Eine spieltheoretische Analyse von Zulieferer-Abnehmer-Beziehungen in Supply Chains

Eric Sucky

Aachen, 14. September 2001

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

Gliederung

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

1. Das Joint Economic-Lot-Size Model (JELS-Modell)
1.1 Individuell optimale Bestell- und Produktionspolitiken

- **Annahmen**

  - Es wird ein Abnehmer (A) und ein Zulieferer (P) eines bestimmten Gutes betrachtet.
  - Der Abnehmer (A) und der Zulieferer (P) planen ihre individuell optimale Bestellmenge bzw. Losgröße mit Hilfe der klassischen Bestellmengenformel bzw. Losgrößenformel.

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

■ Planungssituation des Abnehmers (A)

- ◆ Der Gesamtbedarf je Periode beträgt b [ME/PE].
- ◆ Bei einer Periodendauer von τ Zeiteinheiten erfolgt der Lagerabgang kontinuierlich mit der konstanten Nachfragerate je Zeiteinheit von b/τ [ME/ZE].
- ◆ Der Lagerzugang erfolgt ohne Lieferzeit (unendlich schnell) in gleich großen Losen von x_A [ME].
- ◆ Fehlmengen sind nicht zugelassen (Bestellmenge=Liefermenge).
- ◆ Die Lagerkapazität ist ausreichend.
- ◆ Das Lager ist zu Beginn der Periode leer.

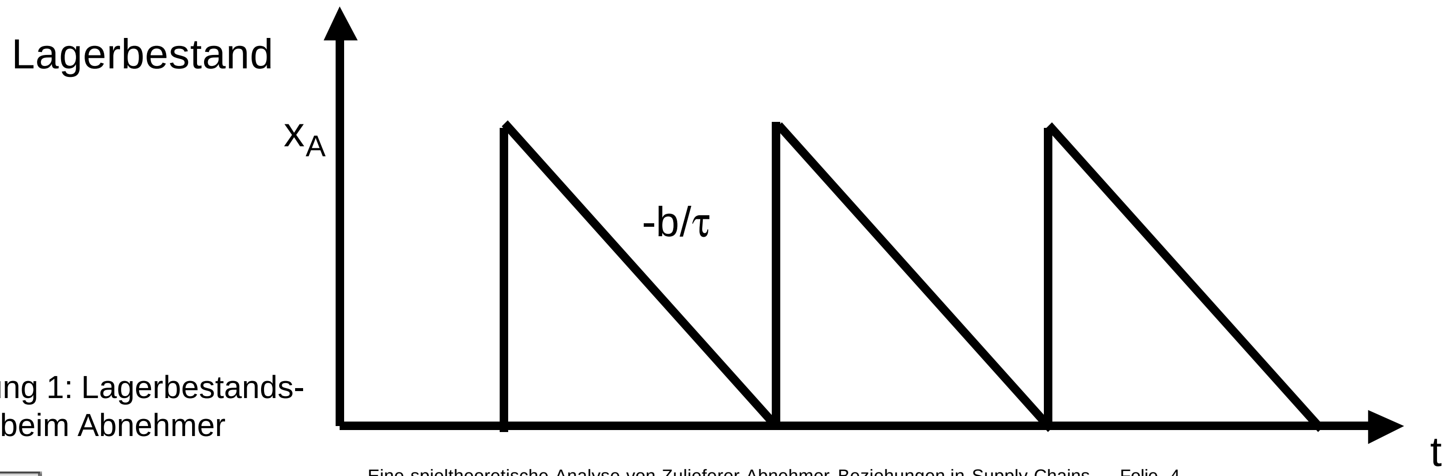

Abbildung 1: Lagerbestands-verlauf beim Abnehmer

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

■ Individuell optimale Bestellpolitik des Abnehmers (A)

- Die bestellfixen Kosten betragen B [GE].
- Die Lagerkosten betragen h_A [GE/ME·PE].
- (A) bestimmt die Bestellmenge unter dem Ziel der Minimierung der entscheidungsrelevanten Kosten je Periode:

$$K^A(x_A) = B \cdot \frac{b}{x_A} + \frac{x_A}{2} \cdot h_A \qquad \rightarrow \text{Min!}$$

- Optimale Bestellmenge des Abnehmers (A):

$$x_A^* = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot b}{h_A}}$$

- Minimale relevante Kosten des Abnehmers (A) je Periode:

$$K^A(x_A^*) = \sqrt{2 \cdot B \cdot b \cdot h_A}$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

■ Planungssituation des Zulieferers (P)

- Die Gesamtnachfrage pro Periode beträgt b [ME/PE].
- Die Periodenkapazität beträgt d [ME/PE].
- Der Lagerzugang erfolgt mit einer konstanten Produktionsrate je Zeiteinheit (Produktionsgeschwindigkeit) d/τ [ME/ZE].
- Es gilt $d \geq b$ bzw. $d/\tau \geq b/\tau$. Nur so kann die Nachfrage befriedigt werden.
- Die Liefermenge entspricht dem Produktionslos x_P [ME]

  („Lot-for-Lot Production Strategy“).

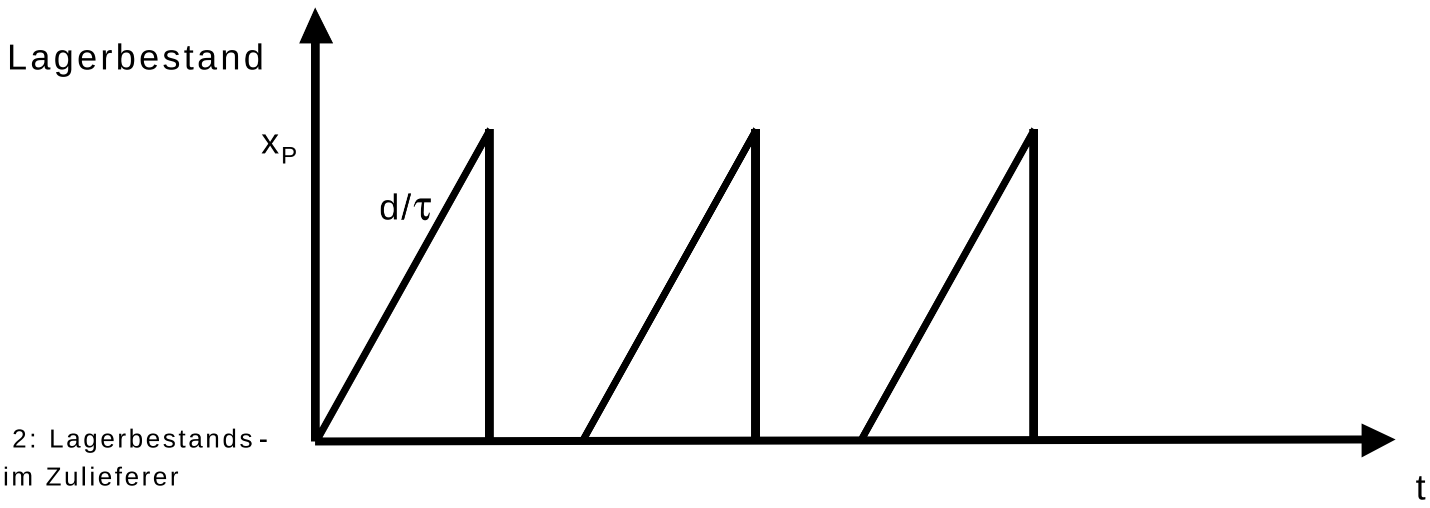

Abbildung 2: Lagerbestands-verlauf beim Zulieferer

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

■ Individuell optimale Produktionspolitik des Zulieferers (P)

- Die Rüstkosten betragen R [GE].
- Die Lagerkosten betragen h_P [GE/ME·PE].
- (P) bestimmt die Losgröße unter dem Ziel der Minimierung der entscheidungsrelevanten Kosten je Periode:

$$K^P(x_P) = R \cdot \frac{b}{x_P} + \frac{x_P}{2} \cdot \frac{b}{d} \cdot h_p \qquad \to \text{Min!}$$

- Optimale Losgröße des Zulieferers (P):

$$x_P^* = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot d}{h_p}}$$

- Minimale relevante Kosten des Zulieferers (P) je Periode:

$$K^P(x_P^*) = b \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot h_p}{d}}$$

1.2 Optimale gemeinsame Bestell- und Produktionspolitik

- Zur Ermittlung der gemeinsamen Bestell- und Produktionspolitik ist die Summe der relevanten Kosten des Abnehmers (A) und des Zulieferers (P) je Periode zu minimieren:

$$K^G(x_G) = \left(B \cdot \frac{b}{x_G} + \frac{x_G}{2} \cdot h_A\right) + \left(R \cdot \frac{b}{x_G} + \frac{x_G}{2} \cdot \frac{b}{d} \cdot h_p\right) \rightarrow \text{Min!}$$

- Optimale gemeinsame Bestell- und Produktionspolitik:

$$x_G^* = \sqrt{\frac{2 \cdot b \cdot (B + R)}{h_A + \frac{b}{d} \cdot h_P}}$$

- Minimale entscheidungsrelevante Gesamtkosten je Periode:

$$K(x_G^*) = \sqrt{2 \cdot b \cdot (B + R) \cdot (h_A + \frac{b}{d} \cdot h_P)}$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

1.3 Vergleich der individuellen und gemeinsamen Bestell- und Produktionspolitiken

- Die Bestellmenge von (A) muss dem Produktionslos von (P) entsprechen. Es gilt $x_A = x_P$.

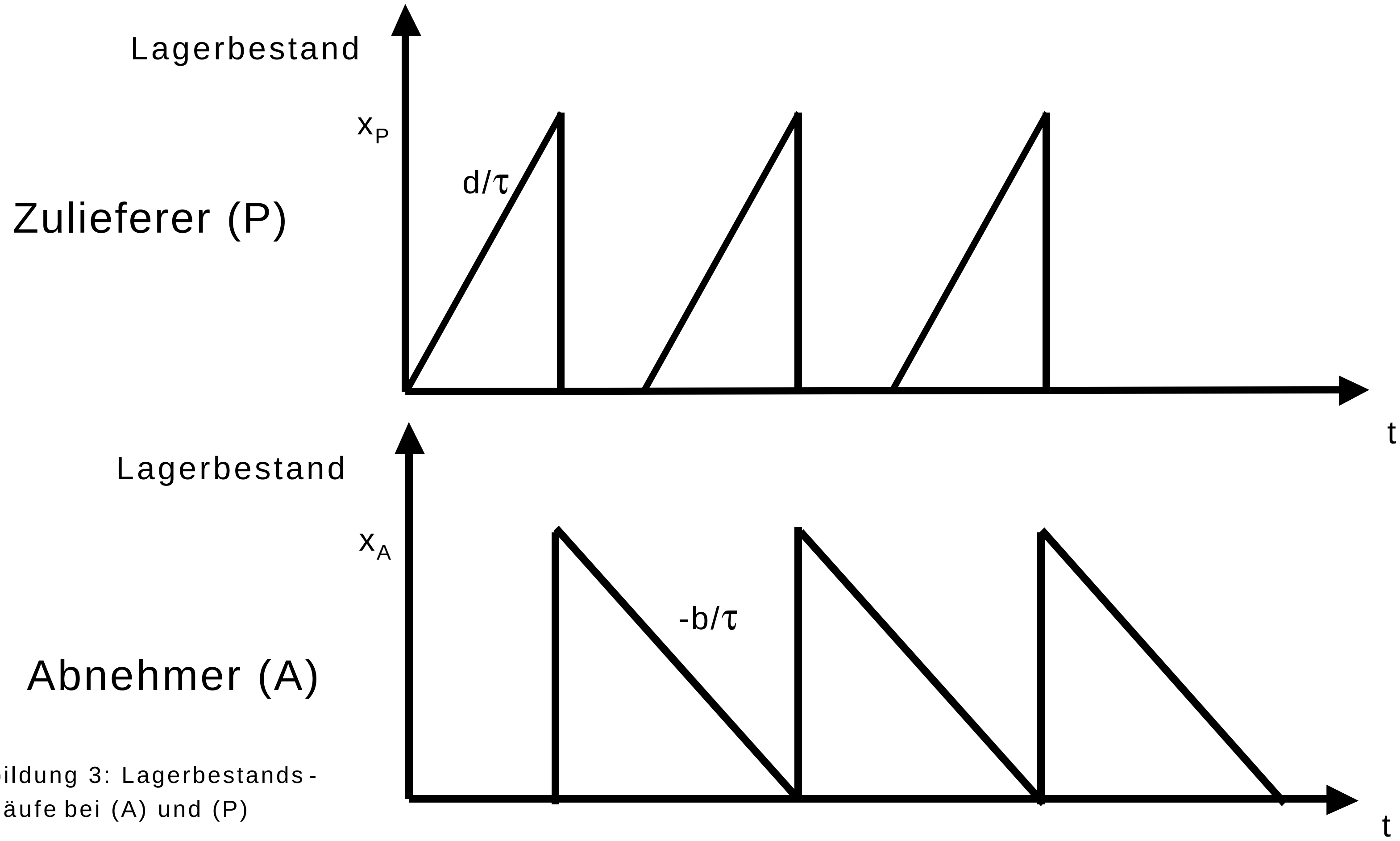

Abbildung 3: Lagerbestands-verläufe bei (A) und (P)

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Verhältnis der Rüstkosten von (P) zu den Bestellkosten von (A) je Periode:

$$\frac{K_R^P(x)}{K_B^A(x)} = \frac{R \cdot \frac{b}{x}}{B \cdot \frac{b}{x}} = \frac{R}{B} = \alpha$$

mit $\alpha > 0$

- Verhältnis der Lagerkosten von (P) zu den Lagerkosten von (A) je Periode:

$$\frac{K_L^P(x)}{K_L^A(x)} = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{b}{d} \cdot h_p}{\frac{x}{2} \cdot h_a} = \frac{b \cdot h_P}{d \cdot h_A} = \beta$$

mit $\beta > 0$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Beziehungen zwischen den Bestell- und Produktionspolitiken:

$$x_A^* = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot x_P^* \qquad x_P^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot x_A^*$$

$$x_G^* = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} \cdot x_A^* \qquad x_G^* = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}} \cdot x_P^*$$

- Nur für $\alpha=\beta$ ist $x_A^*=x_P^*=x_G^*$.
- Für $\alpha\neq\beta$ gilt :

$$x_G^* \in \left]x_A^*, x_P^*\right[$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

Zwischenergebnisse (1)

- Die Bestellmenge von (A) muss dem Produktionslos von (P) entsprechen. Es gilt $x_G=x_A=x_P$.
- Für den Fall $\alpha=\beta$ gilt $x^*_G=x^*_A=x^*_P$.
- Für den Fall $\alpha\neq\beta$ existiert im dargestellten Modell nur dann eine Lösung, wenn
  - (P) sich an die optimale Bestellmenge von (A) anpasst ($x_G=x^*_A=x_P$),
  - (A) sich an die optimale Losgröße von (P) anpasst ($x_G=x_A=x^*_P$.) oder
  - (A) und (P) sich auf eine andere gemeinsame Bestell- und Produktionspolitik einigen, z.B. die Realisierung der optimalen gemeinsamen Bestell- und Produktionspolitik ($x^*_G=x_A=x_P$).

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

Bestell- und Produktionspolitik	Abnehmer (A)	Produzent (P)
$x_A = x_A^*$ $x_P = x_A^* = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot x_P^*$	$K^A(x_A) = K^A(x_A^*) =$ $\sqrt{2 \cdot B \cdot b \cdot h_A}$	$K^P(x_P) = K^P(x_A^*) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \cdot K^P(x_P^*)$
$x_A = x_P^* = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot x_A^*$ $x_P = x_P^*$	$K^A(x_A) = K^A(x_P^*) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \cdot K^A(x_A^*)$	$K^P(x_P) = K^P(x_P^*) =$ $b \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot d}{h_P}}$
$x_A = x_G^* = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} \cdot x_A^*$ $x_P = x_G^* = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}} \cdot x_P^*$	$K^A(x_A) = K^A(x_G^*) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}} \right) \cdot K^A(x_A^*)$	$K^P(x_P) = K^P(x_G^*) =$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}} + \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\alpha}}} \right) \cdot K^P(x_P^*)$

Tabelle 1: Kostenwirkungen alternativer Bestell- und Produktionspolitiken (vgl. Toporowski, 1996)

- Für $\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta>0$ gilt:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)>1 \qquad \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}\right)>1 \qquad \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}}+\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)>1$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)>\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)>\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}}+\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

Zwischenergebnisse (2)

- Ein Abweichen von der individuell optimalen Bestell- bzw. Produktionspolitik ist immer mit einem Anstieg der relevanten Kosten des Abweichenden verbunden.
- Verhalten sich (A) und (P) rational im Sinne der verfolgten Zielsetzungen, so wählen sie ihre jeweils individuell optimale Bestell- bzw. Produktionspolitik x^*_A bzw. x^*_P.
- Für den Fall $\alpha \neq \beta$ existiert im JELS-Modell keine Lösung, da nur für $\alpha = \beta$ auch $x^*_G = x^*_A = x^*_P$ gilt.
- Für den Fall $\alpha \neq \beta$ kann eine gemeinsame Bestell- und Produktionspolitik nur aus **Verhandlungen** zwischen (A) und (P) resultieren.

2. Verhandlungslösungen

2.1 Die Verhandlungssituation

- (A) verfügt über die Marktmacht, seine individuell optimale Bestellmenge x^*_A gegenüber (P) durchzusetzen.

- Für (A) besteht kein Anreiz, von dieser individuell optimalen Bestellpolitik abzuweichen.

- Ohne Verhandlungen wird x^*_A realisiert:

$$K^A(x_A^*) = \sqrt{2 \cdot B \cdot b \cdot h_A} \qquad K^P(x_A^*) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \cdot K^P(x_P^*)$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Damit (A) eine andere Menge als x^*_A wählt, muss mindestens der daraus resultierende Kostenanstieg bei (A) durch Zahlungen von (P) an (A) kompensiert werden.

- (P) kann versuchen, (A) durch Kompensationszahlungen zur Wahl einer anderen als dessen individuell optimalen Bestellpolitik zu bewegen.

- (P) möchte (A) das Angebot unterbreiten, eine gemeinsame Bestell- und Produktionspolitik x_G gegen eine Kompensationszahlung in Höhe von z zu wählen.

- Es liegt ein Ultimatumsspiel vor, d.h. (P) macht ein „take-it-or-leave-it“-Angebot. Das Spiel ist sofort nach Annahme oder Ablehnung durch (A) beendet.

- Es entstehen keine Transaktionskosten, z.B. Informationskosten oder Verhandlungskosten.

- Welche Bestell- und Produktionspolitik $x_G = x_A = x_P$ ergibt sich als Verhandlungslösung?

2.2 Verhandlungslösungen bei vollständiger Information

- (P) verfügt über vollständige Informationen bezüglich der Funktion der relevanten Kosten von (A).

- Das Optimierungsproblem von (P) lautet:

$$\min\ K^P(x_G, z) = K^P(x_G) + z$$

u.d.N.

$$K^A(x_A^*) - K^A(x_G) + z \geq 0 \qquad \text{Teilnahmebedingung}$$

$$x_G, z \geq 0$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial x_G} = \frac{\partial K^P(x_G)}{\partial x_G} + \lambda \cdot \frac{\partial K^A(x_G)}{\partial x_G} \geq 0$$

$$x_G \cdot \left(\frac{\partial K^P(x_G)}{\partial x_G} + \lambda \cdot \frac{\partial K^A(x_G)}{\partial x_G} \right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 1 - \lambda \geq 0$$

$$z \cdot (1 - \lambda) = 0$$

$$-\frac{\partial L}{\partial \lambda} = K^A(x_A^*) - K^A(x_G) + z \geq 0$$

$$\lambda \cdot \left(K^A(x_A^*) - K^A(x_G) + z\right) = 0$$

$$x_G, z, \lambda \geq 0$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Für z>0 folgt: $\lambda = 1$

- Mit $\lambda = 1$ und x_G>0 ergibt sich:

$$\frac{\partial K^P(x_G)}{\partial x_G} + \frac{\partial K^A(x_G)}{\partial x_G} = 0$$

$$z = K^A(x_G) - K^A(x_A^*)$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- (P) wählt genau die Menge x^*_G, die sich bei einer gemeinsamen Festlegung der Bestell- und Produktionspolitik im JELS-Modell ergibt:

$$x_G^* = \sqrt{\frac{2 \cdot b \cdot (B + R)}{h_A + \frac{b}{d} \cdot h_P}}$$

- Die angebotene Kompensationszahlung von (P) an (A) beträgt:

$$z(x_G^*) = K^A(x_G^*) - K^A(x_A^*)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}} \right) \cdot \sqrt{2 \cdot B \cdot b \cdot h_A} \right] - \sqrt{2 \cdot B \cdot b \cdot h_A}$$

- Verhält sich (A) rational im Sinne seiner Zielsetzung, so nimmt er das Angebot an, da er nicht schlechter gestellt wird als bei Wahl seiner individuell optimalen Bestellmenge x^*_A.

- Lohnt sich dieses Angebot für (P) ?
- Damit sich das Angebot für (P) lohnt, muss gelten:

$$K^P(x_G^*) + z < K^P(x_A^*) \quad \Leftrightarrow$$

$$K^P(x_G^*) + K^A(x_G^*) < K^P(x_A^*) + K^A(x_A^*) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}} + \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\alpha}}} \right) \cdot K^P(x_P^*) + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}} \right) \cdot K^A(x_A^*)$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \right) \cdot K^P(x_P^*) + K^A(x_A^*)$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{1}{\beta}}}+\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\beta}}{1+\frac{1}{\alpha}}}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+\beta}}+\sqrt{\frac{1+\beta}{1+\alpha}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}-\frac{1}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}}{\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)}<1$$

- Das Angebot lohnt sich für den Produzenten (P), da die Bedingung für alle $\alpha,\beta>0$, mit $\alpha\neq\beta$, erfüllt ist.

- (P) realisiert einen Verhandlungsgewinn in Höhe von:

$$V^P(x_G^*)=K^P(x_A^*)-\left(K^P(x_G^*)+z(x_G^*)\right)>0$$

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

3. Fazit und Ausblick

- Verhandlungslösungen bei vollständiger Information
  - (P) verhält sich wie eine zentrale Planungsinstanz und wählt genau die Menge x^*_G, die sich bei gemeinsamer Festlegung der Bestell- und Produktionspolitik im JELS-Modell ergibt.
  - Verhält (A) sich rational im Sinne seiner Zielsetzung, so nimmt er das Angebot an, da er nicht schlechter gestellt wird als bei Realisierung seiner individuell optimalen Bestellmenge.
  - (P) erhält den gesamten Verhandlungsgewinn.
  - Verhandlungen führen bei vollständiger Information genau zur gemeinsamen, optimalen Bestell- und Produktionspolitik x^*_G, unabhängig davon, wer die Marktmacht besitzt seine individuell optimale Menge durchzusetzen und auch unabhängig davon wer das Angebot abgibt.

Seminar für Logistik und Verkehr
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

- Weiterführende Analysen:
  - Analyse des Verhandlungsprozesses bei unvollständiger Information.
  - Analyse des Verhandlungsprozesses bei mehrstufigen Spielen.
  - Analyse der Zulieferer-Abnehmer-Beziehungen, für den Fall, dass der Produzent keine „Lot-for-Lot Production Strategy“ verfolgt.
  - Analyse der Zulieferer-Abnehmer-Beziehungen, für den Fall, dass Produzent und Abnehmer dynamische Modelle zur Bestell- und Losgrößenplanung verwenden.