

Die Optimierung von Fuzzy-Zielfunktionen in Fuzzy (Mehrziel-) LP-Systemen - Ein kritischer Überblick

Heinrich J. Rommelfanger

J. W. Goethe Universität Frankfurt am Main,
Professur für Wirtschaftsmathematik
Mertonstr. 17-23, D-60054 Frankfurt am Main, Germany
Tel. (069)798 22268; Fax (069)798 23432
E-Mail: Rommelfanger@wiwi.uni-frankfurt.de

1 Einleitung

Klassische Programmierungsmodelle benötigen eindeutig bestimmte Koeffizienten und exakt festgelegte Restriktionsgrenzen. Um eine Fehlmodellierung zu vermeiden, ist daher in der Regel eine umfangreiche Informationsaufnahme und -verarbeitung notwendig. Oft wird man dennoch bei Realproblemen einige der Modellparameter nur größenordnungsmäßig angeben können. Während in den klassischen Modellen nur der Weg bleibt, diese ungenauen Größen durch "Mittelwerte" zu ersetzen, bieten Fuzzy-Modelle die Möglichkeit, die subjektiven Vorstellungen eines Entscheiders so präzise zu modellieren, wie dieser es ausdrücken will und kann. Das Risiko, mit einem falschen Bild der Realität zu arbeiten und Lösungen auszuwählen, die nicht dem Realproblem entsprechen, wird somit deutlich reduziert.

Beschränken wir die Betrachtung auf den am häufigsten benutzten Modelltyp, die Linearen Programmierungsmodelle, so lässt sich eine Fuzzy-Erweiterung allgemein durch das nachfolgende Fuzzy Lineare Programmierungs-Modelle (FLP-Modell) ausdrücken.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\mathbf{x}) &= \tilde{C}_1 x_1 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n \rightarrow M\tilde{\alpha}x \\ \text{unter Beachtung der Restriktionen} & \hspace{15em} (1) \\ \tilde{A}_{i1}x_1 \oplus \tilde{A}_{i2}x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{in}x_n &\lesssim \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

Dabei sind $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_i, \tilde{C}_j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ Fuzzy-Mengen in \mathbf{R} . Das Symbol \oplus steht für erweiterte Addition.

Da jede reelle Zahl als eine Fuzzy-Zahl modelliert werden kann, enthält das Fuzzy Lineare Programmierungssystem (1) die Spezialfälle, dass die Zielfunktion und/oder Restriktionen reelle Koeffizienten aufweisen; ebenso können Restriktionsgrenzen durch reelle Zahlen eindeutig festgelegt sein.

Die Verwendung von FLP-Systemen hat einerseits den Vorteil, dass ein Entscheider ein vorliegende Realproblem im Einklang mit seinem Informationsstand in ein mathematisches Modell abbilden kann. Andererseits kann er aber die bekannten Algorithmen zur Lösung von LP-Systemen nicht mehr zur Berechnung einer optimalen Lösung benutzen. Daher wurden in den letzten 30 Jahren zahlreiche Algorithmen zur Lösung von FLP-Modellen entwickelt, vgl. [13].

Um den Überblick nicht ausufern zu lassen, liegt der Fokus dieser Arbeit auf der Frage, wie die verschiedenen Lösungsansätze die Fuzzy-Zielfunktion interpretieren. Die Menge der zulässigen Lösungen kann dabei durch klassische Restriktionen, Restriktionen mit weichen Grenzen oder Fuzzy-Restriktionen beschrieben sein. Im letzteren Fall wird jeweils auch kurz auf die Interpretation dieser Beschränkungen eingegangen.

Um den Methodenvergleich übersichtlich zu gestalten, wird angenommen, dass alle Fuzzy-Koeffizienten \tilde{C}_j und \tilde{A}_{ij} durch L-R-Fuzzy-Intervalle modelliert werden können, d. h. $\tilde{C}_j = (\underline{c}_j; \bar{c}_j; \underline{\gamma}_j; \bar{\gamma}_j)_{LR}$; $\tilde{A}_{ij} = (\underline{a}_{ij}; \bar{a}_{ij}; \underline{\alpha}_{ij}; \bar{\alpha}_{ij})_{L_i R_i}$. Zwar ist bei vielen Methoden diese Annahme nicht notwendig, aber sowohl in der Literatur als auch in praktischen Anwendungen wird diese Annahme üblicherweise getroffen. Meistens unterstellt man sogar lineare Referenzfunktionen $L(u) = R(u) = \text{Max}(0, 1 - u)$.

Durch Anwendung des Zadeh'schen Erweiterungsprinzips kann dann die Fuzzy-Zielfunktion $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \tilde{C}_1 x_1 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n$ zu dem L-R-Fuzzy-Intervall

$$\tilde{Z}(\mathbf{x}) = (\underline{c}(\mathbf{x}); \bar{c}(\mathbf{x}); \underline{\gamma}(\mathbf{x}); \bar{\gamma}(\mathbf{x}))_{LR} \quad (2)$$

aggregiert werden, wobei gilt

$$\underline{c}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \underline{c}_j x_j, \quad \bar{c}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j, \quad \underline{\gamma}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \underline{\gamma}_j x_j, \quad \bar{\gamma}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \bar{\gamma}_j x_j.$$

2 Mehrzielansatz

Nach den vorstehenden Ausführungen ist offensichtlich, dass eine Fuzzy-Zielfunktion $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \tilde{C}_1 x_1 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n \rightarrow \tilde{\text{Max}}$ als ein Mehrzielproblem zu interpretieren ist.

So entspricht in dem einfachen Fall mit Koeffizienten der Form $\tilde{C}_j = (\underline{c}_j; \bar{c}_j; \underline{\gamma}_j; \bar{\gamma}_j)_{LR}$ die Fuzzy-Zielfunktion $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = (\underline{c}(\mathbf{x}); \bar{c}(\mathbf{x}); \underline{\gamma}(\mathbf{x}); \bar{\gamma}(\mathbf{x}))_{LR}$ den vier crisen Zielen

$$\underline{c}(\mathbf{x}) - \underline{\gamma}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max}, \quad \underline{c}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max}, \quad \bar{c}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max}, \quad \bar{c}(\mathbf{x}) + \bar{\gamma}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max} \quad (3)$$

die simultan über der Menge der zulässigen Lösungen X_U zu maximieren sind.

A. Lai; Hwang [6] betrachten den Spezialfall mit triangularen Koeffizienten $\tilde{C}_j = (\underline{c}_j; \underline{\gamma}_j; \bar{\gamma}_j)$ und ersetzen die Fuzzy-Zielfunktion $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = (\underline{c}(\mathbf{x}); \underline{\gamma}(\mathbf{x}); \bar{\gamma}(\mathbf{x}))_{LR}$ durch die drei Zielfunktionen:

$$z_1(\mathbf{x}) = \underline{c}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max}, \quad z_2(\mathbf{x}) = \underline{\gamma}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Min}, \quad z_3(\mathbf{x}) = \bar{\gamma}(\mathbf{x}) \rightarrow \text{Max}. \quad (4)$$

Zur Lösung dieses Mehrzielproblems verwenden Lai; Hwang einen Vorschlag von Zimmermann [20] und substituieren diese drei Zielfunktionen durch lineare Fuzzy-Zielfunktionen. Da diese auf der Basis der besten und schlechtesten Lösung der Zielfunktionen (4) zu konstruieren sind, schlagen die Autoren die folgenden Werte vor:

$$\begin{aligned} z_1^{\text{PIS}} &= \underline{c}(\mathbf{x}_I) = \text{Max}_{x \in X_U} \underline{c}(\mathbf{x}) & z_2^{\text{PIS}} &= \underline{\gamma}(\mathbf{x}_{II}) = \text{Min}_{x \in X_U} \underline{\gamma}(\mathbf{x}) & z_3^{\text{PIS}} &= \bar{\gamma}(\mathbf{x}_{III}) = \text{Max}_{x \in X_U} \bar{\gamma}(\mathbf{x}) \\ z_1^{\text{NIS}} &= \text{Min}_{x \in X_U} \underline{c}(\mathbf{x}) & z_2^{\text{NIS}} &= \text{Max}_{x \in X_U} \underline{\gamma}(\mathbf{x}) & z_3^{\text{NIS}} &= \text{Min}_{x \in X_U} \bar{\gamma}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Diese Auswahl, speziell die Werte z_1^{NIS} , z_2^{NIS} und z_3^{NIS} können nicht überzeugen, da die Werte z_1^{NIS} und z_3^{NIS} im Allgemeinen zu klein und der Wert z_2^{NIS} zu groß gewählt werden. Damit sind aber die linearen Fuzzy-Zielfunktionen fehlerhaft modelliert. Es wäre besser, die nachfolgenden Werte zu verwenden, die auch in der Literatur üblich sind:

$$z_1^{\text{NIS}} = \text{Min}_{x \in X_U} [c(\mathbf{x}_{\text{II}}), c(\mathbf{x}_{\text{III}})] \quad z_2^{\text{NIS}} = \text{Max}_{x \in X_U} [\underline{\gamma}(\mathbf{x}_{\text{I}}), \underline{\gamma}(\mathbf{x}_{\text{III}})]$$

$$z_3^{\text{NIS}} = \text{Min}_{x \in X_U} [\bar{\gamma}(\mathbf{x}_{\text{I}}), \bar{\gamma}(\mathbf{x}_{\text{II}})]$$

3 Auf Defuzzifizierung basierende Kompromiss-Zielfunktion(en)

B. Die erste Arbeit zu LP-Systemen mit einer Fuzzy-Zielfunktion wurde von Tanaka; Ichihashi; Asai [18] veröffentlicht. Sie ersetzen $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = \tilde{C}_1 x_1 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n$ durch die crise Kompromisszielfunktion

$$Z_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{j=1}^n (2\underline{c}_j + 2\bar{c}_j - \underline{\gamma}_j + \bar{\gamma}_j) \cdot x_j \rightarrow \text{Max} \quad (5)$$

Jede Fuzzy-Restriktion $\tilde{A}_i(\mathbf{x}) = (\underline{a}_i(\mathbf{x}); \bar{a}_i(\mathbf{x}); \underline{\alpha}_i(\mathbf{x}); \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}))_{\text{LR}} \tilde{\leq} \tilde{B}_i$, $i = 1, \dots, m$, substituieren diese Autoren durch die crise Bedingungsungleichung

$$\tilde{B}_i \ominus \tilde{A}_i(\mathbf{x}) \tilde{\geq} 0 \text{ ist fast positiv auf dem Niveau } h \in [0, 1],$$

welche äquivalent ist zu der pessimistischen ρ -Präferenzrelation

$$\sum_{j=1}^n (\bar{a}_{ij}(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_{ij}(\mathbf{x}) \cdot R_{A_i}^{-1}(\rho)) \leq b_i - \underline{\beta}_i \cdot R_{B_i}^{-1}(\rho) \quad \text{mit } \rho = 1 - h. \quad (6)$$

Leider übersehen die Autoren, dass in einer „ $\tilde{\leq}$ “-Relation die Restriktionsgrenze die Form $\tilde{B}_i = (b_i, 0, \bar{\beta}_i)_{\text{LR}}$ aufweisen muss, d. h. die linken Spannweiten sind gleich Null zu setzen.

C. Um die Robustheit der Lösung besser steuern zu können, ergänzt Stanciulescu [17] die crise Zielfunktion (5) durch die folgenden drei Zielfunktionen, welche unterschiedliche Aspekte der Ungenauigkeit ausdrücken:

“Gesamteindruck der Ungenauigkeit eines Fuzzy-Intervalls” (Impression attached to any fuzzy data)

$$Z_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n (2\bar{c}_j + \bar{\gamma}_j - 2\underline{c}_j - \underline{\gamma}_j) \cdot x_j \rightarrow \text{Min} \quad (7)$$

“Fuzziness eines Fuzzy-Intervalls” (Fuzziness of a fuzzy data)

$$Z_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n (\bar{\gamma}_j + \underline{\gamma}_j) \cdot x_j \rightarrow \text{Min} \quad (8)$$

“Ungenauigkeit eines Fuzzy-Intervalls” (Variety of a fuzzy data)

$$Z_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n (\bar{c}_j - \underline{c}_j) \cdot x_j \rightarrow \text{Min} \quad (9)$$

Die Verarbeitung von Fuzzy-Restriktionen und Rsetriktionen mit weichen Grenzen erfolgt in [17] gemäß der $\tilde{\leq}_R$ -Relation von Rommelfanger [10], vgl. Formel (33).

Um eine Lösung dieses Mehrzieloptimierungssystems zu erhalten, verwendet Stanciu-lescu das MAUT-Verfahren, bei dem zunächst jede Zielfunktion $Z_k(\mathbf{x})$ in eine Nutzenfunktion $u_k(Z_k(\mathbf{x}))$ transformiert wird und dann die Gesamtzielfunktion

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 u_k(Z_k(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Max} \quad (10)$$

über der verbleibenden crisen Menge der zulässigen Lösungen zu maximieren ist.

4 Auf σ -Niveaus basierende Kompromiss-Zielfunktion(en)

D. Carlsson; Korhonen [3] substituieren die zu maximierende Fuzzy-Zielfunktion $\tilde{Z}(\mathbf{x}) = (\underline{c}(\mathbf{x}); \bar{c}(\mathbf{x}); \underline{\gamma}(\mathbf{x}); \bar{\gamma}(\mathbf{x}))_{LR}$ durch die crise lineare Zielfunktion

$$Z(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 + R_{C_1}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_1) \cdot x_1 + \dots + (\bar{c}_n + R_{C_n}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_n) \cdot x_n \rightarrow \text{Max} \quad (11)$$

wobei $\sigma \in [0, 1]$ ein vom Entscheider festzulegendes Zugehörigkeitsniveau ist. $R_{C_j}^{-1}$ ist die Umkehrfunktion der rechten Referenzfunktion des Fuzzy-Intervalls \tilde{C}_j .

Nach [3] sind auch die Fuzzy-Restriktionen des FLP-Systems (1) durch eine crise lineare Restriktion zu ersetzen, die auf dem gleichen σ -Niveau basiert.

Damit kann das System (1) ersetzt werden durch das crise LP-Programm

$$Z(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 + R_{C_1}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_1) \cdot x_1 + \dots + (\bar{c}_n + R_{C_n}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_n) \cdot x_n \rightarrow \text{Max}$$

unter Beachtung der Restriktionen (12)

$$\sum_{j=1}^n (\bar{a}_i(\mathbf{x}) + \underline{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot R_{A_i}^{-1}(\sigma)) \leq b_i + \beta_i \cdot R_{B_i}^{-1}(\sigma), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^n$$

Da ein Entscheider mit der Festlegung eines σ -Niveau überfordert ist, schlagen Carlsson; Korhonen [3] die Berechnung einer Lösungsmenge $\{(z^*(\sigma), x^*(\sigma)) | \sigma\}$ für verschiedene Parameter $\sigma \in [0, 1]$ vor. Diese sollte dann dem Entscheidungsträger präsentiert werden und dieser sollte dann, eventuell. unter Hinzuziehung weiterer Gesichtspunkte, seine Auswahl treffen.

E. Ansatz von Buckley [1; 2] ist dem Vorschlag von Carlsson; Korhonen [3] sehr ähnlich. Der Hauptunterschied liegt in einer optimistischeren Interpretation der Fuzzy-Restriktionen, für die Buckley die crisen Ersatzungleichungen

$$\sum_{j=1}^n (\underline{a}_i(\mathbf{x}) - \underline{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot L_{A_i}^{-1}(\sigma)) \leq b_i + \beta_i \cdot R_{B_i}^{-1}(\sigma), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^n \quad (13)$$

Hierbei ist $L_{A_i}^{-1}$ die Umkehrfunktion zur linksseitigen Referenzfunktionen des Fuzzy-Intervalls \tilde{A}_j und $R_{B_i}^{-1}$ die Umkehrfunktion zur rechtsseitigen Referenzfunktionen der Fuzzy-Zahl \tilde{B}_i . Diese Interpretation einer Kleiner-Gleich-Relation in Fuzzy-Restriktionen entspricht dem von Slowinski [16] eingeführten „optimistischen Index“, vgl. (32a).

F. Ramik [8] stellt einen optimistischen und einen pessimistischen Lösungsansatz vor. Ramiks optimistischer Ansatz entspricht genau dem Lösungsvorschlag von Buckley. Der pessimistische Ansatz von Ramik ist ähnlich strukturiert:

$$Z(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 - L_{C_1}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_1) \cdot x_1 + \dots + (\bar{c}_n - L_{C_n}^{-1}(\sigma)\bar{\gamma}_n) \cdot x_n \rightarrow \text{Max}$$

unter Beachtung der Restriktionen (14)

$$\sum_{j=1}^n (\bar{a}_j(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_j(\mathbf{x}) \cdot R_{A_i}^{-1}(1-\sigma)) \leq b_i - \underline{\beta}_i \cdot R_{B_i}^{-1}(1-\sigma), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}_0^n$$

Für die Zielfunktion wird nun der linke Radpunkt des σ -Schnitts benutzt und für die Restriktionen die pessimistische ρ -Präferenz mit $\rho = 1-\sigma$. Dies entspricht damit dem der Aussage “fast positive auf dem Niveau $h = \sigma$ ” in [18]. Meiner Ansicht nach wäre es aber sinnvoller, auch in den Restriktionen des Systems (14) das Niveau σ anstelle von $1-\sigma$ zu verwenden, denn dies ließe sich so interpretieren, dass beim Lösungsansatz auf Werte mit einem Zugehörigkeitsniveau kleiner als σ verzichtet wird.

G. Beim Lösungsvorschlag von Delgado; Verdegay; Vila [5] werden die beiden Randpunkte der σ -Schnitte $C_j^\sigma = [(\underline{c}_j - \underline{\gamma}_j^\sigma), (\bar{c}_j + \bar{\gamma}_j^\sigma)]$ zur Konstruktion neuer crisper Zielfunktionen verwendet. Dabei sind alle möglichen Kombinationen zugelassen. Ein Beispiel könnte wie folgt aussehen:

$$Z(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 + \bar{\gamma}_1^\sigma) \cdot x_1 + (\underline{c}_2 - \underline{\gamma}_2^\sigma) \cdot x_2 + (\underline{c}_3 - \underline{\gamma}_3^\sigma) \cdot x_3 + \dots + (\bar{c}_n + \bar{\gamma}_n^\sigma) \cdot x_n \rightarrow \text{Max} \quad (15)$$

Die Kompromisszielfunktion ist dann nach [5] eine gewichtete Summe aller möglichen so gebildeten crisper Zielfunktionen, besteht also maximal aus 2^n Funktionen des Typs (15).

H. Chanas; Kuchta [4] betrachten ein LP-System mit einer Fuzzy-Zielfunktion und einer crisper Menge zulässiger Lösungen X .

Um eine Fuzzy-Lösung $\tilde{X} = \{(\mathbf{x}, \mu_X(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{R}_{0+}^n\}$ dieses Problems zu berechnen, vereinfachen die Autoren die Aufgabenstellung, in dem sie das ursprüngliche LP-System ersetzen durch ein System mit Intervallkoeffizienten $C_j^\sigma = [(\underline{c}_j - \underline{\gamma}_j^\sigma), (\bar{c}_j + \bar{\gamma}_j^\sigma)]$, welche σ -Schnitte der \tilde{C}_j für einen speziellen Zugehörigkeitswert $\sigma \in [0, 1]$ sind:

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in X} (C_1^\sigma x_1 + C_2^\sigma x_2 + \dots + C_n^\sigma x_n) \quad (16)$$

Um eine Lösung des Systems (16) zu erhalten verwenden Chanas; Kuchta [4] das Konzept einer t_0 - t_1 -optimalen Lösung, $0 \leq t_0 < t_1 \leq 1$. Gemäß dieses Verfahrens ist (16) in das zweiwertige LP-Problem

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in X} \left(\begin{array}{l} f_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\underline{c}_j + t_0 \cdot (\bar{c}_j - \underline{c}_j) + (t_0(\underline{\gamma}_j^\sigma + \bar{\gamma}_j^\sigma) - \underline{\gamma}_j^\sigma) \cdot \theta \right) \cdot x_j \\ f_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \left(\underline{c}_j + t_1 \cdot (\bar{c}_j - \underline{c}_j) + (t_1(\underline{\gamma}_j^\sigma + \bar{\gamma}_j^\sigma) - \underline{\gamma}_j^\sigma) \cdot \theta \right) \cdot x_j \end{array} \right) \quad (17)$$

umzuformen, wobei $\theta = L^{-1}(\sigma)$.

Mittels eines parametrischen Simplex Algorithmus ist dann eine Basislösung \mathbf{x}^0 von (17) zu berechnen, die effizient auf der Menge

$$\langle \theta_0, \theta_1 \rangle \cup \langle \theta_1, \theta_2 \rangle \cup \dots \cup \langle \theta_{s-1}, \theta_s \rangle \quad (18)$$

ist, wobei die $\langle \theta_{s-1}, \theta_s \rangle$ Teilintervalle von $[L^{-1}(1), L^{-1}(0)]$ sind, die offen oder geschlossen sein können.

Der Zugehörigkeitswert der Basislösung \mathbf{x}^0 ist dann nach [4] gleich

$$\mu_X(\mathbf{x}^0) = \sum_{s=1}^S (L(\theta_{s-1}) - L(\theta_s)) \quad (19)$$

I. Zur Lösung eines Fuzzy Multikriteriellen LP-systems von der allgemeinen Form

$$\begin{array}{l|l} \tilde{C}_{11}x_1 \oplus \tilde{C}_{12}x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_{1n}x_n & \\ \vdots & \\ \tilde{C}_{K1}x_1 \oplus \tilde{C}_{K2}x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_{Kn}x_n & \rightarrow \text{M\ddot{a}x} \end{array} \quad (20)$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen

$$\tilde{A}_{i1}x_1 \oplus \tilde{A}_{i2}x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{A}_{in}x_n \lesssim \tilde{B}_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_0^n$$

schlagen Sakawa, Yano [14, 15] einen interaktiven Lösungsprozess vor, bei dem schrittweise eine so genannte "G- σ -pareto-optimale Lösung" errechnet wird. Dabei werden auch hier die Fuzzy-Koeffizienten \tilde{C}_{kj} und \tilde{A}_{ij} reduziert auf ihre σ -Schnitte. Das Zugehörigkeitsniveau σ ist dabei durch den Entscheidungsträger (ET) festzulegen, kann aber im Verlauf des Lösungsprozesses geändert werden.

Bei diesem - unnötig kompliziert formulierten- Lösungsverfahren wird jede Fuzzy-Restriktion durch eine crisper Bedingungsungleichung ersetzt, wobei Sakawa; Yano den optimistischen Ansatz (13) verwenden, der auch von Buckley [1, 2], Ramik [8] und Slowinski [16] vorgeschlagen wird. Die Menge, die diesen Bedingungen genügt, sei mit X^σ bezeichnet.

Die Fuzzy-Zielfunktionen substituieren Sakawa; Yano durch monoton steigende Zugehörigkeitsfunktionen $\mu_{Z_k}(\mathbf{c}_k' \cdot \mathbf{x})$ für alle $k = 1, \dots, K$, die im Sinne der Arbeit von Zimmermann [20] als Nutzenfunktionen interpretiert werden können. Zur Bestimmung einer Kompromisslösung benutzen die Autoren aber nicht die direkte Gesamtnutzenmaximierung sondern einen Regretansatz. Dazu muss der ET für jedes Ziel einen Referenzzugehörigkeitswert $\bar{\mu}_{Z_k}$ festlegen.

Zu minimieren ist dann die Gesamtregretfunktion

$$Z = \text{Max}([\bar{\mu}_{Z_1} - \mu_{Z_1}(\bar{\mathbf{c}}_1^\sigma' \cdot \mathbf{x})], \dots, [\bar{\mu}_{Z_K} - \mu_{Z_K}(\bar{\mathbf{c}}_K^\sigma' \cdot \mathbf{x})]) \quad (21)$$

über der Menge der zulässigen Lösungen X^σ . Dabei ist $\bar{\mathbf{c}}_k^\sigma = (\bar{c}_{k1} + \bar{\gamma}_{k1}^\sigma, \dots, \bar{c}_{kn} + \bar{\gamma}_{kn}^\sigma)$.

J. Luhandjula [7] interpretiert die Zugehörigkeitswerte als Möglichkeitswerte (possibilities). Für eine gegebene Menge $X \subset \mathbb{R}_+^n$ an zulässigen Lösungen bezeichnet er einen Vektor $\mathbf{x}^0 \in X$ als "β-possible efficient"-Lösung des Fuzzy-Optimierungssystems

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in X} (\tilde{Z}_1(\mathbf{x}), \dots, \tilde{Z}_K(\mathbf{x})),$$

wenn kein anderer Vektor $\mathbf{x} \in X$ existiert mit der Eigenschaft

$$\text{Poss} \left(\begin{array}{l} \tilde{Z}_1(\mathbf{x}) \geq \tilde{Z}_1(\mathbf{x}^0), \dots, \tilde{Z}_{k-1}(\mathbf{x}) \geq \tilde{Z}_{k-1}(\mathbf{x}^0), \\ \tilde{Z}_k(\mathbf{x}) > \tilde{Z}_k(\mathbf{x}^0), \tilde{Z}_{k+1}(\mathbf{x}) \geq \tilde{Z}_{k+1}(\mathbf{x}^0), \dots, \tilde{Z}_K(\mathbf{x}) \geq \tilde{Z}_K(\mathbf{x}^0) \end{array} \right) \geq \beta \quad (22)$$

Gemäß dieser Definition ist ein Vektor \mathbf{x}^0 genau dann “ β -possible” auf X , wenn \mathbf{x}^0 eine effiziente Lösung des Optimierungssystems mit Intervallkoeffizienten

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{c}_1^{\beta'}, \dots, \mathbf{c}_K^{\beta'}) \quad (23)$$

Dabei sind die Größen $\mathbf{c}_k^{\beta'} = ([\underline{c}_{k1}^{\beta} - \underline{\gamma}_{k1}^{\beta}, \bar{c}_{k1}^{\beta} + \bar{\gamma}_{k1}^{\beta}], \dots, [\underline{c}_{kn}^{\beta} - \underline{\gamma}_{kn}^{\beta}, \bar{c}_{kn}^{\beta} + \bar{\gamma}_{kn}^{\beta}])$ Vektoren, die aus den β -Schnitten der Koeffizienten \tilde{C}_{kj} , $j = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, 2, \dots, K$, zusammengesetzt sind.

Zur Berechnung einer effizienten Lösung von (23) verwendet Luhandjula ein Lösungsverfahren, das auf den Intervallgrenzen $\underline{c}_{kj}^{\beta} - \underline{\gamma}_{kj}^{\beta}$ und $\bar{c}_{kj}^{\beta} + \bar{\gamma}_{kj}^{\beta}$ der β -Schnitte der Koeffizienten \tilde{C}_{kj} basiert.

K. Während in den vorstehenden Lösungsvorschlägen jeweils nur mit einem σ -Schnitt gearbeitet wird, schlagen Rommelfanger, Hanuscheck, Wolf [11] in dem Lösungsverfahren „ α -Niveau bezogenen Paarbildung“ die Verwendung mehrere Schnitte vor. Dies geschieht im Sinne des Darstellungssatzes der Fuzzy-Mengenlehre, dass eine Fuzzy-Menge eindeutig durch die Gesamtmenge α -Niveau-Mengen beschrieben werden kann. Für die praktische Anwendung sind dann zur Beschreibung der Koeffizienten \tilde{C}_j wenige Schnitte ausreichend. Speziell lassen sich Fuzzy-Intervalle \tilde{C}_j hinreichend genau beschreiben durch eine Menge von Intervallen

$$C_j^{\sigma} = [\underline{c}_j - \underline{\gamma}_j^{\sigma}; \bar{c}_j + \bar{\gamma}_j^{\sigma}] \quad \text{for } \sigma = \sigma_1, \dots, \sigma_S \in [0, 1], S \in \mathbf{N} \quad (24)$$

Die Autoren ersetzen dann die Fuzzy-Zielfunktionen $Z^{\sigma_s}(\mathbf{x}) = C_1^{\sigma_s} x_1 \oplus \dots \oplus C_n^{\sigma_s} x_n$ mit Intervallkoeffizienten jeweils durch zwei crisper Zielfunktionen, wobei die Intervallränder verwendet werden.

$$\left. \begin{array}{l} Z_{\text{Min}}^{\sigma_1}(\mathbf{x}) = (\underline{c}_1 - \underline{\gamma}_1^{\sigma_1})x_1 + \dots + (\underline{c}_n - \underline{\gamma}_n^{\sigma_1})x_n \\ Z_{\text{Max}}^{\sigma_1}(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 + \bar{\gamma}_1^{\sigma_1})x_1 + \dots + (\bar{c}_n + \bar{\gamma}_n^{\sigma_1})x_n \\ \vdots \\ Z_{\text{Min}}^{\sigma_S}(\mathbf{x}) = (\underline{c}_1 - \underline{\gamma}_1^{\sigma_S})x_1 + \dots + (\underline{c}_n - \underline{\gamma}_n^{\sigma_S})x_n \\ Z_{\text{Max}}^{\sigma_S}(\mathbf{x}) = (\bar{c}_1 + \bar{\gamma}_1^{\sigma_S})x_1 + \dots + (\bar{c}_n + \bar{\gamma}_n^{\sigma_S})x_n \end{array} \right\} \rightarrow \text{Max} . \quad (25)$$

Um eine Kompromisslösung dieses Mehrzieloptimierungssystems auf einer crisper Menge X zulässiger Lösungen zu berechnen, schlagen die Autoren vor, in einem ersten Schritt die extremen Zielfunktionen in (25) jeweils paarweise durch Fuzzy-Zielfunktionen der nachfolgenden Form zu ersetzen:

$$\mu_k^\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } z_k^{\alpha*} < Z_k^\alpha(\mathbf{x}) \\ \frac{Z_k^\alpha(\mathbf{x}) - z_k^{\alpha L}}{z_k^{\alpha*} - z_k^{\alpha L}} & \text{if } z_k^{\alpha L} < Z_k^\alpha(\mathbf{x}) < z_k^{\alpha*} \\ 0 & \text{if } Z_k^\alpha(\mathbf{x}) < z_k^{\alpha L} \end{cases} \quad (26)$$

Dabei steht der Index k für Min oder Max und es gilt

$$\begin{aligned} z_{\text{Min}}^{\alpha*} &= Z_{\text{Min}}^\alpha(\mathbf{x}_{\text{Min}}^{\alpha*}) = \text{Max}_{\mathbf{x} \in X} Z_{\text{Min}}^\alpha(\mathbf{x}) \\ z_{\text{Max}}^{\alpha*} &= Z_{\text{Max}}^\alpha(\mathbf{x}_{\text{Max}}^{\alpha*}) = \text{Max}_{\mathbf{x} \in X} Z_{\text{Max}}^\alpha(\mathbf{x}) \\ z_{\text{Min}}^{\alpha L} &= Z_{\text{Min}}^\alpha(\mathbf{x}_{\text{Max}}^{\alpha*}) \quad \text{und} \quad z_{\text{Max}}^{\alpha L} = Z_{\text{Max}}^\alpha(\mathbf{x}_{\text{Min}}^{\alpha*}). \end{aligned}$$

Die Kompromisslösung ist dann zu bestimmen als Lösung des crisen Optimierungssystems

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in X} \text{Min}(\mu_{\text{Min}}^{\sigma_1}(\mathbf{x}), \mu_{\text{Max}}^{\sigma_1}(\mathbf{x}), \dots, \mu_{\text{Min}}^{\sigma_S}(\mathbf{x}), \mu_{\text{Max}}^{\sigma_S}(\mathbf{x})), \quad (27)$$

das äquivalent ist zu dem crisen LP-System:

$$\lambda \rightarrow \text{Max}$$

unter Beachtung der Nebenbedingungen (28)

$$\mathbf{x} \in X, \quad \mu_{\text{Min}}^{\sigma_s}(\mathbf{x}) \geq \lambda, \quad \mu_{\text{Max}}^{\sigma_s}(\mathbf{x}) \geq \lambda, \quad s = 1, \dots, S.$$

5 Satisfizierende Lösungen

Da normalerweise bei einem Mehrzieloptimierungssystem eine ideale Lösung nicht existiert, empfehlen Slowinski [16] und Rommelfanger [9, 10, 12] die Berechnung einer satisfizierenden Lösung. Dies entspricht auch besser dem in der Praxis üblichen Vorgehen, dass vorgegebene Anspruchsniveaus (z. B. Zielvereinbahrungen) erfüllt werden sollen.

Analog zur Modellierung einer unscharfen rechten Seite \tilde{B}_i ist dann für jedes Ziel k ein Anspruchsniveau $\tilde{N}_k = (n_k; \underline{v}_k; 0)_{RR}$ festzulegen. Die Satisfizierungsbedingungen treten dann als zusätzliche Restriktionen auf:

$$\tilde{N}_k \tilde{\leq} \tilde{Z}_k(\mathbf{x}) \quad (29)$$

L. Um eine möglichst hohe Übereinstimmung zwischen $\tilde{N}_k = (n_k; \underline{v}_k; 0)_{RR}$ und $\tilde{Z}_k(\mathbf{x}) = (\underline{c}_k(\mathbf{x}); \bar{c}(\mathbf{x}); \underline{\gamma}_k(\mathbf{x}); \bar{\gamma}_k(\mathbf{x}))_{LR}$ zu erreichen, schlägt Slowinski [16] die Maximierung der Ordinaten $F_k(\mathbf{x})$ des Schnittpunktes dem rechten Kurvenstück von $\tilde{Z}_k(\mathbf{x})$ mit dem linken Kurvenstück von \tilde{N}_k vor, d. h.

$$F_k(\mathbf{x}) = R\left(\frac{\bar{c}_k(\mathbf{x}) - n_k}{\bar{\gamma}_k(\mathbf{x}) - \underline{v}_k}\right) \rightarrow \text{Max}. \quad (30)$$

Für den in der Praxis zumeist anzutreffenden Fall, dass die Referenzfunktion R linear oder stückweise linear ist, nimmt $F_k(\mathbf{x})$ die linear gebrochene Gestalt an:

$$F_k(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\bar{c}_k(\mathbf{x}) - n_k}{\bar{\gamma}_k(\mathbf{x}) - \underline{v}_k}. \quad (31)$$

Nach Slowinski [16] werden die Fuzzy-Restriktionsungleichungen des Systems (20) ersetzt durch zwei crisper Ungleichungen

$$\underline{a}_i(\mathbf{x}) - b_i \leq (\underline{\alpha}_i(\mathbf{x}) + \beta_i) \cdot L^{-1}(\tau), \quad \tau \in]0, 1] \quad \text{optimistischer Index} \quad (32a)$$

$$\bar{a}_i(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot R^{-1}(\eta) \leq b_i + \beta_i \cdot L^{-1}(\eta), \quad \eta \in [0, 1] \quad \text{pessimistischer Index} \quad (32b)$$

M. Rommelfanger [9, 10, 12] empfiehlt für die Umformung der Restriktionen die Verwendung der Ungleichheitsrelation " $\tilde{\leq}_R$ ":

$$\tilde{A}_i(\mathbf{x}) \tilde{\leq}_R \tilde{B}_i \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a}_i(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot R^{-1}(\varepsilon) \leq b_i + \beta_i \cdot R^{-1}(\varepsilon) \\ \mu_i(\bar{a}_i(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Max.} \end{cases} \quad (33)$$

Hierbei wird eine Fuzzy-Restriktion ersetzt durch eine crisper Restriktion, die dem pessimistischen Index von Slowinski entspricht, und einer Fuzzy-Zielfunktion

$$\mu_i(\bar{a}_i(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{a}_i(\mathbf{x}) < b_i \\ R\left(\frac{b_i - \bar{a}_i(\mathbf{x})}{\beta_i}\right) & \text{if } b_i \leq \bar{a}_i(\mathbf{x}) \leq b_i + \beta_i, \\ 0 & \text{if } b_i + \beta_i < \bar{a}_i(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (34)$$

die interpretiert werden kann als subjektive Bewertung der Größe $\bar{a}_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j$ in

Bezug auf die rechte Seite b_i .

Für die Zielbedingungen wird die analoge Ungleichrelation " $\tilde{\geq}_R$ " vorgeschlagen:

$$\tilde{Z}_k(\mathbf{x}) \tilde{\geq}_R \tilde{N}_k \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{c}_k(\mathbf{x}) + \underline{\gamma}_k(\mathbf{x}) \cdot L^{-1}(\varepsilon) \geq n_k + \underline{v}_k \cdot L^{-1}(\varepsilon) \\ \mu_{Z_k}(\underline{c}_k(\mathbf{x})) \rightarrow \text{Max} \end{cases} \quad (35a)$$

$$(35b)$$

mit

$$\mu_{Z_k}(\underline{c}_k(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & \text{if } \underline{c}_k(\mathbf{x}) < n_k - \underline{v}_k \\ L\left(\frac{n_k - \underline{c}_k(\mathbf{x})}{\underline{v}_k}\right) & \text{if } n_k - \underline{v}_k \leq \underline{c}_k(\mathbf{x}) \leq n_k \\ 1 & \text{if } n_k < \underline{c}_k(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (36)$$

Somit wird das Mehrzieloptimierungssystem (20) ersetzt durch das Optimierungssystem

$$\text{Max}_{\mathbf{x} \in R^n} (\mu_{Z_1}(\underline{c}_1(\mathbf{x})), \dots, \mu_{Z_K}(\underline{c}_K(\mathbf{x})), \mu_1(\bar{a}_1(\mathbf{x})), \dots, \mu_m(\bar{a}_m(\mathbf{x})))$$

unter Beachtung der Restriktionen (37)

$$\underline{c}_k(\mathbf{x}) + \underline{\gamma}_k(\mathbf{x}) L^{-1}(\varepsilon) \geq n_k + \underline{v}_k L^{-1}(\varepsilon), \quad k = 1, \dots, K$$

$$\bar{a}_i(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot R^{-1}(\varepsilon) \leq b_i + \beta_i \cdot R^{-1}(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, m$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

Zur Ermittlung einer Kompromisslösung schlägt der Autor vor, die Kompromissziel-funktion

$$\lambda(\mathbf{x}) = \text{Min} (\mu_{Z_1}(\underline{c}_1(\mathbf{x})), \dots, \mu_{Z_K}(\underline{c}_K(\mathbf{x})), \mu_1(\bar{a}_1(\mathbf{x})), \dots, \mu_m(\bar{a}_m(\mathbf{x}))) \quad (38)$$

zu maximieren, die interpretiert werden kann als Ausdruck für die Gesamtzufriedenheit des Entscheidungsträgers mit der gefundenen Lösung \mathbf{x} .

Sind alle Zugehörigkeitsfunktionen μ_{Z_k} and μ_i stückweise linear und konkav, dann stellt das aus der Zielfunktion (38) und den Restriktionen von (37) gebildete System

$$\begin{aligned} & \lambda \rightarrow \text{Max} \\ & \text{unter Beachtung der Nebenbedingungen} \quad (39) \\ & \lambda \leq \mu_{Z_k}(\underline{c}_k(\mathbf{x})), \quad k = 1, \dots, K \\ & \lambda \leq \mu_i(\bar{a}_i(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, m \\ & \underline{c}_k(\mathbf{x}) + \underline{\gamma}_k(\mathbf{x})L^{-1}(\varepsilon) \geq n_k + \underline{v}_kL^{-1}(\varepsilon), \quad k = 1, \dots, K \\ & \bar{a}_i(\mathbf{x}) + \bar{\alpha}_i(\mathbf{x}) \cdot R^{-1}(\varepsilon) \leq b_i + \beta_i \cdot R^{-1}(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

Nach Rommelfanger ist die Kompromisslösung mittels eines interaktiven Prozesses zu ermitteln, der über Anspruchsniveaueinstellung gesteuert wird. Dazu werden die durch stückweise lineare Referenzfunktionen beschriebenen Anspruchsniveaus \tilde{N}_k und die rechten Seiten \tilde{B}_i durch Vorgabe reeller Anspruchsniveaueinstellung $n_k^{\lambda_A}$ bzw. $b_i^{\lambda_A}$, die für eine akzeptable Lösung nicht unter bzw. überschritten werden dürfen, genauer beschrieben. Zum Vergleich der Anspruchsniveaus werden diesen crispen Anspruchsniveaus das gleiche Zugehörigkeitsniveau λ_A , $0 < \lambda_A \leq 1$ zugeordnet.

6 Fazit

Der Überblick belegt, dass es eine Vielzahl an praktikablen Verfahren zur Ermittlung einer optimalen Lösung für Lineare (Mehrziel-) Optimierungssysteme mit Fuzzy-Koeffizienten gibt. Um die richtige Auswahl zu treffen, sind die für die einzelnen Methoden getroffenen Annahmen mit dem real vorliegenden Problem zu vergleichen. Grundsätzlich gilt die Empfehlung, die Lösung schrittweise in einem interaktiven Prozess zu ermitteln, bei dem die Zwischenergebnisse und/oder Informationen von außen zusätzlich berücksichtigt werden können. Auch wenn im Verlauf der Lösungsverfahren vereinfachende Annahmen getroffen werden, so bieten Fuzzy-LP-Systeme die Chance, das Realproblem adäquat abzubilden und eine zufrieden stellende Kompromisslösung zu ermitteln. Nicht unterschätzt werden sollte der Vorteil, dass durch die Fuzzy-Modellierung Informationskosten eingespart werden können, da man zunächst mit ungenauen Größen arbeiten kann, die dann nach Bedarf schrittweise verbessert werden.

7 Literatur

1. Buckley, J.J.: Solving possibilistic linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems* 31 (1989) 329-341
2. Buckley, J.J.: Joint solution to fuzzy programming problems. *Fuzzy Sets and Systems* 72 (1995) 215-220
3. Carlsson, C.; Korhonen, P.: A parametric approach to fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986) 17-30
4. Chanas, S.; Kuchta, D.: Linear programming problems with fuzzy coefficients in the objective function. In: Delgado M.; Kacprzyk J.; Verdegay J.-L.; Vila M.A., *Fuzzy Optimization*. Physica-Verlag, Heidelberg (1994) 148-157

5. Delgado, M., Verdegay, J.L.; Vila, M.A.: A general model for fuzzy linear programming., *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 21-30
5. Iniguchi, M.; Ramik, J.; Tanino, T.; Vlach, M.: Satisficing solutions and duality in interval and fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems* 135 (2003) 151-177
6. Lai, Y.-J.; Hwang, C.-L.: Interactive fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems* 45 (1992) 169-183
7. Luhandjula, M.K.: Multiple objective programming with possibilistic coefficients. *Fuzzy Sets and Systems* 21 (1987) 135-146
8. Ramik, J.: Duality in fuzzy linear programming with possibilistic and necessity relations. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 1283-1302
9. Rommelfanger H.: *Fuzzy decision support systems - Decisions in fuzzy environment* (in German). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, second edition (1994)
10. Rommelfanger, H.: FULPAL 2.0 - An interactive algorithm for solving multicriteria fuzzy linear programs controlled by aspiration levels. In: Schweigert D. (Ed.), *Methods of multicriteria decision theory*. Pfalz Akademie, Lamprecht (1995) 21-34
11. Rommelfanger, H., Hanuscheck, R.; Wolf, J.: Linear programming with fuzzy objectives, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1995) 31-48
12. Rommelfanger, H.; Keresztfalvi, T.: Multicriteria fuzzy optimization based on Yager's parametrized t-norm. *Foundations of Computing and Decision Sciences* 16 (1995) 99-110
13. Rommelfanger, H.; Slowinski, R.: *Fuzzy Linear Programming with single or multiple Objective Functions*. In: Slowinski, R. (Ed.) *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*. Kluwer Academic Publishers Norwell, Massachusetts, USA 1998 (1999) 179-213
14. Sakawa, M.; Yano, H.: Interactive fuzzy satisficing method for multiobjective nonlinear programming problems with fuzzy parameters. *Fuzzy Sets and Systems* 30 (1989) 221-238.
15. Sakawa, M.; Yano, H.: Interactive decision making for multiobjective programming problems with fuzzy parameters. In: Slowinski R. and Teghem J. (Eds.), *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990) 191-228
16. Slowinski, R.: 'FLIP': an interactive method for multiobjective linear programming with fuzzy coefficients. In: Slowinski R. and Teghem J. (Eds.), *Stochastic versus fuzzy approaches to multi-objective mathematical programming under uncertainty*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1990) 249-262
17. Stanculescu, Ch.: *Multiobjective decision support tools using concepts of fuzzy sets*. Université catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Belgium (2001)
18. Tanaka, H.; Ichihashi, H.; Asai, K.: A formulation of linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers. *Control and Cybernetics* 13 (1984) 185-194.
19. Zadeh, L.A.: Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (1965) 338-353
20. Zimmermann, H.-J.: Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 45-55