Nichtlineare Erweiterung der Spin–Eichtheorie der Gravitation

Diplomarbeit von

Matthias Hanauske

Fakultät für Physik
Universität Konstanz

09. Juli 1997

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vorwort

Zunächst möchte ich einige Bemerkungen über den Aufbau der Arbeit und über die verwendeten Hilfmittel machen, denn diese ermöglichten ihr Zustandekommen erst.

Aufgrund der Länge der in dieser Arbeit vorkommenden Tensorgleichungen und ihrer teils komplizierten Symmetrieeigenschaften verwendete ich bei allen Rechnungen das *Mathematica* Zusatzpacket "MathTensor". Um einerseits eine Überprüfbarkeit der Richtigkeit der Rechnungen auf diesem Niveau möglich zu machen und andererseits Interessierten einen Einblick zu geben, habe ich die von mir geschriebenen Programme im Internet unter "http: //kaluza.physik.uni-konstanz.de /DE/MH/MathTensor/" abgelegt.

Da meine Arbeit einen Vergleich zweier grundsätzlich unterschiedlicher Theorien darstellt, und ich bestrebt war, diese durch ihre Nomenklatur strickt voneinander zu trennen, entstanden eine Vielzahl von Symbolen, die am Ende dieser Arbeit zusammengefaßt sind.

Beim Aufbau meiner Diplomarbeit stand ich vor der Frage, ob ich die von mir als Verallgemeinerung der Higgsfeldlagrangedichte zunächst noch offenen eingeführten Parameter – die im Laufe der Arbeit festgelegt werden – schon von Beginn an festlege. Das hätte den Vorteil gehabt, daß die langen Gleichungen der zweiten Ordnung übersichtlicher geworden wären. Ich entschied mich jedoch gegen eine Festlegung von Anfang an, da man durch die Art und Weise der nötigen Festlegung einen tieferen Einblick in das physikalische Geschehen gewinnt.

Obwohl die der Spin–Eichtheorie zugrundeliegende Symmetrie nur in der chiralen Darstellung der Gleichungen möglich ist, wurde der Hauptteil der Arbeit in der 4–Spinor–Schreibweise formuliert, denn der dann angestrebte makroskopische Vergleich mit der Einsteinschen Theorie ist nur in dieser machbar.

Um schon am Anfang Verwirrungen vorzubeugen, möchte ich hier erwähnen, daß die der Spin–Eichtheorie zugrundeliegende Metrik die Minkowskimetrik der flachen Raumzeit ist, und alle Tensorindizes der Gleichungen der Spin–Eichtheorie mit dieser Metrik gehoben und gesenkt werden.
Auf der Seite der Einsteinschen Theorie dagegen wird mit der Riemann–Metrik gehoben und gesenkt – ihr liegt die im allgemeinen gekrümmte Raumzeit des Riemann–Raums zugrunde.

Besonders möchte ich hier Herrn Dr. Eckhard Hitzer danken, mit dem ich ein Jahr über – obwohl er sich in Japan befindet – einen regen Austausch von Forschungsergebnissen via e–mail hatte, und Herrn Prof. Dr. Heinz Dehnen für seine sehr gute Betreuung.

Kapitel 2

Einleitung

Man kann die von Newton 1687 veröffentlichte Arbeit mit dem Titel "Philosophiae naturalis principia mathematica" als Ursprungswerk der Gravitationstheorie ansehen. Bis zu diesem Zeitpunkt hatte man die Fallgesetze und die Kepplergesetze als getrennt voneinander betrachtet und nicht erkannt, daß ihre Ursache in der Gravitation liegt. Newtons Gravitationstheorie war demnach ein wichtiger Schritt zur Vereinheitlichung der Physik.

Nach dem Erscheinen der Arbeit von Einstein zur speziellen Relativitätstheorie mit dem Titel "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" ([17], 1905) erkannte man jedoch, daß die nichtrelativistische Form der Newtonschen Feldgleichungen und die Eigenschaft der Fernwechselwirkung der Newtonschen Theorie einer Verallgemeinerung bedürfen. Das von Einstein 1916 veröffentlichte Werk mit dem Titel "Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie"[18] verallgemeinerte die Newtonsche Feldgleichung zu einer kovarianten Tensorgleichung, die im Grenzfall schwacher Gravitationsfelder in die Newtonsche Theorie übergeht. Nach Einsteins Auffassung liegt die Ursache jeglicher gravitativer Erscheinungen darin, daß alle Energieformen die Raumzeit krümmen und alle freien Teilchen sich auf Geodäten in diesem vierdimensionalen Riemann-Raum bewegen; diese Geodäten sind dann z.B. der Weg des zur Erde fallende Apfels oder die Bewegung der Erde um die Sonne.

Durch die Geburt der Quantenmechanik, die gelungene Beschreibung der drei anderen Wechselwirkungen durch quantisierbare Eichtheorien und die Frage was an singulären Punkten der Raumzeit geschehe, wurde im Laufe der Zeit die Forderung nach einer Quantentheorie der Gravitation immer dringlicher. Da man desweiteren eine vereinheitlichte Formulierung der drei anderen Wechselwirkungen in der GUT (Grand Unified Theorie) gefunden hatte, stellte man sich die Frage, wie man die Gravitationswechselwirkung zu formulieren habe, um alle vier bekannten Wechselwirkungen zu vereinheitlichen. Beide Vorhaben – Quantengravitation und totale Vereinheitlichung – sind bis heute noch nicht realisiert. Die zur Zeit populären Vorhaben sind z.B. die Klein–Kaluza Theorien, die alle Wechselwirkungen in einem höher dimensionalen Raum vereinheitlichen und dadurch eine vollkommene Geometrisierung aller Wechselwirkungen vorhaben oder die Superstring-Theorien.

Die in dieser Arbeit betrachtete Gravitationstheorie ist eine Spin–Eichtheorie, deren fundamentale Symmetrieforderung darin besteht, daß sich Teilchen und Antiteilchen in bezug auf die Gravitation wie identische Teilchen verhalten, bzw. daß es nur Geodäten aber keine Antigeodäten gibt. Die erste Arbeit zu diesem Thema wurde 1995 von E. Hitzer und H. Dehnen veröffentlicht [10] und die weiteren Vorhaben liegen maßgeblich auf den Themen der Quantisierung und Vereinheitlichung dieser Gravitationstheorie mit den anderen Wechselwirkungen.
Ein wichtiger Punkt wurde jedoch bisher bei der Betrachtung der Spin–Eichtheorie übergangen, nämlich der, daß sie im klassischen (makroskopischen) Limes in die Einsteinsche Theorie – zumindest mit all ihren bisher experimentell überprüfbaren Aussagen – übergehen sollte. Die Übereinstimmung beider Theorien im makroskopischen Limes wurde jedoch bisher nur in linearer Näherung gezeigt.

Diese Diplomarbeit befaßt sich deshalb mit einer Betrachtung der zweiten Ordnung der Higgsfeldgleichung und läßt sich inhaltlich wie folgt gliedern:

- Um eine gravitationsähnliche Selbstwechselwirkung (maßgeblich zweite Ordnung) der Higgsfelder zu erlangen, ist es erforderlich, die Lagrangedichte des Higgsfeldes abzuändern. In dieser verallgemeinerten Higgsfeldlagrangedichte werden zunächst noch offene Parameter eingeführt, die jedoch im Laufe der Arbeit festlegt werden.

- Um die Higgsfeldgleichung auch in zweiter Ordnung mit der Einsteingleichung übereinstimmen zu lassen, ist es erforderlich einen in den hinteren Indizes antisymmetrischen Divergenzterm "per Hand" zur Higgsfeldgleichung hinzuzufügen, von dem man jedoch zeigen kann, daß er den Energie–Impuls–Erhaltungssatz des Higgs– bzw. Gravitationsfeldes nicht ändert.

- Es wird gezeigt werden, daß man die Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung so umformulieren kann, daß die Quelle der Dynamik der angeregten Higgsfelder der symmetrisierte kanonische Energie–Impulstensor des Higgsfeldes ist, und daß somit eine konsistente gravitationsähnliche Selbstwechselwirkung des Higgsfeldes vorliegt.

- Gravitations– und Higgsfeldwellen sind in ihrer Dynamik bis zur zweiten Ordnung identisch, falls man über kleine Raumzeitbereiche mittelt und somit die stark raumzeitlich fluktuierenden Größen vernachläßigt.

- Der nach Mittelung entstehende grobkörnige Energie–Impuls des Higgs– und klassischen Gravitationsfeldes unterscheiden sich in zweiter Ordnung nicht voneinander.

- Betrachtet man die Ankopplung des Higgs– und klassischen Gravitationsfeldes an fermionische Materie, so unterscheiden sich diese in linearer Näherung nicht voneinander. In quadratischer Näherung koppelt das Higgsfeld gerade halb so stark an die fermionische Materie an.

Kapitel 3

Spin–Eichtheorie der Gravitation

3.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Formalien und Prinzipien der Spin–Eichtheorie zusammenfaßt, da diese zum Verständnis der dann folgenden Kapitel notwendig sind. Die folgenden Darlegungen werden der grundlegenden Arbeit von Dehnen und Hitzer [10], der Dissertation von Hitzer [5] und den Diplomarbeiten von Fibich [3], Ketterer [4] und Geitner [11] entnommen. In dieser Einführung wird zunächst die chirale Formulierung benutzt, da sie die zugrundeliegende Symmetrie der Spin–Eichtheorie veranschaulicht.

3.2 Das Eichprinzip

Die Bewegungsgleichung eines freien, masselosen, fermionischen Teilchens erhält man, durch Bildung der Euler–Lagrangegleichungen in bezug auf den 4–Spinor ψ, aus seiner Lagrangedichte:[1]

$$\mathcal{L}_{M_0}(\psi) \quad = \quad \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi_{|\mu} - \overline{\psi}_{|\mu}\,\gamma^\mu\psi\right\} \quad .$$

Die Dirac–Matrizen γ^μ erfüllen die folgende Antikommutator–Beziehung:

$$\gamma^{(\mu}\,\gamma^{\nu)} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu{}_A{}^B\,\gamma^\nu{}_B{}^C + \gamma^\nu{}_A{}^B\,\gamma^\mu{}_B{}^C\right) \quad = \quad \eta^{\mu\nu}\,\delta_A{}^C = \eta^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4 \quad .$$

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{M_0}$ des fermionischen Teilchens wird nun vom 4–Spinor Formalismus in die chirale Darstellung umformuliert. Der 4–Spinor ψ und die Dirac–Matrizen γ^μ werden nun wie folgt zerlegt (siehe [12], S:362):

$$\psi = \begin{pmatrix}\chi_R\\ \varphi_L\end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix}0 & \sigma_L^\mu\\ \sigma_R^\mu & 0\end{pmatrix} \quad .$$

Die $\sigma^\mu_{L/R}$–Matrizen setzen sich im wesentlichen aus den Pauli–Matrizen σ^i zusammen $i = 1, 2, 3$:

$$\sigma_L^0 = \sigma_R^0 = \mathbf{1}_2 \quad , \quad \sigma_L^i = -\sigma^i \quad , \quad \sigma_R^i = \sigma^i \quad .$$

[1] Im folgenden wird $\hbar = 1$, $c = 1$ gesetzt.

In der so definierten chiralen Formulierung steht in dem 2–Spinor χ_R das rechtshändige Teilchen und das linkshändige Antiteilchen, während in φ_L das linkshändige Teilchen und das rechtshändige Antiteilchen stehen. Diese Aufteilung in Teilchen– Antiteilchen Dubletten des 4–Spinors ist notwendig, um nun die der Spin–Eichtheorie zugrundeliegende Symmetrie – nämlich die Teilchen–Antiteilchen Symmetrie – formal zu fassen. Gedankenexperimenten zufolge ([13],[14]) verhalten sich Teilchen und Antiteilchen in bezug auf die Gravitation so, als ob sie identische Teilchen wären. Falls man die Aussage, daß es keine "Antigravitation" gibt, ernst nimmt, so sollte die fermionische Lagrangedichte $\mathcal{L}_{M_o}$

$$\mathcal{L}_{M_o}(\chi_R,\varphi_L) = \frac{i}{2}(\chi_R^\dagger\sigma_R^\mu\partial_\mu\chi_R + \varphi_L^\dagger\sigma_L^\mu\partial_\mu\varphi_L) + \text{h.c.} \tag{3.1}$$

in chiraler Darstellung invariant unter Teilchen–Antiteilchen Transformationen sein.
Die Invarianz der Lagrangedichte (3.1) unter globaler $SU(2)\times U(1)$-Transformation ist gewährleistet, falls man folgendes berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
\chi_R' &= U\chi_R, \qquad \varphi_L' = U\varphi_L \\
\sigma_R^{\mu\prime} &= U\sigma_R^\mu U^{-1}, \quad \sigma_L^{\mu\prime} = U\sigma_L^\mu U^{-1}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit:} \qquad U &= e^{i\lambda_a\tau^a} \in SU(2)\times U(1), \qquad (a=0,1,2,3) \\
\tau^a &= \frac{1}{2}\sigma^a \quad : \text{Generatoren der Gruppe} \\
\sigma^a &= (\mathbf{1},\sigma^i) \quad , \quad \sigma^i\text{: Pauli–Matrizen,} \qquad (i=1,2,3) \quad .
\end{aligned}$$

Die Eichung der Gruppe erfolgt, indem man den Gruppenparameter λ nun als eine reelle raumzeitabhängige Funktion $\lambda(x^\mu)$ ansieht und demnach eine lokale Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{M_o}$ an jedem betrachteten Raumzeit–Punkt fordert. Um diese lokale Invarianz der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{M_o}$ zu erreichen, ist es erforderlich, zu kovarianten Ableitungen

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\omega_\mu \quad , \qquad \text{mit:} \qquad \omega_\mu' = U\omega_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\,U_{|\mu}U^{-1}, \quad \omega_\mu = \omega_{\mu a}\tau^a$$

überzugehen. Durch die Eichung der Gruppe entstehen also vier reellwertige Eichpotentiale $\omega_{\mu a}$ mit inhomogenem Transformationsverhalten unter $SU(2)\times U(1)$-Transformation.
Aufgrund des kovarianten Transformationsverhaltens der $\sigma^\mu_{L/R}$-Matrizen (3.2) werden diese bei Eichung der Gruppe ebenfalls raumzeitabhängig, und werden im folgenden mit $\tilde\sigma^\mu_{L/R}$ gekennzeichnet.
Die modifizierte Lagrangedichte $\tilde{\mathcal{L}}_{M_o}$, die invariant unter lokaler $SU(2)\times U(1)$-Transformation der Teilchen–Antiteilchen Dubletten ist, lautet in chiraler Darstellung wie folgt:

$$\tilde{\mathcal{L}}_{M_o}(\chi_R,\varphi_L) = \frac{i}{2}(\chi_R^\dagger\tilde\sigma_R^\mu D_\mu\chi_R + \varphi_L^\dagger\tilde\sigma_L^\mu D_\mu\varphi_L) + \text{h.c.} \quad . \tag{3.3}$$

3.3 Die gesamte Lagrangedichte $\mathcal{L}$ des Systems

Zunächst wird hier wiederum ein System betrachtet, indem sich ein freies, masseloses, fermionisches Teilchen befinden soll. Berücksichtigt man – wie im vorigen Kapitel dargestellt – die Invarianz des

Systems unter $SU(2) \times U(1)$-Transformation, so muß man zu der verallgemeinerten Lagrangedichte $\tilde{\mathcal{L}}_{M_0}$ übergehen (3.3) und zusätzlich in der gesamten Lagrangedichte $\mathcal{L}$ des Systems folgendes berücksichtigen:

- Die kinetische Energie der sich nach Eichung im System befindenden Eichfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu a}\tau^a \\ F_{\mu\nu a} &= \omega_{\nu a|\mu} - \omega_{\mu a|\nu} - g\,\varepsilon_a{}^{bc}\omega_{\mu b}\omega_{\nu c} \end{aligned}$$

  ist durch einen Beitrag $\mathcal{L}_F(\omega)$ der Gesamtlagrangedichte $\mathcal{L}$ zuzufügen.

- Die Energiebeiträge der durch das Eichprinzip entstandenen raumzeitabhängigen $\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$-Matrizen müssen ebenfalls zur Gesamtlagrangedichte $\mathcal{L}$ beitragen; ihr Beitrag zur Lagrangedichte wird im folgenden mit $\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$ bezeichnet.

- Um auch massive fermionische Teilchen beschreiben zu können, sollte man durch die Einführung eines Higgsfeldes den zunächst masselosen Fermionen nach Symmetriebrechung Masse verleihen.

- Verallgemeinert man das gewählte System und betrachtet neben den fermionischen Teilchen und den Eichbosonen der Spin–Eichtheorie noch andersartige bosonische Teilchen (z.B.: Photonen oder nichtabelsche Eichbosonen), so hat man deren Lagrangedichte ebenfalls zu berücksichtigen.

Die Lagrangedichte der Eichbosonen der Spin–Eichtheorie setzt man durch folgenden Ausdruck an[2]:

$$\mathcal{L}_F(\omega) = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}{}_b\, s^{ab} \quad .$$

Die Gruppenmetrik s^{ab} der $SU(2) \times U(1)$ Gruppe kann man zu δ^{ab} wählen.

Da die raumzeitabhängigen $\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$-Matrizen den natürlichen nichttrivialen Grundzustand

$$\sigma_L^{(\mu}\,\sigma_R^{\nu)} = \eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_2 \quad , \quad \sigma_R^{(\mu}\,\sigma_L^{\nu)} = \eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_2 \tag{3.4}$$

besitzen, liegt es nahe, sie als tensorielle Higgsfelder aufzufassen. Ihre Lagrangedichte $\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$ wird daher mit den folgenden kinetischen ${}^{kin}\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$ und potentiellen $V(\tilde{\sigma})$ Beiträgen angesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(\tilde{\sigma}) &= {}^{kin}\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma}) - V(\tilde{\sigma}) \\ {}^{kin}\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma}) &= \mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\sigma}_{\mu R})(D^\alpha\,\tilde{\sigma}^\mu_L) - \mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\sigma}_{\mu R})(D^\mu\,\tilde{\sigma}^\alpha_L) - \\ &\quad -\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\sigma}^\alpha_R)(D_\beta\,\tilde{\sigma}^\beta_L) \\ V(\tilde{\sigma}) &= \mu^2\mathrm{tr}(\,\tilde{\sigma}^\mu_L\,\tilde{\sigma}_{\mu R}) + \frac{\lambda}{12}(\mathrm{tr}\,\tilde{\sigma}^\mu_L\,\tilde{\sigma}_{\mu R})^2 \quad \text{wobei:} \quad \lambda > 0\,,\, \mu^2 < 0 \quad \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned}$$

In dem kinetischen Beitrag zur Higgsfeld–Lagrangedichte $\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$ sind alle Permutationen der Ableitungen der Higgsfelder $\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$ berücksichtigt.

Da bei der hier gewählten Formulierung die Spinoren χ_R und φ_L Skalare im Isospinraum sind (Isoskalare Theorie), ist es uns möglich, durch Symmetriebrechung der $\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$-Higgsfelder die Fermionen massiv zu machen[3]. Erweitert man die eichinvariante, fermionische Lagrangedichte $\tilde{\mathcal{L}}_{M_0}$ um einen

[2] Eine Ankopplung der $\tilde{\sigma}$-Felder an die Eichbosonen der $SU(2) \times U(1)$-Gruppe wird hier zunächst nicht betrachtet.

[3] Im Iso-vektoriellen Fall, d.h. bei Vereinheitlichung der durch die Spin–Eichtheorie vermittelten Wechselwirkung mit anderen fundamentalen Wechselwirkungen (siehe [4],[11]), ist es bisher nicht gelungen die unterschiedlichen Massen der Teilchen allein durch die $\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$-Higgsfelder zu erzeugen.

Yukawa–Kopplungsterm, so werden die betrachteten fermionischen Teilchen nach Symmetriebrechung der $\tilde{\sigma}^{\mu}_{L/R}$-Higgsfelder massiv:

$$\tilde{\mathcal{L}}_M(\chi_R, \varphi_L) \quad := \quad \tilde{\mathcal{L}}_{M_0}(\psi) - k\,[\varphi_L^\dagger\,\tilde{\sigma}^{\mu}_L\,\tilde{\sigma}_{\mu R}\chi_R + \chi_R^\dagger\,\tilde{\sigma}^{\mu}_R\,\tilde{\sigma}_{\mu L}\varphi_L] \quad .$$

Die Einbeziehung weiterer Bosonen in die Theorie und deren Ankopplung an die $\tilde{\sigma}^{\mu}_{L/R}$-Higgsfelder wurde in der Diplomarbeit von Fibich (siehe [3], S:30) behandelt. Die aus dieser Arbeit resultierende Lagrangedichte, die die kinetischen Beiträge der zusätzlichen Eichpotentiale $\lambda_{\mu a}$ und deren Ankopplung an die $\tilde{\sigma}^{\mu}_{L/R}$-Higgsfelder korrekt beschreibt, lautet:

$$\mathcal{L}_F(\lambda_{\mu a}) \quad = \quad -\frac{1}{\pi} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\alpha}_L \tilde{\sigma}^{\mu}_R)}{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\varrho}_L \tilde{\sigma}_{R\varrho})} \frac{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\beta}_L \tilde{\sigma}^{\nu}_R)}{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\lambda}_L \tilde{\sigma}_{R\lambda})}$$

$$F_{\mu\nu} \quad : \quad \text{Eichfeldstärken durch Eichpotentiale } \lambda_{\mu a} \text{ gebildet} \quad .$$

Beschränkt man sich auf Photonen, d.h. auf diejenigen Eichbosonen, die aus einem Eichprinzip mit abelscher $U(1)$–Gruppe folgen, so lautet die Lagrangedichte (siehe [3], S:24):

$$\mathcal{L}_F(A_\mu) \quad = \quad -\frac{1}{\pi} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \frac{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\alpha}_L \tilde{\sigma}^{\mu}_R)}{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\varrho}_L \tilde{\sigma}_{R\varrho})} \frac{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\beta}_L \tilde{\sigma}^{\nu}_R)}{\mathrm{tr}(\tilde{\sigma}^{\lambda}_L \tilde{\sigma}_{R\lambda})}$$

$$F_{\mu\nu} \quad : \quad \text{Eichfeldstärken durch Eichpotentiale } A_\mu \text{ gebildet} \quad .$$

Unsere gesamte Lagrangedichte des erweiterten Systems

- Massive Fermionen
- Eichfelder der Spin–Eichtheorie
- Zusätzliche Eichfelder anderer fundamentaler Wechselwirkungen (speziell Photonen)
- $\tilde{\sigma}^{\mu}_{L/R}$-Higgsfelder

lautet demnach:

$$\mathcal{L} \quad = \quad \tilde{\mathcal{L}}_M(\chi_R, \varphi_L) + \mathcal{L}_F(\omega) + \mathcal{L}_F(A_\mu) + \mathcal{L}_H(\tilde{\sigma}) \quad . \tag{3.5}$$

3.4 Die Feldgleichungen im 4–Spinor–Formalismus

Im folgenden wird nun die aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ folgenden Feldgleichungen berechnet und der Übersichtlichkeit halber im 4–Spinor–Formalismus geschrieben, wobei die verallgemeinerte raumzeitabhängige $\tilde{\gamma}$–Matrix ($\tilde{\gamma}$–Higgsfeld) wie folgt definiert wird:

$$\tilde{\gamma}^{\mu} \quad := \quad \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^{\mu}_L \\ \tilde{\sigma}^{\mu}_R & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{3.6}$$

Die Bewegungsgleichung des fermionischen Teilchen–Antiteilchen–Spinors ψ ergibt sich indem man die Lagrangedichte (3.5) dem folgenden Variationsprinzip unterwirft:

$$\delta_\psi \int\limits_\infty \mathcal{L}\; d^4x \quad = \quad 0 \quad . \tag{3.7}$$

Man erhält eine Bewegungsgleichung, die der Dirac–Gleichung ähnlich ist:

$$i\,\tilde{\gamma}^\mu D_\mu \psi + \frac{i}{2}(D_\mu\,\tilde{\gamma}^\mu)\psi - k\,\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu \psi = 0 \quad . \tag{3.8}$$

In gleicher Weise erhält man die adjungierte Dirac–Gleichung.

Variiert man beim Variationsprinzip (3.7) nach den Eichpotentialen ${\omega_\mu}^a$ der Spin–Eichtheorie, so gelangt man zur inhomogenen Yang–Mills–Gleichung:

$$\partial_\nu {F^{\nu\mu}}_a + g\,{\epsilon_a}^{bc}{F^{\nu\mu}}_b\omega_{\nu c} = 4\pi {j^\mu}_a \quad .$$

Die Eichstromdichte ${j^\mu}_a$ läßt sich in zwei Bestandteile zerlegen; die Stromdichte der Fermionen ${j^\mu}_a(\psi)$ und die Stromdichte des Higgsfeldes ${j^\mu}_a(\tilde{\gamma})$:

$$\begin{aligned}
{j^\mu}_a &= {j^\mu}_a(\psi) + {j^\mu}_a(\tilde{\gamma}) \\
{j^\mu}_a(\psi) &= \frac{g}{2}\,\overline{\psi}\,\{\tilde{\gamma}^\mu,\tau_a\}\,\psi \\
{j^\mu}_a(\tilde{\gamma}) &= ig\,\mathrm{tr}\left\{[\tilde{\gamma}_\alpha,\tau_a]D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha - [\tilde{\gamma}_\alpha,\tau_a]D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu - [\tilde{\gamma}^\mu,\tau_a]D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha\right\} \quad .
\end{aligned}$$

Wendet man die Jakobi–Identität auf die kovarianten Ableitungen D_μ an, so erhält man die homogene Yang–Mills–Gleichung:

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\lambda]a} + g\,{\epsilon_a}^{bc}\omega_{b\,[\mu}F_{\nu\lambda]c} = 0 \quad .$$

Berechnet man die Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes A_μ, so gelangt man zur verallgemeinerten inhomogenen Maxwellgleichung (siehe [3], S:25)

$$16\left(F_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\alpha\tilde{\gamma}^\mu)\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\beta\tilde{\gamma}^\nu)}{\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}_\rho\tilde{\gamma}^\rho)\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}_\sigma\tilde{\gamma}^\sigma)}\right)_{|\nu} = 4\pi g j^\mu. \tag{3.9}$$

Entwickelt man die $\tilde{\gamma}$–Matrizen um ihren Grundzustand (siehe (3.15)) und linearisiert Gleichung (3.9), so erhält man einen Ausdruck, der mit der linearen Näherung der allgemein–relativistischen Maxwellgleichungen (siehe [2], S:568)

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} \quad = \quad 4\pi g j^\mu$$

übereinstimmt.

Schließlich erhält man durch Variation nach ${\tilde{\gamma}^\mu}{}_A{}^B$ die Bewegungsgleichung des $\tilde{\gamma}$–Higgsfeldes:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha(D^\alpha\tilde{\gamma}_\mu)^A{}_B - \partial_\alpha(D_\mu\tilde{\gamma}^\alpha)^A{}_B - \partial_\mu(D_\beta\tilde{\gamma}^\beta)^A{}_B + \mu^2\tilde{\gamma}_\mu{}^A{}_B + \frac{\lambda}{12}\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\sigma\tilde{\gamma}_\sigma)\tilde{\gamma}_\mu{}^A{}_B = \qquad (3.10)\\
= \ & \frac{i}{2}\overline{\psi}^A D_\mu\psi_B - \frac{i}{2}\overline{(D_\mu\psi)}^A\psi_B - k(\overline{\psi}^C\tilde{\gamma}_{\mu C}{}^A\psi_B + \overline{\psi}^A\tilde{\gamma}_{\mu B}{}^C\psi_C) + \\
&-\frac{4}{\pi}F_{\mu\beta}F_{\kappa\lambda}\frac{\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\beta\tilde{\gamma}_\lambda)}{[\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\sigma\tilde{\gamma}_\sigma)]^2}\tilde{\gamma}^{\kappa A}{}_B + \frac{4}{\pi}F_{\alpha\beta}F_{\kappa\lambda}\frac{\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\alpha\tilde{\gamma}_\kappa)\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\beta\tilde{\gamma}_\lambda)}{[\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\sigma\tilde{\gamma}_\sigma)]^3}\tilde{\gamma}_\mu{}^A{}_B \quad .
\end{aligned}$$

Der kanonische Energie–Impulstensor (EIST) $T_\mu{}^\nu$ des Gesamtsystems läßt sich in vier verschiedene Teile aufspalten:[4]

$$\begin{aligned}
T_\mu{}^\nu &= \underbrace{T_\mu{}^\nu(\psi)}_{Fermionen} + \underbrace{T_\mu{}^\nu(\omega)}_{Eichbosonen} + \underbrace{T_\mu{}^\nu(A_\mu)}_{Photonen} + \underbrace{T_\mu{}^\nu(\tilde{\gamma})}_{Higgsfeld} \qquad (3.11)\\
T_\mu{}^\nu(\psi) &= \frac{i}{2}[\overline{\psi}\tilde{\gamma}^\nu D_\mu\psi - \overline{(D_\mu\psi)}\tilde{\gamma}^\nu\psi]\\
T_\mu{}^\nu(\omega) &= -\frac{1}{4\pi}[F_{\mu\lambda a}F^{\nu\lambda a} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta a}F^{\alpha\beta a}\delta_\mu{}^\nu]\\
T_\mu{}^\nu(A_\mu) &= \frac{1}{4\pi}\left[F_{\kappa\lambda}F_{\alpha\mu}\delta_\beta{}^\nu - \frac{1}{4}\delta_\mu{}^\nu F_{\alpha\beta}F_{\kappa\lambda}\right]\frac{\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\alpha\tilde{\gamma}_\kappa)\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\lambda\tilde{\gamma}_\mu)}{[\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\sigma\tilde{\gamma}_\sigma)]^2}\\
T_\mu{}^\nu(\tilde{\gamma}) &= \mathrm{tr}(D_\mu\,\tilde{\gamma}_\alpha)(D^\nu\,\tilde{\gamma}^\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\nu)(D_\mu\,\tilde{\gamma}_\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)(D_\mu\,\tilde{\gamma}^\nu) - \mathcal{L}_H(\tilde{\gamma})\,\delta_\mu{}^\nu\\
\mathcal{L}_H(\tilde{\gamma}) &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)(D_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta) - V(\tilde{\gamma})\\
V(\tilde{\gamma}) &= \frac{\mu^2}{2}\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu) + \frac{\lambda}{48}(\mathrm{tr}\,\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu)^2 \quad .
\end{aligned}$$

Der Energie–Impuls–Erhaltungssatz (bzw. die Energie–Impuls–Bilanzgleichung) besitzt die folgende Form:

$$T_\mu{}^\nu{}_{|\nu} = 0 \quad . \qquad (3.12)$$

3.5 Spontane Symmetriebrechung

Der niedrigste Energiezustand (Vakuum) des Gesamtsystems ergibt sich aus dem Minimum des kanonischen Energie–Impulstensors (3.11); dieser Zustand fällt mit dem Minimum des Higgs–Potentials $V(\tilde{\sigma})$ zusammen:

$$\left.\frac{\partial V(\tilde{\sigma})}{\partial\tilde{\sigma}_{\mu R}}\right|_{\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R},\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu L}} = \left.\frac{\partial V(\tilde{\sigma})}{\partial\tilde{\sigma}_{\mu L}}\right|_{\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R},\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu L}} = 0 \;\rightarrow\; \mathrm{tr}(\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}{}^\mu{}_L\,\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R}) = -\frac{6\mu^2}{\lambda} = \frac{v^2}{2} \quad . \qquad (3.13)$$

Wäht man die Grundzustände $\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R/L}$ proportional zu den ursprünglichen $\sigma_{\mu R/L}$–Matrizen, für die die Antikommutator–Relation (3.4) gilt, erhält man unter Verwendung von Gleichung (3.13) die folgenden Grundzustände:

[4]Die hier angegebenen Energie–Impulstensoren $T_\mu{}^\nu(\omega)$ und $T_\mu{}^\nu(A_\mu)$ sind die symmetrischen, spurfreien und eichinvarianten kanonischen EIST's, die sich aus den gewöhnlichen kanonischen EIST's durch Streichung von antisymmetrischen Divergenztermen ergeben (siehe [3], S:51).

$$\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R} = \frac{v}{4}\,\sigma_{\mu R} \quad , \quad \overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu L} = \frac{v}{4}\,\sigma_{\mu L} \quad .$$

Da die $\tilde{\sigma}_{\mu R/L}$ hermitesch sind, lassen sie sich folgendermaßen um ihren Grundzustand entwickeln:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\mu}{}_{R} &= k^{\mu}{}_{\nu R}\, \overset{(o)}{\tilde{\sigma}}{}^{\nu}{}_{R} \quad , \quad k^{\mu}{}_{\nu R} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu R}) \\ \tilde{\sigma}^{\mu}{}_{L} &= k^{\mu}{}_{\nu L}\, \overset{(o)}{\tilde{\sigma}}{}^{\nu}{}_{L} \quad , \quad k^{\mu}{}_{\nu L} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu L}) \quad . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Größen $\epsilon^{\mu}{}_{\nu R/L}$ stellen die angeregten "rechts und linkshändigen" Zustände des Higgsfeldes dar.

Damit die Dimension der Lagrangedichte auch nach Symmetriebrechung gleich $\frac{1}{\text{Länge}^4}$ bleibt, ist es erforderlich, die rechts- und linkshändigen chiralen Zustände χ_R, φ_L umzunormieren:

$$\chi_R = \frac{2}{\sqrt{v}}\,\chi_{RD} \quad , \quad \varphi_L = \frac{2}{\sqrt{v}}\,\varphi_{LD} \quad , \quad \psi_D = \begin{pmatrix} \chi_{RD} \\ \varphi_{LD} \end{pmatrix} \quad .$$

Der Yukawa–Kopplungsterm liefert im Higgsfeld–Grundzustand die Masse m der Fermionen:

$$m \quad = \quad k\,v \quad .$$

Die $SU(2)$–Eichbosonen (a=1,2,3) bekommen durch die spontane Symmetriebrechung eine Masse in Größenordnung der Plank–Masse $M_{PL} = \frac{1}{\sqrt{G}} \simeq 10^{19} GeV$.
Das $U(1)$–Eichboson (a=0) bleibt auch nach Symmetriebrechung masselos und kann als masseloses Eichboson der schwachen Hyperladung $\omega_{\mu o} = B_{\mu}$ identifiziert werden (siehe [5], S:50).

3.6 Der mikroskopische und makroskopische Limes

Da es der Spin–Eichtheorie eigen ist, auf extrem verschiedenen Raumzeit– bzw. Energie–Skalen unterschiedliche physikalische Erscheinungsformen zu besitzen, kann man bei den Grenzfällen der mikroskopischen und makroskopischen Betrachtungsweise einige Einschränkungen und Vernachläßigungen vornehmen; bei den jeweiligen Grenzfällen werden gewisse Wechselwirkungen wichtig und andere dagegen unwichtig. Die Vernachläßigungen, die im makroskopischen Grenzfall vorgenommen werden, sind insofern besonders wichtig, da sie im Hauptteil dieser Arbeit ständig vorausgesetzt werden.

3.6.1 Der mikroskopische Grenzfall

Betrachtet man mikroskopische Raumzeitbereiche, so erhält man durch die Bewegungsgleichungen in chiraler Darstellung Aussagen über das physikalische Verhalten unserer im System befindlichen Felder und Teilchen. Bei solchen Raumzeit–Skalen hat man prinzipiell alle Wechselwirkungen zu beachten und darf keine pauschalen Näherungen machen. Da die Wechselwirkung, die durch die $SU(2)$–Eichbosonen vermittelt wird, aufgrund ihrer enormen Masse sehr kurzreichweitig ist, kann man – falls man auf diese "Kontaktwechselwirkungen" verzichtet – auch auf mikroskopischen Skalen, die Eichbosonen $\omega_{\mu a}$ (a=1,2,3) vernachläßigen. Nimmt man zusätzlich noch an, daß man keine elektroschwachen Wechselwirkungen betrachtet – und vernachläßigt somit das Hyperladungs–Eichboson – , so kann man die kovarianten Ableitungen D_{μ} in partielle Ableitungen ∂_{μ} umschreiben. Die mikroskopischen Aussagen, die man dann über die Bewegungsgleichung des Higgsfeldes treffen kann, sind in ([5], Kapitel 5) nachlesbar.

3.6.2 Der makroskopische Grenzfall

Geht man zu makroskopischen Raumzeitbereichen über, so kann man die $SU(2)$–Eichbosonen aufgrund der großen Distanzen vernachläßigen. Wie im mikroskopischen Grenzfall betrachtet man das Hyperladungs–Eichboson nicht und verwendet partielle Ableitungen. Ein maßgeblicher Unterschied zur mikroskopischen Beschreibung besteht darin, daß man Eigenschaften, die ihre Ursache im Spin der Teilchen haben, zu vernachläßigen hat, da sie quantenmechanische Effekte darstellen. Aufgrund dieser Tatsache sollten die unterschiedlichen angeregten Higgsfelder $\epsilon^{\mu}{}_{\nu R/L}$ im makroskopischen Limes in ein einheitliches angeregtes Higgsfeld $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ übergehen:

$$\epsilon^{\mu}{}_{\nu R} = \epsilon^{\mu}{}_{\nu L} = \epsilon^{\mu}{}_{\nu} \quad \text{bzw:} \quad k^{\mu}{}_{\nu R} = k^{\mu}{}_{\nu L} = k^{\mu}{}_{\nu} \quad .$$

Faßt man die $\tilde{\sigma}_{\mu R/L}$–Matrizen in die verallgemeinerten Dirac–Matrix (3.6) zusammen, so kann man deren Grundzustand im makroskopischen Limes wie folgt formulieren:

$$\tilde{\gamma}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & k^{\mu}{}_{\nu L} \overset{(0)}{\tilde{\sigma}^{\nu}}{}_{L} \\ k^{\mu}{}_{\nu R} \overset{(0)}{\tilde{\sigma}^{\nu}}{}_{R} & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{makrosk. Limes}}{=} k^{\mu}{}_{\nu} \begin{pmatrix} 0 & \overset{(0)}{\tilde{\sigma}^{\nu}}{}_{L} \\ \overset{(0)}{\tilde{\sigma}^{\nu}}{}_{R} & 0 \end{pmatrix} = k^{\mu}{}_{\nu} \overset{(0)}{\tilde{\gamma}^{\nu}}$$

$$\text{Grundzustand:} \qquad \overset{(0)}{\tilde{\gamma}^{\mu}} = \frac{v}{4}\gamma^{\mu} \quad . \tag{3.15}$$

Man kann außerdem zeigen (siehe [5], S:70), daß die antisymmetrischen Anteile der angeregten Higgsfelder $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ nur an die Spin–Eigenschaften koppeln. Im makroskopischen Limes kann man deshalb davon ausgehen, daß die Tensoren $\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$ und $k^{\mu}{}_{\nu}$ symmetrische Tensoren sind.

3.7 Das angeregte Higgsfeld als gravitative Wechselwirkung

In diesem Kapitel wird der makroskopische Grenzfall (3.6.2) der Higgsfeldgleichung (3.10) diskutiert. Multipliziert man die Gleichung (3.10) mit der konstanten $\gamma_{\nu A}{}^{B}$–Matrix und spurt über die Spinorindizes ${}_{A}{}^{B}$ ab, so erhält man eine Gleichung, die die freien Raumzeitindizes ${}_{\mu\nu}$ besitzt. Um eine sinnvolle Störungsentwicklung zu gewärleisten, nimmt man an, daß das Higgsfeld nur wenig von seinem Grundzustand abweicht ($|\epsilon_{\mu\nu}| \ll 1$). Man entwickelt nun die $\tilde{\gamma}$–Matrizen um ihren Grundzustand und trennt die entstehende Gleichung – die wir im folgenden ebenfalls Higgsfeldgleichung nennen werden – nach Ordnungen in $\epsilon_{\mu\nu}$.
In linearer Näherung erhält man:

$$\begin{aligned} & \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\epsilon_{\mu\nu} - 2\partial_{\alpha}\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}{}_{\nu} - \frac{\mu^2}{2}\epsilon^{\kappa}{}_{\kappa}\eta_{\mu\nu} = \\ = \quad & \frac{4}{v^2}\Big\{\frac{i}{2}[\overline{\psi}_D\gamma_{\nu}D_{\mu}\psi_D - \overline{(D_{\mu}\psi_D)}\gamma_{\nu}\psi_D] - \frac{m}{4}[\overline{\psi}_D\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\psi_D + \overline{\psi}_D\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\psi_D] - \\ & -\frac{1}{4\pi}[F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}]\Big\} \quad . \end{aligned}$$

Symmetrisiert man diese Gleichung in ihren freien Indizes ${}_{\mu\nu}$ und verwendet die Definitionen der elektromagnetischen und fermionischen Energie–Impulstensoren (3.11) im Grundzustand des Higgsfeldes, so gelangt man zu folgender Gleichung:

$$\partial_{\alpha}\partial^{\alpha}\epsilon_{\mu\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\mu}\epsilon^{\alpha}{}_{\nu} - \partial_{\alpha}\partial_{\nu}\epsilon^{\alpha}{}_{\mu} - \frac{\mu^2}{2}\epsilon^{\kappa}{}_{\kappa}\eta_{\mu\nu} = \tag{3.16}$$

$$= \frac{4}{v^2}\left\{\left(\overset{(o)}{T}_{(\mu\nu)}(\psi_D)+\overset{(o)}{T}_{\mu\nu}(A_\mu)\right)-\frac{1}{2}\left(\overset{(o)}{T}(\psi_D)+\underbrace{\overset{(o)}{T}(A_\mu)}_{=0}\right)\eta_{\mu\nu}\right\}$$

mit:

$$\overset{(o)}{T}_{(\mu\nu)}(\psi_D) = \frac{i}{2}[\overline{\psi}_D\gamma_{(\nu}D_{\mu)}\psi_D - \overline{(D_{(\mu}\psi_D)}\gamma_{\nu)}\psi_D]$$

$$\overset{(o)}{T}_{\mu\nu}(A_\mu) = -\frac{1}{4\pi}[F_{\mu\lambda}F_\nu{}^\lambda - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}]$$

$$\overset{(o)}{T}(\psi_D) = m\overline{\psi}_D\psi_D \quad .$$

In ([5], S:65) wird mithilfe des Energie–Impuls–Erhaltungssatzes $T_{(\mu\nu)}{}^{|\nu}$ die Spurfreiheit der angeregten Higgsfelder $\epsilon_{\mu\nu}$ gezeigt. Im Anhang A wird diese und weitere Einschränkungen der angeregten Higgsfelder auf eine andere Weise begründet, die die Möglichkeit der Definition einer effektiven Metrik ${}^eg^{\mu\nu}$ durch eine Clifford–Algebra der verallgemeinerten $\tilde{\gamma}$–Matrizen benutzt (siehe A.3).
Unter der Eigenschaft $\epsilon^\mu{}_\mu \equiv 0$ schreibt sich Gleichung (3.16) wie folgt:

$$\begin{aligned}&\partial_\alpha\partial^\alpha\epsilon_{\mu\nu} - \partial_\alpha\partial_\mu\epsilon^\alpha{}_\nu - \partial_\alpha\partial_\nu\epsilon^\alpha{}_\mu = \\ &= \frac{4}{v^2}\left\{\left(\overset{(o)}{T}_{(\mu\nu)}(\psi_D)+\overset{(o)}{T}_{\mu\nu}(A_\mu)\right)-\frac{1}{2}\left(\overset{(o)}{T}(\psi_D)+\underbrace{\overset{(o)}{T}(A_\mu)}_{=0}\right)\eta_{\mu\nu}\right\} \quad .\end{aligned} \tag{3.17}$$

Wir betrachten nun unser Gesamtsystem ohne den Formalismus der Spin–Eichtheorie, was im folgenden stehts durch den Begriff klassische bzw. Einsteinsche Formulierung bezeichnet wird. Das System in dieser klassischen Formulierung besteht aus fermionischen, massiven Teilchen und elektromagnetischen Feldern, die sich in einem vierdimensionalen Riemann–Raum der Metrik $g_{\mu\nu}$ befinden. Die vermittelte gravitative Wechselwirkung wird hier anschaulich durch die Krümmung des Riemann–Raumes erreicht, die ihrerseits durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ und deren Differentiale beschrieben wird.
Falls die angeregten Higgsfelder $\epsilon_{\mu\nu}$ im makroskopischen Limes für eine Gravitationskraft der klassischen Art verantwortlich sein sollten, müßte deren Differentialgleichung gleich der Differentialgleichung für die Metrik $g_{\mu\nu}$ sein. Die Differentialgleichung für die Metrik $g_{\mu\nu}$ ist die Einsteingleichung

$$R_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\,g_{\mu\nu}\right) \tag{3.18}$$

$$T_{\mu\nu} = \text{Metrischer EIST des Gesamtsystems} \quad ,$$

die anschaulich besagt, daß die Quelle der Raumzeit–Krümmung der "Energieimpuls" des Systems ist.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die lineare Näherung der Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder $\epsilon_{\mu\nu}$ (3.17) gleich der linearisierten Einsteingleichung in Einsteineichung ($\det(g) = -1$) ist, und somit der makroskopische Limes beider Arten der Beschreibung der gravitativen Wechselwirkung in linearer Näherung äquivalent ist.
Entwickelt man die Riemann–Metrik $g_{\mu\nu}$ um die flache Minkowski–Metrik $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + B\,\epsilon_{\mu\nu} \tag{3.19}$$

und berechnet unter Verwendung der Folgerungen aus der Einsteineichung (siehe Anhang A) die lineare Näherung der Einsteingleichung (3.18), so erhält man:

$$\frac{B}{2}\left(\partial_\alpha \partial^\alpha \epsilon_{\mu\nu} - \partial_\alpha \partial_\mu \epsilon^\alpha{}_\nu - \partial_\alpha \partial_\nu \epsilon^\alpha{}_\mu\right) = -16\pi G \left\{ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T\, g_{\mu\nu} \right\} \quad . \tag{3.20}$$

Vergleicht man die linearisierte Higgsfeldgleichung (3.17) mit Gleichung (3.20), so sind beide gleich, falls folgendes erfüllt ist:

- Es muß ein Zusammenhang zwischen dem Parameter v der Symmetriebrechung und der Gravitationskonstanten G bestehen:

$$\frac{-8\pi G}{B} = \frac{4}{v^2} \quad . \tag{3.21}$$

  Später (siehe Anhang B) wird durch die Definition einer effektiven Metrik ${}^e g^{\mu\nu}$ der Parameter B festlegt (B=-2)[5], so daß sich der Zusammenhang (3.21) wie folgt vereinfacht:

$$2\pi G = \frac{1}{v^2} \quad . \tag{3.22}$$

- Die in der klassischen Theorie definierten metrischen Energie–Impulstensoren der Fermionen und Photonen – Zusammengefaßt in $T_{\mu\nu}$ – müssen den kanonischen symmetrischen EIST's der Spin–Eichtheorie entsprechen. Zur Diskussion dieser Behauptung siehe Kapitel 8 und [3].

Unter Voraussetzung dieser beiden Punkte ist demnach die im makroskopischen Limes durch das angeregte Higgsfeld vermittelte Kraft in linearer Näherung eine gravitative Kraft.

3.8 Notwendigkeit einer Übereinstimmung in zweiter Ordnung

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß die lineare Ordnung der Higgsfeldgleichung (3.17) mit der linearisierten Einsteingleichung bei speziell gewählter Eichung übereinstimmt. Betrachtet man jedoch die zweiten Ordnungen beider Gleichungen[6], so weichen diese enorm voneinander ab. Auf Seite der Higgsfeldgleichung entstehen nur zwei Terme, die man der quadratischen Ordnung zuordnen kann:

$$\frac{-\mu^2\left(2\,\epsilon^{\mu\nu}\,\epsilon_\alpha{}^\alpha + \epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon^{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\nu}\right)}{4} = 0 \quad .$$

Diese Terme stammen vom Higgspotential $V(\tilde{\gamma})$ und sind aufgrund gewisser Eigenschaften der angeregten Higgsfelder (siehe 4.10) gleich Null.
Die quadratische Ordnung der Einsteingleichung setzt sich dagegen aus vielen nichttrivialen Termen zusammen (siehe 4.18), die eine große physikalische Relevanz besitzen:

- Die Periheldrehung, die bei Planetenbewegungen auftritt, wird nachweißlich von der zweiten Ordnung beeinflußt.

- Die Eigenschaft des Gravitationsfeldes seine eigene Quelle zu sein (Selbstgravitative Wechselwirkung), wird durch die zweiten und höheren Ordnungen der Einsteingleichung bestimmt.

- Die Definition des Pseudo–Energie–Impulstensors des Gravitationsfeldes hängt eng mit den zweiten und höheren Ordnungen zusammen.

[5] Bei der Definition der effektiven Metrik durch den klassischen Limes der iterierten Diracgleichung wird man zunächst nur auf den Koeffizient $A = 2$ der kontravarianten effektiven Metrik geführt. Aus diesem ist dann der Wert $B = -2$ der zugehorigen kovarianten Metrik jedoch leicht zu berechnen.

[6] Hier speziell in einer Raumzeit ohne fermionische Materie und Photonen.

- Physikalisch observable Größen, wie z.B. der Energiestrom einer Gravitationswelle (siehe [1], S:412) setzen sich aus zweiten und höheren Ordnungen zusammen.

Möchte man zeigen, daß die Higgsfeldgleichung wirklich eine gravitative Wechselwirkung der Einsteinschen Art vermittelt, ist es nötig, auch in den zweiten Ordnungen Übereinstimmung zu erhalten, da man sonst wichtige physikalische Eigenschaften der Gravitation vernachläßigt hätte.
Im folgenden wird deshalb die Spin–Eichtheorie so verallgemeinert, daß die Higgsfeldgleichung mit der Einsteingleichung auch in quadratischer Ordnung weitgehend übereinstimmt.

Kapitel 4

Nichtlineare Erweiterung (materiefreier Fall)

4.1 Vorbemerkungen

Im vorigen Kapitel wurden die grundlegenden Prinzipien und den Formalismus der Spin–Eichtheorie dargestellt.
Man hat gesehen, daß das Higgsfeld einerseits durch die Wahl seines Grundzustandes die Massen der Fermionen erzeugt und andererseits die Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder in linearer Näherung eine Gravitationskraft der Einsteinschen Art widerspiegelt. Im letzten Unterkapitel sahen wir jedoch, daß diese lineare Übereinstimmung noch nicht ausreichend ist, wenn man, die durch das Higgsfeld vermittelte Kraft als eine Gravitationskraft interpretieren möchte, da ein wesentlicher Aspekt der Gravitation – nämlich der der Selbstwechselwirkung – erst bei quadratischen und höheren Ordnungen auftritt.
In diesem Kapitel wird nun die Higgsfeldlagrangedichte $\mathcal{L}_H(\tilde{\gamma})$ in einer Weise verallgemeinert, daß die quadratischen Ordnungen der Higgsfeld – und Einsteingleichung weitgehend miteinander übereinstimmen. Um Komplikationen, die bei der Ankopplung des Higgsfeldes an fermionische– oder bosonischer Materie entstehen könnten aus dem Wege zu gehen, betrachten wir in diesem Kapitel ein materiefreies System ohne weitere Wechselwirkungen.

4.2 Verallgemeinerung der Higgsfeldlagrangedichte $\mathcal{L}_H(\tilde{\gamma})$

Es stellt sich zunächst die Frage, wie die Lagrangedichte des Higgsfeldes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(\tilde{\gamma}) &= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)}_{\mathcal{A}} - \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)}_{\mathcal{B}} - \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)(D_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta)}_{\mathcal{C}} - V(\tilde{\gamma}) \qquad (4.1) \\ V(\tilde{\gamma}) &= \frac{\mu^2}{2}\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu) + \frac{\lambda}{48}(\mathrm{tr}\,\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu)^2 \end{aligned}$$

abzuändern ist, damit die Higgsfeldgleichung auch in quadratischer Ordnung gleich der Einsteingleichung ist.
Physikalisch betrachtet, bestehen die zu korrigierenden Unterschiede der Spin–Eichtheorie mit der Einsteinschen Theorie darin, daß die den Theorien jeweils eigenen Felder (Higgsfelder $\Leftrightarrow$ Metrik) unterschiedlich an sich selbst koppelt, d.h. unterschiedlich selbstwechselwirken. Um den richtigen makroskopischen Limes der Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung zu erhalten, muß man demnach, die in der Lagrangedichte (4.1) auftretenden $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder in anderer Weise als bisher an sich selbst koppeln. Wir werden später (Anhang B) sehen, daß man mit Hilfe der $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder eine effektive Metrik ${}^e g^{\mu\nu}$ definieren kann, die die Struktur einer Clifford–Algebra besitzt:

$$ {}^{e}g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4 \quad = \quad {}^{c}g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4 := \frac{1}{v^2}\,\tilde{\gamma}^{(\mu}\tilde{\gamma}^{\nu)} \quad . \tag{4.2} $$

Da für sehr schwache Gravitationsfelder die Riemannsche Metrik $g^{\mu\nu}$ in nullter Näherung gleich der Minkowski–Metrik $\eta^{\mu\nu}$ ist und man sich bei der Einsteingleichung allein auf die erste Ordnung beschränken kann – und diese sich von der linearen Ordnung der Spin–Eichtheorie nicht unterscheidet – kann man vermuten, daß in der Lagrangedichte (4.1) an einigen Stellen lediglich die Grundzustände der $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder stehen, wo bei korrekter Ankopplung die verallgemeinerten raumzeitabhängigen $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder stehen sollten, da die effektive Metrik im Grundzustand der $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder in die flache Minkowski–Metrik übergeht:

$$ {}^{e}g^{\mu\nu} \quad \overset{\text{Grund-}}{\underset{}{\overset{\text{zustand}}{\Longrightarrow}}} \quad \eta^{\mu\nu} := \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) \quad . $$

Bei der Verallgemeinerung der Lagrangedichte (4.1) wird nun so vorgegangen, daß man die Lagrangedichtenterme $(\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C})$ zunächst umformuliert, indem man durch Heben und Senken der Indizes freie Minkowski–Metriken schaffen, und diese dann in effektive Metriken übergehen läßt:

$$ (...)\,\eta^{\mu\nu}\,(...) \quad \rightarrow \quad (...)\,{}^{e}g^{\mu\nu}(...) = (...)\,\frac{4}{v^2}\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu})\,(...) \quad . $$

Daraus ergeben sich folgenden Variationsmöglichkeiten, die mit, im allgemeinen unterschiedlichen Faktoren $(\alpha_1,\alpha_2,...,\gamma_4)$ gewichtet werden:

$$ \mathcal{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta^{\alpha\beta}(D_\beta\,\tilde{\gamma}^\mu)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}_1} = \frac{2\,\alpha_1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\beta\,\tilde{\gamma}^\mu)] \\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta^{\mu\beta}(D^\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2} = \frac{2\,\alpha_2}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)] \\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\sigma}(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\sigma)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}_3} = \frac{8\,\alpha_3}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\sigma)] \\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta_\beta{}^\beta(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}_4} = \frac{2\,\alpha_4}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)] \\ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta_\beta{}^\beta\,\eta_\sigma{}^\sigma(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{A}_5} = \frac{8\,\alpha_5}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma](D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)] \end{cases} \tag{4.3} $$

$$ \mathcal{B} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta^{\alpha\beta}(D^\mu\,\tilde{\gamma}_\beta)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}_1} = -\frac{2\,\beta_1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\mu\,\tilde{\gamma}_\beta)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\sigma}(D_\sigma\,\tilde{\gamma}_\beta)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}_2} = -\frac{8\,\beta_2}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,(D_\sigma\,\tilde{\gamma}_\beta)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta_\beta{}^\beta(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}_3} = -\frac{2\,\beta_3}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\eta_\beta{}^\beta\,\eta_\sigma{}^\sigma(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] & \rightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{B}_4} = -\frac{8\,\beta_4}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma](D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] \end{cases} \tag{4.4} $$

$$\mathcal{C} = \begin{cases} -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)\eta^{\alpha\beta}(D_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma)] & \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}_1} = -\frac{2\,\gamma_1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\sigma)\eta^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\mu}(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\mu)] & \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}_2} = -\frac{8\,\gamma_2}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\sigma)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\beta\,\tilde{\gamma}^\mu]\,(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\mu)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)\eta_\beta{}^\beta(D_\mu\,\tilde{\gamma}^\mu)] & \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}_3} = -\frac{2\,\gamma_3}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\mu\,\tilde{\gamma}^\mu)] \\ -\frac{1}{2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)\eta_\beta{}^\beta\,\eta_\sigma{}^\sigma(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] & \to \mathcal{L}_{\mathcal{C}_4} = -\frac{8\,\gamma_4}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma](D_\mu\,\tilde{\gamma}^\mu)] \quad . \end{cases} \tag{4.5}$$

4.3 Erste und zweite Ordnung der Higgsfeld– und Einsteingleichung

Im folgenden wird der makroskopische Limes einer Raumzeit betrachtet, in der sich keine Fermionen $\tilde{\mathcal{L}}_M(\psi) \equiv 0$ und keine Photonen $\mathcal{L}_F(A_\mu) \equiv 0$ befinden. Die Lagrangedichte des Gesamtsystems setzt sich deshalb nur aus der erweiterten Higgsfeld–Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{H_e} = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{L}_{\mathcal{A}_i} + \sum_{i=1}^{4} \mathcal{L}_{\mathcal{B}_i} + \sum_{i=1}^{4} \mathcal{L}_{\mathcal{C}_i} - V(\tilde{\gamma}) \tag{4.6}$$

zusammen.

Die Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_\mu{}^A{}_B = 0$ ergibt sich wieder aus dem Variationsprinzip (3.7) in bezug auf die $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder, bzw. durch die Euler-Lagrangegleichungen nach den verallgemeinerten $\tilde{\gamma}^\mu{}_A{}^B$-Matrizen. Multiliziert man diese Gleichung mit $\gamma_\nu{}_A{}^B$ und spurt über die Spinor-Indizes ab, erhält man eine Gleichung der Form $\mathcal{H}_{\mu\nu} = 0$, die im folgenden ebenfalls Higgsfeldgleichung genannt wird.

Wegen des makroskopischen Grenzfalles (siehe (3.6.2)) sind die partiellen Ableitungen ∂_μ den kovarianten Ableitungen D_μ gleich:

$$\text{niederenergetische Näherung :} \qquad \omega_\mu \to 0 \qquad D_\mu \to \partial_\mu \quad . \tag{4.7}$$

Durchgeführt wird nun wieder die spontane Symmetriebrechung (siehe (3.5)) und die Entwicklung der $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder um ihren Grundzustand. Diese Entwicklung wird jedoch im Unterschied zur Entwicklung (3.14) bis zu Termen zweiter Ordnung erstreckt:

$$\tilde{\gamma}^\mu = k^\mu{}_\nu \overset{(o)}{\tilde{\gamma}^\nu} \quad \text{mit:} \quad \overset{(o)}{\tilde{\gamma}^\mu} = \frac{v}{4}\gamma^\mu \qquad , \quad k^\mu{}_\nu = (\delta^\mu{}_\nu + \overset{(1)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu + \overset{(2)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu) \quad . \tag{4.8}$$

Das angeregte Higgsfeld soll nur wenig von seinem Grundzustand abweichen, was zur Folge hat, daß die linear voneinander unabhängigen Anregungsfelder $\overset{(1)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu$, $\overset{(2)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu$ kleine Größen sind. Es soll folgendes gelten:

$$|\overset{(1)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu| \ll 1 \quad , \quad |\overset{(2)}{\epsilon}{}^\mu{}_\nu| \cong |\overset{(1)}{\epsilon}{}^\mu{}_\alpha\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^\alpha{}_\nu| \quad . \tag{4.9}$$

Sortiert man nun die Higgsfeldgleichung nach Ordnungen der Anregungsfelder so ist, wegen den Forderungen (4.9) jede Größenordnung für sich Null:

$$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \underbrace{\overset{(0)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu}}_{trivial=0} + \overset{(1)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu} + ... = 0 \quad \to \qquad \overset{(1)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \overset{(2)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad ... \quad .$$

Wie im Anhang A gezeigt wird, gelten für die angeregten Higgsfelder die folgenden Einschränkungen:

$$\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\mu} \equiv 0 \quad , \qquad \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\mu} \equiv 0 \quad , \qquad \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu\,\nu} \equiv 0 \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow \quad \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\,\mu} \equiv 0 \quad , \qquad \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\,\mu}{}_{|\alpha} \equiv 0 \quad , \qquad \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\,\mu}{}_{|\beta} = -\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu\,|\alpha\,|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\,\mu} \quad .$$

Mit den Forderungen (4.10) lautet die Higgsfeldgleichung in erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\mathcal{H}}{}_{\mu\nu} &= v\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+4\,\alpha_4+16\,\alpha_5)\;\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu}{}_{|\sigma}{}^{|\sigma} - \\ &\quad -v\,(\beta_1+\beta_2+4\,\beta_3+16\,\beta_4+\gamma_1+\gamma_2+4\,\gamma_3+16\,\gamma_4)\;\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma\,|\mu} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Im folgenden wird der symmetrische Anteil der Higgsfeldgleichung in erster Ordnung betrachtet:

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{\mathcal{H}}{}_{(\mu\nu)} &= v\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+4\,\alpha_4+16\,\alpha_5)\;\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu}{}_{|\sigma}{}^{|\sigma} - \\ &\quad -\frac{v}{2}\,(\beta_1+\beta_2+4\,\beta_3+16\,\beta_4+\gamma_1+\gamma_2+4\,\gamma_3+16\,\gamma_4)\;\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma\,|\mu} - \\ &\quad -\frac{v}{2}\,(\beta_1+\beta_2+4\,\beta_3+16\,\beta_4+\gamma_1+\gamma_2+4\,\gamma_3+16\,\gamma_4)\;\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma\,|\nu} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Dies stellt den symmetrischen Anteil die Feldgleichung der angeregten Higgsfelder in erster Ordnung dar.

Wir behandeln nun wieder die klassische Formulierung:

Da das betrachtete System keine Materie und andere Energieformen beinhaltet, vereinfacht sich die Feldgleichung (3.18) zur Einsteingleichung der materiefreien Raumzeit: $R_{\mu\nu} = 0$.
Um die einzelnen Ordnungen der beiden Theorien miteinander zu vergleichen, entwickelt man wieder die Riemann Metrik $g_{\mu\nu}$ um die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} + \overset{(1)}{h}{}^{\mu\nu} + \overset{(2)}{h}{}^{\mu\nu} \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} + \overset{(2)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

Zunächst werden die einzelnen Ordnungen der Abweichungen von der Minkowski–Metrik in folgenden allgemeinen Zusammenhang mit den angeregten Higgsfeldern gesetzt:

$$\overset{(1)}{h}{}^{\mu\nu} = A\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu\nu} \qquad , \qquad \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} = B\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu}$$

$$\overset{(2)}{h}{}^{\mu\nu} = C\;\overset{(2)}{\epsilon}{}^{\mu\nu} + D\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\nu} + \underbrace{\left(G\;\overset{(2)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,\eta^{\mu\nu} + H\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta\alpha}\,\eta^{\mu\nu} + I\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta}{}_{\beta}\,\eta^{\mu\nu}\right)}_{Wegen\ (4.10)\ =0} \tag{4.12}$$

$$\overset{(2)}{\underline{h}}_{\mu\nu} = E \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu} + F \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\alpha} \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\nu} + \underbrace{\left(J \overset{(2)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\alpha}\, \eta_{\mu\nu} + K \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta\alpha} \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta\alpha}\, \eta_{\mu\nu} + L \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\alpha} \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta}{}_{\beta}\, \eta_{\mu\nu} \right)}_{Wegen\ (4.10)\ =0} \quad .$$

Da der kovariante metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ der zu $g^{\mu\nu}$ reziproke Tensor ist, gelten die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\, g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}{}^{\sigma} \qquad &\rightarrow \qquad A = -B \\ &\rightarrow \quad (A\,B + \mathrm{D} + F)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\nu} = \ -(\mathrm{C} + E)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\nu} \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Berechnet man die Einsteingleichung und spaltet diese in ihre verschiedenen Ordnungen auf, so erhält man in linearer Näherung in Einsteineichung (siehe Anhang A):

$$\frac{2}{B} \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} = \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\sigma}{}^{|\sigma} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\nu} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\mu} = 0 \quad . \tag{4.14}$$

Damit nun in linearer Näherung die Einsteingleichung (4.14) gleich der Higgsfeldgleichung (4.11) ist, muß man die folgende Forderung an die Parameterwerte $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ stellen:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\,\alpha_4 + 16\,\alpha_5) \quad = \quad \frac{1}{2}\,(\beta_1 + \beta_2 + 4\,\beta_3 + 16\,\beta_4 + \gamma_1 + \gamma_2 + 4\,\gamma_3 + 16\,\gamma_4) \quad . \tag{4.15}$$

Betrachtet man nun den symmetrischen Teil der quadratischen Ordnung der Higgsfelgleichung unter Verwendung der Forderungen (4.10)[1]:

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)} \quad = \quad & (-\gamma_1\, v - 2\,\gamma_2\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\beta} + (\alpha_2\, v + \alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}^{|\beta} + \\ & (-\beta_1\, v - 2\,\beta_2\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta\,|\alpha}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\beta} + \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha\,|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \\ & \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha\,|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\nu} + (2\,\alpha_1\, v + 2\,\alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \\ & \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v + \frac{\gamma_1\, v}{2} + \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}_{|\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v + \frac{\gamma_1\, v}{2} + \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\mu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \\ & (\gamma_3\, v + 8\,\gamma_4\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + (\beta_3\, v + 8\,\beta_4\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\gamma}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma\,|\beta} + \\ & (2\,\alpha_1\, v + 2\,\alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha|\beta} + \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\nu} + \\ & \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} + \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\mu} + \\ & (\alpha_2\, v + \alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}{}^{|\beta} + \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v \right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} + \end{aligned} \tag{4.16}$$

[1]Die Forderungen (4.10) sind auf der Seite der Spin–Eichtheorie als Forderungen an die angeregten Higgsfelder aufzufassen. Auf der Seite der ART hingegen ergeben sie sich aus der Einsteineichung (siehe Anhang A).

$$
\begin{aligned}
&(\alpha_2\,v+\alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\beta}{}^{|\beta}+(\alpha_1\,v+\alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\mu|\nu}+(\alpha_4\,v+8\,\alpha_5\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\;\eta_{\mu\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\gamma}{}^{|\gamma}+\\
&(\alpha_1\,v+\alpha_2\,v+\alpha_3\,v+4\,\alpha_4\,v+16\,\alpha_5\,v)\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\;|\alpha}{}^{|\alpha}+\\
&\left(\frac{-\beta_1\,v}{2}-\frac{\beta_2\,v}{2}-2\,\beta_3\,v-8\,\beta_4\,v-\frac{\gamma_1\,v}{2}-\frac{\gamma_2\,v}{2}-2\,\gamma_3\,v-8\,\gamma_4\,v\right)\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu}+\\
&\left(\frac{-\beta_1\,v}{2}-\frac{\beta_2\,v}{2}-2\,\beta_3\,v-8\,\beta_4\,v-\frac{\gamma_1\,v}{2}-\frac{\gamma_2\,v}{2}-2\,\gamma_3\,v-8\,\gamma_4\,v\right)\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu}=0 \quad .
\end{aligned}
$$

Zu dieser Higgsfeldgleichung wird ein Divergenzterm mit den folgenden Symmetrieeigenschaften addiert[2]:

$$
\begin{aligned}
\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} &:= \overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}+A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma} \qquad (4.17)\\
A_{\mu\nu\sigma} &= -v\,\epsilon_{\,[\nu\rho}\,\epsilon_{\mu}{}^{\rho}{}_{|\sigma]}-v\,\epsilon_{\mu\rho}\,\epsilon_{\,[\nu}{}^{\rho}{}_{|\sigma]}-v\,\epsilon_{\rho}{}^{\gamma}\,\eta_{\mu[\nu}\,\epsilon_{\sigma]}{}^{\rho}{}_{|\gamma}-v\,\epsilon_{\,[\sigma\rho}\,\eta_{\mu\nu]}\,\epsilon^{\rho\gamma}{}_{|\gamma}
\end{aligned}
$$

wobei: $\qquad A_{\mu[\nu\sigma]}=A_{\mu\nu\sigma} \quad , \quad A_{(\mu\nu)\sigma}{}^{|\sigma}=A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma} \quad , \quad A_{(\mu\nu)\sigma}\neq A_{\mu\nu\sigma} \quad .$

Man kann zeigen (siehe Kapitel 7), daß dieser Divergenzterm den Energie–Impuls–Erhaltungssatz nicht ändert und daß bei einer Beschränkung auf Gravitations– bzw. Higgsfeldwellen der Divergenzterm trivial Null ist, falls man eine Mittelung über "kleine"[3] Raumzeit–Bereiche vornimmt. Obwohl es nach diesen Eigenschaften den Anschein hat, daß der Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}$ zu vernachlässigende physikalische Auswirkungen hat, ändert er die Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder, was bedeutet, daß die Differentialgleichungen $\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}$ und $\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}$ sich unterscheiden.

Es wird nun gezeigt, daß sich die Gleichung $\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}$, die im folgenden ebenfalls Higgsfeldgleichung genannt wird, bei geeigneter Parameterwahl gleich der zweiten Ordnung der Einsteingleichung in Einsteineichung ist.

Die Einsteingleichung der materiefreien Raumzeit in zweiter Ordnung mit Einsteineichung lautet:

$$
\begin{aligned}
\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} \;=\; & -\left(\frac{B^2}{2}-F\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu}{}^{|\beta}-\frac{B^2\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta\;|\alpha}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu\;|\beta}}{2}-\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu\;|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\mu}}{2}-\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}}{2}+\\
& \frac{A\,B\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\;|\alpha}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}}{2}-\left(\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}-\left(\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu\;|\mu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta}+\\
& \frac{A\,B\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\;|\alpha|\beta}}{2}-\frac{A\,B\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\nu}}{2}-\frac{A\,B\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\mu}}{2}+\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}{}^{|\beta}}{2}+ \qquad (4.18)\\
& \frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\beta}{}^{|\beta}}{2}-\frac{B^2\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\mu|\nu}}{4}-\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta\mu\;|\alpha|\nu}}{2}-\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta\nu\;|\alpha|\mu}}{2}-\\
& \frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta|\mu}}{2}-\frac{F\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta|\nu}}{2}+\frac{E\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\;|\alpha}{}^{|\alpha}}{2}-\frac{E\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu}}{2}-\frac{E\;\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu}}{2}=0 \quad .
\end{aligned}
$$

Um die Gleichheit der mit v dividierten Higgsfeldgleichung $\frac{1}{v}\;\overset{(2)}{H}{}_{\mu\nu}=0$ mit der Einsteingleichung

[2] Zur Interpretation des Divergenzterms $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ siehe (Anhang 7, Kapitel 5.3 und Kapitel 5.4).

[3] Zur Definition dieser "Kleinheit" siehe Kapitel 5.4.

$\overset{(2)}{R}_{\mu\nu}= 0$ zu veranschaulichen, subtrahiert man beide Gleichungen voneinander und faßt Terme von gleicher Struktur zusammen.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{v}\,\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} - \overset{(2)}{R}_{\mu\nu} \;=\;& (-\gamma_1 - 2\gamma_2)\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \left(\frac{-B^2}{2} - \beta_1 - 2\beta_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta\,|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\beta} + \\
& \left(1 + \frac{B^2}{2} - F + \alpha_2 + \alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta} + \left(-\frac{A\,B}{2} + 2\alpha_1 + 2\alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{A\,B}{2} + \frac{F}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{A\,B}{2} + \frac{F}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{F}{2} + \frac{\beta_1}{2} + \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\mu} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{F}{2} + \frac{\beta_1}{2} + \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}^{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\nu} + \\
& \left(\frac{1}{2} + \beta_3 + 8\beta_4\right) \eta_{\mu\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta\,|\gamma}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{|\beta} + \left(\frac{1}{2} + \gamma_3 + 8\gamma_4\right) \eta_{\mu\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + \\
& \left(-\frac{A\,B}{2} + 2\alpha_1 + 2\alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu\,|\alpha|\beta} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} + \\
& \left(-\frac{F}{2} + \alpha_2 + \alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}\, \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}{}^{|\beta}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} + \qquad (4.19) \\
& \left(-\frac{F}{2} + \alpha_2 + \alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\, \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu\,|\beta}{}^{|\beta}} + \left(\frac{B^2}{4} + \alpha_1 + \alpha_3\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\mu|\nu} + \\
& (\alpha_4 + 8\alpha_5)\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \eta_{\mu\nu}\, \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}{}^{|\gamma}} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \eta_{\mu\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{|\beta|\gamma} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{A\,B}{2} + \frac{F}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta\mu\,|\alpha|\nu} + \\
& \left(-\frac{1}{2} + \frac{A\,B}{2} + \frac{F}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \beta_2 - \frac{\gamma_1}{2} - \gamma_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta\nu\,|\alpha|\mu} + \frac{F\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta|\mu}}{2} + \\
& \frac{F\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta|\nu}}{2} + \left(-\frac{E}{2} + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 4\alpha_4 + 16\alpha_5\right) \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu\,|\alpha}{}^{|\alpha} + \\
& \left(\frac{E}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2} - 2\beta_3 - 8\beta_4 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2} - 2\gamma_3 - 8\gamma_4\right) \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} + \\
& \left(\frac{E}{2} - \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_2}{2} - 2\beta_3 - 8\beta_4 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\gamma_2}{2} - 2\gamma_3 - 8\gamma_4\right) \overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

In den unterstrichenen Termen der Gleichung (4.19) benutzt man nun den sich aus der Differentialgleichung der ersten Ordnung (siehe (4.14)) ergeben Zusammenhang: $\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\,\nu\,|\alpha}{}^{|\alpha} = 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{(\mu\;|\nu)\,|\alpha}$:

$$
\frac{1}{v}\,\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} - \overset{(2)}{R}_{\mu\nu} \;=\; (-\gamma_1 - 2\gamma_2)\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \left(-\frac{B^2}{2} - \beta_1 - 2\beta_2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta\,|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\beta} +
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(1+\frac{B^2}{2}-F+\alpha_2+\alpha_3\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta}+\left(-\frac{A\,B}{2}+2\,\alpha_1+2\,\alpha_3\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2+\frac{\gamma_1}{2}+\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2+\frac{\gamma_1}{2}+\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{F}{2}+\frac{\beta_1}{2}+\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\mu}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{F}{2}+\frac{\beta_1}{2}+\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\nu}+\\
&\left(\frac{1}{2}+\beta_3+8\,\beta_4\right)\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta|\gamma}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\gamma}{}^{\alpha}{}_{|\beta}+\left(\frac{1}{2}+\gamma_3+8\,\gamma_4\right)\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma}+ \qquad (4.20)\\
&\left(-\frac{A\,B}{2}+2\,\alpha_1+2\,\alpha_3\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha|\beta}+\\
&\left(\frac{1}{2}-\frac{F}{2}+\alpha_2+\alpha_3-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}+\\
&\left(\frac{1}{2}-\frac{F}{2}+\alpha_2+\alpha_3-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}_{|\beta|\nu}+\\
&\left(-\frac{1}{2}+\frac{A\,B}{2}+\frac{F}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\beta_2-\frac{\gamma_1}{2}-\gamma_2\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\beta|\mu}+\\
&\left(\frac{B^2}{4}+\alpha_1+\alpha_3\right)\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu|\nu}+(\alpha_2+\alpha_3)\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta|\mu}+\\
&(\alpha_2+\alpha_3)\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta|\nu}+(1+2\,\alpha_4+16\,\alpha_5)\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{|\beta|\gamma}+\\
&\left(\frac{-E}{2}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+4\,\alpha_4+16\,\alpha_5\right)\overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha}{}^{|\alpha}+\\
&\left(\frac{E}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta_2}{2}-2\,\beta_3-8\,\beta_4-\frac{\gamma_1}{2}-\frac{\gamma_2}{2}-2\,\gamma_3-8\,\gamma_4\right)\overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu}+\\
&\left(\frac{E}{2}-\frac{\beta_1}{2}-\frac{\beta_2}{2}-2\,\beta_3-8\,\beta_4-\frac{\gamma_1}{2}-\frac{\gamma_2}{2}-2\,\gamma_3-8\,\gamma_4\right)\overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu}=0 \quad .
\end{aligned}
$$

Die einzelnen Terme dieser Gleichung sind trivial Null, falls man an die Parameterwerte $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \gamma_4)$ die folgenden Forderungen stellt:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=\frac{-B^2-4\,\alpha_3}{4}\quad,\quad \alpha_2=-\alpha_3\quad,\quad \alpha_4=\frac{-4+B^2+4\,\alpha_3+2\,E}{8}\\
&\alpha_5=\frac{8-B^2-4\,\alpha_3-2\,E}{64}\\
&\beta_1=\frac{-B^2-4\,\beta_2}{2}\quad,\quad \beta_3=\frac{1-16\,\beta_4}{2} \qquad (4.21)\\
&\gamma_1=-2\gamma_2\quad,\quad \gamma_3=\frac{-6+B^2+2\,\beta_2+32\,\beta_4+2\,E+2\,\gamma_2}{4}
\end{aligned}
$$

$$\gamma_4 = \frac{8 - B^2 - 2\,\beta_2 - 32\,\beta_4 - 2\,E - 2\,\gamma_2}{32} \quad .$$

Bemerkenswert ist, daß man außer diesen Forderungen weitere Forderungen an die Metrik–Koeffizienten (A,B,F) zu stellen hat

$$B = -A \quad , \quad 2\,F = -2 + B^2 \tag{4.22}$$

und diese einerseits mit der später definierten effektiven Metrik ${}^{e}g^{\mu\nu}$ und andererseits mit den Eigenschaften (4.13) in Einklang stehen.

Es wurde demnach gezeigt, daß bei geeigneter Parameterwahl (4.21) und (4.22) die Higgsfeldgleichung $\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}$ mit der zweiten Ordnung der Einsteingleichung in Einsteineichung übereinstimmt. Die eigentliche Higgsfeldgleichung $\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}$, die den symmetrischen Teil der zweiten Ordnung der Bewegungsgleichung der Higgsfelder darstellt, unterscheidet sich demnach von der Einsteingleichung in zweiter Ordnung gerade durch den Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$.

4.4 Möglicher Satz von Parameterwerten

Da die im vorigen Kapitel betrachteten Gleichungen der zweiten Ordnung aufgrund der großen Anzahl der Parameterwerte ($\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4$,A,B,F,E) sehr lang und unübersichtlich erschienen, werden in diesem Kapitel die Parameterwerte unter den Bedingungen (4.21) fest gewählt, um die Gleicheit der zweiten Ordnungen explizit zu zeigen.

Wählt man z.B. im Einklang mit (4.21) den folgenden Satz von Parameterwerten

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = -1 \quad , \quad \alpha_4 = 1/2 \quad , \quad \beta_1 = -2 \quad , \quad \beta_3 = 1/2 \quad , \quad \gamma_3 = 1/2 \\ \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = \beta_2 = \beta_4 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 0 \quad , \end{array}$$

und betrachtet nun die Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung und wendet nacheinander das folgende an:

- Symmetrisierung in den freien Indizes
- Folgerungen (4.10)
- Addition des Divergenzterms (4.17)
- Verwendung der Differentialgleichung erster Ordnung

so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v}\,\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} = {} & 2\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}^{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu|\beta} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta} - 2\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \frac{3\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}}{2} + \frac{3\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}}{2} - \\ & \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\mu}}{2} - \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\nu}}{2} - 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu|\alpha|\beta} + \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}{2} + \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}{2} + \\ & \frac{3\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu|\beta|\nu}}{2} + \frac{3\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu|\beta|\mu}}{2} - \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta|\mu|\nu} + \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu|\alpha}{}^{|\alpha} - \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} - \overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.23}$$

Auf der anderen Seite berechnet man die Einsteingleichung der materiefreien Raumzeit. Benutzt man die Parameterwerte (A,B) der effektiven Metrik

$$A = 2 \quad , \quad B = -2 \quad ,$$

die sich durch Bildung des WKB-Limes der iterierten Diracgleichung ergeben (siehe Anhang B) und die mit den Forderungen (4.22) übereinstimmen, und wählt im Einklang mit den Forderungen (4.22)

$$E = 2 \quad , \quad F = 1 \quad , \tag{4.24}$$

so erhält man für die Einsteingleichung in Einsteineichung in zweiter Ordnung :

$$\begin{aligned} \overset{(2)}{R}_{\mu\nu} \;=\;& 2\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\beta} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta} - 2\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \frac{3\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}}{2} + \frac{3\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}}{2} - \\ & \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}^{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\mu}}{2} - \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}^{|\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\nu}}{2} - 2\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha|\beta} + \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}{2} + \frac{\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}{2} + \\ & \frac{3\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}_{|\beta|\nu}}{2} + \frac{3\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\beta|\mu}}{2} - \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu|\nu} + \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha}{}^{|\alpha} - \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} - \overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ein Vergleich der Higgsfeldgleichung (4.23) mit der Einsteingleichung (4.25) zeigt folglich, daß beide Gleichungen identisch sind.

Kapitel 5

Der Energie–Impulstensor des Gravitationsfeldes

5.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel werden zunächst einige klassischen Definitionen des Energie–Impulstensors des Gravitationsfeldes vorstellt und deren Unterschiede und Gemeinsamkeiten aufzeigt.
Anschließend wird der symmetrische, kanonische Energie–Impulstensor des Higgsfeldes berechnet und dieser um den Grundzustand des Higgsfeldes entwickelt. Mit Hilfe dieses Energie–Impulstensors des Higgsfeldes wird gezeigt, daß man die Higgsfeldgleichung so umformulieren kann, daß die zweite Ordnung des kanonischen Energie–Impulstensors des Higgsfeldes als Quelle einer Dynamik der angeregten Higgsfelder auftritt. Um diese Eigenschaft der Higgsfeldgleichung möglich zu machen, werden die schon leicht eingeschränkten Parameterwerte $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ (siehe (4.21)) noch weiter einschränkt werden müssen.
Im letzten Unterkapitel beschränken wir uns auf Gravitationswellen (bzw. Higgsfeldwellen). Aufgrund dieser Einschränkung werden durch einen Mittelungsprozeß die zweiten Ordnungen der Higgsfeldgleichung und des Energie–Impulstensor des Higgsfeldes enorm vereinfacht. Man wird sehen, daß die nach der Mittelung entstehenden Differentialgleichungen für die Metrik und das Higgsfeldes identisch sind und daß sich der Energie–Impulstensor der Gravitations– bzw. Higgsfeldwelle nicht voneinander unterscheiden.

5.2 Klassische Formulierungen des Energie–Impulstensor

Die Feldgleichung und der EIST-Erhaltungssatz der ART lauten:

$$R_{\mu\nu} \quad = \quad -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T \, g_{\mu\nu} \right) \quad , \quad T_{\mu\nu}{}^{||\nu} = 0 \quad .$$

In der Einsteinschen Gravitationstheorie ist die Quelle des Gravitationsfeldes der EIST $T_{\mu\nu}$, der sich aus jeglichen Energieformen zusammensetzt, mit Ausnahme der Gravitationsenergie selbst. Den Erhaltungssatz des EIST kann man bei Anwesenheit des Gravitationsfeldes in differentieller Formulierung durch $T_{\mu\nu}{}^{||\nu} = 0$ darstellen, wobei ${}^{||\nu}$ die kovariante Ableitung mit denen durch die Metrik gebildeten Cristoffel-Symbolen darstellt. Man kann nun die Einsteingleichungen so umformulieren, daß man durch Definition eines Pseudo-Energie-Impulstensor $t_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes[1], zu einem Gesamt-EIST ${}^{E}T_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$ (Einstein-Komplex) gelangt, für den der Erhaltungssatz ${}^{E}T_{\mu\nu}{}^{|\nu} = 0$ gilt.

[1]Die Bezeichnung "Pseudo" kommt daher, daß $t_{\mu\nu}$ kein echter Tensor ist, d.h. er transformiert sich unter Koordinatentransformation nicht tensoriell (siehe [2], S:465).

In der Standard-Literatur existieren unterschiedliche Definitionen des Pseudo-Energie-Impulstensor $t_{\mu\nu}$, die jedoch alle die Gemeinsamkeit ${}^{E}T_{\mu\nu}{}^{|\nu} = 0$ besitzen.

Im Landau/Lifschitz (siehe [1], S:362) erscheint z.B. folgende Definition:

$$ {}^{L}H^{\mu\nu\alpha}{}_{|\alpha} = (-g)\left(T^{\mu\nu} + {}^{L}t^{\mu\nu}\right) \tag{5.1}$$

$$\text{mit:} \quad {}^{L}H^{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{16\pi G}\left((-g)\left(g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\right)\right)_{|\beta}$$

$$ {}^{L}H^{\mu[\nu\alpha]} = {}^{L}H^{\mu\nu\alpha} \quad , \quad {}^{L}H^{(\mu\nu)\alpha}{}_{|\alpha} = {}^{L}H^{\mu\nu\alpha}{}_{|\alpha} \quad .$$

Der so definierte Pseudo-EIST ${}^{L}t_{\mu\nu}$ des Gravitationsfeldes ist symmetrisch, und besitzt die Eigenschaft bei Entwicklung der Metrik um die Minkowski-Metrik nach (3.19) von mindestens quadratischer Ordnung in $h_{\mu\nu}$ zu sein. Desweiteren hat diese Definition die Eigenschaft, keine zweiten Differentiale in $h_{\mu\nu}$ zu enthalten.

Entwickelt man die Metrik $g^{\mu\nu}$ um die Minkowski–Metrik $\eta_{\mu\nu}$ (3.19) und faßt die unterschiedlichen Ordnungen in der Einsteingleichung zusammen so ist für diesen Fall eine geeignete Definition des Pseudo-EIST im Misner/Thorne/Wheeler (siehe [2], S:465)[2] zu finden:

$$ {}^{M}H^{\mu\alpha\nu\beta}{}_{|\alpha|\beta} = 16\pi\left(T_{\mu\nu} + {}^{M}t_{\mu\nu}\right) \tag{5.2}$$

$$\text{wobei :} \quad {}^{M}H^{\mu\alpha\nu\beta} = -\left(\bar{h}^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta} + \bar{h}^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} - \bar{h}^{\alpha\nu}\eta^{\mu\beta} - \bar{h}^{\mu\beta}\eta^{\alpha\nu}\right)$$

$$ {}^{M}H^{\mu\alpha\nu\beta} = {}^{M}H^{[\mu\alpha][\nu\beta]} \quad , \quad {}^{M}H^{\mu[\alpha\nu\beta]} = 0 \quad , \quad \bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\sigma}{}^{\sigma} \quad .$$

Bei dieser Aufteilung der Einsteingleichung ist es ersichtlich, daß die quadratische Ordnung der Higgsfeldgleichung die maßgeblich bestimmenden Terme des Pseudo-EIST des Gravitationsfeldes widerspiegelt.

T. Fliessbach [19] formuliert diese Eigenschaft des Pseudo–EIST, sich hauptsächlich aus zweiten Ordnungen zusammenzusetzen noch direkter, indem er den Energie–Impulstensor des Gravitationsfeldes den zweiten Ordnungen der Einsteingleichung gleichsetzt und höhere Terme vernachlässigt:

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(1)}{R}\,\eta_{\mu\nu} &= -8\pi G\left(T_{\mu\nu} + {}^{FL}t_{\mu\nu}\right) \\ \text{wobei :} \quad {}^{FL}t_{\mu\nu} &= \frac{1}{8\pi G}\left(\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overset{(2)}{R}\,g_{\mu\nu}\right) \quad . \end{aligned}$$

Diese Definition hat jedoch den Nachteil, daß der angestrebte Erhaltungssatz $\left(T_{\mu\nu} + {}^{FL}t_{\mu\nu}\right)^{|\nu} = 0$ nur in Näherung erfüllt ist.

A. Einstein definiert in [18] den folgenden Energie–Impulstensor des Gravitationsfeldes in Einsteineichung ($\sqrt{-g} = 1$) für den materiefreien Fall:

[2] Man beachte hier die Wahl des Maßsystems, die in diesem Buch durchgängig gewählt wird.

$$\begin{aligned}
\left(g^{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\right)_{|\alpha} &= -\kappa\left(t^{\sigma}_{\mu} - \frac{1}{2}t\delta^{\sigma}_{\mu}\right) \quad , \quad \sqrt{-g} = 1 \\
t^{\alpha}_{\sigma} &= \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\sigma} g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\lambda} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma} \quad .
\end{aligned}$$

Eine interessante Definition des Pseudo-EIST findet man im De Felice/Clarke (siehe [6], S:202):

$$S^{\nu\alpha}_{\mu}{}_{|\alpha} = -8\pi G\sqrt{-g}\left(T^{\nu}_{\mu} + {}^{F}t_{\mu}{}^{\nu}\right) \tag{5.3}$$

mit:

$$\begin{aligned}
&S^{\nu\alpha}_{\mu} = -2\,g^{\beta\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\beta}{}_{|\alpha}} \quad , \quad \mathcal{L}_{R_o} = -\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\,\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}\right) \\
&{}^{F}t_{\mu}{}^{\nu} = \frac{1}{16\pi G\sqrt{-g}}\left(\mathcal{L}_{R_o}\delta_{\mu}{}^{\nu} - g^{\beta\alpha}{}_{|\mu}\,\frac{\partial\mathcal{L}_{R_o}}{\partial g^{\beta\alpha}{}_{|\nu}}\right) \\
&S^{(\mu\nu)\alpha} = S^{\mu\nu\alpha} \quad , \quad S^{(\mu\nu)\alpha}{}_{|\alpha} \neq S^{\mu\nu\alpha}{}_{|\alpha} \quad \leftrightarrow \quad {}^{F}t^{(\mu\nu)} \neq {}^{F}t^{\mu\nu} \quad .
\end{aligned}$$

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{R_o}$ ergibt sich aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}_R = \sqrt{-g}\,R$, indem man zu $\mathcal{L}_R$ Divergenzen addiert, da solche Terme die Feldgleichungen nicht verändern (siehe [7], S:88). Diese Definition des Pseudo-EIST ist insofern interessant, da sie eine gewisse Konsistenz der Einsteingleichung aufzeigt. Faßt man die linke Seite der Gleichung (5.3) als eigentliche Dynamik des Gravitationsfeldes auf, so ist die rechte Seite die gesamte Quelle dieser Dynamik; diese Quelle setzt sich zusammen aus dem metrischen EIST der Materie und dem kanonischen EIST des Gravitationsfeldes. Es treten also im Gegensatz zu den anderen Definitionen keine willkürlich festgelegten $t_{\mu\nu}$'s auf, sondern es erscheint der kanonische EIST des Gravitationsfeldes als selbstwechselwirkende Quelle der Bewegungsgleichung der Metrik. Der Pseudo–Energie–Impulstensor ${}^{F}t^{\mu\nu}$ besitzt jedoch die Eigenschaft, nicht symmetrisch zu sein, so daß ihm nicht der gleiche Stellenwert wie den anderen in der Einsteingleichung auftretenden metrischen Energie–Impulstensoren zukommt.

Im nächsten Unterkapitel wird gezeigt werden, daß die Konsistenzeigenschaft die in der Formulierung der Einsteingleichungen nach Art von De Felice/Clarke erscheint ebenfalls für den symmetrischen Teil der Higgsfeldgleichung erfüllt ist. Als Quelle der Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder erscheint hier der symmetrisierte kanonische Energie–Impulstensor des Higgsfeldes.

5.3 Der kanonische EIST des Higgsfeldes

Der kanonische Energie-Impulstensor des Higgsfeldes $T_{\mu\nu}(\tilde{\gamma})$ berechnet sich aus der verallgemeinerten Lagrangedichte $\mathcal{L}_{H_e}$ durch folgenden Ausdruck:

$$T_{\mu}{}^{\nu}(\tilde{\gamma}) \quad = \quad \left(\frac{\partial\mathcal{L}_{H_e}}{\partial\tilde{\gamma}^{\alpha}{}_{A}{}^{B}{}_{|\nu}}\right)\tilde{\gamma}^{\alpha}{}_{A}{}^{B}{}_{|\mu} - \mathcal{L}_{H_e}\,\delta_{\mu}{}^{\nu} \quad .$$

Entwickelt man in diesem EIST die verallgemeinerten $\tilde{\gamma}$–Matrizen um ihren Grundzustand (4.8) und trennt die verschiedenen Ordnungen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\overset{(0)}{T}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma}) &= -\frac{3\,\mu^4}{\lambda}\,\eta_{\mu\nu} \qquad (5.4)\\
\overset{(1)}{T}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma}) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{T}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma}) \;=\; & \left(\frac{-\gamma_1\, v^2}{4} - \frac{\gamma_2\, v^2}{4} - \gamma_3\, v^2 - 4\,\gamma_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \\
& \left(\frac{\beta_1\, v^2}{8} + \frac{\beta_2\, v^2}{8} + \frac{\beta_3\, v^2}{2} + 2\,\beta_4\, v^2\right) \eta_{\mu\nu}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}^{|\gamma}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\gamma}{}^{\beta\,|\alpha} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\, v^2}{4} - \frac{\beta_2\, v^2}{4} - \beta_3\, v^2 - 4\,\beta_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\beta}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \\
& \left(\frac{\alpha_1\, v^2}{4} + \frac{\alpha_2\, v^2}{4} + \frac{\alpha_3\, v^2}{4} + \alpha_4\, v^2 + 4\,\alpha_5\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\nu}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \\
& \left(\frac{-\alpha_1\, v^2}{8} - \frac{\alpha_2\, v^2}{8} - \frac{\alpha_3\, v^2}{8} - \frac{\alpha_4\, v^2}{2} - 2\,\alpha_5\, v^2\right) \eta_{\mu\nu}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}^{|\gamma}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} + \\
& \left(\frac{\gamma_1\, v^2}{8} + \frac{\gamma_2\, v^2}{8} + \frac{\gamma_3\, v^2}{2} + 2\,\gamma_4\, v^2\right) \eta_{\mu\nu}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta\gamma}{}_{|\gamma} \quad .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Wie man an Gleichung (5.4) sieht, verschwindet die nullte Ordnung des kanonischen EIST's des Higgsfeldes nicht, sondern wird durch eine raumzeitlich konstante Größe bestimmt, die ihren Ursprung im Higgspotential hat. Man kann diesen konstanten Energie–Impulsbetrag durch Umnormierung des Higgspotentials zum Verschwinden bringen (siehe [5], S:44). Falls man jedoch wie in Gleichung (5.4) keine Umnormierung vornimmt, so ist dieser konstante Term als kosmologische Konstante zu interpretieren.
Daß die erste Ordnung des kanonischen EIST's verschwindet und die zweite nicht, ist bei Betrachtung der Higgsfeld–Lagrangedichte $\mathcal{L}_{H_e}$ leicht einsehbar und ist typisch für gravitationsähnliche Wechselwirkungen.

Spurt man die freien Indizes $_{\mu\nu}$ der Gleichung (5.5) ab, so erhält man den Energie-Impuls-Skalar T:

$$\begin{aligned}
\overset{(0)}{T}(\tilde{\gamma}) \;=\; & -\frac{12\,\mu^4}{\lambda} \\
\overset{(1)}{T}(\tilde{\gamma}) \;=\; & 0 \\
\overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma}) \;=\; & \left(\frac{-\alpha_1\, v^2}{4} - \frac{\alpha_2\, v^2}{4} - \frac{\alpha_3\, v^2}{4} - \alpha_4\, v^2 - 4\,\alpha_5\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta\,|\gamma} + \\
& \left(\frac{\gamma_1\, v^2}{4} + \frac{\gamma_2\, v^2}{4} + \gamma_3\, v^2 + 4\,\gamma_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + \\
& \left(\frac{\beta_1\, v^2}{4} + \frac{\beta_2\, v^2}{4} + \beta_3\, v^2 + 4\,\beta_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma\,|\beta} \quad .
\end{aligned}$$

Daraus ergiebt sich die folgende Größe:

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{T}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\,\overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu} \;=\; & \left(\frac{-\beta_1\, v^2}{4} - \frac{\beta_2\, v^2}{4} - \beta_3\, v^2 - 4\,\beta_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha\,|\beta}\; \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\mu} + \\
& \left(\frac{\alpha_1\, v^2}{4} + \frac{\alpha_2\, v^2}{4} + \frac{\alpha_3\, v^2}{4} + \alpha_4\, v^2 + 4\,\alpha_5\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\mu}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} + \\
& \left(\frac{-\gamma_1\, v^2}{4} - \frac{\gamma_2\, v^2}{4} - \gamma_3\, v^2 - 4\,\gamma_4\, v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\mu}\; \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} \quad .
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Symmetrisiert man die Gleichung (5.6) in ihren freien Indizes $_{\mu\nu}$ so folgt:

$$
\begin{aligned}
\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu} \;=\; & \left(\frac{-\beta_1\,v^2}{8} - \frac{\beta_2\,v^2}{8} - \frac{\beta_3\,v^2}{2} - 2\,\beta_4\,v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha\;|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\mu} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\,v^2}{8} - \frac{\beta_2\,v^2}{8} - \frac{\beta_3\,v^2}{2} - 2\,\beta_4\,v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha\;|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\nu} + \\
& \left(\frac{\alpha_1\,v^2}{4} + \frac{\alpha_2\,v^2}{4} + \frac{\alpha_3\,v^2}{4} + \alpha_4\,v^2 + 4\,\alpha_5\,v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\mu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} + \\
& \left(\frac{-\gamma_1\,v^2}{8} - \frac{\gamma_2\,v^2}{8} - \frac{\gamma_3\,v^2}{2} - 2\,\gamma_4\,v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \\
& \left(\frac{-\gamma_1\,v^2}{8} - \frac{\gamma_2\,v^2}{8} - \frac{\gamma_3\,v^2}{2} - 2\,\gamma_4\,v^2\right) \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu\;|\mu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} \quad .
\end{aligned}
$$

Ähnlich[3] wie in der Definition des Pseudo–EIST's von De Felice/Clarke (5.3), sollte es auch bei der Higgsfeldgleichung möglich sein, sie auf folgende Form zu bringen:[4]

$$
\left({}^{H}S_{\mu\nu}{}^{\alpha}\right)_{|\alpha} = \frac{\kappa}{v^2}\left(T_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\,T(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad . \tag{5.7}
$$

Der symmetrische, kanonische EIST des Higgsfeldes wäre somit Quelle einer Bewegungsgleichung des Higgsfeldes.

Schreibt man die Gleichung (4.16) um, so lautet die symmetrisierte Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung:

$$
\begin{aligned}
& (-\gamma_1\,v - 2\,\gamma_2\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\beta} + (\alpha_2\,v + \alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu}{}^{|\beta} + \\
& \underbrace{(-\beta_1\,v - 2\,\beta_2\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta\;|\alpha}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu\;|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{(2\,\alpha_1\,v + 2\,\alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}}_{\{1\}} + \\
& (\gamma_3\,v + 8\,\gamma_4\,v)\;\eta_{\mu\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + (\beta_3\,v + 8\,\beta_4\,v)\;\eta_{\mu\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\gamma}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma\;|\beta} + \\
& \underbrace{(2\,\alpha_1\,v + 2\,\alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\;|\alpha|\beta}}_{\{1\}} + \underbrace{\left(\frac{-\beta_1\,v}{2} - \beta_2\,v - \frac{\gamma_1\,v}{2} - \gamma_2\,v\right)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\nu}}_{\{3\}} + \\
& \underbrace{\left(\frac{-\beta_1\,v}{2} - \beta_2\,v - \frac{\gamma_1\,v}{2} - \gamma_2\,v\right)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{\left(\frac{-(\beta_1\,v)}{2} - \beta_2\,v - \frac{\gamma_1\,v}{2} - \gamma_2\,v\right)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\mu}}_{\{3\}} + \\
& (\alpha_2\,v + \alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}{}^{|\beta} + \underbrace{\left(\frac{-(\beta_1\,v)}{2} - \beta_2\,v - \frac{\gamma_1\,v}{2} - \gamma_2\,v\right)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}_{\{2\}} + \\
& (\alpha_2\,v + \alpha_3\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\mu\;|\beta}{}^{|\beta} + (\alpha_4\,v + 8\,\alpha_5\,v)\;\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\;\eta_{\mu\nu}\;\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\;|\gamma}{}^{|\gamma} +
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

[3]Zu den formalen Unterschieden dieser Gleichung mit der klassischen Formulierung von De Felice/Clarke siehe Diskussion am Ende des Kapitels.

[4]Der Parameter κ stellt einen noch offenen Kopplungsparameter dar.

$$
\begin{aligned}
& (\alpha_1\, v + \alpha_2\, v + \alpha_3\, v + 4\,\alpha_4\, v + 16\,\alpha_5\, v)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu\ |\alpha}{}^{|\alpha} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} = \\
= \quad & -(\alpha_1\, v + \alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\mu|\nu} - \\
& - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\mu} - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \gamma_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\nu} - \\
& - \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v + \frac{\gamma_1\, v}{2} + \gamma_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu\ |\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v + \frac{\gamma_1\, v}{2} + \gamma_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\ |\mu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit diese Gleichung plus dem Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ gleich der Einsteingleichung in zweiter Ordnung (4.18) ist, mußte man unter anderem die Forderungen $\alpha_2 = -\alpha_3$, $\gamma_1 = -2\gamma_2$ an die Parameterwerte verwenden (siehe (4.21)); dies benutzen wir auch hier. Die unterstrichenen Terme $(\{1\}, \{2\}, \{3\})$ der Gleichung (5.8) kann man, wie wir in der folgenden Gleichung sehen werden, direkt als Divergenzen schreiben:

$$
\begin{aligned}
& (\gamma_3\, v + 8\,\gamma_4\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma} + (\beta_3\, v + 8\,\beta_4\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\gamma}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma\ |\beta} + \\
& \underbrace{(\alpha_4\, v + 8\,\alpha_5\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\gamma}{}^{|\gamma}}_{\{4\}} + \\
& \Bigg(\underbrace{(2\,\alpha_1\, v + 2\,\alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu\ |\beta}}_{\{1\}} + \underbrace{\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\nu}}_{\{3\}} + \underbrace{\left(\frac{-(\beta_1\, v)}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\mu}}_{\{3\}} + \\
& \underbrace{\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{\left(\frac{-(\beta_1\, v)}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta}}_{\{2\}} + \\
& (\alpha_1\, v + \alpha_2\, v + \alpha_3\, v + 4\,\alpha_4\, v + 16\,\alpha_5\, v)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu} + \\
& \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu} \Bigg)_{|\alpha} = \\
= \quad & -(\alpha_1\, v + \alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\mu|\nu} - \\
& - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\mu} - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\ |\nu} - \\
& - \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu\ |\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\ |\mu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \\
& + \underbrace{\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\nu}}_{\{3\}} + \underbrace{\left(\frac{-(\beta_1\, v)}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{|\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\mu}}_{\{3\}} \quad .
\end{aligned}
$$

Die letzten vier Terme dieser Gleichung heben sich gegeneinander auf.
Verwendet man in dem Term, der mit $\{4\}$ gekennzeichnet ist, die erste Ordnung, so kann man die ersten drei Terme ebenfalls als Divergenz schreiben, falls man folgende zusätzliche Forderung an die Parameterwerte stellt: $(\alpha_4 + 8\alpha_5 = \gamma_3 + 8\gamma_4 = \beta_3 + 8\beta_4)$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg((\alpha_4\, v + 8\,\alpha_5\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta}{}^{\gamma}{}_{|\gamma} + (\alpha_4\, v + 8\,\alpha_5\, v)\ \eta_{\mu\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\gamma}{}_{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha}{}_{\beta\ |\gamma} + \\
&(2\,\alpha_1\, v + 2\,\alpha_3\, v)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\ |\beta} + \left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\nu} + \left(\frac{-(\beta_1\, v)}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\beta}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\mu} + \\
&\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta} + \left(\frac{-(\beta_1\, v)}{2} - \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta} + \\
&(\alpha_1\, v + \alpha_2\, v + \alpha_3\, v + 4\,\alpha_4\, v + 16\,\alpha_5\, v)\ \overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu\nu}{}^{|\alpha} + \\
&\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\nu} + \\
&\left(\frac{-\beta_1\, v}{2} - \frac{\beta_2\, v}{2} - 2\,\beta_3\, v - 8\,\beta_4\, v - \frac{\gamma_1\, v}{2} - \frac{\gamma_2\, v}{2} - 2\,\gamma_3\, v - 8\,\gamma_4\, v\right)\ \overset{(2)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\mu} \Bigg)_{|\alpha} = \\
= \; & -(\alpha_1\, v + \alpha_3\, v)\ \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\mu|\nu}} - \\
& - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\mu} - \left(\frac{\beta_1\, v}{2} + \beta_2\, v\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\nu} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Dividiert man diese Gleichung durch $-v$ und verwendet in dem markierten Term der Gleichung (5.9) die Eigenschaften (4.10) der angeregten Higgsfelder, so läßt sich (5.9) wie folgt schreiben:

$$
\begin{aligned}
\left({}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha} \right)_{|\alpha} &= -(\alpha_1 + \alpha_3)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\mu} + \\
&+ \left(\frac{\beta_1}{2} + \beta_2\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\mu} + \left(\frac{\beta_1}{2} + \beta_2\right)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha\ |\beta}\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta\ |\nu} \quad .
\end{aligned}
$$

Damit nun diese Gleichung sich wie (5.7) schreiben läßt muß man weitere Forderungen an die Parameterwerte stellen

$$
\begin{aligned}
\frac{\gamma_1}{8} + \frac{\gamma_2}{8} + \frac{\gamma_3}{2} + 2\,\gamma_4 &\overset{!}{=} 0 \\
\kappa \left(\frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{4} + \alpha_4 + 4\,\alpha_5\right) &\overset{!}{=} -(\alpha_1 + \alpha_3) \\
\kappa \left(-\frac{\beta_1}{8} - \frac{\beta_2}{8} - \frac{\beta_3}{2} - 2\,\beta_4\right) &\overset{!}{=} \frac{\beta_1}{2} + \beta_2 \qquad ,
\end{aligned}
$$

die dann mit den alten Forderungen (4.21) in die folgende Lösung resultieren:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = \frac{B^2}{4} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{-B^2}{4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{-2 + \mathrm{E}}{4} \quad , \quad \alpha_5 = \frac{4 - \mathrm{E}}{32} \\
&\beta_1 = \frac{-B^2 - 4\,\beta_2}{2} \quad , \quad \beta_3 = \frac{-2 + B^2 + 2\,\beta_2 + 2\,\mathrm{E}}{4} \quad , \quad \beta_4 = \frac{4 - B^2 - 2\,\beta_2 - 2\,\mathrm{E}}{32}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

$$\gamma_1 = -2\,\gamma_2 \quad , \quad \gamma_3 = \frac{-1+\gamma_2}{2} \quad , \quad \gamma_4 = \frac{2-\gamma_2}{16}$$

$$\text{wobei:} \qquad B = -A \quad , \quad 2\,F = -2 + B^2 \quad , \quad \kappa\,E = 2\,B^2 \quad .$$

Da die Parameterwerte (A,B,C,D...) der Metrik $g_{\mu\nu}$ nach Definition der effektiven Metrik ${}^e g^{\mu\nu}$ festgelegt sind, ist es bemerkenswert, daß man bei den Bestimmungsgleichungen (5.10) der Parameterwerte $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ lediglich noch zwei Freiheitsgrade besitzt.
Weiter ist es bemerkenswert, daß der Parameter E nun ebenfalls durch B und den Kopplungsparameter κ festgelegt ist.

Es wurde also gezeigt, daß, falls man die Parameter $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ wie in (5.10) angegeben wählt, sich die zweiten Ordnungen der Higgsfeld– und Einsteingleichung nur durch den Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ voneinander unterscheiden und, daß man außerdem den symmetrischen, kanonischen EIST des Higgsfeldes als Quelle einer Dynamik der angeregten Higgsfelder interpretieren kann und deshalb eine konsistente Selbstwechselwirkung des Higgsfeldes gegeben ist:

$$\left({}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha} \right)_{|\alpha} = \frac{\kappa}{v^2} \left(\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2} \overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{5.11}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der klassischen Schreibweise von De Felice/Clarke (5.3), so erkennt man einige Unterschiede und Gemeinsamkeiten:

- Bei (5.3) erscheint auf der rechten Seite der nicht symmetrische Energie–Impulstensor des Gravitationsfeldes, wobei in Gleichung (5.11) der folgende symmetrische Ausdruck auftritt:

$$\frac{\kappa}{v^2} \left(\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2} \overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu} \right) \quad .$$

- In (5.11) tritt der Faktor $\frac{\kappa}{v^2}$ als Kopplungskonstante zwischen der Dynamik und Quelle der angeregten Higgsfelder auf. Dieser Faktor ist proportiaonal zur Kopplungskonstanten G.

- Interessant ist desweiteren eine Betrachtung der Symmetrieeigenschaften der Divergenzterme:[5]

$$\text{Higgs:} \qquad {}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{(\mu\nu)\alpha} = {}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu\alpha} \quad , \quad {}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{(\mu\nu)\alpha}{}^{|\alpha} = {}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$$

$$\text{De Felice/Clarke:} \qquad \overset{(2)}{S}{}_{(\mu\nu)\alpha} = \overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu\alpha} \quad , \quad \overset{(2)}{S}{}_{(\mu\nu)\alpha}{}^{|\alpha} \neq \overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha} \quad .$$

Diese Unterschiede lassen darauf schließen, daß es bei dem Higgsfeld im Gegensatz zur klassischen Formulierung des Gravitationsfeldes strukturell keinen Unterschied macht, um welche Arten von Energie–Impulstensoren es sich handelt, auch wenn es sich um den Energie–Impulstensor des Higgsfeldes selbst handelt.

[5] Die Symmetrieeigenschaften des Higgsfeld–Divergenzterms ${}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu\alpha}$ werden ersichtlicher, wenn die Parameter $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ festgelegt sind (siehe Kapitel 6.5).

5.4 Die Bedeutung des EIST bei Gravitationswellen

Betrachtet wird zunächst der klassische Fall. Man sieht das Gravitationsfeld als eine Gravitationswelle an, die sich auf einer Hintergrunds–Metrik ausbreitet, wobei das System die folgenden charakteristische Größen besitzt.

$$\mathcal{R} : \text{Krümmungslänge des Hintergrunds}, \quad \Lambda : \text{Wellenlänge der Gravitationswelle}$$
$$\mathcal{Q} : \text{Amplitude der Welle}, \quad \text{Mit:} \quad \mathcal{Q} \ll 1, \quad \frac{\Lambda}{\mathcal{R}} \ll 1$$

Entwickelt man die Metrik $g_{\mu\nu}$ um die Hintergrund–Metrik ${}^{B}g_{\mu\nu}$, schränkt sich zunächst auf die materiefreie Raumzeit ein und trennt die Einsteingleichung nach Potenzen in $h_{\mu\nu}$, so kann man die ersten zwei Ordnungen wie folgt aufteilen (siehe [2], S:964-966).

$$\overset{(1)}{R}_{\mu\nu}\,(\overset{(1)}{h}) = 0 \tag{5.12}$$
$$\overset{(B)}{R}_{\mu\nu} + <\overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\,(\overset{(1)}{h})> = 0 \tag{5.13}$$
$$\overset{(1)}{R}_{\mu\nu}\,(\overset{(2)}{h}) + \overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\,(\overset{(1)}{h}) - <\overset{(2)}{R}_{\mu\nu}\,(\overset{(1)}{h})> = 0 \quad . \tag{5.14}$$

Die Mittelwertbildungen $< ... >$, die in Gleichung (5.13) und (5.14) auftreten stellen Integrale dar, die sich über ein Raumzeit-Volumen erstrecken, das groß gegenüber Λ, jedoch klein in bezug auf die typische Krümmungslänge $\mathcal{R}$ der Hintergrundsmetrik ist.[6]

- Gleichung (5.12) stellt die Wellengleichung der Welle dar, die für die Propagation verantwortlich ist.
- Gleichung (5.13) berücksichtigt die Eigenschaft des Pseudo-EIST des Gravitationsfeldes keine wirkliche lokale Definition zu besitzen, und formuliert ihn durch die Mittelwertbildung in einem ausgeschmierten Sinne (coarse-grain viewpoint).
- Gleichung (5.14) stellt den in den Volumenbereichen stark fluktuierenden Teil der Welle dar.

Man kann nun zeigen ([15],[16]), daß falls $\frac{\Lambda}{\mathcal{R}} \ll 1$ gilt, die Mittelwertbildung folgende nützliche Eigenschaften besitzt:

$$\text{Divergenz-Terme verschwinden :} \qquad <(\overset{(1)}{h}{}^{\alpha}{}_{\sigma}\,\overset{(1)}{h}_{\mu\nu|\beta})_{|\alpha}> = 0 \tag{5.15}$$
$$\rightarrow \quad <\overset{(1)}{h}{}^{\alpha}{}_{\sigma}\,\overset{(1)}{h}_{\mu\nu|\beta|\alpha}> = -<\overset{(1)}{h}{}^{\alpha}{}_{\sigma|\alpha}\,\overset{(1)}{h}_{\mu\nu|\beta}> \quad .$$

Interessant ist nun eine Betrachtung des Mittelungsprozesses angewandt auf die Feldgleichungen in der Form (5.3) für den materiefreien Fall:

$$< S_{\mu}{}^{\nu\alpha}{}_{|\alpha} > \;=\; 16\pi G < \sqrt{-g}\, t_{\mu}{}^{\nu} > \;=\; < \left(\mathcal{L}_{R_o} \delta_{\mu}{}^{\nu} - g^{\beta\alpha}{}_{|\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{R_o}}{\partial g^{\beta\alpha}{}_{|\nu}} \right) >$$
$$t_{\mu}{}^{\nu} \;=\; \frac{1}{16\pi G\sqrt{-g}} \left(\mathcal{L}_{R_o} \delta_{\mu}{}^{\nu} - g^{\beta\alpha}{}_{|\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{R_o}}{\partial g^{\beta\alpha}{}_{|\nu}} \right) \quad , \quad \mathcal{L}_{R_o} = -\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\, \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \right) \quad .$$

[6] Wählt man als Hintergrundsmetrik die Minkowski–Metrik, ist die Krümmungslänge $\mathcal{R}$ unendlich groß und man kann die Mittelungsvolumen unendlich klein wählen.

Entwickelt man die Riemann Metrik um die Hintergrund–Metrik ${}^{B}g_{\mu\nu}$ und trennt die Ordnungen der dann entstehenden Gleichung, so folgt:

$$< \overset{(1)}{S}{}_{\mu}{}^{\nu\alpha}{}_{|\alpha} > \; = \; < \overset{(1)}{R}_{\mu\nu} (\overset{(1)}{h}) > = 0 \quad : \text{Gravitationswelle in erster Ordnung} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \overset{(B)}{R}_{\mu\nu} + < \overset{(2)}{S}{}_{\mu}{}^{\nu\alpha}{}_{|\alpha} > &= \overset{(B)}{R}_{\mu\nu} + \underbrace{< \overset{(2)}{S}{}_{\mu}{}^{\nu\alpha}{}_{|\alpha} (\overset{(2)}{h}) > + < \overset{(2)}{S}{}_{\mu}{}^{\nu\alpha}{}_{|\alpha} (\overset{(1)}{h} \overset{(1)}{h}) >}_{Wegen\ (5.15)\ =0} = \\ &= < \left(\mathcal{L}_{R_o} \delta_{\mu}{}^{\nu} - \overset{(2)}{g^{\beta\alpha}}{}_{|\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{R_o}}{\partial g^{\beta\alpha}{}_{|\nu}} \right) > \quad . \end{aligned} \tag{5.17}$$

Der hintere Term der Gleichung (5.17) stellt die Mittelung der zweiten Ordnung des kanonischen EIST's des Gravitationsfeldes dar und beinhaltet seinerseits nur Terme, die von der Struktur $(\overset{(1)}{h} \overset{(1)}{h})$ sind.
Man kann Gleichung (5.17) nun wie folgt interpretieren:

$$\underbrace{\overset{(B)}{R}_{\mu\nu}}_{\text{Krümmung des Hintergrunds}} = \underbrace{< \left(\mathcal{L}_{R_o} \delta_{\mu}{}^{\nu} - \overset{(2)}{g^{\beta\alpha}}{}_{|\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_{R_o}}{\partial g^{\beta\alpha}{}_{|\nu}} \right) >}_{Energieimpuls\ von\ (5.16)} \quad . \tag{5.18}$$

Der Energieimpuls der Gravitationswelle (5.16) erzeugt demnach selbst die Hintergrundskrümmung.

Man kann diese Eigenschaft von Gravitationswellen ohne weitere Einschränkungen auf Higgsfeldwellen übertragen, wenn man sich die Mittelung der zweiten Ordnung der Higgsfeldgleichung (5.11) betrachtet und die Hintergrundsmetrik als ein Hintergrunds–Higgsfeld interpretiert, auf dem sich eine Higgsfeldwelle ausbreitet:

$${}^{H}\overset{(B)}{S}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha} = \frac{\kappa}{v^2} \left(< \overset{(2)}{T}_{\mu\nu} (\tilde{\gamma}) > - \frac{1}{2} < \overset{(2)}{T} (\tilde{\gamma}) > \eta_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{5.19}$$

Der Energieimpuls des Higgsfeldes ist demnach selbst Quelle eines Higgsfeldes.

Da bei der Mittelung der Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ herausfällt, sind die Differentialgleichungen der Higgsfeldwelle (5.19) und der Gravitationswelle (5.18) identisch, falls man von stark fluktuierenden Termen – die bei der Mittelung wegfallen – absieht.

Kapitel 6

Festlegung der Parameter

6.1 Vorbemerkungen

In den letzten beiden Kapiteln wurden die Parameter $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ der Higgsfeldlagrangedichte $\mathcal{L}_{H_e}$ durch Vergleich mit der zweiten Ordnung der Einsteingleichung und einer Konsistenz–Forderung der Higgsfeldgleichung soweit eingeschränkt, daß lediglich noch zwei Freiheitsgrade in der Wahl übrig blieben.
In diesem Kapitel soll nun nacheinander die Lagrangedichte des Higgsfeldes $\mathcal{L}_{H_e}$, die Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_{(\mu\nu)}$ und den kanonischen EIST des Higgsfeldes $T_{\mu\nu}(\tilde{\gamma})$ bei festgelegten Parametern angegeben werden.

6.2 Explizites Aussehen der Parameter

Die Gleichung (5.10) legt die Parameter der Higgsfeldlagrangedichte (4.6) weitgehend fest, wenn man die durch die effektive Metrik ${}^e g_{\mu\nu}$ bestimmten Koeffizienten (A,B)

$$A = 2 \quad , \quad B = -2 \quad \stackrel{mit\ (5.10)}{\rightarrow} \quad F = 1$$

benutzt. Legt man durch die willkürlichen Bedingungen

$$\beta_4 = 0 \quad \gamma_4 = 0 \quad \kappa = 2$$

die drei noch offenen Freiheitsgrade fest, so sind alle Parameter $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4)$ wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 1 \quad , \quad \alpha_3 = -1 \quad , \quad \alpha_4 = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_5 = 0 \\
&\beta_1 = 6 \quad , \quad \beta_2 = -4 \quad , \quad \beta_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_4 = 0 \\
&\gamma_1 = -4 \quad , \quad \gamma_2 = 2 \quad , \quad \gamma_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad \gamma_4 = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{6.1}$$

6.3 Die Lagrangedichte des Higgsfeldes

Mit den Parameterwerten (6.1) schreibt sich die Higgsfeldlagrangedichte (4.6) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \quad = \quad & \frac{2}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)] - \frac{8}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\sigma)] + \\
& + \frac{1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu)] - \frac{12}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\mu\,\tilde{\gamma}_\beta)] + \\
& + \frac{32}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,(D_\sigma\,\tilde{\gamma}_\beta)] - \frac{1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha)] + \\
& + \frac{8}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\beta)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\sigma\,\tilde{\gamma}^\sigma)] - \frac{16}{v^4}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\sigma)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\alpha\,\tilde{\gamma}^\sigma]\,\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}^\beta\,\tilde{\gamma}^\mu]\,(D_\beta\,\tilde{\gamma}_\mu)] - \\
& - \frac{1}{v^2}\mathrm{tr}[(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)\mathrm{tr}[\tilde{\gamma}_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta]\,(D_\mu\,\tilde{\gamma}^\mu)] \quad .
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Diese Lagrangedichte ist also die Verallgemeinerung der Lagrangedichte

$$
\mathcal{L}_H(\tilde{\gamma}) \quad = \quad \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\alpha\,\tilde{\gamma}^\mu) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}_\mu)(D^\mu\,\tilde{\gamma}^\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(D_\alpha\,\tilde{\gamma}^\alpha)(D_\beta\,\tilde{\gamma}^\beta) - V(\tilde{\gamma})
$$

für einem Higgsfeld mit gravitationsähnlicher Selbstwechselwirkung.

6.4 Die Higgsfeldgleichung

Berechnet man mit Hilfe der Lagrangedichte (6.2) die Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung (analog zu Kapitel 4.3) und wendet nacheinander das Folgende an:

- Symmetrisierung in den freien Indizes
- Folgerungen (4.10)

so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)} \quad = \quad & 2\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta\,|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\beta} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha\,|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\mu} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha\,|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\nu} - 2\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} + \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu\,|\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \\
& + \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu\,|\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} + \frac{\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma}}{2} + \frac{\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma\,|\beta}}{2} - 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu\,|\alpha|\beta} + \\
& + \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\nu} + \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} + \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha}{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\beta|\mu} + \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta} - \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\mu|\nu} + \\
& + \frac{\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}{}^{|\gamma}}{2} + 2\,\overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu\,|\alpha}{}^{|\alpha} - 2\,\overset{(2)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} - 2\,\overset{(2)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

Dies stellt die Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder in zweiter Ordnung dar.

Benutzt man nun bei dem $\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta\,|\gamma}{}^{|\gamma}$–Term die erste Ordnung der Higgsfeldgleichung und addiert den Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$, so erhält man die zweite Ordnung des Ricci–Tensor in Einsteineichung und somit die Einsteingleichung des materiefreien Fall in zweiter Ordnung:

$$
\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} = \overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)} + A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma} \quad = \quad v\,\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{6.4}
$$

6.5 Der kanonische EIST des Higgsfeldes

Der symmetrisierte kanonische EIST des Higgsfeldes besitzt bei unserer Parameterwahl (6.1) folgende Gestalt:

$$\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) \;=\; \frac{v^2}{2}\left(-\epsilon_\nu{}^{\alpha|\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta|\mu} - \epsilon_\mu{}^{\alpha|\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta|\nu} + \epsilon_{\alpha\beta|\mu}\,\epsilon^{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}\,\epsilon_{\alpha\beta|\gamma}\,\epsilon^{\alpha\beta|\gamma}}{2} + \eta_{\mu\nu}\,\epsilon_{\alpha\beta|\gamma}\,\epsilon^{\alpha\gamma|\beta}\right) \quad .$$

Daraus ergibt sich die folgende Größe:

$$\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\,\overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu} \;=\; \frac{v^2}{2}\left(-\epsilon_\nu{}^{\alpha|\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta|\mu} - \epsilon_\mu{}^{\alpha|\beta}\,\epsilon_{\alpha\beta|\nu} + \epsilon_{\alpha\beta|\mu}\,\epsilon^{\alpha\beta}{}_{|\nu}\right) \quad .$$

Um diesen Ausdruck als Quelle der Dynamik der angeregten Higgsfelder in zweiter Ordnung zu erhalten, schreiben wir die Gleichung (6.4) um, benutzen die erste Ordnung und die Forderungen (4.10):

$$\begin{aligned}
&\underbrace{2\,\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\beta}{}_{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{2\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}{}_{|\beta}}_{\{1\}} + \underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}{}_{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\gamma}}{2}}_{\{4\}} + \underbrace{\frac{\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\gamma}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}^{|\beta}}{2}}_{\{4\}} - \\
&- \underbrace{2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha|\beta}}_{\{1\}} + \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}{}_{|\beta|\nu}}_{\{3\}} + \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}{}_{|\beta|\mu}}_{\{3\}} + \qquad (6.5) \\
&+ \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\beta}{}_{|\alpha|\beta}}_{\{2\}} + \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\beta|\gamma}}_{\{4\}} + \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha}{}^{|\alpha} - \overset{(2)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\nu} - \overset{(2)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}{}_{|\alpha|\mu} + \frac{1}{v}A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma} = \\
&= \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\mu|\nu} + \overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu} + \overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\mu}{}_{|\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\nu}{}_{|\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\beta} \quad .
\end{aligned}$$

Die markierten Terme kann man als Divergenzen schreiben, wobei beim Term {3} ein Zusatzterm auftritt, der die beiden letzten Terme der rechten Seite der Gleichung (6.5) kompensiert. Beim Term {4} wird die Symmetrie der Tensoren ausgenutzt:

$$\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\beta|\gamma} = \frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\left(\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\gamma}{}_{|\beta|\gamma} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\beta\gamma}{}_{|\alpha|\gamma}\right) \quad .$$

Die Gleichung (6.5) schreibt sich somit:

$$\begin{aligned}
&\left({}^{H}\overset{(2)}{S}{}_{\mu\nu}{}^{\alpha}\right)_{|\alpha} := \Bigg(\underbrace{2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\alpha}}_{\{1\}} - \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}{}_{|\mu}}_{\{3\}} - \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}{}_{|\nu}}_{\{3\}} - \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\beta}{}_{|\alpha}}_{\{2\}} - \underbrace{\overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\beta}{}_{|\alpha}}_{\{2\}} - \\
&\underbrace{-\frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}_\alpha{}^{\gamma}{}_{|\gamma}}_{\{4\}} - \underbrace{\frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\gamma\alpha}\,\eta_{\mu\nu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\gamma}}_{\{4\}} - \overset{(2)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}^{|\beta} + \overset{(2)}{\epsilon}_\mu{}^{\beta}{}_{|\nu} + \overset{(2)}{\epsilon}_\nu{}^{\beta}{}_{|\mu} + \frac{1}{v}A_{\mu\nu}{}^{\beta}\Bigg)_{|\beta} = \qquad (6.6) \\
&= \overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}{}_{|\nu} - \overset{(1)}{\epsilon}_\nu{}^{\alpha}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\mu} - \overset{(1)}{\epsilon}_\mu{}^{\alpha}{}^{|\beta}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}{}_{|\nu} = \frac{2}{v^2}\left(\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\,\overset{(2)}{T}(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Definiert man sich die Größe

$$\frac{1}{v} B_{\mu\nu}{}^{\beta} \;:=\; 2\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu}\,{}_{|\alpha} - \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}\,{}_{|\nu} - \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta}\,{}_{|\alpha} - \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\beta}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\alpha}\,{}_{|\mu} - \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\alpha}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}\,{}_{|\alpha} - \frac{1}{2}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\, \eta_{\mu\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha}{}^{\gamma}\,{}_{|\gamma} - \frac{1}{2}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\gamma\alpha}\, \eta_{\mu\nu}\, \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,{}_{|\gamma} \quad , \tag{6.7}$$

so schreibt sich Gleichung (6.6) wie folgt:

$$\left(\overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu\nu}\,{}^{|\beta} - \overset{(2)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\beta}\,{}_{|\nu} - \overset{(2)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\beta}\,{}_{|\mu} - \frac{1}{v}\left(A_{\mu\nu}{}^{\beta} + B_{\mu\nu}{}^{\beta}\right)\right)_{|\beta} = \frac{2}{v^2}\left(\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}\,(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\, \overset{(2)}{T}\,(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu}\right) \tag{6.8}$$

$$\text{wobei:} \qquad A_{\mu\nu\beta} = A_{\mu[\nu\beta]} \quad , \quad B_{\mu\nu\beta} = B_{(\mu\nu)\beta} \quad , \quad A_{\mu\nu\beta}{}^{|\beta} = A_{(\mu\nu)\beta}{}^{|\beta} \quad .$$

Aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften läßt der Divergenzterm $B_{\mu\nu\beta}$ – im Gegensatz zu $A_{\mu\nu\beta}$ – den Energie–Erhaltungssatz nicht unbeeinflußt.

Betrachtet man, wie schon in Kapitel (5.4), Gravitations– bzw. Higgsfeldwellen und mittelt die Feldgleichung (6.8) über kleine Raumzeitbereiche, so erhält man mit den Eigenschaften (5.15):

$$\underbrace{\frac{4}{v^2}\left(<\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}\,(\tilde{\gamma})> - \frac{1}{2} <\overset{(2)}{T}\,(\tilde{\gamma})>\,\eta_{\mu\nu}\right)}_{Energieimpuls\ der\ Higgsfeldwelle} = \frac{2}{v^2}\left(\overset{(2)}{T}_{(\mu\nu)}\,(\tilde{\gamma}) - \frac{1}{2}\, \overset{(2)}{T}\,(\tilde{\gamma})\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad . \tag{6.9}$$

Betrachtet man sich den durch die rechte Seite der Gleichung (6.9) gemittelten Energieimpuls der Higgsfeldwelle und vergleicht ihn mit den Literaturwerten (siehe [2], S:969) des Energieimpuls von Gravitationswellen, so sind diese identisch.
Der symmetrische Teil des Energie–Impulstensors des Higgsfeldes ist demnach dem "grobkörnigem" EIST des klassischen Gravitationsfeldes gleich und besitzt einen definierten lokalen Wert.

Kapitel 7

Eigenschaften des Divergenzterms $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$

7.1 Vorbemerkungen

Wir haben im Kapitel 4 gesehen, daß sich bei geeigneter Parameterwahl (4.21) die Higgsfeldgleichung (4.16) von der Einsteingleichung (4.18) nur durch den Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ unterscheiden. In diesem Kapitel möchte zunächst zeigen, daß der Energie–Erhaltungssatz der Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_{\mu\nu} = 0$ durch die Addition dieses Divergenzterms nicht verändert wird.
Im zweiten Unterkapitel werde ich einige mögliche Interpretationen des Divergenzterms diskutieren.

7.2 Invarianz des Energie-Impuls-Erhaltungssatzes unter Addition des Divergenzterms

Die Higgsfeldgleichung $H_{\mu\nu}$ lautet:

$$\begin{array}{rcl} H_{\mu\nu} & = & \mathcal{H}_{\mu\nu} + A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma} \\ \text{wobei:} & & A_{\mu[\nu\sigma]} = A_{\mu\nu\sigma} \quad . \end{array}$$

Der Divergenzterm besitzt desweiteren die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{array}{rcll} A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma|\nu} & = & A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\nu|\sigma} & \text{:Partielle Ableitungen kommutieren} \\ A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma|\nu} & = & -A_{\mu\sigma\nu}{}^{|\sigma|\nu} & \text{:Eigenschaft der Antisymmetrie ausgenützt} \\ & \rightarrow & A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma|\nu} = 0 \quad . & \end{array}$$

Somit gilt für den Erhaltungssatz:

$$\begin{array}{rcl} H_{\mu\nu}{}^{|\nu} & = & \mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{|\nu} + \underbrace{A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma|\nu}}_{=0} \\ & \rightarrow & \mathcal{H}_{\mu\nu}{}^{|\nu} = 0 \quad . \end{array}$$

Der Divergenzterm hat demnach keine Auswirkungen auf den Energie-Impuls-Erhaltungssatzes.

7.3 Interpretation des Divergenzterms

In diesem Unterkapitel werden mögliche Erklärungsversuche der durch den Divergenzterm auftretenden Unterschiede der Einsteingleichung mit der Higgsfeldgleichung diskutiert. Welche der im folgenden skizzierten Effekte für das Auftreten des Divergenzterms verantwortlich ist, konnte leider aufgrund der begrenzten Dauer der Diplomarbeit nicht entschieden werden. Die im folgenden auftretenden Punkte besitzen deshalb spekulativen Charakter und sollten in weiteren Arbeiten näher betrachtet werden.

7.3.1 Torsionseffekte

Verallgemeinert man die Riemannsche Geometrie, indem man mögliche Torsionseffekte der Raumzeit–Struktur berücksichtigt (siehe: [21]) so muß man zu allgemeinen Konnektionen

$$
\begin{aligned}
{}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - K_{\mu\nu}{}^{\alpha} \\
\\
{}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &: \text{Verallgemeinerte Konnektionen} \\
\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} &: \text{Christoffel Symbole} \\
K_{\mu\nu}{}^{\alpha} &: \text{Kontorsionstensor} \quad , \quad K_{\mu[\nu}{}^{\alpha]} = K_{\mu\nu}{}^{\alpha}
\end{aligned}
$$

übergehen.

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Kontorsionstensors gelten die folgenden Folgerungen:

$$
K_{\mu\alpha}{}^{\alpha} \equiv 0 \quad , \quad K_{\mu\alpha}{}^{\alpha}{}_{|\nu} \equiv 0 \quad . \tag{7.1}
$$

Betrachtet man sich nun den mit den verallgemeinerten Konnektionen ${}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ gebildeten Riccitensor

$$
{}^*R_{\mu\nu} = {}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} - {}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha|\nu} + {}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,{}^*\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - {}^*\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\,{}^*\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \quad , \tag{7.2}
$$

und benutzt die Eigenschaft (7.1), so schreibt sich die Einsteingleichung für den materiefreien Fall mit Torsion wie folgt:

$$
{}^*R_{\mu\nu} = \underbrace{\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu|\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha|\nu}}_{Glied\,ohne\,Torsion} - \underbrace{K_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}}_{Torsionsbeitrag} + \underbrace{{}^*\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,{}^*\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - {}^*\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\,{}^*\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}}_{Gemischte\,Glieder} = 0 \quad .
$$

Betrachtet man sich nun nochmals die Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung

$$
\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)} = \overset{(2)}{H}_{\mu\nu} - A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha} \overset{!}{=} \overset{(2)}{R}_{\mu\nu} - A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha} = 0 \quad ,
$$

so ist folgendes zu bemerken.
Da der Divergenzterm $A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$ von seiner Struktur und Symmetrie her die gleichen Eigenschaften wie die in ${}^*R_{\mu\nu}$ auftretende Divergenz des Kontorsionstensors $K_{\mu\nu\alpha}$ hat, kann man vermuten, daß die Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_{(\mu\nu)}$ anscheinend eine Raumzeit–Struktur bildet, die einen nicht Riemannschen Torsionsanteil beinhaltet. Der Divergenzterm $A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$ wäre demnach als eine torsionsbedingte Abweichung der Higgsfeldgleichung von einer rein Riemannschen Raumzeit–Stuktur zu deuten. Diese Vermutung könnte man formal wie folgt schreiben:

$$
{}^*R_{\mu\nu} \cong \mathcal{H}_{\mu\nu} \quad , \quad A_{\mu\nu\alpha} \cong K_{\mu\nu\alpha} \quad .
$$

7.3.2 Quantentheoretische Formulierung der SET

Wir hatten in Kapitel 5.4 gesehen, daß wenn man das Gravitationsfeld in Wellenform beschreibt man auf eine physikalische Interpretation der in den Feldgleichungen auftretenden Divergenzterme geführt wird: Der Divergenzterm $A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$ stellt Fluktuationen der Gravitationswelle in kleinen Raumzeit–Gebieten dar, die zum Energie–Erhaltungssatz nicht beitragen.
Es wäre nun interessant zu betrachten, welchen Stellenwert den Divergenztermen bei einer quantentheoretischen Formulierung der SET zukommt, und wie sie sich unter quantenmechanischer Mittelung verhalten bzw. ob sie Einfluß auf definierte Erwartungswerte haben.

7.3.3 Korrekturen zum EIST des Higgsfeldes durch Superpotentiale

Der kanonische EIST des elektromagnetischen Feldes ist nicht symmetrisch und unvollständig, da er Spin–Einflüße des Fedes nicht berücksichtigt. Durch das Hinzufügen eines antisymmetrischen Superpotentials $E_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$ ist es jedoch möglich ihn zu symmetrisieren und fehlende Spinanteile zu berücksichtigen. Der durch diesen Vorgang entstehende EIST tritt als Quelle des Gravitationsfeldes in der Einsteingleichung auf und man nennt ihn den metrischen EIST des elektromagnetischen Feldes.

Man könnte nun die Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_{\mu\nu}$ nicht durch direkte Symmetriesierung ($\mathcal{H}_{(\mu\nu)}$) symmetriesieren, sondern ihr ein Superpotential der Struktur des $A_{\mu\nu\alpha}{}^{|\alpha}$–Term hinzufügen. Physikalisch würde das nun – in Analogie zum elektromagnetischen Fall – bedeuten, daß als selbstwechselwirkende Quelle des Higgsfeldes nicht der direkt symmetrisierte kanonische EIST des Higgsfeldes erscheint, sondern der durch ein Superpotential symmetriesierte "metrische" EIST. Dies würde nun bedeuten, daß im kanonischen EIST des Higgsfeldes gewisse "Spin–ähnliche" Anteile der angeregten Higgsfelder fehlen, die man "per Hand" hinzufügen muß.

Kapitel 8

Nichtlineare Erweiterung (Raumzeit mit Materie)

8.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel wird die Einschränkung ein System ohne Materie zu betrachten aufgeben. Exemplarisch werden massive Fermionen in einem System mit Gravitations– bzw. Higgsfeld betrachtet. Dabei wird ein Blick auf die klassische Formulierung der Gravitationsankopplung an fermionische Materie geworfen. Da die klassische Formulierung – um Inkonsistenzen zu vermeiden – ebenfalls zu raumzeitabhängigen Diracmatrizen übergehen muß, ist eine strenge Nomenklatur erforderlich, denn sonst wird eine formale Trennung beider Theorien unmöglich. Die zusätzlich erforderlichen Symbole sind im "Verzeichnis der verwendeten Symbole" zusammengefaßt.
Nach Behandlung der ersten und zweiten Ordnung der klassischen Gleichungen werden die beiden Ordnungen der Higgsfeldgleichung berechnet.
Ein Vergleich wird zeigen, daß die linearen Gleichungen beider Theorien identisch sind. Die quadratischen Ordnungen sind von ihrer Struktur her gleich, koppeln jedoch mit unterschiedlichen Gewichtungsfaktoren an die fermionische Materie an.

8.2 Klassische Formulierung mit fermionischer Materie

Zunächst soll dargelegt werden, wie man bei einer "klassischen[1] " Betrachtung des Systems die Wechselwirkung der fermionischen Felder mit einer gekrümmten Raumzeit zu beschreiben hat.
Wir sind also einerseits an der Bewegungsgleichung der Fermionen (Diracgleichung) in gekrümmter Raumzeit interessiert und andererseits wird quantitativ die durch die Fermionen hervorgerufene Raumzeit–Krümmung beschrieben werden.

Die Lagrangedichte eines massiven fermionischen Teilchens in einer flachen Raumzeit ist gegeben durch:

$$^{K^o}\mathcal{L}_M \quad = \quad \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi_{|\mu} - \overline{\psi}_{|\mu}\,\gamma^\mu\psi\right\} - m\overline{\psi}\psi \quad .$$

Möchte man diese Lagrangedichte in einer gekrümmten Raumzeit, allgemein-relativistisch kovariant formulieren, so sind die folgenden Korrekturen nötig (siehe [9]):

[1] Klassisch hier wieder im Sinne von "nicht Spin–Eichtheoretisch".

- Durch den Übergang von einer flachen Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \gamma_{(\mu}\gamma_{\nu)}$ zu einer gekrümmten Metrik $g_{\mu\nu}$ ist es auch in der Einsteinschen Theorie nötig, zu verallgemeinerten, raumzeitabhängigen $\hat{\gamma}$-Matrizen überzugehen, die die Antikommutatorbeziehung $g_{\mu\nu} = \hat{\gamma}_{(\mu}\hat{\gamma}_{\nu)}$ erfüllen.

- Man muß die spinoriellen, partiellen Ableitungen in allgemein-relativistische kovariante Ableitungen umschreiben:

$$\psi_{|\mu} \rightarrow \psi_{||\mu} = \psi_{|\mu} + \Gamma_\mu \psi$$
$$\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu A}{}^B = \frac{1}{4}\, e_{(\sigma)}{}^\mu{}_{||\alpha}\, e^{(\sigma)}{}_\rho\, \gamma^\rho{}_A{}^B\, \gamma_{\mu B}{}^D \quad , \quad \hat{\gamma}^\mu{}_A{}^B = e_{(\sigma)}{}^\mu\, \gamma^{(\sigma)}{}_A{}^B$$

$\hat{\gamma}^\mu{}_A{}^B$: Veralgemeinerte γ-Matrizen in der klassischen Gravitationstheorie
Γ_μ : Ricci-Rotationskoeffizienten
$e_{(\sigma)}{}^\mu$: Tetradenfelder
(σ) : Indizes im lokalen Minkowski-Tangentialraum
$e_{(\sigma)}{}^\mu{}_{||\alpha}$: Mit Christoffel-Symbolen gebildete kovariante Ableitung der Tetrade .

- Zur Bildung der adjungierten Spinoren $\overline{\psi}$ ist es erforderlich eine raumzeitabhängige hermitesierende Matrix $\hat{\zeta}$ einzuführen:

$$\overline{\psi} \quad := \quad \psi\,\hat{\zeta} \quad .$$

Die allgemein-relativistisch kovariant formulierte fermionische Lagrangedichte schreibt sich somit:

$$^K\mathcal{L}_M \quad = \quad \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\hat{\gamma}^\mu\psi_{||\mu} - \overline{\psi}_{||\mu}\,\hat{\gamma}^\mu\psi\right\} - m\overline{\psi}\psi \quad . \tag{8.1}$$

Die Bewegungsgleichungen der Fermionen ergeben sich wie gewöhnlich durch die Euler–Lagrangegleichungen in bezug auf den Spinor ψ bzw. adjungierten Spinor $\overline{\psi}$:

$$i\,\hat{\gamma}^\mu\psi_{||\mu} - m\,\psi = 0 \qquad \text{wobei:} \quad \hat{\gamma}^\mu{}_{||\mu} = 0 \quad . \tag{8.2}$$

Bildet man den kanonischen EIST dieser Lagrangedichte und symmetrisiert diesen, so entspricht er dem metrischen EIST, der als fermionische Gravitationsquelle in der Einsteingleichung erscheint; er lautet:

$$^KT_{\mu\nu}(\psi) \quad = \quad \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\hat{\gamma}_{(\nu}\psi_{||\mu)} - \overline{\psi}_{(||\mu}\,\hat{\gamma}_{\nu)}\psi\right\} \quad . \tag{8.3}$$

Mit Hilfe der Diracgleichung (8.2) kann man zeigen, daß die fermionische Lagrangedichte (8.1) gleich Null ist, so daß sich der folgende Ausdruck für den Energie-Impuls–Skalar ergibt:

$$^KT(\psi) \quad = \quad m\,\psi\overline{\psi} \quad . \tag{8.4}$$

Die Einsteingleichung eines Systems mit fermionischer Materie lautet somit:

$$R_{\mu\nu} \quad = \quad -8\pi G\left(^KT_{\mu\nu}(\psi) - \frac{^KT(\psi)}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad . \tag{8.5}$$

Wie bei den $\tilde{\gamma}$–Higgsfeldern kann man aufgrund der Hermitezität/Antihermitezität der $\hat{\gamma}$–Matrizen diese nach den gewöhnlichen Diracmatrizen γ^μ entwickeln:

$$e_{(\sigma)}{}^{\mu} = \left(\eta_{(\sigma)}{}^{\mu} + \overset{(1)}{l}{}_{(\sigma)}{}^{\mu} + \overset{(2)}{l}{}_{(\sigma)}{}^{\mu}\right) \quad , \quad \hat{\gamma}^{\mu} = e_{(\sigma)}{}^{\mu}\,\gamma^{(\sigma)} \quad .$$

Berechnet man die einzelnen Ordnungen des fermionischen Energie-Impulstensors (8.3), so erhält man:[2]

$$\begin{aligned}
{}^{K}\overset{(o)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) &= \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\gamma_{(\nu}\psi_{|\mu)} - \overline{\psi}_{(|\mu}\,\gamma_{\nu)}\psi\right\}\\
{}^{K}\overset{(1)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) &= \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\gamma^{(\sigma)}\psi_{(|\mu} - \overline{\psi}_{(|\mu}\,\gamma^{(\sigma)}\psi\right\}\ \overset{(1)}{l}{}_{(\sigma)\ \nu)}\\
{}^{K}\overset{(2)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) &= \frac{i}{2}\left\{\overline{\psi}\,\gamma^{(\sigma)}\psi_{(|\mu} - \overline{\psi}_{(|\mu}\,\gamma^{(\sigma)}\psi\right\}\ \overset{(2)}{l}{}_{(\sigma)\ \nu)} \quad .
\end{aligned}$$

Entwickelt man die Einsteingleichung (8.5) nach Ordnungen, so erhält man in linearer Näherung:

$$\overset{(1)}{R}{}_{\mu\nu} = -8\pi G\left({}^{K}\overset{(o)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{{}^{K}\overset{(o)}{T}(\psi)}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad . \tag{8.6}$$

Die zweite Ordnung besitzt folgende Gestalt:

$$\overset{(2)}{R}{}_{\mu\nu} = -8\pi G\left({}^{K}\overset{(1)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{{}^{K}\overset{(1)}{T}(\psi)}_{(8.4)\rightarrow=0}\eta_{\mu\nu} + {}^{K}\overset{(0)}{T}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} + {}^{K}\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\alpha\beta}\ \eta_{\mu\nu}\right)\right) \tag{8.7}$$

Benutzt man in dieser Gleichung auf der linken Seite (siehe 4.19) die erste Ordnung

$$\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu\ |\sigma}{}^{|\sigma} = \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\nu} + \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\mu} + 8\pi G\left({}^{K}\overset{(o)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{{}^{K}\overset{(o)}{T}(\psi)}{2}\,\eta_{\mu\nu}\right) \quad , \tag{8.8}$$

so entsteht formal ein zusätzlicher Energie–Impulsbeitrag, der, wenn man ihn auf die rechte Seite bringt wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overset{(2)}{R}{}_{\mu\nu}}_{Erste\ Ordnung\ verwandt} &= -8\pi G\left({}^{K}\overset{(1)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{1}{2}\left({}^{K}\overset{(0)}{T}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} + {}^{K}\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\alpha\beta}\ \eta_{\mu\nu}\right)\right) \\
&\quad - \underbrace{8\pi G\ {}^{K}\overset{(o)}{T}{}_{(\mu}{}^{\alpha}(\psi)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\nu)}}_{Durch\ erste\ Ordnung\ entstanden} \quad .
\end{aligned} \tag{8.9}$$

[2]Da hier der klassische Limes interessiert, und die Ricci–Rotationskoeffizienten nur an die Spin–Freiheitsgrade der Fermionen koppeln kann man die kovarianten spinoriellen Ableitungen in diesem Fall in partielle Ableitungen umschreiben.

Um Widersprüche in der Definition der Tetrade zu vermeiden, muß man auf der klassischen Seite den folgenden Zusammenhang beachten:

$$\overset{(1)}{l}{}_{(\sigma)\ \mu} = -\overset{(1)}{\epsilon}{}_{(\sigma)\ \mu} \qquad \overset{(1)}{l}{}^{(\sigma)\mu} = \overset{(1)}{\epsilon}{}^{(\sigma)\mu} \quad .$$

Verwendet man diese Eigenschaft in Gleichung (8.9), so heben sich einige Terme auf:[3]

$$\underbrace{\overset{(2)}{R}{}_{\mu\nu}}_{Erste\,Ordnung\,verwandt} = 8\pi G \left(\frac{1}{2} \left({}^{K}\overset{(0)}{T}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu} + {}^{K}\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta}(\psi)\ \overset{(1)}{\underline{h}}{}_{\alpha\beta}\ \eta_{\mu\nu} \right) \right) \quad . \tag{8.10}$$

Setzt man die Koeffizienten der Metrik ($B = -2$) ein, so erhält man

$$\underbrace{\overset{(2)}{R}{}_{\mu\nu}}_{Erste\,Ordnung\,verwandt} = -8\pi G \left({}^{K}\overset{(0)}{T}(\psi)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\mu\nu} + {}^{K}\overset{(0)}{T}{}^{\alpha\beta}(\psi)\ \overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta}\ \eta_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{8.11}$$

8.3 Higgsfeldgleichung im materiebehafteten Raum

Zu der verallgemeinerten Higgsfeld-Lagrangedichte (6.2) wird nun die fermionische Lagrangedichte $\mathcal{L}_M$ addiert, und somit das betrachtete System um diese erweitert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= \mathcal{L} + \mathcal{L}_M \\ \mathcal{L}_M &= \frac{i}{2}\left\{ \overline{\psi}\,\tilde{\gamma}^\mu D_\mu \psi - (\overline{D_\mu \psi})\,\tilde{\gamma}^\mu \psi \right\} - k\overline{\psi}\,\tilde{\gamma}^\mu\,\tilde{\gamma}_\mu \psi \quad . \end{aligned}$$

Wieder ergibt sich die Higgsfeldgleichung $\mathcal{H}_\mu{}^A{}_B = 0$ durch die Euler-Lagrangegleichungen nach den verallgemeinerten $\tilde{\gamma}^\mu{}_A{}^B$-Matrizen. Durch Multiplikation mit $\gamma_{\nu A}{}^B$ und Spurbildung erhält man die Higgsfeldgleichung in der Form $\mathcal{H}_{\mu\nu} = 0$.

Der fermionische symmetrisch–kanonische Energie–Impulstensor lautet wie folgt:

$${}^{H}T_{\mu\nu}(\psi) = \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\,\tilde{\gamma}_{(\nu}\,D_{\mu)}\,\psi + \overline{(D_{(\mu}\,\psi)}\,\tilde{\gamma}_{\nu)}\,\psi \right) \quad .$$

Mit Hilfe der Diracgleichung (3.8) erhält man den zugehörigen Energie–Impuls Skalar:

$${}^{H}T := {}^{H}T_\mu{}^\mu(\psi) = k\,v\,\overline{\psi}\psi = m\,\overline{\psi}\psi \quad .$$

[3] Man beachte, daß in nullter Näherung beide Arten von Indizes $({}_{(\sigma)},\ {}_{\mu})$ gleich zu behandeln sind, und somit Unterschiede, die durch Heben und Senken der Indizes entstehen, immer eine Ordnung höher rutschen.

8.3.1 Linearisierte Feldgleichungen

Nach Bildung des Niederenergie-Limes und Symmetriebrechung ordnet man die Gleichung nach Ordnungen in den Anregungsfeldern.

Die linearisierte, symmetrisierte Higgsfeldgleichung $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma},\psi)=0$ ist von der folgenden Struktur:

$$
\begin{aligned}
\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma},\psi) &= \underbrace{\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma})}_{siehe\,(4.11)} - \left({}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi)}{2}\,\eta_{\mu\nu} \right) = 0 \\
{}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi) &= \frac{i}{2}\left(\overline{\psi}\,\gamma_{(\nu}\,\psi_{|\mu)} + \overline{(\psi_{(|\mu)})}\,\gamma_{\nu)}\,\psi \right) = \\
&= \frac{4}{v}\left(\frac{i}{2}\left(\overline{\psi}_D\,\gamma_{(\nu}\,(\psi_D)_{|\mu)} + \overline{(\psi_D)_{(|\mu}}\,\gamma_{\nu)}\,\psi_D \right)\right) = \frac{4}{v}\left({}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi_D) \right) \\
{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi) &= k\,v\,\overline{\psi}\psi = \frac{4}{v}\left(m\,\overline{\psi}_D\psi_D \right) = \frac{4}{v}\left({}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi_D) \right) \quad .
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Higgsfeldgleichung $\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma},\psi)=0$ mit $\frac{1}{v}$ und bringt die fermionische Quelle des Higgsfeldes auf die rechte Seite der Gleichung, so ergibt sich:

$$
\frac{1}{v}\,\overset{(1)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma}) = \frac{4}{v^2}\left({}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi_D) - \frac{{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi_D)}{2}\,\eta_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{8.12}
$$

8.3.2 Feldgleichungen zweiter Ordnung

Der symmetrische Teil der quadratischen Ordnung der Higgsfeldgleichung $\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma},\psi)=0$ lautet:

$$
\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma},\psi) = \underbrace{\overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)}(\tilde{\gamma})}_{siehe\,(6.3)} + \frac{4}{v}\left(\frac{1}{2}\,{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi_D) \right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu} = 0 \quad .
$$

Wie im materiefreien Fall wird nun zu dieser Gleichung der antisymmetrische Divergenzterm $A_{\mu\nu\sigma}{}^{|\sigma}$ (siehe (4.17)) addiert. Dadurch erhält man eine Higgsfeldgleichung der folgenden Form:

$$
\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma}) = -\frac{4}{v}\left(\frac{1}{2}\,{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi_D) \right) \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu} \quad . \tag{8.13}
$$

Benutzt man in dieser Gleichung die erste Ordnung

$$
\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu}{}_{|\sigma}{}^{|\sigma} = \overset{(1)}{\epsilon}_{\mu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\nu} + \overset{(1)}{\epsilon}_{\nu}{}^{\sigma}{}_{|\sigma|\mu} + \frac{4}{v^2}\left({}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi) - \frac{{}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi)}{2}\,\eta_{\mu\nu} \right) \quad , \tag{8.14}
$$

so erhält man auf der rechten Seite der Gleichung (8.13) Zusatzterme. Die Gleichung (8.13) schreibt sich dann:

$$
\underbrace{\overset{(2)}{R}_{\mu\nu} = \frac{1}{v}\,\overset{(2)}{H}_{\mu\nu}(\tilde{\gamma})}_{siehe\,(4.20)} = -\frac{4}{v^2}\frac{1}{2}\left({}^{H}\overset{(o)}{T}(\psi_D)\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\mu\nu} + {}^{H}\overset{(o)}{T}_{\alpha\beta}(\psi)\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\,\eta_{\mu\nu} \right) \quad . \tag{8.15}
$$

8.4 Vergleich

Im folgenden vergleichen wir die berechnete Higgsfeldgleichung mit der Einsteingleichung in erster und zweiter Ordnung für ein System mit fermionischer Materie.

8.4.1 Linearisierte Feldgleichungen

Vergleicht man die linearen Gleichungen (8.6) und (8.12) miteinander, so sind diese gleich, falls man folgendes berücksichtigt:

- Zwischen der Gravitationskonstante G und dem symmetriebrechenden Parameter v muß der folgende Zusammenhang bestehen:[4] $2\pi G = \frac{1}{v^2}$
- Die definierte Größe ${}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi)$ muß der nullten Ordnung des fermionischen, metrischen EIST's ${}^{K}T_{\mu\nu}(\psi)$ der Einsteinschen Gravitationstheorie entsprechen.
- Die Spur von ${}^{H}\overset{(o)}{T}_{\mu\ \nu}(\psi)$ muß gleich der definierten Größe ${}^{H}\overset{(o)}{T}\ (\psi)$ sein.

Betrachtet man sich die nullten Ordnungen der Energie–Impulstensoren, so sind alle drei Punkte erfüllt

8.4.2 Feldgleichungen zweiter Ordnung

Vergleicht man die Feldgleichungen (8.11) und (8.15) der zweiten Ordnung und verwendet den Zusammenhang des Parameters v mit der Gravitationskonstanten G so erkennt man, daß die beiden Gleichungen von ihrer Struktur her identisch sind; Abweichungen bestehen jedoch in der Stärke der Ankopplung an die fermionische Materie. Die durch das Higgsfeld vermittelte Kraft koppelt im Vergleich mit dem klassischen Gravitationsfeld in zweiter Ordnung nur halb so stark an die Fermionen. Die Ursache dieser Abweichung könnte in einer Torsionseigenschaft des Higgsfeldes liegen.

[4] Man beachte bei dem positiven Vorzeichen, daß in $R_{\mu\nu}$ der Parameter $B = -2$ eingeht.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

Es wurde in dieser Arbeit gezeigt, daß es möglich ist, die der Spin–Eichtheorie zugrundeliegende Lagrangedichte so zu verallgemeinern, daß die aus ihr folgende Higgsfeldgleichung eine gravitationsähnliche Wechselwirkung enthält. Der symmetrische Teil des kanonische Energie–Impulstensors des Higgsfeldes tritt als Quelle der symmetrischen Bewegungsgleichung der angeregten Higgsfelder in Erscheinung.
Ein Vergleich der zweiten Ordnung des symmetrischen Teils der Higgsfeldgleichung mit der zweiten Ordnung der Einsteingleichung im materiefreien Fall zeigt, daß beide bis auf einen antisymmetrischen Divergenzterm ${A_{\mu\nu\alpha}}^{|\alpha}$, der den Energie–Impuls–Erhaltungssatz nicht beeinflußt, übereinstimmen.
Geht man, wegen der Nichtlokalität des EIST's des Gravitationsfeldes, auf der Seite der klassischen Beschreibung zu einem grobkörnigen EIST über, so stimmt dieser mit dem EIST des Higgsfeldes überein. Sieht man von in kleinen Raumzeitvolumen stark fluktuierenden Termen ab, so sind die Differentialgleichungen von Gravitations– und Higgsfeldwellen bis zur zweiten Ordnung identisch.
Betrachtet man eine Raumzeit mit fermionischer Materie, so stimmt die erste Ordnung der Feldgleichungen ebenfalls überein. Die Higgsfeldgleichung in zweiter Ordnung koppelt halb so stark an die fermionische Materie wie es die klassische Gleichung in zweiter Ordnung tut, was auf zusätzliche Spinanteile der Higgsfelder zurückzuführen ist.

Die Arbeit hat damit gezeigt, daß die durch das Higgsfeld vermittelte Kraft die Eigenschaften einer gravitativen Wechselwirkung besitzt. Daraus ergibt sich, daß nun folgende Punkte interessant sind:

- Die in dieser Arbeit nicht betrachteten antisymmetrischen Anteile der Higgsfeldgleichung sollten auf ihre physikalische Relevanz untersucht werden, um eventuell entstehende Torsions- und Nichtmetrizitätsanteile aufzuzeigen.
- Die durch den Divergenzterm auftretenden Unterschiede der zweiten Ordnung der Spin–Eichtheorie mit der klassischen Theorie sollten genauer untersucht werden, um mögliche meßbare Unterschiede offen zu legen und die Interpretation des ${A_{\mu\nu\sigma}}^{|\sigma}$–Terms zu klären.
- Die in der Spin–Eichtheorie mögliche mikroskopische Betrachtungsweise sollte man quantentheoretisch formulieren und alle der Spin–Eichtheorie eigenen Felder quantisieren.
- Der in dieser Arbeit betrachtete Iso–skalare Fall sollte Iso–vektoriell verallgemeinert werden, um so eine Vereinheitlichung mit den anderen drei Wechselwirkungen zu ermöglichen.

Anhang A

Forderungen an die Higgs-Anregungsfelder und die Metrik

A.1 Vorbemerkungen

In diesem Anhang werden die Forderungen (4.10), die an die ersten und zweiten Ordnungen der angeregten Higgsfelder bzw. an die ersten und zweiten Abweichungen von der flachen Minkowski–Metrik gestellt werden, begründet.
Auf der Seite der klassischen Formulierung wird gezeigt werden, daß diese Forderungen durch die Einsteineichung mit einer weiteren Zusatzbedingung erhalten werden.
Bei den Einschränkungen der angeregten Higgsfelder soll eine Begründung vorstellt werden, die sich aus einer Konsistenzforderung der Eigenschaften der effektiven Metrik ${}^{e}g^{\mu\nu}$ ergibt. Es bleibt jedoch zu hoffen, daß sich die Forderungen der zweiten Ordnung – wie im linearen Fall – aus dem Energie–Impuls–Erhaltungssatz angewandt auf die Higgsfeldgleichung ergeben und somit direkt mittels der Feldgleichungen ableitbar sind.

A.2 Folgerungen aus der Einsteinschen Eichbedingung

Da die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie sich invariant unter Koordinatentransformationen verhalten ist es möglich, weitere Forderungen an die Metrik $g^{\mu\nu}$ zu stellen, ohne daß sich der physikalische Gehalt der Feldgleichungen ändert. Benutzt man die Einsteineichung $\det(g^{\mu\nu}) = -1$, so gelten die folgenden Forderungen an die Metrik:

$$
\begin{aligned}
& \det(g^{\mu\nu}) = -1 \qquad \text{mit:}\, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \overset{(1)}{h}{}^{\mu\nu} + \overset{(2)}{h}{}^{\mu\nu} \\
\rightarrow\quad & \det(g^{\mu\nu}) =: \overset{(0)}{f} + \overset{(1)}{f} + \overset{(2)}{f} + \ldots = -1 \\
& \overset{(0)}{f} = -1 \\
& \overset{(1)}{f} = -\overset{(1)}{h}{}^{11} + \overset{(1)}{h}{}^{22} + \overset{(1)}{h}{}^{33} + \overset{(1)}{h}{}^{44} \rightarrow \qquad \overset{(1)}{h}{}_{\mu}{}^{\mu} = 0 \\
& \overset{(2)}{f} = \Big(-(\overset{(1)}{h}{}^{12})^2 - (\overset{(1)}{h}{}^{13})^2 - (\overset{(1)}{h}{}^{14})^2 + \overset{(1)}{h}{}^{11}\,\overset{(1)}{h}{}^{22} + (\overset{(1)}{h}{}^{23})^2 + (\overset{(1)}{h}{}^{24})^2 + \overset{(1)}{h}{}^{11}\,\overset{(1)}{h}{}^{33} - \overset{(1)}{h}{}^{22}\,\overset{(1)}{h}{}^{33} + (\overset{(1)}{h}{}^{34})^2 + \\
& + \overset{(1)}{h}{}^{11}\,\overset{(1)}{h}{}^{44} - \overset{(1)}{h}{}^{22}\,\overset{(1)}{h}{}^{44} - \overset{(1)}{h}{}^{33}\,\overset{(1)}{h}{}^{44} \Big) + \Big(-\overset{(2)}{h}{}^{11} + \overset{(2)}{h}{}^{22} + \overset{(2)}{h}{}^{33} + \overset{(2)}{h}{}^{44} \Big)
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \qquad \frac{1}{2}\left(\left(\overset{(1)}{h}{}_{\mu}{}^{\mu}\right)^{2} - \overset{(1)}{h}_{\mu\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\mu\alpha}\right) + \overset{(2)}{h}{}_{\mu}{}^{\mu} = 0 \quad . \tag{A.1}$$

Fordert man nun als weitere Eichbedingung $\overset{(1)}{h}_{\mu\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\mu\alpha}=0$, oder nimmt an, daß sich $\overset{(2)}{h}{}_{\mu}{}^{\mu}$ nur aus Produkten der ersten Ordnung zusammensetzt $\overset{(2)}{h}{}^{\nu}{}^{\mu} \sim \overset{(1)}{h}{}^{\nu}{}_{\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\mu\alpha}$ [1], so vereinfachen sich die Forderungen der Einsteineichung in zweiter Ordnung:

$$\overset{(1)}{h}_{\mu\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\mu\alpha} = 0 \quad , \quad \overset{(2)}{h}{}_{\mu}{}^{\mu} = 0 \quad .$$

Durch Differentiation der ersten Folgerung kann man zwei weitere Bedingungen erhalten:

$$\left(\overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu}\overset{(1)}{h}{}^{\mu\,\nu}\right)_{|\alpha} = \overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu} + \overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu}{}_{|\alpha} = 2\,\overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu} = 0 \rightarrow \qquad \overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu} = 0 \tag{A.2}$$

$$\left(\overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu}\right)_{|\beta} = 0 \rightarrow \qquad \overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu}{}_{|\beta} = -\,\overset{(1)}{h}_{\mu\,\nu\,|\alpha\,|\beta}\overset{(1)}{h}{}^{\nu\,\mu} \quad .$$

A.3 Forderungen an die Higgs–Anregungsfelder

In der Arbeit von Hitzer (siehe [5], S:65) werden die linearen Forderungen an die angeregten Higgsfelder aus dem Energie–Impuls–Erhaltungssatz abgeleitet. Hier soll eine weitere Begründung vorschlagen werden, bei der die Forderungen an die angeregten Higgsfelder durch Nebenbedingungen aus der effektiven Metrik folgen. Wir nehmen an, daß die effektive Metrik ${}^{e}g^{\mu\nu}$ in folgender Weise durch die $\tilde{\gamma}$–Matrizen ausdrückbar sei:

$${}^{e}g^{\mu\nu} \quad \overset{!}{=} \quad {}^{c}g^{\mu\nu} := \frac{4}{v^2}\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu}) \quad . \tag{A.3}$$

Obwohl in der Spin–Eichtheorie alle Indizes mit der Minkowski-Metrik gehoben und gesenkt werden, wirkt die Raumzeit durch die Wechselwirkung der angeregten Higgsfelder so, als ob sie gekrümmt sei. Da diese anscheinend gekrümmte Raumzeit durch die effektive Metrik ${}^{e}g^{\mu\nu}$ beschrieben werden soll, muß diese auch gewisse Eigenschaften einer Metrik besitzen, die man durch Nebenbedingungen in die Theorie einbringen könnte. Die effektive Metrik sollte die folgende Eigenschaft besitzen:

$${}^{e}g^{\mu\nu}\,{}^{e}g_{\mu\nu} \quad \overset{!}{=} \quad 4 \quad . \tag{A.4}$$

Man kann diese Eigenschaft der effektiven Metrik einerseits dadurch gewährleisten, daß man sich eine kontravariante Metrik definiert, deren einzelne Ordnungen sich von ihrer kovarianten Form in einer solchen Weise unterscheiden, daß diese Forderung erfüllt ist. Geht man nach dieser Weise vor, so impliziert man, daß Indizes mit der effektiven Metrik gehoben und gesenkt werden. Möchte man die Beschreibung jedoch weiter in der flachen Raumzeit formulieren, so hat man – wie im folgenden gezeigt wird – Einschränkungen an die angeregten Higgsfelder zu formulieren.
Setzt man (A.3) in Gleichung (A.4) ein, entwickelt die $\tilde{\gamma}$–Matrizen um ihren Grundzustand und gliedert die einzelnen Ordnungen, so erhält man:

[1] Diese weitere Forderung wird ebenfalls durch die Bedingungen (4.13) und (4.9) nahegelegt.

$$
\begin{aligned}
{}^e g^{\mu\nu}\,{}^e g_{\mu\nu} \quad &= \quad 4 + 4\ \overset{(1)}{\epsilon_\mu}{}^{\mu} + 6\ \overset{(1)}{\epsilon^{\mu\nu}}\,\overset{(1)}{\epsilon_{\mu\nu}} + 4\ \overset{(2)}{\epsilon_\mu}{}^{\mu} + \ldots \overset{!}{=} 4 \\
&\rightarrow \quad \overset{(1)}{\epsilon_\mu}{}^{\mu} = 0 \quad , \quad 6\ \overset{(1)}{\epsilon^{\mu\nu}}\,\overset{(1)}{\epsilon_{\mu\nu}} + 4\ \overset{(2)}{\epsilon_\mu}{}^{\mu} = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Fordert man nun desweiteren, daß folgendes gilt:

$$
\overset{(2)}{\epsilon}{}^{\nu\ \mu} \sim \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu}{}_{\alpha}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu\alpha} \quad ,
$$

so erhält man die Forderungen (4.10).

Anhang B

Definition einer effektiven Metrik

In diesem Anhang wird die in [5] formulierte Definition einer effektiven Metrik auf nichtlineare Ordnungen verallgemeinert. Wie in dieser Arbeit wird die effektive Metrik über die Massenschalenbedingung definiert, die man aus der iterierten Dirac-Gleichung im niedersten WKB-Limes erhält.

Betrachtet man den klassischen Limes und vernachläßigt die Eichbosonen, so lautet die Dirac-Gleichung:

$$i\,\tilde{\gamma}^{\mu}\psi_{|\mu} + \frac{i}{2}\,\tilde{\gamma}^{\mu}{}_{|\mu}\psi - \frac{m}{4}\,\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}_{\mu}\psi = 0 \quad . \tag{B.1}$$

Nun wird die Symmetrie gebrochen, indem den $\tilde{\gamma}$-Matrizen der Grundzustand $\overset{(0)}{\gamma}{}_{\mu}$ zugewiesen wird. Man kann die Dirac-Gleichung dann wie folgt umformulieren:

$$i\,\gamma^{\mu}\,\mathcal{D}_{\mu}\psi - m\,\underbrace{\left(1 + \frac{\overset{(1)}{\epsilon} + \overset{(2)}{\epsilon}}{2} + \frac{1}{4}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}\right)}_{bis\;2.Ordnung}\psi = 0 \tag{B.2}$$

$$\text{mit:} \qquad \mathcal{D}_{\mu} = \underbrace{\partial_{\mu} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu}{}_{\mu}\,\partial_{\nu} + \frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu}{}_{\mu|\nu} + \overset{(2)}{\epsilon}{}^{\nu}{}_{\mu}\,\partial_{\nu} + \frac{1}{2}\,\overset{(2)}{\epsilon}{}^{\nu}{}_{\mu|\nu}}_{bis\;2.Ordnung} \quad , \quad \overset{(i)}{\epsilon} := \overset{(i)}{\epsilon}{}_{\mu}{}^{\mu} \quad .$$

Iteriert man die verallgemeinerte Dirac-Gleichung (B.2) und verwendet den folgenden WKB-Ansatz des fermionischen Dirac-Spinors:

$$\psi \;=\; \mathcal{O}\,e^{i\frac{W}{\hbar}} \quad \text{mit:} \quad \mathcal{O} = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{\mathcal{O}}\,\hbar^{n} \quad , \quad W = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{W}\,\hbar^{n} \quad ,$$

so erhält man im niedrigsten WKB-Limes die folgende Gleichung:

$$\underbrace{\frac{\eta^{\mu\nu} + 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + 2\,\overset{(2)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\tau}\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu\tau}}{1 + \overset{(1)}{\epsilon} + \overset{(2)}{\epsilon} + \frac{1}{4}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{2} + \frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}_{\alpha\beta}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}}}_{Korrekt\;bis\;2.Ordnung}\;\overset{(0)}{W}_{|\mu}\overset{(0)}{W}_{|\nu} - m^{2} = 0 \quad . \tag{B.3}$$

Interpretiert man $\overset{(0)}{W}_{|\mu}$ als den klassischen Limes des kanonischen Vierer-Impulses p_{μ} unseres betrachteten quantenmechanischen Teilchens, so hat die Gleichung (B.3) die Struktur einer Massenschalenbedingung:

$$ {}^{d}g^{\mu\nu} p_{|\mu} p_{|\nu} - m^2 = 0 $$

$$ {}^{d}g^{\mu\nu} \quad := \quad \underbrace{\frac{\eta^{\mu\nu} + 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + 2\,\overset{(2)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\tau}\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\nu\tau}}{1 + \overset{(1)}{\epsilon} + \overset{(2)}{\epsilon} + \frac{1}{4}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{2} + \frac{1}{2}\,\overset{(1)}{\epsilon}{}_{\alpha\beta}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\alpha\beta}}}_{Korrekt\ bis\ 2.Ordnung} \quad . \tag{B.4} $$

Man kann Gleichung (B.4) als die Definition einer für alle Teilchen erscheinenden effektiven Metrik ${}^{e}g^{\mu\nu}$ ansehen. Die angeregten Higgsfelder wirken, im klassischen Limes in einer solchen Weise auf das Teilchen ein, daß es einem Beobachter erscheint, als ob die Raumzeit gekrümmt wäre.

Stellen wir einige weitere Forderungen an die angeregten Higgsfelder, nämlich die Forderungen, die aus Anhang A folgen, so vereinfacht sich die effektive Metrik ${}^{d}g^{\mu\nu}$:

$$ {}^{d}g^{\mu\nu} \quad = \quad \eta^{\mu\nu} + 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + 2\,\overset{(2)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\tau}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\tau} \quad . \tag{B.5} $$

Es läßt sich nun folgendes bemerken:

- Verallgemeinert man Gleichung (B.5) auf höhere Ordnungen, so kann man die effektive Metrik als Antikommutator der Higgsfelder schreiben:

$$ {}^{d}g^{\mu\nu} \quad = \quad {}^{c}g^{\mu\nu} := \frac{4}{v^2}\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu}) \quad . \tag{B.6} $$

- Der Vergleich einer Metrik $g^{\mu\nu}$ des Riemann-Raums mit der effektiven Metrik ${}^{d}g^{\mu\nu}$ ist machbar, falls man die Metrik $g^{\mu\nu}$ um die Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu}$ entwickelt (siehe (4.12)). Man findet dann einen Zusammenhang zwischen angeregten Higgsfeldern $\epsilon^{\mu\nu}$ und den Abweichungen von der Minkowski-Metrik:

$$ \begin{aligned} g^{\mu\nu} \quad &= \quad \eta^{\mu\nu} + \overset{(1)}{h}{}^{\mu\nu} + \overset{(2)}{h}{}^{\mu\nu} \\ {}^{d}g^{\mu\nu} \overset{!}{=} g^{\mu\nu} \quad &\rightarrow \quad \overset{(1)}{h}{}^{\mu\nu} = 2\,\overset{(1)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} \quad , \quad \overset{(2)}{h}{}^{\mu\nu} = 2\,\overset{(2)}{\epsilon}{}^{(\mu\nu)} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\tau}\overset{(1)}{\epsilon}{}^{\nu\tau} \end{aligned} $$

$$ \Rightarrow \quad A = 2 \quad , \quad C = 2 \quad , \quad D = 1 \quad . $$

- Am anschaulichsten wird der Vergleich der Riemann-Metrik $g^{\mu\nu}$ mit der effektiven Metrik ${}^{d}g^{\mu\nu}$, wenn man die Tetraden-Formulierung der Metrik $g^{\mu\nu}$ im Riemann-Raum benutzt (siehe [1]):

$$ g^{\mu\nu} \quad = \quad e^{\mu(\sigma)} e_{(\sigma)}{}^{\nu} = e^{\mu(\sigma)} e^{(\rho)\nu}\,\eta_{(\sigma)(\rho)} \quad , \quad e^{\mu(\sigma)} : \text{Tetrade} $$

  und die effektive Metrik ${}^{d}g^{\mu\nu}$ wie folgt formuliert:

$$ {}^{d}g^{\mu\nu} \quad = \quad {}^{c}g^{\mu\nu} = \frac{4}{v^2}\,\mathrm{tr}(\tilde{\gamma}^{\mu}\tilde{\gamma}^{\nu}) = \frac{4}{v^2}\,k^{\mu}{}_{\alpha}k^{\nu}{}_{\beta}\,\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} = \frac{16}{v^2}\,k^{\mu}{}_{\alpha}k^{\nu}{}_{\beta}\,\eta^{\alpha\beta} = \frac{16}{v^2}\,k^{\mu}{}_{\alpha}k^{\nu\alpha} $$

$$ \text{mit:} \qquad k^{\mu}{}_{\alpha} := \delta^{\mu}{}_{\alpha} + \overset{(1)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\alpha} + \overset{(2)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\alpha} + \ldots \quad . $$

  Die so definierten Größen $k^{\mu}{}_{\alpha}$ sind den Tetradenfeldern $e^{\mu}{}_{(\sigma)}$ der klassischen Gravitationstheorie äquivalent, wobei ein wichtiger Unterschied hier noch angemerkt sei:
  Die Tetraden $e^{\mu(\sigma)}$ beschreiben anschaulich den Übergang von einer flachen Raumzeit $\eta^{(\sigma)(\rho)}$ in eine gekrümmte Raumzeit $g^{\mu\nu}$, und halten sich doch selbst eigentlich zwischen diesen beiden Raumzeiten auf, was dadurch zum Ausdruck kommt, daß der Index ${}_{(\sigma)}$ mit $\eta^{(\sigma)(\rho)}$ rauf gezogen wird, der Index ${}_{\mu}$ dagegen mit $g^{\mu\nu}$. Die Größe $k^{\mu}{}_{\alpha}$ hält sich jedoch voll im flachen Raum auf, da es in der Spin-Eichtheorie nur diesen gibt.

Anhang C

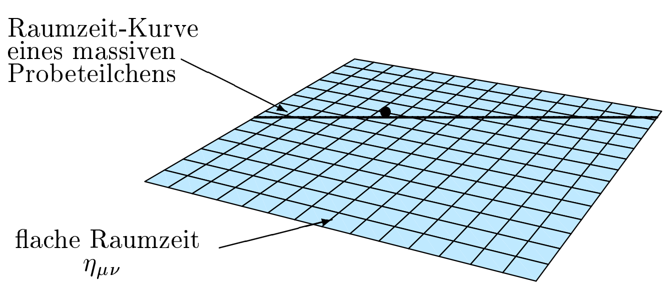
Graphischer Vergleich: Spin-Eichtheorie↔Einsteinschen Theorie

C.1 Vorwort

In diesem Anhang wird eine graphische Veranschaulichung der klassischen Gravitationstheorie mit der Spin–Eichtheorie vorgestellt. Es sollen hierbei keine neuen Ergebnisse erzielt werden, sondern lediglich eine mögliche Sichtweise der Unterschiede beider Theorien aufgezeigt werden. Da das Folgende möglichst allgemeinverständlich gehalten ist, treten an einigen stellen beabsichtigte Vereinfachungen auf.

C.2 Die klassische Gravitation

Die klassische Gravitation, beschrieben durch die Einsteinsche Theorie, ist eine geometrische Theorie der Raumzeit. Betrachtet man z.B. eine materie und gravitationsfeldfreie Raumzeit, so ist diese flach und kann durch die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Die Flachheit der Raumzeit wird einem Beobachter eines massiven Probeteilchens dadurch sichtbar, daß keine Gravitationskraft auf dieses Teilchen einwirkt, d.h. daß seine Raumzeit-Kurve bleibt unbeeinflußt.

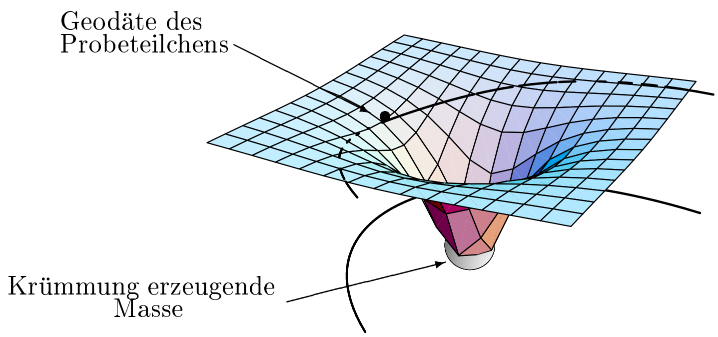


$$\delta \int \sqrt{-g}\, R \; d^4x = 0$$

$$\rightarrow \quad R_{\mu\nu} = 0$$

Formal ist die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ eine mögliche Lösung der Einsteingleichung $R_{\mu\nu} = 0$ des materiefreien Raumes. Die Einsteingleichung ergibt sich ihrerseits aus einer Variation des Wirkungsintegrals der Lagrangedichte $\mathcal{L} = \sqrt{-g}\, R$.
Bringt man nun ein massives Objekt in das System ein, so muß man zur Lagrangedichte $\mathcal{L}$ einen Zusatzterm $\mathcal{L}_M$ addieren, der sich dann in der Einsteingleichung als Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ der

Materie niederschlägt. Dieser Energie-Impuls-Tensor des Materieteilchens tritt nun als Quelle einer Raumzeit-Krümmung in Erscheinung. Diese gekrümmte Raumzeit beschreibt man durch eine raumzeitabhängige Riemann-Metrik $g_{\mu\nu}$, die man als Lösung der Einsteingleichung erhält. Fragt man sich, wie sich ein Probeteilchen in dieser gekrümmten Raumzeit verhält, so wird man auf die Geodätengleichung geführt, die besagt, daß sich Teilchen stets auf den kürzesten Verbindungsstrecken (extremale Weltlinie) in dieser gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit bewegen.

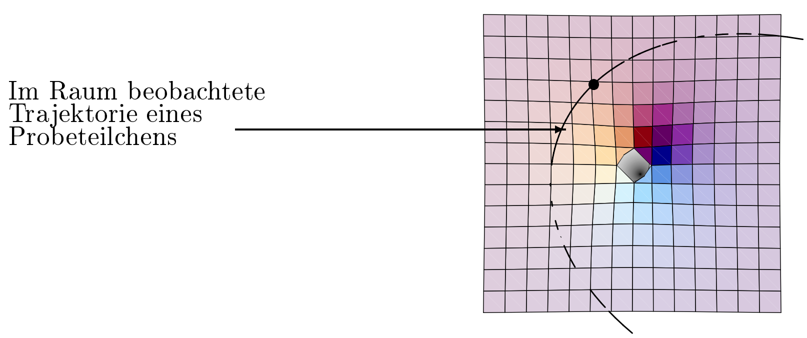


$$\delta \int \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\,\kappa} R + \mathcal{L}_M \right) d^4x = 0$$

$$\rightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = -\kappa\, T_{\mu\nu}$$

Lösung:$\rightarrow g_{\mu\nu}$

Einem Beobachter, der das physikalische Geschehen allein im dreidimensionalen Raum zu beobachten vermag, erscheint demnach die Wirkung der gekrümmten Raumzeit wie eine effektive Kraft im flachen Raum.



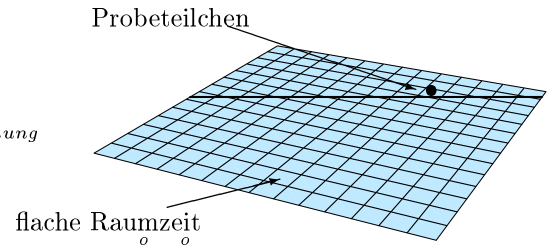
C.3 Die Spin-Eichtheorie der Gravitation

Die Spin-Eichtheorie ist, im Gegensatz zur klassischen Formulierung der Gravitation, keine geometrische Theorie. Wie bei allen Eichtheorien liegt auch der Spin-Eichtheorie eine Symmetrieeigenschaft des betrachteten Systems zugrunde: Teilchen und Antiteilchen verhalten sich in bezug auf eine gravitative Wechselwirkung wie identische Teilchen. Durch diese Invarianzforderung wird man auf raumzeitabhängige Felder $\tilde{\gamma}_\mu$ geführt, die im folgenden Higgsfelder genannt werden.
Betrachtet man wieder wieder ein materiefreies System, so ist die Lagrangedichte allein gegeben durch die kinetischen und potentiellen Energiebeiträge des Higgsfeldes. Die Variation des Wirkungsintegrals ergibt nun die Higgsfeldgleichung $H_{\mu\nu} = 0$, die als Bewegungsgleichung des Higgsfeldes anzusehen ist. Zeichnet man nun den niedrigsten Energiewert des Higgsfeldes aus und entwickelt das Higgsfeld um ihn, so bricht man die Symmetrie des Systems. Man kann zeigen, daß der symmetrische Teil der spontan gebrochene Higgsfeldgleichung in gewisser Näherung gleich der Einsteingleichung $R_{\mu\nu} = 0$ ist, wobei die angeregten Higgsfelder den ersten Korrekturen der Metrik entsprechen. Sieht man von Higgsfeld-Wellen ab und betrachtet nur den Grundzustand $\overset{o}{\tilde{\gamma}}_\mu$ des Higgsfeldes, so könnte man formal sagen, daß durch die spontane Symmetriebrechung die Metrik $\eta_{\mu\nu} = \overset{o}{\tilde{\gamma}}_{(\mu} \overset{o}{\tilde{\gamma}}_{\nu)}$ der flachen Raumzeit erzeugt wird.

$$\delta \int \mathcal{L}_H \, d^4x = 0$$

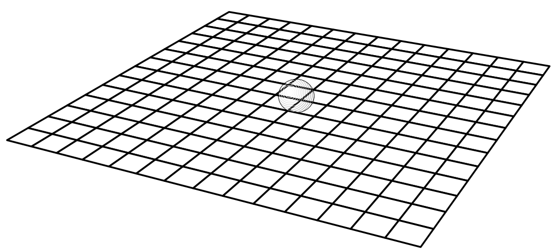
$$\rightarrow \quad H_{\mu\nu} = 0$$

$$\overset{Symmetriebrechung}{\Longrightarrow}$$



$$\eta_{\mu\nu} = \overset{o}{\tilde{\gamma}}_{(\mu} \overset{o}{\tilde{\gamma}}_{\nu)}$$

Wie auch zuvor in der Einsteinschen Theorie würde sich ein Probeteilchen auf einer geraden Raumzeit-Linie kräftefrei bewegen.
Möchte man nun ein System mit einem massiven Teilchen beschreiben, so besitzt das Higgsfeld eine weitere Aufgabe, nämlich die der Massenerzeugung. Der Grundzustand des Higgsfeldes nach Symmetriebrechung legt nun nicht nur die flache Struktur der Raumzeit fest, sondern erzeugt desweiteren die Massen der Teilchen, die in unserem betrachteten System massiv sind. Den angeregten Higgsfeldern kommt dagegen die Aufgabe der Vermittlung der Gravitationskraft zu.

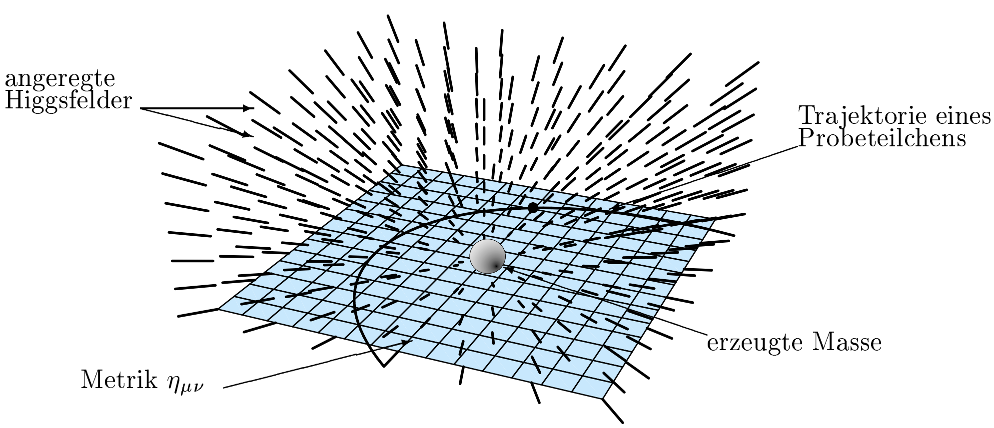


$$\delta \int (\mathcal{L}_H + \mathcal{L}_M) \, d^4x = 0$$

$$\rightarrow \quad H_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \tfrac{T}{2} \, g_{\mu\nu} \right)$$

$$\overset{Symmetriebrechung}{\Downarrow} \qquad\qquad \overset{Symmetriebrechung}{\Downarrow}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$



Die angeregten Higgsfelder vermitteln eine attraktive Kraft auf ein Probeteilchen, dessen Bewegung dann auf eine gekrümmte Bahn gezwungen wird.
Wie in der klassischen Theorie dargestellt wurde, kann man sich die kräftefreie Bewegung eines Teilchens in einer gekrümmten Raumzeit als effektive Kraftwirkung im flachen Raum vorstellen. In der Spin-Eich-Theorie kann man nun umgekehrt argumentieren: Die durch das Higgsfeld vermittelte Kraft erscheint einem vierdimensionalen Beobachter als eine Krümmung der Raumzeit, die man durch eine effektive Metrik ${}^{e}g_{\mu\nu} = \mathrm{tr}(\tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\nu)$ beschreiben kann. Die in der vierdimensionalen Raumzeit beobachtete Bewegung eines Probeteilchens ist wieder eine Geodäte in dieser gekrümmt erscheinenden Raumzeit.

Literaturverzeichnis

[1] L.D. Landau/E.M. Lifschitz *Band 2: Klassische Feldtheorie*. Akademie-Verlag-Berlin, 5. Auflage 1971

[2] C.W. Misner/K.S. Thorne/J.A. Wheeler *Gravitation*. Freeman and Company, 1. Auflage 1973

[3] J. Fibich *Modell der Vereinigung der Gravitation mit den übrigen Wechselwirkungen der Physik (Einbeziehung von Bosonen in die unitäre Gravitationstheorie) [Diplomarbeit]*. Universität Konstanz, 1996

[4] D. Ketterer *Unitäre Eichtheorie der gravito-elektro-schwachen Wechselwirkung [Diplomarbeit]*. Universität Konstanz, 1995

[5] E. Hitzer *The Higgs-Field Theoretic Extension of the Spin-Gauge Theorie of Gravity [Dissertation]*. Universität Konstanz, 1996

[6] F. De Felice/C.J.S. Clarke. *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, 1. Auflage 1990

[7] R. Sexl/H. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie*. BI-Wissenschaftsverlag, 3. Auflage 1987

[8] H. Stephani *Allgemeine Relativitätstheorie*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1. Auflage 1977

[9] J. Audretsch *Fermionen-Felder in der metrischen Gravitationstheorie [Dissertation]*. Universität Konstanz, 1971

[10] H. Dehnen, E. Hitzer $SU(2) \times U(1)$ *Gauge Gravity*. Int J Theor Phys. 1995; **34:** 1981–2001

[11] A. Geitner *Chirale Asymmetrie und Äquivalenzprinzip in der Spin–Eichtheorie [Diplomarbeit]*. Universität Konstanz, 1997

[12] H. Dehnen *Theorie der physikalischen Wechselwirkungen [Vorlesungsskript]*. Universität Konstanz, 1997 (Internet: http://kaluza.physik.uni-konstanz.de/DE/JP/Physik/Physik.html)

[13] T. Goldman, M. Nieto *The Arguments against "Antigravity" and the Gravitational Acceleration of Antimatter*. Physics Reports 205, No.5 (1991) 221–281

[14] H. Dehnen *Wie weit ist die Gravitation verstanden*. Festkolloquium zu Ehren von Ernst Schmutzer, Jena 1995

[15] R.A. Isaacson *Gavitational Radiation in the Limit of High Frequency*. Physical Review, Volume 166, Number 5 (1263–1280)

[16] D. Brill/J.B. Hartle *Method of the Self–Consistent Field in General Relativity and its Application to the Gravitational Geon*. Physical Review, Volume 135, Number 1B (B271–B278)

[17] A. Einstein *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Ann. d. Phys. **17** (1905)

[18] A. Einstein *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.*. Ann. d. Phys. **49** (1916)

[19] T. Fliessbach *Allgemeine Relativitätstheorie*. BI–Wissenschaftsverlag, 1990

[20] F.W. Hehl *Spin an d Torsion in General Relativity: I. Foundations*. Gen. Rel. Gra., Vol 4, No. 4, {333-349} (1973)

[21] R.M. Wald *General Relativity*. University of Chicago Press (1984)

Liste der verwendeten Symbole

Symbole der Spin–Eichtheorie (SET)

Lagrangedichten

$\mathcal{L}_{M_o}(\psi)$	Gewöhnliche fermionische Lagrangedichte
$\tilde{\mathcal{L}}_{M_o}(\chi_R, \varphi_L)$	Eichinvariante fermionische Lagrangedichte
$\tilde{\mathcal{L}}_{M}(\chi_R, \varphi_L)$	Eichinvariante fermionische Lagrangedichte mit Massenterm
$\mathcal{L}_F(\omega)$	Lagrangedichte der Eichfelder der SET
$\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$	Lagrangedichte des Higgsfeldes ohne Selbstwechselwirkung
${}^{kin}\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$	Kinetischer Beitrag zur Higgsfeldlagrangedichte $\mathcal{L}_H(\tilde{\sigma})$
$V(\tilde{\sigma})$	Higgspotential
$\mathcal{L}_{H_e}$	Verallgemeinerte Higgsfeldlagrangedichte mit Selbstwechselwirkung
$\mathcal{L}_F(\lambda_{\mu a})$	Lagrangedichte allgemeiner nichtabelscher Eichpotentiale
$\mathcal{L}_F(A_\mu)$	Fibische Formulierung der Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes
$\mathcal{L}$	Gesamte Lagrangedichte des betrachteten Systems

Matrizen und Higgsfelder

$\gamma^\mu = {\gamma^\mu}_A{}^B$	Gewöhnliche Diracmatrizen
$\sigma^\mu_{L/R}$	Links- und rechtshändige Zerlegung der Diracmatrizen
σ^i	Pauli–Matrizen
$\tilde{\gamma}^\mu$	Raumzeitabhängige Diracmatrizen bzw. Higgsfelder
$\tilde{\sigma}^\mu_{L/R}$	Raumzeitabhängige $\sigma^\mu_{L/R}$–Matrizen bzw. Higgsfelder
$\overset{(o)}{\tilde{\sigma}}_{\mu R/L}$	Links- und rechtshändiger Grundzustand der Higgsfelder in chiraler Formulierung
$\overset{(o)}{\tilde{\gamma}}_{\mu}$	Grundzustand der $\tilde{\gamma}$–Higgsfelder

Spinoren

$\psi, \overline{\psi}$	Gewöhnlicher und adjungierter Dirac–Spinor

χ_R	Rechtshändiger chiraler Spinor
φ_L	Linkshändiger chiraler Spinor
ψ_D	Umnormierter Dirac–Spinor
$\psi = \mathcal{O}\, e^{i\frac{W}{\hbar}}$	WKB–Ansatz des Dirac–Spinors

Metriken

$\eta^{\mu\nu}$	Minkowski–Metrik
${}^{e}g^{\mu\nu}$	Symbolischer Überbegriff für effektive Metrik
${}^{d}g^{\mu\nu}$	Durch den WKB–Limes der Diracgleichung definierte effektive Metrik
${}^{c}g^{\mu\nu}$	Durch eine Clifford–Algebra Struktur definierte effektive Metrik
$g^{\mu\nu}$	Metrik des Riemann Raums
${\delta_A}^C$	Kronecker Delta
$\mathbf{1}_2, \mathbf{1}_4$	Einheitsmatrix im zwei und vierdimensionalen Raum
s_{ab}	Gruppenmetrik der SET

Energie–Impulstensoren

$T_{\mu\nu}(\psi), {}^{H}T_{\mu\nu}(\psi)$	Fermionischer EIST
$T_{\mu\nu}(\omega)$	EIST der Eichbosonen der SET
$T_{\mu\nu}(A_\mu)$	Elektromagnetischer EIST
$T_{\mu\nu}(\tilde{\gamma})$	EIST des Higgsfeldes
$T_{\mu\nu}$	EIST des betrachteten Gesamtsystems
$\overset{(i)}{T}_{\mu\ \nu}$	i-te Ordnung des EIST's nach Symmetriebrechung

Felder, Potentiale und Ströme

$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu]$	Eichfelder der SET
$\omega_\mu = \omega_{\mu a}\tau^a$	Eichpotentiale der SET
$\omega_{\mu o} = B_\mu$	Eichboson der schwachen Hyperladung
$\lambda_{\mu a}$	Allgemeine abelsche oder nichtabelsche Eichpotentiale

$k^{\mu}{}_{\nu R/L} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu R/L})$	Rechts- und linkshändige Entwicklung der Higgsfelder um ihren Grundzustand
$k^{\mu}{}_{\nu}$	$k^{\mu}{}_{\nu R/L}$ im makroskopischen Limes
$\overset{(i)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\nu R/L}$	i-te Ordnung der rechts- und linkshändigen angeregten Higgsfelder
$\overset{(i)}{\epsilon}{}^{\mu}{}_{\nu}$	i-te Ordnung des makroskopischen Limes der angeregten Higgsfelder
$j^{\mu}{}_{a} = j^{\mu}{}_{a}(\psi) + j^{\mu}{}_{a}(\tilde{\gamma})$	Eichstromdichte der SET
$j^{\mu}{}_{a}(\psi)$	Stromdichte der Fermionen
$j^{\mu}{}_{a}(\tilde{\gamma})$	Stromdichte der Higgsfelder
$j^{\mu} = j^{\mu}(A_{\alpha})$	Stromdichte des elektromagnetischen Feldes

Weitere Symbole der SET

$U = e^{i\lambda_a \tau^a}$	Unitäre Transformation der $SU(2) \times U(1)$
$\tau^a = \frac{1}{2}\sigma^a$	Generatoren der $SU(2) \times U(1)$–Gruppe
λ_a	Gruppenparameter
$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ig\omega_{\mu}$	Kovariante Ableitung der SET
g	Kopplungsparameter der $SU(2) \times U(1)$–Gruppe
μ, λ	Parameter des Higgspotentials
k	Konstante des Yukawa–Kopplungsterms
$v = \sqrt{-\frac{12\mu^2}{\lambda}}$	Parameter des Grundzustands des Higgsfeldes bei Symmetriebrechung
$m = kv$	Masse der Fermionen
κ	Kopplungsparameter der zweiten Ordnung der Higgsfeldgleichung
$\mathcal{H}_{\mu}{}^{A}{}_{B} = 0$	Higgsfeldgleichung durch Euler–Lagrangegleichungen nach $\tilde{\gamma}^{\mu}{}_{A}{}^{B}$
$\mathcal{H}_{\mu\nu} = \mathcal{H}_{\mu}{}^{A}{}_{B}\gamma_{\nu B}{}^{A} = 0$	Higgsfeldgleichung
$\overset{(i)}{\mathcal{H}}{}_{(\mu\nu)}$	i-te Ordnung der Higgsfeldgleichung nach Symmetriebrechung
$\overset{(2)}{H}_{\mu\nu} := \overset{(2)}{\mathcal{H}}_{(\mu\nu)} + A_{\mu\nu\sigma}{}^{\vert\sigma}$	Zweite Ordnung der Higgsfeldgleichung plus Divergenzterm
$\alpha_1, \alpha_2, ..., \gamma_4$	Allgemeine Koeffizienten der Higgsfeldlagrangedichte $\mathcal{L}_{H_e}$
$A_{\mu\nu\sigma}{}^{\vert\sigma}$	Zur Higgsfeldgleichung addierter antisymmetrischer Divergenzterm

$B_{\mu\nu\sigma}{}^{\vert\sigma}$	Symmetrischer Divergenzterm der SET

Symbole der klassischen Theorie

$\mathcal{L}_R = \sqrt{-g}\,R$	Lagrangedichte der ART
$\mathcal{L}_{R_o}$	Lagrangedichte, die sich aus $\mathcal{L}_R$ durch Streichung von Divergenztermen ergiebt
${}^{K^o}\mathcal{L}_M$	Lagrangedichte massiver Fermionen in flacher Raumzeit
${}^{K}\mathcal{L}_M$	Allgemeinrelativistisch kovariant formulierte Lagrangedichte für massive Fermionen
$R_{\mu\nu}$	Ricci–Tensor
$\overset{(i)}{R}_{\mu\nu}$	i-te Ordnung des Ricci–Tensors
$\overset{(B)}{R}_{\mu\nu}$	Ricci–Tensor gebildet durch eine allgemeine Hintergrundsmetrik
${}^{B}g_{\mu\nu}$	Hintergrundsmetrik
$g_{\mu\nu}$	Metrik des Riemann–Raums
$\overset{(i)}{h}{}^{\mu\nu}$	i-te Korrektur zur kontravarianten Minkowski–Metrik
$\overset{(i)}{\underline{h}}{}_{\mu\nu}$	i-te Korrektur zur kovarianten Minkowski–Metrik
$T_{\mu\nu}$	Gesamter EIST des Systems (ohne Gravitationsfeld)
${}^{E}T_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}$	Einstein–Komplex
$t_{\mu\nu}$	Pseudo–EIST des Gravitationsfeldes
${}^{K}T_{\mu\nu}(\psi)$	Fermionischer EIST, der sich aus ${}^{K}\mathcal{L}_M$ ergibt
${}^{K}T(\psi)$	EIST–Skalar
${}^{K}\overset{(i)}{T}{}_{\mu\ \nu}(\psi)$	i-te Ordnung von ${}^{K}T_{\mu\nu}(\psi)$
${}_{\vert\vert\mu}$	Mit Christoffel–Symbol gebildete kovariante Ableitung der ART
$\psi_{\vert\vert\mu} = \psi_{\vert\mu} + \Gamma_\mu \psi$	Kovariante Ableitung des Dirac–Spinors
$\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu A}{}^{B}$	Ricci–Rotationskoeffizienten
$\hat{\gamma}^{\mu}{}_{A}{}^{B}$	Verallgemeinerte Raumzeitabhängige γ–Matrix der ART
$e_{(\sigma)}{}^{\mu}$	Tetradenfelder
$\hat{\zeta}$	Verallgemeinerte hermitesierende Matrix der ART

$\overset{(i)}{l}{}_{(\sigma)}{}^{\mu}$	i-ter Entwicklungstensor der Tetradenfelder
G	Gravitationskonstante
$(A, B, C, D, E, ...)$	Metrikkoeffizienten des Zusammenhangs (Metrik $\leftrightarrow$ angeregtes Higgsfeld)
${}^{*}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$	Verallgemeinerte Konnektionen mit Torsionsanteilen
$K_{\mu\nu}{}^{\alpha}$	Kontorsionstensor
${}^{*}R_{\mu\nu}$	Ricci–Tensor mit Torsionsanteilen

Allgemeine Symbole

${}_{\mu\ \nu\ \sigma\ \alpha \cdots}, \quad {}^{\mu\ \nu\ \sigma\ \alpha}\cdots$	Ko– und kontravariante Indizes der Raumzeit (1...4)
${}_{a\ b\ c\ d \cdots}, \quad {}^{a\ b\ c\ d}\cdots$	Ko– und kontravariante Indizes der Generatoren der $SU(2) \times U(1)$ (0...3)
${}_{A\ B\ C\ D \cdots}, \quad {}^{A\ B\ C\ D}\cdots$	Ko– und kontravariante Indizes des Spinorraumes (1...4)
${}_{(\mu)\ (\nu)\ (\sigma)\ (\alpha) \cdots}, \quad {}^{(\mu)\ (\nu)\ (\sigma)\ (\alpha)}\cdots$	Ko– und kontravariante Indizes im lokalen Minkowski–Tangentialraum (1...4)
$I_{(\mu\nu)}$	Symmetrischer Teil des Tensors $I_{\mu\nu}$: $(I_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(I_{\mu\nu} + I_{\nu\mu}))$
$I_{[\mu\nu]}$	Antisymmetrischer Teil des Tensors $I_{\mu\nu}$: $(I_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(I_{\mu\nu} - I_{\nu\mu}))$