

Die Stammbäume zufällig verzweigender Populationen

JOCHEN GEIGER

Frankfurt am Main

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der Galton-Watson Prozess	1
2.1	Die Konstruktion des bedingten Galton-Watson Baums	2
2.2	Grenzwertsätze für kritische Galton-Watson Prozesse	4
2.3	Diskussion	8
3	Verzweigungsprozesse in zufälliger Umgebung	9
3.1	Grenzwertsätze für den subkritischen Fall	10
3.2	Diskussion	14
4	Das Wählermodell	15
4.1	Grafische Darstellung und Dualität	15
4.2	Das Multityp-Wählermodell	17
4.3	Die Genealogie des Multityp-Wählermodells	18
4.4	Diskussion	21
	Literaturverzeichnis	23

1 Einleitung

Bei der Untersuchung des Langzeitverhaltens von Verzweigungsprozessen und räumlich verzweigenden Populationen ist die Betrachtung von Stammbäumen zunehmend in den Vordergrund gerückt. Probabilistische Methoden haben die in der Theorie vorherrschenden analytischen Techniken ergänzt und zu wesentlichen neuen Einsichten geführt.

Die vorliegende Synopse diskutiert eine Auswahl meiner Veröffentlichungen der letzten Jahre. Den Arbeiten ist gemeinsam, dass durch das Studium der genealogischen Verhältnisse in der Population Aussagen über deren Langzeitverhalten gewonnen werden konnten. Zwei dieser Arbeiten behandeln den klassischen Galton-Watson Prozess. Eine weitere Arbeit befasst sich mit Verzweigungsprozessen in zufälliger Umgebung, sie ist technisch wesentlich anspruchsvoller. Die vierte der hier besprochenen Arbeiten beschäftigt sich mit dem Wählermodell, einem der Prototypen interagierender Teilchensysteme.

2 Der Galton-Watson Prozess

Der *Galton-Watson Prozess* ist ein Grundmodell in der Theorie der Verzweigungsprozesse. Man modelliert damit das Wachstum einer Population unter der Annahme, dass die Kinderzahlen der Individuen unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Zunächst wurde der Galton-Watson Prozess als Modell zur Weitergabe von Familiennamen entworfen, später modellierte man damit biologische und physikalische Vorgänge wie etwa nukleare Kettenreaktionen. In Kapitel 4 werden wir sehen, dass man den Galton-Watson Prozess auch in gewissen Skalierungslimiten des Wählermodells wiederfindet.

Sei $(p_k)_{k \geq 0}$ eine vorgegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den natürlichen Zahlen, d.h. $p_k \geq 0$ für alle $k \geq 0$ und $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Wir nehmen an, dass jedes Individuum unabhängig vom Verhalten der anderen Individuen mit Wahrscheinlichkeit p_k genau k Kinder hat. Bezeichnet Z_n die Größe der n -ten Generation, dann lässt sich die Verteilung der Z_n induktiv darstellen als

$$Z_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n-1,i}, \quad n \geq 1. \quad (2.1)$$

Hierbei sind $X_{n-1,i}$, $n, i \geq 1$, unabhängige Zufallsvariablen mit der Kinderzahlverteilung $(p_k)_{k \geq 0}$. Die Notation $\stackrel{d}{=}$ bedeutet, dass die Verteilung der Zufallsgrößen auf beiden Seiten übereinstimmt. Der Beitrag $X_{n-1,i}$ steht für die Kinder des i -ten Individuums aus Generation $n-1$.

Eine nützliches analytisches Hilfsmittel ist die erzeugende Funktion f der Kinderzahlverteilung $(p_k)_{k \geq 0}$,

$$f(s) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Für die erzeugenden Funktionen der Z_n ergibt sich aus der Verteilungsideutität (2.1)

$$f^{(n)}(s) := \mathbb{E} s^{Z_n} = f^{(n-1)} \circ f(s), \quad n \geq 1. \quad (2.2)$$

Startet die Population mit einem einzelnen Urahn, $Z_0 = 1$, so erhält man durch Iterieren der Gleichung (2.2)

$$f^{(n)}(s) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-mal}}(s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Die entscheidende Größe für das qualitative Langzeitverhalten des Galton-Watson Prozesses ist die mittlere Kinderzahl pro Individuum

$$\mu := \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = f'(1) \text{ (linksseitige Ableitung).}$$

Der fundamentale Kritizitätssatz besagt, dass im *subkritischen* und im *kritischen* Fall ($\mu < 1$ bzw. $\mu = 1$) die Population schließlich ausstirbt,

$$\mu \leq 1 \text{ und } p_1 < 1 \iff P(Z_n \rightarrow 0) = 1.$$

Es stellen sich dann Fragen an das quantitative Langzeitverhalten des Galton-Watson Prozesses. So etwa im subkritischen und im kritischen Fall nach der Asymptotik der Überlebenswahrscheinlichkeit $P(Z_n > 0)$ oder nach bedingten Verteilungslimiten der geeignet reskalierten Generationsgröße Z_n . Im superkritischen Fall interessiert man sich für Eigenschaften des fast sicheren Martingallimes $W := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{-n} Z_n$.

Der klassische Zugang zu diesen Problemen besteht darin, das asymptotische Verhalten der erzeugenden Funktion $f^{(n)}$ zu analysieren. Die verwandtschaftlichen Beziehungen der Individuen werden aber durch die $f^{(n)}$ nicht erfasst. So können etwa die Kinderzahlen $X_{n,i}$ im Allgemeinen nicht aus der Folge $(Z_n)_{n \geq 0}$ rekonstruiert werden. Zur Untersuchung der genealogischen Verhältnisse in der Population ist es daher wesentlich, einen Galton-Watson Prozess als das Generieren eines zufälligen Stammbaums anzusehen, und nicht als bloße Folge von Generationsgrößen.

2.1 Die Konstruktion des bedingten Galton-Watson Baums

Bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens eines Galton-Watson Prozesses stellt sich die Frage nach dem Gesetz eines auf Überleben nach langer Zeit bedingten Stammbaums. Wünschenswert wäre dabei eine möglichst lokale Beschreibung des Verzweigungsmechanismus der Individuen im bedingten Baum. Durch das Bedingen geht aber zunächst einmal die Unabhängigkeit der Kinderzahlen verloren. Wir werden sehen, dass man die Unabhängigkeit wiedererlangen kann, wenn man den auf Mindesthöhe n bedingten Galton-Watson Baum entlang einer ausgezeichneten Ahnenlinie zerlegt. Auf dieser Einsicht beruhen die von uns geführten probabilistischen Beweise von Grenzwertsätzen für den Galton-Watson Prozess.

Wir führen zunächst eine zusätzliche Struktur ein, indem wir die direkten Nachkommen der Individuen durchnummerieren (das erste, zweite, dritte, ... Kind). Seien $T^{(i)}$, $1 \leq i \leq Z_1(T)$, die von den Kindern der Wurzel von T gegründeten Teilbäume. Mit R_n bezeichnen wir den Rang des ersten Kindes der Wurzel von T mit einem Nachkommen in Generation n ,

$$R_n(T) := \min\{1 \leq i \leq Z_1(T) : Z_{n-1}(T^{(i)}) > 0\}, \quad n \geq 1.$$

Zeichnet man den Stammbaum in die Ebene, wobei man Geschwister in aufsteigender Folge von links nach rechts anordnet, dann ist das R_n -te Kind der Wurzel ein Vorfahr des in Generation n am weitesten links liegenden Individuums. Die folgende einfache Beobachtung wird sich als äußerst nützlich erweisen.

Lemma 2.1 *Bedingt auf das Ereignis $\{R_n = j, Z_1 = k\}$, $1 \leq j \leq k < \infty$, sind die Teilbäume $T^{(i)}$, $1 \leq i \leq Z_1$, stochastisch unabhängig. Die bedingte Verteilung der $T^{(i)}$ ist*

$$\mathcal{L}(T^{(i)} | R_n = j, Z_1 = k) = \begin{cases} \mathcal{L}(T | Z_{n-1} = 0), & 1 \leq i \leq j - 1, \\ \mathcal{L}(T | Z_{n-1} > 0), & i = j, \\ \mathcal{L}(T), & j + 1 \leq i \leq k. \end{cases}$$

Die bedingte gemeinsame Verteilung von (R_n, Z_1) ist

$$P(R_n = j, Z_1 = k | Z_n > 0) = c_n p_k P(Z_{n-1} = 0)^{j-1}, \quad (2.3)$$

wobei

$$c_n = P(Z_{n-1} > 0) / P(Z_n > 0).$$

Zwei Dinge sind hier bemerkenswert. Hervorzuheben ist zum einen die gewonnene Unabhängigkeit: Bei Kenntnis der relativen Lage ihres Vorfahren aus der ersten Generation (rechts oder links von, oder das ausgezeichnete Kind selbst) verzweigen die Individuen unabhängig voneinander. Zum anderen erkennt man eine rekursive Struktur des bedingten Galton-Watson Baums: In dem auf Mindesthöhe n bedingten Baum findet sich ein auf Mindesthöhe $n - 1$ bedingter Teilbaum. Durch Induktion sieht man nun, dass sich ein auf Mindesthöhe n bedingter Galton-Watson Baum konstruieren lässt, indem man immer neue unabhängige Galton-Watson Bäume an die ausgezeichnete Ahnenlinie des in Generation n am weitesten links liegenden Individuums anfügt. Zur Rechten der ausgezeichneten Ahnenlinie sind dies unbedingte Bäume, zur Linken auf Aussterben bis zur Zeit n bedingte Bäume. Die Anzahl der rechts und links herauswachsenden Teilbäume ist entsprechend der Verteilung (2.3) zu wählen.

Uns interessieren vor allem die Teilbäume zur Rechten der ausgezeichneten Ahnenlinie, weil nur diese zur n -ten Generation beitragen. Der Vollständigkeit halber sei bemerkt, dass die auf Aussterben bedingten Bäume zur Linken der ausgezeichneten Ahnenlinie einem einfachen Gesetz folgen, weil hier die Unabhängigkeit der Kinderzahlen durch das bedingende Ereignis nicht zerstört wird.

Wenn man in der Abfolge der Generationen rückwärts vorgeht, kann man die Konstruktion für alle n gleichzeitig realisieren. Dazu beginnt man auf Stufe 0 mit einem auf Mindesthöhe 0 bedingten (also unbedingten) Galton-Watson Baum \tilde{T}_0 . Die Bäume \tilde{T}_{n+1} , $n \geq 0$, erhält man durch sukzessives Anfügen neuer Teilbäume unten an den Stamm. Das ausgezeichnete Individuum des Baums \tilde{T}_n in Höhe n behält seine Rolle bei wachsendem n bei (siehe Abbildung 1).

Nach Lemma 2.1 hat die so konstruierte Folge zufälliger Stammbäume die gewünschten Marginalverteilungen,

$$\mathcal{L}(\tilde{T}_n) = \mathcal{L}(T | Z_n(T) > 0), \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

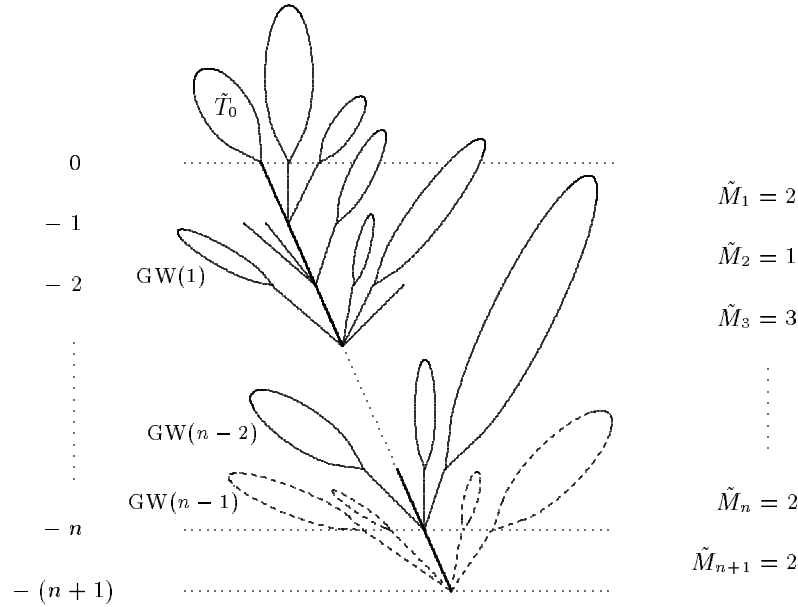


Abbildung 1: Die Bäume \tilde{T}_n bzw. \tilde{T}_{n+1} . Die Teilbäume $\text{GW}(k)$ sind auf maximale Höhe k bedingte Galton-Watson Bäume. Die Teilbäume zur Rechten der ausgezeichneten (fett gedruckten) Ahnenlinie und der Baum \tilde{T}_0 sind unbedingte Galton-Watson Bäume.

Die Vorzüge dieser Konstruktion werden offenbar, wenn wir die Folge der Generationsgrößen $\tilde{Z}_n := Z_n(\tilde{T}_n)$, $n \geq 0$, betrachten. Aus (2.4) folgt natürlich insbesondere

$$\mathcal{L}(\tilde{Z}_n) = \mathcal{L}(Z_n \mid Z_n > 0), \quad n \geq 0. \quad (2.5)$$

Nach Konstruktion sind nun die Individuen der n -ten Generation im Baum \tilde{T}_n die Nachkommen in Generation $n+1$ des ausgezeichneten Kindes im Baum \tilde{T}_{n+1} . Alle anderen Individuen in Generation $n+1$ von \tilde{T}_{n+1} sind Nachfahren eines der Geschwister zur Rechten des ausgezeichneten Individuums der ersten Generation. Nach Lemma 2.1 sind die Beiträge und die Zahl dieser Geschwister unabhängige Zufallsgrößen mit bekannter Verteilung. Die Folge $(\tilde{Z}_n)_{n \geq 0}$ hat daher unabhängige, nichtnegative Zuwächse mit Verteilung

$$\tilde{Z}_{n+1} - \tilde{Z}_n \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\tilde{M}_{n+1}} Z_{n,i}, \quad n \geq 0. \quad (2.6)$$

Dabei sind \tilde{M}_n , $n \geq 1$, unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilung $\mathcal{L}(Z_1 - R_n \mid Z_n > 0)$, unabhängig von den $Z_{n,i}$ mit Verteilung wie in (2.1).

2.2 Grenzwertsätze für kritische Galton-Watson Prozesse

Die Konstruktion der \tilde{T}_n kann man für beliebige Kinderzahlverteilungen durchführen, also insbesondere ohne Voraussetzungen an die mittlere Kinderzahl μ . Ihre größte Wirkung erzielt

sie aber im kritischen und subkritischen Fall, in dem die Wahrscheinlichkeit des bedingenden Ereignisses “Mindesthöhe n ” gegen 0 konvergiert. In den Arbeiten [1, 2] werden verschiedene klassische Resultate über Galton-Watson Prozesse von diesem Standpunkt aus beleuchtet. Im Folgenden erläutern wir einige der dort geführten probabilistischen Beweise von Grenzwertsätzen für kritische Galton-Watson Prozesse.

Als erstes diskutieren wir die bekannte Kolmogorovsche Asymptotik für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines kritischen Galton-Watson Prozesses. Wir bezeichnen mit $\sigma^2 := \sum_k k(k-1)p_k$ die Varianz der Kinderzahlverteilung.

Satz 2.2 (*Kesten, Ney und Spitzer, 1966*) *Sei $\mu = 1$ und $0 < \sigma^2 < \infty$, dann gilt*

$$P(Z_n > 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 n} \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Wegen

$$EZ_n = E[Z_n; Z_n > 0] = E(Z_n | Z_n > 0) P(Z_n > 0),$$

lässt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit bis Generation n darstellen als

$$P(Z_n > 0) = \frac{\mu^n}{E(Z_n | Z_n > 0)}. \quad (2.8)$$

Angesichts der Verteilungsidentität (2.5) genügt es daher zum Beweis von (2.7) zu zeigen, dass

$$E\tilde{Z}_n \sim \frac{\sigma^2}{2} n \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Im kritischen Fall tragen alle Geschwister zur Rechten eines Individuums in der ausgezeichneten Ahnenlinie im Mittel genau einen Nachkommen zur Generation n von \tilde{T}_n bei. Folglich gilt nach (2.6)

$$E\tilde{Z}_n = 1 + \sum_{k=1}^n E(\tilde{Z}_k - \tilde{Z}_{k-1}) = 1 + \sum_{k=1}^n E\tilde{M}_k. \quad (2.10)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Generation eines auf Mindesthöhe n bedingten kritischen (oder subkritischen) Galton-Watson Baums die Größe k hat, ist asymptotisch proportional zu kp_k (auf einen solchen Größenverzerrungseffekt werden wir im weiteren Verlauf noch des öfteren treffen). Auch ist leicht einzusehen, dass das ausgezeichnete Kind der Wurzel von \tilde{T}_n asymptotisch ein rein zufälliges Individuum der ersten Generation von \tilde{T}_n ist. Bezeichnet \hat{X} eine Zufallsvariable mit $P(\hat{X} = k) = kp_k$, $k \geq 0$, und U eine von \hat{X} unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform verteilte Zufallsgröße, so erhält man mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\tilde{M}_k = E[U\hat{X}] = E\left(\frac{\hat{X} - 1}{2}\right) = \frac{\sigma^2}{2}. \quad (2.11)$$

Die Behauptung (2.9) folgt unmittelbar aus den Beziehungen (2.10) und (2.11).

Wir beleuchten jetzt ein Resultat von Zubkov [43] mit unserer Konstruktion. Sei G_n die Generation des jüngsten gemeinsamen Vorfahren aller Individuen aus Generation n . Im auf Mindesthöhe n bedingten kritischen Galton-Watson Baum ist G_n asymptotisch uniform verteilt.

Satz 2.3 (Zubkov, 1975) Sei $\mu = 1$ und $0 < \sigma^2 < \infty$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{G_n}{n} \leq u \mid Z_n > 0\right) = u, \quad 0 \leq u \leq 1. \quad (2.12)$$

Wir betrachten die entsprechende Größe \tilde{G}_n im Baum \tilde{T}_n . Das Individuum aus Generation $n - k$ in der ausgezeichneten Ahnenlinie des Baums \tilde{T}_n ist offenbar genau dann ein Vorfahr aller Individuen aus n , wenn $\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_k$. Nach (2.4) und wegen der Unabhängigkeit der Zuwächse von $(\tilde{Z}_j)_{j \geq 0}$ folgt

$$\mathbb{P}(G_n \geq n - k \mid Z_n > 0) = \mathbb{P}(\tilde{G}_n \geq n - k) = \prod_{j=k}^{n-1} \mathbb{P}(\tilde{Z}_{j+1} = \tilde{Z}_j), \quad 0 \leq k \leq n. \quad (2.13)$$

Mit der Kolmogorovschen Asymptotik zeigt man leicht, dass

$$1 - \mathbb{P}(\tilde{Z}_{j+1} = \tilde{Z}_j) \sim \frac{1}{j} \text{ für } j \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Aus (2.13) und (2.14) folgt unmittelbar die Behauptung (2.12).

Die Antwort auf die Frage nach einer bedingten Grenzverteilung für die Generationsgröße eines kritischen Galton-Watson Prozesses gibt das sogenannte Exponentialgesetz von Yaglom. Das Resultat wurde ursprünglich in der Arbeit [42] unter einer Annahme an das dritte Moment der Kinderzahlverteilung bewiesen, man braucht aber nur das zweite Moment.

Satz 2.4 (Kesten, Ney und Spitzer, 1966) Sei $\mu = 1$ und $0 < \sigma^2 < \infty$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Z_n}{n} \geq x \mid Z_n > 0\right) = \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2} x\right), \quad x \geq 0.$$

Wir leiten das Resultat aus der folgenden charakteristischen Eigenschaft der Exponentialverteilung ab: Sind X_1 und X_2 unabhängige Kopien einer exponentiell verteilten Zufallsvariable X , und ist U eine von X_1 und X_2 unabhängige uniforme Zufallsvariable, dann gilt

$$X \stackrel{d}{=} U(X_1 + X_2). \quad (2.15)$$

Dass die Exponentialverteilung diese Eigenschaft besitzt, sieht man leicht, wenn man die relative Lage der ersten beiden Punkte eines homogenen Poissonprozesses auf \mathbb{R}^+ betrachtet.

Wir zerlegen die n -te Generation des Baums \tilde{T}_n in die Nachkommenschaften der Kinder des jüngsten gemeinsamen Vorfahren. Sei $\tilde{V}_n + 1 := n - \tilde{G}_n$ der Abstand zum jüngsten gemeinsamen Vorfahren, dann gilt nach (2.6)

$$\tilde{Z}_n = \tilde{Z}_{\tilde{V}_n+1} \stackrel{d}{=} \tilde{Z}_{\tilde{V}_n} + \sum_{i=1}^{\tilde{M}_{\tilde{V}_n+1}} Z_{\tilde{V}_n,i}. \quad (2.16)$$

Dabei ist zumindest einer der Summanden $Z_{\tilde{V}_n,i}$ positiv. Bezeichnet Z_j^* eine Zufallsvariable mit Verteilung

$$Z_j^* \stackrel{d}{=} \frac{1}{j} \tilde{Z}_j, \quad j \geq 1, \quad \text{und } Z_0^* = 1,$$

dann erhält man aus (2.16) die folgende Verteilungsgleichung für Z_n^* ,

$$Z_n^* \stackrel{d}{=} V_n^* \sum_{i=1}^{N_n} Z_{nV_n^*,i}^*, \quad n \geq 1. \quad (2.17)$$

Dabei sind für jedes $0 \leq k \leq n-1$ die $Z_{k,i}^*$, $i \geq 1$, unabhängige Kopien von Z_k^* , unabhängig von (V_n^*, N_n) mit Verteilung

$$(V_n^*, N_n) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\tilde{V}_n}{n}, 1 + \sum_{i=1}^{\tilde{M}_{\tilde{V}_n+1}} 1\{Z_{\tilde{V}_n,i}^* > 0\} \right), \quad n \geq 1. \quad (2.18)$$

Die gemeinsame Verteilung der $(Z_{k,i}^*)_{i \geq 1}$ ist dabei beliebig. Man beachte, dass nV_n^* Werte in $\{0, \dots, n-1\}$ annimmt. Um genau zu sein, muss man in (2.17) noch die passende Konvention für das Ereignis $\{V_n^* = 0\} = \{Z_n^* = \frac{1}{n}\}$ treffen.

Nach Satz 2.3 konvergiert der Skalenfaktor V_n^* in Verteilung gegen U . Man überlegt sich auch leicht, dass der jüngste gemeinsame Vorfahr asymptotisch nur zwei Kinder mit einem Nachkommen in Generation n besitzt,

$$N_n \xrightarrow{d} 2 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Falls also die Z_n^* in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X konvergieren, so besitzt die Grenzverteilung sicherlich die Eigenschaft (2.15).

Zum Nachweis der schwachen Konvergenz verwenden wir die sogenannte Kontraktionsmethode. Wir erinnern zunächst an die Definition des L_2 -Wasserstein Abstands zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen α_1 und α_2 auf \mathbb{R} mit endlichem zweiten Moment:

$$d_2(\alpha_1, \alpha_2) := \inf_{Y_1 \stackrel{d}{=} \alpha_1, Y_2 \stackrel{d}{=} \alpha_2} \sqrt{\mathbb{E}(Y_1 - Y_2)^2}, \quad (2.19)$$

wobei das Infimum über alle Paare von Zufallsvariablen (Y_1, Y_2) mit Marginalverteilungen α_1 und α_2 gebildet wird.

Seien nun X_1 und X_2 unabhängige Kopien einer exponentiell verteilten Zufallsvariable X mit Erwartungswert $\frac{\sigma^2}{2}$, und U unabhängig von X_1 und X_2 . In Anbetracht von (2.15), (2.17) und (2.19) gilt

$$a_n := d_2(\mathcal{L}(Z_n^*), \mathcal{L}(X))^2 \leq \mathbb{E} \left(V_n^* \sum_{i=1}^{N_n} Z_{nV_n^*,i}^* - U(X_1 + X_2) \right)^2$$

für jede Familie $(V_n^*, N_n, (Z_{k,i}^*), U, X_1, X_2)$. Bei geschickter Koppelung der Zufallsgrößen $(V_n^*, N_n, (Z_{k,i}^*))$ und (U, X_1, X_2) erhält man eine obere Schranke für a_n in Termen der a_k , $0 \leq k \leq n-1$,

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} a_k + o(1).$$

Dank des kontrahierenden Verhaltens ist dabei die Summe der Koeffizienten $c_k^{(n)}$ durch eine Konstante kleiner 1 beschränkt,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} < 1.$$

Aus dieser Eigenschaft und der Tatsache, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} = 0$ für alle k , folgt $a_n \rightarrow 0$. Damit ist Satz 2.4 bewiesen, denn offenbar impliziert $d_2(\alpha_n, \alpha) \rightarrow 0$ die schwache Konvergenz einer Folge α_n gegen α .

2.3 Diskussion

Die Idee, Stammbäume aus einer ausgezeichneten Ahnenlinie heraus zu konstruieren, geht zurück auf Kallenberg [29], der mit dieser Methode Kriterien für das lokale Überleben von unendlichen räumlich verzweigenden Populationen gefunden hat. Lyons, Pemantle und Peres [36] haben eine ähnliche Konstruktion zum Beweis von Grenzwertsätzen für Galton-Watson Prozesse benutzt. Sie spielen das Problem des asymptotischen Verhaltens eines Galton-Watson Baums auf ein Problem bezüglich des nach seiner Größe in Generation n umgewichteten zufälligen Stammbaums zurück. Im Limes $n \rightarrow \infty$ erhält man einen unendlichen Baum, den man aus einer eindeutigen unsterblichen Ahnenlinie heraus konstruieren kann. Im Unterschied zu der hier beschriebenen Konstruktion des auf eine Mindesthöhe bedingten Baums nimmt die Konstruktion von Lyons, Pemantle und Peres einen hohen Stammbaum von der Wurzel her ins Visier. Als Folge hat der größenverzerrte unendliche Baum eine homogene Struktur: Er ist symmetrisch bezüglich der ausgezeichneten Ahnenlinie und das Verzweigungsgesetz ist generationsunabhängig. Wir werden in Kapitel 4 einen Verwandten dieser Konstruktion kennen lernen.

Probabilistische Methoden zur Analyse von Galton-Watson Bäumen wurden bereits in Arbeiten von Aldous [9, 10] und Le Gall [33] eingesetzt. In diesen Arbeiten werden Zusammenhänge zwischen Galton-Watson Bäumen und Exkursionen von Irrfahrten bzw. Brownschen Bewegungen aufgezeigt. Bennis und Kersting [13] haben mit einer verwandten Darstellung von Stammbäumen durch Irrfahrtsexkursionen die Geometrie von Galton-Watson Bäumen studiert.

Klassische Beweise der hier diskutierten Grenzwertsätze findet man etwa in den Monographien von Athreya und Ney [12] und Jagers [28].

Die im Beweis des Exponentialgesetzes von Yaglom verwandte Kontraktionsmethode wurde zur Analyse der Kosten von divide & conquer Algorithmen entwickelt [35, 37, 38]. Gleichungen der Art (2.15) werden dabei als Fixpunktgleichung aufgefasst. Man benutzt dann eine rekursive Struktur (vergleichbar der in (2.17)) zum Nachweis der Konvergenz einer Folge von Verteilungen gegen den Fixpunkt in einer geeigneten Metrik. Bei der Wahl der Metrik hat man eine gewisse Freiheit. Im Fall endlicher zweiter Momente ist der d_2 -Abstand aus naheliegenden Gründen ein beliebter Kandidat.

3 Verzweigungsprozesse in zufälliger Umgebung

Eine erste Verallgemeinerung des klassischen Galton-Watson Prozesses sind *Galton-Watson Prozesse in variierender Umgebung*. Die Kinderzahlverteilungen sind nicht mehr notwendig identisch verteilt, sondern können sich von Generation zu Generation verändern. An der anderen Annahme, der Unabhängigkeit der Kinderzahlen, hält man aber fest.

In der Gleichung (2.1) hängt die Verteilung der $X_{n-1,i}$ also nun von n ab, für jedes feste n sind die $X_{n-1,i}$, $i \geq 1$, weiterhin identisch verteilt. Für die erzeugende Funktion $f^{(n)}$ erhält man die Darstellung (wir starten wieder mit einem Urahn, $Z_0 = 1$)

$$f^{(n)}(s) = f_0 \circ \cdots \circ f_{n-1}(s), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.1)$$

Dabei ist f_k , $k \geq 0$, die erzeugende Funktion der Kinderzahl eines Individuums aus Generation k .

In einem weiteren Schritt wählt man die Kinderzahlverteilungen der verschiedenen Generationen zufällig und erhält so einen *Verzweigungsprozess in zufälliger Umgebung*. Die f_k , $k \geq 0$, sind dann Zufallsgrößen mit Werten im Raum

$$\Delta := \{f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k : p_k \geq 0, f(1) = 1\}.$$

Bedingt auf die Umgebung $(f_k)_{k \geq 0}$ entwickelt sich die Population wie ein Galton-Watson Prozess in variierender Umgebung,

$$E(s^{Z_n} | f_0, f_1, \dots) = f_0 \circ \cdots \circ f_{n-1}(s), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (3.2)$$

Insbesondere gilt

$$E(Z_n | f_0, f_1, \dots) = f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1). \quad (3.3)$$

Die erzeugende Funktion von Z_n erhält man durch Bilden des Erwartungswerts in (3.2) bezüglich der Verteilung von $(f_k)_{k \geq 0}$,

$$E s^{Z_n} = E[f_0 \circ \cdots \circ f_{n-1}(s)], \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Es ist üblich, die Folge $(f_k)_{k \geq 0}$ unabhängig identisch verteilt oder stationär und ergodisch anzunehmen. Wir werden uns hier auf den Fall unabhängig identisch verteilter Umgebungen konzentrieren. Nach (3.3) und dem Gesetz der großen Zahlen gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log E(Z_n | f_0, f_1, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f'_{i-1}(1) \stackrel{a.s.}{=} E \log f'(1). \quad (3.4)$$

Dabei bezeichnet f eine zufällige erzeugende Funktion mit der den f_n gemeinsamen Verteilung, und $f'(1)$ ist die bedingte mittlere Kinderzahl pro Individuum. Aus (3.4) und der elementaren Abschätzung

$$P(Z_n > 0 | f_0, f_1, \dots) \leq E(Z_n | f_0, f_1, \dots) \wedge 1 \quad (3.5)$$

folgt

$$E \log f'(1) \leq 0 \text{ und } P(Z_1 = 1) < 1 \implies P(Z_n \rightarrow 0) = 1. \quad (3.6)$$

Aufgrund von (3.6) unterscheidet man den *subkritischen*, *kritischen* bzw. *superkritischen* Fall, je nachdem, ob der Erwartungswert $E \log f'(1)$ kleiner, gleich oder größer als 0 ist. Anders als im klassischen Fall gilt die Umkehrung von (3.6) nicht. Die Inhomogenitäten in der Umgebung können selbst bei superkritischer Verzweigung dazu führen, dass nahezu die gesamte Population von der einen auf die andere Generation ausstirbt. Ein Kriterium, das solche Katastrophen ausschließt, ist die folgende Integrabilitätsbedingung an die bedingte Wahrscheinlichkeit für Kinderlosigkeit,

$$-E \log(1 - f(0)) < \infty. \quad (3.7)$$

Gilt $E \log f'(1) < \infty$, dann ist (3.7) zugleich eine notwendig Bedingung für das dauerhafte Überleben der Population (siehe [40]).

3.1 Grenzwertsätze für den subkritischen Fall

Im subkritischen Fall konvergiert nach (3.4) und (3.5) die bedingte Wahrscheinlichkeit, zumindest n Generationen zu überleben, für fast jede Umgebung exponentiell schnell nach 0. Zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von

$$P(Z_n > 0) = E[P(Z_n > 0 \mid f_0, f_1, \dots)] \quad (3.8)$$

muss man die verschiedenen Möglichkeiten für das Überleben der Population in Betracht ziehen und quantitativ gegeneinander abwägen. So kann die Population etwa bei der Festlegung der Umgebung Glück gehabt haben und in einer ungewöhnlich “fruchtbaren” Umgebung verzweigen, oder aber die Population reproduziert ungewöhnlich erfolgreich in einer typischen, also eher unfruchtbaren Umgebung.

Vom Spezialfall linear gebrochener erzeugender Funktionen (siehe Abschnitt 3.2) her ist bekannt, dass die Rate der Überlebenswahrscheinlichkeit vom Vorzeichen des Erwartungswerts $E[f'(1) \log f'(1)]$ abhängt. Zu einer ersten Interpretation dieser Größe im allgemeinen Fall führen wir die Momenten erzeugende Funktion φ von $\log f'(1)$ ein,

$$\varphi(\theta) := E f'(1)^\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Man beachte, dass $\varphi'(0) = E \log f'(1)$ und $\varphi'(1) = E[f'(1) \log f'(1)]$. Wir setzen

$$\gamma := \inf_{0 \leq \theta \leq 1} \varphi(\theta).$$

Im *stark subkritischen* Fall, $E[f'(1) \log f'(1)] < 0$, gilt

$$\gamma = E f'(1) < 1.$$

Im *schwach subkritischen* Fall, $E[f'(1) \log f'(1)] > 0$, hingegen nimmt die Funktion φ ihr Minimum auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ an,

$$\gamma = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \varphi(\theta) = \varphi(\alpha) \quad \text{für ein } 0 < \alpha < 1.$$

Im *moderat subkritischen* Fall, $E[f'(1) \log f'(1)] = 0$, schließlich ist die mittlere Kinderzahl zugleich das absolute Minimum von φ ,

$$\gamma = \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \varphi(\theta) = E f'(1).$$

Die Überlebenswahrscheinlichkeit eines subkritischen Verzweigungsprozesses fällt mit Rate γ . Wir werden sehen, dass dabei im stark bzw. schwach subkritischen Fall ganz unterschiedliche Umgebungen den Hauptbeitrag zum Erwartungswert in (3.8) liefern.

Sei $(S_n)_{n \geq 0}$ die mit den bedingten mittleren Kinderzahlen assoziierte Irrfahrt,

$$S_n := \sum_{i=1}^n \log f'_{i-1}(1), \quad n \geq 1, \quad \text{und} \quad S_0 := 0.$$

Wir erinnern an (3.3) und die Abschätzung (3.5),

$$P(Z_n > 0 \mid f_0, f_1, \dots) \leq \exp(S_n \wedge 0). \quad (3.9)$$

Auf logarithmischer Skala ist die rechte Seite von (3.9) zugleich untere Abschätzung. Mittelt man über die Umgebung, so ergibt sich

$$P(Z_n > 0) \simeq E \exp(S_n \wedge 0). \quad (3.10)$$

(Wir verwenden die Notation $a_n \simeq b_n$ für logarithmische Äquivalenz der Folgen, falls also $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(\log a_n - \log b_n) = 0$.) Exponentielle Integrale wie jenes in (3.10) werden durch ihren maximalen Beitrag dominiert. Genauer folgt nach dem Lemma von Varadhan (siehe etwa [26])

$$E \exp(S_n \wedge 0) \simeq \exp\left(n \sup_{x \in \mathbb{R}} [(x \wedge 0) - I(x)]\right). \quad (3.11)$$

Dabei ist I die Ratenfunktion der Folge $(\frac{1}{n} S_n)_{n \geq 1}$,

$$I(z) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} [z\theta - \log \varphi(\theta)], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Offenbar gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} [(x \wedge 0) - I(x)] = \begin{cases} -I(0) = \log \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \varphi(\theta), & \text{falls } I'(0) \leq 1, \\ \log \varphi(1), & \text{falls } I'(0) > 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Wegen $I'(0) = \alpha$ ist also im schwach subkritischen Fall 0 der Maximierer des Variationsproblems (3.10). Das bedeutet, dass extrem günstige Umgebungen, d.h. solche, in denen die Überlebenswahrscheinlichkeit höchstens subexponentiell abfällt, den Erwartungswert in (3.8) dominieren.

Um den stark subkritischen Fall zu beleuchten, erinnern wir an die Definition und elementare Eigenschaften größenverzerrter Verteilungen. Sei X eine nichtnegative Zufallsvariable mit positiver endlicher Erwartung. Man sagt, die Zufallsvariable \hat{X} habe die zugehörige größenverzerrte Verteilung, falls

$$P(\hat{X} \in dx) = cx P(X \in dx), \quad x \geq 0. \quad (3.13)$$

(Die Normierungskonstante auf der rechten Seite von (3.13) ist $c = (EX)^{-1}$.) Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen, dann stimmt die größenverzerrte Verteilung des Produkts mit der Verteilung des Produkts unabhängiger größenverzerrter Faktoren \widehat{X} und \widehat{Y} überein,

$$\widehat{XY} \stackrel{d}{=} \widehat{X}\widehat{Y}. \quad (3.14)$$

Diese einfachen Bemerkungen über größenverzerrte Verteilungen helfen uns nun, die Überlebenswahrscheinlichkeit im stark subkritischen Fall zu analysieren. Nach (3.10) gilt

$$\begin{aligned} P(Z_n > 0) &\simeq E[f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1) \wedge 1] \\ &\simeq E[f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1); f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1) \leq 1] \vee P(S_n \geq 0), \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei im stark subkritischen Fall

$$P(S_n \geq 0) \simeq (\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \varphi(\theta))^n < (E(f'(1)))^n. \quad (3.16)$$

Mit den Beziehungen (3.13) und (3.14) erhält man

$$\begin{aligned} E[f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1); f'_0(1) \cdots f'_{n-1}(1) \leq 1] \\ &= (E f'(1))^n P(\prod_{i=1}^n \widehat{f'_{i-1}}(1) \leq 1) \\ &= (E f'(1))^n P\left(\sum_{i=1}^n \log \widehat{f'_{i-1}}(1) \leq 0\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nach (3.13) gilt im stark subkritischen Fall

$$E \log \widehat{f'(1)} = \frac{E[f'(1) \log f'(1)]}{E f'(1)} < 0.$$

Mit dem Gesetz der großen Zahlen folgt daher aus (3.15)–(3.17), dass

$$P(Z_n > 0) \simeq (E f'(1))^n.$$

Der Erwartungswert in (3.8) wird also durch (immer noch subkritische) Umgebungen dominiert, in denen $\frac{1}{n} S_n \approx E \log \widehat{f'(1)}$. Bedingt auf spätes Überleben der Population ist die Folge der Kinderzahlverteilungen weiterhin unabhängig identisch verteilt. Eine erzeugende Funktion aus Δ bekommt aber nunmehr ein proportional zum Erwartungswert der zugehörigen Kinderzahlverteilung verzerrtes Gewicht.

Das folgende Resultat aus der Arbeit [3] bestimmt die genaue Asymptotik der Überlebenswahrscheinlichkeit subkritischer Verzweigungsprozesse in unabhängig identisch verteilter Umgebung. (Die Annahmen (II)–(I3) sind Integrierbarkeitsbedingungen an die gemeinsame Verteilung von $f'(1)$ und $f''(1)$. Im schwach subkritischen Fall wird zudem eine Aperiodizitätsbedingung (AP) an die Verteilung von $\log f'(1)$ gestellt. Die c_i , $1 \leq i \leq 3$, bezeichnen positive endliche Konstanten.)

Satz 3.1 (Geiger, Kersting und Vatutin, 2001) Sei $E \log f'(1) < 0$, dann gilt

$$P(Z_n > 0) \sim c(n)\gamma^n \text{ für } n \rightarrow \infty, \quad (3.18)$$

wobei

$$c(n) = \begin{cases} c_1, & \text{falls } E[f'(1) \log f'(1)] < 0 \text{ und (I1),} \\ c_2 n^{-\frac{1}{2}}, & \text{falls } E[f'(1) \log f'(1)] = 0 \text{ und (I2),} \\ c_3 n^{-\frac{3}{2}}, & \text{falls } 0 < E[f'(1) \log f'(1)] \text{ und (I3), (AP).} \end{cases}$$

In allen drei Fällen ist die bedingte Verteilung der n -ten Generationsgröße schwach konvergent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = k | Z_n > 0) = q(k), \quad k \geq 1, \quad \text{mit } \sum_{k=1}^{\infty} q(k) = 1.$$

Ausgangspunkt des Beweises von Satz 3.1 ist die folgende, in der hier nicht besprochenen Arbeit [24] gefundene Darstellung der bedingten Überlebenswahrscheinlichkeit,

$$P(Z_n > 0 | f_0, f_1, \dots) = \left(\sum_{k=0}^n \eta_{k,n} \exp(-S_k) \right)^{-1}. \quad (3.19)$$

Dabei sind die $\eta_{k,n}$ positive Koeffizienten in Termen von f_j , $k \leq j \leq n-1$. Die Formel (3.19) ergibt sich aus der in Kapitel 2 erläuterten Konstruktion des auf Mindesthöhe n bedingten Galton-Watson Baums, die man auch für variierende Umgebungen durchführen kann. Sie entspricht der Darstellung (2.8) für klassische Galton-Watson Prozesse.

Exemplarisch skizzieren wir im Folgenden den Beweis im schwach subkritischen Fall. Wir haben bereits gesehen, dass extrem fruchtbare Umgebungen den Erwartungswert

$$P(Z_n > 0) = E \left(\sum_{k=0}^n \eta_{k,n} \exp(-S_k) \right)^{-1} \quad (3.20)$$

dominieren. Eine genaue Analyse der Formel (3.20) zeigt, dass nur solche Umgebungen zur Überlebenswahrscheinlichkeit beitragen, in denen die bedingte erwartete Generationsgröße die ganze Zeit über eine fest vorgegebene Schranke nicht unterschreitet: Bezeichnen wir mit

$$L_n := \min_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad n \geq 0,$$

die sukzessiven Minima der Irrfahrt $(S_n)_{n \geq 0}$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} P(L_n \geq -x | Z_n > 0) = 1.$$

Aus der Fluktuationstheorie für Irrfahrten weiß man, dass für eine Irrfahrt mit negativer Drift (siehe etwa [41])

$$P(L_n \geq -x) \sim \ell(x)\gamma^n n^{-\frac{3}{2}}, \quad x \geq 0.$$

Zeigt man nun noch, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0 | L_n \geq -x) = u(x) > 0, \quad (3.21)$$

dann folgt die Behauptung (3.18) für den schwach subkritischen Fall mit

$$c_3 := \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)\ell(x).$$

Zu (3.21) beachte man, dass eine Irrfahrt mit negativer Drift, die bis zur Zeit n oberhalb von $-x$ verweilt, zur Zeit n in die Nähe von $-x$ zurückkehrt. Für den Verzweigungsprozess bedeutet dies, dass bedingt auf $L_n \geq -x$ die Population nicht nur eine bedrohliche Periode zu Beginn, sondern auch eine gefährliche Phase zum Ende hin überstehen muss.

3.2 Diskussion

In den klassischen Arbeiten von Athreya und Karlin [11] und von Smith und Wilkinson [40] wurden Kriterien für das fast sichere Aussterben eines Verzweigungsprozesses in zufälliger Umgebung gefunden. Für weiterführende Untersuchungen braucht man die genaue Asymptotik der Wahrscheinlichkeit, dass ein Verzweigungsprozess in unabhängig identisch verteilter Umgebung mindestens n Generationen überlebt. Diese war (sowohl im subkritischen als auch im kritischen Fall) nur für den ganz speziellen Fall bekannt, dass alle Kinderzahlverteilungen gebrochen lineare erzeugende Funktionen besitzen,

$$f(s) = 1 - r \frac{1-s}{1-qs}, \quad 0 \leq r \leq 1 \text{ und } 0 < q < 1. \quad (3.22)$$

Nur in diesem Fall konnte man eine handliche Darstellung der bedingten erzeugenden Funktionen $f^{(n)}$. (Eine Kinderzahlverteilung $(\pi_k)_{k \geq 0}$ mit einer erzeugenden Funktion der Gestalt (3.22) ist eine Konvexkombination aus dem Punktmaß in 0 und einer geometrischen Verteilung,

$$\pi_k = r(1-q)q^{k-1}, \quad k \geq 1 \quad \text{und} \quad \pi_0 = 1-r.$$

Die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung ist die probabilistische Eigenschaft, die diesen Spezialfall auszeichnet.)

Im kritischen Fall zeigte Kozlov [32] unter der Annahme (3.22), dass die Überlebenswahrscheinlichkeit wie $n^{-\frac{1}{2}}$ abfällt,

$$P(Z_n > 0) \sim cn^{-\frac{1}{2}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

für ein $0 < c < \infty$. Mittels eines auf Agresti [8] zurückgehenden Vergleichsarguments kann man aus der genauen Asymptotik für den linear gebrochenen Fall untere und obere Schranken für allgemeine Verteilungen der f_n ableiten. In der gemeinsamen Arbeit mit Kersting [24] gelang es, ausgehend von der Formel (3.19) für die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit die Gültigkeit der Asymptotik (3.23) für allgemeine Kinderzahlverteilung nachzuweisen.

Wir wollen an dieser Stelle noch verwandte Resultate anderer Autoren erwähnen. Im linear gebrochenen Fall wurde die Asymptotik (3.18) von Afanasyev [5] bewiesen (siehe Lemma 11 in [22]). Im stark subkritischen Fall gelang D'Souza und Hambly [21] der Nachweis der Asymptotik (3.18) für eine große Klasse allgemeiner Kinderzahlverteilungen. Liu [35] konnte zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n > 0)^{1/n} = \gamma$, falls $Ef'(1) < \infty$ und der Zustandsraum der f_n

abzählbar ist. Dieses Ergebnis verallgemeinert ein auf Dekking [20] zurückgehendes Resultat für den endlichen Fall. D’Souza und Hambly [21] schließlich haben die entsprechende Aussage auch für gewisse stationäre und ergodische Umgebungen bewiesen.

Im ausgiebig studierten linear gebrochenen Spezialfall gibt es weitergehende Resultate. Afanasyev [6, 7] hat bedingte funktionale Grenzwertsätze für die Folge der erwarteten Generationsgrößen $(\exp(S_n))_{n \geq 0}$ und das Martingal $(Z_n / \exp(S_n))_{n \geq 0}$ bewiesen. Die Gestalt des *reduzierten Baums* wurde in Arbeiten von Vatutin mit Borovkov und Fleischmann [14, 22] studiert. Der reduzierte Baum ist der von den Individuen in Generation n und der Wurzel aufgespannte Teilbaum.

4 Das Wählermodell

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit dem *Wählermodell*, einem der meiststudierten interagierenden Teilchensysteme. Betrachtet wird ein System von Individuen, die eine feste Position in einem abzählbaren Ortsraum S haben. An jedem Platz $x \in S$ sitzt genau ein Individuum. Das Individuum am Platz x hat zur Zeit t die “Meinung” (bzw. den “Typ”) $\xi_t(x)$ mit Werten in einer Menge E . Der Zustand des Wählermodells zur Zeit t ist die Typenkonfiguration $\xi_t = (\xi_t(x))_{x \in S}$.

Bei uns wird S stets das d -dimensionale Gitter \mathbb{Z}^d und E entweder die zweipunktige Menge $\{0, 1\}$ oder das Einheitsintervall $(0, 1)$ sein. Der Prozess $(\xi_t)_{t \geq 0}$ entwickelt sich nach der folgenden zufälligen Dynamik: Der Wähler am Platz x überdenkt seine Meinung mit Rate 1 und übernimmt dann die Meinung eines rein zufällig gewählten nächsten Nachbarn. Eine alternative Sichtweise ist, dass das Individuum am Platz x nach einer exponentiell verteilten Lebenszeit durch ein neues Individuum ersetzt wird. Man beachte, dass die Übernahme eines Typs nicht notwendig mit einer Typenänderung einhergeht.

4.1 Grafische Darstellung und Dualität

Die auf Harris [25] zurückgehende Konstruktion des Wählermodells mit Hilfe eines zufälligen Raum-Zeit Diagramms erlaubt es, die Herkunft des Typs eines Individuums in der Zeit zurückzuverfolgen. Sei zunächst Π_t ein *Poissonscher Punktprozess* auf $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \times [0, t]$ mit Intensitätsmaß

$$\pi(\{x\} \times \{y\} \times ds) = \begin{cases} (2d)^{-1} ds, & \text{falls } \|x - y\| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Π_t ist also eine zufällige abzählbare Teilmenge von $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \times [0, t]$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) für jede messbare Teilmenge B ist $\Pi_t(B) := |\Pi_t \cap B|$ Poisson-verteilt zum Parameter $\pi(B)$;
- (ii) für disjunkte messbare Teilmengen B_1, \dots, B_n sind $\Pi_t(B_1), \dots, \Pi_t(B_n)$ stochastisch unabhängig.

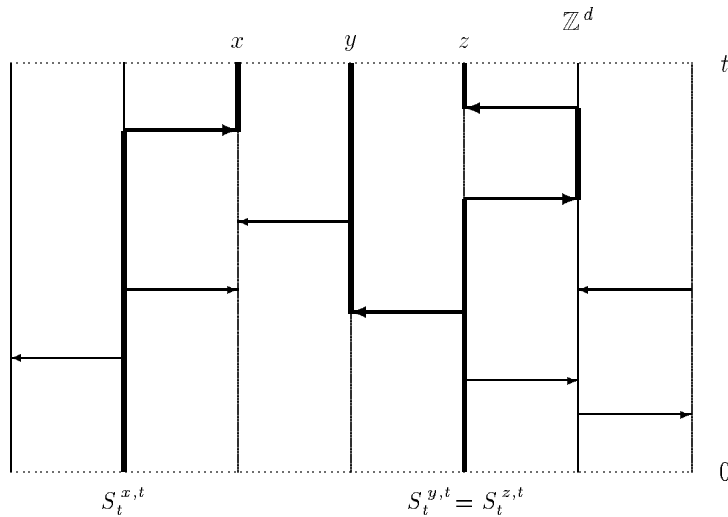


Abbildung 2: Eine Realisierung des zufälligen Raum-Zeit Diagramms. In dem Beispiel verschmelzen die beiden Ahnenlinien der Individuen in y und z .

Ein Punkt $(x, y, s) \in \Pi_t$ wird interpretiert als das Ereignis, dass das Individuum am Platz y zur Zeit s durch ein Individuum mit dem Typ des Individuums in x ersetzt wird. Für jeden Punkt $(x, y, s) \in \Pi_t$ zeichnet man nun einen Pfeil von (x, s) nach (y, s) in das Raum-Zeit Diagramm auf $\mathbb{Z}^d \times [0, t]$.

Aus diesem Raum-Zeit Diagramm konstruiert man ein System *dualer* Irrfahrten $(S_s^{x,t})_{0 \leq s \leq t}$, $x \in \mathbb{Z}^d$, mit der Eigenschaft

$$\xi_t(x) = \xi_{t-s}(S_s^{x,t}), \quad x \in \mathbb{Z}^d, \quad 0 \leq s \leq t. \quad (4.2)$$

Insbesondere stimmt also der Typ des Individuums in x zur Zeit t mit dem Typ des ursprünglichen Individuums in $S_t^{x,t}$ überein. Die Irrfahrt $(S_s^{x,t})_{0 \leq s \leq t}$ erhält man, indem man sich im Raum-Zeit Punkt (x, t) startend entlang vertikaler Linien abwärts bewegt. Trifft man auf die Spitze eines Pfeils, so springt man an dessen Ende (siehe Abbildung 2). Formal ist $S_s^{x,t} = y$ genau dann, wenn es eine Folge von Plätzen $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y$ und Zeitpunkten $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n \leq s$ gibt, so dass

- (i) für alle $1 \leq i \leq n$ zur Zeit $t - s_i$ ein Pfeil von x_i nach x_{i-1} zeigt, und
- (ii) für alle $1 \leq i \leq n$ in den Zeitintervallen $(t - s_i, t - s_{i-1}]$ kein Pfeil auf x_{i-1} und in $[t - s, t - s_n]$ keiner auf y zeigt.

Offenbar folgt aus $S_s^{x,t} = S_s^{y,t}$, dass $S_u^{x,t} = S_u^{y,t}$ für $s \leq u \leq t$. Die Komponenten laufen also unabhängig voneinander, bis sie sich das erste Mal treffen, von da an laufen sie gemeinsam. Man nennt $(S_s^{x,t})_{0 \leq s \leq t}$, $x \in \mathbb{Z}^d$, ein System *verschmelzender Irrfahrten*. Wir werden von $(S_s^{x,t})_{0 \leq s \leq t}$ auch als der Ahnenlinie des Individuums in x sprechen.

Aus der durch (4.2) beschriebenen Dualität und den Rekurrenz- bzw. Transienzeigenschaften der gewöhnlichen Irrfahrt ergibt sich unmittelbar die folgende Dichotomie für das

Langzeitverhalten des Wählermodells: In Dimension $d \leq 2$ ist die gewöhnliche Irrfahrt rekurrent, so dass jedes Paar von Ahnenlinien letztendlich fast sicher verschmilzt. Entsprechend überwiegen im Wählermodell die lokalen Angleichungseffekte und es kommt unabhängig von der Anfangskonfiguration zu lokaler Typenfixierung. In Dimension $d \geq 3$ ist die Irrfahrt transient und jedes Paar von Ahnenlinien bleibt mit positiver Wahrscheinlichkeit für alle Zeiten getrennt. In hohen Dimensionen ist daher im Wählermodell Typenvielfalt möglich.

4.2 Das Multityp-Wählermodell

Im Multityp-Wählermodell ist der Typenvorrat E unendlich groß. Wir werden annehmen, dass die Individuen zunächst alle von unterschiedlichem Typ sind: $\xi_0(x) \neq \xi_0(y)$ für $x \neq y$. Sei η_t^x die Menge der Individuen, die zur Zeit t den Typ des ursprünglichen Individuums in x besitzen,

$$\eta_t^x := \{y \in \mathbb{Z}^d : \xi_t(y) = \xi_0(x)\},$$

und $n_t^x := |\eta_t^x|$ die Größe dieses (nicht notwendig zusammenhängenden) Clusters. Der Prozess $(n_t^x)_{t \geq 0}$ ist ein Geburts- und Todesprozess. Die Rate für eine Geburt und die Rate für einen Todesfall sind jeweils

$$(2d)^{-1} |\{(z_1, z_2) \in \eta_t^x \times (\mathbb{Z}^d \setminus \eta_t^x) : \|z_1 - z_2\| = 1\}|.$$

Die Raten hängen also nicht nur von der Größe, sondern auch von der Gestalt des Clusters η_t^x ab. Aufgrund der Symmetrie ist $(n_t^x)_{t \geq 0}$ ein nichtnegatives ganzzahliges Martingal, so dass jeder Typ schließlich ausstirbt,

$$P(n_t^x \rightarrow 0) = 1, \quad x \in \mathbb{Z}^d.$$

Die wenigen überlebenden Typen zu später Zeit t müssen dementsprechend groß sein. Das folgende Resultat beschreibt die genaue Asymptotik der Überlebenswahrscheinlichkeit eines Typs und besagt, dass die bedingte Verteilung der Typengröße einen exponentiellen Grenzwert besitzt. (Wir schreiben $n_t := n_t^{\mathcal{O}}$, wobei \mathcal{O} den Ursprung des Gitters \mathbb{Z}^d bezeichnet. Man beachte, dass die Verteilung der Cluster η_t^x translations-invariant ist.)

Satz 4.1 (*Bramson und Griffeath, 1980*) *Für $d \geq 2$ gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(n_t \geq zp_t^{-1} | n_t > 0) = \exp(-z), \quad z \geq 0, \quad (4.3)$$

wobei

$$p_t := P(n_t > 0) \sim \begin{cases} \frac{\log t}{\pi t}, & d = 2, \\ (\gamma_d t)^{-1}, & d \geq 3, \end{cases} \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Dabei ist γ_d die Fluchtwahrscheinlichkeit der gewöhnlichen Irrfahrt auf \mathbb{Z}^d .

In $d = 1$ sind die Cluster η_t^x Intervalle, und Änderungen können sich infolgedessen nur am linken oder rechten Endpunkt ergeben. Hier ist $p_t \sim (\pi t)^{-\frac{1}{2}}$ und die bedingte Grenzverteilung ist nicht exponentiell.

Nach Satz 4.1 stimmt in $d \geq 2$ der schwache Limes der Größe eines auf Überleben bedingten Typs mit dem entsprechenden Grenzwert eines kritischen Galton-Watson Prozesses überein (vgl. Satz 2.4). Es stellt sich hier die Frage, ob diese Analogie zwischen dem (frei verzweigenden) Galton-Watson Prozess und dem mit starken Abhängigkeiten behafteten Wählermodell eine Entsprechung in der genealogischen Struktur der beiden Prozesse hat. Wir werden dieses Problem an einem anderen ausgewählten Cluster studieren.

Sei χ_t^x die Menge der Plätze, an denen zur Zeit t die Individuen vom gleichen Typ wie das Individuum in x sind,

$$\chi_t^x := \{y \in \mathbb{Z}^d : \xi_t(y) = \xi_t(x)\}.$$

Per Definition ist dieser Cluster nicht leer, da stets $x \in \chi_t^x$. Aufgrund unserer Annahme, dass alle Individuen anfangs einen eigenen Typ besitzen, können zwei Individuen nur dann vom gleichen Typ sein, wenn ihre Ahnenlinien verschmelzen. Die Menge $\chi_t := \chi_t^{\mathcal{O}}$ besteht also aus den Verwandten des Individuums am Ursprung und lässt sich allein durch das System verschmelzender Irrfahrten beschreiben,

$$\chi_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : S_t^{x,t} = S_t^{\mathcal{O},t}\}.$$

Die Zahl der Verwandten des Individuums am Ursprung hat die größenverzerrte Verteilung von n_t (siehe [30]),

$$N_t := |\chi_t| \stackrel{d}{=} \widehat{n}_t, \quad t \geq 0.$$

Asymptotisch ist N_t gammaverteilt mit Formparameter 2.

Satz 4.2 (*Sawyer, 1979*) *Für $d \geq 2$ gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(N_t \leq z \mathbb{E}N_t) = \int_0^z 4y e^{-2y} dy, \quad z \geq 0,$$

wobei

$$\mathbb{E}N_t \sim 2p_t^{-1} \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Die Gammaverteilung mit Formparameter $\alpha + 1$ ist die Größenverzerrung einer Gammaverteilung mit Formparameter α . Aus den Sätzen 4.1 und 4.2 folgt also insbesondere, dass man den Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ und das Größenverzerrten vertauschen kann.

4.3 Die Genealogie des Multityp-Wählermodells

Unser Ziel ist die Erkundung der genealogischen Verhältnisse des Clusters vom Typ am Ursprung. Wir werden sehen, dass die Genealogie dieses Clusters asymptotisch durch einen größenverzerrten kritischen Galton-Watson Baum beschrieben wird.

In der hier nicht besprochenen Arbeit [23] wurde die Idee entwickelt, die Verwandtschaftsstruktur einer verzweigenden Population mit einem ausgezeichneten Individuum durch einen Punktprozess darzustellen. Wir greifen diese Idee für den Clusters χ_t auf. Dabei übernimmt das Individuum am Ursprung in natürlicher Weise die Rolle des ausgezeichneten Individuums.

Wir zerlegen χ_t in Gruppen von Individuen gleichen Verwandtschaftsgrads mit dem Individuum am Ursprung. Für $x \in \chi_t$ sei $\tau_t(x)$ die Verschmelzungszeit der Ahnenlinie des Individuums in x mit der des Individuums am Ursprung,

$$\tau_t(x) := \inf\{r \geq 0 : S_r^{x,t} = S_r^{\mathcal{O},t}\}.$$

Wir bezeichnen $\tau_t(x)$ als den (genealogischen) Abstand des Individuums in x vom Individuum am Ursprung. Sei $\chi_t(s)$ die Menge der Individuen mit Abstand s ,

$$\chi_t(s) := \{x \in \chi_t : \tau_t(x) = s\}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

und $N_t(s) := |\chi_t(s)|$ die Größe dieses Clans. Wir tragen nun für jeden solchen Clan dessen genealogische Distanz vom Individuum am Ursprung gegen seine Größe auf. Den resultierenden Punktprozess auf $(0, t] \times \{1, 2, \dots\}$ bezeichnen wir mit Λ_t ,

$$\Lambda_t := \{(s, N_t(s)) : 0 < s \leq t, N_t(s) > 0\}.$$

Skalieren wir die Zeit mit t und die Gruppengröße mit EN_t , so erhalten wir

$$T_t\Lambda_t := \{(t^{-1}s, (EN_t)^{-1}z) : (s, z) \in \Lambda_t\}.$$

Das folgende Resultat beschreibt das asymptotische Verhalten des Punktprozesses $T_t\Lambda_t$.

Satz 4.3 (Cox und Geiger, 2000) *Für $d \geq 3$ ist die Folge $(T_t\Lambda_t)_{t>0}$ straff. Jeder schwache Häufungspunkt der Folge ist ein einfacher Punktprozess auf $(0, 1] \times \mathbb{R}^+$ mit Intensität*

$$\lambda(du dz) = \frac{2du}{u} \frac{2}{u} \exp\left(-\frac{2z}{u}\right) dz. \quad (4.5)$$

Für $d \geq 7$ gilt

$$T_t\Lambda_t \xrightarrow{d} \Lambda \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \quad (4.6)$$

Dabei ist Λ ein Poissonscher Punktprozess auf $(0, 1] \times \mathbb{R}^+$ mit Intensität λ .

Die Konvergenz in Verteilung in (4.6) entspricht der schwachen Konvergenz der gemeinsamen Verteilungen $T_t\Lambda_t(B_i)$, $1 \leq i \leq n$, für jede endliche Familie von relativ kompakten messbaren Teilmengen $B_i \subset (0, 1] \times \mathbb{R}^+$.

An der Form des Intensitätsmaßes λ in (4.5) sieht man, dass die infinitesimale Wahrscheinlichkeit, dass es in χ_t Individuen mit reskalierten genealogischen Abstand in du gibt, asymptotisch $(2/u)du$ ist. Die Größe eines solchen Clans ist asymptotisch exponentiell verteilt mit Erwartungswert $u/2$. Die Unabhängigkeitseigenschaften des Poissonschen Grenzwerts implizieren, dass in hohen Dimensionen Clans von unterschiedlicher genealogischer Distanz auf der makroskopischen Skala t asymptotisch unabhängig sind.

Der Poissonsche Punktprozess Λ ist zugleich der schwache Limes der Punktprozessdarstellung des größtenverzerrten kritischen Galton-Watson Baums mit einem zur Zeit t rein zufällig herausgegriffenen ausgezeichneten Individuum (siehe Proposition 2.2 in [23]). In diesem Sinn

wird in hohen Dimensionen die Genealogie des Wählermodells asymptotisch durch den kritischen Galton-Watson Prozess beschrieben.

Der Beweis von Satz 4.3 basiert auf einer exakten Konstruktion der Historie des Typs am Ursprung. Durch die Dualität mit dem System verschmelzender Irrfahrten hat man ein sehr klares Bild des zeitumgekehrten Prozesses. Wir benötigen aber eine möglichst übersichtliche Beschreibung seiner Vorwärtsdynamik. Zunächst entledigen wir uns des zufälligen Bezugspunkts $S_t^{\mathcal{O},t}$, dem Endpunkt der ausgezeichneten Ahnenlinie. Dazu verschieben wir den Punktprozess Π_t so, dass dieser Punkt auf den Ursprung abgebildet wird,

$$\Pi'_t := \Pi_t - (S_t^{\mathcal{O},t}, S_t^{\mathcal{O},t}, 0),$$

wobei $A + y := \{x + y : x \in A\}$. Ein Platz, an dem das Individuum zur Zeit t den gleichen Typ wie jenes am Ursprung hat, wird durch diese Abbildung an einen Ort verschoben, an dem das Individuum zur Zeit t den Typ des Individuums am Ursprung zur Zeit 0 besitzt,

$$\chi_t(\Pi_t) = \eta_t(\Pi'_t) + S_t^{\mathcal{O},t}.$$

Dabei ist $\chi_t(\Pi_t)$ der Cluster des Typs am Ursprung in dem zu Π_t gehörigen Raum-Zeit Diagramm und $\eta_t(\Pi'_t)$ die Menge der Plätze im zu Π'_t gehörigen Raum-Zeit Diagramm, an denen die Individuen zur Zeit t den Typ des Individuums am Ursprung zur Zeit 0 besitzen. Der Punkt $S_t^{\mathcal{O},t}$ kann im Allgemeinen nicht aus Π'_t rekonstruiert werden.

Der Punktprozess Π'_t besitzt eine sehr übersichtliche Struktur, wie man der folgenden Konstruktion des zugehörigen Raum-Zeit Diagramms entnehmen kann:

1. Man beginne mit dem zu Π_t gehörigen Raum-Zeit Diagramm.
2. Sei $(X_s)_{0 \leq s \leq t}$ eine von Π_t unabhängige, im Ursprung startende gewöhnliche Irrfahrt (vorwärts in der Zeit). Für jeden Sprung der Irrfahrt füge man dem Diagramm einen Pfeil hinzu: Ist $X_s \neq X_{s-}$, $0 \leq s \leq t$, dann zeichne man einen Pfeil von (X_{s-}, s) nach (X_s, s) .
3. Man entferne alle Pfeile, deren Spitze auf den Raum-Zeit Pfad $(X_{s-}, s)_{0 \leq s \leq t}$ zeigt.

Aus der obigen Konstruktion des Punktprozesses Π'_t erhält man ein Rezept zur Konstruktion eines Clans $\chi_t(s)$ mit genealogischem Abstand s vom Individuum am Ursprung. Dazu betrachten wir den zur Zeit $t - s$ in einem Nachbarpunkt der ausgezeichneten Ahnenlinie initiierten Clusterprozess. Der Übersichtlichkeit halber verschieben wir den Clusterprozess so, dass er zur Zeit 0 im Ursprung startet.

1. Man beginne mit dem Clusterprozess $(\eta_u)_{0 \leq u \leq s}$.
2. Sei $(X_u^e)_{0 \leq u \leq s}$ eine von $(\eta_u)_{0 \leq u \leq s}$ unabhängige, in einem nächsten Nachbarpunkt e des Ursprungs startende Irrfahrt in Vorwärtszeit. Benutze diese Irrfahrt zum Ausdünnen des Clusterprozesses: Immer wenn die Irrfahrt $(X_u^e)_{0 \leq u \leq s}$ die Menge $(\eta_u)_{0 \leq u \leq s}$ trifft, wird der entsprechende Platz aus dem Cluster entfernt.

Formal definiert man den resultierenden Clusterprozess $(\vartheta_u)_{0 \leq u \leq s}$ durch

$$\vartheta_u := \{x \in \eta_u : S_{u-r}^{x,u} \neq X_r^e, 0 \leq r \leq u\}, 0 \leq u \leq s.$$

Die Irrfahrt $(X_u^e)_{0 \leq u \leq s}$ entspricht hierbei der ausgezeichneten Ahnenlinie. Diese unsterbliche Ahnenlinie beschränkt das Wachstum des Clusters $\chi_t(s)$. Das Ausdünnen des Clusters η_s durch die Irrfahrt setzt diese durch die Interaktion verursachte Beschränkung des Clusterwachstums um.

Der Vorteil dieser Konstruktion liegt auf der Hand. Wir starten mit einem bekannten Objekt, das anschließend entsprechend einer übersichtlichen Prozedur behandelt wird. Von wesentlicher Bedeutung sind nunmehr die folgenden zwei Beobachtungen:

1. Der Cluster η_s wird nur dann merklich ausgedünnt, wenn der Stamm des reduzierten Prozesses $(\eta_u^s)_{0 \leq u \leq s}$ von der Irrfahrt getroffen wird.
2. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Stamm des reduzierten Clusterprozesses getroffen wird, konvergiert für $s \rightarrow \infty$ gegen γ_d .

Dabei besteht der Cluster η_u^s aus all jenen Individuen des Clusters η_u , die einen Nachkommen zur Zeit s haben,

$$\eta_u^s := \{x \in \eta_u : x = S_{s-u}^{z,s} \text{ für ein } z \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Asymptotisch ist der zur Zeit $t - s$ initiierte Beitrag $\chi_t(s)$ zum Cluster χ_t also verteilt wie ein zufällig verschobener, auf Überleben bedingter Cluster η_s . Das Intensitätsmaß λ in (4.5) erhält man nun aus dem Satz von Bramson und Griffeath. Die Poissonschen Unabhängigkeitseigenschaften für schwache Häufungspunkte in Dimension $d \geq 7$ werden mit einem Koppelungsargument bewiesen. Vereinfacht gesagt, entwickeln sich die Cluster unterschiedlicher genealogischer Distanz auf disjunkten Bereichen des Punktprozesses Π_t' . Offenbar ist es für die Cluster in hohen Dimension leichter, sich zu verfehlen.

4.4 Diskussion

Das Wählermodell wurde von Holley und Liggett [27] und unabhängig davon unter dem Namen Invasionsprozess von Clifford und Sudbury [17] eingeführt. In diesen Arbeiten wurde auch die im Abschnitt 4.1 beschriebene Dichotomie für das Langzeitverhalten des Wählermodells entdeckt. In [27] wurden zudem die nichttrivialen Gleichgewichtsverteilungen des Wählermodells in Dimension $d \geq 3$ charakterisiert, wenn die Anfangskonfiguration nach einem Produktmaß verteilt ist. Ergebnisse über das asymptotische Verhalten der Aufenthaltszeiten des Wählermodells wurden von Cox und Griffeath [19] erzielt.

Cox, Durrett und Perkins [18] konnten unter geeigneten Anfangsbedingungen die Konvergenz von Folgen von Raum-Zeit skalierten Wählermodellen gegen den Diffusionslimes der frei verzweigenden Irrfahrt, die sogenannte super-Brownsche Bewegung, beweisen. Die dort eingesetzten Martingalmethoden beruhen auf der Sicht des Wählermodells als eine zustandsabhängige verzweigende Irrfahrt (vgl. Abschnitt 4.2). Im Unterschied zu diesen mean-field

Resultaten wird von Bramson, Cox und Le Gall [15] die räumliche Struktur von Clustern untersucht, die von einem einzelnen Individuum initiiert wurden. Der Beweis, dass die räumliche Struktur eines auf Überleben bedingten Clusters und die des größenverzerrten Clusters am Ursprung gegen die entsprechenden Objekte der super-Brownschen Bewegung konvergieren, verwendet dennoch wesentlich die in [18] erzielten Resultate. Der Grund hierfür ist, dass die Cluster, wenn sie nicht gänzlich verschwinden, sehr früh sehr groß werden.

Satz 4.3 beleuchtet den genealogischen Aspekt der Konvergenz des Wählermodells gegen die super-Brownsche Bewegung. Wie angedeutet, liefert der Beweis des Resultats zudem eine natürliche Interpretation der reduzierten Verzweigungsrate γ_d . Die beschriebene Konstruktion der Historie des Typs am Ursprung kann man als interagierende Variante der entsprechenden Konstruktion von Kallenberg [29] für die frei verzweigende Irrfahrt auffassen.

Literaturverzeichnis

- [1] GEIGER, J. (1999). Elementary new proofs of classical limit theorems for Galton-Watson processes. *J. Appl. Probab.* **36**, 301–309.
- [2] GEIGER, J. (2000). A new proof of Yaglom’s exponential limit law. *Mathematics and computer science (Versailles, 2000)*, 245–249, Trends Math., Birkhäuser, Basel.
- [3] GEIGER, J., KERSTING, G. UND VATUTIN, V. A. (2001). *Limit theorems for subcritical branching processes in random environment*. Manuskript, Frankfurt.
- [4] COX, J.T. UND GEIGER, J. (2000). The genealogy of a cluster in the multitype voter model. *Ann. Probab.* **28**, 1588–1619.

- [5] AFANASYEV, V.I. (1980). Limit theorems for a conditional random walk and some applications. *Diss. Cand. Sci.*, Moscow, MSU.
- [6] AFANASYEV, V.I. (1993). A limit theorem for a critical branching process in random environment. *Diskretnaya Matematika* **5**, 45–58 (in Russisch).
- [7] AFANASYEV, V.I. (1997). A new theorem for a critical branching process in random environment. *Discrete Math. Appl.* **7**, 497–513.
- [8] AGRESTI, A. (1974). Bounds on the extinction time distribution of a branching process. *Adv. Appl. Probab.* **6**, 322–335.
- [9] ALDOUS, D. (1991). The continuum random tree. I. *Ann. Probab.* **19**, 1–28.
- [10] ALDOUS, D. (1991). The continuum random tree. II. An overview. *Stochastic analysis (Durham, 1990)*, 23–70, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 167, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [11] ATHREYA, K.B. UND KARLIN, S. (1971). On branching processes with random environments: I, II. *Ann. Math. Stat.* **42**, 1499–1520, 1843–1858.
- [12] ATHREYA, K. B. UND NEY, P. (1972). *Branching Processes*, Springer, New York.

- [13] BENNIES, J. UND KERSTING, G. (2000). A random walk approach to Galton-Watson trees. *J. Theoret. Probab.* **13**, 777–803.
- [14] BOROVKOV, K. A. UND VATUTIN, V. A. (1997). Reduced critical branching processes in random environment. *Stochastic Processes Appl.* **71**, 225–240.
- [15] BRAMSON, M., COX, J. T. UND LE GALL, J.-F. (2000). Super-Brownian limits of voter model clusters. Erscheint in *Ann. Probab.*
- [16] BRAMSON, M. UND GRIFFEATH, D. (1980). Asymptotics for interacting particle systems on \mathbb{Z}^d . *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **53**, 183–196.
- [17] CLIFFORD, P. UND SUDBURY, A. (1973). A model for spatial conflict. *Biometrika* **60**, 581–588.
- [18] COX, J. T., DURRETT, R. UND PERKINS, E. (2000). Rescaled voter models converge to super-Brownian motion. *Ann. Probab.* **28**, 185–234.
- [19] COX, J. T. UND GRIFFEATH, D. (1983). Occupation time limit theorems for the voter model. *Ann. Probab.* **11**, 876–893.
- [20] DEKKING, F. M. (1988). On the survival probability of a branching process in a finite state i.i.d. environment. *Stochastic Processes Appl.* **27**, 151–157.
- [21] D’SOUZA, J. S. UND HAMBLY, B. M. (1997). On the survival probability of a branching process in a random environment. *Adv. Appl. Probab.* **29**, 38–55.
- [22] FLEISCHMANN, K. UND VATUTIN, V. A. (1999). Reduced subcritical Galton-Watson processes in a random environment. *Adv. Appl. Probab.* **31**, 88–111.
- [23] GEIGER, J. (2000). Poisson point process limits in size-biased Galton-Watson trees. *Electron. J. Probab.* **5**, no. 17, 1–12.
- [24] GEIGER, J. UND KERSTING, G. (2000). The survival probability of a critical branching process in random environment. *Teor. Verojatnost. i Primenen.* **45**, 607–615.
- [25] HARRIS, T. (1978). Additive set-valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Probab.* **6**, 355–378.
- [26] DEN HOLLANDER, F. (2000). *Large deviations*. Fields Institute Monographs, 14. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [27] HOLLEY, R. UND LIGGETT, T. M. (1975). Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *Ann. Probab.* **3**, 643–663.
- [28] JAGERS, P. (1975). *Branching processes with biological applications*. Wiley, London.
- [29] KALLENBERG, O. (1977). Stability of critical cluster fields. *Math. Nachr.* **77**, 7–43.

- [30] KELLY, F. P. (1977). The asymptotic behaviour of an invasion process. *J. Appl. Probab.* **14**, 584–590.
- [31] KESTEN, H., NEY, P. UND SPITZER, F. (1966). The Galton-Watson process with mean one and finite variance. *Theory Probab. Appl.* **11**, 513–540.
- [32] KOZLOV, M. V. (1976). On the asymptotic behavior of the probability of non-extinction for critical branching processes in a random environment. *Theory Probab. Appl.* **21**, 791–804.
- [33] LE GALL, J. F. (1989). Marches aléatoires, mouvement brownien et processus de branchement. *Séminaire de Probabilités, XXIII*, 258–274, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin.
- [34] LIU, Q. (1996). On the survival probability of a branching process in a random environment. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **32**, 1–10.
- [35] LIU, Q. (1998). Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Adv. Appl. Probab.* **30**, 85–112.
- [36] LYONS, R., PEMANTLE, R. UND PERES, Y. (1995). Conceptual proofs of $L \log L$ criteria for mean behavior of branching processes. *Ann. Probab.* **23**, 1125–1138.
- [37] RACHEV, S. T. UND RÜSCHENDORF, L. (1995). Probability metrics and recursive algorithms. *Adv. Appl. Probab.* **27**, 770–799.
- [38] RÖSLER, U. (1992). A fixed point theorem for distributions. *Stochastic Process. Appl.* **42**, 195–214.
- [39] SAWYER, S. (1979). A limit theorem for patch sizes in a selectively-neutral migration model. *J. Appl. Probab.* **16**, 482–495.
- [40] SMITH, W. L. UND WILKINSON, W. E. (1969). On branching processes in random environments. *Ann. Math. Stat.* **40**, 814–827.
- [41] VERAVERBEKE, N. UND TEUGELS, J. L. (1976). The exponential rate of convergence of the distribution of the maximum of a random walk. Part II. *J. Appl. Probab.* **13**, 733–740.
- [42] YAGLOM, A. M. (1947). Certain limit theorems of the theory of branching processes. *Doklady Akad. Nauk. SSSR* **56**, 795–798.
- [43] ZUBKOV, A. M. (1975). Limiting distributions of the distance to the closest common ancestor. *Theory Probab. Appl.* **20**, 602–612.