

Eine nichtgeometrische Konstruktion der Spektren $P(n)$
und
Multiplikative Automorphismen von $K(n)$

Christian Nassau

4. Oktober 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Konstruktion der BP-Modulspektren $P(n)$	2
1.1	Bordismtheorie mit Singularitäten - Überblick	2
1.2	Voraussetzungen und erste Folgerungen	6
1.3	Konstruktion der Modulspektrenstruktur	7
1.4	Primitive Elemente	10
1.5	Konstruktion der Multiplikation auf M	14
1.6	Die Algebrenstruktur von $M_*(M)$	19
1.7	Anwendung auf BP und $P(n)$	25
2	Über $P(n)$ und $K(n)$ für $p = 2$	28
2.1	Vorbereitungen	28
2.2	Formale Gruppen	30
2.3	Zur Konstruktion von $K(n)$	32
2.4	Multiplikative und antimultiplikative Automorphismen von $K(n)$	35
A	BP-zulässige Produkte $P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ für $p = 2$	39
	Literaturverzeichnis	43

1 Konstruktion der BP-Modulspektren $P(n)$

1.1 Bordismtheorie mit Singularitäten - Überblick

Bordismtheorien sind geometrisch definierte verallgemeinerte Homologie- und Cohomologietheorien, die in Analogie zur klassischen singulären Homologie- bzw. Cohomologie definiert werden können. In der klassischen Homologie betrachtet man stetige Abbildungen $f : \Delta \rightarrow X$ „kompakter, randloser simplizialer Komplexe“ Δ in den zu untersuchenden Raum X , Zykel genannt, unter Identifikation solcher Zykel $f_1 : \Delta_1 \rightarrow X$, $f_2 : \Delta_2 \rightarrow X$, die sich stetig auf einen kompakten simplizialen Komplex $\tilde{\Delta}$ mit „ $\partial\tilde{\Delta} = \Delta_1 \amalg -\Delta_2$ “ fortsetzen lassen. Bordismtheorien erhält man, indem man überall simpliziale Komplexe durch differenzierbare Mannigfaltigkeiten (evtl. mit einer zusätzlichen Struktur, z.B. einer Orientierung o.Ä.) ersetzt. Erstaunlicherweise sind die Koeffizientengruppen und Operationenalgebren dieser Theorien in vielen Fällen berechenbar (vgl. [St]). Die klassische Konstruktion der Fundamentalklasse einer (im geeigneten Sinne orientierten) Mannigfaltigkeit definiert überdies eine natürliche Transformation in die gewöhnliche Homologie mit geeigneten Koeffizientengruppen, die sogenannte Thom-Reduktion.

Wir werden uns im folgenden mit der Bordismtheorie $MU_*(-)$ „komplex-orientierter“ Mannigfaltigkeiten, bzw. deren p -lokaler Form $BP_*(-)$ für eine fest gewählte Primzahl p , beschäftigen. Die genaue Definition dieser „komplexen Orientierungen“ findet man z.B. in dem Buch von Stong. Dort (oder – etwas moderner – in [R]) wird auch gezeigt, daß MU_* ein Polynomring $Z[x_1, x_2, \dots]$ mit $x_i \in \pi_{2i}(MU)$ ist. Das kartesische Produkt von Mannigfaltigkeiten definiert eine Ringspektrenstruktur auf MU . Die Thom-Reduktion $T : MU \rightarrow H$ führt in diesem Fall in die gewöhnliche Homologie mit Koeffizienten in Z .

Bordismtheorien von „Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten“ wurden erfunden um diesen Morphismus $T : MU \rightarrow H$ zu faktorisieren. Ist $I = (P_0, P_1, \dots, P_n) \subset MU_*$ ein reguläres Ideal, so liefert eine Konstruktion, die der Idee nach auf Sullivan zurückgeht, deren Ausarbeitung aber auf Baas (vgl. [Ba]) warten mußte, intermediäre Theorien $MU(P_0), MU(P_0, P_1), \dots, MU(P_0, P_1, \dots, P_n)$ mit $\pi_*(MU(P_0, \dots, P_n)) = MU_*/(P_0, \dots, P_n)$ und eine Faktorisierung von $T : MU \rightarrow H$ in der Form

$$MU \xrightarrow{\eta_0} MU(P_0) \xrightarrow{\eta_1} \dots \xrightarrow{\eta_n} MU(P_0, \dots, P_n) \longrightarrow \dots \longrightarrow H.$$

Diese Theorien sind MU -Modultheorien und (zumindest wenn $MU_*/(P_0)$ in jeder Dimension endlich ist, vgl. [W76], 3.18) durch Cofaserfolgen (die Baas-Sullivan-Folgen)

$$\begin{array}{ccc} MU(P_0, \dots, P_i) & \xrightarrow{\cdot P_{i+1}} & MU(P_0, \dots, P_i) \\ & \searrow \partial_{i+1} & \swarrow \eta_{i+1} \\ & & MU(P_0, \dots, P_{i+1}) \end{array}$$

verbunden.

Die genaue Definition einer Mannigfaltigkeit mit Singularitäten – im folgenden als MmS abgekürzt – vom Typ (P_0, \dots, P_n) ist ziemlich technisch und wird hier nicht gebraucht. Die oben erwähnte MU -Modulspektrenstruktur auf den $MU(P_0, \dots, P_n)$ folgt sehr leicht aus der geometrisch-kombinatorischen Definition der MmS. Schwierig ist es dagegen, je zwei MmS M_1 und M_2 eine ebensolche MmS $M_1 \times M_2$ als Produkt zuzuordnen (vgl. dazu [Mi], [Mo]). Eleganter funktioniert die Konstruktion einer Ringspektrenstruktur auf diesen verallgemeinerten Bordismenspektren – zumindest in interessanten Fällen – mit den Methoden von Würzler ([W77], wiewohl der dort gegebene Beweis der Assoziativität trugschlüssig ist). Seine Methode hat den Vorteil, keinen direkten Bezug

auf die geometrische Definition zu nehmen. Er benötigt allerdings das Lemma von Johnson-Wilson-Morava ([J-W], Appendix), das die MU-Modulspektrenstruktur der $MU(P_0, \dots, P_i)$ betrifft.

Tatsächlich legen die Baas-Sullivan-Folgen eine rein homotopietheoretische Konstruktion der Spektren $MU(P_0, \dots, P_i)$ nahe: Man definiere einfach $MU(P_0, \dots, P_i)$ rekursiv als Cofaser der P_i -Multiplikationsabbildung $MU(P_0, \dots, P_{i-1}) \rightarrow MU(P_0, \dots, P_{i-1})$. Damit das möglich ist, zeige man (aus dieser Definition und ebenfalls rekursiv), daß das so definierte Spektrum $MU(P_0, \dots, P_i)$ wieder ein MU-Modulspektrum ist und daß das Johnson-Wilson-Morava Lemma für diese Modulspektrenstruktur gilt. Man benutze schließlich die Methoden Würgler's dazu, verträgliche Ringspektrenstrukturen auf den $MU(P_0, \dots, P_i)$ anzugeben.

Dieses Programm werden wir – für schöne Singularitätenfolgen – im folgenden ausführen. Wir nehmen dazu an, daß auf $R := MU(P_0, \dots, P_i)$ eine Ringspektrenstruktur bereits konstruiert sei und definieren $M = MU(P_0, \dots, P_{i+1})$ als Cofaser der P_{i+1} -Multiplikationsabbildung $\Sigma^{|P_{i+1}|} R \rightarrow R$. Wir setzen voraus, daß P_{i+1} in R_* nicht nur kein Nullteiler, sondern auch invariant sei. Wir konstruieren in Abschnitt 1.3 eine R -verträgliche R -Modulspektrenstruktur auf M und zeigen das Johnson-Wilson-Morava-Lemma. In Abschnitt 1.4 adaptieren wir die Methoden Würgler's und konstruieren dann in Abschnitt 1.5 eine verträgliche Ringspektrenstruktur auf M .

Unsere Voraussetzungen an R sind dabei zwar ziemlich stark, aber immerhin von den Spektren BP und $P(n)$, $n \geq 1$, erfüllt. BP, das sogenannte Brown-Peterson-Spektrum, ist ein direkter Summand der p -lokalisierten komplexen Bordismtheorie $MU_{(p)}$. Am elegantesten definiert man BP als Bild des Quillen-Idempotents $MU_{(p)} \rightarrow MU_{(p)}$ (d.h. als darstellendes Spektrum der Bildtheorie), BP kann aber auch als p -lokalisierte Form einer Bordismtheorie mit Singularitäten konstruiert werden. Dies ist sogar die Definition, die man normalerweise wählen muß, wenn man „BP-Theorie mit Singularitäten“ definieren will. BP_* enthält invariante reguläre Ideale $I_n = (v_0, \dots, v_{n-1})$ und man setzt $P(n) = BP(v_0, \dots, v_{n-1})$. Um eine von der Geometrie unabhängige Konstruktion der Ringspektren $P(n)$ (für alle Primzahlen p) wird es im folgenden gehen.

Wir fassen die Eigenschaften von BP, die wir zur Konstruktion der BP-Algebrenspektren $P(n)$ brauchen werden in folgendem Satz zusammen. Die verwendeten Begriffe werden danach kurz erläutert.

(1.1.1) Satz. (vgl. hierzu z.B. [R], 4.1–4.3) *Zu jeder Primzahl p existiert das Brown-Peterson-Spektrum BP.*

- (a) *BP ist ein kommutatives Ringspektrum mit dem Koeffizientenring $BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$ mit $|v_i| = 2(p^i - 1)$. Wir setzen $v_0 = p$.*
- (b) *$BP_*(BP)$ ist eine Polynomialalgebra $BP_*[t_1, t_2, \dots]$ mit $|t_i| = 2(p^i - 1)$.*
- (c) *Der Kroneckerhomomorphismus*

$$BP^*(BP) \longrightarrow \text{Hom}_{BP_*}(BP_*(BP), BP^*)$$

ist ein Isomorphismus.

$(BP_, BP_*(BP))$ ist auf kanonische Weise ein Hopf-Algebroid (da $BP_*(BP)$ BP_* -frei ist) und mit $I_n = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) \subset BP_*$ gilt:*

- (d) *I_n ist invariant, d.h. es ist $\eta_R(I_n) \subset I_n \cdot BP_*(BP)$.*

Ein paar Erläuterungen und Erinnerungen sind hier am Platz. Ausführlicher ist dies alles in [A], Ch. 9, [Sw], Ch. 13, und/oder [R], Ch. 2.2, dargestellt.

Zunächst verstehen wir unter einem Ringspektrum ein Spektrum R mit einem Produkt $m : R \wedge R \rightarrow R$ und einer Einheit $i : S \rightarrow R$, sodaß $m(m \wedge \text{id}) = m(\text{id} \wedge m)$ und $\text{id} = m(i \wedge \text{id}) = m(\text{id} \wedge i)$ ist. Kommutativität der Multiplikation wird nicht vorausgesetzt.

Ist R ein Ringspektrum, so ist $R_* = R^{-*}$ ein Ring und $R_*(-) = \pi_*(R \wedge -)$ und $R^*(-) = [-, R]_*$ nehmen ihre Werte in der Kategorie der zweiseitigen R_* -Moduln an. Ist M mit der Operation $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ ein linksseitiges R -Modulspektrum, so sind $M_*(-)$ und $M^*(-)$ auf natürliche Weise R_* -Linksmoduln. Genauso bei Operation von rechts.

Auf $R_*(R)$ ist durch die Zusammensetzung

$$R_*(R) \otimes R_*(R) \xrightarrow{\Delta} R_*(R \wedge R) \xrightarrow{m_*} R_*(R)$$

eine Multiplikation definiert (das Pontrjagin-Produkt). Δ ist dabei das äußere Homologieprodukt. $R_*(R)$ wird damit zu einer zweiseitigen R_* -Algebra, mit der Linkseinheit

$$\eta_L := \pi_*(\text{id} \wedge i) : R_* \rightarrow R_*(R),$$

der Rechtseinheit

$$\eta_R := \pi_*(i \wedge \text{id}) : R_* \rightarrow R_*(R),$$

einer Augmentationsabbildung

$$\epsilon := \pi_*(m) : R_*(R) \rightarrow R_*$$

und einem kanonischen Antiautomorphismus

$$c : R_*(R) \rightarrow R_*(R),$$

der von der Vertauschungsabbildung $T : R \wedge R \rightarrow R \wedge R$ induziert wird.

Ist $R_*(R)$ ein flacher R_* -Modul, so ist die natürliche Transformation

$$R_*(R) \otimes_{R_*} R_*(X) \xrightarrow{\pi_*(\text{id} \wedge m \wedge \text{id})} R_*(R \wedge X)$$

ein Isomorphismus. (R_* operiert hier auf $R_*(R)$ über die Rechtseinheit η_R). Der Morphismus

$$R \wedge R \cong R \wedge S \wedge R \xrightarrow{\text{id} \wedge i \wedge \text{id}} R \wedge R \wedge R$$

induziert damit in der Homotopie ein Coprodukt $\Delta : R_*(R) \rightarrow R_*(R) \otimes_{R_*} R_*(R)$.

Falls die Multiplikation auf R kommutativ ist, sind diese Abbildungen multiplikativ und definieren auf dem Paar $(R_*, R_*(R))$ die Struktur eines Hopf-Algebroids, d.i. ein Cogruppoid-Objekt in der Kategorie der R_* -Algebren (vgl. [R], Appendix I).

Ein Ideal $I \subset R_*$ heißt nun invariant, falls $\eta_R(I) \subset I \cdot R_*(R)$ ist. Ein Element $v \in R_*$ heißt invariant, falls das von v erzeugte Ideal invariant ist.

Bleibt noch zu erklären, wie der Kroneckerhomomorphismus zustande kommt. Dieser ist ein Spezialfall des Slant-Produkts, das im folgenden ebenfalls gebraucht werden wird.

Für beliebige Spektren E, F, X und Y ist

$$E^*(X \wedge Y) \otimes F_*(Y) \xrightarrow{/} (E \wedge F)^*(X)$$

folgendermaßen definiert. Sei $\alpha \in E^*(X \wedge Y)$, $\beta \in F_*(Y)$. Dann ist $\alpha/\beta \in (E \wedge F)^*(X)$ die Zusammensetzung

$$X \cong X \wedge S \xrightarrow{\text{id} \wedge \beta} X \wedge F \wedge Y \xrightarrow{\text{id} \wedge T} X \wedge Y \wedge F \xrightarrow{\alpha \wedge \text{id}} E \wedge F.$$

Wir benötigen einige Eigenschaften dieses Produkts:

Sind $f : X' \rightarrow X$ und $g : Y \rightarrow Y'$ gegeben und α, β wie oben, so ist $(f \wedge \text{id})^*(\alpha)/\beta = f^*(\alpha/\beta)$ und $\alpha/(g_*(\beta)) = (\text{id} \wedge g)^*(\alpha)/\beta$.

Sind $\sigma : E \rightarrow E'$ und $\tau : F \rightarrow F'$ gegeben, so ist $(\sigma \wedge \tau)(\alpha/\beta) = (\sigma\alpha)/(\tau\beta)$.

Ist eine Paarung $\nu : E \wedge F \rightarrow E$ gegeben, so schreiben wir α/β für $\nu(\alpha/\beta)$.

Wir interessieren uns im folgenden nur für den Fall, daß F ein Ringspektrum und E ein F -Rechts-Modulspektrum ist. Für $x \in F_*$ und α, β wie oben gelten dann die Rechenregeln

$$(\alpha x)/\beta = \alpha/(x\beta), \quad (x\alpha)/\beta = x(\alpha/\beta) \quad \text{und} \quad (\alpha/\beta)x = \alpha/(\beta x).$$

Wir erhalten damit eine natürliche Transformation

$$E^*(X \wedge Y) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_{F_*}(F_*(Y), E^*(X))$$

via $\lambda(\alpha)(\beta) = \alpha/\beta$.

Der Kroneckerhomomorphismus

$$E^*(Y) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}_{F_*}(F_*(Y), E^*)$$

ergibt sich hieraus nach Definition für $X = S$.

1.2 Voraussetzungen und erste Folgerungen

(1.2.1) **Voraussetzung.** R sei ein Ringspektrum, $v \in R_*$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt.

(I) $R_*(R)$ sei mit dem Pontrjagin-Produkt eine freie, kommutative R_* -Algebra.

(II) Der Kroneckerhomomorphismus

$$R^*(R) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), R^*)$$

sei ein Isomorphismus.

Sei $n = |v|$ der Grad von v (als Element von R_*). Wir setzen $\phi = m(v \wedge \text{id}) : \Sigma^n R \rightarrow R$ und definieren M, η und ∂ durch die Cofaserfolge

$$(1.2.A) \quad \dots \longrightarrow \Sigma^n R \xrightarrow{\phi} R \xrightarrow{\eta} M \xrightarrow{\partial} \Sigma^{n+1} R \longrightarrow \dots$$

Dann gelte weiter:

(III) v sei kein Nullteiler von R_* .

(IV) v sei invariant.

(V) Es gelte $m(v \wedge \text{id}) = m(\text{id} \wedge v)$. $\eta m : R \wedge R \rightarrow M$ sei kommutativ.

Wir kommen zu den ersten Folgerungen.

(1.2.2) **Lemma.** *Gelten (I) und (II), so ist*

$$R^*(X \wedge R) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), R^*(X))$$

ein natürlicher Isomorphismus.

Beweis: (I) impliziert, daß die rechte Seite eine Cohomologietheorie ist. Die Natürlichkeit von λ ergibt sich aus der Natürlichkeit des Slant-Produkts. Bleibt also nur noch zu zeigen, daß λ für $X = S$ ein Isomorphismus ist und dies ist gerade die Aussage von (II). \square

(1.2.3) **Lemma.** $\phi_* : R_*(R) \rightarrow R_*(R)$ ist durch Multiplikation mit $\eta_R(v)$ gegeben.

Beweis: ϕ_* ist mit der Konjugation $c : R_*(R) \rightarrow R_*(R)$ und der Homologieoperation $\phi : R_*(R) \rightarrow R_*(R)$ durch $\phi_* = c\phi c$ verbunden. Deswegen ist $\phi_*(x) = c(\phi(c(x))) = c(vc(x)) = c(v)x = \eta_R(v)x$. \square

(1.2.4) **Satz.** *Seien R und v wie in 1.2.1. Dann gilt:*

(a) Die Sequenz

$$0 \longrightarrow R_* \xrightarrow{\phi} R_* \xrightarrow{\eta} M_* \longrightarrow 0$$

ist exakt.

(b) Für jedes X besteht das Bild von

$$(\text{id} \wedge \phi)^* : R^*(X \wedge R) \rightarrow R^*(X \wedge R)$$

nur aus durch v teilbaren Elementen.

(c) Die Sequenz

$$0 \rightarrow R^*(R \wedge \dots \wedge R) \xrightarrow{\phi} R^*(R \wedge \dots \wedge R) \xrightarrow{\eta} M^*(R \wedge \dots \wedge R) \rightarrow 0$$

ist exakt.

(d) Die Sequenz

$$0 \rightarrow M^*(R \wedge \dots \wedge R) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \partial)^*} M^*(R \wedge \dots \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \eta)^*} M^*(R \wedge \dots \wedge R) \rightarrow 0$$

ist exakt.

Beweis: a) folgt unmittelbar aus (III), da ϕ Multiplikation mit v induziert.

1.2.2 reduziert b) auf die Behauptung, daß jedes Element aus $\text{im}[\phi_* : R_*(R) \rightarrow R_*(R)]$ durch v teilbar ist. Dies folgt aus der Invarianz von v mit 1.2.3.

c) folgt daraus, daß Multiplikation mit v auf $R^*(R \wedge \dots \wedge R)$ injektiv operiert. Dies zeigt man durch Induktion nach der Anzahl der Smash-Produkt-Faktoren mit 1.2.2 und (I). Demnach ist nämlich $R^*(R \wedge X)$ isomorph zu einem Produkt dimensionsverschobener Kopien von $R^*(X)$. Der Induktionsanfang ergibt sich aus a).

Aus b) folgt, daß

$$\begin{aligned} & \text{im}[(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \phi)^* : R^*(R \wedge \dots \wedge R) \rightarrow R^*(R \wedge \dots \wedge R)] \\ & \subset \text{im}[\phi : R^*(R \wedge \dots \wedge R) \rightarrow R^*(R \wedge \dots \wedge R)] \end{aligned}$$

ist. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow R^*(R \wedge \dots \wedge R) & \xrightarrow{\phi} & R^*(R \wedge \dots \wedge R) & \xrightarrow{\eta} & M^*(R \wedge \dots \wedge R) & \rightarrow & 0 \\ (\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \phi)^* \downarrow & & (\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \phi)^* \downarrow & & (\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \phi)^* \downarrow & & \\ 0 \rightarrow R^*(R \wedge \dots \wedge R) & \xrightarrow{\phi} & R^*(R \wedge \dots \wedge R) & \xrightarrow{\eta} & M^*(R \wedge \dots \wedge R) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

sind außerdem nach c) die Zeilen exakt. Man sieht damit, daß $(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \phi)^* : M^*(R \wedge \dots \wedge R) \rightarrow M^*(R \wedge \dots \wedge R)$ null ist und dies impliziert d). \square

1.3 Konstruktion der Modulspektrenstruktur

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß auf M eine verträgliche R -Modulspektrenstruktur $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ definiert werden kann und daß für diese das verallgemeinerte Johnson-Wilson-Morava-Lemma gilt, falls R_* in geraden Dimensionen konzentriert ist.

Dabei nennen wir eine R -Modulspektrenstruktur $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ verträglich, falls sie das Diagramm

$$(1.3.A) \quad \begin{array}{ccccccc} \Sigma^n R \wedge R & \xrightarrow{\text{id} \wedge \phi} & R \wedge R & \xrightarrow{\text{id} \wedge \eta} & R \wedge M & \xrightarrow{\text{id} \wedge \partial} & \Sigma^{n+1} R \wedge R \\ \Sigma^n m \downarrow & & m \downarrow & & & & \Sigma^{n+1} m \downarrow \\ \Sigma^n R & \xrightarrow{\phi} & R & \xrightarrow{\eta} & M & \xrightarrow{\partial} & \Sigma^{n+1} R \end{array}$$

kommutativ ergänzt. Der Beweis des folgenden zentralen Lemmas wird eigentlich erst nach der Lektüre von Abschnitt 1.4 verständlich.

(1.3.1) Lemma. *Es existiert eine assoziative Füllung von 1.3.A.*

Beweis: Wähle ein $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ das 1.3.A kommutativ ergänzt. Ein solches ν existiert, da nach (V) das bereits existierende Quadrat kommutiert und beide Zeilen des Diagramms Cofaserfolgen sind. Wir zeigen daß ein $\gamma \in M^*(R \wedge M)$ existiert, für das $\bar{\nu} = \nu - \gamma$ assoziativ ist. Aus der Konstruktion von γ wird auch ersichtlich sein, daß $\bar{\nu}$ ebenfalls eine Füllung von 1.3.A ist.

Sei $A = \nu(\text{id} \wedge \nu) - \nu(m \wedge \text{id}) \in M^*(R \wedge R \wedge M)$ der Assoziativitätsdefekt von ν . Da m assoziativ ist und $\nu(\text{id} \wedge \eta) = \eta m$ gilt, ist

$$(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \eta)^*(A) = 0.$$

Also existiert ein $B \in M^*(R \wedge R \wedge R)$ mit

$$(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^*(B) = A.$$

Dabei ist $\partial B = 0$, da $\partial : M^*(R \wedge R \wedge R) \rightarrow R^*(R \wedge R \wedge R)$ nach 1.2.4c) null ist.

Nun ist

$$\nu(\text{id} \wedge B) - B(m \wedge \text{id} \wedge \text{id}) + B(\text{id} \wedge m \wedge \text{id}) - B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge m) = 0,$$

denn

$$\begin{aligned} & (\text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^*(\nu(\text{id} \wedge B) - B(m \wedge \text{id} \wedge \text{id}) + B(\text{id} \wedge m \wedge \text{id}) - B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge m)) \\ &= \nu(\text{id} \wedge A) - A(m \wedge \text{id} \wedge \text{id}) + A(\text{id} \wedge m \wedge \text{id}) - A(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \nu) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu(\text{id} \wedge \nu)) - \nu(\text{id} \wedge \nu)(m \wedge \text{id} \wedge \text{id}) + \nu(\text{id} \wedge \nu)(\text{id} \wedge m \wedge \text{id}) - \nu(\text{id} \wedge \nu)(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \nu) \\ &\quad - \nu(\text{id} \wedge \nu(m \wedge \text{id})) + \nu(m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id}) - \nu(m \wedge \text{id})(\text{id} \wedge m \wedge \text{id}) + \nu(m \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \nu) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu(\text{id} \wedge \nu)) - \nu(m \wedge \nu) + \nu(\text{id} \wedge \nu(m \wedge \text{id})) - \nu(\text{id} \wedge \nu(\text{id} \wedge \nu)) \\ &\quad - \nu(\text{id} \wedge \nu(m \wedge \text{id})) + \nu(m(m \wedge \text{id}) \wedge \text{id}) - \nu(m(\text{id} \wedge m) \wedge \text{id}) + \nu(m \wedge \nu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und $(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^* : M^*(R \wedge R \wedge R \wedge R) \rightarrow M^*(R \wedge R \wedge R \wedge M)$ ist nach 1.2.4d) injektiv.

Setze $C = B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge i) \in M^*(R \wedge R)$. Dann ist

$$\begin{aligned} B &= B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge m)(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge i) \\ &= \nu(\text{id} \wedge B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge i)) - B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge i)(m \wedge \text{id}) + B(\text{id} \wedge \text{id} \wedge i)(\text{id} \wedge m) \\ &= \nu(\text{id} \wedge C) - C(m \wedge \text{id}) + C(\text{id} \wedge m). \end{aligned}$$

Sei $\gamma = (\text{id} \wedge \partial)^*(C) \in M^*(R \wedge M)$. Da ∂C wegen 1.2.4c) null ist, ist auch $\partial \gamma = \partial(\text{id} \wedge \partial)^*(C) = (\text{id} \wedge \partial)^*(\partial C)$ null. Deswegen ist auch

$$\gamma(\text{id} \wedge \gamma) = C(\text{id} \wedge \partial \gamma) = 0.$$

Wir zeigen nun, daß $\bar{\nu} = \nu - \gamma$ assoziativ ist:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) - \bar{\nu}(m \wedge \text{id}) &= \nu(\text{id} \wedge \nu) - \gamma(\text{id} \wedge \nu) - \nu(\text{id} \wedge \gamma) + \gamma(\text{id} \wedge \gamma) \\ &\quad - \nu(m \wedge \text{id}) + \gamma(m \wedge \text{id}) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu) - \nu(m \wedge \text{id}) \\ &\quad - C(\text{id} \wedge \partial \nu) - \nu(\text{id} \wedge C)(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial) + C(m \wedge \partial) \\ &= A - (\text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^*(C(\text{id} \wedge m) + \nu(\text{id} \wedge C) - C(m \wedge \text{id})) \\ &= A - (\text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^*(B) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem ist $\bar{\nu}$ wegen $(\text{id} \wedge \eta)^*(\gamma) = 0$ und $\partial \gamma = 0$ ebenfalls eine Füllung von 1.3.A □

Der eben gegebene Beweis scheint auf den ersten Blick nur aus ad-hoc-Konstruktionen und Rechnungen zu bestehen. Die Argumentation wird aber nach Einführung der Kokettenkomplexe $C_E^*(F, G)$ in 1.4.4 etwas transparenter. (vgl. Anmerkung 1.4.6. Dort wird auch gezeigt, daß die eben konstruierte Modulspektrenstruktur im wesentlichen, d.h. bis auf Automorphismen von M , eindeutig bestimmt ist.)

(1.3.2) Lemma. *Jede assoziative Füllung ν von 1.3.A ist eine R -Modulspektrenstruktur, d.h. es ist $\nu(i \wedge \text{id}) = \text{id}$.*

Beweis: Setze $\theta = \nu(i \wedge \text{id})$. Da $\eta : \pi_*(R) \rightarrow \pi_*(M)$ surjektiv ist und $\theta\eta = \nu(i \wedge \eta) = \eta m(i \wedge \text{id}) = \eta$ ist, ist $\pi_*(\theta) : \pi_*(M) \rightarrow \pi_*(M)$ die Identität, θ nach dem Whitehead-Theorem also eine Homotopieäquivalenz.

Da außerdem $\theta = \nu(i \wedge \text{id}) = \nu(m(i \wedge i) \wedge \text{id}) = \nu(i \wedge \nu(i \wedge \text{id})) = \theta\theta$ ist, ist $\theta = \text{id}$. \square

(1.3.3) Lemma. *(Johnson-Wilson-Morava, vgl. [J-W], Appendix) Ist ν eine assoziative Füllung von 1.3.A und ist $M^{-1} = M_1$ null, so ist $\nu(v \wedge \text{id}) = 0$.*

Beweis: Setze $\psi = \nu(v \wedge \text{id})$. Da $\eta^*(\psi) = \nu(v \wedge \eta) = \eta m(v \wedge \text{id}) = \eta\psi = 0$ ist, ist $\psi = \partial^*(\bar{\psi})$ mit $\bar{\psi} \in M^*(R)$. Dabei ist

$$\begin{aligned} (\text{id} \wedge \partial)^*(\nu(\text{id} \wedge \bar{\psi}) - \bar{\psi}m) &= \nu(\text{id} \wedge \psi) - \psi\nu \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu(v \wedge \text{id})) - \nu(v \wedge \nu) \\ &= \nu(m(\text{id} \wedge v) \wedge \text{id}) - \nu(v \wedge \nu) \\ &= \nu(m(v \wedge \text{id}) \wedge \text{id}) - \nu(v \wedge \nu) \\ &= \nu(v \wedge \nu) - \nu(v \wedge \nu) = 0, \end{aligned}$$

sodaß $\nu(\text{id} \wedge \bar{\psi}) - \bar{\psi}m = 0$ ist. Sei $\xi = \bar{\psi}i \in M^*$. Dann ist $\bar{\psi} = \bar{\psi}m(\text{id} \wedge i) = \nu(\text{id} \wedge \bar{\psi}i) = \nu(\text{id} \wedge \xi)$. Dabei ist $|\xi| = |\nu(\text{id} \wedge \xi)| = |\bar{\psi}| = |\psi| - |\partial| = |v| - (|v| + 1) = -1$. Nach Voraussetzung ist also $\xi = 0$, sodaß auch $\psi = \partial^*(\nu(\text{id} \wedge \xi)) = 0$ wie behauptet. \square

Wir fassen zusammen:

(1.3.4) Satz. *Unter den Voraussetzungen von 1.2.1 existiert auf M eine R -Modulspektrenstruktur $\nu : R \wedge M \rightarrow M$, die 1.3.A kommutativ ergänzt. Ist $M_1 = M^{-1}$ null, so operiert v auf $M^*(-)$ und $M_*(-)$ trivial.*

1.2.2 läßt sich nun noch ergänzen:

(1.3.5) Lemma. *Das Slant-Produkt induziert einen natürlichen Isomorphismus*

$$M^*(X \wedge R) \xrightarrow{\lambda} \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), M^*(X)).$$

Beweis: Dies folgt wie in 1.2.2 aus der Isomorphie im Spezialfall $X = S$. Um diese einzusehen

betrachtet man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
R^*(R) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), R^*) \\
\phi \downarrow & & \phi \downarrow \\
R^*(R) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), R^*) \\
\eta \downarrow & & \eta \downarrow \\
M^*(R) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}_{R_*}(R_*(R), M^*) \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Hier sind die Spalten wegen (I), 1.2.4c) und 1.2.4a) exakt und die ersten beiden horizontalen Morphismen sind nach (II) Isomorphismen. Die Behauptung folgt mit dem Fünferlemma. \square

Damit können wir 1.2.4 um eine weitere exakte Sequenz ergänzen:

(1.3.6) Lemma. $M_1 = M^{-1}$ sei null. Dann gilt:

- (a) Für jedes Spektrum X ist $(\text{id} \wedge \phi)^* : M^*(X \wedge R) \rightarrow M^*(X \wedge R)$ null.
(b) Für jedes X ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow M^*(X \wedge R) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^*} M^*(X \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^*} M^*(X \wedge R) \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis: In 1.3.5 ist $(\text{id} \wedge \phi)^*$ zu $\phi_* : R_*(R) \rightarrow R_*(R)$ adjungiert, und im ϕ_* besteht nur aus durch v teilbaren Elementen. a) folgt, da $vM^*(X)$ für jedes X null ist.

b) ist eine unmittelbare Folgerung aus a). \square

1.4 Primitive Elemente

Wir kommen nun zur Konstruktion einer Ringspektrenstruktur $\mu : M \wedge M \rightarrow M$ auf M , die mit der R -Modulspektrenstruktur im folgenden Sinne verträglich ist.

(1.4.1) Definition. Eine Ringspektrenstruktur $\mu : M \wedge M \rightarrow M$ heißt zulässig, falls

$$(1.4.A) \quad \begin{array}{ccccc}
R \wedge R \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} & R \wedge M \wedge R \wedge M & \xrightarrow{\nu \wedge \nu} & M \wedge M \\
\text{id} \wedge \text{id} \wedge \mu \downarrow & & & & \mu \downarrow \\
R \wedge R \wedge M & \xrightarrow{m \wedge \text{id}} & R \wedge M & \xrightarrow{\nu} & M
\end{array}$$

kommutiert und $\nu = \mu(\eta \wedge \text{id})$, $\mu(\text{id} \wedge \eta) = \nu T$ ist. (vgl. dazu [W86], 2.3)

Wir können diese Forderung etwas umformulieren. $R_2 := R \wedge R$ wird mit der Zusammensetzung

$$R \wedge R \wedge R \wedge R \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} R \wedge R \wedge R \wedge R \xrightarrow{m \wedge m} R \wedge R$$

als Multiplikation $m_2 : R_2 \wedge R_2 \rightarrow R_2$ zu einem Ringspektrum und $M \wedge M$ durch die obere Zeile von 1.4.A zu einem R_2 -Modulspektrum. Die untere Zeile definiert eine Operation $R_2 \wedge M \rightarrow M$ und unter Ausnutzung von (V) kann man nachrechnen, daß M damit zu einem R_2 -Modulspektrum wird (vgl. 1.5.1).

Setzen wir $E = R_2$, $F = M \wedge M$ und $G = M$, so sagt die Kommutativität von 1.4.A gerade, daß μ im Sinne der folgenden Definition (E, F, G) -primitiv sein soll.

(1.4.2) Definition. Ist E ein Ringspektrum mit der Multiplikation $m_E : E \wedge E \rightarrow E$ und sind F und G mit den Operationen ν_F und ν_G E -Modulspektren, so heißt ein $\alpha \in G^*(F)$ (E, F, G) -primitiv, falls

$$\begin{array}{ccc} E \wedge F & \xrightarrow{\nu_F} & F \\ \text{id} \wedge \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow \\ E \wedge G & \xrightarrow{\nu_G} & G \end{array}$$

kommutiert. Die Menge der (E, F, G) -primitiven Elemente aus $G^*(F)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{P}_E(F, G)$.

Falls G aus dem Zusammenhang klar ist, werden wir es aus der Notation weglassen.

(1.4.3) Anmerkung. Nach dieser Definition ist ein $\alpha : F \rightarrow G$ also genau dann (E, F, G) -primitiv, wenn es E -linear ist. Wir haben trotzdem die etwas umständlichere Bezeichnung (E, F, G) -primitiv gewählt um mit den Begriffsbildungen von [W77] kompatibel zu bleiben.

In den Bezeichnungen dieses Artikels ist nämlich ein $\alpha \in h^*(\text{BP} \wedge \text{P}(n))$ genau dann ein primitives Element des (profiniten) $h^*(\text{BP} \wedge \text{BP})$ -Comoduls $h^*(\text{BP} \wedge \text{P}(n))$, wenn es in $\mathcal{P}_{\text{BP} \wedge \text{BP}}(\text{BP} \wedge \text{P}(n), h)$ liegt (vgl. [W77], 4.7, 4.10).

Ist G wie in [W77] eine BP-Modultheorie mit lokal endlichen Koeffizientengruppen und $E = \text{BP}$, F ein BP-Modulspektrum, so hat man nach [W77], Lemma 3.3, einen stetigen natürlichen Isomorphismus

$$G^*(E) \hat{\otimes} G^*(X) \xrightarrow{\cong} G^*(E \wedge X)$$

der auf Elementartensoren durch $\eta\alpha \otimes \beta \mapsto \nu_G(\alpha \wedge \beta)$ gegeben ist. ($\eta : \text{BP} \rightarrow G$ wird in [W77] mit μ_h bezeichnet. Man beachte, daß $\eta : E^*(E) \rightarrow G^*(E)$ surjektiv ist.) Die Multiplikation $m_E : E \wedge E \rightarrow E$ induziert mittels dieser Identifikation auf $G^*(E)$ ein Coprodukt $\Delta : G^*(E) \rightarrow G^*(E) \hat{\otimes} G^*(E)$ und $\nu_F : E \wedge F \rightarrow F$ eine Cooperation $\Delta : G^*(F) \rightarrow G^*(E) \hat{\otimes} G^*(F)$.

$G^*(E)$ wird dadurch zu einer profiniten Coalgebra und $G^*(F)$ zu einem profiniten $G^*(E)$ -Comodul.

Wie man problemlos nachrechnet ist G^* mit der Cooperation $\bar{\Delta}(\alpha) = \eta \otimes \alpha$ ebenfalls ein $G^*(E)$ -Comodul.

In diesem Setting ist dann $\mathcal{P}_E(F, G) = G^* \square_{G^*(E)} G^*(F)$. Dieses Cotensorprodukt ist ja nach Definition der Kern von

$$G^* \hat{\otimes}_{G^*} G^*(F) \xrightarrow{\bar{\Delta} \hat{\otimes} \text{id} - \text{id} \hat{\otimes} \Delta} G^*(E) \hat{\otimes}_{G^*} G^*(F).$$

Benutzt man die Identifikation $G^* \hat{\otimes}_{G^*} G^*(F) \cong G^*(F)$, $\eta i \otimes \alpha \mapsto \alpha$, so liegt ein $\alpha \in G^*(F)$ genau dann in $G^* \square_{G^*(E)} G^*(F)$, wenn $\nu_G(\text{id} \wedge \alpha) = \alpha \nu_F$ ist, d.h. wenn es primitiv ist.

Dieses Cotensorprodukt (und seine derivierten Funktoren) kann man bekanntlich mit dem Cobar-Komplex $C_{G^*(E)}^*(G^*, G^*(F))$ berechnen (vgl. [R], A1.2.11, A1.2.12). Wir schreiben der Kürze halber für diesen Komplex $C_E^*(F, G)$.

Es ist

$$C_E^k(F, G) = G^*(E) \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} G^*(E) \hat{\otimes} G^*(F)$$

und $\delta : C_E^*(F, G) \rightarrow C_E^{*+1}(F, G)$ ist durch

$$\begin{aligned} \delta(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes \beta) &= \eta \otimes \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes \beta \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^i \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{i-1} \otimes \Delta(\alpha_i) \otimes \alpha_{i+1} \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes \beta \\ &+ (-1)^{k+1} \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes \Delta(\beta) \end{aligned}$$

gegeben.

Die profinite Version von [R], A1.2.12, liefert $H^i(C_E^*(F, G)) = \text{Cotor}_{G^*(E)}^i(G^*, G^*(F))$. Insbesondere ist $\mathcal{P}_E(F, G) = H^0(C_E^*(F, G))$.

Im nun folgenden geben wir eine direktere Konstruktion dieses Komplexes an, die ohne die Voraussetzungen Würgler's auskommt.

Seien E, F und G wie in 1.4.2 vorausgesetzt. Wir schreiben E_i für das i -fache Smash-Produkt $E \wedge \dots \wedge E$.

Definiere $d_F : E_i \wedge F \rightarrow E_{i-1} \wedge F$ durch

$$\begin{aligned} d_F &= (m_E \wedge \text{id} \wedge \dots \wedge \text{id}) - (\text{id} \wedge m_E \wedge \text{id} \wedge \dots \wedge \text{id}) + \cdots + \\ &+ (-1)^{i-1} (\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge m_E \wedge \text{id}) + (-1)^i (\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \nu_F). \end{aligned}$$

Wie man unter Zuhilfenahme der Assoziativität von m_E und ν_F sofort nachrechnet ist

$$F \xleftarrow{d_F} E \wedge F \xleftarrow{d_F} E \wedge E \wedge F \xleftarrow{d_F} E \wedge E \wedge E \wedge F \xleftarrow{d_F} \dots,$$

dann ein Kettenkomplex, d.h. es ist $d_F d_F = 0$. Wenden wir $G^*(-)$ auf diesen Kettenkomplex an, so erhalten wir einen Kokettenkomplex

$$G^*(F) \xrightarrow{\delta_F} G^*(E \wedge F) \xrightarrow{\delta_F} G^*(E \wedge E \wedge F) \xrightarrow{\delta_F} G^*(E \wedge E \wedge E \wedge F) \xrightarrow{\delta_F} \dots$$

mit $\delta_F = (d_F)^*$.

Die Moduloperation $E \wedge G \rightarrow G$ definiert außerdem eine natürliche Transformation

$$G^*(X) \xrightarrow{\delta_G} G^*(E \wedge X)$$

durch $\delta_G(\alpha) = \nu_G(\text{id} \wedge \alpha)$. Falls E auf G kommutativ operiert, d.h. falls $\nu_G(m_E \wedge \text{id}) = \nu_G(m_E T \wedge \text{id})$ ist, ist δ_G E_* -linear. (Dies zeigt eine einfache Rechnung. Diese Bedingung wird in unseren Anwendungen erfüllt sein. $\delta_G : G^* \rightarrow G^*(E)$ induziert im profiniten Kontext die $G^*(E)$ -Comodulstruktur $\bar{\Delta}$ auf G^* , vgl. 1.4.3.)

Setze $\delta = \delta_G - \delta_F : G^*(E_i \wedge F) \rightarrow G^*(E_{i+1} \wedge F)$ und $C_E^i(F, G) = G^*(E_i \wedge F)$. Für $i < 0$ sei $C_E^i(F, G) = 0$.

(1.4.4) Satz. $C_E^*(F, G)$ wird mit dem Differential $\delta : C_E^*(F, G) \rightarrow C_E^{*+1}(F, G)$ zu einem Kokettenkomplex.

Dabei ist $\mathcal{P}_E(F, G) = \ker [\delta : C_E^0(F, G) \rightarrow C_E^1(F, G)] = H^0(C_E^*(F, G))$.

Ist F' ein weiteres E -Modulspektrum und $\psi : F' \rightarrow F$ E -linear, so ist die von $(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge \psi)^*$ induzierte Abbildung $\psi^\bullet : C_E^*(F', G) \rightarrow C_E^*(F, G)$ eine Kokettenabbildung.

Beweis: Wie man leicht nachrechnet ist $\delta_F \delta_G = \delta_G \delta_F - \delta_G \delta_F - \delta_F \delta_G + \delta_F \delta_F = 0$.

Die zweite Behauptung folgt, da $\delta(\alpha)$ für $\alpha \in G^*(F)$ durch $\nu_G(\text{id} \wedge \alpha) - \alpha \nu_F$ gegeben ist.

Daß ψ^\bullet mit δ kommutiert, rechnet man ebenfalls einfach nach. \square

In allen von uns im folgenden betrachteten Fällen wird $\mathcal{P}_E(F, G) = H^0(C_E^*(F, G))$ die einzige nicht-verschwindende Homologiegruppe von $C_E^*(F, G)$ sein. Grundlage dazu ist der folgende Satz.

(1.4.5) Satz. *Für jedes Ringspektrum E und jedes E -Modulspektrum G ist $H^i(C_E^*(E, G))$ für $i > 0$ null.*

Außerdem ist $\mathcal{P}_E(E, G) = \text{im} [\delta_G : G^ \rightarrow G^*(E)] \cong G^*$.*

Beweis: Wir zeigen, daß der Kokettenkomplex

$$G^* \xrightarrow{\delta_G} G^*(E) \xrightarrow{\delta} G^*(E \wedge E) \xrightarrow{\delta} G^*(E \wedge E \wedge E) \xrightarrow{\delta} \dots$$

exakt ist. Tatsächlich können wir eine Nullhomotopie direkt angeben. Definiere dazu $H : G^*(E_i) \rightarrow G^*(E_{i-1})$ durch $H(\alpha) = \alpha(\text{id} \wedge \dots \wedge \text{id} \wedge i)$ mit der Einheit $i : S \rightarrow E$ von E . Kurzes Nachdenken ergibt, daß $H\delta_G(\alpha) = \delta_G H(\alpha)$ und $\delta_E H(\alpha) = \pm \alpha + H\delta_E(\alpha)$ ist. Damit ist $H\delta - \delta H = \pm \text{id}$. \square

(Mit 1.4.3 erklärt sich dieser Satz daraus, daß $H^i(C_E^*(F, G)) = \text{Cotor}_{G^*(E)}^i(G^*, G^*(F))$ ist. Für $F = E$ verschwinden die höheren derivierten Funktoren, da $G^*(E)$ (trivialerweise) ein erweiterter $G^*(E)$ -Comodul ist.)

Zum Schluß dieses Abschnitts noch ein paar Anmerkungen zum Beweis der Existenz einer R -Modulspektrenstruktur auf M in 1.3.1. Ein hübsches Nebenergebnis ist der Beweis der wesentlichen Eindeutigkeit der Modulspektrenstruktur ν . Diese Anmerkungen sind aber für die weitere Argumentation nicht von Belang und können überlesen werden.

(1.4.6) Anmerkung. Wir können die Komplexe $C_E^*(F, G)$ dazu benutzen, die Eindeutigkeit der in Abschnitt 1.3 konstruierten Modulspektrenstruktur $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ zu beweisen. Dazu nehmen wir an, daß ν und $\bar{\nu}$ Modulspektrenstrukturen seien, die 1.3.A kommutativ ergänzen. Insbesondere ist $\partial\nu = \partial\bar{\nu}$ und $\nu(\text{id} \wedge \eta) = \bar{\nu}(\text{id} \wedge \eta)$. $\bar{\nu} - \nu$ ist damit von der Form $\bar{\gamma} = (\text{id} \wedge \partial)^*(\gamma)$ mit $\gamma \in M^*(R \wedge R) = C_R^1(R, M)$, $\bar{\gamma} \in M^*(R \wedge M) = C_R^1(M, M)$.

Wir bilden $C_R^*(R, M)$ und $C_R^*(M, M)$ mit Bezug auf ν . Damit ist

$$\begin{aligned} \delta(\nu) &= \nu(\text{id} \wedge \nu) - \nu(m \wedge \text{id}) + \nu(\text{id} \wedge \nu) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu), \\ \delta(\bar{\nu}) &= \bar{\nu}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) - \bar{\nu}(m \wedge \text{id}) + \bar{\nu}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) \\ &= \bar{\nu}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) - \bar{\gamma}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) - \bar{\nu}(m \wedge \text{id}) + \nu(\text{id} \wedge \nu) + \bar{\gamma}(\text{id} \wedge \nu) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu) - \gamma(\text{id} \wedge \partial\bar{\nu}) + \gamma(\text{id} \wedge \partial\nu) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \nu). \end{aligned}$$

Also ist $0 = \delta(\bar{\gamma}) = \delta\partial^\bullet(\gamma) = \partial^\bullet(\delta(\gamma))$, sodaß auch $\delta(\gamma) = 0$ ist, da ∂^\bullet injektiv ist. γ ist damit nach 1.4.5 ein Rand: $\gamma = \delta(\psi)$ mit $\psi \in M^*(R)$. Da $\partial : M^*(R) \rightarrow R^*(R)$ nach 1.2.4c) null ist, ist hierbei $\partial\psi = 0$. Sei $\xi = \partial^\bullet\psi \in C_R^0(M, M) = M^*(M)$. Damit ist $\delta(\xi) = \bar{\gamma}$ und $\partial\xi = \partial\partial^\bullet(\psi) = \partial^\bullet(\partial\psi) = 0$.

Sei $\theta = \text{id} - \xi \in M^*(M)$. Beachte, daß $\delta(\theta) = -\delta(\xi) = -\bar{\gamma}$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\text{id} \wedge \theta) &= \nu(\text{id} \wedge \theta) + \bar{\gamma}(\text{id} \wedge \theta) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \theta) + \bar{\gamma} - \bar{\gamma}(\text{id} \wedge \xi) \\ &= \nu(\text{id} \wedge \theta) + \bar{\gamma} - \gamma(\text{id} \wedge \partial\xi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu(\text{id} \wedge \theta) - \theta\nu + \theta\nu + \bar{\gamma} \\
&= \delta(\theta) + \theta\nu + \bar{\gamma} \\
&= -\bar{\gamma} + \theta\nu + \bar{\gamma} \\
&= \theta\nu.
\end{aligned}$$

Bleibt nur noch zu zeigen, daß $\theta : M \rightarrow M$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies folgt mit dem Satz von Whitehead, da $\xi\eta = \bar{\xi}\partial\eta = 0$ ist, sodaß $\pi_*(\theta) : M_* \rightarrow M_*$ die Identität ist. Damit ist gezeigt:

(1.4.7) Satz. *Je zwei Modulspektrenstrukturen $\nu, \bar{\nu}$, die 1.3.A kommutativ ergänzen, sind durch einen Automorphismus $\theta : M \rightarrow M$ miteinander verbunden. Dabei ist $\theta_* : M_* \rightarrow M_*$ die Identität.* \square

Nun zu den versprochenen Erläuterungen zum Beweis von 1.3.1.

Ist ein $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ gewählt, das 1.3.A kommutativ ergänzt, so können wir $C_R^*(R, M)$ und $C_R^*(M, M)$ formal genau wie eben beschrieben bilden. Diese sind jetzt allerdings *keine* Kokettenkomplexe, da zum Beweis, daß $\delta^2 = 0$ ist, die Assoziativität von ν schon benutzt wurde. Dieselbe Nullhomotopie wie in 1.4.5 zeigt aber, daß in der Folge

$$M^* \xrightarrow{\delta_M} M^*(R) \xrightarrow{\delta} M^*(R \wedge R) \xrightarrow{\delta} M^*(R \wedge R \wedge R) \xrightarrow{\delta} \dots$$

ker $\delta \subset \text{im } \delta$ gilt. Außerdem ist

$$(1.4.B) \quad 0 \longrightarrow C_R^*(R, M) \xrightarrow{\partial^\bullet} C_R^*(M, M) \xrightarrow{\eta^\bullet} C_R^*(R, M) \longrightarrow 0$$

nach 1.2.4d) exakt. ∂^\bullet und η^\bullet kommutieren mit den Pseudodifferentialen, da aufgrund der Kommutativität von 1.3.A $\nu(\text{id} \wedge \eta) = \eta m$ und $\partial\nu = m(\text{id} \wedge \partial)$ gilt.

Der Beweis von 1.3.1 besteht nun in einer Diagrammjagd in der kurzen exakten Sequenz von Pseudokokettenkomplexen 1.4.B: Der Assoziativitätsdefekt $A \in C_R^2(M, M)$ geht unter η^\bullet auf Null, da m assoziativ ist. Das eindeutig bestimmte $B \in C_R^2(R, M)$ mit $\partial^\bullet(B) = A$ ist ein Zykel, da $\partial^\bullet(\delta(B)) = \delta\partial^\bullet(B) = \delta(A)$ ist und sich nachrechnen läßt, daß $\delta(A)$ null ist. Setze $C := H(B)$. C erfüllt $\delta(C) = B$, da wie bereits angemerkt ker $\delta \subset \text{im } \delta$ ist. Für $\gamma = \partial^\bullet(C)$ gilt schließlich $\delta(\gamma) = \delta(\partial^\bullet(C)) = \partial^\bullet(\delta(C)) = \partial^\bullet(B) = A$.

Die letzte Rechnung im Beweis von 1.3.1 zeigt, daß $\bar{\nu}(\text{id} \wedge \bar{\nu}) - \bar{\nu}(m \wedge \text{id}) - \gamma(\text{id} \wedge \gamma) - \delta(\gamma)$ durch $A - \delta(\gamma)$ gegeben ist. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $\gamma(\text{id} \wedge \gamma)$ verschwindet und dies folgt leicht aus 1.2.4c). Dabei ergibt sich $\partial\gamma = 0$, was überdies nötig ist, wenn $\partial\bar{\nu} = m(\text{id} \wedge \partial)$ weiterhin gelten soll.

Schließlich sei bemerkt, daß der Beweis von 1.3.3 ebenfalls als Diagrammjagd verstanden werden kann.

1.5 Konstruktion der Multiplikation auf M

Wir bleiben bei den Bezeichnungen von 1.2.1. ν sei eine verträgliche R -Modulspektrenstruktur auf M . Außerdem sei R_* in geraden Dimensionen konzentriert, sodaß also auch $n = |v|$ gerade ist. Insbesondere ist $M_1 = 0$, sodaß nach 1.3.3 $\nu(\phi \wedge \text{id})$ null ist. $M^*(-)$ und $M_*(-)$ sind damit auf natürliche Weise $R_*/(v) = M_*$ -Moduln.

Wir betrachten $R_2 = R \wedge R$ als Ringspektrum mit der Multiplikation

$$m_2 : R \wedge R \wedge R \wedge R \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} R \wedge R \wedge R \wedge R \xrightarrow{m \wedge m} R \wedge R$$

und $R_3 = R \wedge R \wedge R$ als Ringspektrum mit der analog definierten Multiplikation $m_3 : R_3 \wedge R_3 \rightarrow R_3$. $R \wedge M, M \wedge M$ und $M \wedge R$ sind R_2 -Modulspektren und $R \wedge R \wedge M, R \wedge M \wedge M$, usw. sind R_3 -Modulspektren.

Wie bereits im letzten Abschnitt skizziert fassen wir auch M selbst als R_2 - und R_3 -Modulspektrum auf. Die Operation $R \wedge R \wedge M \rightarrow M$ ist durch $\nu(m \wedge \text{id})$ gegeben, die Operation $R \wedge R \wedge R \wedge M \rightarrow M$ durch $\nu(m(m \wedge \text{id}) \wedge \text{id})$.

(1.5.1) Lemma. *Diese Operationen definieren R_2 - bzw. R_3 -Modulspektrenstrukturen auf M .*

$\delta_M : M^*(X) \rightarrow M^*(R \wedge X)$ ist M_* -linear. Insbesondere ist $\mathcal{P}_{(-)}(-, M)$ immer ein M_* -Modul.

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für die R_2 -Operation. Die Schwierigkeit dabei liegt in der Vertauschung $\text{id} \wedge T \wedge \text{id}$, die in der Definition der Multiplikation m_2 (und analog in m_3) enthalten ist.

Wir müssen zeigen, daß $\nu(mm_2 \wedge \text{id}) = \nu(m \wedge \nu(m \wedge \text{id}))$ ist. Die rechte Seite dieser Gleichung lautet nach Anwendung der Assoziativität $\nu(\text{id} \wedge \nu) = \nu(m \wedge \text{id})$

$$\nu(m \wedge \text{id})(m \wedge m \wedge \text{id}),$$

die linke

$$\nu(m \wedge \text{id})(m \wedge m \wedge \text{id})(\text{id} \wedge T \wedge \text{id} \wedge \text{id}).$$

Aufgrund der Assoziativität von m ist $(m \wedge \text{id})(m \wedge m \wedge \text{id}) = (m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id})(\text{id} \wedge m \wedge \text{id} \wedge \text{id})$. Damit schreibt sich die Differenz der beiden Seiten als

$$\nu(m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id})(\text{id} \wedge (m - mT) \wedge \text{id} \wedge \text{id}).$$

Nach (V) ist $\eta(m - mT) = 0$, sodaß ein $A : R \wedge R \rightarrow R$ existiert mit $m - mT = \phi A$. Benutzt man nun, daß $m(v \wedge \text{id}) = m(\text{id} \wedge v)$ ist (vgl. (V)), so ergibt sich $m(\phi \wedge \text{id}) = m(\text{id} \wedge \phi) = \phi m$. Für obige Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned} & \nu(m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id})(\text{id} \wedge (m - mT) \wedge \text{id} \wedge \text{id}) \\ &= \nu(m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \phi \wedge \text{id})(\text{id} \wedge A \wedge \text{id} \wedge \text{id}) \\ &= \nu(\phi \wedge \text{id})(m \wedge \text{id})(m \wedge \text{id} \wedge \text{id})(\text{id} \wedge A \wedge \text{id} \wedge \text{id}). \end{aligned}$$

Dies ist aber Null, da nach 1.3.3 $\nu(\phi \wedge \text{id}) = \nu(m(v \wedge \text{id}) \wedge \text{id}) = \nu(v \wedge \nu) = 0$ ist.

Die Linearität von δ_M zeigt man ähnlich. □

Wir kommen nun zu den ersten Ergebnissen. Dabei steht durchgängig $\mathcal{P}_{(-)}(-)$ für $\mathcal{P}_{(-)}(-, M)$ und $C_{(-)}^*(-)$ für $C_{(-)}^*(-, M)$.

(1.5.2) Lemma. $C_R^*(M)$, $C_{R_2}^*(R \wedge M)$ und $C_{R_2}^*(M \wedge M)$ sind in positiven Dimensionen azyklisch und die folgenden Sequenzen sind exakt:

(a)

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_R(R) \xrightarrow{\partial^\bullet} \mathcal{P}_R(M) \xrightarrow{\eta^\bullet} \mathcal{P}_R(R) \longrightarrow 0$$

(b)

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^\bullet} \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \longrightarrow 0$$

(c)

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) \xrightarrow{(\partial \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M) \xrightarrow{(\eta \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) \longrightarrow 0$$

Genauso sind auch die entsprechend gebildeten Sequenzen für die R_3 -Modulspektren $R \wedge R \wedge R$, $R \wedge R \wedge M$, etc. exakt.

Beweis: Aus 1.2.4c) und 1.3.6b) ergibt sich unmittelbar die Exaktheit der folgenden Sequenzen von Kokettenkomplexen:

$$0 \longrightarrow C_R^*(R) \xrightarrow{\partial^\bullet} C_R^*(M) \xrightarrow{\eta^\bullet} C_R^*(R) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow C_{R_2}^*(R \wedge R) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^\bullet} C_{R_2}^*(R \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} C_{R_2}^*(R \wedge R) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow C_{R_2}^*(R \wedge M) \xrightarrow{(\partial \wedge \text{id})^\bullet} C_{R_2}^*(M \wedge M) \xrightarrow{(\eta \wedge \text{id})^\bullet} C_{R_2}^*(R \wedge M) \longrightarrow 0.$$

Nach 1.4.5 sind $C_R^*(R)$ und $C_{R_2}^*(R \wedge R)$ in positiven Dimensionen azyklisch. Betrachtet man die zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen, so sieht man, daß dasselbe auch für die anderen beteiligten Kokettenkomplexe gilt.

Die langen exakten Homologiesequenzen reduzieren sich also auf kurze exakte Sequenzen der nullten Homologiegruppen und dies sind gerade a), b) und c).

Für R_3 -Modulspektren argumentiert man genauso. \square

Sei $Q := \eta\partial \in M^*(M)$. Da $Q\nu = \eta\partial\nu = \eta m(\text{id} \wedge \partial) = \nu(\text{id} \wedge \eta\partial) = \nu(\text{id} \wedge Q)$ ist, ist $Q \in \mathcal{P}_R(M)$. Mit $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ bezeichnen wir einen freien M_* -Modul mit Basis a_1, a_2, \dots, a_k .

Es folgt aus 1.4.5, daß

$$\mathcal{P}_R(R) = \langle \eta \rangle, \quad \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) = \langle \eta m \rangle \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge R) = \langle \eta m(m \wedge \text{id}) \rangle$$

ist.

Da in 1.5.2a) beide Randterme frei sind, spaltet diese Sequenz auf und $\mathcal{P}_R(M)$ ist ebenfalls frei. Da $\partial^\bullet(\eta) = Q$ und $\eta^\bullet(\text{id}) = \eta$ ist, bilden id und Q eine Basis von $\mathcal{P}_R(M)$. Es ist also

$$\mathcal{P}_R(M) = \langle \text{id}, Q \rangle.$$

Wie in 1.5.1 überlegt man sich, daß $\nu \in M^*(R \wedge M)$ und $\nu T \in M^*(M \wedge R)$ primitiv sind. Aus $(\text{id} \wedge \partial)^\bullet(\eta m) = \nu(\text{id} \wedge Q)$ und $(\text{id} \wedge \eta)^\bullet(\nu) = \eta m$ folgt also

$$\mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) = \langle \nu, \nu(\text{id} \wedge Q) \rangle.$$

Genauso zeigt man

$$\mathcal{P}_{R_2}(M \wedge R) = \langle \nu T, \nu T(Q \wedge \text{id}) \rangle.$$

Wir betrachten schließlich das folgende Diagramm:

$$(1.5.A) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \\ (\partial \wedge \text{id})^\bullet \downarrow & & (\partial \wedge \text{id})^\bullet \downarrow & & (\partial \wedge \text{id})^\bullet \downarrow \\ \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge R) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge R) \\ (\eta \wedge \text{id})^\bullet \downarrow & & (\eta \wedge \text{id})^\bullet \downarrow & & (\eta \wedge \text{id})^\bullet \downarrow \\ \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \end{array}$$

Hier sind alle Zeilen und Spalten nach 1.5.2 kurze exakte Sequenzen. Eine einfache Diagrammjagd ergibt deswegen den

(1.5.3) Satz. Sei $\mathcal{M} = \text{coker} [(\partial \wedge \partial)^\bullet : \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \rightarrow \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M)]$. Dann ist das von 1.5.A induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge R) \\ \downarrow & & (\eta \wedge \text{id})^\bullet \downarrow \\ \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge M) & \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta)^\bullet} & \mathcal{P}_{R_2}(R \wedge R) \end{array}$$

ein Pullback-Diagramm. \square

(1.5.4) Corollar. Es existiert ein $\mu \in \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M)$ mit $\mu(\eta \wedge \text{id}) = \nu$ und $\mu(\text{id} \wedge \eta) = \nu T$.

Es ist $\mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M) = \langle \mu, \mu(Q \wedge \text{id}), \mu(\text{id} \wedge Q), \mu(Q \wedge Q) \rangle$.

Die Menge aller $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M)$ mit $\bar{\mu}(\eta \wedge \text{id}) = \nu$ und $\bar{\mu}(\text{id} \wedge \eta) = \nu T$ ist $\{ \mu + \lambda \mu(Q \wedge Q) \mid \lambda \in M^{-2n-2} \}$, wobei $n = |v|$.

Außerdem ist μT ebenfalls primitiv.

Beweis: Die Existenz eines solchen μ folgt aus 1.5.3, da $\nu(\text{id} \wedge \eta) = \eta m = \eta m T = \nu T(\eta \wedge \text{id})$ ist.

Aus 1.5.2c) zeigt man wie oben, daß $\mu, \mu(\text{id} \wedge Q), (\partial \wedge \text{id})^\bullet(\nu) = \nu(\partial \wedge \text{id})$ und $(\partial \wedge \text{id})^\bullet(\nu(\text{id} \wedge Q)) = \nu(\partial \wedge Q)$ eine Basis von $\mathcal{P}_{R_2}(M \wedge M)$ bilden. Wir zeigen, daß $\nu(\partial \wedge \text{id}) = \mu(Q \wedge \text{id})$ ist. Daraus folgt unmittelbar, daß auch $\nu(\partial \wedge Q) = \mu(Q \wedge Q)$ ist.

Es existiert eine Darstellung

$$\mu(Q \wedge \text{id}) = \lambda_0 \mu + \lambda_1 \mu(\text{id} \wedge Q) + \lambda_2 \nu(\partial \wedge \text{id}) + \lambda_3 \nu(\partial \wedge Q).$$

Hier ist $|\lambda_0| = |\lambda_3| = -n - 1$ ungerade, also $\lambda_0 = \lambda_3 = 0$.

Wir wenden darauf $(\eta \wedge \text{id})^\bullet$ an und erhalten $0 = \lambda_1 \nu(\text{id} \wedge Q)$, also $\lambda_1 = 0$. Anwendung von $(\text{id} \wedge \eta)^\bullet(\mu(Q \wedge \text{id}))$ ergibt $\nu T(Q \wedge \text{id}) = \lambda_2 \nu(\partial \wedge \eta)$. Da $\nu(\partial \wedge \eta) = \eta m(\partial \wedge \text{id}) = \eta m T(\text{id} \wedge \partial) = \eta m(\text{id} \wedge \partial) T = \nu(\text{id} \wedge Q) T = \nu T(Q \wedge \text{id})$ ist, ist $\lambda_2 = 1$. (Hierbei wurde von (V) gebraucht gemacht.)

Die Unbestimmtheit von μ ergibt sich nun aus $(\partial \wedge \partial)^\bullet(\eta m) = \nu(\partial \wedge Q) = \mu(Q \wedge Q)$ mit 1.5.3. Der Grad von λ ergibt sich schließlich aus $|Q| = n + 1$.

Daß μT primitiv ist, ergibt sich aus (V) mit ähnlichen Argumenten wie in 1.5.1. \square

(1.5.5) Lemma. Es ist $Q\mu = \mu(Q \wedge \text{id}) + \mu(\text{id} \wedge Q)$.

Beweis: $Q\mu$ ist wie man sich leicht überlegt primitiv. $Q\mu$ läßt sich also durch die eben gefundene Basis ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten von μ und $\mu(Q \wedge Q)$ null, da sie den Grad $-n - 1$ haben und $M^{-n-1} = 0$ ist. Die Koeffizienten von $\mu(Q \wedge \text{id})$ und $\mu(\text{id} \wedge Q)$ bestimmt man durch Anwenden von $(\eta \wedge \text{id})^\bullet$ und $(\text{id} \wedge \eta)^\bullet$. \square

Wir zeigen als nächstes:

(1.5.6) Lemma. Sei μ wie in 1.5.4. Dann sind $\mu(\mu \wedge \text{id}), \mu(\text{id} \wedge \mu) \in M^*(M \wedge M \wedge M)$ primitiv. (Genauer: $(R_3, M \wedge M \wedge M, M)$ -primitiv.)

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für $\mu(\text{id} \wedge \mu)$, der andere Fall geht genauso.

Da μ primitiv ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} R \wedge R \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} & R \wedge M \wedge R \wedge M & \xrightarrow{\nu \wedge \nu} & M \wedge M \\ \text{id} \wedge \text{id} \wedge \mu \downarrow & & & & \mu \downarrow \\ R \wedge R \wedge M & \xrightarrow{m \wedge \text{id}} & R \wedge M & \xrightarrow{\nu} & M. \end{array}$$

Gefordert ist die Kommutativität von

$$\begin{array}{ccccc}
R \wedge R \wedge R \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{vertauschen}} & R \wedge M \wedge R \wedge M \wedge R \wedge M & \xrightarrow{\nu \wedge \nu \wedge \nu} & M \wedge M \wedge M \\
\text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge \mu(\text{id} \wedge \mu) \downarrow & & & & \mu(\text{id} \wedge \mu) \downarrow \\
R \wedge R \wedge R \wedge M & \xrightarrow{m(\text{id} \wedge m) \wedge \text{id}} & R \wedge M & \xrightarrow{\nu} & M.
\end{array}$$

Dazu betrachtet man das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xleftarrow{\mu(\nu \wedge \text{id})} & R \wedge M \wedge M & \xleftarrow{\text{id} \wedge \text{id} \wedge \mu} & R \wedge M \wedge M \wedge M \\
\nu(m \wedge \mu) \uparrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge \nu \uparrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge \nu \wedge \nu \uparrow \\
R \wedge R \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} & R \wedge M \wedge R \wedge M & & R \wedge M \wedge R \wedge M \wedge R \wedge M \\
\text{id} \wedge m \wedge \text{id} \wedge \mu \uparrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge m \wedge \mu \uparrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge T \wedge \text{id} \uparrow \\
R \wedge R \wedge R \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{vertauschen}} & R \wedge M \wedge R \wedge R \wedge M \wedge M & \xlongequal{\quad} & R \wedge M \wedge R \wedge R \wedge M \wedge M
\end{array}$$

Das obere linke und das rechte Rechteck kommutieren dabei aufgrund der Primitivität von μ , das linke untere bei geeigneter Wahl der Vertauschungsabbildung. Die Primitivität von $\mu(\text{id} \wedge \mu)$ ergibt sich wenn man noch beachtet, daß die obere Kante dieses Diagramms gerade $\mu(\text{id} \wedge \mu)(\nu \wedge \text{id} \wedge \text{id})$ ist. \square

Benutzt man nun die exakten Sequenzen

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge R) &\xrightarrow{(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \partial)^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \eta)^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge R) \rightarrow 0, \\
0 \rightarrow \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge M) &\xrightarrow{(\text{id} \wedge \partial \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge M \wedge M) \xrightarrow{(\text{id} \wedge \eta \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge R \wedge M) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

und

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge M \wedge M) \xrightarrow{(\partial \wedge \text{id} \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(M \wedge M \wedge M) \xrightarrow{(\eta \wedge \text{id} \wedge \text{id})^\bullet} \mathcal{P}_{R_3}(R \wedge M \wedge M) \rightarrow 0$$

so ergibt sich wie oben

(1.5.7) Lemma. *Es ist $\mathcal{P}_{R_3}(M \wedge M \wedge M) = \langle \mu(\text{id} \wedge \mu), \mu(Q \wedge \mu), \mu(\text{id} \wedge \mu(Q \wedge \text{id})), \mu(\text{id} \wedge \mu(\text{id} \wedge Q)), \mu(Q \wedge \mu(Q \wedge \text{id})), \mu(Q \wedge \mu(\text{id} \wedge Q)), \mu(\text{id} \wedge \mu(Q \wedge Q)), \mu(Q \wedge \mu(Q \wedge Q)) \rangle$.* \square

Wir betrachten den Assoziativitätsdefekt $\Delta = \mu(\text{id} \wedge \mu) - \mu(\mu \wedge \text{id})$.

(1.5.8) Lemma. Δ geht bei folgenden Abbildungen auf Null:

- (a) $(\eta \wedge \text{id} \wedge \text{id})^* : M^*(M \wedge M \wedge M) \rightarrow M^*(R \wedge M \wedge M)$.
- (b) $(\text{id} \wedge \eta \wedge \text{id})^* : M^*(M \wedge M \wedge M) \rightarrow M^*(M \wedge R \wedge M)$.
- (c) $(\text{id} \wedge \text{id} \wedge \eta)^* : M^*(M \wedge M \wedge M) \rightarrow M^*(M \wedge M \wedge R)$.

Beweis: Benutzt man $\mu(\eta \wedge \text{id}) = \nu$ und $\mu(\text{id} \wedge \eta) = \nu T$, so rechnet man nach, daß Δ bei diesen Abbildungen auf $\nu(\text{id} \wedge \mu) - \mu(\nu \wedge \text{id})$, $\mu(\text{id} \wedge \nu) - \mu(\nu T \wedge \text{id})$ bzw. $\mu(\text{id} \wedge \nu T) - \nu T(\mu \wedge \text{id})$ abgebildet wird. Bleibt also zu zeigen, daß diese Terme verschwinden. Dazu benutzt man die Primitivität von μ . Diese besagt

$$\mu(\nu \wedge \nu)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id}) = \nu(m \wedge \mu).$$

Schaltet man hier $\text{id} \wedge i \wedge \text{id} \wedge \text{id}$ davor, so ergibt die linke Seite $\mu(\nu \wedge \text{id})$ und die rechte $\nu(\text{id} \wedge \mu)$, woraus das Verschwinden des ersten Terms folgt.

Das Verschwinden des dritten Terms ergibt sich analog bei Davorschalten von $i \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge \text{id}$ und der Vertauschungsabbildung $(T \wedge \text{id})(\text{id} \wedge T)$. Daß auch der zweite Term null ist, ergibt sich dann durch Kombination: $\mu(\text{id} \wedge \nu) = \mu(\text{id} \wedge \nu T)(\text{id} \wedge T) = \nu T(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge T) = \nu(\text{id} \wedge \mu)(T \wedge \text{id})(\text{id} \wedge T)(\text{id} \wedge T) = \nu(\text{id} \wedge \mu)(T \wedge \text{id}) = \mu(\nu \wedge \text{id})(T \wedge \text{id}) = \mu(\nu T \wedge \text{id})$. \square

Damit gilt:

(1.5.9) Corollar. *Jedes zulässige Produkt $\mu : M \wedge M \rightarrow M$ ist assoziativ.*

Beweis: Wir können Δ als M^* -Linearkombination der in 1.5.7 angegebenen Basiselemente von $\mathcal{P}_{R_3}(M \wedge M \wedge M)$ schreiben. Wendet man die drei Abbildungen aus 1.5.8 auf diese Darstellung an, so sieht man, daß alle Koeffizienten bis evtl. auf den von $\mu(Q \wedge \mu(Q \wedge Q))$ Null sind. Dieser Koeffizient ist aus M^{-3n-3} , da $|Q| = n + 1$ ist. Nach Voraussetzung ist aber $M^{-3n-3} = 0$. \square

Wir halten die Ergebnisse dieses Abschnitts in folgendem Satz fest:

(1.5.10) Satz. *Seien R und v wie in 1.2.1 und $\nu : R \wedge M \rightarrow M$ eine verträgliche R -Modulspektrenstruktur auf M . Für ungerade k sei $R^k = 0$. Dann gilt:*

Es existiert ein zulässiges Produkt $\mu : M \wedge M \rightarrow M$. Die Menge aller zulässigen Produkte ist

$$\{ \mu + \lambda\mu(Q \wedge Q) \mid \lambda \in M^{-2n-2} \}.$$

Jedes solche Produkt ist assoziativ. Mit μ ist auch μT zulässig. \square

1.6 Die Algebrenstruktur von $M_*(M)$

Wir bestimmen in diesem Abschnitt — so weit das allgemein möglich ist — die Algebrenstruktur von $M_*(M)$. Die Beweise aus [K-W] übertragen sich unmittelbar.

(1.6.1) Lemma. *$\mu : M \wedge M \rightarrow M$ sei ein zulässiges Produkt. Dann gilt:*

- (a) *Es existiert ein $\lambda \in M^*$ sodaß $\mu T = \mu + \lambda\mu(Q \wedge Q)$ ist. Dieses λ ist von der Wahl des Produkts μ unabhängig.*
- (b) *Für alle $x \in M^*$ ist $\mu(x \wedge \text{id}) = \mu(\text{id} \wedge x)$.*

Beweis: Daß sich μT in der Form $\mu + \lambda\mu(Q \wedge Q)$ schreiben läßt ist schon in 1.5.10 festgestellt worden. Ist $\tilde{\mu}$ ein zweites zulässiges Produkt, so ist — wiederum nach 1.5.10 — $\tilde{\mu} = \mu + \rho\mu(Q \wedge Q)$ mit $\rho \in M^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} T &= \mu T + \rho\mu(Q \wedge Q)T \\ &= \mu + \lambda\mu(Q \wedge Q) + \rho\mu T(Q \wedge Q) \\ &= \mu + \rho\mu(Q \wedge Q) + \rho\lambda\mu(Q \wedge Q)(Q \wedge Q) + \lambda\mu(Q \wedge Q) \\ &= \mu + \rho\mu(Q \wedge Q) + \lambda\mu(Q \wedge Q) \\ &= \tilde{\mu} + \lambda\mu(Q \wedge Q) \\ &= \tilde{\mu} + \lambda\tilde{\mu}(Q \wedge Q), \end{aligned}$$

woraus die Eindeutigkeit λ 's folgt. ($\lambda\mu(Q \wedge Q) = \lambda\tilde{\mu}(Q \wedge Q)$ gilt wegen $QQ = 0$.)

b) ergibt sich aufgrund der Surjektivität von $\eta : R_* \rightarrow M_*$. x ist deswegen nämlich von der Form $\eta\tilde{x}$, $\tilde{x} \in R_*$, und wegen $Q\eta = 0$ ist

$$\begin{aligned} \mu(x \wedge \text{id}) &= \mu T(\text{id} \wedge x) \\ &= \mu(\text{id} \wedge x) + \lambda\mu(Q \wedge Q\eta\tilde{x}) \\ &= \mu(\text{id} \wedge x) \end{aligned}$$

\square

Wir betrachten nun die beiden kurzen exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow R_*(R) \xrightarrow{\phi=\cdot v} R_*(R) \xrightarrow{\eta} M_*(R) \longrightarrow 0$$

und

$$0 \longrightarrow M_*(R) \xrightarrow{\eta_*} M_*(M) \xrightarrow{\partial_*} M_*(R) \longrightarrow 0.$$

Dabei ist die erste Sequenz exakt weil ϕ Multiplikation mit dem Nichtnullteiler v induziert und $R_*(R)$ nach (I) frei ist. Die Exaktheit der zweiten Sequenz ergibt sich aus der Surjektivität von $\eta : R_*(R) \rightarrow M_*(R)$ mit 1.2.3 und der Invarianz von v : demnach ist nämlich $\text{im } \phi_* : R_*(R) \rightarrow R_*(R) \subset \text{im } \phi : R_*(R) \rightarrow R_*(R)$, sodaß $\phi_* : M_*(R) \rightarrow M_*(R)$ wegen $\text{im } \phi_* \eta = \text{im } \eta \phi_* \subset \text{im } \eta \phi = \{0\}$ null ist.

Aus der ersten Sequenz folgt sofort, daß $M_*(R) = R_*(R)/(v)$ ist. Aus der zweiten erhalten wir die Existenz eines $\alpha \in M_*(M)$ mit $\partial_*(\alpha) = 1$. Wir nehmen an, daß eine Multiplikation $\mu : M \wedge M \rightarrow M$ fest gewählt sei. Wie in [K-W], Lemma 2.3, erhält man für $x, y \in M_*(M)$

$$y \cdot x - x \cdot y = \lambda(Q(x)Q(y) - Q_*(x)Q_*(y)).$$

Daraus folgt zunächst, daß α mit allen Elementen des Bildes $\eta_* : M_*(R) \rightarrow M_*(M)$ kommutiert. Da $\eta : R_*(R) \rightarrow M_*(R)$ surjektiv ist, läßt sich nämlich jedes Element y dieses Bildes als $y = \eta(\eta_*(\bar{y})) = \eta_*(\eta(\bar{y}))$ mit $\bar{y} \in R_*(R)$ schreiben. Damit sind $Q(y) = \eta \partial \eta(\eta_*(\bar{y}))$ und $Q_*(y) = \eta_* \partial_* \eta_*(\eta(\bar{y}))$ beide null und der Kommutator $\alpha y - y \alpha$ verschwindet.

Als nächstes zeigen wir, daß $M_*(M) = \eta_*(M_*(R)) \oplus \alpha \cdot \eta_*(M_*(R))$ ist. Dazu reicht es zu zeigen daß

$$M_*(R) \ni x \mapsto \alpha \cdot \eta_*(x) \in M_*(M)$$

ein Schnitt von $\partial_* : M_*(M) \rightarrow M_*(R)$ ist, d.h. daß $\partial_*(\alpha \cdot \eta_*(x)) = x$ ist. Aufgrund der Injektivität von η_* reicht es zu zeigen, daß $\eta_*(\partial_*(\alpha \cdot \eta_*(x))) = Q_*(\alpha \cdot \eta_*(x)) = \eta_*(x)$ ist. Dies gilt, da Q_* eine Derivation ist, die auf $\text{im } \eta_*$ verschwindet, wenn man beachtet, daß $Q_*(\alpha) = 1$ ist. Damit ist gezeigt:

(1.6.2) Satz. *Die durch das Pontrjagin-Produkt definierte Algebrenstruktur auf $M_*(M)$ ist kommutativ.*

Es existiert ein $\alpha \in M_(M)$ mit $Q_*(\alpha) = 1$. Nach Wahl eines solchen α 's ist*

$$M_*(M) = M_*(R) \oplus \alpha M_*(R),$$

wobei $M_*(R)$ für das Bild von $\eta_* : M_*(R) \rightarrow M_*(M)$ steht. □

Schließlich gilt noch:

(1.6.3) Lemma. *Ist μ ein zulässiges Produkt auf M , so ist der Kroneckerhomomorphismus*

$$M^*(M) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}_{M_*}(M_*(M), M^*)$$

ein Isomorphismus.

Beweis: Da die Sequenz

$$0 \longrightarrow M_*(R) \xrightarrow{\eta_*} M_*(M) \xrightarrow{\partial_*} M_*(R) \longrightarrow 0$$

aufspaltet, ist die Sequenz

$$0 \leftarrow \text{Hom}_{M_*}(M_*(R), M^*) \xleftarrow{(\eta_*)^t} \text{Hom}_{M_*}(M_*(M), M^*) \xleftarrow{(\partial_*)^t} \text{Hom}_{M_*}(M_*(R), M^*) \leftarrow 0$$

exakt. Da wegen $M_*(R) = R_*(R)/(v)$ und $M_* = R_*/(v)$

$$\text{Hom}_{R_*}(R_*(R), M^*) = \text{Hom}_{M_*}(M_*(R), M^*)$$

ist, ist der Kroneckerhomomorphismus

$$M^*(R) \xrightarrow{\kappa} \text{Hom}_{M_*}(M_*(R), M^*)$$

nach 1.3.5 ein Isomorphismus. Die Natürlichkeit des Kroneckerhomomorphismus liefert dann zusammen mit dem Fünferlemma die Behauptung. \square

Da $M_*(M)$ frei ist, sind die üblichen Strukturabbildungen η_L , η_R , ϵ , c und Δ definiert. Für diese gilt:

(1.6.4) Satz. *Sei $\mu T = \mu + \lambda\mu(Q \wedge Q)$, $\lambda \in M^*$. Dann gilt:*

(a) η_L , η_R , und c sind multiplikativ.

(b) Für alle $x, y \in M_*(M)$ ist

$$\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y) + \lambda\epsilon(Q_*(x))\epsilon(Qy).$$

(c) Für alle $x, y \in M_*(M)$ ist

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) - \Upsilon_\lambda[(\text{id} \otimes Q)\Delta(x)][(Q_* \otimes \text{id})\Delta(y)].$$

Hierbei ist $\Upsilon_\lambda(x \otimes y) = x\eta_R(\lambda) \otimes y = x \otimes \eta_L(\lambda)y$.

Beweis: a) ist unproblematisch und bleibt dem Leser als Übungsaufgabe überlassen.

Für b) erinnert man sich, daß das Pontrjagin-Produkt xy nach Definition von der Zusammensetzung

$$S \cong S \wedge S \xrightarrow{x \wedge y} M \wedge M \wedge M \wedge M \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} M \wedge M \wedge M \wedge M \xrightarrow{\mu \wedge \mu} M \wedge M$$

repräsentiert wird. Damit ist

$$\begin{aligned} \epsilon(xy) &= \mu(\mu \wedge \mu)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(x \wedge y) \\ &= \mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(x \wedge y) \\ &= \mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \mu T \wedge \text{id})(x \wedge y) \\ &= \mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id})(x \wedge y) + \mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \lambda\mu(Q \wedge Q) \wedge \text{id})(x \wedge y) \\ &= \mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id})(x \wedge y) + \lambda\mu(\mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \mu(Q \wedge Q) \wedge \text{id})(x \wedge y) \\ &= \mu(\mu \wedge \mu)(x \wedge y) + \lambda\mu(\mu \wedge \mu)((\text{id} \wedge Q)x \wedge (Q \wedge \text{id})y) \\ &= \epsilon(x)\epsilon(y) + \lambda\epsilon(Q_*(x))\epsilon(Q(y)). \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der 5.ten Zeile 1.6.1b) dazu benutzt, λ nach vorne zu ziehen.

Um c) zu zeigen, erinnern wir daran, daß das Coprodukt $\Delta : M_*(M) \rightarrow M_*(M) \otimes_{M_*} M_*(M)$ als Zusammensetzung von

$$\bar{\Delta} : M_*(M) = \pi_*(M \wedge M) \cong \pi_*(M \wedge S \wedge M) \xrightarrow{\pi_*(\text{id} \wedge i \wedge \text{id})} \pi_*(M \wedge M \wedge M) = M_*(M \wedge M)$$

mit dem Inversen des Isomorphismus

$$\chi : M_*(M) \otimes_{M_*} M_*(M) \ni x \otimes y \mapsto (\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id})(x \wedge y) \in M_*(M \wedge M)$$

definiert ist.

Ist $\Theta_\lambda : \pi_*(M \wedge M \wedge M) \rightarrow \pi_*(M \wedge M \wedge M)$ von der Multiplikation mit λ auf dem mittleren Smash-Produkt-Faktor induziert, so ist $\chi(\Upsilon_\lambda z) = \Theta_\lambda \chi(z)$. Für $z = x \otimes y$, $x, y \in M_*(M)$, ist nämlich

$$\chi(\Upsilon_\lambda z) = \chi(x\eta_R(\lambda) \otimes y) = (\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id})(\text{id} \wedge \phi_\lambda \wedge \text{id})(x \wedge y)$$

mit der Multiplikationsabbildung $\phi_\lambda = \mu(\text{id} \wedge \lambda) = \mu(\lambda \wedge \text{id}) : M \rightarrow M$. Wegen $\mu(\phi_\lambda \wedge \text{id}) = \phi_\lambda \mu$ ist dies gerade $(\text{id} \wedge \phi_\lambda \wedge \text{id})\chi(x \otimes y)$.

Zunächst ist $\bar{\Delta}$ multiplikativ, wenn man auf $\pi_*(M \wedge M \wedge M) = \pi_*(M_3)$ die in Abschnitt 1.4 betrachtete Multiplikation $M_3 \wedge M_3 \rightarrow M_3$ zugrundelegt. Dies folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms, in dem die mit „vertauschen“ bezeichneten Abbildungen die in der Definition der Multiplikationen $M_3 \wedge M_3 \rightarrow M_3$ bzw. $M_2 \wedge M_2 \rightarrow M_2$ auftretenden sind:

$$\begin{array}{ccccc} M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{vertauschen}} & M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\mu \wedge \mu \wedge \mu} & M \wedge M \wedge M \\ \text{id} \wedge i \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge i \wedge \text{id} \uparrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge i \wedge i \wedge \text{id} \wedge \text{id} \uparrow & & \text{id} \wedge i \wedge \text{id} \uparrow \\ M \wedge S \wedge M \wedge M \wedge S \wedge M & \xrightarrow{\text{vertauschen}} & M \wedge M \wedge S \wedge S \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\mu \wedge \mu_S \wedge \mu} & M \wedge S \wedge M \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ M \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\text{vertauschen}} & M \wedge M \wedge M \wedge M & \xrightarrow{\mu \wedge \mu} & M \wedge M \end{array}$$

Wir werden zeigen, daß für $a, b \in M_*(M) \otimes_{M_*} M_*(M)$

$$(1.6.A) \quad \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) + \Theta_\lambda \chi[(\text{id} \otimes Q)a] \chi[(Q_* \otimes \text{id})b]$$

gilt. Damit können wir die behauptete Formel für das Coprodukt nachrechnen. Zu zeigen ist, daß

$$\chi(\Delta(a)\Delta(b) - \Upsilon_\lambda(\text{id} \otimes Q)\Delta(a)(Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) = \bar{\Delta}(ab)$$

ist. Mit 1.6.A und der Multiplikativität von $\bar{\Delta}$ erhält man dies wie folgt:

$$\begin{aligned} & \chi(\Delta(a)\Delta(b) - \Upsilon_\lambda(\text{id} \otimes Q)\Delta(a)(Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) \\ = & \chi(\Delta(a)\Delta(b)) \\ & - \Theta_\lambda \chi((\text{id} \otimes Q)\Delta(a)(Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) \\ = & \chi(\Delta(a))\chi(\Delta(b)) \\ & + \Theta_\lambda \chi((\text{id} \otimes Q)\Delta(a))\chi((Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) \\ & - \Theta_\lambda \chi((\text{id} \otimes Q)\Delta(a))\chi((Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) \\ & - \Theta_\lambda^2 \chi((\text{id} \otimes Q)(\text{id} \otimes Q)\Delta(a))\chi((Q_* \otimes \text{id})(Q_* \otimes \text{id})\Delta(b)) \\ = & \chi(\Delta(a))\chi(\Delta(b)) \quad (\text{da } (\text{id} \otimes Q)^2 = (Q_* \otimes \text{id})^2 = 0) \\ = & \bar{\Delta}(a)\bar{\Delta}(b) \\ = & \bar{\Delta}(ab). \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch 1.6.A herleiten. Dazu dürfen wir annehmen, daß a und b Elementartensoren sind: $a = x \otimes y$, $b = x' \otimes y'$ mit $x, x', y, y' \in M_*(M)$.

Nach Definition der Multiplikation auf $M_*(M) \otimes_{M_*} M_*(M)$ ist $ab = (-1)^{|x'y|} xx' \otimes yy'$. $\chi(ab)$ wird dann von der Zusammensetzung

$$\begin{array}{c}
S \\
\downarrow x \wedge y \wedge x' \wedge y' \\
M_a \wedge M_b \wedge M_c \wedge M_d \wedge M_e \wedge M_f \wedge M_g \wedge M_h \\
\downarrow \text{vertauschen} \\
M_a \wedge M_e \wedge M_b \wedge M_f \wedge M_c \wedge M_g \wedge M_d \wedge M_h \\
\downarrow \mu \wedge \mu \wedge \mu \wedge \mu \\
M_{ae} \wedge M_{bf} \wedge M_{cg} \wedge M_{dh} \\
\downarrow \text{id} \wedge \mu \wedge \text{id} \\
M_{ae} \wedge M_{bfcg} \wedge M_{dh}
\end{array}$$

repräsentiert. (Hier sind die Stellen mit lateinischen Indizes versehen um die involvierten Permutationen und Multiplikationen kenntlich zu machen.) Wir vergleichen dies mit $\chi(a)\chi(b)$, d.h. mit der Zusammensetzung

$$\begin{array}{c}
S \\
\downarrow x \wedge y \wedge x' \wedge y' \\
M_a \wedge M_b \wedge M_c \wedge M_d \wedge M_e \wedge M_f \wedge M_g \wedge M_h \\
\downarrow \text{id} \wedge \mu \wedge \text{id} \wedge \text{id} \wedge \mu \wedge \text{id} \\
M_a \wedge M_{bc} \wedge M_d \wedge M_e \wedge M_{fg} \wedge M_h \\
\downarrow \text{Mult. auf } M_3 \\
M_{ae} \wedge M_{bcfg} \wedge M_{dh}
\end{array}$$

Man sieht, daß beide Zusammensetzungen auf den mit „a“, „e“, „d“ und „h“ bezeichneten Stellen identisch sind und daß diese Stellen unabhängig von „b“, „c“, „f“ und „g“ abgebildet werden. Wir konzentrieren uns daher auf letztere und betrachten das folgende kommutative Diagramm, in dem die linke Spalte der Definition von $\chi(ab)$ entnommen ist:

$$\begin{array}{ccccc}
M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & \longequal{\quad} & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & \longequal{\quad} & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g \\
\downarrow \text{id} \wedge T \wedge \text{id} & & \downarrow \text{id} \wedge T \wedge \text{id} & & \downarrow \text{id} \\
M_b \wedge M_f \wedge M_c \wedge M_g & \longequal{\quad} & M_b \wedge M_f \wedge M_c \wedge M_g & & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g \\
\downarrow \mu \wedge \mu & & \downarrow \text{id} \wedge \mu \wedge \text{id} & & \downarrow \text{id} \wedge [\mu + \phi_{\lambda\mu}(Q \wedge Q)] \wedge \text{id} \\
M_{bf} \wedge M_{cg} & & M_b \wedge M_{fc} \wedge M_g & \longequal{\quad} & M_b \wedge M_{cf + \lambda Q(c)Q(f)} \wedge M_g \\
\downarrow \mu & & \downarrow \mu(\mu \wedge \text{id}) & & \downarrow \mu(\mu \wedge \text{id}) \\
M_{bfcg} & \longequal{\quad} & M_{bfcg} & \longequal{\quad} & M_{bcfg + \lambda bQ(c)Q(f)g}
\end{array}$$

Rechts schließt man die Summe der beiden folgenden kommutativen Diagramme an:

$$\begin{array}{ccc}
M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & \xlongequal{\quad} & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g \\
\text{id} \downarrow & & \text{id} \downarrow \\
M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & \xlongequal{\quad} & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g \\
\text{id} \wedge \mu \wedge \text{id} \downarrow & & \mu \wedge \mu \downarrow \\
M_b \wedge M_{cf} \wedge M_g & & M_{bc} \wedge M_{fg} \\
\mu(\mu \wedge \text{id}) \downarrow & & \mu \downarrow \\
M_{bcfg} & \xlongequal{\quad} & M_{bcfg}
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc}
M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & \xlongequal{\quad} & M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g \\
\text{id} \downarrow & & \text{id} \wedge Q \wedge Q \wedge \text{id} \downarrow \\
M_b \wedge M_c \wedge M_f \wedge M_g & & M_b \wedge M_{Q(c)} \wedge M_{Q(f)} \wedge M_g \\
\text{id} \wedge \phi_\lambda \mu(Q \wedge Q) \wedge \text{id} \downarrow & & \mu \wedge \mu \downarrow \\
M_b \wedge M_{\lambda Q(c)Q(f)} \wedge M_g & & M_{bQ(c)} \wedge M_{Q(f)g} \\
\mu(\mu \wedge \text{id}) \downarrow & & \phi_\lambda \mu \downarrow \\
M_{b(\lambda Q(c)Q(f))g} & \xlongequal{\quad} & M_{\lambda bQ(c)Q(f)g}
\end{array}$$

Die rechten Spalten ergeben gerade (die betrachteten Ausschnitte) von $\chi(a)\chi(b)$ bzw. $\Theta_\lambda \chi[(\text{id} \otimes Q)a] \chi[(Q_* \otimes \text{id})b]$, sodaß 1.6.A folgt. \square

1.6.4b) zeigt, daß das Kroneckerdual ϵ des multiplikativen Morphismus $\text{id} : M \rightarrow M$ nicht selber multiplikativ ist. Die aus dem kommutativen Fall vertraute Korrespondenz (vgl. z.B. [W86], Lemma (2.7)).

multiplikative Morphismen $X \rightarrow E \leftrightarrow E_*$ -Algebrenhomomorphismen $E_*(X) \rightarrow E_*$

für Ringspektren E, X mit Kroneckerdualität $E^*(X \wedge X) \cong \text{Hom}_{E_*}(E_*(X \wedge X), E^*)$ stimmt also für ein nichtkommutatives Ringspektrum E evtl. nicht. Zur Klärung und zum späteren Gebrauch zeigen wir deswegen noch den

(1.6.5) Satz. *Seien E und X Ringspektren und der Kroneckerhomomorphismus*

$$E^*(X \wedge X) \rightarrow \text{Hom}_{E_*}(E_*(X \wedge X), E^*)$$

ein Isomorphismus. Weiter sei $E_(X)$ als E_* -Modul flach. Dann ist ein $\theta : X \rightarrow E$ genau dann multiplikativ, wenn für alle $x, y \in E_*(X)$*

$$\epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy))$$

ist. ($\epsilon : E_(E) \rightarrow E$ ist dabei die Augmentation).*

Beweis: μ_E bzw. μ_X seien die Multiplikationen auf E bzw. X . $\theta : X \rightarrow E$ heißt multiplikativ, falls $\theta\mu_X = \mu_E(\theta \wedge \theta) : X \wedge X \rightarrow E$ ist. Aufgrund der vorausgesetzten Dualität

$$E^*(X \wedge X) \cong \text{Hom}_{E_*}(E_*(X \wedge X), E^*)$$

ist dies zu

$$\epsilon((\theta\mu_X)_*(z)) = \epsilon((\mu_E(\theta \wedge \theta))_*(z)) \quad \text{für alle } z \in E_*(X \wedge X)$$

äquivalent. Wir benutzen, daß das äußere Homologieprodukt

$$E_*(X) \otimes_{E_*} E_*(Y) \xrightarrow{\Delta} E_*(X \wedge Y)$$

für jedes Y ein Isomorphismus ist, da $E_*(X)$ E_* -flach ist. Damit ist also $E_*(X \wedge X) \cong E_*(X) \otimes_{E_*} E_*(X)$. θ ist also genau dann multiplikativ, wenn für alle x, y aus $E_*(X)$

$$(1.6.B) \quad \epsilon((\theta\mu_X)_*(x \triangle y)) = \epsilon((\mu_E(\theta \wedge \theta))_*(x \triangle y))$$

ist.

Nach Definition des Pontrjagin-Produkts in $E_*(X)$ ist $xy = (\mu_X)_*(x \triangle y)$. Die linke Seite von 1.6.B ist also gerade $\epsilon(\theta_*(xy))$.

Wir benutzen weiter, daß $(\theta \wedge \theta)_*(x \triangle y) = \theta_*(x) \triangle \theta_*(y)$ ist. Dies folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} S \cong S \wedge S & \xrightarrow{x \wedge y} & E \wedge X \wedge E \wedge X & \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} & E \wedge E \wedge X \wedge X & \xrightarrow{\mu_E \wedge \text{id} \wedge \text{id}} & E \wedge X \wedge X \\ \parallel & & \text{id} \wedge \theta \wedge \text{id} \wedge \theta \downarrow & & \text{id} \wedge \text{id} \wedge \theta \wedge \theta \downarrow & & \text{id} \wedge \theta \wedge \theta \downarrow \\ S \cong S \wedge S & \xrightarrow{\theta_*(x) \wedge \theta_*(y)} & E \wedge E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\text{id} \wedge T \wedge \text{id}} & E \wedge E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu_E \wedge \text{id} \wedge \text{id}} & E \wedge E \wedge E \end{array}$$

Damit ist die rechte Seite von 1.6.B gerade $\epsilon((\mu_E)_*(\theta_*(x) \triangle \theta_*(y))) = \epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y))$. Die Behauptung folgt. \square

1.7 Anwendung auf BP und $P(n)$

Wir können nun die Ergebnisse der Abschnitte 1.3 - 1.5 dazu benutzen, die Existenz der Spektren $P(n) = \text{BP}/(v_0, \dots, v_{n-1})$ zu zeigen. Wir nehmen dazu induktiv an, daß das Ringspektrum $P(n-1)$ bereits konstruiert sei und folgende Bedingungen erfüllt:

- (a) Gegeben sei eine multiplikative Transformation $\rho_{n-1} : \text{BP} \rightarrow P(n-1)$, die in der Homotopie einen Ringisomorphismus $\text{BP}_*/(v_0, \dots, v_{n-2}) \cong P(n-1)_*$ induziert.
- (b) $P(n-1)_*(P(n-1))$ sei eine freie und kommutative $P(n-1)_*$ -Algebra.
- (c) Der Kroneckerhomomorphismus

$$P(n-1)^*(P(n-1)) \rightarrow \text{Hom}_{P(n-1)_*}(P(n-1)_*(P(n-1)), P(n-1)^*)$$

sei ein Isomorphismus.

- (d) Es sei $m_{n-1}T \equiv m_{n-1} \pmod{v_{n-1}}$, wobei m_{n-1} die Multiplikation auf $P(n-1)$ bezeichnet. Für jedes $x \in P(n-1)_*$ sei $m_{n-1}(x \wedge \text{id}) = m_{n-1}(\text{id} \wedge x)$.

Hierbei sei $P(0) = \text{BP}$, $\rho_0 = \text{id}$.

Wir definieren nun $P(n)$ als Cofaser der v_{n-1} -Multiplikationsabbildung $\Sigma^{|v_{n-1}|}P(n-1) \rightarrow P(n-1)$.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{|v_{n-1}|}P(n-1) & \xrightarrow{\phi_{n-1}} & P(n-1) \\ \partial_{n-1} \swarrow & & \searrow \eta_{n-1} \\ & P(n) & \end{array}$$

sei das Cofaserdreieck. In den früheren Bezeichnungen ist also $R = P(n-1)$ und $M = P(n)$.

Die angegebenen Voraussetzungen an $P(n-1)$ implizieren, daß (I)-(V) erfüllt sind. Die Implikationen $b) \Rightarrow (I)$, $c) \Rightarrow (II)$, $d) \Rightarrow (V)$ und $a) \Rightarrow (III)$ sind offensichtlich. (IV) folgt ebenfalls aus a), da wegen $\pi_*(\rho_{n-1})(1) = 1$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(n-1)_* & \xrightarrow{\eta_R} & P(n-1)_*(P(n-1)) \\ \pi_*(\rho_{n-1}) \uparrow & & \uparrow \pi_*(\rho_{n-1} \wedge \rho_{n-1}) \\ BP_* & \xrightarrow{\eta_R} & BP_*(BP) \end{array}$$

kommutiert und $(v_0, \dots, v_{n-1}) \subset BP_*$ bekanntlich invariant ist.

Da $P(n-1)_*$ außerdem wegen a) in geraden Dimensionen konzentriert ist können wir uns auf die Ergebnisse aus den Abschnitten 1.5 und 1.6 beziehen: 1.5.10 zufolge existiert auf $P(n)$ eine Ringspektrenstruktur $m_n : P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ bezüglich der $\eta_{n-1} : P(n-1) \rightarrow P(n)$ multiplikativ ist. Mit $\rho_n := \eta_{n-1}\rho_{n-1}$ erfüllt $P(n)$ also a). Aus $m_n T = m_n + \lambda m_n(Q_{n-1} \wedge Q_{n-1})$, $Q_{n-1} := \eta_{n-1}\partial_{n-1}$, folgt außerdem die erste Aussage von d), da man sich leicht überlegt, daß λ für $p > 2$ aus Dimensionsgründen null ist, bzw. für $p = 2$ in $\{0, v_n\}$ liegt. Die zweite folgt aus 1.6.1b). b) folgt schließlich aus 1.6.2, c) aus 1.6.3.

Der Induktionsschritt ist damit vollendet und die Existenz der $P(n)$ für alle $n \geq 0$ bewiesen.

Wir zitieren aus [W86] den

(1.7.1) Satz. ([W86], [Mi]) *Für $p = 2$ sind die zulässigen Produkte auf $P(n)$ nicht kommutativ. Es ist $m_n T = m_n + v_n m_n(Q_{n-1} \wedge Q_{n-1})$.*

Wir bestimmen nun die Algebrenstruktur von $P(n)_*(P(n))$ genauer. H bezeichne das Eilenberg-MacLane Spektrum HZ_p . Die Struktur von $\mathcal{A} := H_*(H)$ ist seit langem bekannt. Wir betrachten im folgenden nur den Fall $p = 2$. Dann ist $\mathcal{A} = Z_2[\xi_1, \xi_2, \dots]$ mit $|\xi_i| = 2^i - 1$. HZ_2 ist gerade das Teleskop der Folge

$$BP \xrightarrow{\eta_0} P(1) \xrightarrow{\eta_1} P(2) \xrightarrow{\eta_2} P(3) \xrightarrow{\eta_3} \dots$$

(Dies folgt sofort aus $\varinjlim P(n)_* = Z_2$.) Wir erhalten daraus Thom-Reduktionen $\tau_n : P(n) \rightarrow HZ_2$, die mit den η_n 's kompatibel sind. Wir bezeichnen das Bild von $t_i \in BP_*(BP)$ unter $\pi_*(\rho_n \wedge \rho_n) : BP_*(BP) \rightarrow P(n)_*(P(n))$ wieder mit t_i .

(1.7.2) Lemma. $\pi_*(\tau_n \wedge \tau_n) : P(n)_*(P(n)) \rightarrow \mathcal{A}$ ist in den Dimensionen $< 2^{n+1} - 2$ ein Isomorphismus.

Beweis: Wir zeigen dazu, daß $\pi_*(\eta_n \wedge \eta_n) : P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n+1)_*(P(n+1))$ in den Dimensionen $< 2^{n+1} - 2$ ein Isomorphismus ist. Dies folgt aus der Faktorisierung

$$P(n)_*(P(n)) \xrightarrow{\eta_n} P(n+1)_*(P(n)) \xrightarrow{\eta_{n*}} P(n+1)_*(P(n+1)).$$

Da η_{n*} die Inklusion eines direkten Summanden ist (vgl. 1.6.2), ist es injektiv. Die Behauptung folgt, da η_n durch Reduktion modulo v_n gegeben ist und deshalb in den Dimensionen $< |v_n| = 2^{n+1} - 2$ injektiv ist. (Dabei benutzt man, daß $P(n)_*(P(n))$ keine Erzeugenden in negativen Dimensionen hat.)

1.7.2 folgt nun daraus, daß $\mathcal{A} = \varinjlim P(n)_*(P(n))$ ist und alle Abbildungen in diesem gerichteten System ab dem Index n in den Dimensionen $< 2^{n+1} - 2$ Isomorphismen sind. \square

Da $|c(\xi_1)| < \dots < |c(\xi_n)| = 2^n - 1 < 2^{n+1} - 2$ ist, existieren also in $P(n)_*(P(n))$ eindeutig bestimmte Elemente $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ mit $\pi_*(\tau_n \wedge \tau_n)(\alpha_i) = c(\xi_{i+1})$. (Dies wird im allgemeinen mit einem Verweis auf [B-M] begründet. Die eben gegebene Argumentation ist aber einfacher.) Aufgrund der Eindeutigkeit geht dabei $\alpha_i \in P(n)_*(P(n))$ unter $\pi_*(\eta_n \wedge \eta_n)$ in das gleichnamige Element $\alpha_i \in P(n+1)_*(P(n+1))$ über. Mit diesen α_i 's läßt sich nun die Struktur von $P(n)_*(P(n))$ beschreiben:

(1.7.3) Satz. ([K-W])

(a) Als $P(n)_*$ -Algebra ist

$$P(n)_*(P(n)) = P(n)_*[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots]$$

mit $\alpha_i^2 = t_{i+1}$ für $0 \leq i < n-1$ und $\alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n$.

(b) Das Coprodukt Δ ist auf den Erzeugenden α_k durch

$$\Delta(\alpha_k) = \sum_{i=0}^k \alpha_i \otimes t_{k-i}^p + 1 \otimes \alpha_k$$

gegeben.

(c) Für die Konjugation gilt

$$c(\alpha_k) = - \sum_{i=0}^{k-1} c(\alpha_i) t_{k-i}^p - \alpha_k.$$

Beweis: a) beweist man wie Theorem 1.4 in [K-W]. (Teile dieses Beweises sind auch schon in 1.6.2 wiedergegeben worden.) Daß $\alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n$ ist, ergibt sich aus der Alternative ([K-W], Seite 199 Mitte)

$$\epsilon(\alpha_{n-1}^2) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{n-1}^2 = t_n \quad \text{oder} \quad \epsilon(\alpha_{n-1}^2) = v_n \Leftrightarrow \alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n.$$

Nach 1.6.4b) ist $\epsilon(\alpha_{n-1}^2) = \epsilon(\alpha_{n-1})^2 + v_n \epsilon(Q_{n-1} \alpha_{n-1}) \epsilon(Q_{n-1} \alpha_{n-1})$. Da $Q_{n-1} \alpha_{n-1} = Q_{n-1} \alpha_{n-1} = 1$ ist und aus Dimensionsgründen $\epsilon(\alpha_{n-1}) = 0$ gilt, ist $\epsilon(\alpha_{n-1}^2) = v_n$ und damit $\alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n$.

b) und c) ergeben sich aus 1.7.2 durch Übertragung der bekannten Formeln für das Coprodukt bzw. die Konjugation für \mathcal{A} . □

2 Über $P(n)$ und $K(n)$ für $p = 2$

2.1 Vorbereitungen

In 1.7.3a) wurde gezeigt, daß

$$P(n)_*(P(n)) = P(n)_*[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots]$$

mit $\alpha_i^2 = t_{i+1}$ ($0 \leq i < n-1$) und $\alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n$ ist. Wir setzen zur Abkürzung $\alpha := \alpha_{n-1}$ und $Q := Q_{n-1}$. Das folgende Lemma versammelt einige einfache Tatsachen:

(2.1.1) Lemma. (a) $Q : P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n)_*(P(n))$ und $Q_* : P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n)_*(P(n))$ sind identisch.

(b) $P(n)_*(P(n-1)) = \ker Q = \operatorname{im} Q$. (Wobei mit Q wie in a) die Operation von Q auf $P(n)_*(P(n))$ gemeint ist.)

(c) Q kommutiert mit allen Operationen aus $P(n)^*(P(n))$.

(d) Jedes $\theta \in P(n)^*(P(n))$ erfüllt

$$\theta_*(P(n)_*(P(n-1))) \subset P(n)_*(P(n-1)).$$

(e) Die Augmentation $\epsilon : P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n)$ erfüllt $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$ falls x oder y aus $P(n)_*(P(n-1))$ ist.

Beweis: Wie schon im Beweis von 1.7.3 verwendet ist $Q_*(\alpha) = Q(\alpha) = 1$. Wir benutzen weiter, daß Q und Q_* Derivationen sind. Da sich jedes $z \in P(n)_*(P(n))$ als $z = z_1 + \alpha z_2$ mit $z_1, z_2 \in P(n)_*(P(n-1))$ schreiben ist

$$\begin{aligned} Q(z) &= Q(z_1 + \alpha z_2) \\ &= Q(\alpha)z_2 \\ &= z_2. \end{aligned}$$

Da $Q_*(\alpha) = Q(\alpha)$ ist, ergibt sich genauso $Q_*(z) = z_2$. Hieraus ergeben sich unmittelbar a) und b).

Zum Beweis von c) sei $\theta \in P(n)^*(P(n))$. Mit Kroneckerdualität reicht es zu zeigen, daß $\theta_*Q_* = Q_*\theta_*$ ist. Dies gilt, da $Q = Q_*$ ist und die Homologieoperation Q mit der induzierten Abbildung θ_* kommutiert.

d) folgt aus b), da

$$\begin{aligned} z &\in P(n)_*(P(n-1)) \\ \Leftrightarrow Q(z) &= 0 \\ \Rightarrow \theta_*(Q(z)) &= 0 \\ \Leftrightarrow Q(\theta_*(z)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta_*(z) &\in P(n)_*(P(n-1)). \end{aligned}$$

e) folgt aus 1.6.4b) mit b). □

Wir schreiben $\overline{P(n)}$ für das Spektrum $P(n)$ mit der Multiplikation $\overline{\mu T} = \mu + v_n\mu(Q \wedge Q)$. Für $x, y \in P(n)_*(P(n))$ bezeichne $x \star y$ das Pontrjagin-Produkt in $P(n)_*(\overline{P(n)})$. Damit gilt:

(2.1.2) Lemma. Es ist $x \star y = xy + v_n Q_*(x)Q_*(y)$.

Beweis: Dies ist eine einfache Rechnung:

$$\begin{aligned}
x \star y &= (\mu \wedge \mu T)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(x \wedge y) \\
&= (\mu \wedge \mu)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(x \wedge y) + v_n(\mu \wedge \mu)(\text{id} \wedge \text{id} \wedge Q \wedge Q)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(x \wedge y) \\
&= xy + v_n(\mu \wedge \mu)(\text{id} \wedge T \wedge \text{id})(\text{id} \wedge Q \wedge \text{id} \wedge Q)(x \wedge y) \\
&= xy + v_n Q_*(x)Q_*(y).
\end{aligned}$$

□

Damit können wir nun die multiplikativen und antimultiplikativen Morphismen $\theta : P(n) \rightarrow P(n)$ näher bestimmen:

(2.1.3) Satz. *Ein $\theta \in P(n)^*(P(n))$ ist genau dann multiplikativ, wenn sein Kroneckerdual $\tilde{\theta}$ ein Algebrenhomomorphismus*

$$P(n)_*(\overline{P(n)}) \rightarrow P(n)^*$$

ist. Es ist antimultiplikativ (d.h. es ist $\theta \mu T = \mu(\theta \wedge \theta)$) genau dann, wenn $\tilde{\theta}$ ein Algebrenhomomorphismus

$$P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n)^*$$

ist.

Beweis: Satz 1.6.5 zufolge ist θ genau dann multiplikativ, wenn

$$(2.1.A) \quad \epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy))$$

gilt. Wir müssen zeigen, daß dies zu

$$(2.1.B) \quad \epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(x \star y))$$

äquivalent ist.

Aus beiden Bedingungen folgt jeweils, daß

$$(2.1.C) \quad \tilde{\theta}(xy) = \tilde{\theta}(x)\tilde{\theta}(y) \quad \text{für } x \text{ oder } y \text{ aus } P(n)_*(P(n-1))$$

gilt.

Die Implikation 2.1.B \Rightarrow 2.1.C ergibt sich daraus, daß für solche x und y nach Lemma 2.1.2 $x \star y = xy$ ist.

2.1.A \Rightarrow 2.1.C folgt aus 2.1.1d) und 2.1.1e).

Zum Beweis der Äquivalenz 2.1.A \Leftrightarrow 2.1.B können wir also 2.1.C annehmen. 1.6.4b) liefert

$$\epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) + v_n\epsilon(\theta_*(Qx))\epsilon(\theta_*(Qy)).$$

Damit wird 2.1.A zu

$$\epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) + v_n\epsilon(\theta_*(Qx))\epsilon(\theta_*(Qy)) = \epsilon(\theta_*(xy)).$$

Benutzt man $x \star y = xy + v_n(Qx)(Qy)$, so schreibt sich 2.1.B als

$$\epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy)) + v_n\epsilon(\theta_*((Qx)(Qy))).$$

Die Differenz beider Gleichungen ist also

$$v_n\tilde{\theta}(Qx)\tilde{\theta}(Qy) = v_n\tilde{\theta}((Qx)(Qy)).$$

Dies ist aber eine Folgerung aus 2.1.C, da Qx und Qy nach 2.1.1b) aus $P(n)_*(P(n-1))$ sind.

Die Charakterisierung antimultiplikativer Morphismen leitet man ganz analog her: Satz 1.6.5. liefert die Bedingung $\epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(x \star y))$ und dies soll zu $\epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy))$ äquivalent sein. Dies zeigt man genauso wie im multiplikativen Fall. (vgl. den Beweis von 2.4.3). □

(2.1.4) Lemma. *Es ist $P(n)_*(\overline{P(n)}) = P(n)_*[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots]$ mit $\alpha_i \star \alpha_i = t_{i+1}$ für $0 \leq i \leq n-1$.* \square .

Beweis: Aus 2.1.2 folgt, daß $xy = x \star y$ für x oder y aus $P(n)_*(P(n-1))$ gilt. Die multiplikative Struktur auf $P(n)_*[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-2}, t_n, t_{n+1}, \dots]$ ist also wie behauptet. Es bleibt nur noch, $\alpha_{n-1} \star \alpha_{n-1}$ zu berechnen. Aus 2.1.2 folgt, daß $\alpha_{n-1} \star \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}^2 + v_n Q_*(\alpha_{n-1}) Q_*(\alpha_{n-1}) = t_n + v_n + v_n = t_n$ ist. \square

2.2 Formale Gruppen

Wir erinnern zunächst an die Beziehung zwischen dem Hopf-Algebroid $(P(n)_*, P(n)_*(BP))$ und formalen Gruppen. Die benötigten Begriffe findet man in [R], Appendix 2.

Für eine Z_p -Algebra R sei $\mathcal{F}_n(R)$ die Menge der p -typischen formalen Gruppen einer Höhe größer oder gleich n über R . $\mathcal{SI}_n(R)$ sei die Menge der Tripel (F, f, G) , mit $F, G \in \mathcal{F}_n(R)$ und einem strikten Isomorphismus $f : G \rightarrow F$. $\mathcal{F}_n(-)$ und $\mathcal{SI}_n(-)$ ergeben zusammen einen gruppoidwertigen Funktor auf der Kategorie der kommutativen Z_p -Algebren. Dieser Funktor wird durch das Hopf-Algebroid $(P(n)_*, P(n)_*(BP))$ (co-)repräsentiert, d.h. man hat natürliche Bijektionen

$$\mathcal{F}_n(R) \leftrightarrow \text{Hom}_{Z_p\text{-Alg}}(P(n)_*, R)$$

und

$$\mathcal{SI}_n(R) \leftrightarrow \text{Hom}_{Z_p\text{-Alg}}(P(n)_*(BP), R).$$

Die Strukturabbildungen $\epsilon, \eta_L, \eta_R, c, \Delta$ lassen sich nun als natürliche Transformationen interpretieren:

$$\begin{aligned} \epsilon : P(n)_*(BP) &\rightarrow P(n)_* &\leftrightarrow F &\mapsto (F, \text{id}, F) \\ \eta_L : P(n)_* &\rightarrow P(n)_*(BP) &\leftrightarrow (F, f, G) &\mapsto F \\ \eta_R : P(n)_* &\rightarrow P(n)_*(BP) &\leftrightarrow (F, f, G) &\mapsto G \\ c : P(n)_*(BP) &\rightarrow P(n)_*(BP) &\leftrightarrow (F, f, G) &\mapsto (G, f^{-1}, F) \end{aligned}$$

Δ entspricht der Zusammensetzung strikter Isomorphismen.

Zum späteren Gebrauch halten wir noch fest wie die Bijektion

$$\mathcal{SI}_n(R) \leftrightarrow \text{Hom}_{Z_p\text{-Alg}}(P(n)_*(BP), R)$$

zustandekommt. Ist $\phi : P(n)_*(BP) \rightarrow R$ gegeben, so bestimmt man das Tripel (F, f, G) so:

- (a) F (bzw. G) ist die durch $\phi\eta_L : P(n)_* \rightarrow R$ (bzw. $\phi\eta_R$) auf R induzierte formale Gruppe.
- (b) $f : G \rightarrow F$ ist durch $f^{-1}(x) = x +_F \sum_{i \geq 1}^F \phi(t_i) x^{p^i}$ bestimmt.

Für $p = 2$ besteht neben diesen Transformationen noch eine weitere: die Inversion $[-1]_F(x)$ ist in diesem Fall nämlich ein strikter Isomorphismus $F \rightarrow F$, da allgemein $[-1]_F(x) \equiv -x \pmod{x^2}$ ist. Wir erhalten damit ein $\delta_n : P(n)_*(BP) \rightarrow P(n)_*$, das die Zuordnung

$$F \mapsto (F, [-1]_F(x), F)$$

darstellt. Es ist klar, daß für jedes $n \geq 1$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P(n)_*(BP) & \xrightarrow{\delta_n} & P(n)_* \\ \eta_n \downarrow & & \eta_n \downarrow \\ P(n+1)_*(BP) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & P(n+1)_* \end{array}$$

kommutiert. Deswegen schreiben wir im folgenden einfach δ statt δ_n . Außerdem gilt offensichtlich $\delta\eta_L = \delta\eta_R = \text{id}$. Insbesondere ist $\delta(v_i) = \delta(\eta_L(v_i)) = v_i$ für jedes i .

(2.2.1) Lemma. *Es ist $\delta(t_n) \equiv v_n \pmod{I_n}$.*

Beweis: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach n . Für den Induktionsschritt $n-1 \Rightarrow n$ betrachten wir die formale Gruppe F_n über $K(n)_* := v_n^{-1}P(n)_*/(v_{n+1}, v_{n+2}, \dots)$, die durch die kanonische Abbildung $\pi : P(n)_* \rightarrow K(n)_*$ induziert wird. Klassifiziert $\tilde{\delta} : P(n)_*(\text{BP}) \rightarrow K(n)_*$ die Inversion $[-1]_{F_n}(x)$, so ist $\tilde{\delta} = \pi\delta$ und $[-1]_{F_n}(x)$ ist durch

$$[-1]_{F_n}(x) = x +_{F_n} \sum_{i \geq 1}^{F_n} \tilde{\delta}(t_i)x^{2^i}$$

gegeben. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, daß $\delta(t_1) \equiv \delta(t_2) \equiv \dots \equiv \delta(t_{n-1}) \equiv 0 \pmod{I_n}$ ist. Damit ist $\tilde{\delta}(t_1) = \dots = \tilde{\delta}(t_{n-1}) = 0$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} [-1]_{F_n}(x) &= x +_{F_n} \sum_{i \geq n}^{F_n} \tilde{\delta}(t_i)x^{2^i} \\ &\equiv x + \tilde{\delta}(t_n)x^{2^n} \pmod{(x^{2^n+1})}. \end{aligned}$$

Wir benutzen den Ringhomomorphismus $Z \ni m \mapsto [m]_{F_n}(x) \in \text{End}(F_n)$. Da $-1 = 1 + 2 + 4 \cdot (-1)$ ist, ist

$$\begin{aligned} [-1]_{F_n}(x) &= x +_{F_n} [2]_{F_n}(x) +_{F_n} [4]_{F_n}([-1]_{F_n}(x)) \\ &= x +_{F_n} v_n x^{2^n} +_{F_n} [4]_{F_n}([-1]_{F_n}(x)) \\ &\equiv x + v_n x^{2^n} \pmod{(x^{2^n+1})}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde benutzt, daß $[4]_{F_n}(x) = [2]_{F_n}([2]_{F_n}(x)) = v_n(v_n x^{2^n})^{2^n} \equiv 0 \pmod{(x^{2^n+1})}$ ist.

Ein Vergleich der Koeffizienten von x^{2^n} ergibt $\tilde{\delta}(t_n) = v_n$, d.h.

$$\delta(t_n) \equiv v_n \pmod{(v_0, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots)}.$$

Da $|\delta(t_n)| = |v_n| < |v_{n+j}|$ für $j \geq 1$ ist, gilt diese Kongruenz auch modulo I_n und die Behauptung folgt. \square

Damit können wir zeigen, daß die beiden Multiplikationen auf $P(n)$ durch einen kanonischen Antiautomorphismus verbunden sind:

(2.2.2) Satz. *Die Inversion der formalen Gruppe auf $P(n)_*$ induziert eine antimultiplikative Involution $\Phi : P(n) \rightarrow P(n)$.*

Beweis: 2.1.3 zufolge müssen wir zeigen, daß sich $\delta : P(n)_*(\text{BP}) \rightarrow P(n)_*$ zu einem Algebrenhomomorphismus $\bar{\delta} : P(n)_*(P(n)) \rightarrow P(n)_*$ fortsetzen läßt. Da $P(n)_*$ in geraden Dimensionen konzentriert ist und $|\alpha_i|$ ungerade ist, müssen wir $\bar{\delta}(\alpha_i) = 0$ setzen. Wir haben also zu zeigen, daß dies mit den gegebenen Relationen $\alpha_i^2 = t_{i+1}$ (für $0 \leq i < n-1$) und $\alpha_{n-1}^2 = t_n + v_n$ verträglich ist.

Für $0 \leq i < n-1$ folgt dies, da $\delta(\alpha_i^2) = \delta(t_{i+1}) \equiv 0 \pmod{I_n}$ ist. Für $i = n-1$ ergibt sich ebenfalls $\delta(\alpha_{n-1}^2) = \delta(t_n + v_n) \equiv v_n + v_n \equiv 0 \pmod{I_n}$ wie behauptet.

Damit erhalten wir also einen antimultiplikativen Morphismus $\Phi : P(n) \rightarrow P(n)$. Bleibt zu zeigen, daß $\Phi\Phi = \text{id}$ ist:

Zunächst ist $\Phi\Phi$ offensichtlich multiplikativ. Sein Kroneckerdual $\tilde{\epsilon}$ verschwindet also auf dem von $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ in $P(n)_*(\overline{P(n)})$ erzeugten Ideal. Eingeschränkt auf $P(n)_*(\text{BP})$ klassifiziert $\tilde{\epsilon} : P(n)_*(\text{BP}) \rightarrow P(n)_*$ andererseits den strikten Isomorphismus $[-1]_F([-1]_F(x)) = x$. Daher ist $\tilde{\epsilon} = \epsilon$, also $\Phi\Phi = \text{id}$. \square

2.3 Zur Konstruktion von $K(n)$

Sei $K(n)_* := v_n^{-1}P(n)_*/(v_{n+1}, v_{n+2}, \dots)$. Der Zweck dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß

$$K(n)_*(-) := K(n)_* \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(-)$$

eine Homologietheorie ist.

Für $p > 2$ argumentiert man für gewöhnlich so: Zunächst ist $P(n)_*(P(n))$ in diesem Fall ein Hopf-Algebroid und $P(n)_*(X)$ ist für jedes X auf natürliche Weise ein $P(n)_*(P(n))$ -Comodul. Außerdem ist $P(n)_*(X)$ für ein endliches Spektrum X ein endlich präsentierter $P(n)_*$ -Modul. Man benutzt sodann den

(2.3.1) Satz. *Auf der Kategorie der $P(n)_*(P(n))$ -Comoduln, die als $P(n)_*$ -Moduln endlich präsentiert sind, ist der Funktor $G \otimes_{P(n)_*} (-)$, G ein $P(n)_*$ -Modul, genau dann exakt, wenn für jedes $i \geq n$ Multiplikation mit v_i auf $G/(v_n, \dots, v_{i-1})$ injektiv ist. \square*

Beweis: Den Beweis findet man in [Y76]. Vgl. auch [L] für die ursprüngliche BP-Version dieses Resultats. \square

Da $K(n)_*$ offensichtlich die geforderte Bedingung erfüllt, ergibt sich, daß $K(n)_*(-)$ zumindest eine Homologietheorie auf der Kategorie endlicher Spektren ist. Die Ausdehnung auf beliebige Spektren ist dann nicht schwer.

Auf den Fall $p = 2$ ist diese Argumentation nicht unmittelbar übertragbar, da $P(n)_*(P(n))$ kein Hopf-Algebroid ist. Wir geben deswegen einen Ad-hoc-Beweis, der sich an [J-W] anlehnt:

Man setze $B(n)_*(X) = v_n^{-1}P(n)_*(X)$ und $B(n, i)_*(X) = B(n)_*(X)/(v_{n+1}, \dots, v_{n+i})$ für $i \geq 0$. Es ist $B(n)_*(-) = B(n, 0)_*(-)$ und mit $B(n, i)_* := B(n, i)_*(S)$ ist $B(n, i)_*(-) = B(n, i)_* \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(-)$. Die offensichtlichen Transformationen $B(n, i)_*(-) \rightarrow B(n, i+1)_*(-)$ definieren ein gerichtetes System

$$B(n)_*(-) = B(n, 0)_*(-) \rightarrow B(n, 1)_*(-) \rightarrow B(n, 2)_*(-) \rightarrow B(n, 3)_*(-) \rightarrow \dots$$

und es ist $K(n)_*(-) = \varinjlim B(n, i)_*(-)$. Deswegen reicht es zu zeigen, daß jedes $B(n, i)_*(-)$ eine Homologietheorie ist.

Wir zeigen dies durch Induktion nach i . Der Induktionsanfang ergibt sich für $i = 0$, da Lokalisierung an v_n exakt ist.

Wir benutzen das folgende Lemma aus [J-W].

(2.3.2) Lemma. *Für jeden Morphismus $f : S \rightarrow X$ ist $f_* : B(n)_*(S) \rightarrow B(n)_*(X)$ entweder null oder injektiv.*

Beweis: Dies ist Lemma (3.3) aus [J-W]. \square

Der Induktionsschritt ist in dem folgendem Lemma enthalten:

(2.3.3) Lemma. *Angenommen $B(n, i)_*(-)$ sei eine Homologietheorie. Dann gilt:*

- (a) *Für jedes X ist Multiplikation mit v_{n+i+1} auf $B(n, i)_*(X)$ injektiv.*
- (b) *$B(n, i+1)_*(-)$ ist eine Homologietheorie.*

Beweis: Da $B(n, i)_*(X) = \varinjlim B(n, i)_*(X_\alpha)$ ist, wenn X_α das System der endlichen Unterspektren von X durchläuft, und der direkte Limes exakt ist, braucht man a) nur für endliche Spektren zu beweisen.

Für die Sphäre S ist die Behauptung offensichtlich. Wir nehmen nun an, daß a) für ein Spektrum Y gilt und zeigen, daß auch jedes Spektrum X , das aus Y durch Anheften einer Zelle entsteht, a) erfüllt. Dazu betrachten wir eine Cofaserfolge

$$\dots \longrightarrow S \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} \Sigma S \longrightarrow \dots$$

Aus 2.3.2 folgt, daß $h_* : B(n, i)_*(Y) \rightarrow B(n, i)_*(\Sigma S)$ oder $f_* : B(n, i)_*(S) \rightarrow B(n, i)_*(X)$ null ist. Im ersten Fall betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B(n, i)_*(S) & \xrightarrow{f_*} & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) \longrightarrow 0 \\ & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B(n, i)_*(S) & \xrightarrow{f_*} & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) \longrightarrow 0 \end{array}$$

im zweiten

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) & \xrightarrow{h_*} & B(n, i)_*(\Sigma S) \longrightarrow 0 \\ & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) & \xrightarrow{h_*} & B(n, i)_*(\Sigma S) \longrightarrow 0 \end{array}$$

In beiden Fällen sind die Zeilen des jeweiligen Diagramms exakt. Die Injektivität von $\cdot v_{n+i+1} : B(n, i)_*(X) \rightarrow B(n, i)_*(X)$ folgt aus einer einfachen Diagrammjagd.

Für b) ist nur die Exaktheit von $B(n, i+1)_*(-)$ nicht offensichtlich. Wir betrachten eine Cofaserfolge

$$\dots \longrightarrow Z \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} \Sigma Z \longrightarrow \dots$$

und dazu das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \rightarrow B(n, i)_*(Z) & \xrightarrow{f_*} & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) & \xrightarrow{h_*} & B(n, i)_*(\Sigma Z) \rightarrow \dots \\ \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow & & \cdot v_{n+i+1} \downarrow \\ \dots \rightarrow B(n, i)_*(Z) & \xrightarrow{f_*} & B(n, i)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i)_*(Y) & \xrightarrow{h_*} & B(n, i)_*(\Sigma Z) \rightarrow \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots \rightarrow B(n, i+1)_*(Z) & \xrightarrow{f_*} & B(n, i+1)_*(X) & \xrightarrow{g_*} & B(n, i+1)_*(Y) & \xrightarrow{h_*} & B(n, i+1)_*(\Sigma Z) \rightarrow \dots \end{array}$$

In diesem Diagramm sind die Spalten nach a) kurze exakte Sequenzen. Die beiden oberen Zeilen sind nach Voraussetzung exakt. Eine Diagrammjagd zeigt nun die Exaktheit der unteren Zeile. \square

Damit ist also $K(n)_*(-)$ eine Homologietheorie. Wir zeigen schließlich noch, wie man auf $K(n)$ eine Ringspektrenstruktur definiert.

In $K(n)_*$ ist jedes von Null verschiedene homogene Element invertierbar. Jeder graduierte $K(n)_*$ -Modul ist daher frei. ($K(n)_*$ ist ein „graduierter Körper“.) Folglich definiert

$$(2.3.A) \quad K(n)^*(X) := \text{Hom}_{K(n)_*}(K(n)_*(X), K(n)^*) = \text{Hom}_{P(n)_*}(P(n)_*(X), K(n)^*)$$

eine verallgemeinerte Cohomologietheorie. Nach Konstruktion bestehen überdies natürliche Transformationen

$$\lambda^h : P(n)_*(-) \rightarrow K(n)_*(-)$$

und

$$\lambda^c : P(n)^*(-) \rightarrow K(n)^*(-),$$

wobei letztere vom Kroneckerhomomorphismus $P(n)^*(X) \rightarrow \text{Hom}_{P(n)_*}(P(n)_*(X), P(n)^*)$ induziert wird. Beide Transformationen sind offensichtlich $P(n)_*$ -linear und (bzgl. 2.3.A) zueinander adjungiert.

Wir zeigen, daß $K(n)_*(-)$ und $K(n)^*(-)$ vom selben Spektrum repräsentiert werden.

(2.3.4) Lemma. *Ist G das darstellende Spektrum der Cohomologietheorie $K(n)^*(-)$, so besteht eine natürliche Isomorphie $G_*(-) \cong K(n)_*(-)$.*

λ^c und λ^h werden vom selben Morphismus $\lambda : P(n) \rightarrow G$ induziert.

Beweis: Da $G^*(-)$ mit einer natürlichen $K(n)_*$ -Modulstruktur versehen ist, gilt dasselbe für $G_*(-)$. (Für jedes $x \in K(n)_*$ läßt sich nämlich die Linksmultiplikation mit x

$$L_x : G^*(-) \rightarrow G^*(-)$$

durch einen eindeutig bestimmten Morphismus $\Xi(x) : G \rightarrow G$ darstellen. Dadurch wird ein Ringhomomorphismus $\Xi : K(n)_* \rightarrow G^*(G)$ definiert, durch den $K(n)_*$ auf $G_*(-)$ operiert.)

Die Transformation λ^c wird durch einen (eindeutig bestimmten) Morphismus $\lambda : P(n) \rightarrow G$ induziert. Die zu λ gehörende Homologieoperation

$$P(n)_*(-) \rightarrow G_*(-)$$

ist $P(n)_*$ -linear. Aufgrund der Linearität faktorisiert diese Transformation über $K(n)_* \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(-) = K(n)_*(-)$ und wir erhalten eine Transformation $K(n)_*(-) \rightarrow G_*(-)$. Es folgt leicht aus der Konstruktion, daß dies auf Sphären ein Isomorphismus ist und damit folgt die Isomorphie aus dem Vergleichssatz für Homologietheorien.

Daß λ^h von λ induziert wird folgt daraus, daß λ^h und die zu λ gehörende Homologieoperation beide bzgl. 2.3.A zu λ^c adjungiert sind. \square

Wir schreiben im folgenden $K(n)$ für das darstellende Spektrum von $K(n)^*(-)$.

Die Multiplikation $\mu : P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ definiert ein $P(n)_*$ -lineares äußeres Homologieprodukt

$$P(n)_*(X) \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(Y) \xrightarrow{\Delta} P(n)_*(X \wedge Y),$$

das ein äußeres Homologieprodukt

$$(2.3.B) \quad K(n)_*(X) \otimes_{K(n)_*} K(n)_*(Y) \xrightarrow{\Delta} K(n)_*(X \wedge Y)$$

induziert. Da $K(n)_*(X)$ für jedes X frei ist, ist 2.3.B sogar ein Isomorphismus. Aus der Definition von $K(n)^*(-)$ erhalten wir damit einen Homomorphismus

$$(2.3.C) \quad K(n)^*(X) \otimes_{K(n)^*} K(n)^*(Y) \xrightarrow{\bar{\Delta}} K(n)^*(X \wedge Y)$$

mit

$$\langle x \bar{\Delta} y, \alpha \Delta \beta \rangle := \langle x, \alpha \rangle \langle y, \beta \rangle$$

für $x \in K(n)^*(X)$, $y \in K(n)^*(Y)$, $\alpha \in K(n)_*(X)$ und $\beta \in K(n)_*(Y)$. ($\langle -, - \rangle$ bezeichnet hier die zu 2.3.A gehörende Paarung $K(n)^*(X) \otimes_{K(n)_*} K(n)_*(X) \rightarrow K(n)^*$.)

Man überlegt sich leicht, daß

$$m := \text{id} \bar{\Delta} \text{id} \in K(n)^*(K(n) \wedge K(n))$$

auf $K(n)$ eine Ringspektrenstruktur definiert für die $\lambda : P(n) \rightarrow K(n)$ multiplikativ ist.

Die Bocksteinoperation $Q_{n-1} : P(n) \rightarrow P(n-1)$ ist $P(n)_*$ -linear und induziert deshalb eine natürliche Transformation $Q_{n-1} : K(n)_*(-) \rightarrow K(n)_*(-)$. Wir erhalten damit eine (wieder mit Q_{n-1} bzw. einfach Q bezeichnete) Operation $Q_{n-1} : K(n) \rightarrow K(n)$. Für $p = 2$ leitet man dann leicht ab, daß für die Multiplikation $m : K(n) \wedge K(n) \rightarrow K(n)$ die Beziehung $mT = m + v_n m(Q_{n-1} \wedge Q_{n-1})$ gilt.

2.4 Multiplikative und antimultiplikative Automorphismen von $K(n)$

Im folgenden sei $p = 2$. Wir schreiben $\overline{K(n)}$ für das Ringspektrum $K(n)$ mit der Multiplikation mT . Es gilt:

(2.4.1) Lemma.

$$\pi_*(\lambda \wedge \lambda) : v_n^{-1}P(n)_*(P(n)) \rightarrow K(n)_*(K(n))$$

und

$$\pi_*(\lambda \wedge \lambda) : v_n^{-1}P(n)_*(\overline{P(n)}) \rightarrow K(n)_*(\overline{K(n)})$$

sind surjektive Algebrenhomomorphismen. Der Kern ist (in beiden Fällen) das von $\eta_L(v_i)$ und $\eta_R(v_i)$ für alle $i > n$ erzeugte Ideal.

Beweis: Die Multiplikativität von $\pi_*(\lambda \wedge \lambda)$ ist in beiden Fällen offensichtlich. Aus

$$K(n)_*(X) = K(n)_* \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(X)$$

folgt durch Anwendung der Vertauschung $K(n) \wedge X \cong X \wedge K(n)$

$$X_*(K(n)) = X_*(P(n)) \otimes_{P(n)_*} K(n)_*,$$

wobei $P(n)_*$ auf $X_*(P(n))$ via η_R operiert. Damit ist

$$K(n)_*(K(n)) = K(n)_* \otimes_{P(n)_*} P(n)_*(P(n)) \otimes_{P(n)_*} K(n)_*.$$

Hieraus ergibt sich die Surjektivität und die Identifikation des Kerns von $\pi_*(\lambda \wedge \lambda)$. \square

Für $K(n)$ übertragen sich einige Aussagen von 2.1.1:

(2.4.2) Lemma. (a) $Q : K(n)_*(K(n)) \rightarrow K(n)_*$ und $Q_* : K(n)_*(K(n)) \rightarrow K(n)_*$ sind identisch.

(b) Q kommutiert mit allen Operationen aus $K(n)^*(K(n))$.

(c) Bezeichnet $x \star y$ das Pontrjagin-Produkt in $K(n)_*(\overline{K(n)})$ so ist

$$x \star y = xy + v_n Q_*(x)Q_*(y).$$

(d) Für die Augmentation $\epsilon = \pi_*(m) : K(n)_*(K(n)) \rightarrow K(n)_*$ gilt

$$\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y) + v_n \epsilon(Q_*(x))\epsilon(Q_*(y)).$$

Beweis: a) folgt aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} P(n)_*(P(n)) & \xrightarrow{\pi_*(\lambda \wedge \lambda)} & K(n)_*(K(n)) & & P(n)_*(P(n)) & \xrightarrow{\pi_*(\lambda \wedge \lambda)} & K(n)_*(K(n)) \\ Q \downarrow & & \downarrow Q & \text{und} & Q_* \downarrow & & \downarrow Q_* \\ P(n)_*(P(n)) & \xrightarrow{\pi_*(\lambda \wedge \lambda)} & K(n)_*(K(n)) & & P(n)_*(P(n)) & \xrightarrow{\pi_*(\lambda \wedge \lambda)} & K(n)_*(K(n)) \end{array}$$

da die Aussage für die $P(n)$ -Operation bekannt ist und das Bild von $\pi_*(\lambda \wedge \lambda)$ ein $K(n)_*$ -Erzeugendensystem für $K(n)_*(K(n))$ ist. Genauso folgen auch c) und d).

b) folgt wie in 2.1.1 aus der Kroneckerdualität $K(n)^*(K(n)) \cong \text{Hom}_{K(n)_*}(K(n)_*(K(n)), K(n)_*)$ mit a). \square

Satz 2.1.3 überträgt sich unmittelbar auf die $K(n)$'s:

(2.4.3) Satz. *Ein Morphismus $\theta : K(n) \rightarrow K(n)$ ist genau dann multiplikativ, falls sein Kroneckerdual $\tilde{\theta}$ ein Algebrenhomomorphismus*

$$K(n)_*(\overline{K(n)}) \rightarrow K(n)_*$$

ist. Es ist genau dann antimultiplikativ, wenn $\tilde{\theta}$ ein Algebrenhomomorphismus

$$K(n)_*(K(n)) \rightarrow K(n)_*$$

ist.

Beweis: Dies beweist man im Grunde genau wie 2.1.3. Im Detail:

1.6.5 zufolge ist $\theta : K(n) \rightarrow K(n)$ genau dann antimultiplikativ, wenn für alle $x, y \in K(n)_*(K(n))$

$$(2.4.A) \quad \epsilon(\theta_*(x)\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(x \star y))$$

ist. Dies soll zu

$$(2.4.B) \quad \epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy))$$

äquivalent sein. Aus beiden Bedingungen folgt mit 2.4.2 jeweils, daß

$$(2.4.C) \quad \epsilon(\theta_*(x))\epsilon(\theta_*(y)) = \epsilon(\theta_*(xy)), \quad \text{falls } Q_*(x) \text{ oder } Q_*(y) \text{ null ist}$$

gilt. Nehmen wir also 2.4.C an. Mit 2.4.2 schreibt sich 2.4.A als

$$\tilde{\theta}(x)\tilde{\theta}(y) + v_n\tilde{\theta}(Q_*(x))\tilde{\theta}(Q_*(y)) = \tilde{\theta}(xy + v_nQ_*(x)Q_*(y)).$$

Aus 2.4.C ergibt sich, daß

$$\tilde{\theta}(v_nQ_*(x)Q_*(y)) = v_n\tilde{\theta}(Q_*(x))\tilde{\theta}(Q_*(y))$$

ist. Zusammengenommen ergibt sich unmittelbar die Äquivalenz von 2.4.A und 2.4.B.

Im multiplikativen Fall argumentiert man genauso. □

$\Sigma(n) \subset K(n)_*(K(n))$ sei das Bild von $v_n^{-1}P(n)_*(BP) \subset v_n^{-1}P(n)_*(P(n))$ unter $\pi_*(\lambda \wedge \lambda)$. $\Sigma(n)$ — bekannt als n te-Morava'sche Stabilisatoralgebra, vgl. [R], Chapter 6 — ist eine Unter algebra von $K(n)_*(K(n))$.

(2.4.4) Lemma. *Sei $\phi : \Sigma(n) \rightarrow K(n)_*$ ein $K(n)_*$ -Algebrenhomomorphismus (vom Grad Null). Dann gilt:*

(a) *Es ist $\phi(t_1) = \cdots = \phi(t_{n-1}) = 0$ und $\phi(t_n) \in \{0, v_n\}$.*

(b) *ϕ setzt sich entweder zu einem Algebrenhomomorphismus*

$$\bar{\phi} : K(n)_*(K(n)) \rightarrow K(n)_*$$

(im Fall $\phi(t_n) = v_n$), oder zu einem Algebrenhomomorphismus

$$\bar{\phi} : K(n)_*(\overline{K(n)}) \rightarrow K(n)_*$$

(falls $\phi(t_n) = 0$) fort. In beiden Fällen ist die Fortsetzung eindeutig.

Beweis: a) folgt durch eine triviale Dimensionsbetrachtung.

Für b) überlegt man sich zunächst, daß

$$\mathbb{K}(n)_*(\mathbb{K}(n)) = \Sigma(n)[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}]/(\alpha_i^2 - t_{i+1} - v_{i+1})$$

und

$$\mathbb{K}(n)_*(\overline{\mathbb{K}(n)}) = \Sigma(n)[\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}]/(\alpha_i^2 - t_{i+1})$$

ist. Dies folgt leicht aus der Struktur von $\mathbb{P}(n)_*(\mathbb{P}(n))$ bzw. $\mathbb{P}(n)_*(\overline{\mathbb{P}(n)})$ (vgl. 2.4.1).

Da $\Sigma(n) \cup \{\alpha_i \mid 0 \leq i < n\}$ die Algebra $\mathbb{K}(n)_*(\overline{\mathbb{K}(n)})$ erzeugt und $\bar{\phi}$ wegen $|\alpha_i| \equiv 1 \pmod{2}$ auf den α_i 's verschwinden muß, ergibt sich die Eindeutigkeit einer Fortsetzung.

Außerdem ergibt sich, daß eine Fortsetzung genau dann existiert, wenn ϕ auf der von den α_i erzeugten Unter algebra verschwindet. Mit a) und den Relationen $\alpha_i^2 = t_{i+1}$ ist dies für eine Fortsetzung auf $\mathbb{K}(n)_*(\overline{\mathbb{K}(n)})$ zu $\phi(t_n) = 0$ äquivalent.

Im Fall $\phi(t_n) = v_n$ argumentiert man genauso. □

(2.4.5) Bemerkung. *Das eben bewiesene Lemma markiert einen wichtigen Unterschied zwischen den Fällen $p = 2$ und $p > 2$. Für $p > 2$ ist $\mathbb{K}(n)_*(\mathbb{K}(n)) = \Sigma(n) \otimes_{\mathbb{K}(n)_*} \Lambda(\tau_0, \dots, \tau_{n-1})$. Damit läßt sich wegen $\tau_i^2 = 0$ jeder $\mathbb{K}(n)_*$ -Algebrenhomomorphismus $\phi : \Sigma(n) \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$ eindeutig zu einem Algebrenhomomorphismus $\tilde{\phi} : \mathbb{K}(n)_*(\mathbb{K}(n)) \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$ liften. (Dies ist Gleichung (3.16) aus [W84].)*

Das folgende Lemma ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion von $\Sigma(n)$.

(2.4.6) Lemma. *Es gibt eine kanonische Bijektion*

$$\text{Hom}_{\mathbb{K}(n)_*\text{-Alg}}(\Sigma(n), \mathbb{K}(n)_*) \leftrightarrow \{ \text{strikte Automorphismen von } F_n \} =: \text{SAut}(F_n)$$

F_n ist dabei die im Beweis von 2.2.1 definierte formale Gruppe. Die Bijektion ist durch

$$\phi \mapsto f(x) := x +_{F_n} \sum_{i \geq 1}^{F_n} \phi(t_i) x^{p^i}$$

gegeben.

Beweis: Jeder $\mathbb{K}(n)_*$ -Algebrenhomomorphismus

$$\phi : \Sigma(n) = \mathbb{K}(n)_* \otimes_{\text{BP}_*} \text{BP}_*(\text{BP}) \otimes_{\text{BP}_*} \mathbb{K}(n)_* \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$$

definiert durch Vorschalten von

$$\kappa : \text{BP}_*(\text{BP}) \rightarrow \mathbb{K}(n)_* \otimes_{\text{BP}_*} \text{BP}_*(\text{BP}) \otimes_{\text{BP}_*} \mathbb{K}(n)_*$$

einen Ringhomomorphismus $\tilde{\phi} : \text{BP}_*(\text{BP}) \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$, d.h. ein Tripel $(F, f, G) \in \mathcal{SI}_0(\mathbb{K}(n)_*)$. Die Zuordnung $\phi \mapsto (F, f, G) \in \mathcal{SI}_0(\mathbb{K}(n)_*)$ ist injektiv, denn im κ ist ein $\mathbb{K}(n)_*$ -Erzeugendensystem von $\Sigma(n)$.

Andererseits faktorisiert ein solches $\tilde{\phi}$ genau dann über $\Sigma(n)$, wenn $\tilde{\phi}_{\eta_L} = \tilde{\phi}_{\eta_R}$ ist, d.h. wenn $F = G$ ist. Der entstehende Ringmorphismus $\Sigma(n) \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$ ist genau dann $\mathbb{K}(n)_*$ -linear, wenn $\tilde{\phi}_{\eta_L} : \text{BP}_* \rightarrow \mathbb{K}(n)_*$ die kanonische Abbildung ist, die F_n definiert, d.h. wenn $F = F_n$ ist. Wir erhalten damit genau die Tripel der Form (F_n, f, F_n) , d.h. genau die strikten Automorphismen von F_n . □

Es ist bekannt (vgl. Prop. 6.4 aus [Y80]), daß sich die Abbildung $Z \ni m \mapsto [m]_{F_n}(x) \in \text{End}(F_n)$ zu einem stetigen Ringisomorphismus

$$\hat{Z}_2 \xrightarrow{\cong} \text{End}(F_n)$$

fortsetzt (\hat{Z}_2 sind die 2-adischen ganzen Zahlen). Wir erhalten also einen Isomorphismus

$$(2.4.D) \quad \hat{Z}_2^* \xrightarrow{\cong} \text{Aut}(F_n),$$

wobei \hat{Z}_2^* die Einheitengruppe von \hat{Z}_2 bezeichnet. Zum Abschluß dieser Arbeit zeigen wir noch den folgenden Satz, der Theorem 2.6 aus [W89] korrigiert.

(2.4.7) Satz. *Sei Mult^+ (bzw. Mult^-) die Menge der multiplikativen (bzw. antimultiplikativen) Automorphismen $K(n) \rightarrow K(n)$, $\text{Mult}^\pm := \text{Mult}^+ \cup \text{Mult}^-$. Dann existiert ein Gruppenisomorphismus*

$$\text{Mult}^\pm \cong \hat{Z}_2^*.$$

Ein Element aus \hat{Z}_2^ entspricht dabei genau dann einem multiplikativen (bzw. antimultiplikativen) Automorphismus von $K(n)$, wenn es kongruent 1 (bzw. 3) modulo 4 ist.*

Beweis: Die Bijektion $\text{Mult}^\pm \leftrightarrow \hat{Z}_2^*$ ergibt sich unmittelbar aus 2.4.3, 2.4.4 und der Beziehung von $\Sigma(n)$ zur formalen Gruppe F_n 2.4.6 mit 2.4.D.

Die Identifikation von Mult^+ (bzw. Mult^-) in \hat{Z}_2^* rechnet man wie im Beweis von 2.2.1 nach: $m \in \hat{Z}_2^*$ entspricht dem Algebrenhomomorphismus $\phi_m : \Sigma(n) \rightarrow K(n)_*$ mit

$$[1/m]_{F_n}(x) = x +_{F_n} \sum_{i \geq 1}^{F_n} \phi_m(t_i) x^{2^i}.$$

Wie in 2.2.1 sieht man, daß

$$[1/m]_{F_n}(x) \equiv x + \phi_m(t_n) x^{2^n} \pmod{(x^{2^{n+1}})}$$

ist. Ist $1/m = 1 + 2a + 4b$ mit $a \in \{0, 1\}$, $b \in \hat{Z}_2$, so ist andererseits

$$\begin{aligned} [1/m]_{F_n}(x) &= x +_{F_n} [2]_{F_n}([a]_{F_n}(x)) +_{F_n} [4]_{F_n}([b]_{F_n}(x)) \\ &\equiv x + av_n x^{2^n} \pmod{(x^{2^{n+1}})}, \end{aligned}$$

sodaß $\phi_m(t_n) = av_n$ ist. Die Behauptung folgt nun aus 2.4.3 und 2.4.4, da $1/m \equiv m \pmod{4}$ ist. \square

A BP-zulässige Produkte $P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ für $p = 2$

In [W77], Theorem 5.1 (4), wird behauptet, daß jedes primitive Element $m \in \mathcal{P}_{BP \wedge BP}(P(n) \wedge P(n), P(n))$ vom Grad Null, das unter $(\rho_n \wedge \rho_n)^* : P(n)^*(P(n) \wedge P(n)) \rightarrow P(n)^*(BP \wedge BP)$ auf $\rho_n m_{BP}$ abgebildet wird, assoziativ sei. Der dort gegebene Beweis beruht aber auf einem Trugschluß. Wir zeigen dies zunächst am Beispiel des primitiven Elements $\mu + v_3 \mu(Q_2 Q_1 \wedge Q_1 Q_0) \in P(3)^*(P(3) \wedge P(3))$ für $p = 2$, dessen Nichtassoziativität wir nachrechnen. (μ sei eins der in Abschnitt 1.5 konstruierten zulässigen Produkte auf $P(n)$, $p = 2$.) Danach beweisen wir einen Satz, der zeigt, daß nur die wenigsten primitiven Elemente vom Grad Null assoziativ sind.

Wir benutzen dabei einige Eigenschaften der Bocksteinoperatoren $Q_i \in P(n)^*(P(n))$, $i = 0, \dots, n-1$. Am einfachsten läßt sich die Existenz dieser Operatoren mit der Theorie der Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten begründen (vgl. [Y77]). Die so konstruierten Q_i 's sind Derivationen und erzeugen eine äußere Algebra $\Lambda \subset P(n)^*(P(n))$.

(Ohne Bezug auf Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten — und daher eher im Sinne dieser Arbeit — könnte man die Q_i durch ihr Kroneckerdual charakterisieren, aber ein solcher Zugang wäre sehr rechnerisch.)

Wir zitieren aus [W77] die folgenden Tatsachen. (Es sei $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}_2}$.)

(A.1) Satz. Es ist $\mathcal{P}_{BP}(P(n), P(n)) = P(n)^* \otimes \Lambda$. Das äußere Cohomologieprodukt $\bar{\wedge}$ induziert Isomorphismen

$$\mathcal{P}_{BP \wedge BP}(P(n) \wedge P(n), P(n)) = P(n)^* \otimes \Lambda \bar{\wedge} \Lambda$$

und

$$\mathcal{P}_{BP \wedge BP \wedge BP}(P(n) \wedge P(n), P(n)) = P(n)^* \otimes \Lambda \bar{\wedge} \Lambda \bar{\wedge} \Lambda.$$

□

Damit kann man nun die Nichtassoziativität von $\tilde{\mu} := \mu + v_3 \mu(Q_2 Q_1 \wedge Q_1 Q_0) : P(3) \wedge P(3) \rightarrow P(3)$ für $p = 2$ nachrechnen: μ und $\tilde{\mu}$ definieren äußere Cohomologieprodukte

$$\bar{\wedge} : P(n)^*(X) \otimes P(n)^*(Y) \rightarrow P(n)^*(X \wedge Y) \quad \text{bzw.} \quad \diamond : P(n)^*(X) \otimes P(n)^*(Y) \rightarrow P(n)^*(X \wedge Y).$$

Da μ assoziativ ist, ist auch $\bar{\wedge}$ assoziativ. Außerdem ist offensichtlich

$$x \diamond y = x \bar{\wedge} y + v_3(Q_2 Q_1 x) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0 y).$$

Da die Q_i Derivationen sind, gilt weiter $Q_i(x \bar{\wedge} y) = (Q_i x) \bar{\wedge} y + x \bar{\wedge}(Q_i y)$. Mit diesen Rechenregeln können wir zeigen, daß in $P(n)^*(P(n) \wedge P(n) \wedge P(n))$

$$(Q_2 \diamond \text{id}) \diamond \text{id} \neq Q_2 \diamond (\text{id} \diamond \text{id})$$

ist. Es ist

$$Q_2 \diamond \text{id} = Q_2 \bar{\wedge} \text{id} + v_3(Q_2 Q_1 Q_2) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0) = Q_2 \bar{\wedge} \text{id},$$

$$\begin{aligned} (Q_2 \diamond \text{id}) \diamond \text{id} &= (Q_2 \bar{\wedge} \text{id}) \bar{\wedge} \text{id} + v_3(Q_2 Q_1 (Q_2 \bar{\wedge} \text{id})) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0) \\ &= Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3(Q_2(Q_2 Q_1 \bar{\wedge} \text{id} + Q_2 \bar{\wedge} Q_1)) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0) \\ &= Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} \\ &+ v_3((Q_2 Q_2 Q_1) \bar{\wedge} \text{id} + (Q_2 Q_1) \bar{\wedge} Q_2 + (Q_2 Q_2) \bar{\wedge} Q_1 + Q_2 \bar{\wedge}(Q_1 Q_2)) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0) \\ &= Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3((Q_2 Q_1) \bar{\wedge} Q_2 \bar{\wedge}(Q_1 Q_0) + Q_2 \bar{\wedge}(Q_1 Q_2) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{id} \diamond \text{id} &= \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3(Q_2 Q_1) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0), \\ Q_2 \diamond (\text{id} \diamond \text{id}) &= Q_2 \bar{\wedge} (\text{id} \diamond \text{id}) + v_3((Q_2 Q_1 Q_2) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0 (\text{id} \diamond \text{id}))) \\ &= Q_2 \bar{\wedge} (\text{id} \diamond \text{id}) \\ &= Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3 Q_2 \bar{\wedge}(Q_2 Q_1) \bar{\wedge}(Q_1 Q_0). \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} & Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3 ((Q_2 Q_1) \bar{\wedge} Q_2 \bar{\wedge} (Q_1 Q_0) + Q_2 \bar{\wedge} (Q_1 Q_2) \bar{\wedge} (Q_1 Q_0)) \\ \neq & Q_2 \bar{\wedge} \text{id} \bar{\wedge} \text{id} + v_3 Q_2 \bar{\wedge} (Q_2 Q_1) \bar{\wedge} (Q_1 Q_0) \end{aligned}$$

ist, ist \diamond und mithin auch $\tilde{\mu}$ nicht assoziativ.

Mit den hier verwendeten Rechenregeln kann man ganz allgemein für jedes vorgelegte primitive Element $\tilde{\mu} : P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ die Assoziativität bzw. Nichtassoziativität durch stures Nachrechnen entscheiden. Dazu reicht es ja, $\tilde{\mu}(\tilde{\mu} \wedge \text{id}) = (\text{id} \diamond \text{id}) \diamond \text{id}$ und $\tilde{\mu}(\text{id} \wedge \tilde{\mu}) = \text{id} \diamond (\text{id} \diamond \text{id})$ durch die Standardbasis von $\Lambda \bar{\wedge} \Lambda \bar{\wedge} \Lambda$ auszudrücken. Um zu einem allgemeinen Resultat zu kommen brauchen wir allerdings noch etwas Theorie.

Zunächst läßt sich auf Λ bekanntlich ein Coprodukt $\Delta : \Lambda \rightarrow \Lambda \otimes \Lambda$ mit $\Delta(Q_i) = Q_i \otimes \text{id} + \text{id} \otimes Q_i$ definieren mit dem (Λ, Δ) zu einer Hopf-Algebra wird. Auf dem Z_2 -Dual Λ^* wird durch Δ eine Algebrenstruktur induziert. Ist $Q_i^* \in \Lambda^*$ (bzgl. der Standardbasis von Λ) zu Q_i dual, so ist Λ^* gerade die äußere Algebra über den Q_i^* . Für $x \in \Lambda$, $y, z \in \Lambda^*$ ist $\langle y \otimes z, \Delta(x) \rangle = \langle yz, x \rangle$, wobei $\langle -, - \rangle : \Lambda^* \otimes \Lambda \rightarrow Z_2$ die Dualitätsabbildung ist.

Wir benutzen, daß die Zuordnungen

$$\chi : \Lambda \otimes \Lambda \ni x \otimes y \mapsto x \bar{\wedge} y \in \Lambda \bar{\wedge} \Lambda$$

und

$$\chi : \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda \ni x \otimes y \otimes z \mapsto x \bar{\wedge} y \bar{\wedge} z \in \Lambda \bar{\wedge} \Lambda \bar{\wedge} \Lambda$$

Isomorphismen sind. Für $\theta \in \Lambda \otimes \Lambda$ oder $\theta \in \Lambda \otimes \Lambda \otimes \Lambda$ schreiben wir im folgenden $\bar{\theta}$ statt $\chi(\theta)$. Damit gilt:

$$(1) \quad \theta \mu = \overline{\Delta(\theta)}, \quad \text{für alle } \theta \in \Lambda.$$

Für $\theta = \text{id}$ ist dies offensichtlich. Falls $\theta = \theta' Q_i$ ist und (1) für θ' gilt, so ist

$$\begin{aligned} \theta \mu &= \theta' Q_i \mu \\ &= \theta' \mu(Q_i \wedge \text{id}) + \theta' \mu(\text{id} \wedge Q_i) \\ &= \overline{\Delta(\theta')(Q_i \wedge \text{id})} + \overline{\Delta(\theta')(\text{id} \wedge Q_i)} \\ &= \overline{\Delta(\theta')(Q_i \otimes \text{id})} + \overline{\Delta(\theta')(\text{id} \otimes Q_i)} \\ &= \overline{\Delta(\theta') \Delta(Q_i)} \\ &= \overline{\Delta(\theta' Q_i)} \\ &= \overline{\Delta(\theta)}. \end{aligned}$$

(1) ist damit gezeigt, denn die geforderte Beziehung ist in θ additiv und Λ wird von den Q_i 's erzeugt.

Genauso ergibt sich auch

$$(2) \quad \bar{\theta}(\text{id} \wedge \mu) = \overline{(\text{id} \otimes \Delta)(\theta)} \quad \text{und} \quad \bar{\theta}(\mu \wedge \text{id}) = \overline{(\Delta \otimes \text{id})(\theta)} \quad \text{für alle } \theta \in \Lambda \otimes \Lambda.$$

Wir betrachten nun ein Produkt $\tilde{\mu} : P(n) \wedge P(n) \rightarrow P(n)$ der Form $\tilde{\mu} = \mu + v_n \bar{\theta}$ mit $\theta \in \Lambda \otimes \Lambda$. Es ist

$$\tilde{\mu}(\tilde{\mu} \wedge \text{id}) = \mu(\mu \wedge \text{id}) + v_n \bar{\theta}(\mu \wedge \text{id}) + v_n \mu(\bar{\theta} \wedge \text{id}) + v_n^2 \bar{\theta}(\bar{\theta} \wedge \text{id})$$

und

$$\tilde{\mu}(\text{id} \wedge \tilde{\mu}) = \mu(\text{id} \wedge \mu) + v_n \bar{\theta}(\text{id} \wedge \mu) + v_n \mu(\text{id} \wedge \bar{\theta}) + v_n^2 \bar{\theta}(\text{id} \wedge \bar{\theta}).$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von v_n , so ergibt sich, daß für ein assoziatives $\tilde{\mu}$

$$\bar{\theta}(\mu \wedge \text{id}) + \mu(\bar{\theta} \wedge \text{id}) = \bar{\theta}(\text{id} \wedge \mu) + \mu(\text{id} \wedge \bar{\theta})$$

Basis für P(3) (ohne 1):	Basis für P(4) (ohne 1):	Basis für P(5) (ohne 1):
$v_3 Q_0 Q_1 Q_2 \otimes Q_1,$	$v_4 Q_0 Q_1 Q_2 Q_3 \otimes Q_0 Q_1,$	$v_5 Q_0 Q_2 Q_3 Q_4 \otimes Q_0 Q_2,$
$v_3 Q_1 Q_2 \otimes Q_0 Q_1,$	$v_4 Q_0 Q_2 Q_3 \otimes Q_2,$	$v_5 Q_0 Q_3 Q_4 \otimes Q_3,$
$v_3 Q_2 \otimes Q_2,$	$v_4 Q_2 Q_3 \otimes Q_0 Q_2,$	$v_5 Q_3 Q_4 \otimes Q_0 Q_3,$
$v_3 Q_0 Q_1 \otimes Q_1 Q_2,$	$v_4 Q_0 Q_1 Q_3 \otimes Q_0 Q_1 Q_2,$	$v_5 Q_0 Q_2 Q_4 \otimes Q_0 Q_2 Q_3,$
$v_3 Q_1 \otimes Q_0 Q_1 Q_2.$	$v_4 Q_3 \otimes Q_3,$	$v_5 Q_4 \otimes Q_4,$
	$v_4 Q_0 Q_1 Q_2 \otimes Q_0 Q_1 Q_3,$	$v_5 Q_0 Q_2 Q_3 \otimes Q_0 Q_2 Q_4,$
	$v_4 Q_0 Q_2 \otimes Q_2 Q_3,$	$v_5 Q_0 Q_3 \otimes Q_3 Q_4,$
	$v_4 Q_2 \otimes Q_0 Q_2 Q_3,$	$v_5 Q_3 \otimes Q_0 Q_3 Q_4,$
	$v_4 Q_0 Q_1 \otimes Q_0 Q_1 Q_2 Q_3.$	$v_5 Q_0 Q_2 \otimes Q_0 Q_2 Q_3 Q_4.$

Tabelle 1: Basis der primitiven Elemente vom Grad null für $P(n)$, $n \in \{3, 4, 5\}$

ist. Mit (2) schreibt sich dies als

$$\overline{(\Delta \otimes \text{id})\theta} + \overline{\theta \otimes \text{id}} = \overline{(\text{id} \otimes \Delta)\theta} + \overline{\text{id} \otimes \theta},$$

da $\mu(\bar{\theta} \wedge \text{id}) = \bar{\theta} \bar{\wedge} \text{id} = \overline{\theta \otimes \text{id}}$ ist. θ erfüllt also

$$(3) \quad (\Delta \otimes \text{id})\theta + \theta \otimes \text{id} = (\text{id} \otimes \Delta)\theta + \text{id} \otimes \theta.$$

Nun zu dem versprochenen Satz. Er korrigiert Theorem 2.4 aus [W86].

(A.2) Satz. μ und $\mu + v_n \mu(Q_{n-1} \wedge Q_{n-1})$ sind die einzigen assoziativen primitiven Elemente vom Grad Null in $P(n)^*(P(n) \wedge P(n))$, die unter $(\rho_n \wedge \rho_n)^*$ auf $\rho_n m_{\text{BP}} \in P(n)^*(\text{BP} \wedge \text{BP})$ gehen.

Beweis: Wir betrachten Elemente vom Grad Null in $\mathcal{P}_{\text{BP} \wedge \text{BP}}(P(n) \wedge P(n)) = P(n)^* \otimes \Lambda \bar{\wedge} \Lambda$, die von der Form „1+ etwas zerlegbares“ sind. Tabelle 1 zeigt die Basiselemente vom Grad Null für $n \in \{3, 4, 5\}$. In [W86] wurde fälschlicherweise behauptet, daß nur 1 und $v_n Q_{n-1} \otimes Q_{n-1}$ den Grad Null hätten.

Wir untersuchen zunächst die Basiselemente in $P(n)^* \otimes \Lambda \otimes \Lambda$ vom Grad Null. Sei dazu

$$\phi = \lambda Q_0^{\epsilon_0} \cdots Q_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \otimes Q_0^{\delta_0} \cdots Q_{n-1}^{\delta_{n-1}} = \lambda \alpha_1 \otimes \alpha_2, \quad \epsilon_i, \delta_i \in \{0, 1\}, \lambda \in P(n)^*, \alpha_1, \alpha_2 \in \Lambda$$

ein solches Basiselement. Wir nehmen $\lambda \neq 1$ und $\lambda \neq 0$ an. Da $|Q_i| = 2^{i+1} - 1$ und $|v_i| = -(2^{i+1} - 2) = -2|Q_{i-1}|$ ist, ist

$$\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i| = \sum_{i=0}^{n-1} (2^{i+1} - 1) = 2^{n+1} - 2 - n < 2^{n+1} - 2 = -|v_n|.$$

Aus dieser Abschätzung folgt zunächst, daß $\lambda = v_n$ ist, denn $|\alpha_1 \otimes \alpha_2| < -|v_n^2|$ und für $i > 0$ ist $|v_{n+i}| < |v_n^2|$. Außerdem gibt es ein i für das Q_i in ϕ doppelt auftritt, d.h. ein i für das $\epsilon_i = \delta_i = 1$ ist. Andernfalls wäre nämlich $|\alpha_1 \otimes \alpha_2| < |Q_0| + \cdots + |Q_{n-1}| < -|v_n|$. Damit ergibt sich:

Falls ϕ nicht 1 und nicht $v_n Q_{n-1} \otimes Q_{n-1}$ ist, ist es von der Form $v_n \alpha Q_i \otimes Q_i \beta$ mit $\alpha, \beta \in \Lambda$. α und β sind dabei (aus Dimensionsgründen) nicht beide 1.

Wir erhalten damit:

Es reicht zu zeigen, daß unter der Bedingung, daß $\tilde{\mu} := \mu + v_n \bar{\theta}$ assoziativ ist, alle Koeffizienten der Form $\langle x Q_i^* \otimes Q_i^* y, \theta \rangle$, $x, y \in \Lambda^*$, für $x \neq 1$ oder $y \neq 1$ verschwinden.

$\epsilon : \Lambda^* \rightarrow \mathbb{Z}_2$ sei die Augmentation, d.h es sei $\epsilon(x) = \langle x, \text{id} \rangle$.

Wir wenden $\langle x \otimes y \otimes z, - \rangle$ auf (3) an und erhalten wegen $\langle x \otimes y \otimes z, \theta \otimes 1 \rangle = \langle x \otimes y, \theta \rangle \epsilon(z)$, $\langle x \otimes y \otimes z, (\Delta \otimes \text{id})(\theta) \rangle = \langle xy \otimes z, \theta \rangle$, usw.

$$\langle xy \otimes z, \theta \rangle + \langle x \otimes y, \theta \rangle \epsilon(z) = \langle x \otimes yz, \theta \rangle + \langle y \otimes z, \theta \rangle \epsilon(x).$$

Setzen wir $y = Q_i^*$, $z = Q_i^* \tilde{z}$ so erhalten wir daraus

$$\langle xQ_i^* \otimes Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle + \langle x \otimes Q_i^*, \theta \rangle \epsilon(Q_i^* \tilde{z}) = \langle x \otimes Q_i^* Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle + \langle Q_i^* \otimes Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle \epsilon(x).$$

Da $\epsilon(Q_i^* \tilde{z})$ und $Q_i^* Q_i^*$ null sind, vereinfacht sich dies zu

$$\langle xQ_i^* \otimes Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle = \langle Q_i^* \otimes Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle \epsilon(x).$$

Sind x und \tilde{z} Basiselemente und ist $x \neq 1$, so ist $\epsilon(x) = 0$, der gesuchte Koeffizient $\langle xQ_i^* \otimes Q_i^* \tilde{z}, \theta \rangle$ also wie behauptet Null. Für den Fall $\tilde{z} \neq 1$ argumentiert man analog. \square

Literatur

- [A] J. F. Adams, *Stable Homotopy and Generalised Homology, Part III*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois and London, 1974
- [Ba] N. A. Baas, *On bordism theory of manifolds with singularities*, Math. Scand. 33 (1973) 279-302
- [B-M] N. A. Baas und I. Madsen, *On the realization of certain modules over the Steenrod algebra*, Math. Scand. 31 (1972), 220-224
- [J-W] D. C. Johnson und W. S. Wilson, *BP-operations and Morava's extraordinary K-theories*, Math. Z. 144, 55-75 (1975)
- [K-W] R. Kultze und U. Würgler, *A note on the algebra $P(n)_*(P(n))$ for the prime 2*, manuscripta math. 57 (1987) 195-203
- [L] P. S. Landweber, *Homological properties of comodules over $MU_*(MU)$ and $BP_*(BP)$* , American Journal of Mathematics, Vol. 98, No. 3, pp. 591-610
- [Mi] O. K. Mironov, *Multiplications in cobordism theories with singularities and Steenrod – tom Dieck Operations*, Math. USSR-IZV 13, (1979) 89-106
- [Mo] J. Morava, *A product for the odd-primary bordism of manifolds with singularities*, Topology, Vol. 18, (1979) 177-186
- [R] D. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Academic Press, Inc., Orlando 1986
- [St] R. E. Stong, *Notes on Cobordism Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1968
- [Sw] R. M. Switzer, *Algebraic Topology – Homotopy and Homology*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1975
- [W76] U. Würgler, *Cobordism theories of unitary manifolds with singularities and formal group laws*, Math. Z. 150 (1976), 239-260
- [W77] U. Würgler, *On products in a family of cohomology theories associated with the invariant prime ideals of BP*, Comment. Math. Helvetici 52 (1977), 457-481
- [W84] U. Würgler, *On a class of 2-periodic cohomology theories*, Math. Ann. 267, 251-269 (1984)
- [W86] U. Würgler, *Commutative ring spectra of characteristic 2*, Comment. Math. Helvetici 61 (1986) 33-45
- [W89] U. Würgler, *Morava K-theories: A survey in Algebraic Topology, Poznań 1989 Proceedings*, Springer Lecture Notes Nr. 1474 (1989), 111-138
- [Y76] N. Yagita, *The exact functor theorem for BP_*/I_n -theory*, Proc. Japan Academy, 52 (1976), 1-3
- [Y77] N. Yagita, *On the algebraic structure of cobordism operations with singularities*, J. London Math. Soc. (2), 16(1977), 131-141
- [Y80] N. Yagita, *On the Steenrod algebra of Morava K-theory*, J. London Math. Soc. (2), 22 (1980), 423-438