals $M_n(z)$ lässt sich dieser Bereich mit diesem Zugang nicht über $[(2 - \sqrt{2}) \log n, (2 + \sqrt{2}) \log n]$ hinaus verbessern. Auch die aktuelle Arbeit [DJN06], die die Kontraktionsmethode verwendet und als Vorlage zum dritten Kapitel dient, verwendet eine L^2 -Methode.

Um die Konvergenz auf dem gesamten Intervall zu erhalten, folgen wir der Extraktion in [CKMR05] und verwenden Ergebnisse sowie Notation aus dem zweiten Kapitel.

Wir beginnen mit folgendem Lemma, dessen Erklärung nachgereicht wird. Es ist als Analogon von Satz 4.1 für das normierte Profil im kontinuierlichen Prozess zu verstehen.

Lemma 4.1 *Für jedes Kompaktum $K \subseteq (z_c^-, z_c^+)$ gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1, z \in K} \sqrt{t} P^{(2tz)}(\{k\}) \left(\frac{\varrho_t(\{k\})}{\mathbb{E}[\varrho_t(\{k\})]} - \mathcal{M}(\infty, z) \right) = 0 \quad (4.2)$$

Dabei ist ϱ_t in (2.18) definiert und $P^{(\lambda)}$ die Poissonverteilung zum Parameter λ .

Man beachte, dass wegen $U_k(n) = \varrho_{\tau_n}(\{k\})$ für $t = \tau_n$ die Klammer in (4.2) bereits dem Ausdruck in (4.1) sehr ähnelt. Wir wählen nun $K \subseteq (z_c^-, z_c^+)$ kompakt und aus obigem Lemma sowie Lemma 2.4 folgt dann unmittelbar

$$\varrho_t(\{k\}) = z^{-k} t^{-1/2} e^{t(2z-1)} \left(t^{1/2} \mathcal{M}(\infty, z) P^{(2tz)}(\{k\}) + o(1) \right). \quad (4.3)$$

Dabei ist $o(1)$ gleichmäßig in $k \geq 1$ und $z \in K$. Wir verwenden den lokalen Grenzwertsatz für die Poissonverteilung [Pet75]:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_k \left| \sqrt{2\pi\lambda} P^{(\lambda)}(\{k\}) - e^{-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}} \right| = 0. \quad (4.4)$$

Mit $\lambda = 2tz$ folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{k \geq 1, z \in K} \left| \sqrt{2\pi tz} P^{(2tz)}(\{k\}) - e^{-\frac{(k-2tz)^2}{4tz}} \right| = 0,$$

und damit lässt sich $P^{(2tz)}(\{k\})$ in (4.3) ersetzen. Es gilt:

$$\varrho_t(\{k\}) = A_t(k, z) \left(\mathcal{M}(\infty, z) e^{-\frac{(k-2tz)^2}{4tz}} + o(1) \sqrt{4\pi tz} + o(1) \mathcal{M}(\infty, z) \right) \quad (4.5)$$

mit

$$A_t(k, z) = \frac{e^{-t(1-2z)}}{z^k \sqrt{4\pi tz}}.$$

und $o(1)$ in beiden Fällen gleichmäßig in $k \geq 1$ und $z \in K$. Wir erinnern an $U_k(n) = \varrho_{\tau_n}(\{k\})$ und setzen deshalb $t = \tau_n$.

$\mathcal{M}(t, z)$ ist für alle $t \geq 0$ nach Definition stetig und nach Satz 2.5 fast sicher gleichmäßig konvergent. Somit ist auch der Grenzprozess fast sicher stetig und damit auf einem Kompaktum fast sicher beschränkt. Somit lässt sich (4.5) zu

$$U_k(n) = A_{\tau_n}(k, z) \left(\mathcal{M}(\infty, z) e^{-\frac{(k-2\tau_n z)^2}{4\tau_n z}} + o(1) \right)$$

umschreiben. Dabei ist $o(1)$ gleichmäßig in $k \geq 1$ und $z \in K$ für $n \rightarrow \infty$. Wir setzen nun $z = \frac{k}{2 \log n}$. Wir erinnern an ξ aus Satz 2.2. Wegen

$$\frac{\log^2 \xi}{\tau_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad f.s.$$

und (2.11) folgt

$$z \frac{(\log n - \tau_n)^2}{\tau_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad f.s.$$

gleichmäßig in $z \in K$. Daraus ergibt sich sofort:

$$e^{-\frac{(k-2\tau_n z)^2}{4\tau_n z}} = 1 + o(1),$$

und damit:

$$U_k(n) = A_{\tau_n}(k, z) (\mathcal{M}(\infty, z) + o(1))$$

Mit der Asymptotik der Erwartung (2.49) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{A_{\tau_n}(k, z)}{(\mathbb{E}U_k(n)) \xi^{1-2z} \Gamma(2z)} &= \frac{e^{-\tau_n(1-2z)} \xi^{2z-1} \sqrt{2k}}{z^k \sqrt{4tzn} n^{2z}} (1 + o(1)) \\ &= \sqrt{\frac{\log n}{n}} \frac{e^{-\tau_n(1-2z)} \xi^{2z-1}}{z^{2z} \log n n^{2z} \log n^{-2z+1}} (1 + o(1)) \\ &= \sqrt{\frac{\log n}{n}} \left(\frac{ne^{-\tau_n}}{\xi} \right)^{1-2z} (1 + o(1)) \\ &= 1 + o(1), \end{aligned}$$

dabei ist $o(1)$ gleichmäßig in $z \in K$. Letztere Gleichheit folgt aus (2.9) und (2.12), sowie der Beschränktheit von K . Mit der Verbindung der Grenzmartingale (2.27) folgt unmittelbar:

$$U_k(n) = (\mathbb{E}U_k(n))M_\infty(z)(1 + o(1)),$$

mit $z = \frac{k}{2 \log n}$ und $o(1)$ gleichmäßig in $z \in K$. \square

Bemerkung 4.1 Es gilt Lemma 4.1 besser zu verstehen. Sei X eine $P^{(\lambda)}$ -verteilte Zufallsvariable. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

für $\lambda \rightarrow \infty$. Dabei steht $\mathcal{N}(0, 1)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Die Poissonverteilung ist um ihren Erwartungswert konzentriert, genauer gesagt fallen die Gewichte nach (4.4) exponentiell schnell ab.

Für $k = \lfloor 2tz \rfloor$ verschwindet der Vorfaktor in (4.2) nicht, hier muss demnach gelten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\varrho_t(\{\lfloor 2tz \rfloor\})}{\mathbb{E}[\varrho_t(\{\lfloor 2tz \rfloor\})]} - \mathcal{M}(\infty, z) \right) = 0 \quad f.s.$$

Dies ist, wie bereits angekündigt Satz, 4.1 für das kontinuierliche Profil. Wegen $\tau_n \approx \log n$ nach (2.2) steht dies gut im Einklang mit dem Ergebnis im diskreten Fall. Zum Beweis von Lemma 4.1 verwendet man folgende kontinuierliche Fourierinversion:

$$\varrho_t(\{k\}) = \frac{e^{t(2z-1)}z^{-k}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}(t, ze^{ix})e^{-2tz(1-e^{ix})}e^{-ikx}dx.$$

Die Behauptung folgt dann leicht mit folgendem Lemma aus [Big92], auf das wir hier nicht näher eingehen.

Lemma 4.2 Für alle $z_0 \in (z_c^-, z_c^+)$ existiert ein $r > 0$ mit $z_c^- < z_0 - r < z_0 + r < z_c^+$ und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{z \in [z_0 - r, z_0 + r]} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{t} |\mathcal{M}(t, ze^{ix}) - \mathcal{M}(\infty, z)| e^{-2tz(1-\cos x)} dx = 0 \quad f.s.$$

Literaturverzeichnis

- [ABT03] R. Arratia, A. D. Barbour, and S. Tavaré. *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach*. European Mathematic Society Publishing House, 2003.
- [AS64] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1964.
- [Big92] J.D. Biggins. Uniform convergence of martingales in the branching random walk. *The Annals of Applied Probability*, 20(1):137–151, 1992.
- [BR] J. Bertoin and A. Rouault. Additive martingales and probability tilting for homogenous fragmentation. preprint available at <http://www.proba.jussieu.fr/mathdoc/textes/PMA-808.pdf>.
- [Car71] H. Cartan. *Differential calculus*. Houghton Mifflin Co., Boston, 1971.
- [CDJH01] B. Chauvin, M. Drmota, and J. Jabbour-Hattab. The profile of binary search trees. *The Annals of Applied Probability*, 11(4):1042–1062, 2001.
- [CKMR05] B. Chauvin, T. Klein, J-F. Marckert, and A. Rouault. Martingales and profile of binary search trees. *Electronic Journal of Probability*, 10(12):420–435, 2005.
- [Dev88] L. Devroye. Applications of the theory of records in the study of random trees. *Acta Inform.*, 26(1-2):123–130, 1988.
- [Dev98] L. Devroye. Branching processes and their applications in the analysis of tree structures and tree algorithms. In *Probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics*, volume 16 of *Algorithms Combin.*, pages 249–314. Springer, Berlin, 1998.
- [DJN06] M. Drmota, S. Janson, and R. Neininger. A functional limit theorem for the profile of search trees. preprint available at <http://www.math.uni-frankfurt.de/~neiningr/funcprof.pdf>, 2006.

- [FHN06] M. Fuchs, H-K. Hwang, and R. Neininger. Profiles of random trees: Limit theorems for random recursive trees and binary search trees. *Algorithmica*, to appear November (2006).
- [FO82] P. Flajolet and A. Odlyzko. The average height of binary trees and other simple trees. *Journal of Computer and System Sciences*, 25(2):171–213, 1982.
- [Hwa95] H.K. Hwang. Asymptotic expansions for the stirling numbers of the first kind. *Journal of Combinatorial Theory, series A*, 71:343–351, 1995.
- [JH01] J. Jabbour-Hattab. Martingales and large deviations for binary search trees. *Random Structures and Algorithms*, 19(2):112–127, 2001.
- [Kle06] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, volume 1. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [Kön97] K. Königsberger. *Analysis 2*, volume 2. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [Kön03] K. Königsberger. *Analysis 1*, volume 6. Springer Verlag, Berlin, 2003.
- [Kra82] S.G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables*. John Wiley, New York, 1982.
- [Lyn65] W. Lynch. More combinatorial problems of certain trees. *Computer Journal*, 7:299–302, 1965.
- [Mah92] H. M. Mahmoud. *Evolution of Random Search Trees*. John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [NR04] R. Neininger and L. Rüschendorf. A general limit theorem for recursive algorithms and combinatorial structures. *The Annals of Applied Probability*, 14(1):378–418, 2004.
- [Pet75] V.V. Petrov. *Sums of independent random variables*. Springer Verlag, 1975.
- [Régn89] M. Régnier. A limiting distribution for quicksort. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 23(3):335–343, 1989.
- [Rös91] U. Rösler. A limit theorem for “quicksort“. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 25(1):85–100, 1991.
- [Rös01] U. Rösler. On the analysis of stochastic divide and conquer algorithms. *Algorithmica*, 29(1-2):238–261, 2001.

- [Zol76] V. M. Zolotarev. Approximation of distributions of sums of independent random variables with values in infinite-dimensional spaces. *Theory of Probability and its Applications*, 21(4):721–737, 1976.