

Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen

Eigenschaften und Nachweis

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
in Frankfurt am Main

von
Sabine Hossenfelder
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main (2003)

(D F 1)

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe–Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. H. Schmidt-Böcking

Gutachter: Prof. Dr. H. Stöcker, Prof. Dr. Dr. h.c. mult. W. Greiner

Datum der Disputation:

Vorwort

In dieser Dissertation werden die Eigenschaften von Schwarzen Löchern in einer Raumzeit mit zusätzlichen raumartigen Dimensionen untersucht.

Nach einer kurzen Einleitung in Kapitel 1, die der Motivation und der Zielsetzung dient, werden im ersten Teil zunächst die benötigten Grundlagen aus der Allgemeinen Relativitätstheorie (Kapitel 2) bereitgestellt. Im dritten Kapitel wird speziell auf Schwarze Löcher in der Allgemeinen Relativitätstheorie näher eingegangen. Im Kapitel 4 vollziehen wir die Idee der Extra-Dimensionen nach, wie sie von T. Kaluza und O. Klein um 1920 erstmals vorgestellt wurde, und sehen, wie sie sich weiter entwickelt hat.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der Wiederaufnahme dieser Idee Mitte der 90er Jahre, ihrem Potential zur Lösung ausstehender Probleme und die daraus folgenden beobachtbaren Konsequenzen. Dazu diskutieren wir in den Kapiteln 6 und 7 die zwei Modelle, die sich herausgebildet haben: das »Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali«-Modell (ADD) und das »Randall-Sundrum«-Modell (RS), sowie deren mögliche Überprüfung und die Randbedingungen, die existierende Daten bereits setzen.

Der dritte Teil fügt nun das Wissen der ersten beiden Teile zusammen. Dieser Teil enthält die eigenständigen Rechnungen dieser Arbeit und kann bei ausreichendem Vorwissen ohne die vorangehenden Erläuterungen gelesen werden.

Aufbauend auf das vorgestellte ADD-Modell, beginnen wir im Kapitel 8 mit der Rechnung zur Existenz von Schwarzen Löchern in dieser mehrdimensionalen Raumzeit. Im Folgenden wenden wir uns dann den Eigenschaften dieser Schwarzen Löcher zu. Wir untersuchen die Relevanz ihrer Produktion und den Einfluss der Extra-Dimensionen auf Observablen in Teilchenkollisionen (Kapitel 9). In Kapitel 10 betrachten wir insbesondere den thermischen Prozess der Evaporation und widmen uns kurz der Möglichkeit stabiler Überreste. Wir schließen unsere Untersuchung mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick auf weitere Betätigungsfelder.

Die Ergebnisse dieser Arbeit und thematisch angegliederte Untersuchungen unserer Arbeitsgruppe wurden veröffentlicht [202, 203, 204, 205, 206].

Sabine Hossenfelder, Frankfurt am Main, 28.2.2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Grundlagen	5
2	Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie	7
2.1	Die Einsteinschen Feldgleichungen	7
2.2	Anwendungen	12
2.3	Experimentelle Tests	19
2.4	Grenzen der ART	27
3	Schwarze Löcher	29
3.1	Die Schwarzschildlösung	29
3.2	Die Feldgleichungen unter Kugelsymmetrie	29
3.3	Eigenschaften der Schwarzschild-Lösung	31
3.4	Die Kerr-Newmann Lösung	38
3.5	Eigenschaften der Kerr-Newmann Lösung	40
3.6	Schwarze Löcher	41
3.7	Der Hawking-Effekt	46
3.8	Verdunstende Schwarze Löcher	48
4	Die Idee der Extra-Dimensionen	53
4.1	Einsteins Traum	53
4.2	Kaluza-Klein Theorien	54
4.3	Allgemeine Eichgruppen	62
II	Große Extra-Dimensionen	63
5	Die Renaissance der Extra-Dimensionen	65
5.1	Große Extra-Dimensionen	66

5.2	Quantenfelder in Großen Extra-Dimensionen	68
6	Das ADD-Modell	69
6.1	Gravitation mit LXDs	69
6.2	Felder in LXDs	71
6.3	Experimentelle Überprüfung	77
7	Das RS-Modell	83
7.1	RS Typ I	83
7.2	RS Typ II	91
7.3	Experimentelle Überprüfung	92
III	Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen	99
8	Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen	101
8.1	Die neue Skala	101
8.2	Die Metrik im ADD-Modell	103
8.2.1	Die n-dimensionale Schwarzschildlösung	104
8.2.2	Die n-dimensionale Kerr-Lösung	106
8.3	Schwarze Löcher im RS-Modell	109
9	Produktion Schwarzer Löcher	111
9.1	Partonen	111
9.2	Der geometrische Wirkungsquerschnitt	113
9.3	Der differentielle Wirkungsquerschnitt	114
9.4	Produktionsraten	116
9.5	Jets	117
10	Eigenschaften Schwarzer Löcher	123
10.1	Strahlung	123
10.2	Lebensdauer	126
10.3	Relics	128
10.4	Schlussworte	134
11	Zusammenfassung	137

Kapitel 1

Einleitung

Die Gravitation ist eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen, die die Abläufe in unserem Universum beschreiben.

Neben der Gravitation gibt es die elektromagnetische Wechselwirkung, die die meisten alltäglichen Erscheinungen erklärt, vom Licht bis zur chemischen Bindung. In ihrer quantisierten Form, der Quantenelektrodynamik (QED), zeigt sie sich als die zur Zeit exakteste aller Theorien und kann letzte Feinheiten wie den Lambshift der Wasserstofflinien oder das anomale magnetische Moment des Elektrons so präzise vorhersagen, dass mit den heute zur Verfügung stehenden Messmethoden noch keine Abweichungen zu diesen Vorhersagen festgestellt werden konnten.

Außerdem gibt es die starke Wechselwirkung, die die Kerne trotz der Coulombabstoßung zusammenhält. Die starke Wechselwirkung ist die Theorie der Quarks und Gluonen. Wie die QED ist sie eine Quantenfeldtheorie: die Quanten-Chromodynamik - QCD.

Auch die letzte der verbleibenden Wechselwirkungen, die schwache Wechselwirkung, ist eine solche Quantenfeldtheorie. Sie bestimmt unter anderem den β -Zerfall. Sie konnte erfolgreich mit der QED zur sogenannten »elektroschwachen Wechselwirkung« vereinigt werden. Die elektroschwache Wechselwirkung und die QCD wurden zusammengefaßt und bilden das Standardmodell der heutigen Teilchenphysik.

Die Gravitation ist bei weitem die schwächste dieser vier Kräfte. Das Verhältnis der gravitativen zur elektromagnetischen Kraft zwischen zwei Elektronen etwa ist von der Größenordnung 1 zu 10^{43} ! Der einzige Grund, aus dem wir Effekte der Schwerkraft überhaupt beobachten können ist, dass sie sich von den anderen drei Kräften dadurch unterscheidet, dass sie immer anziehend wirkt und sich so nicht neutralisieren kann. Auf diese Art und Weise ist es der Gravitationskraft möglich, sich aufzusummieren und zu messbarer Stärke anzuwachsen. Dies bringt jedoch mit sich, dass wir ihre Effekte nur bei großen Massen - wie sie stellare Objekte

besitzen - beobachten können.

Dieser Größenunterschied ist sowohl experimentell als auch theoretisch sehr unbefriedigend. Einerseits rückt er die Skala, ab der Quantengravitation zu beobachten sein wird, auf die Planckskala, also hin zu unerreichbaren Energien der Größenordnung einer Planckmasse (siehe auch 2.4) $m_P \approx 10^{19}$ GeV. Andererseits verhindert er eine einheitliche Beschreibung der Wechselwirkungen. Bis heute wissen wir nicht, wie die Gravitation in das Gebäude der Quantenfeldtheorien einzufügen ist.

Wir haben zwei Gruppen fundamentaler Theorien:

1. Das Standardmodell, beschrieben durch Yang-Mills Theorien verschiedener Eichgruppen
2. Und die Allgemeine Relativitätstheorie, die die Gravitation durch Eigenschaften des Raumes an sich erklärt.

Die typische Energieskala der elektroschwachen Wechselwirkung liegt etwa bei $m_{EW} \approx 1$ TeV, es liegen also 16 Größenordnungen zwischen dem Standardmodell und der Gravitation. Dieses sogenannte »Hierarchieproblem« (siehe auch 5.1) bereitet dem Physiker etliches Kopfzerbrechen, denn auf dem Weg zur großen Vereinheitlichung liegt ihm die Sonderrolle der gravitativen Wechselwirkung im Wege.

Eine Lösung dieses Problemes stellen die Modelle mit Großen Extra Dimensionen (**L**arge **eX**tra **D**imensions - **L**XDs) dar, auf die in dieser Arbeit näher eingegangen wird. Das Konzept der Extra-Dimensionen an sich ist nicht neu und tauchte in physikalischen Veröffentlichungen erstmal bereits Anfang des letzten Jahrhunderts auf (siehe auch Kap. 4). Die Vorstellung, dass unser Raum mehr als die sichtbaren drei räumlichen Dimensionen besitzt, hat schon viele fasziniert und schlägt sich auch immer wieder in der populärwissenschaftlichen oder Science Fiction Literatur nieder.

Ohne hier ins Detail zu gehen, wollen wir uns schon an dieser Stelle eine phänomenologische Sicht der zugrundeliegenden Idee beschaffen.

Betrachten wir dazu einen Körper allein in einer eindimensionalen Welt, die wir uns in Abb. 1.1 (oben) ansehen. Dieser Körper soll eine Ladung beliebiger Art haben, deren Feld mittels Kraftlinien dargestellt werden kann. Da der Körper die einzige Ladung in seiner Welt ist, ist er die einzige Quelle für die Kraftlinien, die sich gleichmäßig in alle Richtungen ausbreiten. In einer eindimensionalen Welt passiert dabei nichts Besonderes, schließlich haben die Kraftlinien nur eine Richtung zur Verfügung. Gehen wir nun ein paar Schritte näher heran, um einen weiteren kritischen Blick auf unseren geladenen Testkörper zu werfen, so sehen wir, dass seine Raumzeit gar nicht eindimensional ist! Sie ist eigentlich ein langer Streifen mit endlicher Breite, der bei genügend großem Abstand nur noch als ein-

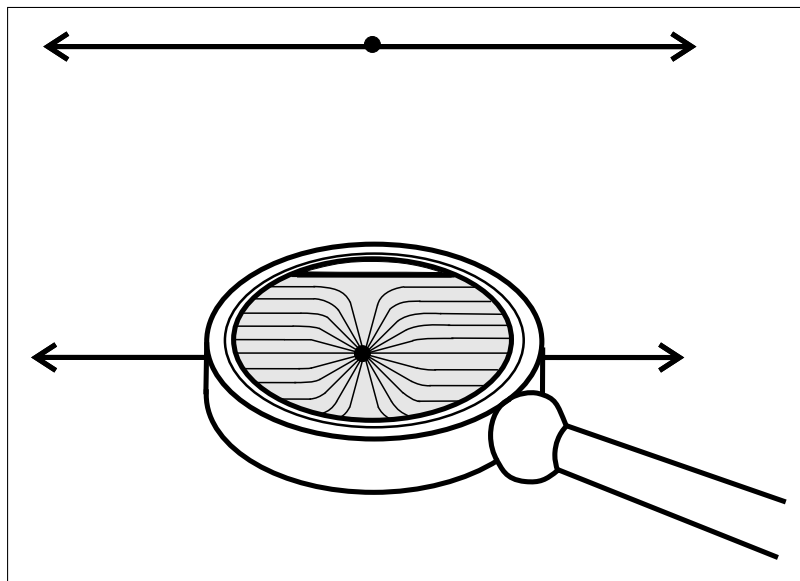


Abbildung 1.1: Schaut man näher hin, so dünnt das Kraftfeld am Anfang viel stärker aus.

dimensionale Line zu erkennen ist (Abb. 1.1, unten). Die Kraftlinien können sich also anfangs in zwei Dimensionen ausbreiten und dünnen dabei aus. Bei größerem Abstand müssen sie sich dann der Geometrie anpassen. Nach einem anfänglich beschleunigtem Abfall können sie sich nicht mehr verdünnen. Die Gesetzmäßigkeit des Kraftfeldes in der eindimensionalen Welt ist also bei großem Abstand dieselbe wie die in der »Streifenwelt«. Jedoch: der absolute Wert ist unterschiedlich. In der Streifenwelt hat die Ladung schon viel Kraft verloren, wenn sie an den Rand der Welt stößt.

Stellen wir uns nun vor, dass es zwei Arten von Felder gibt: die, die sich wie im obigen Beispiel in alle Richtungen ausbreiten können, und die, die sich von vornherein nur auf einem eindimensionalen Querschnitt ausbreiten können. Diese Felder können nun ursprünglich dieselbe Kraft haben, aber wenn wir sie nur aus der Entfernung betrachten, sieht eines von beiden viel schwächer aus.

In Teil II werden wir dieses simple Modell weiter verfolgen und quantifizieren. Es löst das Hierarchieproblem, aber wie das oft so ist, folgen neue Probleme auf dem Fuße. Nun haben wir die Frage zu klären, warum es in der Natur zwei Arten von Feldern gibt, und wodurch sie sich unterscheiden.

Den Entwicklungen der Superstringtheorie zufolge, leben wir in einer Welt mit 11 Dimensionen [1] und verschiedene Stringtheorien sind untereinander über Dualitäten verbunden. Unter den Stringtheorien ist die $E_8 \times E_8$ heterotische Stringtheorie [2] bis heute der beste Kandidat, um unsere Welt zu beschreiben, da von ihr erwartet wird, dass sie das Standardmodell enthält. Horava und Witten [3] haben

die Verbindung zwischen der 10-dimensionalen $E_8 \times E_8$ heterotischen Stringtheorie und einer 11-dimensionalen Theorie auf der Mannigfaltigkeit $\mathbf{R}^{10} \times \mathbf{S}^1/Z_2$ aufgezeigt. In dieser Theorie sind die Teilchen des Standardmodelles auf unsere 4-dimensionale Raumzeit gebunden; die Gravitonen hingegen können sich in der vollen Raumzeit bewegen. Dies ist genau das Szenario, das wir oben angesprochen haben. Die Stringtheorie liefert von ihrem Ansatz her, Teilchen nicht als null-dimensionale Punkte, sondern als ein-dimensionale Kurven anzusehen, von Natur aus zwei Arten dieser sog. »Strings«: die offenen und die geschlossenen Strings.

Die in dieser Arbeit betrachteten Modelle erheben keinen Anspruch auf Fundamentalität, jedoch können sie alle durch niederenergetische Limiten der Stringtheorie [4, 5, 6] motiviert werden. Dadurch liefern sie ein nützliches Werkzeug, um den Einfluss von zusätzlichen Dimensionen auf die Physik auszuloten und erste Erkenntnisse über die Topologie unserer Raumzeit zu gewinnen.

Eine Antwort auf diese Frage, wie die Bewegung der Teilchen des Standardmodells auf unsere Untermannigfaltigkeit beschränkt wird, liefert unser Ansatz nicht. Er läßt sich aber betrachten, als eine vereinfachte Situation der Stringtheorie, als ein Modell, das dazu dient, die Eigenschaften dieses Ansatzes zu erarbeiten. Wir wollen uns in dieser Arbeit auf den pragmatischen Standpunkt stellen, das Modell anzusehen und seine Konsequenzen zu erörtern, die eine eventuelle Entscheidung durch das Experiment ermöglichen.

Vom »Warum« wechseln wir zum »Wie«.

Teil I

Grundlagen

Kapitel 2

Die klassische Allgemeine Relativitätstheorie

In diesem Kapitel wollen wir die Grundlagen aus der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), die für uns von Belang sein werden, kurz einführen. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen, kann dabei auf viele wichtige Dinge nur peripher eingegangen werden. Wir müssen uns auf die Dinge beschränken, die zum Verständnis der darauf folgenden Kapitel unerlässlich sind. Für weitere Details siehe z.B. [7, 8, 9, 10, 11].

2.1 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Das Äquivalenzprinzip

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) basiert auf dem sogenannten Äquivalenzprinzip, welches aussagt, dass – lokal – die Effekte der Gravitation dieselben sind, wie die, die durch Beschleunigung in einem Raum ohne Gravitationsfeld hervorgerufen werden. Man kann dies auch formulieren als die Gleichheit von schwerer und träger Masse. Mathematisch gesprochen führt dies zur Übersetzung der Gleichungen der Speziellen Relativitätstheorie in Tensorgleichungen. Diese gewährleisten, dass die Gleichungen unabhängig von der Wahl des Koordinatensystemes die gleiche Form bewahren. Man sagt auch, sie sind »kovariant« .

Die Forderung der Kovarianz führt zu der Notwendigkeit, die Differentiation aus dem flachen Raum in den gekrümmten Raum kovariant zu übersetzen. Dazu ist es notwendig, den Begriff der linearen Näherung - d.h. des Tangentialraumes - zu verallgemeinern. Dies geschieht im Rahmen der »Differentialgeometrie«. Diese kovarianten Ableitungen werden im folgenden mit einem ∇ dargestellt. Die Schreibweise ∂ kennzeichnet wie üblich die »normalen« partiellen Ableitungen.

8 KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Um eine explizite Form für diese Ableitung zu erhalten, muss erst eine Möglichkeit gefunden werden, den gekrümmten Raum und seine Eigenschaften zu beschreiben. Der »Metrische Tensor« $g_{\mu\nu}$ spielt dabei die zentrale Rolle. Strenggenommen ist es ein Tensorfeld, $g_{\mu\nu}(x_\nu)$. Es beschreibt Längen und Winkelverhältnisse an jedem Punkt der Raumzeit. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ist die Größe, nach der wir suchen, wenn wir unseren Raum beschreiben wollen.

Mit den sogenannten »Christoffelsymbolen«, die sich aus den ersten Ableitungen der Metrik berechnen

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right) \quad (2.1)$$

bekommt man für die kovariante Ableitung, am Beispiel eines Vektors v^{μ} , die folgende Form

$$\nabla_{\nu}v^{\mu} = \partial_{\nu}v^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\gamma}v^{\gamma} . \quad (2.2)$$

Aus dieser Ableitung kann man nun weiter die Krümmung F konstruieren¹:

$$F_{\mu\nu} = [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] . \quad (2.3)$$

Sie misst, inwiefern die kovarianten Ableitungen kommutieren.

In der ART wird die Krümmung statt mit F oft mit R bezeichnet. Die Krümmung ist ein Tensor vierter Stufe, der nach Wahl einer lokalen Basis mit die Komponenten $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ hat. Aus diesem Tensor berechnet man durch Kontraktion den Ricci-Tensor $R_{\alpha\beta} = R^{\nu}_{\alpha\nu\beta}$ und den Krümmungsskalar $R = R^{\nu}_{\nu}$.

Bei der Übersetzung von speziell-relativistischen Gleichungen in allgemein-relativistische Gleichungen muss berücksichtigt werden, dass die kovarianten Ableitungen im Gegensatz zu den partiellen Ableitungen i. A. nicht vertauschen.

Masse krümmt den Raum

Die Einsteinschen Feldgleichungen beschreiben die Wirkung einer Energieverteilung auf die Raumzeit. Diese Energieverteilung ist Ursache für die Raumkrümmung.

Als Quelle dient der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$. Er enthält die Energiedichte, Ströme und Impulse sowie den Druck. Wir können fünf Forderungen aufstellen, die zur Herleitung der Feldgleichungen genügen.

1. Die Gleichungen sind von der Form $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, also Tensorgleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor als Quelle. $G_{\mu\nu}$ soll eine rein geometrische Größe darstellen. $G_{\mu\nu}$ wird auch manchmal als der »Einstein-Tensor« bezeichnet .

¹Die eckigen Klammern bezeichnen wie üblich den Kommutator.

2. $G_{\mu\nu}$ soll höchstens zweiter Ordnung in g sein (also linear in den zweiten Ableitungen oder quadratisch in den ersten). Dies ist ein Erfahrungswert, den wir aus anderen Theorien übernehmen.
3. Die totale Divergenz $\nabla_\mu T^\mu_\nu$ soll verschwinden. Das ist Ausdruck der Energie-Impuls-Erhaltung.
4. Der Newtonlimes soll erfüllt sein, d.h. im Grenzfall geringer Massedichte und im Limes langsamer Bewegungen soll Newtons Gravitationsgesetz reproduziert werde.
5. Der flache Raum $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ soll eine Lösung sein.

Man kann nun zeigen (das wollen wir hier nicht im Detail nachvollziehen, siehe z.B. [8]), dass jeder Tensor, der nur die Metrik, deren erste und zweite Ableitungen enthält, sich schreiben lässt in der Form:

$$C_1 R_{\alpha\beta} + C_2 R g_{\alpha\beta} + C_3 g_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

Aus der Bianchi-Identität

$$\nabla^\alpha (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) = 0 \quad , \quad (2.5)$$

die für die Krümmung immer gelten muss und Ausdruck der Energieerhaltung ist, finden wir $2C_2 = -C_1$ und aus der letzten Forderung $C_3 = 0$. Damit haben wir:

$$T_{\alpha\beta} = C_1 (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}) \quad (2.6)$$

und benutzen nun noch den Newtonlimes, um die letzte Konstante zu eliminieren (Siehe auch S. 31 ff). Man erhält

$$C_1 = \frac{1}{-8\pi G} \quad (2.7)$$

und damit die Einsteinschen Feldgleichungen zu:

$$\boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta}} \quad . \quad (2.8)$$

Diese Gleichungen, die wir im Folgenden mit EFG bezeichnen, bilden ein System von 16 nichtlinearen gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Wenn man die Symmetrie der auftretenden Tensoren berücksichtigt, verbleiben 10 unabhängige Einträge im metrischen Tensor, zu deren Bestimmung wir 10 Gleichungen haben. Allerdings sind die Feldgleichungen verbunden durch die 4 Bianchi-Identitäten (2.5), die uns schließlich die Energie-Impuls-Erhaltung gewährleisten. So haben wir also vier Freiheitsgrade übrig². Diese sind zu erklären mit der Freiheit in der Wahl eines Koordinatensystems. Wenn wir sie eliminieren wollen, so müssen wir zusätzliche Einschränkungen fordern. Diese spezielle Wahl eines Koordinatensystems bezeichnet man in der ART auch als »Eichung«.

Im Vakuum, also $T_{\mu\nu} = 0$, können wir die Gleichungen mit $g_{\alpha\beta}$ kontrahieren und erhalten mit $g^\alpha_\alpha = 4$, dass $R = 0$ ist. Damit lauten die Feldgleichungen im Vakuum einfach

$$R_{\alpha\beta} = 0 \quad . \quad (2.9)$$

Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Man kann die Einsteinschen Feldgleichungen auch aus einem Variationsprinzip herleiten. Die Lagrange-Dichte der ART \mathcal{L}_{ART} kann man sich durch die Forderungen konstruieren, dass sie

1. ein Skalar sein soll und
2. eine Funktion von $g_{\mu\nu}$ und dessen Ableitungen .

Da es keinen nichttrivialen Skalar gibt, der nur $g_{\mu\nu}$ und erste Ableitungen davon enthält, ist die einfachste und naheliegendste Wahl

$$\mathcal{L}_{ART} = \sqrt{-g}R \quad . \quad (2.10)$$

Natürlich ist diese Lagrangedichte nicht eindeutig, so könnten zum Beispiel höhere Potenzen von R vorkommen.

Es ist erwähnenswert, dass man zunächst erwarten würde, dass die dynamischen Gleichungen für $g_{\mu\nu}$ dritter Ordnung in den Ableitungen sind, da schon R zweiter Ordnung ist. Es zeigt sich jedoch, dass diese Terme bei der Variation verschwinden (siehe z.B. [11]).

²10 Gleichungen und 10 Größen bleiben 0 Freiheitsgrade. 10 Gleichungen minus 4 Relationen zwischen diesen und 10 Größen, bleiben 4 Freiheitsgrade. Diese Tatsache führte dazu, dass Einstein seine aufgestellten richtigen Feldgleichungen zunächst wieder verwarf, weil er die Freiheitsgrade als unphysikalisch einstufte.

Freier Fall

Eine Geodäte ist eine Kurve $x_\mu(\tau)$, die ihren eigenen Tangentialvektor $t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ paralleltransportiert, und ist damit die Verallgemeinerung einer geraden Linie im flachen Raum. Sie beschreibt die Trajektorie, auf der sich ein Körper bewegt, auf den keine Kräfte einwirken. Die Gravitation wirkt durch die Raumzeit selber und ist im Formalismus der ART lediglich eine Scheinkraft.

Wir erhalten die Geodätengleichung aus der Forderung, dass die Ableitung des Tangentialvektors in Richtung der Kurve selber verschwinden soll

$$\nabla_{x_\mu(\tau)} t^\alpha = 0 \quad . \quad (2.11)$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\nabla_{x_\mu(\tau)} t^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu t^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\tau} \nabla_\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \quad (2.12)$$

und mit der Definition der kovarianten Ableitung (2.2)

$$\nabla_{x_\mu(\tau)} t^\alpha = \frac{dx^\mu}{d\tau} \partial_\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \quad . \quad (2.13)$$

Da $\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{d\tau} \partial_\nu$ ist, haben wir die Geodätengleichung in Koordinaten in der Form

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\kappa}{d\tau} = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Die Γ -Terme verschwinden im flachen Raum oder in einem geeigneten Koordinatensystem.

Ein Punktteilchen, das in ein durch $g_{\mu\nu}$ gegebenes Gravitationsfeld gebracht wird und dessen eigene Masse zu gering ist, um eine wesentliche Änderung der Hintergrundgeometrie hervorzurufen, wird sich auf einer solchen Kurve bewegen, wie sich ein freies Punktteilchen im flachen Raum auf einer Geraden bewegt. Der Freie Fall im Gravitationsfeld wird durch die Geodätengleichung beschrieben. τ ist die Eigenzeit auf der Weltlinie der Geodäte, solange es sich um zeitartige Kurven handelt (d.h. $d\tau^2 > 0$), im Falle von Photonen ($d\tau^2 = 0$, lichtartig) geht man zu einem beliebigen Parameter über, der dann nicht mehr die Interpretation der Eigenzeit hat.

Hat der Körper eine räumliche Ausdehnung, die nicht vernachlässigt werden kann – er kann also rotieren und Gezeitenkräfte erfahren –, so reicht die Geodätengleichung zur Beschreibung seiner Bewegung nicht mehr aus.

Es gibt noch weitere Möglichkeiten, die Geodätengleichung herzuleiten, die sich in den verschiedenen Standardwerken über ART oder Differentialgeometrie

12KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

finden (z.B. [7, 8, 9, 10]). Die wohl geläufigste Herangehensweise erfolgt über die Variation des Längenelementes, wobei sich eine Geodäte dann als Kurve extremalster Länge in der gegebenen Raumzeit auszeichnet – bei einer Lorentzischen Metrik, die nicht positiv definit ist, ist das jedoch interpretationsbedürftig. Von der physikalischen Seite gelangt man über die Variation der Lagrangefunktion eines Punktteilchens zum selben Ergebnis.

Die Lagrangefunktion L eines Teilchens mit Masse m ist dabei gegeben durch

$$L = m \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} . \quad (2.15)$$

Ich möchte noch anmerken, dass man die Geodätengleichung auch aus den Einsteinschen Feldgleichungen herleiten kann, indem man den Energie-Impuls-Tensor als den eines Punktteilchens ansetzt (nachzulesen zum Beispiel in [32]).

2.2 Anwendungen

Die Anwendungen der ART sind breit gefächert. Sie reichen von der Entfernungsbestimmung ferner Planeten über Theorien zur Strukturbildung im Universum bis hin in so alltägliche Bereiche wie das GPS (Global Positioning System). Ganz grob kann man auf der theoretischen Seite drei Bereiche unterscheiden: die Astrophysik, die Kosmologie und die Behandlung kleiner Störungen der Raumzeit, die in der Theorie der linearen Näherung resultiert.

Die Astrophysik

Die Astrophysik ist wohl eine der ältesten Wissenschaften überhaupt. Im Altertum musste sich der Sternkundige bei seiner Erforschung der Gesetze des Weltalls allein auf seine Augen und seine Intuition verlassen. Heutzutage stehen uns eine Vielzahl von Meßinstrumenten höchster Präzision zur Verfügung. Das Hubble-Space Teleskop erlaubt es, noch bis in Entfernungen von ca. 14 Milliarden Lichtjahren, und damit weit zurück in die Vergangenheit unseres Universums zu blicken.

Themen, die typischerweise in der Astrophysik behandelt werden sind die Prozesse von Planeten, Sternen und Galaxien und die Rückschlüsse, die aus Meßdaten gewonnen werden können. Um die Eigenschaften der untersuchten Objekte zu erfassen, wird auf die Techniken einer Vielzahl anderer physikalischer Disziplinen zurückgegriffen, unter anderem die (Quanten-) Elektrodynamik, Thermodynamik oder Kern- und Teilchenphysik.

Im Inneren des Sternes erhält er aus dem kugelsymmetrischen Ansatz die »Tolmann-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung« für den Druck p und die Energiedichte ρ

bzw. die zur Dichte gehörige Massenverteilung $m(r)$:

$$\frac{\partial p(r)}{\partial r} = -(p(r) + \rho(r)) \left(\frac{4\pi r^2 + m(r)}{r(r - 2m(r))} \right) . \quad (2.16)$$

Mit einer Zustandsgleichung der Materie wird diese Gleichung ergänzt und das Gleichungssystem geschlossen.

Die Außenraumlösung einer kugelsymmetrischen Materieverteilung erhält man durch einen rotationsinvarianten Ansatz für die Metrik, mit dem man in die EFG mit verschwindendem Energie-Impuls-Tensor geht. Die Lösung ist eindeutig (bis auf Koordinatenwechsel versteht sich) und hat einen freien Parameter M , der ein Maß für die Masse im Inneren ist. Diese Lösung wurde im Jahre 1916 von Karl Schwarzschild [12] gefunden und trägt daher den Namen »Schwarzschild-Metrik«. Diese Metrik hat die Form

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.17)$$

Wir werden im nächsten Kapitel (3.1 - 3.3) genauer darauf zurückkommen.

Verzichtet man auf die Kugelsymmetrie und lässt zu, dass die Materie mit einem Drehmoment J um eine Achse rotiert, und lässt man weiter zu, dass die Materie eine elektrische Ladung Q trägt, so erhält man eine weitere Klasse von Lösungen. Diese Lösungen sind durch die drei Parameter M , Q und $a =: J/M$ klassifiziert. Es handelt sich dabei um die sogenannten »Kerr-Newmann-Metriken«:

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \left(\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} \right) d\phi dt \\ & + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ \rho^2 = & r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \\ \Delta = & r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Auch diese Metrik und ihre Eigenschaften werden wir im Folgenden noch näher kennenlernen (siehe Kapitel 3.4 und 3.5).

Die Kosmologie

In der Kosmologie wird das Weltall und seine Dynamik vom Urknall an als Ganzes beschrieben. Obwohl die Kraft der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung um Größenordnungen über der Gravitationskraft liegen, so spielen sie alle bei großen Entfernungen keine Rolle mehr, denn die Ladungen dieser Kräfte neutralisieren sich. Zur Bestimmung der Dynamik des Weltalls auf großen Skalen sind daher nur die Feldgleichungen der Gravitation relevant.

14 KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

Der zentrale Ausgangspunkt ist dabei das sogenannte »kosmologische Prinzip«. Dieses besagt, dass das Universum auf großen Skalen überall und in alle Richtungen gleich ist. Mit diesen Eigenschaften der Homogenität und Isotropie wird die Materiedichte des Universums wie ein Gas behandelt, wobei hier ganze Galaxien die Rolle der Moleküle übernehmen. Das kosmologische Prinzip wird in hoher Genauigkeit bestätigt durch die Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB – **C**osmic **M**icrowave **B**ackground) . Im Rahmen der Kosmologie werden

Er nimmt den Energie-Impuls-Tensor eines idealen Gases der Dichte ρ und Druck p mit der Vierergeschwindigkeit u_μ :

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

und setzt diesen als Quellterm in die Einsteinschen Feldgleichungen ein. Vielleicht addiert er noch einen Term für eine mögliche Energiedichte des Vakuums $\Lambda g_{\mu\nu}$ hinzu, dabei führt er die kosmologische Konstante Λ ein. Als Lösung der Feldgleichungen erhält er die sogenannten »Robertson-Friedmann-Walker« Metriken mit dem Linienelement (siehe z.B. [7, 8])

$$ds^2 = -dt^2 - \mathcal{R}^2(t) \left[d\chi^2 + \Sigma^2 \left(d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right] \quad , \quad (2.20)$$

wobei $\Sigma = \sin \chi, \chi$ oder $\sinh \chi$, je nachdem ob das Universum positive, keine oder negative Krümmung hat. Der sogenannte »Weltradius« \mathcal{R} hängt dabei mit dem Materiegas des Universums über die Gleichungen

$$\rho + \Lambda = 3 \frac{k + \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} \quad , \quad p - \Lambda = - \frac{2\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{R}}^2 + k}{\mathcal{R}^2} \quad (2.21)$$

zusammen, wobei $k = 1, 0, -1$, entsprechend den drei verschiedenen Lösungen ist. Diese Gleichung erhält man aus den Einsteinschen Feldgleichungen durch einsetzen der Metrik (2.20). Wie schon zuvor benötigen wir nun eine Zustandsgleichung $\rho(p)$, um das Gleichungssystem zu schließen. In der zeitlichen Entwicklung des Universums ist dabei vor allen Dingen interessant:

- Das heutige Universum mit $p \ll \rho$, in dem wir den Druck p vernachlässigen können.
- Und das frühe strahlungsdominierte Universum mit $3p = \rho$.

Mit diesen Gleichungen erhält man nun die Dynamik des Weltradius, abhängig von den eingegangenen Parametern k und Λ . Es bleibt die Frage, wie der

Anschluss an die Beobachtung aussieht und ob man daraus auf das verwirklichte Modell des Universums und den aktuellen Zeitpunkt der Entwicklung zurück schliessen kann.

Dazu betrachten wir Licht der Frequenz ν_0 , das in unserem Universum zur Zeit t_1 am Ort χ_1 ausgesandt wird und zur Zeit t_0 am Ort χ_0 empfangen wird. Das Licht breite sich rein in radialer Richtung aus, es ist also $d\theta = d\phi = 0$. Wie sieht die Frequenz ν_0 beim Empfänger aus? Wir stellen also die Frage nach der kosmologischen Rotverschiebung. Dazu betrachten wir eine Wellenlänge des Lichtes, ausgesandt zwischen t_1^a und t_1^e und angekommen zwischen den Zeitpunkten t_0^a und t_0^e .

Das Verhältnis von entsandter zu empfangener Frequenz ist antiporportional dem der dazugehörigen Schwingungsdauern T_0, T_1 . Da $g_{00} = -1$ ist, hängen diese wie folgt zusammen mit der Eigenzeit der Beobachter

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{T_1}{T_0} = \frac{t_1^e - t_1^a}{t_0^e - t_0^a} . \quad (2.22)$$

Für das Licht ist $ds^2 = 0$, es bewegt sich also auf Kurven mit $d\chi\mathcal{R}(t) = \pm dt$. Nun erhalten wir durch Integration über die Lichtstrahlen

$$\chi_1 - \chi_0 = \int_{\chi_0}^{\chi_1} d\chi = \int_{t_0^a}^{t_1^a} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} = \int_{t_0^e}^{t_1^e} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} \quad (2.23)$$

oder auch

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0^a}^{t_1^a} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} + \int_{t_1^e}^{t_0^e} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} \\ &= \int_{t_0^a}^{t_0^e} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} - \int_{t_1^a}^{t_1^e} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} \\ &\approx \frac{t_0^a - t_0^e}{\mathcal{R}(t_0)} - \frac{t_1^a - t_1^e}{\mathcal{R}(t_1)} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Im letzten Schritt sind wir dabei davon ausgegangen, dass für die zeitliche Änderung des Weltradius $t_0^a - t_0^e$ und $t_1^a - t_1^e$ sehr kleine Zeitschritte sind. Setzen wir nun noch ein, dass t_0 die heutige Zeit sei, die Empfangszeit, und $\mathcal{R}(t_0) = \mathcal{R}_0$ genannt wird. Damit erhalten wir für die kosmologische Rotverschiebung, die normalerweise mit z bezeichnet wird

$$1 + z = \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}(t_1)} . \quad (2.25)$$

Nun gilt es noch, diese Relation und die dimensionslose Koordinate χ mit dem physikalischen Abstand in unserem Universum zu identifizieren. Der Einfachheit

16 KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

halber setzen wir uns, den Empfänger, in den Ursprung des Koordinatensystemes: $\chi_0 = 0$. Wie wir dem Linienelement (2.20) entnehmen, ist der heutige ($t = t_0$) Abstand zwischen Sender und Empfänger des betrachteten Lichtpulses gegeben durch $l = \mathcal{R}(t_0)(\chi_1 - \chi_0) = \mathcal{R}_0\chi_1$. Ähnlich wie in (2.23) können wir dies schreiben als

$$l = \mathcal{R}_0 \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{\mathcal{R}(t)} . \quad (2.26)$$

Wir setzen nun eine Taylorentwicklung von \mathcal{R} um den heutigen Zeitpunkt t_0 von zweiter Ordnung an. Für l benötigen wir nur eine Entwicklung von \mathcal{R}^{-1} in erster Ordnung, da in (2.26) noch integriert wird. Ein Punkt kennzeichnet die partielle Ableitung nach t , der Index 0 ist jeweils der Wert an der Stelle t_0

$$\mathcal{R}(t) \approx \mathcal{R}_0 + \dot{\mathcal{R}}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{\mathcal{R}}_0(t - t_0)^2 \quad (2.27)$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}(t)} \approx \frac{1}{\mathcal{R}_0} + \frac{\dot{\mathcal{R}}_0}{\mathcal{R}_0^2}(t - t_0) . \quad (2.28)$$

Damit erhalten wir zunächst durch Einsetzen von (2.28) in (2.26)

$$l \approx (t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 \quad \text{mit} \quad H_0 =: \frac{\dot{\mathcal{R}}_0}{\mathcal{R}_0} , \quad (2.29)$$

wobei H_0 die sogenannte »Hubble-Konstante« ist, ein Maß für die momentane Expansionsrate des Universums. Als Hubble-Rate im allgemeinen bezeichnen wir die Größe

$$H(t) =: \frac{\dot{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}} . \quad (2.30)$$

Weiter erhalten wir außerdem durch Einsetzen von (2.28) in (2.25) für z

$$z \approx H_0(t_0 - t_1) + H_0^2 \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) (t_0 - t_1)^2 \quad \text{mit} \quad q_0 =: \frac{\ddot{\mathcal{R}}_0\mathcal{R}_0}{\dot{\mathcal{R}}_0^2} , \quad (2.31)$$

wobei q_0 der dimensionslose »Akzelerationsparameter« ist, ein Maß für die heutige Beschleunigung der Expansion des Universums. Für $q_0 > 0$ verlangsamt sich die Expansion, für $q_0 < 0$ wird sie schneller.

Zu guter Letzt stellen wir jetzt die Relation zwischen der Rotverschiebung z und der Entfernung zur Lichtquelle l her indem wir (2.29) nach $t_0 - t_1$ auflösen und damit in (2.31) die Zeitdifferenz eliminieren. Damit erhalten wir die Rotverschiebungs-Entfernungsrelation

$$z \approx H_0 l + \frac{1}{2}(H_0 l)^2 (1 + q_0) \quad . \quad (2.32)$$

Die hier eingeführten Parameter H_0 und q_0 sind durch Beobachtung ferner Galaxien messbar und hängen über die Bewegungsgleichungen mit den Parametern k und Λ zusammen, sowie über die Zustandsgleichung mit der Materiedichte ρ des Universums. Analysen von astrophysikalischen Daten lässt daher Rückschlüsse auf kosmologische Fragen wie etwa dem Alter des Universums oder der kosmologischen Konstante zu. Leider sind sowohl die Messwerte als auch die eingehenden Schätzungen über die Materiedichte bis heute mit einer Unsicherheit behaftet, die es nicht zulässt, einen der Fälle definitiv auszuschließen.

Wesentliche Fortschritte in der Messung von H_0 konnten mit dem »Hubble space telescope« erreicht werden. Das Ergebnis der Messungen ist [13]

$$H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad . \quad (2.33)$$

Das kosmologische Prinzip ist also eine vereinfachte Annahme, die uns das Universum als ein Materiegas beschreibt. In den letzten Jahrzehnten rückte das Interesse vom Prinzip der Homogenität und Isotropie hin zu den nun messbaren interessanten Abweichungen vom Prinzip: die Nicht-Homogenitäten des Universums, wie etwa unsere Galaxie. Die moderne Kosmologie beschäftigt sich daher heute unter anderen mit den Fragen, wie die Galaxienbildung von statten gegangen ist, wie die Fluktuationen im CMB zu deuten sind und welcher Zusammenhang zwischen diesen Anisotropien besteht.

Lineare Näherung

Die Einsteinschen Feldgleichungen sind nichtlinear. Dies erschwert die Suche nach Lösungen der Differentialgleichungen für $g_{\mu\nu}$ sehr. Für schwache Felder kann man jedoch eine Störung um den flachen Raum ansetzen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu} \quad (2.34)$$

und nichtlineare Terme in Ψ vernachlässigen. Mit einer geeigneten Eichung, der sogenannten »harmonischen Eichung«

$$\partial_\nu \Psi^\nu{}_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu \Psi^\nu{}_\nu \quad , \quad (2.35)$$

entkoppeln die entstehenden Gleichungen – ähnlich wie in der Elektrodynamik. Man erhält dann in der linearen Näherung [7, 8, 9]

$$\square \Psi_{\mu\nu} = - \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right) \quad , \quad (2.36)$$

18KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

also eine Wellengleichung für die Störterme der Metrik mit einem Quellterm, der durch den Energie-Impuls Tensor generiert wird. Man erhält Gravitationswellen, periodische Änderungen der Metrik unseres Raumes.

Im freien Raum mit $T_{\mu\nu} = 0$ findet man Lösungen für diese Gleichungen auf dem üblichen Wege mit dem Ansatz

$$\Psi_{\mu\nu} = P_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + P_{\mu\nu}^* e^{-ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.37)$$

mit dem symmetrischen Polarisationsstensor $P_{\mu\nu}$ (* ist die komplexe Konjugation) und dem Wellenzahlvektor k_α .

Aus (2.36) folgt durch Einsetzen sofort $k_\mu k^\mu = 0$, die Gravitationswellen breiten sich also mit Lichtgeschwindigkeit aus. Die Eichung (2.35) erlegt dem Polarisationsstensor Einschränkungen auf. Die nähere Untersuchung [7, 8] zeigt, dass sich daraus ergibt, dass die Wellen den Spin 2 haben müssen. Ein Ergebnis, das uns aus differentialgeometrischer Sicht nicht überrascht, denn schliesslich handelt es sich hier um einen Tensor zweiter Ordnung, was das Verhalten unter Rotationen und damit auch den Spin bereits festlegt.

Es ist mit Hinsicht auf den Welle-Teilchen-Dualismus naheliegend, auch dem Gravitationsfeld Bosonen zuzuordnen, die die Wechselwirkung übertragen. Man nennt diese zu den Gravitationswellen gehörigen Teilchen auch »Gravitonen«. Gravitonen haben im Gegenteil zu Photonen in der vollen Theorie eine Selbstwechselwirkung, die in der linearen Näherung jedoch nicht mehr auftritt. Es ist möglich, die oben erhaltene Wellengleichung auf dem kanonischen Wege zu quantisieren und so eine Quantentheorie der Gravitation aufzuschreiben. Leider zeigt sich, dass dieser so erhaltene Ansatz nichtrenormierbar ist, und daher für weitere Erkenntnisse nicht brauchbar.

Die Gravitationswellen zeigen in vielerlei Hinsicht dieselben Eigenschaften, wie wir von der Elektrodynamik gewohnt sind. So werden etwa von beschleunigten Systemen Wellen ausgesandt, wodurch diese Energie verlieren. Einer der Hauptunterschiede ist, dass das kleinste Moment der Gravitationswellen, welches Energie transportiert, das Quadrupolmoment ist.

Das Monopolmoment trägt aus denselben Gründen wie in der Elektrodynamik nicht zum Energietransport bei, man ersetze in der Multipolentwicklung die Ladung Q durch M . Führen wir den Vergleich weiter. Erinnern wir uns, dass dem Dipolmoment in der Elektrodynamik eine Gesamtleistung $L \propto \ddot{d}_e$ zugeordnet wird, wobei d_e das Dipolmoment $d_e = \sum q_i r^i$ ist mit q^i als Ladung zum Teilchen mit der Position r^i . Die Übertragung in die Gravitationstheorie liefert, dass d_e in ein Massen-Dipolmoment $d_m = \sum m_i r^i$ übergeht, dessen erste Ableitung \dot{d}_m der Gesamtimpuls des Systems ist. Dieser ist nun im Gegenteil zur Elektrodynamik eine Erhaltungsgröße, weshalb für den Dipolanteil der Gravitationswellen $L \propto \dot{d}_m = 0$ ist. Erst der nächst höhere Term der Multipolentwicklung – das Quadrupolmoment – kann Energie vom System nach Unendlich transportieren.

Weiteres über Gravitationswellen findet sich auch im folgenden Abschnitt auf S. 25 ff.

2.3 Experimentelle Tests

Die Messungen von Michelson und Morley, sowie der Versuch von Eötvös haben das experimentelle Fundament der ART gelegt. Einsteins theoretischer Entwurf des Gebäudes wurde im ersten Jahrzehnt nach Veröffentlichung rasch mit ersten Bestätigungen abgestützt. Die Periheldrehung des Merkur und die Lichtablenkung an der Sonne verhalfen Einsteins Idee zum Durchbruch. Etwa von 1920 bis 1960 blieb der Rohbau ART jedoch unverändert. Erst durch die Weiterentwicklung der technischen Möglichkeiten konnte eine Anzahl neuer Experimente in Angriff genommen werden. Die Genauigkeit früherer Versuche konnte erheblich verbessert, viele Alternativtheorien ausgeschlossen werden. Heute bestätigen zahlreiche Messungen die Vorhersagen der ART und man beginnt zu erkunden, wo noch Platz für einen Ausbau ist, versucht zu erkennen, wie eine Vereinheitlichte Theorie die ART mit dem Standardmodell verbinden kann.

Wir wollen uns hier in aller Kürze diesem auch geschichtlich wichtigen Sektor der ART zuwenden. Man siehe dazu auch [9, 14, 15] oder den schönen Übersichtsartikel [16].

Nach Newton

Aus Einsteins Feldgleichungen erhält man in erster Näherung das Newtonsche Gravitationsgesetz wieder (siehe dazu auch S. 31 ff). Dies ist die sogenannte »Newtonsche Näherung«. Dabei betrachtet man langsame Bewegungen im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $v \ll c$ und schwache Gravitationsfelder, dh. die Metrik weicht wenig vom flachen Raum ab: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu}$ mit $|\Psi_{\mu\nu}| \ll 1$.

Es gab und gibt verschiedene Alternativtheorien zur ART, darunter etliche, die nach heutigen Experimenten ausgeschlossen werden können. Dazu parametrisiert man die Abweichungen von der Newton-Näherung und quantifiziert damit die Vorhersage der ART oder ihrer Konkurrenten. Diese Parameter gehen in Berechnungen experimenteller Daten ein und können damit bestimmt werden. Dieses Verfahren ist als »Parametrisiert - Post - Newtonsch« (engl. »Parametrized - Post - Newtonian«) – PPN bekannt.

Die wohl bekannteste Modifikation der ART sind die Skalar-Tensor Theorien, in denen zusätzlich zur Metrik noch ein Skalares Feld existiert. Ein Beispiel dieser Theorie ist der Brans-Dicke Ansatz. Nach heutigen Messungen kann ein solches Feld nur existieren, wenn es auf Skalen an die Gravitation ankoppelt, die bis heute nicht experimentell erschlossen wurden, d. h. bei sehr hohen Energien $\gg \text{TeV}$

oder sehr kleinen Längen \ll mm.

Das Eötvös-Experiment

Einsteins Ausgangspunkt auf dem Weg ins Dickicht der ART war sein berühmtes Gedankenexperiment mit dem Fahrstuhl. Kann ein Physiker, der sich in der geschlossenen Kabine eines Fahrstuhls aufhält, unterscheiden ob er in einem Gravitationsfeld ruht und daher fest auf dem Boden steht, oder ob der Fahrstuhl nach oben beschleunigt wird?

Einsteins Antwort auf diese Frage ist »Nein«. Zumindest, solange der Fahrstuhl ausreichend klein ist – so klein, dass Gezeitenkräfte nicht gemessen werden können. Lokal soll die Physik im Gravitationsfeld dieselbe sein wie die, in einem beschleunigten Bezugssystem im ansonsten flachen Raum. Das aber heißt, dass die »träge Masse« m_t , also die Masse, die beschleunigt werden muss, gleich der »schweren Masse« m_s ist, der Masse, die gravitiert.

Das erste Experiment zur Überprüfung der Gleichheit von schwerer und träger Masse wurde von Baron Eötvös im Jahre 1890 durchgeführt und in seiner Genauigkeit nach und nach gesteigert. Bereits im Jahre 1922 gelang es Eötvös, eine so hohe Präzision zu erreichen, dass die Abweichung des Verhältnisses m_s/m_t von 1 unter der Größenordnung 10^{-9} liegen musste. Zwischen 1960 und 1963 wurde diese Genauigkeit von Dicke *et al.* bis auf 10^{-11} gesteigert, heute liegt sie bei 4×10^{-13} [17].

Bei diesem Experiment macht man sich zunutze, dass die Gravitationskraft F_g von der schweren Masse m_s abhängt, die Beschleunigung durch die Zentripetalkraft F_z aufgrund der Erdrotation jedoch von der trägen Masse m_t . Eötvös befestigte zwei Gewichte an den Enden eines Balkens, der mit einem feinen Draht aufgehängt war. Die Gleichgewichtsbedingung der Kräfte F_g und F_z ist abhängig vom Verhältnis der schweren zu trägen Massen, resultierend in einer Auslenkung des Drahtes. Der Aufbau des Experimentes ist schematisch in Abbildung 2.1 zu sehen.

Dicke *et al.* [18] verwendeten stattdessen das Gravitationsfeld der Sonne, sowie die Zentripetalkraft, die aus der Erdbahn um die Sonne resultiert. Da sich der Winkel des Versuchsaufbaus zur Richtung Erde - Sonne im 24 Stunden Rhythmus ändert, konnten damit Abweichungen, die mit anderen Frequenzen auftraten, herausgefiltert und der Messfehler weiter gesenkt werden.

Lichtablenkung

Weltberühmt ist Einsteins Formel $E = mc^2$. Ein Photon mit verschwindender Ruhemasse hat eine relativistische Masse, die es durch seine kinetische Energie bekommt. Das sagt uns die Spezielle Relativitätstheorie. Die Allgemeine Relati-

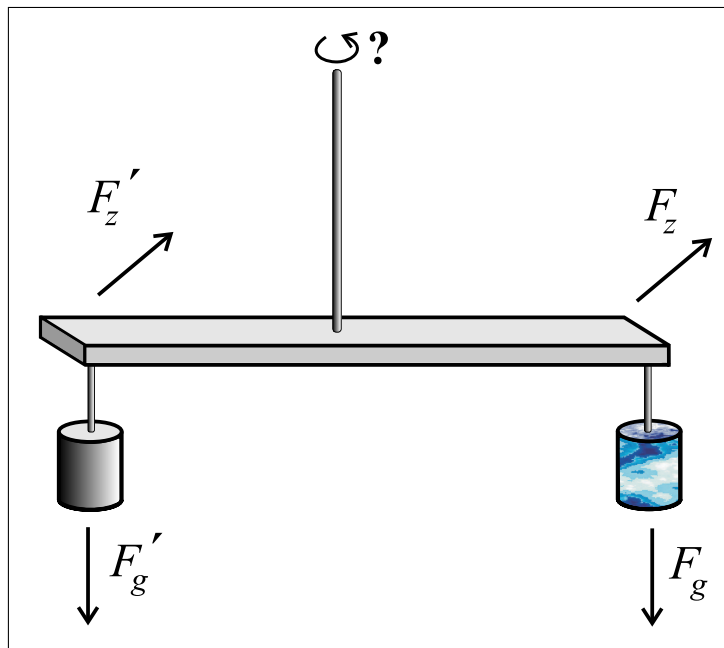


Abbildung 2.1: Skizze des Experimentes von Eötvös

vitätstheorie fügt nun hinzu, dass Energie wie auch Masse gravitiert. Ein Photon »fällt« also im Schwerfeld.

Gibt man dem Photon eine Masse, so fällt es natürlich auch in der Newtonschen Gravitation. In der ART ist die Ablenkung jedoch um den Faktor zwei größer. Man erhält dieses Ergebnis nach einer Näherung der Metrik in erster Ordnung, wobei wegen der Geschwindigkeit der Photonen der Newtonsche Limes für kleine Geschwindigkeiten nicht vollzogen werden kann. Daher trägt die g_{tt} -Komponente der Metrik zum Ablenkungswinkel bei – ein Faktor, der bei Newton nicht auftaucht.

Dieser Effekt ist umso größer, je näher das Photon dem gravitierenden Körper kommt und je höher dessen Masse ist. Es bietet sich daher die Sonne an. Leider hat die Sonne die Eigenschaft, meist ziemlich hell zu scheinen, so dass man in ihrer Nähe kaum die wenigen interessanten Photonen aus den unzähligen anderen herauspicken kann. Eine Ausnahme bildet da eine Sonnenfinsternis, bei der es möglich ist, Sterne auch am Rande der Sonne zu beobachten. Das Licht dieser Sterne geht dann wie gewünscht nahe am Rand der Sonne vorbei. Misst man deren Position und vergleicht sie mit den berechneten Daten aus Beobachtungen, während der die Sonne nicht in der Bahn des Lichtes liegt, so erhält man die gewünschte Größe. Dabei wird der Ablenkungswinkel δ angegeben, der Winkel, der zwischen den asymptotisch geraden Strecken zur Sonne und von der Sonne weg liegt (siehe Abb. 2.2). Einsteins Vorhersage der ART liegt bei $\delta = 1.75''$.

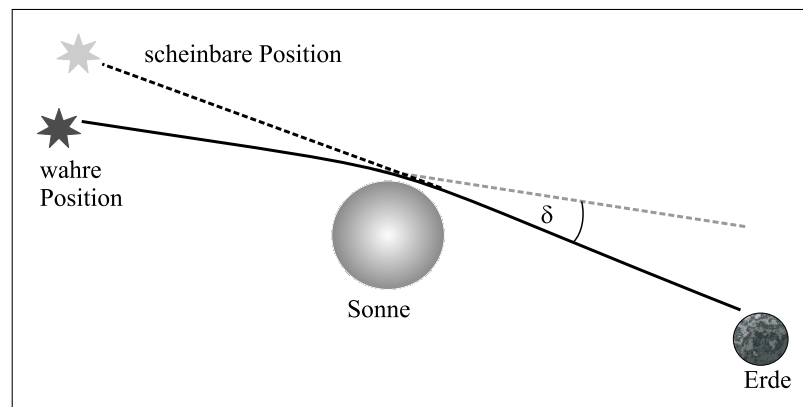


Abbildung 2.2: Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne.

Bereits 1914 fand in Russland eine Sonnenfinsternis statt. Eine dorthin geplante Expedition konnte aber wegen des ersten Weltkrieges nicht stattfinden. Erst am 29. Mai 1919 bot sich eine weitere Sonnenfinsternis nahe dem Äquator in Südamerika und Afrika an. Einstein hatte nun eine Ablenkung vorausgesagt, die das Doppelte dessen betrug, was nach allen alten Berechnungen zu erwarten war. Es konnten bei dieser Sonnenfinsternis mehrere Aufnahmen der sichtbaren Sternpositionen gemacht werden. Diese Positionen wurden mit nächtlichen Aufnahmen dieser Himmelsgegend verglichen. Obwohl das Ergebnis der Messungen als Durchbruch der ART gefeiert wurde, war der Wert eigentlich viel zu ungenau für eine definitive Aussage. Es ergab sich $1.5'' < \delta < 2.2''$. Die Vorhersage aus der Newtonsche Gravitation wurde damit allerdings ausgeschlossen.

Rotverschiebung im Schwerefeld

Dem Äquivalenzprinzip zufolge wirkt die Schwerkraft der Erde auch auf Licht. Bewegt sich ein Photon von der Erde fort, so braucht es Energie, um gegen die Gravitation anzukommen. Mit der Relation $E = h\nu$ sieht man sofort, dass dabei die Frequenz des Lichtes sinkt. Es wird rotverschoben.

Dieser Effekt tritt auch im Newtonschen Gravitationspotential auf, sofern man dem Licht eine träge Masse aufgrund seiner Energie zuspricht. Eine Messung der Rotverschiebung ist daher eine Bestätigung des Äquivalenzprinzipes. Die spezielle Form der Einsteinschen Theorie geht nicht ein.

Die Rotverschiebung im Schwerefeld der Erde wurde in einer Reihe von Experimenten in den Jahren 1960-1965 von Pound, Rebka und Snider [19] untersucht. Dabei wurde die Frequenzänderung von Gammastrahlung gemessen, die von ^{57}Fe ausgesandt wurde und sich im Turm des physikalischen Labors der Harvard Universität nach oben bzw. nach unten bewegte. Mit Hilfe des Mössbauer-Effektes

konnte dabei die Verschiebung der Resonanzfrequenz auf 1% genau gemessen.

Der Test, der bis heute die Rotverschiebung am exaktesten bestätigt, ist das Experiment von Vessot und Levine [20], auch bekannt unter dem Namen »Gravity Probe A«. Im Juni 1976 brachten sie einen Wasserstoff-Maser mithilfe einer Rakete in einer nahezu senkrechten Bahn auf eine Höhe von 10.000 km. Über den ganzen Flug wurde die ausgesandte Frequenz der Maser - Strahlung gemessen und mit der in der Bodenstation verglichen. Vessot und Levine erreichten eine Genauigkeit von 70×10^{-6} .

In anderen Experimenten wurde die Verschiebung von Spektrallinien im Gravitationsfeld der Sonne oder weissen Zwergen gemessen, doch konnten sie wegen der auftretenden Beobachtungsschwierigkeiten nie eine besonders hohe Genauigkeit erreichen.

Periheldrehung

Nach Keplers Gesetzen bewegen sich die Planeten auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne liegt. Bereits seit Anfang des 19. Jahrhunderts war aber über den sonnennächsten Planeten unseres Systemes, Merkur, bekannt, dass seine Ellipsenbahn nicht geschlossen ist. Der sonnennächste Punkt der Bahn, das »Perihel«³, bleibt nicht unverändert, sondern er verschiebt sich jährlich. Dadurch ergibt sich eine Rosettenbahn (siehe Abb. 2.3). Diese Verschiebung ist extrem gering und wird üblicherweise in Bogensekunden pro Jahrhundert ["/Jh] angegeben. In dieser Zeit umkreist der Merkur etwa 415 mal die Sonne. Dabei liegt seine »Perihelverschiebung« nach heutigen Messungen bei etwa $(43.11 \pm 0.45)"/\text{Jh}$.

Mitte des 19. Jahrhunderts untersuchte der französische Astronom Urbain Jean Joseph Le Verrier, ob die Störungen der anderen Planeten die Bahnabweichung des Merkur erklären konnten. Der Einfluss der anderen Planeten reichte jedoch bei weitem nicht aus, die Rosettenbahn des Merkur zu erzeugen. Nach dem damaligen Stand der Astronomie wäre eine bisher unentdeckter sonnennaher Planet durchaus möglich und eine gute Erklärung gewesen. Man gab diesem Planeten den Namen »Vulkan«. Dieses Rezept hatte schon 1820 zur Entdeckung des Planeten Neptun geführt, der die Bahn des Uranus beeinflusst.

Der Planet Vulkan wurde nicht gefunden. Stattdessen versuchte man, die Perihelverschiebung des Merkurs mit dem Quadrupolmoment der Sonne zu erklären. Die Sonne ist keine vollkommene Kugel, sondern leicht abgeplattet und so hat ihr Gravitationsfeld höhere Multipolmomente. Dieses führt dazu, dass die Bahnen insbesondere der sonnennächsten Planeten, von der newtonschen Ellipse abweichen. Man kann das Quadrupolmoment der Sonne abschätzen, indem man an-

³Der Begriff »Perihel« setzt sich aus den zwei griechischen Worten »peri« – »um-herum« und »helios« – »die Sonne« zusammen.

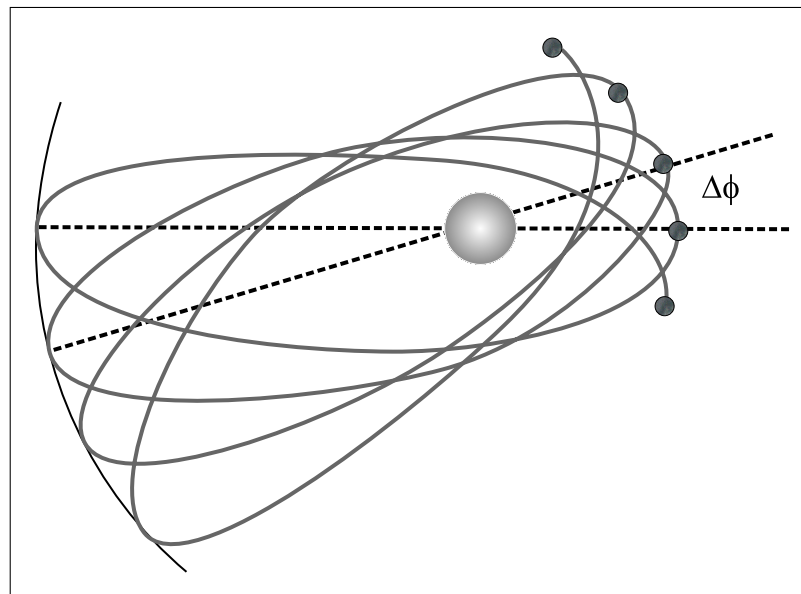


Abbildung 2.3: Perihelverschiebung des Merkur.

setzt, dass es durch ihre eigene Rotation verursacht wird [16]. Auch dieser Effekt vermag die Bahnabweichungen nicht vollkommen zu erklären.

Bereits in der Post-Newtonschen Näherung der Schwarzschildmetrik (3.4), die das Gravitationsfeld der Sonne als eine Lösung von Einsteins Feldgleichungen beschreibt, ergibt sich eine Übereinstimmung von Theorie und Experiment der Periheldrehung bis auf eine Genauigkeit von 5 Promille.

Zeitdilatation

Die spezielle Relativitätstheorie sagt vorher, dass beschleunigte Uhren langsamer laufen als ruhende. Die ART liefert einen solchen Effekt auch im Gravitationsfeld. Uhren, die sich in der Nähe massiver Körper befinden, laufen langsamer, als solche, die sich weiter weg befinden.

Ursprünglich war geplant, diese Zeitdilatation zu messen, indem man den Gang einer Atomuhr in einem Erdsatelliten mit dem einer Atomuhr auf der Erdoberfläche vergleicht. Die Genauigkeit der Cäsium-Uhren stieg jedoch so rasch, dass man schliesslich darauf verzichtete und normale Verkehrsflugzeuge benutzte. Dabei werden Geschwindigkeits- und Gravitationseffekte der Zeitdilatation kombiniert.

J. Hafele und R. Keating führten einen solchen Versuch im Jahre 1971 durch. Ein ganz ähnliches Experiment von C. Alley *et al.* 1975 erreichte eine höhere Genauigkeit, die jedoch auch nicht besonders beeindruckend ist. Der rein Gra-

vitative Effekt wird jedoch durch das o.g. Experiment zur Rotverschiebung von Vessot und Levine mit dem Wasserstoff - Maser mit hoher Präzision abgedeckt. Die Frequenzänderung der Strahlung entspricht dabei einer Änderung des Uhrentaktes. Ein aus der Höhe von 10.000 km ausgesandtes Signal wird bei Annäherung an die Erde blauverschoben. Ein Taktgeber mit dieser Quelle schafft also mehr Signale in der gleichen Zeiteinheit – die Zeit verstreicht schneller.

Laufzeitveränderung

Das Gravitationsfeld eines massereichen Körpers lenkt das Licht nicht nur ab, wie es bei der Lichtablenkung geschieht und zu einer scheinbaren Positionsveränderung der Sterne führt. Zusätzlich braucht der von Einsteins Theorie vorhergesagte Weg auch mehr Zeit. Das Licht ist länger unterwegs, um den gekrümmten Raum zu durchqueren, als denselben Weg in einen ungekrümmten Raum mit Newtonschem Potential zurückzulegen.

Ein Experiment, das diese Laufzeitveränderung überprüft, wurde 1964 von I. Shapiro [21] vorgeschlagen und in den folgenden Jahren unter seiner Leitung durchgeführt. Dabei wird ein Radarsignal von der Erde ausgesandt, an einem Planeten reflektiert und die Zeit bis zu seiner Rückkehr auf die Erde gemessen. Für diesen Versuch wurde zunächst die Venus als Reflektor benutzt. Die von der ART vorhergesagte Laufzeit ist dabei rund 10^{-4} Sekunden größer, als die von der Newtonschen Theorie vorhergesagte. Da die Bahn der Venus mit hoher Präzision bekannt ist, konnte die Entfernung bestimmt und so die zusätzliche Laufzeit berechnet werden.

Im Jahre 1971 veröffentlichten Shapiro und seine Mitarbeiter die Ergebnisse einer Serie von Experimenten, die Radarreflexionen an Venus und Merkur untersuchten [22]. 1975 wurden in einem ähnlichen Verfahren die Laufzeiten von Radarsignalen ausgewertet, die von den Raumsonden Mariner 6, 7 und 9 in der Nähe des Planeten Mars ausgesandt wurden. Die Genauigkeit der Messungen liegt heute bei etwa 2 Promille.

Gravitationswellen

In der linearen Näherung entkoppeln die Einsteinschen Feldgleichungen. Die Störungen der Metrik genügen dann einer Wellengleichung. Es stellt sich natürlich die Frage, ob man diese Gravitationswellen experimentell beobachten kann.

Ein indirekter Nachweis gelang bereits im Jahre 1978. Der im Jahre 1975 von J. H. Taylor und R. A. Hulse entdeckte Pulsar PSR 1913+16 ist Teil eines Doppelsystems. Mit einer Periode von 0.32 Tagen umkreist er einen nicht sichtbaren Begleiter. Diese Situation ist ähnlich zum Hertzschen Dipol in der Elektrodynamik. Das Doppelsystem erzeugt Gravitationswellen. Dadurch verliert das

System Energie, die Sterne nähern sich einander an und umkreisen sich dabei immer rascher.

Taylor gelang es, die Abnahme der Bahnperiode zu messen [23], die mit den Vorhersagen der ART übereinstimmt. 1993 wurde Hulse und Taylor für ihre Arbeit der Nobelpreis verliehen. Die Genauigkeit der Messungen konnte seither noch wesentlich verbessert werden. Die möglichen Abweichungen von Einsteins Vorhersagen liegen demnach inzwischen unter 1%.

Ein Experiment zur direkten Messung von Gravitationswellen astrophysikalischen Ursprungs wurde erstmals 1960 von J. Weber an der Universität von Maryland angegangen. Als »Antennen« benutzte er Aluminiumzylinder von 153 cm Länge und Durchmesser zwischen 60 und 90 cm. Die Eigenfrequenz dieser Zylinder liegt bei 1660 Hz. Um Fehlerquellen zu eliminieren, beobachtete Weber zwei getrennte Versuchsanordnungen in Maryland und in Chicago, in etwa 1000 km Entfernung. Ein Signal sollte in beiden Orten Anregungen verursachen. Trotz zahlreicher Koinzidenzen der Messapparatur gelang es Weber aber nie, auszuschießen, dass die Daten nicht thermischen oder seismischen Ursprungs waren.

Seit Beginn der 90er Jahre sind verschiedene Projekte zur direkten Messung von Gravitationswellen angelaufen, die mit Laser-Interferometern im km-Bereich arbeiten. LIGO [24] in den USA, VIRGO [25] und GEO 600 [26] in Europa, ACIGA [27] in Australien und TAMA 300 [28] in Japan.

Zusätzlich gibt es Pläne für Messungen in einem Orbit um die Erde. LISA, die Laser Interferometer Space Antenna [29], bestehend aus drei Satelliten, die mehrere tausend Kilometer entfernt sind, könnte besonders im Bereich extrem niedriger Frequenzen zwischen 10^{-4} und 10^{-1} Hz hohe Genauigkeit erreichen.

Der Lense-Thirring Effekt

H. Thirring und J. Lense wiesen erstmals im Jahre 1918 auf einen verblüffenden Effekt der ART hin [30]. Eine rotierende Masse führt dazu, dass die leere Raumzeit in ihrer Umgebung mitrotiert. Inertialsysteme in der Nähe dieser Massen bzw. frei fallende Beobachter führen also eine zusätzliche Rotation relativ zum Fixsternhimmel aus. Am Nord- und Südpol führen die mitbewegten Inertialsysteme dabei eine Rotation in dieselbe Richtung wie der gravitierende Körper aus; in der Nähe des Äquators hingegen in entgegengesetzter Richtung. Das Rotationsfeld, das den Effekt beschreibt, hat die Form eines Dipolfeldes. Man spricht in Analogie zum magnetischen Dipols von »Gravitomagnetismus« oder auch einfach vom »Lense-Thirring Effekt«.

Zur Berechnung benutzt man den PPN - Formalismus. Dabei zeigt sich, dass die nach der ART erwartete Rotation extrem gering ist. Es ergibt sich für ein lokales Inertialsystem in einer polaren Umlaufbahn um die Erde eine Abweichung von $0.05''$ pro Jahr. Ein Experiment, um diese Abweichung zu testen, besteht darin,

einen Kreisel in einem Satelliten auf eine Umlaufbahn um die Erde zu schicken. Die Kreiselachse bleibt dabei konstant in Bezug auf das lokale Inertialsystem, führt also die zusätzliche Drehung mit aus. Die Messung des Effektes wird dadurch erschwert, dass der Kreisel zusätzlich die »Geodätische Präzession« ausführt, die durch die Bewegung auf der Umlaufbahn selber zustande kommt und um den Faktor 100 größer ist.

Das Experiment »Gravity Probe B« [31] der Stanford Universität in Zusammenarbeit mit der NASA und der Lockheed - Martin Corporation soll ebenjenen Effekt testen. Mit Hilfe von vier supraleitenden Kreiseln und einem Teleskop, das auf den Stern HR8703 (IM Pegasus), ein Doppelstern im Sternbild Pegasus, ausgerichtet ist, soll die Präzession relativ zu entfernten Sternen gemessen werden. Das Experiment soll im April 2003 gestartet werden und voraussichtlich 18 bis 24 Monate dauern.

2.4 Grenzen der ART

Bis jetzt ist es noch nicht gelungen, die gravitative Wechselwirkung zu quantisieren. Trotzdem tut die klassische ART uns gute Dienste und ist in ihren Vorhersagen extrem genau. Wir können jedoch mit einigen elementaren Abschätzungen angeben, ab welcher Skala die Quanteneffekte der Gravitation eine Rolle spielen sollten. Diese Skala wird auch als »Planck-Skala« bezeichnet.

Wir erhalten sie aus der Überlegung, dass Quanteneffekte einer Energie- (bzw. Masse-) Menge m_p mit dazugehöriger Comptonwellenlänge $l_p = \frac{\hbar}{cm_p}$ nicht mehr vernachlässigbar sind, wenn eine Massefluktuation m_p im Gebiet der Wellenlänge l_p eine wesentliche Modifikation der Metrik gegenüber dem flachen Raum also $\Delta g \approx 1$ ergibt.

Um einen Eindruck von der Größe der Fluktuation zu bekommen, betrachten wir die Schwarzschildmetrik mit dem Linienelement (2.17). Die Abweichungen von der Minkowskimetrik sind von der Größenordnung

$$\Delta g \approx \frac{2MG}{rc^2} . \quad (2.38)$$

Nach Einsetzen der zu findenden Werte m_p und l_p der Planck-Skala und der Forderung, dass die Fluktuation von der Größenordnung 1 sein soll (die 2 können wir dabei vergessen)

$$\frac{m_p G}{l_p c^2} \approx 1 \quad (2.39)$$

28KAPITEL 2. DIE KLASSISCHE ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE

$$\Leftrightarrow m_p G \approx l_p c^2 = \frac{\hbar c}{m_p} \quad (2.40)$$

$$\Rightarrow m_p \approx \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \quad l_p \approx \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \quad (2.41)$$

Nach Einsetzen der Konstanten

$$\begin{aligned} G &= 6,668 \cdot 10^{-8} \text{g}^{-1} \text{cm}^3 \text{s}^{-2} \\ \hbar &= 1,054 \cdot 10^{-27} \text{g cm}^2 \text{s}^{-1} \\ c &= 2,99793 \cdot 10^{10} \text{cm s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

erhalten wir:

$$\begin{aligned} l_p &\approx 10^{-33} \text{cm} \approx 10^{-20} \text{fm} \\ m_p &\approx 10^{-5} \text{g} \approx 1.22 \times 10^{19} \text{GeV} \\ t_p &\approx 10^{-43} \text{s} \approx 10^{-20} \text{fm} c^{-1}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

wobei t_p die zu l_p gehörende Zeit $ct_p = l_p$ ist.

Kapitel 3

Schwarze Löcher

3.1 Die Schwarzschildlösung

Stellare Objekte besitzen in der Regel eine nahezu kugelsymmetrische Materieverteilung. Zusätzlich kann eine Rotation um eine den Schwerpunkt kreuzenden Achse vorliegen. Die Auswirkungen dieser Rotation auf die Metrik und damit auf das Schwerfeld des Körpers, sind bei den dabei typischen Drehimpulsen jedoch sehr gering und kaum observabel (siehe dazu auch S. 26 ff : Der Lense-Thirring-Effekt).

In diesem Kapitel werden wir uns diesem kugelsymmetrischen Fall der Materieverteilung mit und ohne Rotation, der das größte Gebiet der Astrophysik abdeckt, näher zuwenden. Die wichtigsten Begriffe aus der ART und der Astrophysik, die für uns von Belang sein werden, werden dabei kurz erläutert.

Besonders ausführlich werden dabei die Schwarzschildlösung und ihre Konsequenzen behandelt. Außerdem werden wir kurz auf die Klassifikation und Beobachtung von Schwarzen Löchern eingehen.

3.2 Die Feldgleichungen unter Kugelsymmetrie

Um die allgemeinste Form des metrischen Tensors unter Annahme von Kugelsymmetrie zu finden, ist es zweckmäßig, für die räumlichen Koordinaten Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) mit den orthonormalen Basiseinheitsvektoren e^r, e^θ, e^ϕ zu verwenden. Zudem steht es uns frei, die Zeitkoordinate mit der Richtung e^t so zu wählen, dass sie senkrecht auf den Raumkoordinaten steht. Es ist also $e^t e_r = e^t e_\theta = e^t e_\phi = 0$ oder äquivalent $g_{tr} = g_{t\theta} = g_{t\phi} = 0$. Man nennt dies auch die zeitorthonormale Eichung.

Der Ansatz für die verbleibenden Komponenten der Metrik, der nun von den Koordinaten θ und ϕ unabhängig sein soll, hat das Linienelement

$$ds^2 = -\alpha(r, t)dt^2 + \beta(r, t)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \quad (3.1)$$

Mit diesem Ansatz geht man nun in die Einsteinschen Feldgleichungen ein, die sich im Vakuum (2.9) vereinfachen zu

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.2)$$

und erhält dadurch partielle Differentialgleichungen für die Funktionen α und β . Wir wollen hier nur kurz die Ergebnisse festhalten, da die Zwischenschritte in der Literatur ([7, 8, 9, 10, 32] und andere mehr) ausführlich dokumentiert sind und für uns im Folgenden nicht weiter von Belang sind.

Zunächst einmal ergibt sich aus obigem Ansatz ohne weitere Annahmen, dass das Gravitationsfeld statisch ist, also $\alpha(r, t) = \alpha(r)$ und $\beta(r, t) = \beta(r)$. Diese Tatsache ist auch als das »Birkhoff-Theorem« bekannt. Des Weiteren läßt sich die Metrik unter Auswahl eines asymptotisch flachen Koordinatensystemes

$$-\lim_{r \rightarrow \infty} \alpha(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \beta(r) = 1 \quad (3.3)$$

in eine ganz bestimmte Form bringen. Diese Form ist auch als »Schwarzschild-Metrik« bekannt. Dabei erhält man als Lösung der Differentialgleichungen mit der Randbedingung der asymptotischen Freiheit, dass $\alpha(r)\beta(r) = 1$ gelten muss. Schliesslich ergibt sich:

Das Birkhoff-Theorem

Jedes kugelsymmetrische Gravitationsfeld im Vakuum ist statisch. Die Metrik lautet

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) , \quad (3.4)$$

wobei M eine Integrationskonstante ist.

Der Faktor $1 - \frac{2M}{r}$ wird üblicherweise $\gamma(r)$ genannt:

$$\gamma(r) := 1 - \frac{2M}{r} . \quad (3.5)$$

3.3 Eigenschaften der Schwarzschild-Lösung

Um die Schwarzschild-Metrik zu verstehen, bedarf es zunächst einer Interpretation der eingeführten Integrationskonstante M . Wir wollen uns durch eine Newtonsche Näherung klarmachen, dass M (in unserer dimensionslosen Betrachtung) nichts anderes als die Masse der gravitierenden Materieverteilung ist. Mit allen Einheiten lautet diese Integrationskonstante

$$R_S := \frac{2GM}{c^2} = \frac{2l_p M}{m_p} \quad (3.6)$$

und hat die Einheit einer Länge. Sie wird deshalb auch als »Schwarzschild-Radius« bezeichnet.

Wir wissen aus experimentellen Ergebnissen, dass die Geometrie unserer Raumzeit in einem durchschnittlichen Sonnensystem wie dem unseren annähernd euklidisch ist. Wir setzen daher, um das Newtonsche Gravitationsgesetz anzunähern, den metrischen Tensor an als

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad |\Psi_{\mu\nu}| \ll 1 \quad . \quad (3.7)$$

Die Planeten wollen wir uns als Massepunkte vorstellen. Sie bewegen sich dann auf Geodäten und ihre Bewegung wird beschrieben durch die Geodätengleichung (siehe (2.14))

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

Außerdem bewegen sich die Planeten mit Geschwindigkeiten, die klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Wir können also $\frac{dt}{d\tau} \approx 1$ und $\frac{dx^i}{d\tau} \approx 0$ in (2.14) einsetzen und erhalten

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \approx \frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma_{tt}^i \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \quad (3.9)$$

$$\approx -\Gamma_{tt}^i = g^{ij} \Gamma_{jtt} \quad . \quad (3.10)$$

Nun berücksichtigen wir noch, dass das Gravitationsfeld der Sonne nahezu statisch ist, d.h. $g_{\mu\nu,t} \approx 0$. Wir bekommen dann in erster Ordnung in Ψ

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{1}{2} g_{tt,i} \quad . \quad (3.11)$$

Mit $g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ von der Schwarzschildmetrik haben wir schließlich

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{M}{r^2} \quad (3.12)$$

und ein Vergleich mit dem Newtonschen Gravitationspotential lässt dann die Identifikation von M mit der Masse des gravitierenden Objektes zu.

Sehen wir uns das Linienelement (3.4) noch einmal genau an, so entdecken wir, dass es an zwei Stellen divergent ist. Beim Schwarzschildradius $2M$ divergiert g_{rr} und bei $r = 0$ divergiert g_{tt} .

Bevor wir uns näher damit beschäftigen, stellen wir fest, dass der Schwarzschild-Radius für gewöhnliche stellare Objekte schon weit im Inneren der Materieverteilung liegt. Der Schwarzschild-Radius der Sonne zum Beispiel beträgt ≈ 3 km; der Sonnenradius hingegen liegt bei etwa 700.000 km. Im Inneren einer Materieverteilung aber gilt die Schwarzschild-Metrik nicht mehr, denn dort verschwindet der Energie-Impuls-Tensor gewiss nicht.

Wir wollen uns nun überlegen, welche Bedingungen am Schwarzschild-Radius herrschen. Zunächst sehen wir uns die Gravitationskraft an. Diese ist natürlich vom gewählten Koordinatensystem abhängig (insbesondere verschwindet sie im lokalen Bezugssystem, denn dort verschwinden die Christoffelsymbole vgl. (2.14)). Wir wollen dabei den Standpunkt eines Beobachters bei $r = \infty$ einnehmen, d.h. wir benutzen Koordinaten, die dort mit denen des Minkowskiraumes identisch sind, also die Koordinaten der Schwarzschild-Metrik. Wir fragen uns nun, welche Kräfte wir in radialer Richtung auf ein frei fallendes Objekt der Masse m feststellen würden. Dazu betrachten wir die Gleichung (2.14) und interpretieren als Kraft

$$F^r = m \frac{d^2 u^r}{d\tau^2} = -m \Gamma_{\mu\nu}^r u^\mu u^\nu, \quad (3.13)$$

wobei u^μ die Vierergeschwindigkeit des Objektes ist. Wie wir wissen, hat diese im lokalen Bezugssystem die Form $u^{\hat{\mu}} = (-1, 0, 0, 0)$, in unseren Koordinaten ergibt sich damit $u^\mu = (\sqrt{-g_{tt}}^{-1}, 0, 0, 0)$. Setzen wir dies in obige Gleichung ein, bekommen wir

$$F^r = -m \Gamma_{\mu\nu}^r u^\mu u^\nu = -m \frac{1}{2} \Gamma_{tt}^r \frac{1}{\gamma} \quad (3.14)$$

und mit den Formeln aus Abschnitt 3.2. folgt

$$F^r = -\frac{m}{2} \frac{(\partial_r \gamma) \gamma}{\gamma} = -\frac{m}{2} \frac{M}{r^2}. \quad (3.15)$$

Beim Schwarzschild-Radius $r = 2M$ erhalten wir damit die sogenannte »Oberflächengravitation« κ zu

$$\kappa = \frac{1}{2} \partial_r \gamma \Big|_{r=R_S} = \frac{1}{4M}. \quad (3.16)$$

Sie wird uns später beim Hawking-Effekt als ausschlaggebende Größe wieder begegnen (siehe z.B. [10], Kap. 12.5.).

Wir wollen uns nun noch überlegen, was ein den Schwarzschild-Radius überquerender Beobachter verspürt. Da für einen frei fallenden Beobachter die Gravitationskräfte verschwinden, sind für ihn nur die »Gezeitenkräfte« von Interesse. Diese kommen dadurch zustande, dass die Gravitationskraft mit dem Ort variabel ist (insbesondere hier mit r^{-2} für fallende r wächst) und deshalb die Enden unseres Beobachters, die schon weiter zum Zentrum gelangt sind, stärker anziehen, als die, die noch nicht so nahe sind. Dadurch wird er langsam immer weiter gedehnt. Diese Kräfte können wir berechnen, indem wir uns zunächst eine Schar frei fallender Teilchen vorstellen. Da sie frei fallen, bewegen sie sich auf Geodäten, deren Kurvenparameter τ sei und die wir mit dem Index n in die Schar einordnen (siehe Abb. 3.1).

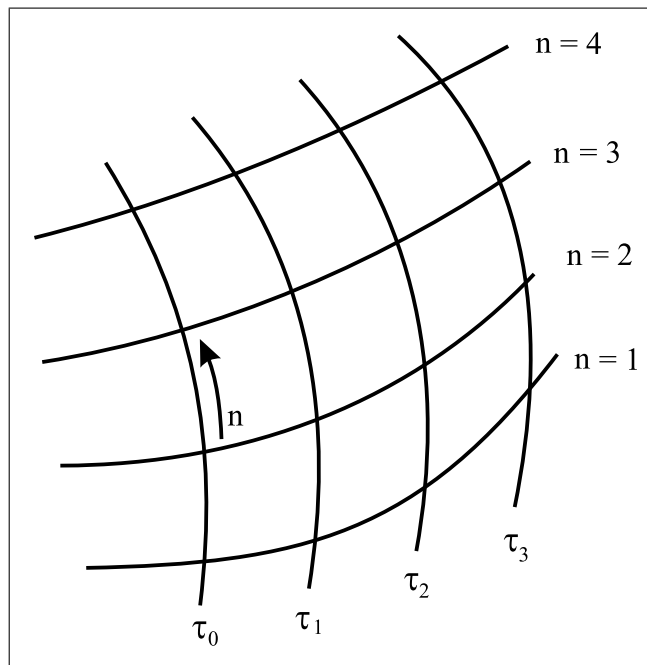


Abbildung 3.1: Zur Berechnung der Gezeitenkräfte

Wir fragen uns nun, wie sich einst benachbarte Geodäten $u(\tau, n)$ im Laufe der Zeit (d.h. mit dem Parameter τ) zueinander verhalten; ob sie sich annähern, entfernen oder, wie es im flachen Raum wäre, in unverändertem Abstand zueinander verharren.

Die relative Geschwindigkeit zwischen zwei infinitesimal benachbarten Geodäten ist für das frei fallende Teilchen auf der Geodäten $u(\tau, n)$ durch $\nabla_u n^\mu$ gegeben und entsprechend ist die relative Beschleunigung $\nabla_u \nabla_u n^\mu$. Berechnet man diese Ableitung, so erhält man

$$\nabla_u \nabla_u n^\mu = \nabla_\beta \nabla_\delta u^\beta u^\delta n^\mu = -R_{\beta\gamma}^\mu u^\beta u^\delta n^\gamma \quad (3.17)$$

(diese Formel kann auch dazu dienen, die Krümmung zu definieren). Setzen wir nun ein, dass wir uns im mitbewegten Bezugssystem der Teilchen aufhalten, also $u^{\hat{\nu}} = (-1, 0, 0, 0)$ haben, und nach den Gezeitenkräften $F_g^{\hat{r}}$ in radialer Richtung suchen, also $n^{\hat{\nu}} = (0, n^{\hat{r}}, 0, 0)$, dann bekommen wir

$$F_g^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} n^{\hat{r}} = -\frac{2M}{r^3} n^{\hat{r}} \quad , \quad (3.18)$$

wobei wir jetzt natürlich auch den Krümmungstensor im mitbewegten Koordinatensystem angeben haben.

Wir sehen also, dass der Riemannstensor, der verantwortlich für die Gezeitenkräfte ist, für einen frei fallenden Beobachter beim Schwarzschild-Radius keinerlei Besonderheiten aufweist. Seine Komponenten sind bei $r = 2M$ regulär, bei $r = 0$ sind einige jedoch tatsächlich divergent. Die Divergenz bei $r = 2M$ scheint also keinen physikalischen Inhalt zu haben und nur durch das Koordinatensystem, das wir für die Schwarzschild-Metrik gewählt haben, zustande gekommen zu sein. Tatsächlich ist die Singularität dort nur scheinbar vorhanden und kann behoben werden, wie wir gleich sehen werden. Bei $r = 0$ handelt es sich jedoch um eine echte Singularität.

Um die Koordinatensingularität beim Schwarzschild-Radius als scheinbar zu entlarven, wollen wir neue Koordinaten $(t, r) \rightarrow (\tilde{V}, r)$ einführen, in denen sich radial einlaufende Photonen auf Kurven mit $\tilde{V} = \text{const.}$ fortbewegen. Diese Koordinaten werden »Eddington-Finkelstein-Koordinaten« genannt¹. Für die radialen Lichtstrahlen erhalten wir wie zuvor

$$0 = -\gamma dt^2 + \frac{1}{\gamma} dr^2 \Leftrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{\gamma} \quad (3.19)$$

wobei das Minus zu den einlaufenden Lichtstrahlen gehört. Für diese gilt also

$$t + \int^r \frac{d\tilde{r}}{\gamma} = \text{const.} \quad (3.20)$$

und mit

$$r^* := \int^r \frac{d\tilde{r}}{\gamma(\tilde{r})} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \quad (3.21)$$

haben wir $\tilde{V} = t + r^*$ gefunden. Setzen wir $dt = d\tilde{V} - \frac{1}{\gamma} dr$ in das Linienelement (3.4) ein, so bekommen wir

$$ds^2 = -\gamma d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V} dr + r^2 d\Omega^2 \quad . \quad (3.22)$$

¹Genauer: einlaufende Eddington-Finkelstein-Koordinaten. Entsprechend gibt es auslaufende, in denen die radial auslaufenden Photonen sich auf Kurven mit $\tilde{U} = \text{const.}$ bewegen.

Dieses Linienelement zeigt nun beim Schwarzschild-Radius keine Divergenz mehr!

Die Eddington-Finkelstein-Koordinaten sind in Abb. 3.2 schematisch abgebildet. Die zeitartige Koordinate t^* ist so gewählt, dass die einlaufenden Lichtstrahlen im 45° Winkel laufen, wie wir es gewohnt sind. Wir sehen, dass diese den Schwarzschild-Radius bei endlicher Bogenlänge kreuzen und an dieser Stelle keine Besonderheit zeigen. Dies bleibt auch für einlaufende zeitartige Kurven so. Ein hineinfliegender Beobachter braucht also nur eine endliche Eigenzeit, um den Schwarzschild-Radius zu überqueren. Aber wenn er in äquidistanten Intervallen seiner Eigenzeit Impulse aussendet, erhält ein Beobachter im asymptotisch flachen Raum sie in immer größeren Zeitabständen und immer mehr rotverschoben. Er denkt deshalb, es dauert unendlich lange, um hineinzufallen². Lichtstrahlen, die von $r < 2M$ ausgesandt werden, können schließlich überhaupt nicht mehr entkommen und enden unvermeidlich in der Singularität bei $r = 0$. Weil das Gravitationsfeld eines solchen Objektes, dessen Schwarzschild-Radius außerhalb der Materieverteilung liegt, so stark ist, dass noch nicht einmal Licht entkommen kann, spricht man auch von einem »Schwarzen Loch«.

Aus der Abbildung ist ebenfalls zu entnehmen, dass ein Stern, der erst einmal unter seinen Schwarzschild-Radius kollabiert ist, auf einen Punkt zusammenstürzen muss und sich dadurch dann auch die Singularität bildet. Denn innerhalb des Schwarzschild-Radius enden alle zeitartigen Kurven bei $r = 0$.

Man kann zeigen, dass auch die Eddington-Finkelstein-Koordinaten noch nicht die ganze Raumzeit abdecken, etwa indem man die auslaufenden Strahlen in Abb. (3.2) zurückverfolgt und feststellt, dass sie $t^* = \infty$ bei endlicher Bogenlänge erreichen [33]. Diese Raumzeit ist deshalb noch nicht geodätisch vollständig, aber sie kann analytisch fortgesetzt werden. Dies kann durch die »Kruskal-Szekeres-Koordinaten« erreicht werden.

Die Transformation von den Koordinaten (r, t) für $r > 2M$ auf die Kruskal-Szekeres-Koordinaten, die wir mit (u, v) bezeichnen wollen, lautet

$$u := \sqrt{\gamma} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (3.23)$$

$$v := \sqrt{\gamma} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (3.24)$$

Das Linienelement nimmt dann die Form

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{\frac{-r}{2M}} (dv^2 - du^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (3.25)$$

an.

Eine ähnliche Transformation (bis auf Vorzeichen) überträgt die Region $0 < r < 2M$ der Schwarzschild-Koordinaten auf die Kruskal-Szekeres-Koordinaten

²Deshalb findet man in der älteren Literatur auch den Begriff »frozen stars«.

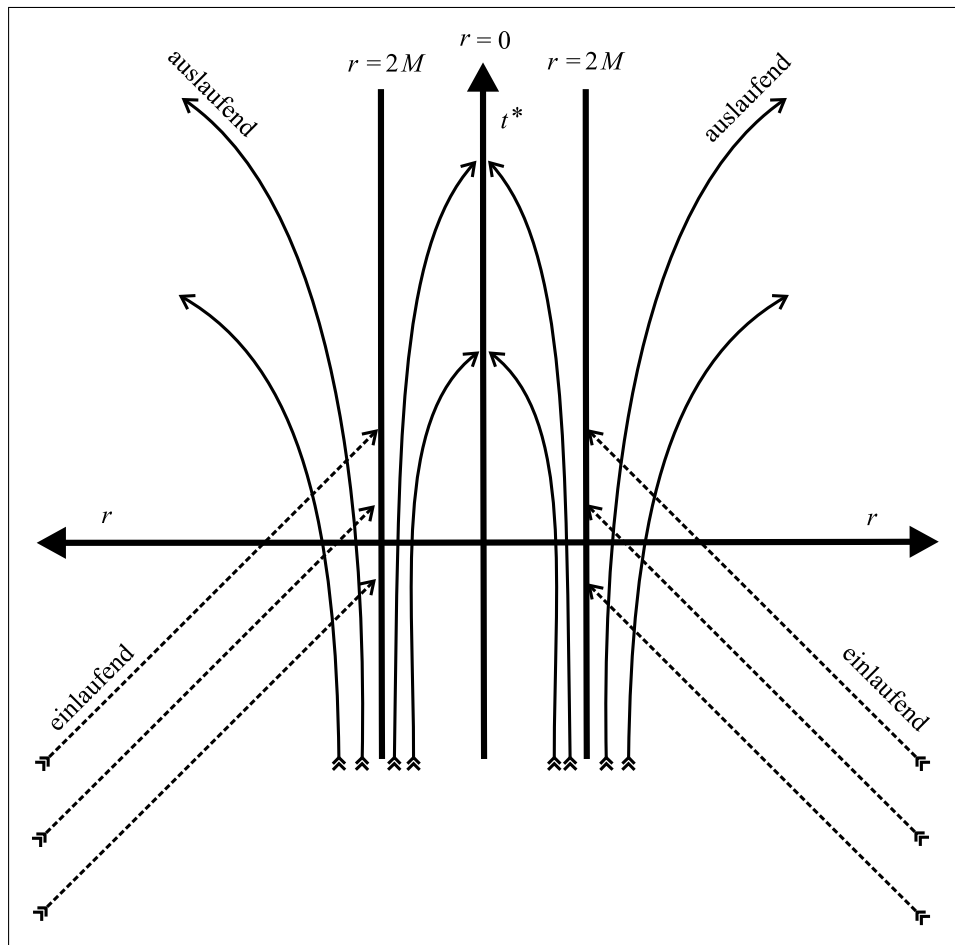


Abbildung 3.2: Die Eddington-Finkelstein-Koordinaten

(für Details siehe z.B. [7]). Doch der von den Schwarzschild-Koordinaten abgedeckte Bereich kann insgesamt zweimal auf die geodätisch vollständige Raumzeit abgebildet werden.

Diese Transformation lautet

$$u := \sqrt{\gamma} e^{\frac{r}{4M}} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (3.26)$$

$$v := \sqrt{\gamma} e^{\frac{r}{4M}} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (3.27)$$

Man sieht sofort, dass $v^2 - u^2$ eine Funktion von r allein ist und deshalb die Kurven konstanten r 's Hyperbeln sind. $\frac{2uv}{u^2 + v^2}$ ist eine Funktion von t allein. Die Kurven konstanten t 's sind also Geraden durch den Ursprung. In Abbildung 3.3 sieht man den Zusammenhang zwischen den Schwarzschild-Koordinaten und den Kruskal-Szekeres-Koordinaten. Das von den Schwarzschildkoordinaten für $r > 2M$ be-

deckte Gebiet wird auf I abgebildet. Schon an diesem Bild sieht man gut die kausale Struktur der Raumzeit. Wie man (3.25) entnehmen kann, sind die Koordinaten so gewählt, dass Lichtstrahlen im üblichen 45° -Winkel verlaufen. Ein Beobachter aus I kann deshalb nie Information nach II senden. Alle seine Nachrichten enden in der Singularität in III . Ebenso kann ein Beobachter aus II nie Information nach I senden. Die beiden Gebiete sind nicht kausal verbunden. In die Singularität III kann nur Information ein- aber nie auslaufen. Wir können sie deshalb mit dem schwarzen Loch identifizieren. Aber was ist mit dem Gebiet IV ? Hier kann nur Information herauskommen. Man nennt es deshalb ein »Weißes Loch«.

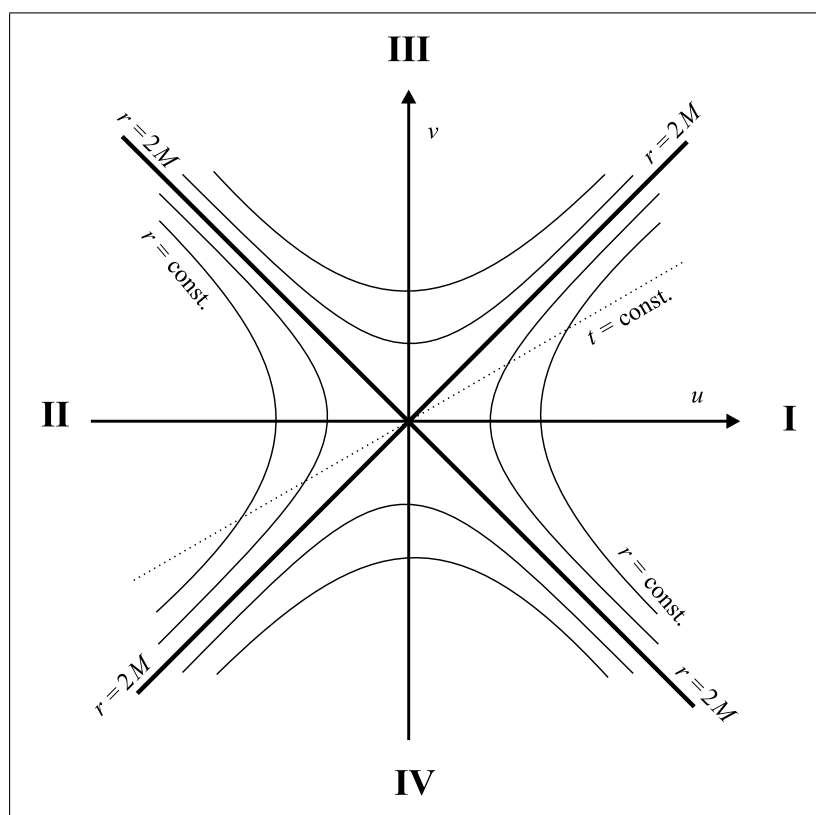


Abbildung 3.3: Die Kruskal-Szekeres-Koordinaten

Zur Untersuchung der kausalen Struktur einer Raumzeit ist es nützlich, sich das dazugehörige »Penrose-Carter-Diagramm« anzusehen [34]. Dabei wendet man eine konforme Transformation auf die Metrik an, die mit Lichtkegel-Koordinaten vorliegt. Die konforme Transformation macht nichts weiter, als eine Streckung oder Stauchung der Koordinaten zu verursachen, ohne jedoch Scherungen (also Winkelveränderungen) mit sich zu bringen. Staucht man ausreichend, kann man auf diese Art und Weise »unendlich nach endlich holen« und ein kompaktes Bild der Raumzeit-Struktur erhalten.

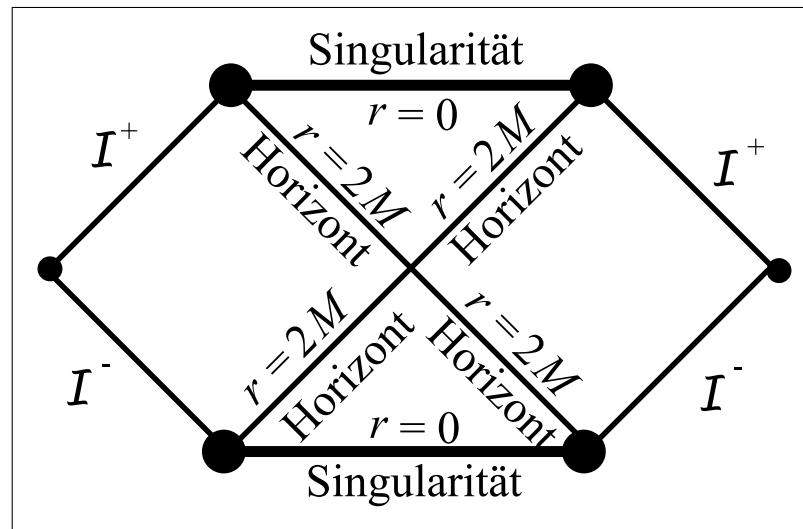


Abbildung 3.4: Das Penrose-Carter-Diagramm der Schwarzschildmetrik.

Wendet man eine solche Transformation auf die Kruskal-Szekeres-Koordinaten an [7], so erhält damit das Penrose-Carter-Diagramm Abb. 3.4. Dabei bezeichnet \mathcal{I}^+ («future null infinity») den asymptotischen Bereich, in dem zeitartige Kurven enden und \mathcal{I}^- («past null infinity») den asymptotischen Bereich, aus dem zeitartige Kurven kommen. Wir sehen jetzt sofort, dass beim Schwarzschildradius ein Horizont vorliegt.

Doch was ist mit dem Weißen Loch? Wie sollen wir uns das erklären? Nun, die hier angenommene Raumzeit ist statisch. Das Schwarze und auch das Weiße Loch müßten also seit Beginn des Universums bestehen. Ein Schwarzes Loch, das durch Kollaps entsteht, kann aber erst eine endliche Zeit existieren. Das Penrose-Carter Diagramm des zum Schwarzen Loch kollabierenden Systemes können wir erhalten, indem wir Abb (3.5) an der gestrichelten Linie, die die Oberfläche des Sternes darstellen soll, abschneiden, einen Innenraum anfügen und das Ganze noch etwas gerade ziehen, denn es kommt uns ja nur auf die topologischen Verhältnisse an. Das Ergebnis ist in Abb. (3.6) zu sehen.

3.4 Die Kerr-Newmann Lösung

Die meisten stellaren Objekte rotieren um ihre eigene Achse. Diese Rotation bricht die für die Schwarzschildlösung angesetzte Kugelsymmetrie. Stattdessen entsteht eine neue Symmetrie. Die Raumzeit ist nicht mehr statisch, sondern nur noch stationär. Eine Lösung für diesen Ansatz wurde 1963 von R. P. Kerr gefun-

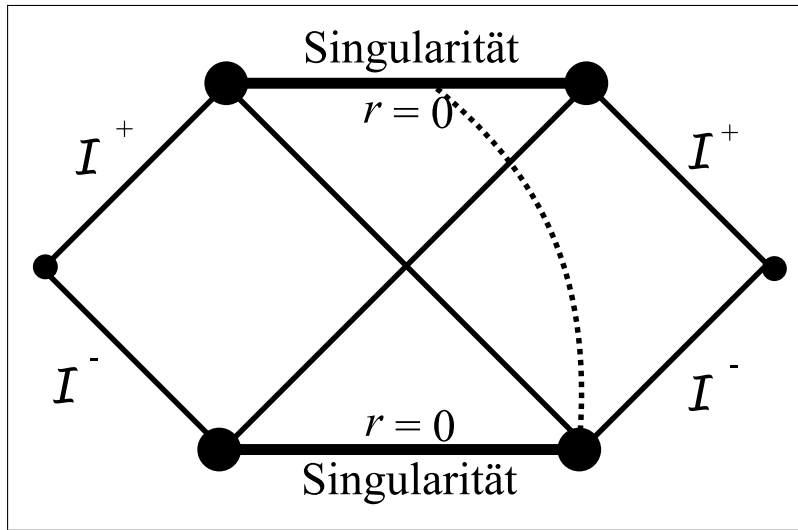


Abbildung 3.5: Zur Konstruktion des Penrose-Carter Diagrammes des Schwarzen Loches.

den [35, 36].

Man kann sich außerdem vorstellen, dass ein Stern eine Nettoladung tragen kann, die etwa durch Ionisation entsteht. Dadurch ist auch im Außenraum des Sternes keine Vakuumlösung mehr gefragt, sondern die Lösung der EFG mit dem Energie-Impuls Tensor einer Ladungsverteilung. Verzichten wir auf höhere Momente, so können wir eine Punktladung im Ursprung ansetzen. Im Jahre 1916 wurde eine Metrik für diesen Fall von Reissner und Nordstrom gefunden [38, 37].

Im allgemeinen Fall einer in e_ϕ -Richtung rotierenden und geladenen Materie hat die Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen die Form

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \left(\frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} \right) d\phi dt$$

$$+ \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (3.28)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (3.29)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (3.30)$$

und ist als **Kerr-Newmann Lösung** bekannt. Dabei gibt Q die Ladung und $a = \frac{J}{M}$ das (asymptotische) Drehmoment pro Masse an.

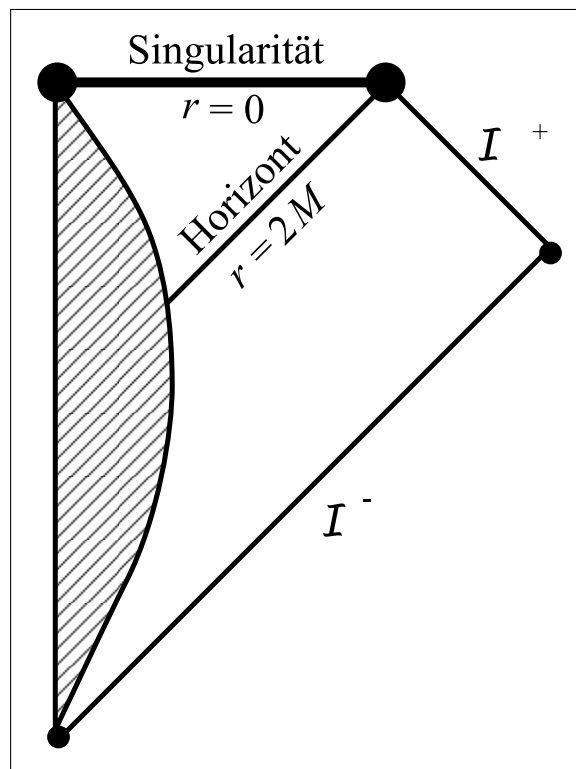


Abbildung 3.6: Das Penrose-Carter-Diagramm eines entstehenden Schwarzen Loches.

3.5 Eigenschaften der Kerr-Newmann Lösung

Wir sehen sofort, dass die g_{rr} -Komponente der Kerr-Newmann-Metrik singulär ist an der Stelle $\Delta = 0$ und die g_{tt} -Komponente singulär an der Stelle $\rho^2 = 0$. Eine Untersuchung der Krümmungskomponenten zeigt, dass nur die Singularität bei $\rho^2 = 0$ eine wahre Singularität ist, während bei $\Delta = 0$ ein Horizont liegt. Wie man an der Definition von ρ (3.29) sieht, liegt die Singularität bei $r = 0, \theta = \pi/2$.

- Im Fall $a^2 + Q^2 > M^2$ gibt es keine (reelle) Lösung der Gleichung $\Delta = 0$, die Singularität ist »nackt«. Diese Lösung ist physikalisch umstritten und man geht davon aus, dass nackte Singularitäten in der Raumzeiten aus bisher ungeklärten Gründen nicht auftreten. Diese Annahme ist unter dem Namen »Cosmic Censorship« bekannt [33].
- Im Fall $a^2 + Q^2 \leq M^2$ liegen die Nullstelle bei $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$, wobei bei r_+ ein Horizont, wie bei der statischen Schwarzschild-Lösung vorliegt. Dieser Horizont zensiert die Singularität aus unserer Raumzeit.

Der Horizont der Kerr-Lösung rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit $\Omega_H = a/2Mr_+$.

Desweiteren ist die Stelle $g_{tt} = 0$ von großem Interesse. Diese Hyperfläche, die durch die Gleichung

$$\begin{aligned} r(\theta)^2 - 2Mr(\theta) + a^2 + Q^2 &= a^2 \sin^2 \theta \\ \Rightarrow r(\theta) &= M + \sqrt{M^2 - Q^2 - a^2 \cos^2 \theta} \quad (3.31) \end{aligned}$$

beschrieben wird, trägt den Namen »Ergosphäre«. Eine Untersuchung von Weltlinien in dieser Raumzeit zeigt [7, 9], dass es im Gebiet zwischen Ergosphäre und Horizont für einen Beobachter nicht mehr möglich ist, sich der Mitbewegung der Raumzeit zu entziehen. Innerhalb der Ergosphäre kann es keinen relativ zum asymptotisch flachen Raum ruhenden Beobachter mehr geben.

Es ist zum Verständnis der kausalen Struktur dieser Lösung interessant, sich das zugehörige Penrose-Carter-Diagramm anzusehen. Da wir an dieser Stelle nicht weiter darauf eingehen können, sei der Leser auf die Literatur verwiesen [34, 7, 33].

3.6 Schwarze Löcher

Stellen wir uns eine Materieverteilung im Raum vor, die keinen inneren Druck aufweist, wie etwa Staub, so wird diese unter dem Druck ihrer eigenen Gravitation kollabieren. Für den einfachsten Fall einer homogenen Dichteverteilung ist dieser Kollaps auch analytisch berechnet worden[7].

Irgendwann wird der Druck der Gravitation so hoch wird, dass die Kernfusion von ermöglicht wird. So entstehen Sterne. Hat der Stern die leichten Elemente fusioniert, geht er zu schwereren über. Schließlich ist sein Kern aus Eisen und weitere exotherme Prozesse sind nicht mehr möglich. Der Kollaps beginnt von neuem. Auf der nächsten Stufe ist es der Druck des Elektronengases, der dem Gravitationsdruck entgegensteht. Ob dieser Zustand stabil ist, hängt von der Anfangsmasse des kollabierenden Objektes ab. Ist diese zu groß, so kann auch der Elektronendruck dem Gravitationsdruck nicht standhalten und die Materie wird weiter komprimiert. Die Elektronen werden in die Atomkerne gedrückt, was einen enormen Dichtezuwachs zur Folge hat. Es entsteht ein Neutronenstern. Der Entartungsdruck der Neutronen ist die letzte Stufe, die wir kennen, um den vollständigen Kollaps aufzuhalten. Ist die Anfangsmasse zu groß, als dass die Neutronen dem Gravitationsdruck standhalten können, so wird die Materie immer weiter in sich zusammenstürzen, bis ihre Ausmaße den Horizont unterschreiten. Ein Schwarzes Loch ist entstanden.

Je nach dem für die Zustandsgleichung der Materie verwandten Modell liegt die Massegrenze – die sogenannte Chandrasekhar-Grenze –, ab der ein kollabierendes System zwangsläufig als Schwarzes Loch enden muss zwischen einer und etwa zehn Sonnenmassen [33].

Insgesamt unterscheidet man drei Typen von Schwarzen Löchern, auf die wir im Folgenden genauer eingegangen wird.

Stellare Schwarze Löcher

Stellare Schwarze Löcher entstehen, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, durch Kollaps aus massereichen Sternen. Es besteht auch die Möglichkeit, dass ein stabiler Neutronenstern durch Zufuhr weiterer Masse soweit anwächst, dass sich schließlich doch noch ein Horizont bildet. Diese Objekte besitzen eine typische Masse von $\approx 10M_{\odot} \approx 10^{33}$ g. Man kann versuchen, in etwa abzuschätzen, wie viele von diesen Schwarzen Löchern in unserer Galaxie durch den Tod eines Sternes ins Leben gerufen worden sind. In Abhängigkeit von den eingehenden Größen liegt das Ergebnis in der Größenordnung zwischen $N = 10^8$ und $N = 10^9$ [33, 39]. Diese Abschätzungen deuten auf eine große Anzahl von zu erwartenden Stellaren Schwarzen Löchern hin. Die naheliegende Frage ist nun die nach der Beobachtung dieser Objekte.

Zunächst einmal deutet schon der Name »Schwarzes Loch« darauf hin, dass die direkte Beobachtung schwierig ist, denn ein Schwarzes Loch zeichnet sich je gerade dadurch aus, dass Nichts aus ihm entkommen kann - noch nicht einmal Licht. Das Schwarze Loch kann sich jedoch indirekt bemerkbar machen. Es gibt vier Kriterien, die man heranziehen kann und die zur Identifikation angewandt werden können.

1. Schwarze Löcher, die sich in Doppelsternsystemen befinden, verursachen eine periodische Dopplerverschiebung in der Strahlung des Partners. Aus der Stärke der Verschiebung sowie der Periodendauer lässt sich die Masse des dunklen, kompakten Objektes bestimmen. Liegt diese über der Chandrasekhar-Grenze, so kann es sich nicht um einen Weißen Stern oder einen Neutronenstern handeln.
2. Schwarze Löcher senden elektromagnetische Strahlung aus, wenn sie Gas aus dem interstellaren Medium anziehen, das sich beim Fall aufheizt.
3. In engen Doppelsystemen kann Materie von dem Stern auf das Schwarze Loch übergehen. Diese Materie heizt sich beim Übergang so stark auf, dass dabei Röntgenstrahlen emittiert werden.

System	Umlaufsdauer [Tage]	Masse des kompakten Partners [in M_{\odot}]	Leuchtkraft der Röntgenstrahlen [erg/sec]
Cyg X-1 (V 1357 Cyg)	5.6	7-18	$\approx 8 \times 10^{37}$
LMC X-3	1.7	7-11	$\approx 4 \times 10^{38}$
LMC X-1	4,2	4-10	$\approx 2 \times 10^{38}$
A0620-00 (V616 Mon)	0.3	5-17	$\leq 10^{38}$
GS 2023+338 (V 404 Cyg)	6.5	10-15	$\leq 6 \times 10^{38}$
GRS 1121-68 (XN Mus 1991)	0.4	9-16	$\leq 10^{38}$
GS 2000+25 (QZ Vul)	0.3	5.3-8.2	$\leq 10^{38}$
GRO J0422+32 (XN Per 1992)	0.3	2.5-5.0	$\leq 10^{38}$
GRO J1655-40 (XN Sco 1994)	2.6	4-6	$\leq 10^{38}$
XN Oph 1977	0.7	5-7	$\leq 10^{38}$

Tabelle 3.1: Kandidaten für Stellare Schwarze Löcher [33]

4. Theoretisch ist die Bestimmung der Masse auch durch die Analyse von Gravitationslinsen möglich. Dieses Verfahren ist jedoch bis heute experimentell noch nicht verwirklicht.

Die zweite dieser Möglichkeiten lässt jedoch keine Klassifikation des Objektes als Schwarzes Loch zu, denn bei einer detaillierten Analyse der Strahlung zeigt sich, dass Intensität und Spektralcharakteristik derjenigen eines weißen Zwergsterns sehr ähneln, so dass eine Unterscheidung schwierig ist. Es könnte allerdings ebenso sein, dass es sich bei einigen der bisher als Weiße Zwerge eingestuften Objekte um Schwarze Löcher handelt.

Es gibt eine Reihe von Kandidaten für die verbleibenden Kriterien 1.) und 3.), darunter auch einige, die beide Anforderungen erfüllen. Als stärkste Kandidaten sind diese in der obenstehenden Tabelle 3.1 angeführt (aus [33]). Weitere Daten findet der interessierte Leser in [40].

Die angeführten Kriterien zur Identifikation liefern im strengen Sinne keinen »Beweis« für die Existenz eines Schwarzen Loches, denn dazu müsste die An-

wesenheit des Horizontes nachgewiesen werden. Die Merkmale, die die oben angeführten Kandidaten aufweisen, sind jedoch derart, dass es keine anderslautende physikalische Erklärung für ihr Verhalten gibt, als die, dass es sich um ein Schwarzes Loch handelt [33, 40, 41, 42, 43].

Riesige Schwarze Löcher

Stellare Schwarze Löcher können zu Riesigen Schwarzen Löchern wachsen, wenn sie sich in Gebieten hoher Sterndichte befinden. Sie verschlucken dann ihre Nachbarn und vergrößern dadurch wiederum ihren Einzugsbereich. Die Massen dieser Schwarzen Löcher liegen typischerweise im Bereich von $\approx 10^6$ bis $10^{10} M_{\odot}$. Es muss ausserdem die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, dass solche Riesigen Schwarzen Löcher bereits bei der Bildung der Galaxie entstehen.

Diese Schwarzen Löcher, die vor allen Dingen im Zentrum von Galaxien existieren, machen sich dadurch bemerkbar, dass sie die Dynamik von Sternen und Gas in ihrer Umgebung dermaßen beeinflussen, dass deren Geschwindigkeitsprofil Rückschlüsse auf ein dunkles Objekt solch hoher Masse zulässt, dass es sich aufgrund dessen geringen Ausmaßes nur um ein Schwarzes Loch handeln kann (z.B. Sagittarius A*, vgl. [44, 45]).

Die Riesigen Schwarzen Löcher sind außerdem die wahrscheinlichste Erklärung für die immer wieder beobachteten starken Energieausbrüche in Zentren von Galaxien. Etwa 1% aller Galaxien emittiert Strahlung hoher Intensität im Radio- und Infrarot-Bereich, insbesondere aber auch »harte« Strahlung (kurze Wellenlängen) im Ultraviolett-, Röntgen- und Gamma-Bereich. Die Leuchtkraft dieser Ausbrüche kann dazu dienen, die Masse der sie verursachenden Objekte abzuschätzen. Die Zeitskala, in der sie sich verändern, ermöglicht es, Aussagen über die Ausmaße zu machen. Diese »Quasare« oder andere Formen »aktiver galaktischer Kerne« (active galactic nuclei) wurden schon vor mehr als 30 Jahren entdeckt. Die riesigen Energiemengen werden in ihnen auf kleinstem Volumen erzeugt. Im Falle der leuchtkräftigsten Quasare entspricht dies bis zu $10^{14} L_{\odot}$ aus einem Gebiet mit einem Durchmesser von weniger als einem Lichtjahr.³ Weitere charakteristische Merkmale von aktiven Galaxienkernen und Quasaren sind gebündelte Jets von relativistischen Elektronen, die aus dem Kern ausströmen und die Tatsache, dass die emittierte Strahlung zeitlich schnell variiert.

All diese Phänomene sind nicht durch die sonst in Galaxien dominierenden Kernverschmelzungsprozesse in Sternen zu erklären, dafür aber recht plausibel durch die effektive Umwandlung von Gravitationsenergie in Strahlungsenergie in der unmittelbaren Umgebung von Riesigen Schwarzen Löchern.

³Zum Vergleich: Alle Sterne unserer Milchstraße besitzen etwa $10^{10} L_{\odot}$ auf einem Volumen, das mehr als 10^{11} mal größer ist.

Galaxie	Geschätzte Masse [in M_{\odot}]
M 31	3×10^7
M 32	3×10^6
Milky Way	2.5×10^6
NGC 4594	5×10^8
NGC 3115	10^9
NGC 3377	8×10^7
M 87	2×10^9
NGC 4258 (M 106)	4×10^7
NGC 3379	5×10^7
NGC 4486 B	5×10^8

Tabelle 3.2: Die geschätzten Massen einiger Riesiger Schwarze Löcher in Zentren von Galaxien

In Tab 3.2 (aus [40]) sind einige der besten Kandidaten aufgetragen. Für weitere Details siehe [33, 40, 43, 45, 46, 47].

Winzige Schwarze Löcher

Diese Schwarzen Löcher können durch Dichte-Fluktuationen im frühen Universum entstehen. Der Kollaps der Materie wird hier durch äußerst starken äußeren Druck herbeigeführt in einer damals noch extremen Dichte. (Deshalb auch »Primordial Black Hole – PBH«.) Dadurch können Massen kollabieren, die unter der Chandrasekhar-Grenze liegen. Mini Black Holes haben Massen von $M \leq 10^{-18} M_{\odot} \approx 10^{15}$ g.

Hawkings Entdeckung (siehe Kap. 3.7), dass Schwarze Löcher durch thermische Emission verdunsten können, rückte die PBHs in das Interesse der Astrophysik. Die Verdunstungseffekte dieser winzigen Schwarzen Löcher sind potentiell observabel. Mit einer Masse von $M \approx 10^{15}$ g würden sie heute verdunsten. Trotz diesbezüglicher Beobachtungsversuche wurden bis heute keinerlei Anhaltspunkte für die Existenz dieser Objekte gefunden. Die Ursache dafür kann darin liegen, dass die letzten Stadien der Verdunstung noch nicht ausreichend verstanden sind, aber es besteht auch die Möglichkeit, dass die Bedingungen im frühen Universum derart waren, dass sie die Entstehung dieser winzigen Schwarzen Löcher nicht zugelassen haben. Unglücklicherweise sind wir nicht in der Lage eine zuverlässige Interpretation dieser Tatsache zu geben [48, 49, 50].

3.7 Der Hawking-Effekt

Im Jahre 1975 veröffentlichte S. W. Hawking seine berühmte Rechnung zur Strahlung Schwarzer Löcher [51, 52]. Er zeigte dort, dass ein Schwarzes Loch unter Berücksichtigung von Quanteneffekten in der Nähe des Horizonts Teilchen emittiert, deren Energie thermisch verteilt ist. Einem Schwarzes Loch der Masse M wird so eine Temperatur

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.32)$$

zugeordnet. Dabei ist κ die in (3.16) eingeführte Oberflächengravitation des Schwarzen Loches. Mit allen Konstanten erhält man

$$T = \frac{1}{8\pi} \frac{\hbar c^3}{k_B G} \frac{1}{M} = \frac{1}{8\pi} \frac{c^2 m_p^2}{k_B} \frac{1}{M} \approx 10^{-6} \frac{M_\odot}{M} [\text{K}] \quad (3.33)$$

Je geringer die Masse des Loches ist, desto höher ist die Temperatur. Es ist außerdem bemerkenswert, dass diese Formel alle fundamentalen Konstanten verknüpft. Mit diesem Ergebnis gelang es erstmals, Gravitation, QFT und Thermodynamik zu verbinden.

Dieser Effekt ist ähnlich wie die Teilchenproduktion aus dem Vakuum in der QED. In beiden Fällen liegt ein starkes äußeres Feld vor. Das Vakuum ist erfüllt von virtuellen Teilchenpaaren. Wird die Kraft des Hintergrundfeldes zu stark, so können diese Teilchenpaare auseinandergerissen werden und ein reelles Paar bilden (Abb. 3.7).

Soweit die Analogien. Es gibt jedoch zwei wesentliche Unterschiede. Erstens ist in diesem Fall nicht die Stärke des Feldes selber ausschlaggebend, denn die »Ladung« der ART, also die Masse, ist für beide Teilchen positiv. Vielmehr ist die Gezeitenkraft, also die räumliche Änderung der Gravitation bzw. der Krümmung, die entscheidende Größe. Zweitens kann die Energie in der ART nicht einfach aus dem »Feld« genommen werden, denn die Energie des Gravitationsfeldes ist im Allgemeinen keine physikalische Größe, der eine koordinatenunabhängige Bedeutung zukommt. Zwar lässt sich aus dem Einstein-Tensor eine Erhaltungsgröße konstruieren, aber diese ist kein Tensor und wird für manchen Beobachter verschwinden. Die Energie für das Teilchenpaar kann also nur aus der Masse des Loches selber kommen. Mehr noch, es kann (in einem statischen Feld) nur dann erzeugt werden, wenn ein Horizont vorhanden ist. Das Teilchen innerhalb des Horizontes hat aufgrund der Umkehrung von zeit- und raumartiger Koordinate eine Energie, die für den asymptotischen Beobachter negativ ist. Es fällt also eine negative Masse in das Loch, bzw. die Masse des Loches nimmt ab.

Natürlich ist dieses Bild nur ein Hilfsmittel, damit wir uns eine Vorstellung von den Vorgängen machen können und eine detaillierte Rechnung kann damit nicht

$$= \frac{1}{4} \mathcal{A} + \text{const.} , \quad (3.36)$$

wobei $\mathcal{A} = 4\pi R_S^2$ die Oberfläche des Schwarzen Loches ist. Die additive Konstante ist für uns im Weiteren nicht von Bedeutung und wir setzen sie daher $= 0$.

3.8 Verdunstende Schwarze Löcher

Ein Schwarzes Loch verliert mit der Hawking-Strahlung Energie. Dadurch verringert sich seine Masse. Ein Blick auf Gleichung (3.33) zeigt, dass der durch die Emission erfolgende Masseverlust des Schwarzen Loches dessen Temperatur erhöhen wird und damit die Strahlung verstärkt. Bei Abstrahlung in den freien Raum wirkt sich diese Beschleunigung schließlich in einem Zerstrahlen des Loches aus.

Die Dauer der Zerstrahlung kann man leicht unter der Annahme abschätzen, dass die Abstrahlung das als zeitlich stabil angenommene Schwarze Loch nur in vernachlässigbarem Maße zeitabhängig macht.

Die Energiedichte der Strahlung ist dann stets im Gleichgewicht und nach dem »Stefan-Boltzmann-Gesetz«

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 k_B^4}{30 \hbar^3 c^2} T_S^4 . \quad (3.37)$$

Die zeitliche Änderung der Energie des Schwarzen Loches können wir abschätzen mit

$$\frac{dE}{dt} \approx -\varepsilon \mathcal{A} , \quad (3.38)$$

wobei \mathcal{A} wie zuvor die Oberfläche des Schwarzen Loches ist. Berücksichtigen wir noch $E = Mc^2$, so erhalten wir

$$\frac{dM}{dt} \approx -\frac{1}{15\pi 8^3} \frac{c^4 \hbar}{G^2} \frac{1}{M_0^2} . \quad (3.39)$$

M_0 ist hier die Masse zu Beginn der Verdunstung. Durch Integration über t (Integrationskonstante M_0) erhalten wir damit für die geschätzte Lebensdauer des Schwarzen Loches

$$\tau_L \approx 15\pi 8^3 \frac{G^2}{c^4 \hbar} M_0^3 \approx 10^{59} \left(\frac{M_0}{M_\odot} \right)^3 \text{ Gyr} \quad (3.40)$$

bis M auf 0 abgesunken ist, wobei $\frac{dM}{dt}$ am Schluss gegen unendlich geht. Dabei erhalten wir das unphysikalische Ergebnis, dass das Loch am Ende immer schneller evaporiert und sich schliesslich explosionsartig in Strahlung auflöst.

Sehen wir zu unseren Annahmen für diese Abschätzung zurück, so stellen wir fest, dass wir mit Anwendung des Stefan-Boltzmann-Gesetzes angenommen haben, dass das schwarze Loch ein Wärmebad ist und durch die Emission eines Teilchens nur in vernachlässigbarem Maße beeinflusst wird. Die Rückwirkung der emittierten Teilchen auf das Wärmebad kann jedoch bestimmt dann nicht mehr vernachlässigt werden, wenn die Energie der emittierten Teilchen der Größenordnung der Energie des verbleibenden Loches entspricht. Und dies wird früher oder später der Fall sein. Bei astrophysikalischen Schwarzen Löchern allerdings eher später, so dass über weite Strecken die oben gemachte Näherung zur Evaporationsrate dM/dt sehr gut ist. Fragwürdig ist jedoch die so erhaltene Lebensdauer, die unter der Annahme berechnet wurde, dass die Evaporationsrate für alle M gilt. Diese Lebensdauer ist eine untere Abschätzung, denn wir erwarten, dass es für das Schwarze Loch schwerer wird, Teilchen zu emittieren, wenn man deren Rückwirkung auf das Wärmebad berücksichtigt.

Um ein Gefühl für die Lebenszeit und die Relevanz dieses Effektes für astrophysikalische Schwarze Löcher zu bekommen, wollen wir einige Zahlen angeben. Nach Hawkings Abschätzung ergibt sich für $M_0 \geq 10^{15}$ g, also Löcher, die durch Kollaps normaler astrophysikalischer Objekte entstehen, dass τ_L das geschätzte Alter des Universums (10^{10} Jahre) überschreitet. Dieser Effekt ist also derzeit nicht von Bedeutung. Anders verhält es sich für die Mini-Black-Holes, die gegenwärtig zerstrahlen sollten. Für Giant Black Holes ($M_0 \geq 10^{27}$ g) unterschreitet die Temperatur der Hawking-Strahlung die 3K kosmische Hintergrundstrahlung. Bei ihnen überwiegen deshalb die Absorbtionsprozesse.

Kanonisch?

Das obige Ergebnis erhält man thermodynamisch durch Ansetzen des kanonischen Ensembles, in dem die Anzahldichte der Teilchen (Bosonen) mit der Energie ω gegeben ist durch:

$$n(\omega) = \frac{1}{\exp \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} . \quad (3.41)$$

Daraus erhält man, wie von der Schwarzkörperstrahlung bekannt, die Gesamtenergie, die wir in (3.38) eingesetzt haben via

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty n(\omega)\omega^3 d\omega \propto T^4 . \quad (3.42)$$

Auch hier geht wieder ein, dass die Masse M des Loches sehr groß ist im Vergleich zur Energie der abgestrahlten Teilchen. Strenggenommen sollte das Loch keine einzelnen Teilchen mit Energien $\omega > M$ abgeben können (mehr als drin ist, kann nicht rauskommen).

Der Faktor 4π in (3.42) entsteht dadurch, dass die Integration, die eigentlich über den Impulsraum ausgeführt wird, mithilfe der Rotationsymmetrie in eine Integration über die Frequenz umgewandelt wird. Dabei erhält man pro räumlicher Dimension einen weiteren Faktor $1/(2\pi\hbar)$.

Wir können uns leicht überlegen, bei welcher Masse die Abstrahlung wesentlich modifiziert werden muss. Die Planckkurve hat nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz ein Maximum bei der Energie $\hbar\omega_{max} \approx 3Tk_B$. Liegt diese Energie, bei der der Hauptteil der Strahlung emittiert wird, in derselben Größenordnung wie c^2M selbst, so ist das kanonische Ensemble nicht mehr anwendbar. Wir setzen (3.33) ein und sehen, dies ist der Fall, wenn

$$\begin{aligned} h\omega_{max} &\approx c^2M \\ \frac{3}{8\pi} \frac{c^2m_p^2}{k_B} \frac{1}{M} k_B &\approx c^2M \\ \frac{1}{3}m_p &\approx M \quad , \end{aligned} \quad (3.43)$$

also M von der Größe Planckmasse ist. Man kann natürlich einwenden, dass bei diesen Massen ohnehin die Effekte der Quantengravitation zu weit stärkeren Modifikationen führen, und wir uns daher keine weiteren Gedanken machen brauchen. Jedoch hat sich die Thermodynamik auch für Quantensysteme als brauchbar erwiesen und selbst wenn die genauen Effekte der Quantengravitation noch unklar sind, wollen wir doch davon ausgehen, dass sie noch ein gutes Stück weit unterhalb der Planckmasse anwendbar bleibt.

Unter Anwendung der statistischen Mechanik können wir die obige Rechnung so verfeinern, dass sie aus thermodynamischer Sicht auch dann gültig bleibt, wenn die Masse der emittierten Teilchen der Restmasse des Schwarzen Loches nahekommt.

Mikrokanonisch!

Anstatt nun wie zuvor anzunehmen, dass das Schwarze Loch ein Wärmereservoir der Temperatur T ist, gehen wir stattdessen vom mikrokanonischen Ansatz aus. Die Teilchendichte für ein einzelnes Teilchen der Energie ω für $\omega \leq M$ ist

$$n(\omega) = \frac{\exp[S(M - \omega)]}{\exp[S(M)]} \quad , \quad (3.44)$$

wobei die Entropie S des Schwarzen Loches, die wir in (3.36) berechnet haben, proportional zu seiner Oberfläche \mathcal{A} ist.

Sehen wir uns den Limes großer Massen von (3.41) und (3.44) an, so erhalten wir wie üblich für ersteren das Wiensche Strahlungsgesetz für $T^{-1} = 8\pi M$

wieder mit

$$n(\omega) \approx e^{-8\pi\omega M} . \quad (3.45)$$

Für den Limes im mikrokanonischen Fall setzen wir die Entropie S ein und multiplizieren das Binom aus. Dabei kürzt sich im Exponent der Term $\propto M^2$. Von den verbleibenden 2 Termen $\propto -2\omega M$ bzw. $\propto \omega^2$ können wir für große Massen auf den masseunabhängigen Term verzichten. Wir sehen: fügen wir noch den Vorfaktor von 4π hinzu, ist dieser Limes identisch mit dem Limes des kanonischen Falles. Für große Massen (immer relativ zum Hauptteil der Strahlung) geht also - wie erwartet - der mikrokanonische Fall in den kanonischen über.

Im Mehrteilchenzustand haben wir weiter für den mikrokanonischen Ansatz

$$n(\omega) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M}{\omega} \rfloor} \frac{\exp[S(M - j\omega)]}{\exp[S(M)]} , \quad (3.46)$$

dabei gibt $\lfloor x \rfloor$ die nächst kleinere ganze Zahl von x an und sorgt für das Abbrechen der Summe, sobald die Energie der Teilchen die Gesamtmasse des Loches überschreitet. So erhalten wir die Gesamtenergiedichte zu

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} e^{-S(M)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M}{\omega} \rfloor} \exp[S(M - j\omega)] \omega^3 d\omega . \quad (3.47)$$

Wir substituieren $x = M - j\omega$ (siehe auch [143]). x ist dann die Energie des Schwarzen Loches nach der Abstrahlung von j Teilchen der Energie ω . Nach Umformung ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} e^{-S(M)} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^4} \int_0^M e^{S(x)} (M - x)^3 dx . \quad (3.48)$$

Die Reihe ergibt dabei den Wert $\pi^4/90$. Die zeitliche Änderung der Masse berechnet sich daraus mit Einsetzen aller Größen zu

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi^3}{45} M^2 \exp[-4\pi M^2] \int_0^M (M - x)^3 \exp[4\pi x^2] dx . \quad (3.49)$$

Die Energie ist hier in Vielfachen von m_p angegeben. Für große M ergibt sich wieder das kanonische Ergebnis. Das durch Anwendung des mikrokanonischen Ensembles entstandene Ergebnis sehen wir uns jetzt noch im Vergleich zum makrokanonischen Ergebnis für kleine Massen an (Abb. 3.8). Wir sehen, dass im mikrokanonischen Fall die Verdunstungsrate für $M \rightarrow 0$ nicht divergiert, sondern nach einem Maximum im Bereich $M < m_p$ wieder abfällt.

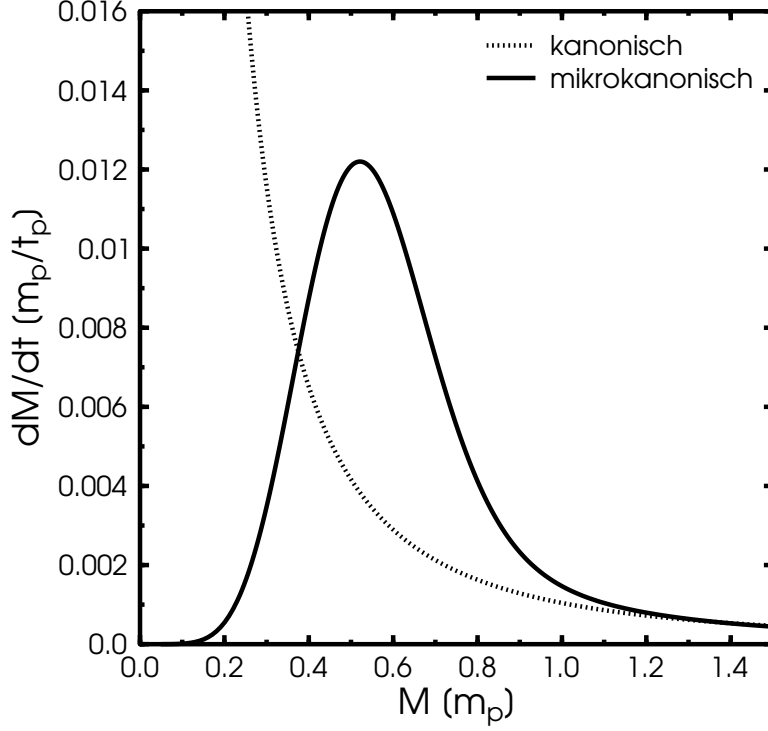


Abbildung 3.8: Kanonisch kontra Mikrokanonisch nahe m_p .

Durch Integration läßt sich nun aus dM/dt erneut die Lebensdauer des Schwarzen Loches gewinnen. Dabei erhält man für ein Loch der Masse $M = 2m_p$ nach dem mikrokanonischen Ansatz (numerischer Wert):

$$\tau_{\text{mik}}(2m_p) \approx 1.45 \times 10^{17} t_p \approx 10^{-3} \text{fm}/c \quad , \quad (3.50)$$

wohingegen man nach dem kanonischen Ansatz erhielte

$$\tau_{\text{kan}}(2m_p) \approx 2 \times 10^6 t_p \approx 10^{-14} \text{fm}/c \quad . \quad (3.51)$$

Da die Verdunstungsrate für Massen deutlich über $2m_p$ in beiden Fällen nahezu identisch ist, kann man die Lebensdauer (3.40) korrigieren, indem man die Differenz der obigen Werte addiert:

$$\tilde{\tau}_L(M) \approx \tau_L(M) - \tau_{\text{kan}}(2m_p) + \tau_{\text{mik}}(2m_p) \quad . \quad (3.52)$$

Die Rechnungen dieses Abschnittes werden wir im dritten Teil für höhere Dimensionszahlen wieder brauchen.

Kapitel 4

Die Idee der Extra-Dimensionen

4.1 Einsteins Traum

Einsteins Theorie der Gravitation ist eine rein geometrische Theorie. Der Quellterm muss dabei aus einer anderen Theorie kommen, etwa aus der Hydrodynamik oder Elektrodynamik. Einsteins Traum war, dass sich schließlich alle Wechselwirkungen geometrisch erklären liessen. Er hatte die Vorstellung, dass sich die Elementarteilchen als stabile Vakuumlösungen seiner Feldgleichungen herausstellen würden, aus denen sich in makroskopischer Näherung ein nichtverschwindender Energie-Impuls-Tensor ergäbe. Diese Vorstellung musste er aufgeben, als die Schwarzschildlösung bekannt wurde. Es gibt dort keine Quantisierung der Masse und auch Ladungen tauchen in der ART ohne Quellen nicht auf.

Aus heutiger Sicht, mit dem gesamten Vorwissen über Eichtheorien, ist das nicht weiter verwunderlich. Es fehlt die Eichgruppe $U(1)$, die Symmetriegruppe der Elektrodynamik. Noch schwieriger wird der Fall mit den übrigen Feldtheorien und schließlich steht man noch vor dem Problem der Quantisierung und der damit verknüpften Renormierung.

Als Kaluza und Klein mit ihrer 5-dimensionalen Erweiterung der ART aufwarteten, die eine Vereinigung von Elektrodynamik und ART erreichte, war Einstein begeistert. Wir werden uns den Kaluza-Klein Theorien in den folgenden Abschnitten zuwenden. Es blieben allerdings noch viele Probleme ungelöst, die Einstein von seinem Traum trennten. Damit die Vakuumlösungen als Elementarteilchen interpretiert werden können, sollten sie etwa singularitätsfrei sein. Einstein selbst gelang schließlich der Beweis, dass solche Lösungen in fünf Dimensionen nicht existieren [54].

Da Einstein die Arbeiten von Yang und Mills nicht bekannt waren (sie erschienen erst wenige Jahre vor seinem Tode) und die Formulierung der Theorie durch Faserbündeln erst Anfang der 70er Jahre entwickelt wurde, befand er sich in einer

Sackgasse.

4.2 Kaluza-Klein Theorien

Die grundlegende Idee der Theorien von Kaluza und Klein ist zunächst einfach zu verstehen, doch weitreichend in ihren Konsequenzen und wunderbar in den Ergebnissen.

Unser vierdimensionaler Raum wird um eine zusätzliche Dimension erweitert, in deren Krümmungsverhalten man die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes unterbringen möchte. Die zusätzlichen Komponenten des metrischen Tensors werden mit den elektromagnetischen Potentialen identifiziert.

Notation für Indices

Im Folgenden bezeichnen wir die Gesamtdimension der Mannigfaltigkeit als D . Die Anzahl der Extra-Dimensionen sei d . Es ist also $D = 4 + d$.

- Wir benutzen die griechischen Indices $\alpha, \beta, \dots, \nu, \mu \dots$ nach wie vor für die üblichen vier Raum-Zeit Dimensionen.
- Die lateinischen Indices a, b, \dots, i, j, \dots (mit Ausnahme des d) laufen über die zusätzlichen Dimensionen, also von $4+1$ bis $4 + d$.
- Große lateinische Indices A, B, \dots, I, J, \dots (mit Ausnahme des D) laufen über alle Dimensionen, also von 1 bis D .

Im Falle von Kaluza und Klein ist $d = 1$.

Zum besseren Verständnis bezeichnen wir die fünfdimensionalen Größen mit einem vorangestellten Index ⁽⁵⁾, die vierdimensionalen Größen entsprechend mit dem Index ⁽⁴⁾.

Als Bewegungsgleichungen für die Felder (in Form des metrischen Tensors) dienen die uns schon bekannten Einsteinschen Feldgleichungen im Vakuum (2.9), allerdings in der jetzt 5-dimensionalen Raumzeit.

Wir erinnern uns, dass die darin auftauchenden Tensoren ⁽⁵⁾ R_{IJ} und ⁽⁵⁾ R durch Kontraktion - also Summation über Indices entstanden sind. Wenn wir diese Summation aufteilen in eine Summation über die üblichen 1 bis 4, die fünfte Dimension extra betrachten und diesen Rest auf die andere Seite der Gleichung bringen,

so generieren uns die zusätzlichen Krümmungskomponenten eine Quelle! Außerdem bleiben uns noch weitere Gleichungen übrig für die Komponenten R_{ab} , die es zu interpretieren gilt.

Wir werden in diesem Abschnitt sehen, wenn auch nicht im Detail nachrechnen,

- dass die Quellen, die generiert werden, gerade durch den Energie-Impuls Tensor des elektromagnetischen Feldes beschrieben werden, wenn wir die neuen Komponenten der Metrik richtig interpretieren,
- dass die zusätzlichen Gleichungen gerade die Maxwell-Gleichungen ergeben,
- dass sich die Geodätengleichung im fünfdimensionalen Raum mit dem kovarianten Lorentzsche Kraftgesetz identifizieren lässt,
- *und* dass dieser Ansatz nicht nur auf die Eichgruppe $U(1)$ beschränkt ist.

Abschließend werden wir noch auf einige Schwächen und Probleme dieser Theorien zu sprechen kommen.

Eine Idee und ihr Weg

Die Idee zu einer Vereinheitlichung von ART und Elektrodynamik hatte der junge Privatdozent Theodor Kaluza schon 1919 und übersandte sie an A. Einstein mit der Bitte um Veröffentlichung. Aus nicht näher bekannten Gründen blieb Kaluzas Manuskript zwei Jahre lang liegen, obwohl Einstein sofort äußerst begeistert darauf reagierte, und wurde erst 1921 an die Preussische Akademie der Wissenschaften [55] weitergeleitet.

Kaluza betrachtet einen fünfdimensionalen Raum, in dem er die klassische ART mit der Elektrodynamik vereinigen will. Sein Ansatz für den metrischen Tensor ist:

$${}^{(5)}g_{IJ} = \begin{pmatrix} {}^{(4)}g_{\mu\nu} & \alpha A_\mu \\ \alpha A_\nu & 2\phi \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

A_μ identifiziert er mit dem elektromagnetischen Potential. Dabei fügt er die Zusatzbedingung an, dass die Felder unabhängig von der fünften Koordinate sind, d.h. $\partial_5 {}^{(5)}g_{IJ} = 0$.

Diese Bedingung wird auch die »cylinder condition« genannt. Hiermit trägt Kaluza der Tatsache Rechnung, dass die fünfte Dimension sich in unseren Experimenten nicht bemerkbar macht. Trotzdem ist diese Forderung in dem Sinne unnatürlich, als dass es unklar bleibt, wieso die Physik in unserer Raumzeit von einer Koordinate vollkommen unabhängig sein soll.

Das neue skalare Feld $\phi(x)$ wird auch »Dilaton-Feld« genannt. Kaluza fährt mit einer Linearisierung der Feldgleichungen fort. Außerdem macht ihm das skalare Feld Kopfzerbrechen, weil die Wechselwirkung mit ihm zu den führenden Termen der Bewegungsgleichung gehört - was aber niemand je beobachtet hat, dessen war sich schon Kaluza bewusst.

Oskar Klein [56] griff 1926 die Ideen von Kaluza auf und verbesserte den Ansatz. Sein Ansatz für den metrischen Tensor ist:

$${}^{(5)}g_{IJ} = \begin{pmatrix} {}^{(4)}g_{\mu\nu} + \phi^2 A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi^2 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

der uns viel weiter bringen wird, als Kaluzas Ansatz. Auch ohne Linearisierung erhält man die gewünschten Gleichungen der Elektrodynamik. Bis zur linearen Ordnung (in A) stimmt er mit Kaluzas Ansatz überein.

Man bekommt für das Linienelement:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + \phi^2 (A_\nu dx^\nu + dx^5)^2. \quad (4.3)$$

Klein fügt die »cylinder condition« nicht hinzu, sondern kompaktifiziert die fünfte Koordinate auf einen Kreis mit Radius R , um sodann die Periodizität auszunutzen und die Komponenten der Metrik in Fourierreihen zu entwickeln:

$$g_{\mu\nu}(x_K) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} g_{\mu\nu}(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}} \quad (4.4)$$

$$A_\mu(x_K) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_\mu(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}} \quad (4.5)$$

$$\phi(x_K) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \phi(x^\alpha) e^{in \frac{x^5}{R}}. \quad (4.6)$$

Dank der Quantenmechanik tragen diese Moden nun einen Impuls in Richtung der fünften Koordinate von der Größenordnung $\frac{|n|}{R}$. Klein ersetzt nun Kaluzas »cylinder condition« durch die Annahme, dass die Anregungen der Felder nicht stattfinden und nur die nullten Mode $|n| = 0$ vorliegt. In dieser Mode ist die »cylinder condition« natürlich erfüllt und wird durch ein geometrisches Argument ersetzt. Die Annahme, dass höhere Moden nicht angeregt werden, bleibt zu erklären.

Bewegung in 5 Dimensionen

Berechnet man aus Kleins Ansatz für die Metrik (4.2) in der nullten Mode – also ohne Anregung – die Bewegungsgleichung eines Punktteilchens, so erhält man die Geodätengleichung zu

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + {}^{(4)}\Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} \right) F^{\nu}_{\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \quad (4.7)$$

wobei wie üblich $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der Feldstärketensor des elektromagnetischen Feldes ist. Eigentlich erwartet man an dieser Stelle kovariante Ableitungen anstelle der partiellen. Es zeigt sich jedoch, dass die zusätzlichen Terme sich wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole (2.1) in den unteren beiden Indices aufheben. Es ist also stets $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ und der Ausdruck ist kovariant.

Mit der Identifikation

$$\frac{q}{m} = A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} \quad (4.8)$$

sind die Gleichungen (4.7) also genau die Bewegungsgleichungen im Gravitations- und Elektromagnetischen Feld. Vorausgesetzt, die Größe, die in (4.8) als spezifische Ladung definiert wurde, lässt diese Deutung zu. Dazu muss sie eine Erhaltungsgröße der Bewegung sein und genau diese Bedingung liefert die 5. der Geodätengleichungen. Dieses Ergebnis sollte uns nicht weiter überraschen, denn es folgt aus der Symmetrie.

Wegen der »cylinder condition« ist die fünfte Koordinate x^5 zyklisch und daher der dazugehörige Impuls p^5 erhalten. Mithilfe von der Lagrangefunktion \mathcal{L} (2.15) sieht man schnell, dass dieser Impuls aber gerade gegeben ist durch ($\dot{x}^I = \frac{dx^I}{d\tau}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^5} &= \frac{m}{\mathcal{L}} g_{5J} \frac{dx^J}{d\tau} \\ &= \frac{m}{2\mathcal{L}} \left(A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

und da wir wissen, dass $\frac{m}{\mathcal{L}} = m$ ebenfalls eine Konstante der Bewegung ist, ist $p^5 = m \frac{q}{m} = q$ wie gewünscht eine erhaltene Größe.

Aufgerollte Dimensionen

Kleins Argumentation für seine Kompaktifizierung ist nun, dass wir wissen, dass die Ladung eine quantisierte Größe ist. Sie taucht (in der Elektrodynamik!) in Vielfachen der Elementarladung e auf. Weiter wissen wir aus der Quantenmechanik, dass ein Impuls quantisiert ist, wenn wir periodische Randbedingungen haben:

$$p = n \frac{2\pi\hbar}{L}, \quad (4.10)$$

wobei L die Periodenlänge ist. Nun müssen wir noch berücksichtigen, dass der zu x^5 kanonisch konjugierte Impuls (vgl. (4.9))

$$p^5 = m \left(A_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{dx^5}{d\tau} \right) = q \quad (4.11)$$

ist. Die Ladung ist also quantisiert dann und genau dann, wenn die fünfte Koordinate »aufgerollt« ist und periodische Randbedingungen liefert.

Wir führen also die Periodizität $x^5 = x^5 + 2\pi R$ ein, wobei R der Radius der fünften Koordinate ist, und erhalten mit allen Konstanten:

$$p^5 = \frac{ec^2}{8\pi G} = n \frac{\hbar 2\pi}{2\pi R} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow R = \frac{8\pi G \hbar}{ec^2} \text{ für } n=1, \quad (4.13)$$

und daraus:

$$R \approx 23l_p. \quad (4.14)$$

Längen dieser Größe liegen bis heute weit unter den Grenzen der experimentellen Detektionsmöglichkeiten.

Wir sehen: die »cylinder condition« von Kaluza entspricht bei Klein gerade der Tatsache, dass der Impuls in Richtung der fünften Dimension quantisiert ist und höheren Anregungen nicht auftreten. Da zur Anregung dieser Moden eine Energie von $1/R \approx m_p$ nötig ist, ist es plausibel, dass dies noch nicht beobachtet wurde¹. Kleins Bedingung der Kompaktifizierung wird also leicht verständlich, wenn man nur grundlegende Annahmen der Quantenmechanik hinzunimmt.

Energie aus dem 5-dimensionalen Vakuum

Die »cylinder condition« zeichnet die fünfte Koordinate vor den anderen aus, wogegen der Ansatz der Metrik (4.2) noch allgemein ist. Der metrische Tensor

¹Man beachte: im Gegensatz zu den später eingeführten Modellen, hat das Teilchen dadurch keine scheinbare Masse der Größe m_p . Durch die gewählte Ankopplung der Felder hat es vielmehr die gewünschte Ladung der Größe q/m .

bleibt in seiner obigen Form und mit den dazugehörigen Interpretationen bei einer allgemeinen Koordinatentransformation nicht erhalten – auch hierin zeigt sich die Außenseiterrolle der Extra-Dimension. Erlaubt sind jedoch die allgemeinen Koordinatentransformationen im vierdimensionalen Unterraum sowie die Transformation:

$$\begin{aligned} x^5 &\rightarrow x^5 + f(x^\nu) := \tilde{x}^5 \\ x^\nu &\rightarrow x^\nu := \tilde{x}^\nu . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nach dem Transformationsgesetz für den metrischen Tensor von den alten g_{IJ} in die neuen \tilde{g}_{IJ} Koordinaten:

$$\tilde{g}_{IJ} = \frac{\partial x^K}{\partial \tilde{x}^I} \frac{\partial x^L}{\partial \tilde{x}^J} g_{KL} \quad (4.16)$$

erhalten wir für das elektromagnetische Potential nach der Transformation:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\nu &= \tilde{g}_{\nu 5} = \frac{\partial x^K}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^L}{\partial \tilde{x}^5} g_{KL} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^L}{\partial \tilde{x}^5} g_{\mu L} + \frac{\partial x^5}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^L}{\partial \tilde{x}^5} g_{5L} \\ &= \delta^\mu_\nu g_{\mu 5} - \partial_\nu f(x^\alpha) g_{55} \end{aligned} \quad (4.17)$$

und damit den Übergang

$$A_\nu \rightarrow A_\nu - \partial_\nu f := \tilde{A}_\nu , \quad (4.18)$$

der die Metrik invariant läßt. Man erhält aus

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\nu &= A_\nu - \partial_\nu f \\ \tilde{x}^5 &= x^5 + f(x^\nu) \Rightarrow d\tilde{x}^5 = dx^5 + \partial_\nu f dx^\nu \end{aligned} \quad (4.19)$$

für das Linienelement (4.3) in den neuen Koordinaten:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + \phi^2 \left(\tilde{A}_\nu dx^\nu + d\tilde{x}^5 \right)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + \phi^2 \left((A_\nu - \partial_\nu f) dx^\nu + (dx^5 + \partial_\nu f dx^\nu) \right)^2 \\ &= g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + \phi^2 \left(A_\nu dx^\nu + dx^5 \right)^2 . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mit diesen Koordinatentransformationen haben wir also die Eichtransformation für die Potentiale wiedergefunden.

Wie man leicht bestätigt, ist die inverse Metrik gegeben durch:

$$g^{IJ} = \begin{pmatrix} {}^{(4)}g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ -A^\nu & \phi^{-1} + A^\nu A_\nu \end{pmatrix} , \quad (4.21)$$

wobei $A^\nu = {}^{(4)}g^{\mu\nu} A_\mu$ ist; die Indices werden also mit der üblichen Vierermetrik hoch-(runter-)gezogen.

Wenden wir uns nun den Feldgleichungen zu. Wir nehmen die 5-dimensionalen Gleichungen, es sind an der Zahl $n(n+1)/2 = 15$ und trennen sie auf in die 4-dimensionalen Größen und den verbleibenden Rest, in dem sich Terme aus A_μ bzw. deren Ableitungen sammeln.

Man erhält im Detail die Feldgleichungen zu [57]

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = \frac{\phi^2}{2} T_{\mu\nu}^{ED} - \frac{1}{\phi} \left[\nabla_\mu (\partial_\nu \phi) - {}^{(4)}g_{\mu\nu} \square \phi \right] \quad (4.22)$$

$${}^{(4)}\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3 \frac{\partial^\mu \phi}{\phi} F_{\mu\nu} \quad (4.23)$$

$$\square \phi = \frac{\phi^4}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad , \quad (4.24)$$

wobei wie üblich

$$T_{\mu\nu}^{ED} = \frac{1}{4} \left({}^{(4)}g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_\mu^\alpha F_{\nu\alpha} \right) \quad (4.25)$$

der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes. Alle Indices werden hier mit der 4-dimensionalen Metrik ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ hoch- bzw. runtergezogen.

Klein setzt nun zusätzlich das Dilaton-Feld $\phi \equiv 1$, womit man sich (wie er jedoch nicht bemerkte) durch die Gleichung (4.24) eine unerwünschte Nebenbedingung einhandelt. Für konstantes ϕ erhält man hier die Forderung $F^2 \equiv 0$. Das skalare Feld muss also beibehalten werden und bedarf der Interpretation. Wie wir zuvor gesehen haben, sind höhere Anregungen erst bei Energien von etwa Planckmasse möglich. Das skalare Feld wäre also bisher weder im Alltagsleben noch in unseren Experimenten beobachtbar gewesen.

Kaluza-Klein Türme

Die Aussage des vorherigen Abschnitts ist nicht von unserer speziellen Ausgangssituation abhängig. Es gilt im Allgemeinen: existieren zusätzliche Extra - Dimensionen, die kompaktifiziert sind, so sind die Impulse von Anregungen der Metrik in diesen Richtungen quantisiert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von »Kaluza-Klein-Türmen« von Teilchen.

Jedes Feld Φ , das wir in unsere Raumzeit setzen und das in der gesamten Raumzeit propagieren kann, unterliegt derselben Bedingung. Auch Teilchen, die auf unserer Untermannigfaltigkeit masselos sind, erhalten so einen Turm von höheren Anregungen, die scheinbar Masse tragen. Ist nämlich $\partial_5 \neq 0$ so haben wir

z.B. für die Klein-Gordon-Gleichung

$$\begin{aligned} {}^{(5)}\square\Phi &= 0 \\ \Leftrightarrow \left({}^{(4)}\square + \partial_5^2\right)\Phi &= 0 \quad , \\ \Leftrightarrow \left({}^{(4)}\square - \frac{n^2}{R^2}\right)\Phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei $\frac{|n|}{R}$ für uns im vierdimensionalen Raum den Anschein einer Masse erweckt.

Diese Überlegung lässt sich auf einfache Art und Weise auf mehrere Extra-Dimensionen ausdehnen. In diesem Fall hat man mit dem Ortsvektor der d zusätzlichen Koordinaten $\vec{y} := (y^1, \dots, y^d) = (x^5, \dots, x^{(4+d)})$, die alle auf den gleichen Radius R kompaktifiziert seien, und dem Wellenzahlvektor $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$

$$\left({}^{(4)}\square + \sum_{i=5}^{d+4} \partial_i^2\right)\Phi = 0 \quad (4.27)$$

$$\Leftrightarrow \left({}^{(4)}\square - \frac{1}{R^2} \sum_{i=5}^{d+4} n_i^2\right)\Phi = 0 \quad . \quad (4.28)$$

Wenn wir uns nun fragen, wieviele mögliche Zustände $N(E)$ mit einer bestimmten zur Verfügung stehenden Energie E besetzt werden können, so finden wir die Antwort auf einfache Art und Weise in der Kombinatorik. Besetzt werden können alle Zustände mit den Wellenzahlvektoren \vec{n} , die die Eigenschaft haben, dass

$$\sum_{i=5}^{d+4} n_i^2 < E^2 R^2 \quad (4.29)$$

ist. Der Wellenzahlvektor kann also innerhalb des Volumens einer Kugel mit Radius ER liegen und hat daher in kontinuierlicher Näherung

$$N(E) = V_{(d)}(ER)^d \quad (4.30)$$

Zustände, die er besetzen kann. V_d bezeichnet hier das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel

$$V_{(d)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \quad , \quad (4.31)$$

ist von Größenordnung 1 und kann i.A. vernachlässigt werden. Wir sehen nun, dass für Energien über $1/R$ der Phasenraumfaktor stark ins Gewicht fallen wird.

4.3 Allgemeine Eichgruppen

Vom Speziellen zum Allgemeinen

Die obigen Arbeiten von Kaluza und Klein betrachten die Vereinheitlichung der ART und der Elektrodynamik, die eine Yang-Mills Theorie mit der Eichgruppe $\mathbf{U}(1)$ ist. Diese Vereinheitlichung lässt sich auf allgemeine Eichgruppen (und Produkte derselben) verallgemeinern. Es ist natürlich kein Zufall, dass die fünfte Koordinate ebendiese Symmetrie aufweist.

Für den allgemeinen Ansatz betrachtet man die Eichfeldtheorie über der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M mit der gewünschten Strukturgruppe (bei Kaluza-Klein eben $\mathbf{U}(1)$) als eine Theorie der lokal trivialen Prinzipal-Faserbündel über der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Nun gilt es, auf diesem Prinzipal-Faserbündel eine Metrik einzuführen, die der allgemeinen Eichtheorie zunächst einmal fehlt. Die Wahl dieser Metrik ist nicht eindeutig, aber es ist möglich, eine aus den Struktur-Konstanten der zur Gruppe gehörigen Lie-Algebra zu erhalten:

$$g_{ab} = C^c_{ad} C^c_{cb} . \quad (4.32)$$

(Bei der $\mathbf{U}(1)$ verschwinden diese natürlich). Baut man die Metriken zusammen erhält man den Ansatz:

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} {}^{(4)}g_{\mu\nu} + g_{ab} A^a_{\mu} A^b_{\nu} & g_{ab} A^a_{\mu} \\ g_{ab} A^b_{\nu} & g_{ab} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Nun gilt es zu zeigen, dass sich auch in diesem allgemeinen Fall der Riemannsche Krümmungsskalar des gesamten Bündels als eine Summe des Krümmungsskalar auf der vierdimensionalen Basismannigfaltigkeit und eines Lagrangian der zur Symmetrie gehörenden Yang-Mills Theorie ist. Dass dem tatsächlich so ist, kann man z.B. in [58] nachlesen.

Die Kaluza-Klein Theorien haben sich über die Jahrzehnte eines recht wechselhaften Interesses erfreut, sind jedoch aufgrund ihres großen Potentials zur einheitlichen Beschreibung der Wechselwirkungen nie vollkommen in Vergessenheit geraten.

Wesentliche Mängel, die mit diesen Ansätzen einhergehen, lassen sie jedoch nicht in die Reihe der besten Kandidaten aufsteigen. Zunächst ist da, wie schon eingangs erwähnt, das Problem der Quantisierung und Renormierung, das in diesem Ansatz nicht gelöst wird. Dann bleibt das Auftreten zusätzlicher Felder (das Dilaton-Feld) zu erklären und schließlich muss aus den ursprünglich quellenfreien Feldgleichungen ein Masseterm für die Fermionen durch Symmetriebrechung erzeugt werden.

Teil II

Große Extra-Dimensionen

Kapitel 5

Die Renaissance der Extra-Dimensionen

Im letzten Kapitel haben wir mit den Arbeiten von T. Kaluza und O. Klein die ersten Modelle zu einer Raumzeit mit zusätzlichen räumlichen Dimensionen kennengelernt. Aufbauend auf den Ansatz von Kaluza und Klein folgten zahlreiche Erweiterungen, die Teilchenwechselwirkungen in der mehrdimensionalen Welt aus verschiedenen Richtungen angingen (für eine Übersicht siehe [140]). Auch die mathematische Seite der höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten wurde mehrfach untersucht und führte zu interessanten Fortschritten, wenn auch nicht in die Richtung, die man sich erhofft hatte – die einheitliche Beschreibung aller Wechselwirkungen der Natur.

Mitte des Jahrhunderts rückten in der Physik dann eine Vielzahl anderer Neuerungen in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit. So etwa das Quark-Modell nach Gell-Mann, die QCD oder die experimentellen Möglichkeiten, die sich nun mit den neuen Hochenergie-Teilchenbeschleunigern ergaben.

Im letzten Jahrzehnt jedoch ist das Interesse an Extra-Dimensionen wiedererwacht. Ein starkes Argument dafür kommt aus der String/M - Theorie als den bisher besten Kandidaten für die Quantengravitation. Um dort eine konsistente (anomaliefreie) Formulierung gewährleisten zu können, ist die Einführung von zusätzlichen Dimensionen nötig. Auch hier taucht wieder das Problem der Kompaktifizierung auf, die bei weitem nicht eindeutig ist.

Die neuen Modelle für Raumzeiten mit Extra-Dimensionen bedienen sich der alten Idee von Kaluza und Klein, um das Hierarchieproblem zu lösen. Die zusätzlichen Dimensionen werden nun auf einen Radius weit über der Plancklänge kompaktifiziert, jedoch nach wie vor ausserhalb unserer bisherigen Wahrnehmung. Wir werden im Folgenden genauer sehen, wie dies zu einem Absinken der Planckmasse führen kann. Dieses Szenario steht in keinem Widerspruch zur Stringtheorie, sondern fügt sich dort harmonisch ein [6].

Diese mehrdimensionalen Modelle stehen wie die Stringtheorie nicht für sich, sondern als niederenergetischer Limes einer noch zu findenden Theorie, der jedoch dazu dienen kann, wesentliche Grundzüge und ihre Konsequenzen zu untersuchen. Inzwischen wurden zudem viele Konzepte aus der String/M - Theorie abgeleitet [59, 60].

Man kann diese neuen Ansätze in zwei Gruppen einteilen. Diese werden nach den Verfassern der ersten Veröffentlichungen das »Arkani - Hamed - Dimopoulos - Dvali« (ADD) - bzw. das »Randall-Sundrum« (RS) - Modell genannt. Den beiden Modellen und ihren Eigenschaften werden wir uns in den folgenden Kapiteln näher zuwenden.

5.1 Große Extra-Dimensionen

Bisher haben wir die zusätzlichen Dimensionen so klein kompaktifiziert, dass sie sich auf der Größenordnung der Planckskala befinden. Diese Bedingung ist sicherlich hinreichend, um keine experimentellen Widersprüche hervorzurufen, aber ist sie auch notwendig?

Die Anzahl der räumlichen Dimensionen geht in die Lösung des Kraftfeldes einer Punktquelle ein. Schieben wir die ART für einen Moment zur Seite, so haben wir die Poissongleichung in Kugelkoordinaten $\Delta\phi(r) = \rho(r)$ und deren Greensfunktion in $d + 3$ räumlichen Dimensionen

$$G(r) \propto \frac{1}{r^{(d+1)}} . \quad (5.1)$$

Je höher die Anzahl der Dimensionen, desto schneller fällt die Kraft der Ladung mit r ab. Das ist leicht einzusehen, wenn wir uns diese Tatsache anhand von Kraftlinien vorstellen. Sie verteilen sich in alle Raumdimensionen und laufen dabei um so schneller auseinander, je mehr Dimensionen zur Verfügung stehen.

Nun kennen wir aber das Potenzgesetz der Gravitationskraft, demnach scheint es zunächst, dass $d = 0$ sein muss. Doch Halt! Bis zu welchen Skalen haben wir es eigentlich vermessen? Als die neuen Extra Dimensionen erstmals diskutiert wurden, war die Gravitationskraft nur auf Längen über dem Millimeterbereich vermessen [72, 73, 74]. Inzwischen sind Messungen bis hinunter zu 0.2 mm erfolgt [71]. Es ist also möglich, zusätzliche räumliche Dimensionen zu haben, solange sie nur auf kleinere Durchmesser aufgerollt sind als 0.2 mm. Zwischen mm und der Planck-Länge l_p ist nun ein erheblicher Unterschied und viel Platz für neue Spekulationen. Daher wurden diese Dimensionen auch als »Grosse Extra Dimensionen« bezeichnet: **Large eXtra Dimensions – LXDs**¹.

¹S. Scherer, priv. comm.

Wie sich bei näherer Betrachtung zeigt, gibt es bisher keinerlei experimentelle Widersprüche, die größeren Extra-Dimensionen entgegenstehen, jedoch setzen die Daten je nach Modell Bedingungen an Anzahl und Radius der zusätzlichen Dimensionen. Damit bieten die LXDs neben einem vielversprechenden Ansatz zur Vereinheitlichung von ART und den QFT die Möglichkeit zur Lösung eines wesentlichen Problem: dem Hierarchieproblem.

Das Hierarchieproblem

Heute sind uns drei fundamentale Energieskalen in der Natur bekannt:

- die elektroschwache Skala

$$m_{EW} = \frac{1}{(\sqrt{s}G_F)^{\frac{1}{2}}} \approx 246 \text{ GeV} \quad , \quad (5.2)$$

- der Infrarot Cutoff-Parameter der starken Wechselwirkung

$$\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV} \quad , \quad (5.3)$$

- und die Planck-Skala

$$m_p \approx 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV} \quad . \quad (5.4)$$

Erst mit dem Erreichen der Planck-Skala wird die Gravitation ebenso stark werden, wie die elektroschwache Wechselwirkung. Die Frage, warum solch ein großer Sprung von der elektroschwachen zur Planck-Skala besteht, ist noch immer unbeantwortet.

Diese Tatsache, dass die Gravitation in ihrer Wechselwirkung um viele Größenordnungen schwächer ist als die anderen Wechselwirkungen, wird »Hierarchie-Problem« genannt. Diese Tatsache ist es auch, die die Quantengravitation in unerreichtbare Ferne rückt, denn die Energie-Skala (vgl. 2.4), in der sie schließlich auftreten sollte, ist so hoch, dass wir sie in absehbarer Zeit wohl nicht erreichen können. In den folgenden Kapiteln werden wir sehen, wie die LXDs vermögen, das Hierarchie-Problem zu lösen. Wir stellen jedoch schon hier fest, dass uns eine weitere Grenze für die Extra Dimensionen vorliegt. Nicht nur, dass wir die Energie-Skala der Gravitation möglichst in die Nähe der elektroschwachen Skala bringen möchten. Wir müssen auch feststellen, dass wir bisher noch keine Effekte beobachtet haben, die darauf hinweisen, dass bereits Quantengravitation ins Spiel kommt. Da Energiebereiche bis hinauf zu Größenordnungen von 100 GeV erreicht wurden, hoffen wir, die neue Energieskala bei $\approx 1 \text{ TeV}$ zu finden.

5.2 Quantenfelder in Großen Extra-Dimensionen

Es besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied zu den Kaluza-Klein Theorien mit ihrem ursprünglichem Ansatz, der an dieser Stelle noch einmal explizit festgehalten werden soll. Bei Kaluza und Klein werden die Eichfelder der Wechselwirkungen wie die Gravitation selbst als Eigenschaften des Raumes beschrieben. Sie sind Komponenten des Metrischen Tensors und ihre speziellen, zur Eichgruppe gehörenden, Symmetrien werden durch die Symmetrien der kompaktifizierten Dimensionen erreicht.

Nicht so bei den Großen Extra Dimensionen. Als ein niederenergetisches Modell für eine vereinheitlichte Theorie, aus der Stringtheorie motiviert, liegen auf unserer Brane die bekannten Quantenfelder vor. Sie entstehen nicht aus der Geometrie sondern werden extern angekoppelt. Zusätzlich können sie sich nur auf unserer Brane bewegen, da sie offenen Strings entsprechen. Einzig die Gravitonen, als geschlossene Strings, können in alle Raumrichtungen propagieren. Wie zuvor erklärt, ist ihr Impuls in Richtung der Extra-Dimensionen dann quantisiert und die Anregung geschieht in Schritten.

Kapitel 6

Das ADD-Modell

Die Idee hinter den Großen Extra-Dimensionen wurde insbesondere von N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali heraus gearbeitet [61, 62, 63, 66, 68]. Dieser Ansatz wird im Folgenden als das ADD-Modell bezeichnet.

6.1 Gravitation mit LXDs

Wir nehmen an, die Welt, die uns umgibt besitzt anstelle der gewohnten 3 räumlichen und einer zeitlichen Dimension $3+d$ räumliche Dimensionen. Die Gesamtanzahl der Dimensionen sei $D = 4 + d$. Die zusätzlichen Dimensionen werden im ADD-Modell nun kompaktifiziert auf einen Radius, von dem wir der Einfachheit halber ansetzen wollen, dass er für alle Dimensionen gleich ist. Die damit verbundene Periodenlänge der Koordinaten bezeichnen wir mit L . Dabei nehmen wir an, dass die Koordinaten unabhängig voneinander kompaktifiziert werden, also keine Krümmung in den LXDs entsteht¹.

Die Koordinaten auf der Mannigfaltigkeit bezeichnen wir wie zuvor mit

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_d) =: (x, y) \quad , \quad (6.1)$$

dabei ist y der Anteil des Ortsvektors in Richtung der Extra-Dimensionen. y_i kann Werte im Bereich $[0, L]$ mit einer periodischen Randbedingung annehmen. Das Linienelement hat in diesem Ansatz die Form

$$ds^2 = -(dx^0)^2 + \sum_{\nu} (dx^{\nu})^2 + \sum_i (dy^i)^2 \quad . \quad (6.2)$$

Der Raum ist also ungekrümmt und es sind demnach keine Energiequellen anwesend. Dies ist eine starke Vereinfachung und führt uns auch sofort den größten

¹Dies ist nicht der allgemeinste Fall, es besteht in etwa die Möglichkeit, die d Dimensionen auf eine d -Sphäre zu kompaktifizieren oder beliebige Kombinationen beider Fälle.

Nachteil dieses Ansatzes vor Augen. Im nächsten Kapitel werden wir mit dem Randall-Sundrum-Modell einen Ansatz kennenlernen, der eine Energiedichte auf unserer Brane miteinbezieht. Der hier vorgeführte Ansatz ist jedoch für die Betrachtungen von Störungen der Metrik geeignet und diese Störungen geben uns gerade die Kaluza-Klein-Anregungen, die nun an Teilchen des Standardmodelles koppeln.

Die Gravitation kann sich auf dieser Mannigfaltigkeit nun in alle Dimensionen ausbreiten, die anderen Wechselwirkungen bleiben jedoch auf eine vierdimensionale Untermannigfaltigkeit beschränkt. Diese Untermannigfaltigkeit beschreibt unsere Raum-Zeit; sie wird auch – in Anlehnung an die Stringtheorie – als »Brane« bezeichnet (genauer: eine »3-Brane«), die gesamte Mannigfaltigkeit wird auch »Bulk« genannt. Durch die vervielfachten Ausbreitungsmöglichkeiten der Gravitationen fällt die gravitative Wechselwirkung zunächst viel stärker ab. Nachdem die Entfernung den Radius der Extra-Dimensionen überschritten hat, nimmt sie aus einem geringeren Anfangswert das normale funktionale Verhalten an [63].

Man kann sich das leicht klar machen, indem man die $D - 1$ -dimensionale Poissongleichung

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}')_{D-1} = \Omega_{(D-1)}c\delta(\mathbf{r}') \quad (6.3)$$

und deren allgemeine Lösung betrachtet (siehe Anhang A). So bekommt man für die Gravitationskraft zwischen einer Testmasse m und einer Masse M das Newtonsche Gesetz für $d + 3$ räumliche Dimensionen

$$F_{(D)} = G_{(D)} \frac{mM}{r^{d+2}} . \quad (6.4)$$

Die Proportionalitätskonstante $G_{(D)}$, die im Kraftgesetz auftritt, hat die Dimension [Länge^($d+1$)/Masse] und wird als die D -Dimensionale Gravitationskonstante $G_{(D)}$ bezeichnet. Sie spielt auch die Rolle der Kopplungskonstante der ART. $G_{(D)}$ definiert sich wie folgt aus den dazugehörigen D -dimensionalen Größen Planckmasse $m_{p(D)}$ und Plancklänge $l_{p(D)}$:

$$G_{(D)} = \frac{l_{p(D)}^{d+1}}{m_{p(D)}} . \quad (6.5)$$

Es sei dabei wie zuvor $G_{(4)} = G$, $l_{p(4)} = l_p$ und $m_{p(4)} = m_p$. Diese neue höherdimensionale Planck-Masse, die unsere fundamentale Skala sein soll, werden wir $M_f := m_{p(D)}$ nennen. Wir wollen die übliche Einheitenkonvention benutzen (siehe auch 102 ff.), mit der

$$M_f = \frac{1}{l_{p(D)}} , \quad (6.6)$$

eine Masse also eine inverse Länge ist. Sind nun d der D Dimensionen kompaktifiziert auf einen Radius von L , so erhält man für große r

$$\lim_{r \gg L} F_{(D)} = G_{(D)} \frac{1}{L^d} \frac{mM}{r^2} \quad . \quad (6.7)$$

Dieser Limes soll wieder mit unserem bekannten Newtonschen Gravitationsgesetz

$$F_{(4)} = G \frac{mM}{r^2} \quad . \quad (6.8)$$

übereinstimmen. Wir erhalten also mit den kompaktifizierten Extra-Dimensionen einen zusätzlichen Vorfaktor $\propto L^d$, mit dem wir das Hierarchie-Problem erklären können! Es ergibt sich der für alles Weitere ausschlaggebenden Zusammenhang

$$\boxed{m_p^2 = M_f^{d+2} L^d} \quad . \quad (6.9)$$

Die dabei auftretende neue fundamentale Skala soll nun im Bereich von ≈ 1 TeV liegen. Setzt man diese Annahme in die obige Gleichung (6.9) ein, so zeigt sich, dass der Fall $d = 1$ ausgeschlossen ist, denn dann hätte die zusätzliche Dimension einen Radius von der Größenordnung unseres Sonnensystemes und Modifikationen des Newtonschen Gesetzes in diesem Bereich hätten wir längst beobachtet. In Abbildung 6.1 sind typische Werte der Parameter d und M_f dargestellt.

6.2 Felder in LXDs

Die obige Abschätzung mag Zweifel an ihrer Allgemeingültigkeit wecken, denn wir wissen ja, dass das Newtonsche Gravitationsgesetz nur ein Grenzwert der Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Wir wollen uns daher noch einen anderen Ansatz ansehen, in dem der Newtonsche Limes nicht benutzt wird.

Das obige Ergebnis läßt sich auch herleiten, indem wir die Wirkungsfunktion \mathcal{S}_{ART} der ART betrachten. Wir erhalten sie aus \mathcal{L}_{ART} (2.10) zu:

$$\mathcal{S}_{ART} = \frac{1}{G_{(D)}} \int R \sqrt{g} d^4 x d^d y \quad , \quad (6.10)$$

wobei R und g die $4 + d$ - dimensionalen Größen sind und y die Koordinaten der Extra-Dimensionen.

Erinnern wir uns nun an die Tatsache, dass wir kompaktifizierte Extra - Dimensionen haben und erinnern wir uns weiter an das, was wir in Kapitel 4 gelesen

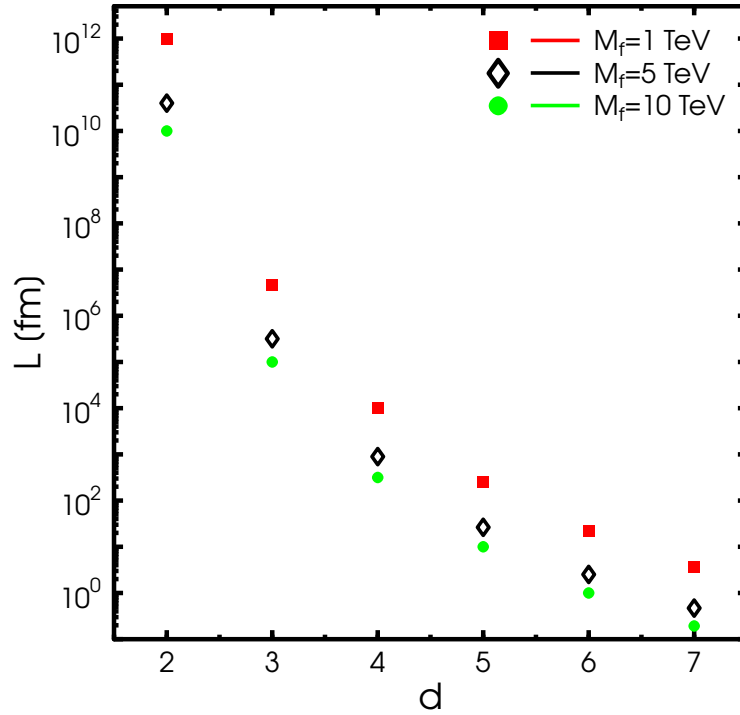


Abbildung 6.1: Die Größe der Extra-Dimensionen L [fm] in Abhängigkeit von der Anzahl der zusätzlichen raumartigen Dimensionen d für verschiedene Werte der neuen fundamentalen Skala M_f .

haben. Wir sehen dann, dass wir die Komponenten der Metrik und damit auch die Lagrangedichte in Fourierreihen entwickeln können. Die nullte Mode gibt dabei gerade die klassische Gravitation auf unserer Brane wieder. In dieser Mode sind aber alle Komponenten der Metrik unabhängig von den zusätzlichen Koordinaten und diese können ausintegriert werden. Dabei ergibt das Integral gerade das Volumen der Extra-Dimensionen L^d . Außerdem liefern die Extra-Dimensionen keinen Beitrag zur Krümmung und zum Krümmungsskalar, da sie in unserem Modell keine eigene interne Krümmung aufweisen. Es verbleibt also nur die Krümmung der Brane:

$$\mathcal{S}_{ART} = \frac{L^d}{G_{(D)}} \int {}^{(4)}R \sqrt{{}^{(4)}g} d^4x + \text{höhere Anregungen} . \quad (6.11)$$

Die Identifikation der nullten Anregung mit der Wirkung unserer vierdimensiona-

len Gravitationstheorie ergibt nun dieselbe Schlussfolgerung und die Gleichung (6.9) wie schon zuvor. Diesmal allerdings ganz ohne Newtonschen Limes.

Es ist nun dafür Sorge zu tragen, dass die Felder auf unsere Untermannigfaltigkeit gebunden sind. Diese zunächst künstlich anmutende Bedingung ergibt sich bei Kompaktifizierung in stringtheoretischen Betrachtungen von selbst [60], kann aber auch durch Einfügen eines Potentials erreicht werden [69, 70]. Wir wollen hier einfach als Ergebnis festhalten, dass die Lokalisierung der Felder auf unserer Brane ohne Widersprüche möglich ist.

Die Einführung von Quantenfeldern auf dieser Raumzeit geschieht nun nach der üblichen Vorgehensweise. Die Wirkung des Feldes wird zur Wirkung der Gravitation allein (6.11) addiert und durch Variation erhält man dann die Bewegungsgleichungen. Das Graviton entspricht dabei den Anregungen der $d + 4$ -dimensionalen Metrik. Eine Zerlegung des Metrischen Tensors bezüglich der Koordinaten unserer Brane enthält Spin-2-, Spin-1- und Spin-0-Teilchen, wie wir schon zuvor bei Kaluza-Klein gesehen haben. Da diese Felder von den zusätzlichen Koordinaten abhängen, unterliegen sie quantisierten Anregungsstufen und ergeben einen Turm von Kaluza-Klein Zuständen. Die Masse, die dabei einem Kaluza-Klein Zustand zugeordnet wird entspricht dabei dem Impuls in Richtung senkrecht zu unser Untermannigfaltigkeit (vgl. Kapitel 4).

Es stellt sich nun die Frage, wie die neuen Anregungen an die Felder des Standardmodells koppeln.

Solange wir uns in einem Energiebereich befinden, indem wir Effekte der Stringtheorie noch nicht berücksichtigen müssen, also Energien $< M_f$, koppeln die neuen Teilchen an das Standardmodell durch das Prinzip der Allgemeinen Kovarianz. Wie wir zuvor gesehen haben (Abb. 6.1), liegt der Radius der Extra-Dimensionen im Bereich von 1 mm (für $d = 2$) bis etwa 10 fm (für $d > 5$). Damit ergeben sich die Stufen der Anregungen als Vielfache im Bereich von

$$\frac{1}{R} \approx [\text{eV...MeV}] \quad . \quad (6.12)$$

Diese Werte sind im Vergleich zu den Energien, die in Beschleunigern erreicht werden und hier für uns von Interesse sind, sehr klein. Die Anregungsstufen liegen also in solch dichten Abständen, so dass wir sie als quasi-kontinuierlich ansehen können. Die betrachteten Energien E liegen dabei im Bereich

$$\frac{1}{R} \ll E < M_f \quad . \quad (6.13)$$

Erst die Tatsache, dass solch geringe Anregungsenergien notwendig sind, macht es möglich, dass die Gravitation für $E \gg 1/R$ ein $4 + d$ -dimensionales Aussehen zeigt und somit die Hierarchie zwischen Gravitation und den anderen Wechselwirkungen erklärt. Aus stochastischen Prinzipien sieht man, dass für eine Energie E etwa $(ER)^d$ Zustände zur Verfügung stehen, also eine sehr große Anzahl.

Im niederenergetischen Bereich $< M_f$, den wir hier betrachten, ist es nun möglich, in linearer Näherung der Einsteinschen Feldgleichungen die Kopplung zwischen Kaluza-Klein Zuständen und Standardmodell-Teilchen zu untersuchen [68, 76].

Dazu machen wir wie schon zuvor in der linearen Näherung den Ansatz

$$g_{IJ} = \eta_{IJ} + \frac{2}{\kappa_d} \Psi_{IJ} , \quad (6.14)$$

$$\kappa_d = \sqrt{G_{(D)}} = M_f^{-1-d/2} \quad (6.15)$$

und gehen damit in die Feldgleichungen ein. Terme von höherer als linearer Ordnung in Ψ vernachlässigen wir. Es ist offensichtlich, dass im Falle eines verschwindenden Energie-Impuls-Tensor die Felder Ψ wiederum die Wellengleichung erfüllen, allerdings diesmal mit zusätzlichem Impuls in die Extra-Dimensionen. Wir interessieren uns aber nun besonders für die Ankopplung an den Energie-Impuls Tensor. Die Näherung des Ricci-Tensors in erster Ordnung ergibt dann [8]

$$R_{IJ} = \frac{1}{\kappa_d} \left(\square \Psi_{IJ} - \partial_I \partial^A \Psi_{AJ} - \partial_J \partial^A \Psi_{AI} + \partial_I \partial_J \Psi_A^A \right) . \quad (6.16)$$

Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \square \Psi_{IJ} - \partial_I \partial^A \Psi_{AJ} - \partial_J \partial^A \Psi_{AI} \\ + \partial_I \partial_J \Psi_A^A = -\frac{1}{2\kappa_d} \left(T_{IJ} - \frac{1}{2+d} \eta_{IJ} T \right) , \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei $T = T^I_I$ die Spur des Energie-Impuls-Tensors ist. Dabei werden Indices nun mit η hoch- bzw. runtergezogen.

Der Energieinhalt ist auf unsere Untermannigfaltigkeit beschränkt. Wir haben daher

$$T_{IJ} = T_{\mu\nu}(x) \eta_I^\mu \eta_J^\nu \delta(y) . \quad (6.18)$$

Diese Einschränkung mag unter Berücksichtigung einer endlichen Dicke unserer Brane nicht vollkommen korrekt sein. Effekte, die durch eine Eindringtiefe der Felder in die Extra-Dimensionen zustande kommen können, würden jedoch nur auf kurze Reichweiten eine Rolle spielen und so können wir sie im von uns betrachteten Energiebereich vernachlässigen.

Um die erhaltenen Bewegungsgleichungen interpretieren zu können, müssen wir den Störungen der Metrik Ψ_{IJ} eine physikalische Bedeutung zukommen lassen. In Begriffen der ART gesprochen heißt das für uns, wir setzen eine Eichung an. Dazu benennen wir die Komponenten der Metrik zunächst um

$$\Psi_{IJ} = \begin{pmatrix} h_{\mu\nu} & V_{\mu i} \\ V_{\nu j} & \phi_{ij} \end{pmatrix} , \quad (6.19)$$

dies ist analog zu (4.2), denn der quadratische Term in A entfällt in der lineare Näherung. Das Feld $h_{\mu\nu}$ ist dabei das Graviton mit seinen Anregungen. Zusätzlich haben wir die Vektorfelder $A_{\mu i}$ und die skalaren Felder ϕ_{ij} . Aus der Kompaktifizierung erhalten wir die Reihenentwicklung

$$h_{\mu\nu} = \sum_{\vec{n}} h_{\mu\nu}^{\vec{n}} \exp\left(i \frac{2\pi\vec{n} \cdot \vec{y}}{R}\right) \quad (6.20)$$

$$V_{\mu i} = \sum_{\vec{n}} V_{\mu i}^{\vec{n}} \exp\left(i \frac{2\pi\vec{n} \cdot \vec{y}}{R}\right) \quad (6.21)$$

$$\phi_{ij} = \sum_{\vec{n}} \phi_{ij}^{\vec{n}} \exp\left(i \frac{2\pi\vec{n} \cdot \vec{y}}{R}\right) \quad (6.22)$$

mit $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$. Wir setzen die Eichung nun so an, dass diese Felder in Richtungen propagieren, die senkrecht auf unserer Untermannigfaltigkeit stehen.

$$\begin{aligned} \partial^\mu h_{\mu\nu} &= 0 \quad , \quad \partial^i h_{\mu i} = 0 \\ \partial^\mu V_{\mu i} &= 0 \quad , \quad \partial^i V_{\mu i} = 0 \\ \partial^i \phi_{ji} &= 0 \quad , \quad h^\mu{}_\mu = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die letzte Forderung impliziert dabei, dass die Spur von Ψ gegeben ist durch $\Psi^I{}_I = \phi^i{}_i := \phi$. Wir haben insgesamt $(d+4)(d+5)/2$ Komponenten in Ψ_{IJ} , da Ψ_{IJ} symmetrisch ist. Physikalische Bedeutung erhalten wir für die Störterme der Metrik erst, nachdem wir durch Fixierung eines Koordinatensystemes $d+4$ Freiheitsgrade eliminiert haben, sowie weitere $d+4$, die die Eichfreiheit für das Spin-2-Feld (in $d+4$ Dimensionen) berücksichtigen. Insgesamt benutzen wir also $2(d+4)$ Eichbedingungen und uns verbleiben $(d+4)(d+1)/2$ physikalische Freiheitsgrade.

Die Bewegungsgleichungen (6.17) haben nun die einfachere Form

$$\square \Psi_{IJ} + \partial_I \partial_J \phi = -\frac{1}{2\kappa_d} \left(T_{IJ} - \frac{1}{2+d} \eta_{IJ} T \right) \quad . \quad (6.24)$$

Mit (6.23) erhalten wir daraus durch Kontraktion die Relation

$$\square \phi = \frac{1}{\kappa_d} \frac{1}{d+2} T \quad . \quad (6.25)$$

So können wir die Lagrangedichte für (6.24) angeben als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Psi^{IJ} \square \Psi_{IJ} + \Psi^{IJ} \partial_I \partial_J \phi + \frac{1}{\kappa_d} \Psi^{IJ} T_{IJ} - \frac{1}{2(d+2)} \frac{1}{\kappa_d} T \phi \quad . \quad (6.26)$$

Nach Einsetzen der Felder erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \square h_{\mu\nu} - V^{\mu i} \square V_{\mu i} - \frac{1}{2} \phi^{ij} \square \phi_{ij} \\ & - h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - V^{i\mu} \partial_i \partial_\mu \phi - \phi^{ij} \partial_i \partial_j \phi \\ & + \frac{1}{2} T \phi - \frac{1}{\kappa_d} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Vektorfelder $V_{i\mu}$ sowie die Felder ϕ_{ij} koppeln also nicht an den Energie-Impuls-Tensor der eingehenden Quantenfeldtheorie und sind daher für unsere folgenden Betrachtungen nicht interessant. Einzig das Feld ϕ koppelt über die Spur des Energie-Impuls-Tensors. Die Quanten, die in hochenergetischen Experimenten von Bedeutung sind, sind jedoch in der Regel masselose Fermionen oder Eichbosonen. In Wechselwirkungen mit Fermionen ist die Spur des Energie-Impuls-Tensors linear in der Fermionen-Masse; für Eichbosonen ist sie quadratisch in der Bosonen-Masse. In hochenergetischen Kollisionen ist die Masse der wechselwirkenden Teilchen vernachlässigbar gegenüber ihrer kinetischen Energie und so tragen diese Kopplungsterme nicht zur Berechnung der Wirkungsquerschnitte bei. Dieser sogenannte »Graviskalar« ϕ tritt in diesen Ereignissen nicht zutage. Die Gravitionen $h_{\mu\nu}$ zeigen die erwartete Wechselwirkung mit dem vollen Energie-Impuls-Tensor, indem wir weiter den Input unserer SM-Teilchen einsetzen können.

Wir können nun auch den Wirkungsquerschnitt abschätzen, der etwa bei einer $e^+e^- \rightarrow \gamma G$ Reaktion vorliegt (siehe Abbildung 6.2), dabei bezeichnet G das Graviton. Für diese quantenfeldtheoretische Betrachtung ist nun die zur Lagrangefunktion gehörige Wirkung $S = \int dV \mathcal{L}$ von Bedeutung. Bei der Ausintegration der Extra-Dimensionen taucht wie schon zuvor der Faktor L^d , das Volumen der Extra-Dimensionen auf. Dadurch entsteht in erster Ordnung ein Wirkungsquerschnitt von der Größenordnung

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma + G) \propto L^d \frac{\alpha}{\kappa_d^2} N(E) = \frac{\alpha}{m_p^2} N(E) \quad , \quad (6.28)$$

wobei $N(E)$ die Anzahl der möglichen Anregungen bei der Energie E ist, die wir zuvor in Gleichung (4.30) bereits mit $(ER)^d$ abgeschätzt haben. Die Gravitionen tragen zwar einen Faktor m_p^2 bei, der die Reaktion stark unterdrückt, jedoch können die quasi-kontinuierlichen Energie-Niveaus in hoher Anzahl angeregt werden. Damit erhalten wir

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma + G) \propto \frac{\alpha}{E^2} \left(\frac{E}{M_f} \right)^{d+2} \quad , \quad (6.29)$$

der Wirkungsquerschnitt steigt also rasch mit der zur Verfügung stehenden Energie der Kollision an und wird ab Energien im Bereich M_f vergleichbar zu elektro-

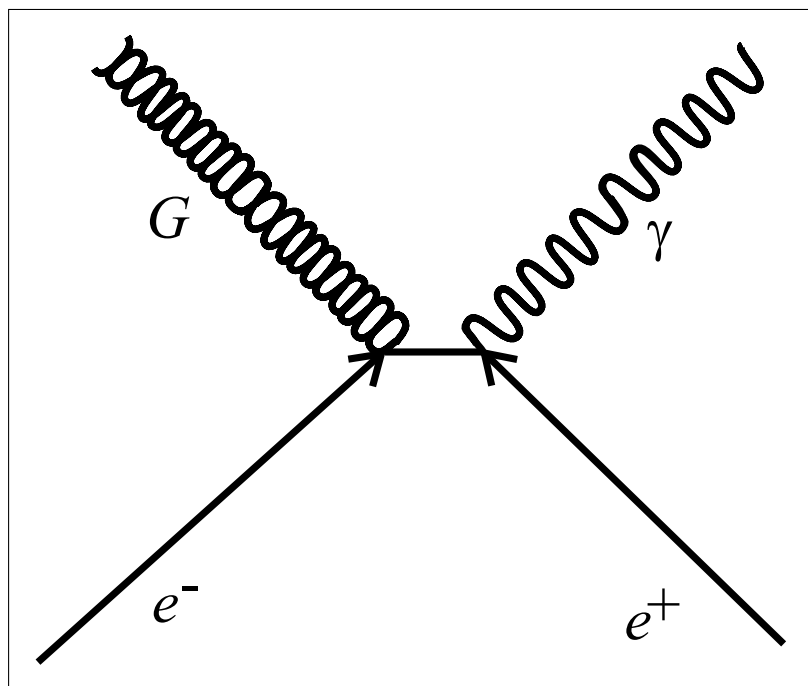


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung der Reaktion $e^+e^- \rightarrow \gamma G$.

magnetischen Wirkungsquerschnitten. Dies ist auf die hohe Anzahl der möglichen Kaluza-Klein Zustände zurückzuführen.

Das ADD-Modell ist auf unserer Brane Poincaré-invariant, wie es unsere Erfahrungen fordern. Wir sollten uns jedoch vor Augen halten, dass Aufgrund der Auszeichnung unserer Brane – nur hier gibt es die Teilchen des Standard-Modells – die höherdimensionale Poincaré-Invarianz verletzt ist. Aus diesem Grund ist es erst möglich, dass ein einzelnes Graviton emittiert wird. Dieses Graviton trägt einen Impuls vertikal zu unserer Untermannigfaltigkeit, der nicht erhalten ist, siehe dazu Abb. 6.3. Die Impulserhaltung auf unserer Brane ist hingegen über die bekannten Symmetriekriterien gewährleistet. Die Energie ist in der gesamten Bulk erhalten, so dass es zu Energieverlusten auf der Brane kommen kann.

6.3 Experimentelle Überprüfung

Bis hierher ist die Idee der Grossen Extra-Dimensionen nichts weiter als eben eine Idee. Wie jede gute Theorie muss sie Vorhersagen erbringen, die ihre Überprüfung ermöglichen.

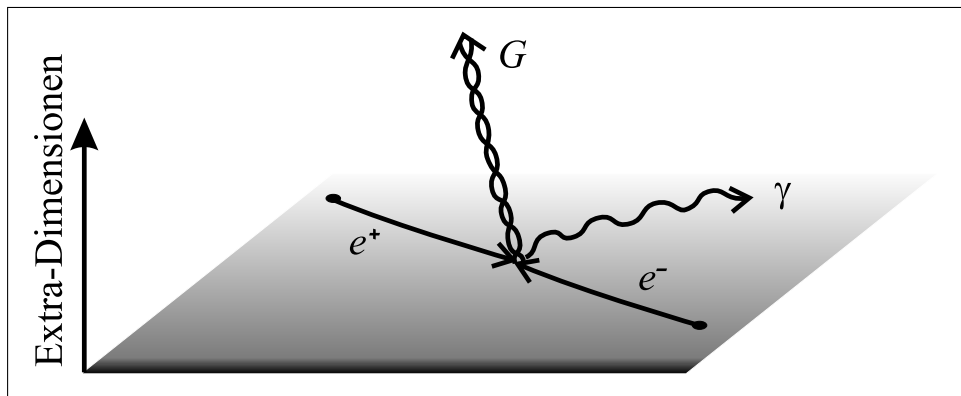


Abbildung 6.3: Die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \gamma G$ verletzt die Energieerhaltung auf der Brane.

Das Gravitationsgesetz

Der naheliegendste Test für die Anwesenheit von LXDs besteht in einer exakten Messung des Gravitationsgesetzes auf kleinen Skalen. Bis vor einigen Jahren beschränkte sich die experimentelle Überprüfung des Gravitationsgesetzes auf Abstände, die deutlich über der angenommenen Größe der Extra-Dimensionen liegt [72, 73] (für eine Übersicht siehe [74]).

Neue Messungen reichen mit hoher Genauigkeit bis hinab zu ≈ 0.2 mm, wobei das Newtonsche Gravitationsgesetz bestätigt wird. Dies setzt ein Limit für die Größe L der Extra-Dimensionen. Weitere Experimente, die noch kleinere Skalen erreichen sollen, sind geplant [75].

Energieverlust durch Gravitonemission

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Emission von Gravitonen besprochen, die in hochenergetischen Kollisionen entstehen können. Diese Gravitonen tragen eine Energie, die wegen ihrer geringen Wechselwirkung nicht im Detektor gemessen wird. Es kommt also zu einem messbaren Energieverlust, ähnlich der Neutrinoemission. Dieser Prozess, der für eine Vielzahl von Reaktionen – sowohl in der QED als auch in der QCD – berechnet wurde, ermöglicht exakte Vorhersagen für zukünftige Experimente. Mit Experimenten am LHC, die voraussichtlich im Jahre 2008 beginnen können, kann die neue fundamentale Skala M_f erreicht oder sogar überschritten werden. Siehe z. B. [76, 77] bzw. die im vorherigen Abschnitt diskutierten Referenzen [80, 68].

Wir haben mit der Lagrangefunktion (6.27) und der Lagrangefunktion der Eichfelder alles zusammen, um die Feynmann-Regeln für die Kopplung zwischen Kaluza-Klein-Zuständen und Quantenfeldtheorie zu beschreiben und damit Wirkungsquerschnitte unter Miteinbeziehung von gravitativen Anregungen zu be-

d	2	3	4	5	6	7
$M_f[\text{TeV}]$	2.3	1.5	1.2	0.91	0.76	0.76

Tabelle 6.1: Einschränkungen an M_f , untere Grenze in TeV, aus reeller Gravitonenproduktion.

rechnen. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit in einem anderen Sektor liegt, wollen wir uns mit Referenzen auf andere Veröffentlichungen begnügen.

In e^+e^- - Beschleunigern sind die klarsten Signale zu erwarten bei der Gravitonproduktion in Paaren von Fermionen (e, ν, τ), Z-Bosonen oder Photonen.

Die Entstehung von Gravitonen in $e^+e^- \rightarrow \gamma + G$ Reaktionen ist in den Referenzen [68, 80, 83, 82] untersucht und der Wirkungsquerschnitt berechnet worden. Dabei zeigt der Wirkungsquerschnitt, dass ein klares Signal vor dem Hintergrund der Prozesse des Standardmodells zu erwarten ist. Die Ergebnisse von L3 [86] und H1 [87] am LEP II lassen den Rückschluss zu, dass $M_f \geq 1$ TeV für $d = 2$ ist (siehe dazu auch [93]). Ähnliches gilt für die anderen Prozesse, die in Leptonenkollisionen auftreten können, so erhalten wir ebenfalls aus [86] im Prozess $e^+e^- \rightarrow ZG$ den Wert $M_f \geq 0.6$ TeV.

Weitere Prozesse sind etwa $e^- + \gamma \rightarrow e^-G$ [80], $\gamma\gamma \rightarrow G$ [76, 77] oder der in hadronischen Kollisionen auftretende Vorgang $q\bar{q} \rightarrow \text{jet} + G$ [76, 77]. Zusammenfassend lassen sich die Schranken für M_f in Abhängigkeit von der Dimensionszahl in Tab. 6.1 ablesen [92].

Virtuelle Gravitonen

Zusätzlich zur Emission von Gravitonen tragen virtuelle Gravitonen zur Modifikation der Observablen des Standardmodells bei. Zahlreiche Veröffentlichungen zu diesem Thema [63, 68, 79, 76, 78, 81] untersuchen den Einfluss virtueller Kaluza-Klein Anregungen auf die Photonenstreuung $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ [94], Paarproduktion von Photonen $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, Bosonen $e^+e^- \rightarrow ZZ, WW$ [95] oder Fermionen.

Nach diesen Prozessen wurde in Experimenten von ALEPH [88] DELPHI [89], L3 [84, 85], OPAL [90], H1 [87] and D0 [91] gesucht. Unter diesen Messungen setzen die von der D0-Kollaboration durchgeführten die strengsten Grenzen an das ADD-Modell [92]. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 aufgetragen.

Auch in Hadronenkollisionen können virtuelle Gravitonen Einfluss auf die Messergebnisse nehmen. Dies geschieht unter anderem durch $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ bzw. $gg \rightarrow \gamma\gamma$ Prozesse [76, 94, 96]. Aktuelle laufende Experimente liefern jedoch bisher keine

d	2	3	4	5	6	7
$M_f[\text{TeV}]$	0.88	0.77	0.58	0.47	0.39	0.35

Tabelle 6.2: Einschränkungen an M_f , untere Grenze in TeV, aus virtueller Gravitonenproduktion.

neuen Einsichten. Dies wird sich mit dem Ansteigen der zur Verfügung stehenden Schwerpunktsenergie jedoch bald ändern.

Astrophysikalische Limiten

Der Energieverlust in die Extra-Dimensionen hat auch Auswirkungen auf Astrophysikalische Objekte, in denen hochenergetische Prozesse ablaufen können. So wirkt sich die Abgabe von Gravitonen auf den Kühlungsprozess von Supernovae sowie die Inflation im frühen Universum aus [60, 63, 103].

Beim Kollaps einer Typ II Supernova wird der Großteil der gravitativen Bindungsenergie als Neutrinostrahlung abgegeben. Dies wird durch die Messung des Neutrinoflusses, die von der Kamiokande und IMB Kollaboration [97] an der Supernovae SN1987A durchgeführt wurden, bestätigt. Andere leichte, neutrale und wenig wechselwirkenden Teilchen – wie die hier diskutierten mehrdimensionalen Gravitonen – werden ebenso wie die Neutrinos zur Energieabstrahlung vom Kern der Supernova beitragen. Die Messdaten setzen dabei eine obere Schranke für den möglichen Energieverlust in die Extra-Dimensionen. Dabei wird davon ausgegangen, dass der größte Anteil der Gravitonenemission durch nukleare Bremsstrahlungsprozesse $N + N \rightarrow N + N + G$ erzeugt wird [98]. Die Größe des Energieverlustes ist dabei nicht nur von der neuen fundamentale Skala und der Anzahl der Extra-Dimensionen abhängig, sondern auch von der Temperatur T und der Dichte ρ des Supernovakernes. Mit Werten von $T \approx 30 \text{ MeV}$ und $\rho \approx 3 \times 10^{14} \text{ gcm}^{-3}$ ergibt sich für M_f [98, 99, 103, 100]

$$\begin{aligned}
 M_f &\geq 50 \text{ TeV} \quad , \quad d = 2 \\
 M_f &\geq 4 \text{ TeV} \quad , \quad d = 3 \\
 M_f &\geq 1 \text{ TeV} \quad , \quad d = 4 \quad .
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

Im frühen Universum besteht ebenfalls die Möglichkeit, dass eine Überproduktion von Gravitonen ab Temperaturen unter $\approx 100 \text{ MeV}$ zu einem rascheren Abkühlen der Materie führt. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die heutige Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB – »cosmic microwave background«), bei 2.73 K liegt und das Alter des Universums bei mindestens 13.7 Gy liegt [101], ergeben sich folgende Einschränkungen an M_f [99]

$$M_f \geq 86 \text{ TeV} \quad , \quad d = 2$$

$$\begin{aligned} M_f &\geq 7.4 \text{ TeV} \quad , \quad d = 3 \\ M_f &\geq 1.5 \text{ TeV} \quad , \quad d = 4 \quad . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Weitere astrophysikalische Prozesse, die berücksichtigt werden können, liefern ähnliche Daten. Darunter etwa der Einfluss von durch Supernovae produzierten Gravitonen auf die Hintergrundstrahlung [104], die Strahlung der Sonne [103] oder die Aufheizung von Neutronensternen durch Kaluza-Klein Anregungen [105]. Für weitere Details sei der Leser auf die Übersichtsartikel [99, 103] verwiesen.

Kapitel 7

Das RS-Modell

In diesem Kapitel werden wir uns einem zweiten Modell mit zusätzlichen Dimensionen zuwenden, in dessen Kontext das Hierarchieproblem gelöst werden kann. Wir werden sehen, dass mit diesem von L. Randall und R. Sundrum [106, 107] vorgeschlagenen Ansatz bereits eine zusätzliche Dimension ausreichend ist und wir werden die Unterschiede zum ADD-Modell, das wir im vorherigen Kapitel betrachtet haben, hervorheben.

7.1 RS Typ I

Der Ausgangspunkt des Randall-Sundrum Modells ist eine 5-dimensionale Raumzeit, deren fünfte Koordinate y auf einen Radius R kompaktifiziert wird. In dieser Raumzeit befinden wir uns mit den Teilchen des Standardmodells auf einer 4-Brane, der sogenannten »TeV-Brane«, die wir bei $y = \pi R$ lokalisieren wollen. Dieser TeV-Brane wird nun eine homogene Energiedichte Λ_{TeV} zugeordnet. Im Randall-Sundrum Szenario existiert außerdem eine zweite 4-Brane, die »Planck-Brane« bei $y = 0$, deren Energiedichte wir mit Λ_{Pl} bezeichnen wollen. Diese Raumzeit wird kompaktifiziert durch Spiegelung der TeV-Brane und Identifikation der Punkte $y = \pi R$ und $y = -\pi R$ (siehe Abbildung 7.1). Die Gravitation kann sich wie zuvor in alle Dimensionen ausbreiten, die Teilchen des Standardmodells sind hingegen auf unsere Untermannigfaltigkeit gebunden.

Die Metrik in der gesamten Raumzeit bezeichnen wir wie zuvor mit $g_{IJ}(x^\nu, y)$. Auf unserer Untermannigfaltigkeit bzw. auf der Planck-Brane sei dann

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{\text{TeV}} &:= g_{IJ}(x^\nu, y = \pi R) \\ g_{\mu\nu}^{\text{Pl}} &:= g_{IJ}(x^\nu, y = 0) \quad . \end{aligned} \quad (7.1)$$

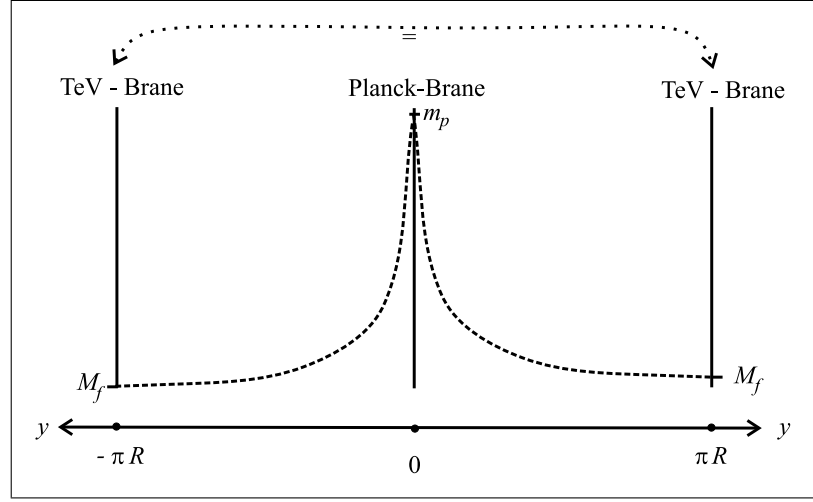


Abbildung 7.1: Skizze zum Randall-Sundrum Modell. Die Kompaktifizierung wird durch Spiegelung der TeV-Brane und Identifikation der Punkte $y = \pi R$ und $y = -\pi R$ erreicht. Die gestrichelte Linie gibt eine qualitative Darstellung des Warp-Faktors an.

Die Wirkung, die zum oben beschriebene Szenario gehört, ist

$$\begin{aligned}
 S &= S_G + S_{\text{TeV}} + S_{\text{Pl}} \\
 S_G &= \int d^4x \int_{-\pi R}^{\pi R} dy \sqrt{g} (\Lambda + 2M_f^3 R) \\
 S_{\text{TeV}} &= \int d^4x \sqrt{g^{\text{TeV}}} (\mathcal{L}_{\text{TeV}} + \Lambda_{\text{TeV}}) \\
 S_{\text{Pl}} &= \int d^4x \sqrt{g^{\text{Pl}}} (\mathcal{L}_{\text{Pl}} + \Lambda_{\text{Pl}}) \quad .
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dabei gibt S_G die höherdimensionale Gravitationstheorie mit der neuen fundamentalen Skala M_f an (der Faktor 2 ist Konvention). Wir haben dabei mit Λ eine fünfdimensionale Energiedichte in der Bulk angesetzt. Die Lagrangedichten \mathcal{L}_{TeV} und \mathcal{L}_{Pl} generieren die Felder auf den Branes. $\sqrt{g^{\text{Pl}}}$ und $\sqrt{g^{\text{TeV}}}$ sind die Volumenelemente der Untermannigfaltigkeiten und berechnen sich aus den oben definierten Metriken (7.1).

Dieser Ansatz, der nun eine nichtverschwindende Vakuumenergie beinhaltet, ergibt die 5-dimensionalen Einsteinschen Feldgleichungen, die an die Energie-Impuls-Tensoren der Felder gekoppelt sind und mit der zusätzlichen Vakuumenergiedichte

$$\begin{aligned}
 T_{IJ}^{\text{Vak}} &= \frac{1}{4M_f^3} \left[\Lambda g_{IJ} + \sqrt{g^{\text{TeV}}/g} \Lambda_{\text{TeV}} g_{\mu\nu}^{\text{TeV}} \delta_I^\mu \delta_J^\nu \delta(y - \pi R) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{g^{\text{Pl}}/g} \Lambda_{\text{Pl}} g_{\mu\nu}^{\text{Pl}} \delta_I^\mu \delta_J^\nu \delta(y) \right] \quad .
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Wir wollen uns nun die Feldgleichungen im Randall-Sundrum Modell ansehen. Dazu sehen wir zunächst von zusätzlichen Feldern auf den Branes ab, es sei also $\mathcal{L}_{\text{TeV}} = \mathcal{L}_{\text{Pl}} = 0$. Aus den vorhergehenden Erläuterungen ergeben sich die Feldgleichungen dann zu

$$\begin{aligned} \sqrt{g} \left(R_{IJ} - \frac{1}{2} g_{IJ} R \right) &= \frac{1}{4M_f^3} \left[\Lambda \sqrt{g} g_{IJ} + \Lambda_{\text{TeV}} \sqrt{g^{\text{TeV}}} g_{\mu\nu}^{\text{TeV}} \delta_I^\mu \delta_J^\nu \delta(y - \pi R) \right. \\ &\quad \left. + \Lambda_{\text{Pl}} \sqrt{g^{\text{Pl}}} g_{\mu\nu}^{\text{Pl}} \delta_I^\mu \delta_J^\nu \delta(y) \right] . \end{aligned} \quad (7.4)$$

Der Warp-Faktor

Wir machen nun einen Ansatz für die Metrik, der die vierdimensionale Poincaré-Invarianz auf unserer Brane gewährleistet:

$$ds^2 = e^{-2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 . \quad (7.5)$$

Diese Metrik ist faktorisierbar, d.h. sie hat die Eigenschaft, dass beim Durchlaufen der zusätzlichen Dimension die Skalen auf den dabei durchschrittenen Untermannigfaltigkeiten mit einem richtungs- und ortsunabhängigen Faktor gedehnt werden. Dieser Faktor $e^{-2\sigma(y)}$ wird auch als »Warp-Faktor« bezeichnet. Daher spricht man im Zusammenhang mit diesem hier vorgestellten Modell auch von »gewarpten Extra-Dimensionen«.

Das Einsetzen des Ansatzes (7.5) in die Feldgleichungen (7.4) liefert für den Warp-Faktor die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 = -\frac{1}{24} \frac{\Lambda}{M_f^3} \quad (7.6)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = -\frac{1}{24} \frac{1}{M_f^3} [\Lambda + \Lambda_{\text{TeV}} \delta(y - \pi R) + \Lambda_{\text{Pl}} \delta(y)] . \quad (7.7)$$

Da die Metrik eine reelle Funktion sein muss¹, sehen wir aus (7.6) sofort, dass die Konstante $\Lambda < 0$ sein muss. Nun können wir die Wurzel aus (7.6) ziehen und die Differentialgleichung lösen. Unter Berücksichtigung der Kompaktifizierung ergibt sich

$$\sigma(y) = |y| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M_f^3}} . \quad (7.8)$$

Dabei haben wir auf eine zusätzliche additive Konstante verzichtet, da sie lediglich einen konstanten Vorfaktor beiträgt, der durch Redefinition der Koordinaten

¹Ein komplexer Ansatz ist aufgrund der Nichtlinearität der Gleichungen nicht möglich.

wieder beseitigt werden könnte. Das Einsetzen dieser Lösung in (7.7) liefert über die zweite Ableitung die Bedingungen

$$\Lambda_{\text{TeV}} = -\Lambda_{\text{Pl}} = 24M_f^3 k \quad , \quad \Lambda = -24M_f^3 k^2 \quad (7.9)$$

mit einer zunächst beliebigen Konstanten k , die neben R der zweite Parameter des Randall-Sundrum Modells ist. Führen wir in der Extra-Dimension die Winkelkoordinate ϕ mit dem Wertebereich $[-\pi, \pi]$ mit $\phi := y/R$ ein, so nimmt die Metrik die Form

$$ds^2 = e^{-2kR|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + R^2 d\phi^2 \quad (7.10)$$

an. Die Raumzeit zwischen je zwei Branen ist daher ein Stück Anti-DeSitter-Raum [108] (ADS), eine in der Kosmologie wohlbekanntete Metrik.

Exponentielle Masseunterdrückung

Wir wollen uns nun überlegen, welche Relation zwischen der neu angesetzten Skala M_f und der Skala unserer Gravitation auf der TeV-Brane m_p besteht. Dazu betrachten wir wie zuvor die Wirkung der Gravitation S_G aus (7.2) und machen einen linearen Ansatz, um in erster Ordnung unsere Gravitonen wiederzufinden.

$$ds^2 = e^{-2kR|\phi|} \bar{g}_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu + R^2 d\phi^2 \quad \text{mit} \quad \bar{g}_{ij} \approx \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} \quad . \quad (7.11)$$

Dabei haben wir hier auf eine Störung des Radius R verzichtet [106], wir sind also davon ausgegangen, dass dieser stabilisiert werden kann [115]. \bar{h}_{ij} ist wie zuvor der Störterm der Metrik. Einsetzen in die Wirkung der mehrdimensionalen Gravitation liefert zunächst

$$S_G \approx \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \, 2M_f^3 \mathcal{R} \sqrt{g} \quad . \quad (7.12)$$

Um unsere Wirkung auf der Untermannigfaltigkeit wiederzufinden, drücken wir nun g durch \bar{g} aus, sowie die Krümmung \mathcal{R} durch die Krümmung $\bar{\mathcal{R}}$. Dabei ist $\bar{\mathcal{R}}$ die Krümmung, die aus der Metrik \bar{g} berechnet wird.

Bei einer Transformation der Form (siehe z.B. [53], S. 38)

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(x) := g_{\mu\nu}(x) \Omega(x) \quad , \quad (7.13)$$

wie wir beim Durchschreiten der Branen sehen, verhält sich der Krümmungsskalar nach

$$R \rightarrow \bar{R} = \frac{1}{\Omega(x)} \mathcal{R} \quad . \quad (7.14)$$

Man halte sich an dieser Stelle vor Augen, dass dies keine Koordinatentransformation ist, denn bei einer solchen bliebe der Skalar natürlich invariant.

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} g &= \left(e^{-2kR|\phi|}\right)^4 \bar{g} R^2, \\ \Rightarrow \sqrt{g} &= R e^{-4kR|\phi|} \sqrt{\bar{g}}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Dies setzen wir nun ein in (7.12)

$$S_G \approx \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M_f^3 R \bar{R} e^{-2kR|\phi|} \sqrt{\bar{g}}. \quad (7.16)$$

Der Vorfaktor, der sich durch Ausintegration des Volumens der Extra-Dimension ergibt, soll nun wieder die vierdimensionale Gravitationskonstante ergeben. So erhalten wir die Relation

$$m_p^2 = R M_f^3 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kR|\phi|} = \frac{M_f^3}{k} (1 - e^{-2kR\pi}). \quad (7.17)$$

Skalare Felder

Um die auftretenden Parameter k und R beurteilen zu können, betrachten wir nun ein Feld auf unserer TeV-Brane. Um es uns einfach zu machen, sei $\Psi = \Psi(x^\alpha, \pi)$ ein skalares Feld mit der Masse m_0 . Seine Wirkung, die in (7.2) eingeht, hat die Form²

$$S_{\text{TeV}} = \int d^4x \sqrt{g_{\text{TeV}}} \left[g_{\text{TeV}}^{\mu\nu} (D_\mu \Psi)(D_\nu \Psi) + m^2 \Psi^2 \right]. \quad (7.18)$$

Um die Masse m_0 mit der physikalischen Masse identifizieren zu können, die in unsere Bewegungsgesetze eingeht, müssen wir die Metrik nun wie zuvor umschreiben. Mit der inversen Metrik

$$g^{IJ} = \begin{pmatrix} e^{2kR|\phi|} \bar{g}^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \end{pmatrix} \quad (7.19)$$

erhalten wir so

$$S_{\text{TeV}} = \int d^4x \sqrt{\bar{g}} e^{-2kR\pi} \left[\bar{g}^{\mu\nu} (D_\mu \Psi)(D_\nu \Psi) + e^{-2kR\pi} m_0^2 \Psi^2 \right] \quad (7.20)$$

und sehen, dass die physikalische Masse m mit der Masse m_0 den Zusammenhang

$$\boxed{m = e^{-kR\pi} m_0} \quad (7.21)$$

²Zur besseren Lesbarkeit erscheint der TeV-Index an der Metrik hier unten.

hat. Die Masseskalen auf unserer Brane sind also exponentiell unterdrückt, wodurch sich erklärt, warum die Gravitation im Gegensatz zu den anderen Wechselwirkungen so schwach ist. Wenn wir nun davon ausgehen, dass das hier angesetzte Modell dazu dient, die ursprünglich große Planckmasse $m_p \approx 2 \times 10^{18}$ GeV auf die neue TeV-Skala zu drücken, so erhalten wir für die Parameter

$$kR \approx 12 \quad . \quad (7.22)$$

Dies eröffnet uns die Möglichkeit, ein Problem des im vorherigen Abschnitt vorgestellten ADD-Modelles zu umgehen. Der dort eingeführte Kompaktifikationsradius mit Längen im Bereich $L \approx 10^{-1}$ mm bis $L \approx 10^4$ fm führt mit den dazugehörigen Energiewerten E_0 (die Masse der ersten Kaluza-Klein Anregung) im Bereich eV bis MeV zu einem neuen, wenngleich schwächeren Hierarchie-Problem, nämlich dem Unterschied zwischen E_0 und der Skala der schwachen Wechselwirkung. Durch den Warp-Faktor ist es im Randall-Sundrum-Modell hingegen möglich, die Dimensionen so klein zu machen, dass der Radius R in ebendiesem Energiebereich fällt. Dadurch liegen dann alle Energieskalen im TeV-Bereich.

Um dies zu bestätigen, betrachten wir wieder unser skalares Feld Ψ , diesmal allerdings in der Bulk $\Psi = \Psi(x^\alpha, y)$ und deren induzierte Massen auf unserer Untermannigfaltigkeit. Wir erwarten nun – wie im Kaluza-Klein Szenario – dass die funktionale Abhängigkeit von der fünften Dimension einen Turm von Anregungen ergibt und interessieren uns für dessen Massenwerte.

Die Wellengleichung

$$\partial_I \sqrt{g} g^{IJ} \partial_J \Psi = 0 \quad (7.23)$$

bekommt nach Einsetzen der Metrik auf unserer Brane die Form

$$e^{-2\sigma} \eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu \Psi + \partial_y \left(e^{-4\sigma(y)} \partial_y \Psi \right) = 0 \quad . \quad (7.24)$$

Mit dem naheliegenden Ansatz

$$\Psi(x^\alpha, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(n)}(x^\alpha) \chi^{(n)}(y) \quad , \quad (7.25)$$

wobei die $\chi^{(n)}$ die Normierung

$$\int_{-\pi R}^{\pi R} e^{-2\sigma(y)} \chi^{(n)} \chi^{(m)} = \delta_{mn} \quad (7.26)$$

erfüllen, geht (7.23) über in

$$\left(\eta^{\nu\mu} \partial_\nu \partial_\mu + m_n^2 \right) \Psi^{(n)} = 0 \quad (7.27)$$

$$e^{2\sigma} \partial_y \left(e^{-4\sigma} \partial_y \chi^{(n)} \right) = m_n^2 \chi^{(n)} \quad . \quad (7.28)$$

Mit der Substitution $z_n = m_n/k \exp \sigma(y)$ und $f_n = \exp -2\sigma(y)\chi^{(n)}$ erhalten wir die Besselsche Differentialgleichung (siehe Anhang C)

$$z_n^2 \frac{d^2 f_n}{dz_n^2} + z_n \frac{df_n}{dz_n} + (z_n^2 - 4)f_n = 0 \quad . \quad (7.29)$$

Die allgemeine Lösung für diese Gleichungen [111] hat die Form einer Linearkombination mit konstanten Koeffizienten α_n [109, 110]

$$z_n(y) := \frac{1}{N_n} [J_2(z_n) + \alpha_n Y_2(z_n)] \quad (7.30)$$

bzw.

$$\chi^{(n)}(y) := \frac{e^{2\sigma(y)}}{N_n} \left[J_2 \left(\frac{m_n}{k} e^{\sigma(y)} \right) + \alpha_n Y_2 \left(\frac{m_n}{k} e^{\sigma(y)} \right) \right] , \quad (7.31)$$

wobei J_2 die Besselfunktion zweiter Ordnung ist und Y_2 die Webersche Funktion zweiter Ordnung. N_n bezeichnet hierbei eine Normierungskonstante.

Die Ableitung dieser Funktionen $\chi^{(n)}$ soll nun an den Branes stetig sein. Diese Forderung können wir benutzen, um die Konstanten α_n zu bestimmen und unser Massenspektrum festzulegen. Einsetzen von σ liefert mit $\partial_y \exp(2\sigma) = 2 \exp(\sigma) \partial_y \exp(\sigma)$ an der Stelle $y = 0$ (vgl [109])

$$\begin{aligned} & J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \alpha_n Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + 2 \frac{m_n}{k} \left[\partial_y J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \partial_y Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) \right] = \\ & -J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \alpha_n Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) - 2 \frac{m_n}{k} \left[\partial_y J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \partial_y Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.32)$$

oder

$$\alpha_n = - \frac{2J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \frac{m_n}{k} \partial_y J_2 \left(\frac{m_n}{k} \right)}{2Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right) + \frac{m_n}{k} \partial_y Y_2 \left(\frac{m_n}{k} \right)} . \quad (7.33)$$

Die Approximation für die verwendeten speziellen Funktionen (siehe Anhang C) liefert im Fall $m_n/k \ll 1$ und $\exp(kR\pi) \gg 1$ in guter Näherung $\alpha_n \approx 0$, so dass wir auf den Beitrag der Funktionen Y_2 zur Lösung unserer Differentialgleichung (7.31) verzichten können. Mit diesem Wissen liefert die Anschlussbedingung an der Stelle $y = \pi R$

$$2J_2 \left(\frac{m_n}{k} e^{\sigma(y)} \right) + 2 \frac{m_n}{k} e^{\sigma(y)} \partial_y J_2 \left(\frac{m_n}{k} e^{\sigma(y)} \right) = 0 \quad . \quad (7.34)$$

Unter Benutzung der Relation

$$\partial_x J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) \quad (7.35)$$

erhalten wir daraus

$$J_1\left(\frac{m_n}{k}e^{k\pi R}\right) = 0 \quad . \quad (7.36)$$

So ergeben sich schließlich Massen der Anregungen zu

$$m_n = x_n k e^{-\pi k R} \quad , \quad (7.37)$$

wobei x_n die Nullstellen der Bessel-Funktionen J_1 sind und in Abständen der Größenordnung 1 liegen [114] (Abb. 1, Anhang C). Das Massenspektrum im Randall-Sundrum Modell ist also nur näherungsweise äquidistant.

Die Normierungskonstante ergibt sich damit für $n > 0$ aus (7.26) zu [109]

$$N_n = \frac{e^{\pi k R}}{\sqrt{k}} J_2(x_n) \quad . \quad (7.38)$$

Wir können unsere Parameter k und R nun dadurch bestimmen, dass wir die erste Anregung der Kaluza-Klein-Moden einschränken. Diese Anregung trägt nun eine Masse $m_0 \approx k/m_p \text{ TeV}$ und kann selbst erst im Massebereich ab $\approx \text{TeV}$ auftreten. Sie spielt in diesem Modell eine ähnliche Rolle, wie die Größe M_f im ADD-Modell, sie setzt die Skala, ab der neue Effekte der modifizierten Gravitation auftreten sollten. Es ist demnach $k \approx m_p$ und $R \approx 12l_p$.

Gravitonen

Die hier für ein skalares Feld durchgeführte Betrachtung kann ebenso für eine Störung der Metrik durchgeführt werden [110] und es ergibt sich dabei wie zuvor für das skalare Feld ein Turm von massiven Gravitonen über dem masselosen Grundzustand. Dazu machen wir den Ansatz einer Störung um die gefundene Randall-Sundrum Metrik:

$$g_{\mu\nu} \approx \begin{pmatrix} e^{-2\sigma(y)} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (7.39)$$

Hierbei sind wir davon ausgegangen, dass die gestörte Metrik durch eine geeignete Eichung wieder in Blockdiagonalf orm gebracht wurde und dass der Radius der zusätzlichen Koordinate stabilisiert werden kann, die g_{55} -Komponente also nicht modifiziert wird. Die Stabilisierung dieser Koordinate ist Gegenstand der Diskussion [115, 116, 117, 118, 119, 120]. Sie ist aber möglich und kann etwa durch den in [115] vorgestellten Ansatz bewerkstelligt werden. Betrachtet man diese Größe als koordinatenabhängige Funktion, so unterliegt sie Bewegungsgleichungen (diese werden in [132] hergeleitet) und wird auch als »Radion« bezeichnet.

Im Gegensatz zum oben betrachteten skalaren Feld haben wir nun einen Quellterm, nämlich gerade die angesetzte Vakuumenergie. Auf der anderen Seite sehen wir, dass sich durch den Warp-Faktor die Wellengleichung nicht nur für den Störterm ergeben, denn im Gegensatz zum klassischen ART-Fall (vgl. Kapitel 2.2) verschwindet die Ableitung der Hintergrundmetrik $\exp(-2\sigma)\eta_{\mu\nu}$ nicht. Natürlich ist es gerade diese ungestörte Metrik, die nach Voraussetzung die Vakuumenergie generiert. Daher erfüllen die Störterme ebenso wie bei unserem skalaren Feld eine quellfreie Wellengleichung.

Wählt man wie oben den Ansatz

$$e^{-2\sigma(y)}h_{\mu\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^{(n)}(x^\alpha)\chi^{(n)}(y) \quad , \quad (7.40)$$

so erhält man

$$\left(\eta^{\nu\mu}\partial_\nu\partial_\mu + m_n^2\right)h_{\mu\nu}^{(n)} = 0 \quad , \quad (7.41)$$

begleitet von den Gleichungen für die $\chi^{(n)}$, also eine Wellengleichung mit demselben Massenspektrum wie oben. Diese Anregungen interpretieren wir, wie schon bei Kaluza-Klein und im ADD-Modell, als massive Gravitonen, die auf unserer Brane propagieren³.

Die Ankopplung der Gravitonen an die Teilchen des Standardmodells hat bis auf den überall auftretenden Vorfaktor $\exp -2\sigma(y)$ dieselbe Form wie im ADD-Modell, wie man aus den linearisierten Feldgleichungen sofort sieht. Siehe dazu auch [59, 110, 114].

7.2 RS Typ II

Das im vorigen Abschnitt besprochene Randall-Sundrum-Modell ist streng genommen kein Modell mit »großen« Extra Dimensionen, denn wir haben gesehen, dass der Kompaktifikationsradius R von der Größenordnung $\approx 12l_p$ ist. Wenn wir Gleichung (7.17) betrachten, so stellen wir jedoch fest, dass der Limes $R \rightarrow \infty$ wohldefiniert ist und die Relation $m_p^2 = M_f^3/k$ ergibt.

Das Randall-Sundrum-Modell Typ II [107, 113] hat nun das folgende modifizierte Szenario: Die Teilchen des Standardmodells befinden sich auf der oben als Planck-Brane bezeichneten Untermannigfaltigkeit, derjenigen Brane mit positiver Vakuumenergie. Die zweite Brane verschieben wir ins Unendliche. Es bleibt zu bestätigen, dass dabei im geeigneten niederenergetischen Limes das bekannte Gravitationsgesetz erhalten bleibt. Dazu greifen wir auf unser Analyse der

³Man beachte, dass ein Vorfaktor $\exp[-2\sigma(y)]$ vor dem Störterm $h_{\mu\nu}$ im Ansatz der Metrik für das Massenspektrum keine Rolle spielt.

Kaluza-Klein-Anregungen zurück, die wir zuvor durchgeführt haben. Lediglich die Interpretation ändern wir. Wir sitzen nun auf der Brane beim Wert $y = 0$.

Wie wir wissen, können wir die gravitativen Anregungen in Form von Besselfunktionen angeben. Nahe unserer Brane gilt mit dem oben durchgeführten Limes für $R \rightarrow \infty$

$$h_{\mu\nu}^{(n)}(0) = \text{const.} \sqrt{\frac{m_n}{k}} \quad , \quad (7.42)$$

wobei die auftretende Konstante von der Größenordnung 1 und nicht weiter von Interesse ist (vgl. Anhang C). Jedes Kaluza-Klein-Graviton auf der Brane trägt nun eine Masse m_n und erzeugt damit ein Yukawa-Potential der Form $1/r \exp(-m_n r)$. Hierbei ist r der Radius auf unserer Untermannigfaltigkeit. Da wir zuvor gesehen haben, dass das Massenspektrum in Abständen $\approx k \exp(-k\pi R)$ liegt, wissen wir, dass wir für Grosse R ein kontinuierliches Spektrum bekommen (und ersetzen daher den Index n durch m).

Der gesamte Beitrag dieser Teilchen ergibt dann für das Gravitationspotential

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{m_1 m_2}{m_p^2} \frac{1}{r} + \frac{m_1 m_2}{M_f^3} \int_0^\infty dm \frac{e^{-mr}}{r} |h_{00}^{(m)}(0)|^2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_p^2} \left(\frac{1}{r} + \text{const.} \frac{1}{k} \int_0^\infty dm \frac{e^{-mr}}{r} \frac{m}{k} \right) \quad , \quad (7.43) \end{aligned}$$

und nach Ausintegration erhalten wir

$$V(r) = G \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{\text{const.}}{r^2 k^2} \right) \quad . \quad (7.44)$$

Wir erhalten also einen Betrag höherer Ordnung zum klassischen $1/r$ Potential. Wir sehen aber auch, dass dieser Beitrag für $r \gg 1/k$ kaum noch beiträgt, wir also unser gewohntes Newtonsches Gesetz wieder zurück erhalten.

Dieser Ansatz liefert also eine dritte Möglichkeit, mit zusätzlichen Dimensionen das Hierarchieproblem zu lösen. Wir wollen uns hier mit dieser kurzen Erklärung zufrieden geben, die nur den Newtonschen Fall berücksichtigt. Der interessierte Leser kann in [121, 122] explizit nachlesen, dass auch die Tensorstruktur der gravitativen Wechselwirkung im RS-II Ansatz für große Abstände mit dem Limes der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie übereinstimmt.

7.3 Experimentelle Überprüfung

Nach unseren theoretischen Betrachtungen wollen wir uns nun der experimentellen Überprüfung des Randall-Sundrum-Modells zuwenden. Wir beschränken uns dabei auf das RS-I-Modell. Für eine Übersicht siehe [59].

Das RS-I Modell hat zwei freie Parameter. In der Regel wählt man diese Größen als $\eta = k/m_p \exp(k\pi R)$ und m_1 , die Masse der ersten Anregung. Um zu gewährleisten, dass die Lösung für die Metrik im hier betrachteten Szenario widerspruchsfrei ist, gilt es zu bedenken, dass die Krümmung unserer fünfdimensionalen Raumzeit nicht so stark werden darf, dass Stringeffekte mit der neuen Skala M_f bereits eine Rolle spielen. Da der Krümmungsskalar die Dimension $[1/\text{Länge}^2]$ hat, muss also gelten

$$|\mathcal{R}| < M_f^2 \quad . \quad (7.45)$$

Die Krümmung zur Metrik (7.10) berechnet sich zu $-20k^2$ und damit ist

$$\frac{k}{M_f} < \sqrt{\frac{1}{20}} \quad . \quad (7.46)$$

Im für uns interessanten Fall ist nach (7.17) mit $\exp(2\pi kR) \gg 1$

$$m_p^2 \approx \frac{M_f^3}{k} e^{2k\pi} \quad , \quad (7.47)$$

und damit erhalten wir an η die Einschränkung

$$\eta = \frac{k}{m_p} e^{2k\pi} \approx \left(\frac{k}{M_f} \right)^{\frac{3}{2}} < 0.1 \quad . \quad (7.48)$$

Eine weitere Grenze an die Parameter wollen wir setzen, indem wir uns erinnern, aus welchem Grund wir dieses Modell betrachtet haben: um das Hierarchie-Problem zu lösen. Daher soll die neue Skala M_f in der Größenordnung $\approx \text{TeV}$ liegen. Wir fordern also $M_f < 10 \text{ TeV}$.

Reelle und virtuelle Gravitonen

Die phänomenologischen Implikationen dieses Modelles unterscheiden sich in einem wesentlichen Punkt von denen des ADD-Modelles. Im ADD-Modell war das Massenspektrum aufgrund des großen Radius der Extra-Dimensionen quasikontinuierlich. Im RS-I-Modell erlaubt der Warp-Faktor hingegen einen Radius, der mit massiven Anregungen in TeV-Schritten einhergeht. Im Folgenden bezeichnen wir das Graviton mit der Masse m_n als $G^{(n)}$.

Kaluza-Klein-Zustände im Randall-Sundrum-Modell Typ I können daher einzeln angeregt werden. Aufgrund der geringen Lebensdauer dieser TeV-Massen-Zustände können sie über ihre Zerfallsprodukte nachgewiesen werden, etwa in Proton-Proton Kollisionen [123]

$$pp \rightarrow G^{(1)} \rightarrow e^+ e^- \quad (7.49)$$

bzw. in Subprozessen der Form

$$q\bar{q} \rightarrow G^{(1)} \rightarrow e^+e^- \quad (7.50)$$

$$gg \rightarrow G^{(1)} \rightarrow e^+e^- \quad , \quad (7.51)$$

deren differentielle Wirkungsquerschnitte in [124] berechnet worden sind. Durch den zusätzlichen Zerfallskanal über das Graviton kommt es dabei im begrenzten Energiebereich um die Massen der Gravitonen zu einem Anstieg des Reaktionswirkungsquerschnittes. Zur Illustration siehe Abbildung 7.2 aus [110]. Bei diesen Prozessen ist es zur Bestätigung des Modelles nötig, sicherzustellen, dass es sich um eine gravitative Anregung handelt. Dazu muss die Winkelverteilung der Kollision auf den Spin der Teilchen hin ausgewertet werden. Eine analytische Berücksichtigung dieser Tatsache ist in [123] zu finden.

Schon ein Auftreten des ersten Gravitons der Masse m_1 erlaubt Aussagen über die Existenz der Extra-Dimension und ihre Ankopplung an das Standardmodell. Höhere Anregungen lassen über die Schritte im Massespektrum nähere Rückschlüsse über die Art des Modells sowie die Selbstwechselwirkung der Gravitonen zu. Dabei kann es zu einem Zwischenzerfall der Form $G^{(n)} \rightarrow G^{(k)} G^{(k)}$ mit $k < n$ kommen [128].

Für den Bereich $\eta < 0.1$ und Massen der ersten Kaluza-Klein-Anregung von etwa $\approx \text{TeV}$ ist die direkte Suche nach dem ersten Kaluza-Klein-Graviton $G^{(1)}$ in hochenergetischen Beschleunigerexperimenten ab $\sqrt{s} \approx 1 \text{ TeV}$ möglich.

Es zeigt sich dabei, dass in $\bar{p}p$ -Kollisionen mit bereits vorliegenden Daten vom Tevatron ein weiterer Parameterbereich des Modells ausgeschlossen werden kann – siehe dazu Abbildung 7.3. Die am LHC ab voraussichtlich 2008 möglichen hochehergetischen Prozesse im Energiebereich 14 TeV und einer Luminosität von $L > 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ lassen eine erweiterte systematische Überprüfung des RS-I-Modelles zu.

Es zeigt sich [81], dass am LHC die Aussicht bestehen wird, die gesamte Region der Parameter methodisch abzudecken und das RS-I-Modell zu widerlegen oder zu bestätigen [124]. Eine Übersicht der Parameter zeigt Abbildung 7.3. Zu Vorhersagen zum ATLAS-Experiment siehe [123].

Weitere Daten, die jedoch bisher keine zusätzlichen Einschränkungen an den Parameterbereich liefern, lassen sich aus der Analyse elektroschwacher Prozesse gewinnen [127].

Zusätzlich zur reellen Produktion von Gravitonen ist wie auch im ADD-Modell die Untersuchung des Einflusses virtueller Gravitonen, etwa bei Diphotonen Produktion [114] am Tevatron (Run II) und am LHC.

S. R. Choudhury [125] weist außerdem auf die Möglichkeit von Untersuchungen des zusätzlichen gravitativen Austausches in der Comptonstreuung hin, die am NLC [126] durchgeführt werden können.

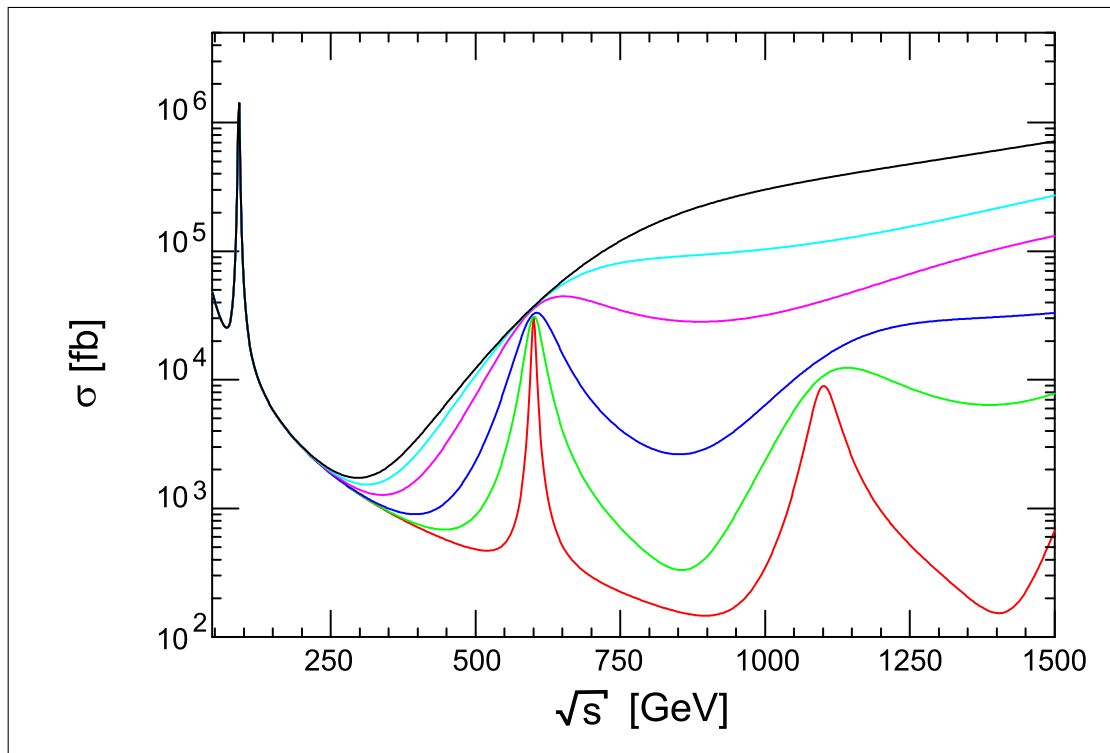


Abbildung 7.2: Der totale Wirkungsquerschnitt unter Miteinbeziehung massiver Gravitonen $G^{(n)}$ am Beispiel des Prozesses $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ mit $M_f = 600$ GeV. Von oben nach unten gehören die Kurven zu den Parameterwerten $c = 1.0, 0.7, 0.5, 0.3, 0.2, 0.1$. Abbildung aus [110].

Kosmologie und Astrophysik

Damit ein Modell wie das hier vorgestellte als eine Erweiterung der aktuellen Theorie gelten kann, muss es zunächst die bekannten Fakten reproduzieren können. Ein wichtiger Teil, den es wiederzuentdecken gilt, ist die Nukleosynthese im frühen Universum, die das Entstehen der Elemente nach dem heutigen Modell der Inflation erklärt.

Es zeigt sich, dass die für die zeitliche Entwicklung des Universums entscheidende Friedmannsche Gleichung für die Hubble-Rate (siehe Kapitel 2.2, Gleichung (2.21) und (2.30)) modifiziert wird. Sie hat im 5-dimensionalen Randall-Sundrum-Modell mit der oben eingeführten höherdimensionalen kosmologischen Konstante Λ und der totalen (Energie und Materie) Energiedichte ρ_{TeV} auf der Brane die Form [131, 135]

$$H^2 = \left(\frac{\rho_{\text{TeV}}}{6M_f^3} \right)^2 + \frac{\Lambda}{6M_f^3} \quad (7.52)$$

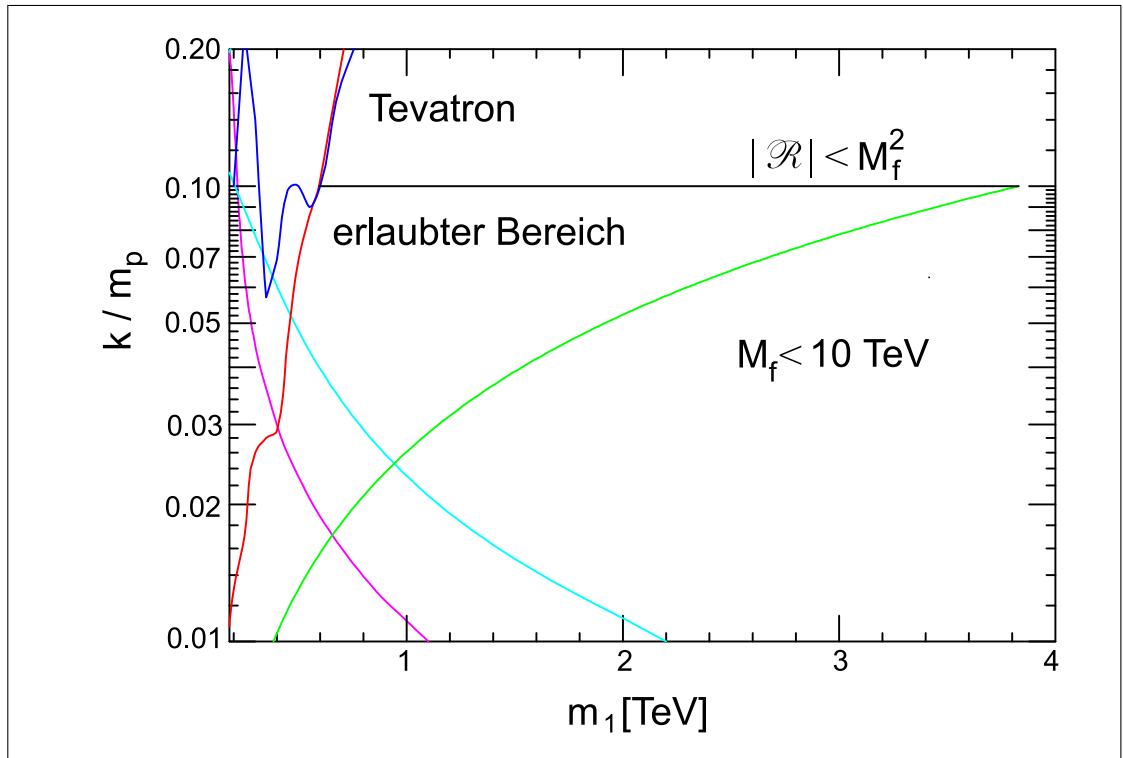


Abbildung 7.3: Darstellung der theoretischen und experimentellen Einschränkungen an den Parameterbereich im Randall-Sundrum-Modell I. Der erlaubte Bereich liegt in der Mitte. Abbildung aus [124].

anstatt der üblichen Relation

$$H = \sqrt{\frac{\rho_{\text{TeV}}}{6M_f^3}} \quad (7.53)$$

Diese Abweichung führt zu Problemen in der zeitlichen Entwicklung und den Prozessen im frühen Universum; diese sind in [129, 130, 131, 132, 133, 134, 135] diskutiert worden.

Es zeigt sich, dass dieses Problem der kosmologischen Inflation eng verknüpft ist mit dem der Radiusstabilisierung, die wir schon zuvor angesprochen haben. Tatsächlich stellt sich heraus, dass durch eine Stabilisierung des Radius, etwa nach Goldberger-Wise [115], erreicht werden kann, dass die Evolution des Universums wieder unserem heutigen kosmologischen Wissen entspricht [136]. Dabei kommt das Radion als neues Feld, das auch an das Standardmodell koppelt, ins Spiel.

Das Radion ist (siehe S. 90) die Komponente der Metrik in Richtung der Extra-Dimensionen und kann auch als Abstand zwischen den Branes interpretiert werden. Wie in [132] hergeleitet wird, erfüllt es dieselben Bewegungsgleichungen, wie das neutrale Higgs-Feld, jedoch mit einer anderen Kopplungskonstanten,

die je nach Parameterbereich variiert. Kosmologische und astrophysikalische Einschränkungen an das Randall-Sundrum-Modell sind also letzten Endes wieder auf hochenergetische Experimente zurückzuführen. Die Tatsache, dass wir bisher keine Spuren des Radions (und des Higgs) gefunden haben, lässt Rückschlüsse auf die Masse des Radions zu, die nach [136] im Bereich von 10 – 100 GeV liegen muss, siehe dazu auch [59].

Teil III

Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen

Kapitel 8

Schwarze Löcher in Extra-Dimensionen

Die Anwesenheit von Extra-Dimensionen modifiziert die Gravitationskraft auf kleinen Skalen. Es ist daher zu erwarten, dass sich daraus Konsequenzen für Schwarze Löcher ergeben. Insbesondere widmen wir uns der Frage, auf welchen Raumbereich die Masse des Schwarzen Loches mit und ohne Anwesenheit von Extra-Dimensionen komprimiert werden muss, und ob dies experimentell zu erreichen ist.

8.1 Die neue Skala

Wir nehmen im Folgenden stets an, dass die neue fundamentale Masse M_f bei ca. 1 TeV liegt. Die neue Energieskala soll jenseits des bereits erkundeten Bereiches liegen, aber doch niedrig genug sein, um das Hierarchieproblem zu lösen. Dies ist dann die $d + 3$ -dimensionale neue Planckmasse

$$m_{p(D)} =: M_f = 1 \text{ TeV} \quad . \quad (8.1)$$

Daraus ergibt sich

$$l_{p(D)} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ fm} \quad . \quad (8.2)$$

Man mag an dieser Stelle ganz richtig einwenden, dass das Ausbleiben jeglicher Hinweise auf die Existenz von Extra-Dimensionen den bequemen Ausweg offen hält, die neue Fundamentalskala einfach noch ein Stück weiter nach oben zu schieben. Es bleibt zu hoffen, dass sich durch weitere Untersuchungen der Theorien über Grosse-Extra-Dimensionen ausreichend Einschränkungen an die Parameter d und L machen lassen, um diesem Kritikpunkt vorzubeugen.

Mit der Festlegung von M_f erhält man nach (6.9) die Größe der Extra-Dimensionen zu

$$L = \left(\frac{m_p}{M_f} \right)^{1+\frac{2}{d}} l_p . \quad (8.3)$$

Dies ergibt die Werte

$$d = 1 : L \approx 10^{12} \text{ m} \quad (8.4)$$

$$d = 2 : L \approx 1 \text{ mm} \quad (8.5)$$

$$d = 3 : L \approx 10^6 \text{ fm} \quad (8.6)$$

$$d = 4 : L \approx 10^4 \text{ fm} \quad (8.7)$$

Wir benutzen im Weiteren die übliche Einheitenkonvention $l_p = 1/m_p$. Der vierdimensionale Schwarzschild-Radius ist dann zum Beispiel gegeben durch $R_S = 2M/m_p^2$. Diese Konvention ist dimensionsunabhängig, da die Plancklänge als die zur Planckmasse gehörige Compton-Wellenlänge $cl_p = \hbar/m_p$ definiert ist, unabhängig davon ob weitere Dimensionen vorhanden sind oder nicht. Das Umrechnen von Massen in Längen oder zurück erfolgt daher durch Multiplikation oder Division mit einer ausreichenden Menge von Faktoren $m_p l_p$. Es ist

$$l_p m_p \approx 2 \times 10^{-4} \text{ fmTeV} . \quad (8.8)$$

Im vierdimensionalen Fall berechnen wir den Schwarzschildradius R_S für ein Loch der Masse der Größenordnung $M \approx M_f = 1 \text{ TeV}$ zu

$$R_S = \frac{2M}{m_p^2} \approx 2 \times 10^{-38} \text{ fm} . \quad (8.9)$$

Teilchen, die eine Energie W tragen, können nach der Unschärferelation im Wellenbild eine Auflösung von $\Delta x = \hbar c/W$ erreichen. Dies gibt uns eine Vorstellung der Größenordnungen der in einem Beschleuniger erreichten Annäherung, wenn wir im Teilchenbild bleiben wollen. Bei $W = 200 \text{ GeV}$ liegt Δx bei 10^{-2} fm . Die Struktur von Nukleonen kann bei Experimenten dieser Energie bereits untersucht werden.

Mit $W = 10 \text{ TeV}$ erreichen wir bereits $\Delta x \approx 2 \times 10^{-4} \text{ fm}$, was bereits viele neue Möglichkeiten eröffnet. Wir sehen aber auch, dass im vierdimensionalen Raum auch mit den nächsten und übernächsten Generationen von Beschleunigern kaum Schwarze Löcher zu erzeugen sind. Um die Energie zum Kollaps zu bringen, muss es möglich sein, die beschleunigten Teilchen auf einen Raumbereich innerhalb ihres Schwarzschildradius zu bringen.

Es stellt sich nun die Frage, welche Modifikation der Schwarzschildradius bei wachsender Dimensionszahl erfährt. Dieser Fragestellung wollen wir uns im Folgenden zuwenden.

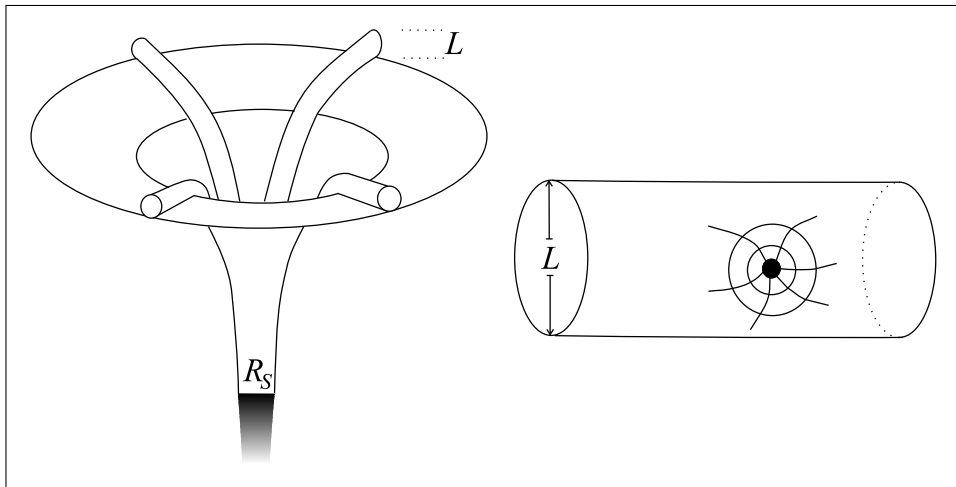


Abbildung 8.1: Skizze der Topologie des Schwarzen Loches im Fall 1. (links) und im Fall 2. (rechts).

8.2 Die Metrik im ADD-Modell

Für Schwarze Löcher astrophysikalischer Massen erwarten wir, auf unserer Brane die bekannte Schwarzschild-Lösung zurück zu erhalten. In diesem Fall liegt der Schwarzschild-Radius über dem Radius der Extra-Dimensionen. Auf der anderen Seite interessieren wir uns nun vor allen Dingen für Schwarze Löcher, deren Radius in der Nähe der neuen Planckskala liegt, als deutlich unter dem Radius der Extra-Dimensionen.

Wir können zwischen zwei Fällen unterscheiden, in denen wir die Metrik angeben können:

1. Die Größe des Schwarzschild-Radius R_S ist $\gg L$. In diesem Fall hat der Horizont die Topologie

$$S_3 \otimes \underbrace{U(1) \otimes U(1) \otimes \dots}_{d\text{-mal}} \quad (8.10)$$

Siehe auch Abb. 8.1 links.

2. R_H ist $\ll L$. In diesem Fall ist die Topologie kugelsymmetrisch in $d + 3$ Dimensionen, da wir die Randbedingung der Kompaktifizierung vernachlässigen können. Siehe Abb. 8.1 rechts.

Die Lösungen, die im Übergangsbereich liegen und nicht durch einen der Grenzfälle beschrieben werden können, diskutieren wir hier nicht. In [138] wird über mögliche Instabilitäten beim Übergang gesprochen.

Welche Massen gehören nun zu den oben genannten zwei Fällen? Um dies zu beantworten, definieren wir die kritische Masse M_c als die Masse, deren Schwarzschild-Radius gerade die Größenordnung der Länge der Extra-Dimensionen hat

$$M_c \approx \frac{L}{G} = \frac{Lm_p}{l_p} \quad (8.11)$$

Da wir oben gesehen haben, dass der Radius der Extra-Dimensionen etwa im mm-Bereich liegt und wir andererseits wissen, dass der Schwarzschild-Radius der Erde in denselben Bereich fällt, stellen wir fest, dass M_c etwa die Erdmasse ist.

Wir interessieren uns nun für Schwarze Löcher, die in Parton-Parton Kollisionen mit einer Maximum c.o.m. Energie¹ von $\sqrt{s} = 14$ TeV produziert werden. Für diese Schwarzen Löcher gilt also $R_H \ll L$ – sie gehören zum Fall 2.

8.2.1 Die n-dimensionale Schwarzschildlösung

Für die kugelsymmetrische Lösung der Einsteingleichung in $D = 4 + d$ Dimensionen beginnt man wie zuvor mit dem Ansatz (vgl. (3.1))

$$ds^2 = -\alpha_{(d+3)}(r, t)dt^2 + \beta_{(d+3)}(r, t)dr^2 + r^2 d\Omega_{(d+3)} \quad (8.12)$$

wobei $d\Omega_{(d+3)}$ nun das Oberflächenelement der $3 + d$ -dimensionalen Einheitskugel ist. Die Lösung der Feldgleichungen $R_{\mu\nu} = 0$ ergibt wiederum die Zeitunabhängigkeit der Funktionen α und β und liefert [141]

$$\begin{aligned} \alpha_{(d+3)}(r) &= \frac{1}{\beta_{(d+3)}(r)} = 1 - \left(\frac{C}{r}\right)^{1+d} \\ &=: \gamma_{(d+3)}(r) \quad . \end{aligned} \quad (8.13)$$

C ist dabei die auftretende Integrationskonstante. Wir bestimmen C aus der Forderung, dass für $r \gg L$ der Newtonsche Limes in dieser Raumzeit mit d kompaktifizierten Extra-Dimensionen mit dem 4-dimensionalen Newtonschen Gravitationsgesetz (6.8) übereinstimmen soll. Aus Kapitel 3.3 wissen wir, dass $\partial_r \gamma_{(d+3)} m/2$ das Newtonsche Potential wiedergeben muss, es ist also

$$m \frac{d+1}{2} \left(\frac{C}{r}\right)^{1+d} \frac{1}{r} = \frac{m}{M_f^{d+2}} \frac{M}{r^{d+2}} \quad (8.14)$$

oder

$$\gamma_{(d+3)}(r) = 1 - \frac{2}{d+1} \frac{1}{M_f^{d+2}} \frac{M}{r^{d+1}} \quad . \quad (8.15)$$

¹c.o.m. - »center of mass«

Da C die Dimension [Länge ^{$d+1$}] hat, ist $C = R_S^{d+1}$, wobei R_S der Schwarzschild-Radius des $d + 4$ -dimensionalen Schwarzen Loches ist. Wir erhalten R_S zu

$$R_S^{d+1} = \frac{2}{d+1} \left(\frac{1}{M_f} \right)^{d+1} \frac{M}{M_f} . \quad (8.16)$$

M gibt dabei die Masse des Schwarzen Loches an. Die Oberflächengravitation berechnen wir nach (3.16) zu

$$\kappa_D = \frac{1+d}{2} \frac{1}{R_S} \quad (8.17)$$

Die Oberfläche des Horizontes ergibt sich weiter als

$$\mathcal{A}_D = \Omega_{(d+3)} R_S^{d+2} \quad (8.18)$$

$$= \Omega_{(d+3)} \frac{M}{\kappa} \left(\frac{1}{M_f} \right)^{d+2} , \quad (8.19)$$

wobei $\Omega_{(d+3)}$ die Oberfläche der $d + 3$ -dimensionalen Einheitskugel ist

$$\Omega_{(d+3)} = \frac{2\pi^{\frac{d+3}{2}}}{\Gamma(\frac{d+3}{2})} . \quad (8.20)$$

Stellen wir nun noch einmal unsere eingangs des Kapitels betriebene Überlegung zur Produktion experimentell erzeugter Löcher an. Aus (8.16) erhalten wir nun für den Schwarzschild-Radius eines Schwarzen Loches mit $M = 1$ TeV, dass R_S bei $d = 2$ von der Größe $\approx 10^{-4}$ fm ist. Verglichen mit der erreichbaren Auflösung bei Energien um M_f liegt diese Größenordnung durchaus im Bereich des Möglichen. Dies sollte uns nicht weiter verwundern, da wir ja wissen, dass die Plancklänge zumindest in vier Dimensionen eben die Compton-Wellenlänge zum Schwarzschild-Radius ist. Miteinbezogen wird hier allerdings der dimensionsabhängige Vorfaktor.

Abbildung 8.2. zeigt für verschiedene Werte von d das Verhalten des Schwarzschild-Radius in Abhängigkeit von der Masse. Die Annäherung der kollidierenden Teilchen muss also darunter liegen. Zusätzlich zeigt die Abbildung die Hyperbel der energieabhängige Auflösung Δx , die nicht unterschritten werden kann. Ab den Schnittpunkten der Kurven besteht aus dieser naiven Sicht kein Hindernis mehr, das der Produktion Schwarzer Löcher im Wege steht.

Natürlich gibt diese einfache Betrachtung keinerlei Hinweis darauf, ob Schwarze Löcher in Beschleunigern der nötigen Energien in einem Maß erzeugt werden können, das nachweisbar ist. Um zu berechnen, was machbar ist und was nicht, müssen wir uns den Wirkungsquerschnitt der Kollision ansehen. Dies wird im nächsten Kapitel folgen und uns quantitative Aussagen ermöglichen. Außerdem bleibt noch die Frage zu klären, wie die Schwarzen Löcher nachgewiesen werden können.

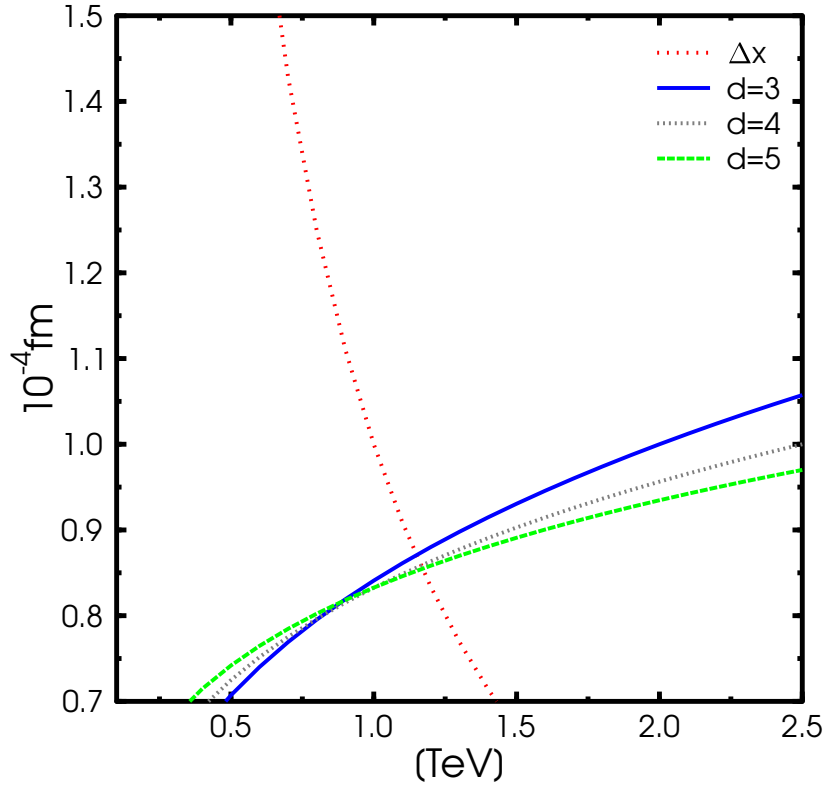


Abbildung 8.2: Der Schwarzschild-Radius verglichen mit der Auflösung in Anwesenheit von d grossen Extra-Dimensionen.

8.2.2 Die n-dimensionale Kerr-Lösung

Sehen wir uns ein schematisches Bild einer Teilchenkollision an (Abb. 8.3), bei der ein Schwarzes Loch entstehen soll, so sehen wir sofort, dass aus Erhaltungsgründen der Drehimpuls J des entstehenden Objektes nur bei zentralen Kollisionen mit $b = 0$ verschwindet. Im Allgemeinen ist jedoch $J \approx pb \approx 1/2Mb$, wobei M die Masse des entstehenden Loches ist. Daher wollen wir uns der n-dimensionalen Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen mit Drehimpuls zuwenden, also der n-dimensionalen Kerr-Lösung.

Das Schwarze Loch, das wir hier untersuchen, soll nur in unserer Brane rotieren und zwar in der $x - y$ - Ebene. Aus dem dadurch entstehenden Drehmoment J

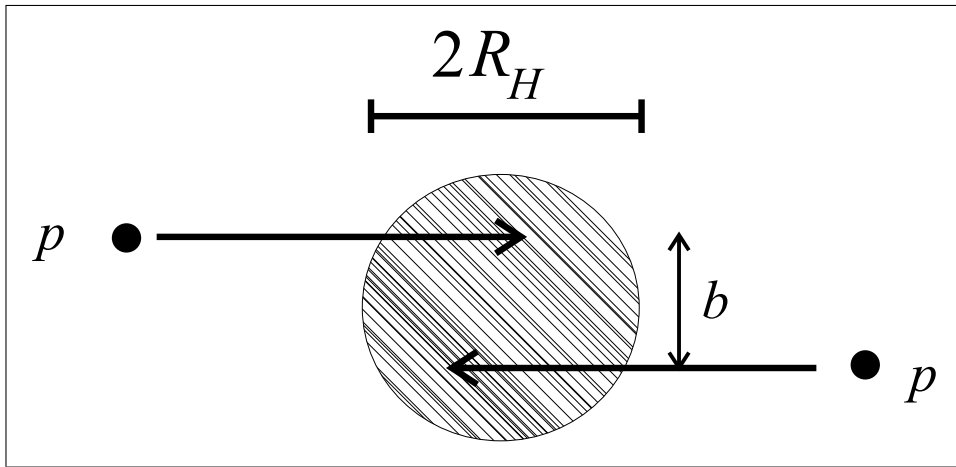


Abbildung 8.3: Skizze einer Teilchenkollision.

erhalten wir das spezifische Drehmoment

$$a = \frac{J}{M} \frac{d+2}{2}, \quad (8.21)$$

wobei wir einen dimensionsabhängigen Vorfaktor einführen, der nichts weiter tun soll, als uns Schreibarbeit abzunehmen. Bei Energien im TeV-Bereich, liegt J in der Größenordnung 10^{-4} fm TeV/c.

Um einen Vergleich zum nicht-rotierenden Fall zu vereinfachen, führen wir die Größe

$$\mu = R_0^{d+1} = \frac{16\pi G}{(d+2)\Omega_{(d+2)}} M_H \quad (8.22)$$

ein, wobei R_0 der Schwarzschildradius für verschwindenden Drehimpuls J ist.

Wir übernehmen die Rechnungen von Myers und Perry [141] und finden für die Metrik eines in ϕ -Richtung rotierenden Schwarzen Loches in $4+d$ Dimensionen (vgl. auch (3.28)):

$$ds^2 = - dt^2 + \sin^2 \theta (r^2 + a^2) d\phi^2 + \Delta (dt^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2)^2 + \Psi dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + r^2 \cos^2 \theta d\Omega_{(d)} \quad (8.23)$$

($\Omega_{(0)} = 0$), wobei

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (8.24)$$

$$\Psi = \frac{r^{d-1} \rho^2}{r^{d-1} (r^2 + a^2) - \mu}, \quad (8.25)$$

$$\Delta = \frac{\mu}{r^{d-1} \rho^2}. \quad (8.26)$$

Diese Metrik stellt eine Verallgemeinerung der Kerr-Lösung [35] in Boyer-Lindquist-Koordinaten [137] für höhere Dimensionen dar. An dieser Stelle sollte man sich klarmachen, dass dieser Fall nicht der Allgemeinste ist, da wir nur Rotationen auf unserer Brane in Betracht ziehen. Bei einer beliebigen Rotationsrichtung in einem n -dimensionalen Raum muss berücksichtigt werden, dass die Rotation um mehr als eine Achse erfolgen kann, was die Lösung erheblich kompliziert. Setzen wir $a = 0$, sehen wir, dass Ψ sich zum kugelsymmetrischen Schwarzschildischen Fall vereinfacht.

Der Horizont soll sich am Ort $r = R_S$ befinden und wir erhalten seine Lage durch Lösung der Gleichung:

$$R_S^{d+1} + a^2 R_S^{d-1} = \mu \quad . \quad (8.27)$$

Für beliebige d wird diese Gleichung im Allgemeinen nicht analytisch lösbar sein.

Die Kerr-Lösung hat zwei Killingvektoren. Einer der Vektoren gehört zu der zeitartigen Koordinate, da die Metrik stationär ist. Der andere kommt durch die Rotationssymmetrie zustande und gehört daher zur Koordinate ϕ . Aus diesen Killingvektoren kann die Oberflächengravitation κ berechnet werden [33, 141]. Wir folgen weiter der Rechnung von Myers und Perry und erhalten so

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\Pi_r - \mu}{2\mu r} \Big|_{r=R_H} & d \text{ gerade} \\ \frac{\Pi_r - 2\mu r}{2\mu r^2} \Big|_{r=R_H} & d \text{ ungerade} \end{cases} \quad , \quad (8.28)$$

wobei

$$\Pi_r = \begin{cases} (d+2)r^{d+1} + da^2r^{d-1} & d \text{ gerade} \\ (d+3)r^{d+2} + (d+1)a^2r^d & d \text{ ungerade} \end{cases} \quad . \quad (8.29)$$

Daraus erhalten wir die Oberfläche des Schwarzen Loches über den Zusammenhang

$$A_H = \Omega_{(d+2)} \frac{\mu}{2\kappa} \left(d+1 - 2 \frac{a^2}{R_S^2 + a^2} \right) \quad . \quad (8.30)$$

Die größten Abweichungen erwarten wir für den größtmöglichen Fall des Drehmomentes, also eben gerade den Grenzfall, in dem die Teilchen auf einer Distanz aneinander vorbeischnappen, die dem Schwarzschild-Radius entspricht. Dieser Fall ist aus stochastischen Gründen auch der wahrscheinlichste. Zumal wird er uns eine ober Abschätzung für die Änderung des Schwarzschildradius liefern.

Wir betrachten also den Extremfall mit $b = 2R_S$, woraus sich $J = M_H R_S$ ergibt. Setzen wir dies in die Gleichung (8.27) ein, so erhalten wir²

$$J = R_S \left[1 + \left(\frac{d+2}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{d+1}} \quad . \quad (8.31)$$

²Damit wird der Fall $d = 0$ ausgeschlossen, da die Ungleichung $M^2 > a^2$ verletzt ist.

Mit der Notation

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left(\frac{d+2}{2}\right)^2} \quad (8.32)$$

ergibt sich $R_S = \alpha^{\frac{1}{d+1}} R_0$ und

$$\kappa = \begin{cases} \left(\alpha(2d+2) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 1 \right) \frac{1}{2R_S} & d \text{ gerade} \\ \left(\alpha(2d+4) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 2 \right) \frac{1}{2R_S} & d \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.33)$$

Schließlich erhalten wir für die Oberfläche

$$A_H = \Omega_{(d+2)} \left[d + 1 - 2 \left(\frac{d+2}{2} \right)^2 \alpha \right] \begin{cases} \frac{R_S \mu}{\alpha(2d+2) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 1} & d \text{ gerade} \\ \frac{R_S \mu}{\alpha(2d+4) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 2} & d \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.34)$$

oder, mit A_0 als Oberfläche des nichtrotierenden Falles

$$\frac{A_H}{A_0} = \begin{cases} \frac{d+1-2\left(\frac{d+2}{2}\right)^2 \alpha}{\alpha(2d+2) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 1} & d \text{ gerade} \\ \frac{d+1-2\left(\frac{d+2}{2}\right)^2 \alpha}{\alpha(2d+4) \left[\frac{d+2}{2}\right]^2 - 2} & d \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8.35)$$

Wir sehen: dieser Faktor ist unabhängig von M_H . Eine kurze Untersuchung zeigt, dass er für alle $d > 0$ zwischen 1 und 1/2 liegt. Dies stimmt überein mit den Folgerungen von [139]. Ein zusätzlicher Drehimpuls macht also auch für den größtmöglichen Wert nur eine Änderung um den Faktor 2 aus. Aus diesem Grunde wollen wir im Folgenden auf die Miteinbeziehung einer möglichen Rotation unserer Schwarzen Löcher verzichten.

8.3 Schwarze Löcher im RS-Modell

Bisher haben wir Schwarze Löcher in Raumzeiten mit LXDs betrachtet, die durch das ADD-Modell beschrieben werden. Wir wollen uns nun kurz der Frage zuwenden, was in RS-Modellen zu erwarten ist.

Auch dort gilt natürlich, dass auf der Brane, die unsere vierdimensionale Raumzeit repräsentiert, mit dem üblichen Gravitationsgesetz Masse kollabieren und einen Horizont bilden kann. Dieser Horizont wird nun aber eine Oberfläche im $d+3$ -dimensionalen Raum sein und eine Ausdehnung in die zusätzlichen Dimensionen haben.

Tatsächlich gibt es auch im RS-Modell Lösungen, die Schwarze Löcher beschreiben. S. Hawking [145] zufolge gibt es sogar eine eindeutige Lösung.

Durch die Substitution $z = k^{-1} \exp(-kr_c|\phi|)$ bringen wir dazu (7.10) in eine neue Form. Mit

$$\left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 = r_c^2 e^{-2kr_c|\phi|} \quad (8.36)$$

erhalten wir

$$ds^2 = z^2 k^2 \left(\eta_{ij} dx^i dx^j + dz^2 \right) . \quad (8.37)$$

Die Metrik für ein Schwarzes Loch kann man nun aus der Tatsache gewinnen, dass eine Metrik mit dem Linienelement

$$ds^2 = z^2 k^2 \left(g_{ij} dx^i dx^j + dz^2 \right) \quad (8.38)$$

nicht nur dann eine Lösung der EFG ist, wenn $g_{ij} = \eta_{ij}$ ist, wie in Kapitel 7.1 angenommen wurde, sondern im Allgemeinen immer dann, wenn die Metrik g_{ij} auf der Untermannigfaltigkeit einen verschwindenden Ricci-Tensor hat [146]. Wie wir wissen, ist das der Fall für die Schwarzschildmetrik und so ist die naheliegende Lösung für die Raumzeit dieses Schwarzen Loches (vgl. Gleichung (3.4))

$$ds^2 = z^2 k^2 \left(-\gamma(r) dt^2 + \gamma^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dz^2 \right) . \quad (8.39)$$

Dabei liegt auf unserer Brane die bekannte 4-dimensionale Schwarzschild-Lösung vor. Wegen der nicht-trivialen Geometrie der Extra-Dimension ist der Horizont in diesem Fall aber nicht symmetrisch, sondern verzerrt. Je nach Verhältnis zwischen Schwarzschild-Radius und Radius der Extra-Dimension handelt es sich dabei um eine »Black Cigar« [145] bzw. einen »Black Pancake« [147, 151].

Im Gegensatz zum ADD-Modell wird der Schwarzschild-Radius in diesem Fall nicht modifiziert, er bleibt also auf Skalen weit unter dem experimentell Erreichbarem. Da die Extra-Dimensionen im RS-Modell einen Radius vergleichbar zur Plancklänge in vier Dimensionen haben, ist auch nicht damit zu rechnen, dass die Eigenschaften dieser Schwarzen Löcher im von uns betrachteten Energiebereich eine wesentliche Modifikation erfahren.

Weitere Referenzen zu diesem Thema sind [148, 149, 150] und die bereits erwähnten [145, 146, 147].

Kapitel 9

Produktion Schwarzer Löcher

In diesem Kapitel wollen wir uns der möglichen Produktion von Schwarzen Löchern in Hochenergie-Teilchenkollisionen zuwenden und quantitative Abschätzungen geben.

9.1 Partonen

Wir interessieren uns vor allen Dingen für Proton-Proton (pp) Kollisionen, die am LHC durchgeführt werden können. Bei Energien im von uns betrachteten Bereich $E \approx \text{TeV}$ sind die dabei ausgeführten Stöße extrem inelastisch; in der Regel kommt es zu Reaktionen zwischen den Stoßpartnern. Ein Hadron wie das Proton kann dabei nicht mehr als ein einzelnes Teilchen betrachtet werden. Wie wir wissen, besteht es aus drei Quarks ($up, up, down$), die durch Gluonen, die Eichbosonen der starken Wechselwirkung, zusammengehalten werden.

Wir wollen im Folgenden zwei Protonen A und B mit den Viererimpulsen $P_A = (E_A, p_A)$ und $P_B = (E_B, p_B)$ betrachten. Beide Protonen haben die Masse $m \approx 938 \text{ MeV}$. Im c.o.m. - System ist daher $p_A = -p_B =: p$ und $E_A = E_B =: E/2$, wobei E die Gesamtenergie der Kollision im c.o.m. - System sei.

Im sogenannten »Partonen-Modell«, das von Feynmann und Bjorken 1968/69 erdacht wurde [154], geht man davon aus, dass man die Streuung an einem Proton darstellen kann, als eine Vielzahl von Streuungen an seinen Bestandteilen. Diese Bestandteile, die Quarks und Gluonen, werden dann auch als »Partonen« bezeichnet. Wir wollen diese Partonen mit einem Index i, j, \dots durchnummerieren. Weiterhin muss im Zuge des Partonen-Modelles berücksichtigt werden, dass in einer pp -Kollision jedes Parton nur einen Teil des totalen Viererimpulses seines Protons im c.o.m. - System trägt. Diesen Anteil bezeichnen wir für P_A mit x_i , der Anteil von P_B sei y_j . x_i und y_j nehmen also stets Werte zwischen 0 und 1 an. Es ergibt sich, da das Quadrat des Viererimpulses die Ruhemasse angibt, dass

auch die Ruhemasse der Partonen den Anteil x_i bzw. y_j an der Gesamtmasse des Protons tragen. Es ist also

$$\text{Proton } A : E/2, p, m \quad (9.1)$$

$$\text{Parton } A_i : x_i E/2, x_i P_A, x_i m \quad (9.2)$$

$$\text{Proton } B : E/2, -p, m \quad (9.3)$$

$$\text{Parton } A_j : y_j E/2, -y_j p, y_j m, \quad (9.4)$$

wobei sich die Anteile wieder zum Gesamtimpuls (bzw Gesamtmasse, Gesamtenergie) summieren müssen.

$$1 = \sum_i x_i = \sum_j y_j \quad (9.5)$$

Außerdem möchten wir an dieser Stelle die »Mandelstam-Variable« s einführen, eine der üblicherweise als kinematische Variable in Streuprozessen benutzten Größen:

$$s =: (P_A + P_B)^2 . \quad (9.6)$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass im c.o.m. - System $s = (E, 0)^2 = E^2$ ist. Im Folgenden werden wir daher die Gesamtenergie als \sqrt{s} bezeichnen. Die Gesamtenergie für die Kollision zweier Partonen $\sqrt{\hat{s}}$ berechnet sich nach Obigem zu

$$\begin{aligned} \hat{s} &= (x_i P_A + y_j P_B)^2 = \left((x_i + y_j) \sqrt{s}/2, (x_i - y_j) p \right)^2 \\ &= (x_i^2 + y_j^2)(s/4 - p^2) + 2x_i y_j (s/4 + p^2) . \end{aligned} \quad (9.7)$$

Bei hochenergetischen Kollisionen liegt nun die Gesamtenergie des Teilchens fast gänzlich in der kinetischen Energie, wohingegen die Ruhemasse vernachlässigt werden kann. So haben wir für unseren Fall $s \approx 10\text{TeV}$ und $m \approx 1\text{GeV}$, also einen Faktor 10^4 Unterschied. Wir können daher annehmen, dass $m \approx 0$ ist und haben dann die daraus folgenden Relationen $s/4 = p^2$. Wir setzen dies in (9.7) ein und es ergibt sich dann für eine tief inelastische Streuung im c.o.m. - System die Relation

$$\hat{s} = x_i y_j s . \quad (9.8)$$

Es stellt sich nun weiter die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Parton i von A gerade den Anteil x_i des Impulses trägt. Die Wahrscheinlichkeit kann im Allgemeinen von der Energie der Kollision abhängen. Wir nennen diese

Verteilung der Partonen $f_A(x_i, \hat{s})$

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dx} &=: f_A(x_i, \hat{s}) \\ \frac{dy_j}{dy} &=: f_B(y_j, \hat{s})\end{aligned}\tag{9.9}$$

auch die »Partonen-Verteilungsfunktion«. Die Normierungsbedingung lautet dann

$$\begin{aligned}1 &= \sum_i \int x f_A(x_i, \hat{s}) dx \\ 1 &= \sum_j \int y f_B(y_j, \hat{s}) dy .\end{aligned}\tag{9.10}$$

Diese Partonen-Verteilungsfunktionen können experimentell bestimmt werden. Sie liegen in tabellierter Form in den CTEQ¹-Verteilungsfunktionen [155] vor und wir werden sie im Folgenden für unsere Vorhersagen benutzen.

9.2 Der geometrische Wirkungsquerschnitt

Wenn wir uns zwei Partonen vorstellen, die sich mit hoher kinetischer Energie aufeinander zubewegen, so wird bei enger Annäherung die Energie im c.o.m. - System $\sqrt{\hat{s}}$ die neue fundamentale Skala $M_f \sim 1$ TeV erreichen können. Wenn wir uns diesen Vorgang bildhaft veranschaulichen, so haben wir die beiden Partonen plus ihrer kinetischen Energie in einem sehr kleinen Raumbereich. Die Annäherung, die erreicht werden kann, ist dabei im Zuge der Unschärferelation umso größer, je höher die Energie des Stoßes ist. Nach den vorigen Überlegungen wird dieses System von Partonen kollabieren, wenn sich seine Energie innerhalb des Schwarzschildradius befindet – also wenn die Annäherung kleiner als R_S ist.

Dies ist zunächst eine sehr konservative klassische Abschätzung und bedarf der weiteren Rechtfertigung. Es wird hier – zusätzlich zu unserem grundlegenden Unwissen über Quantengravitationseffekte – außer Acht gelassen, dass die Energiedichte nicht instantan kollabiert und im Zuge der Unschärferelation verschmiert ist. Eine Zeitentwicklung des Systemes und den Vorgang des Kollapses an sich können wir nicht beschreiben². Es wurde jedoch gezeigt, dass das klassische Ergebnis auch in der Stringtheorie gültig bleibt: »*Thus, the general relativistic result [...] extends to string theory.*«[156]. Unsere Vorstellung der Kollision

¹»Coordinated Theoretical-Experimental Project on QCD«

²Dies gilt allerdings auch für beliebige andere Reaktionen.

mag also naiv sein, das Ergebnis ist aus der Stringtheorie bestätigt und kann für die Rechnungen übernommen werden.

Eine Herangehensweise außerhalb der Stringtheorie, die das Entstehen des Horizontes berücksichtigt und der Tatsache Rechnung trägt, dass die Teilchen näherungsweise als Wellen beschrieben werden sollten, wäre, einen Umweg über Gravitationswellen zu machen, die die beschleunigten Massen beschreiben [157, 158]. Dieses Problem ist bisher noch nicht vollständig gelöst.

Weiter soll hier noch darauf hingewiesen werden, dass M. B. Voloshin besonders bei der Produktion mehrerer Schwarzer Löcher und bei hohen Energien für eine exponentielle Unterdrückung des Wirkungsquerschnittes argumentiert [159, 160]. Ähnliche Resultate fand auch Giddings in [161]. Nähere Untersuchungen dieser Fälle haben jedoch gezeigt, dass in den von uns betrachteten Energiebereichen und Kollisionen das klassische Ergebnis beibehalten werden kann. Siehe dazu Eardley und Giddings [162], Jevecki und Thaler [163] und [139, 164].

Der totalen Wirkungsquerschnitt für den Prozess der Bildung eines Schwarzen Loches ist nun nach unserer Abschätzung aus geometrischen Gründen gegeben durch

$$\sigma(M) \approx \pi R_S^2 \quad . \quad (9.11)$$

Dieser Ausdruck enthält nur die fundamentale Planck-Skala als Kopplungskonstante. Daraus finden wir mit $M_f \sim 1\text{TeV}$ und $d = 2$, dass $\sigma \approx 1 \text{TeV}^{-2} \approx 400 \text{pb}$ ist.

9.3 Der differentielle Wirkungsquerschnitt

Eine naheliegende Frage ist nun, wieviele Löcher mit welcher Endmasse entstehen können. Dazu betrachten wir die Verteilung des Wirkungsquerschnittes über M $d\sigma/dM$. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Stoßpartner gemeinsam ein Schwarzes Loch der Masse M bilden, ergibt sich als Kombination aller möglichen Stoßpartner A_1, B_2 , sowie aller möglichen Werte für x_1 und y_2 mit der $x_1 y_2 s = \hat{s} = M^2$, also

$$\frac{d\sigma}{dM} = \sum_{A_1, B_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy \times f_A(x_1, \hat{s}) f_B(y, \hat{s}) \delta(\sqrt{x_1 y s} - M) \sigma(\sqrt{\hat{s}}, d) \quad (9.12)$$

Die Summe erstreckt sich dabei über alle kinematisch möglichen Kombinationen der Partonen A_1 (Projektil) und B_2 (Target), also Quark-Quark, Gluon-Quark, Quark-Gluon, Gluon-Gluon, wobei die Quarks jeweils in den Flavours *up* und *down* auftreten können.

Wir schreiben die Deltafunktion auf y um

$$\frac{d\sigma}{dM} = \sum_{A_1, B_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy \times f_A(x_1, \hat{s}) f_B(y, \hat{s}) \frac{2\sqrt{\hat{s}}}{x_1 s} \delta(y - y_2) \sigma(\sqrt{\hat{s}}, d) \quad (9.13)$$

und integrieren schließlich aus. Es ergibt sich

$$\frac{d\sigma}{dM} = \sigma(M, d) \sum_{A_1, B_2} \int_0^1 dx_1 \frac{2\sqrt{\hat{s}}}{x_1 s} f_A(x_1, \hat{s}) f_B(y_2, \hat{s}) \quad (9.14)$$

Die Daten für f_A und f_B entnehmen wir den CTEQ4 - Tabellen [166, 167, 168] und erhalten damit die in Abbildung aufgezeigten Ergebnisse 9.1. Wir sehen nun, dass die Hauptanzahl der produzierten Schwarzen Löcher im Energiebereich um M_f liegt.

Für den Experimentalphysiker von Interesse ist außerdem die »Feynman- x -Verteilung«. Die Größe x_F , das sogenannte »Feynmann- x « ist, dabei die Differenz der Werte $x_F = y_2 - x_1$ der Impulsbruchteile zweier stoßender Partonen, die wir 1 und 2 nennen wollen. Diese Verteilung des Wirkungsquerschnittes über verschiedene Werte von x_F berechnen wir nun wie zuvor aus stochastischen Prinzipien. Die Masse des Schwarzen Loches, das bei der Partonen-Kollision entstehen kann, trägt die Masse $M = \sqrt{\hat{s}}$. Der im vorigen Abschnitt diskutierte Wirkungsquerschnitt σ ist also dann eine Funktion von \hat{s} und d .

Die Verteilung $d\sigma/dx_F$ ist nun die Kombination aller möglichen Stoßpartner A_1, B_2 , sowie aller möglichen Werte für x_1 und y_2 mit der Einschränkung, dass deren Differenz eben gerade die Stelle x_F angibt. Zusammen ergibt dies

$$\frac{d\sigma}{dx_F} = \sum_{A_1, B_2} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dy \times f_A(x_1, \hat{s}) f_B(y, \hat{s}) \delta(y - x_1 - x_F) \sigma(\sqrt{\hat{s}}, d) \quad (9.15)$$

Ausintegration der δ -Funktion ergibt die Faltung:

$$\frac{d\sigma}{dx_F} = \sum_{A_1, B_2} \int_0^1 dx_1 f_A(x_1, \hat{s}) f_B(y_2, \hat{s}) \sigma(\sqrt{\hat{s}}, d) \quad (9.16)$$

Nach der Substitution $M = \sqrt{x_1 y_2 s}$ erhält man

$$\frac{d\sigma}{dx_F} = \sum_{A, B} \int_{M^-}^{M^+} dM \times \frac{2M}{y_2 s} f_A(x_1, M^2) f_B(y_2, M^2) \sigma(M, d) \quad (9.17)$$

Dem Integral setzen wir die Grenzen durch die Massen $M \in [M^-, M^+]$ mit $M^- = 1 \text{ TeV}$ und $M^+ = 10 \text{ TeV}$. Die Energie der Partonen soll sicher nicht über der Gesamtenergie liegen, aber auch nicht unter der fundamentalen Skala.

Die beiden Gleichungen $x_F = y_2 - x_1$ und $M^2 = x_1 y_2 s$ können wir benutzen, um x_1 und y_2 aus dem Integral zu eliminieren und es als Funktion von x_F alleine zu schreiben. Wir erhalten

$$x_1 = -\frac{x_F}{2} + \sqrt{\frac{x_F^2}{4} + \frac{M^2}{s}} \quad (9.18)$$

$$y_2 = +\frac{x_F}{2} + \sqrt{\frac{x_F^2}{4} + \frac{M^2}{s}} \quad (9.19)$$

Das Integral kann nun wie zuvor numerisch ausgewertet werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 9.2 dargestellt.

9.4 Produktionsraten

Den totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma(pp \rightarrow BH + X)$ erhalten wir nun durch Integration der im vorherigen Abschnitt besprochenen Feynman- x -Verteilung über (9.17). Diese Kurve des totalen Wirkungsquerschnittes ist in Abbildung 9.3 dargestellt.

Nun können wir die Frage nach der Relevanz des Prozesses eines zum Schwarzen Loch kollabierenden Partonenpaares beantworten. Dazu berechnen wir nun die Gesamtzahl produzierter Schwarzer Löcher pro Jahr (siehe Abbildung 9.4). Wir erhalten sie aus

$$\frac{N_{\text{BH}}}{\text{year}} = \sigma(pp \rightarrow \text{BH})L \quad (9.20)$$

mit für den LHC geplante minimale Luminosität $L = 10^{33} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bei $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ zu $\approx 10^8$ (siehe Abbildung 9.4). Dieses Ergebnis stimmt überein mit den Resultaten von Landsberg [169]. Schwarze Löcher werden also bei Anwesenheit von Extra-Dimensionen in einer hohen Anzahl produziert und geben einen klaren Hinweis, ob eine Änderung unser Vorstellung von der vierdimensionalen Raumzeit nötig ist.

Hochenergetische Kollisionen, wie die hier betrachteten, mit Energien oberhalb der neuen Planck-Skala können auch durch kosmische Strahlung in der Erdatmosphäre stattfinden. Die Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung dieser Ereignisse ist jedoch aufgrund ihres unvorhersagbaren Auftretens gering. Trotzdem kann man aus der Tatsache, dass noch keine solchen Schwarzen Löcher in Kosmischen Schauern detektiert wurden, Rückschlüsse auf die neue fundamentale Skala M_f ziehen [170, 171]. Diese Ergebnisse decken sich mit den schon zuvor (Kapitel 6.3) aus kosmologischen Gründen angegebenen Einschränkungen an das Modell.

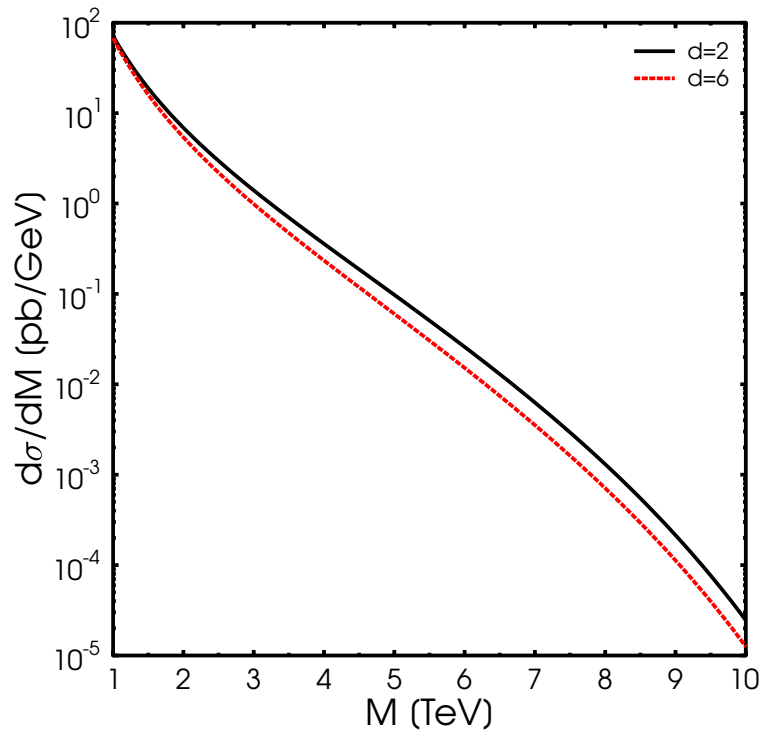


Abbildung 9.1: Der Wirkungsquerschnitt Schwarzer Löcher in Abhängigkeit von der Masse. $M \geq 1$ TeV in einer pp -Kollision am LHC produziert werden.

9.5 Jets

Aus den vorherigen Betrachtungen läßt sich eine wichtige Observable ableiten. Der transversale Impuls p_T , der Anteil des Impulses senkrecht zur Strahlrichtung, gehört zu den primären Daten, die dem Experimentalphysiker im Detektor zugänglich sind. Betrachten wir zwei einlaufende Partonen mit hoher Energie, so besteht die Möglichkeit einer Reaktion bei der zwei Partonen mit hohem transversalen Impuls in entgegengesetzte Richtung auseinanderfliegen. Da die Farbneutralität gewährleistet bleiben muss, erzeugt jedes dieser Quarks einen Schauer von Hadronen, deren Anzahl und Energie von der Energie der auslaufenden Partonen abhängt. Diese Hadronen, die auf beiden Seiten innerhalb eines kleinen Öffnungswinkels in den Detektor gelangen, können mittels Algorithmen zurück-

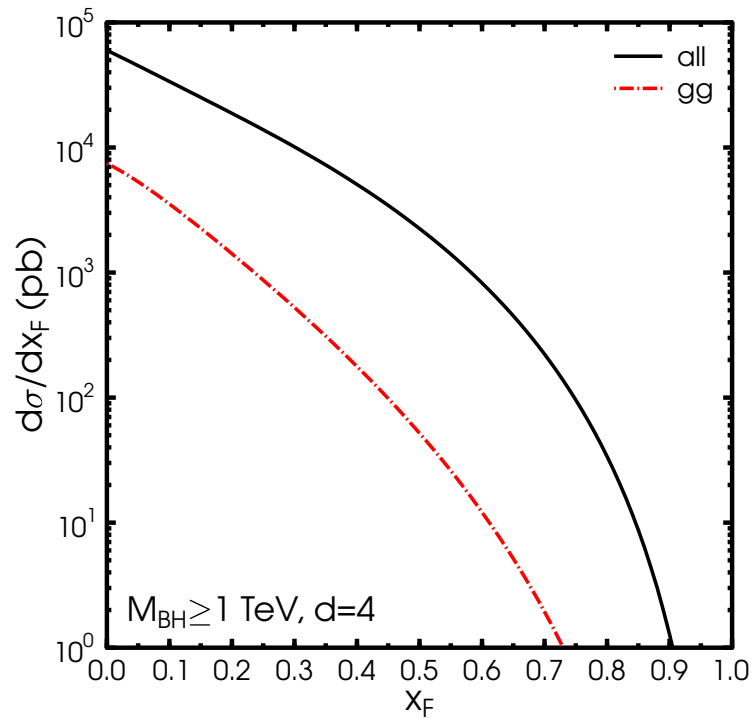


Abbildung 9.2: Die Feynman- x -Verteilung für Schwarze Löcher mit $M \geq 1$ TeV, die in einer pp -Kollision am LHC produziert werden. Hier ist $d=4$.

verfolgt und so die Kollision ausgewertet werden. Ein solches Ereignis bezeichnet man als »Jet«.

Für unsere schwarzen Löcher sind diese Jet-Daten daher interessant, weil wir zuvor gesehen haben, dass ab einer bestimmten, mit M_f in Relation stehenden Gesamtenergie der Partonen, ein Schwarzes Loch gebildet wird und so kein Jet mehr entstehen kann. Wir erwarten also einen rapiden Abfall der Jet-Produktion ab einer bestimmten Energieskala.

Um eine Vorhersage für das p_T -Spektrum von Jets zu erhalten, betrachten wir zunächst die Partonen-Kollisionen der Form $p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4$ mit den dazugehörigen Impulsanteilen x_i

$$\begin{aligned}
 qq' &\rightarrow qq' \\
 qq &\rightarrow qq \\
 q\bar{q} &\rightarrow q'\bar{q}' \\
 q\bar{q} &\rightarrow q\bar{q} \\
 gq &\rightarrow gq \\
 q\bar{q} &\rightarrow gg
 \end{aligned}$$

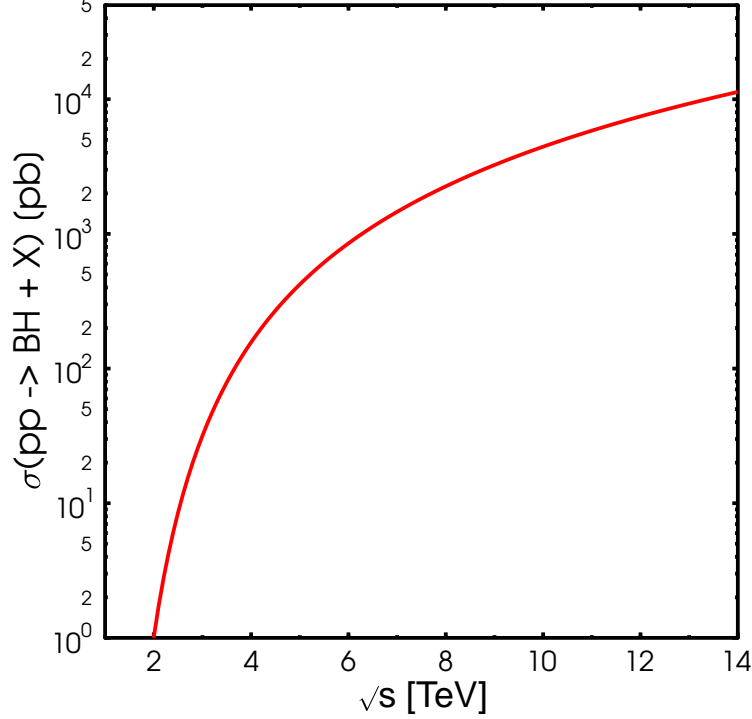


Abbildung 9.3: Der totale Wirkungsquerschnitt Schwarzer Löcher in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie, hier dargestellt für $d = 2$. Die Kurven höher Dimensionenzahl differieren von der abgebildeten um weniger als einen Faktor 10.

$$\begin{aligned} gg &\rightarrow q\bar{q} \\ gg &\rightarrow gg \end{aligned} \quad (9.21)$$

mit den Wirkungsquerschnitten $d\sigma/dt$ für die Reaktionen $p_1p_2 \rightarrow p_3p_4$, die sich aus dem PQCD (Perturbative Quantum-Chromo-Dynamics) Ansatz nach [172, 173] ergeben. Hierbei bezeichnet q' ein von q verschiedenes Quark. Daraus erhalten wir die p_T -Verteilung, die sich mit experimentellen Daten [174] – siehe Abbildung 9.5 – deckt³, aus

$$\pi p_T \frac{d^2\sigma}{d\eta dp_T} = \sum_{p_i} \int_{x_{1min}}^1 dx_1 \frac{1}{\pi} \frac{x_1 x_2}{2x_1 - x_T e^\eta} \frac{d\sigma}{dt}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) \quad (9.22)$$

³Einen besseren Fit an die Daten erhält man mit NLO (Next Leading Order)-Korrekturen, die jedoch für die hier gezogene Abschätzung nicht wesentlich sind.

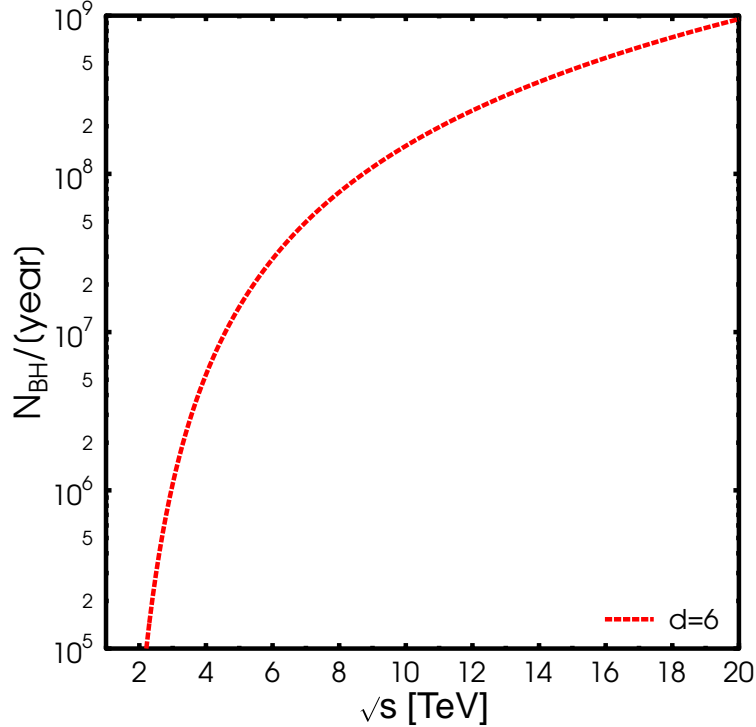


Abbildung 9.4: Die Gesamtzahl produzierter Schwarzer Löcher pro Jahr mit $L = 10^{33} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$

mit den kinetischen Relationen [172]

$$x_T = 2 \frac{p_T}{\sqrt{s}} \quad (9.23)$$

$$x_2 = \frac{x_1 x_T e^{-\eta}}{2x_1 - x_T e^{\eta}} \quad (9.24)$$

$$x_{1\min} = \frac{x_T e^{\eta}}{2 - x_T e^{\eta}} \quad , \quad (9.25)$$

wobei η die Rapidität des Partons p_1 ist und die Mandelstam-Variable der Partonenkollision $t = -x_1 p_T \sqrt{s} \exp(-\eta)$.

Wird die Energie der am Jet beteiligten Teilchen so groß, so entsteht bei unserem Ansatz für den geometrischen Wirkungsquerschnitt bei Annäherung auf Distanzen unterhalb des Schwarzschildradius ein Schwarzes Loch. Die Annäherung der Teilchen schätzen wir nach der Unschärferelation ab mit $\approx 1/p_T$. Die Kollapsbedingung lautet dann also $1/p_T < R_S$.

Die Auswertung dieser Prozesse liefert nun einen Cutoff in der p_T -Kurve, siehe Abbildung 9.6. Wie wir zuvor gesehen haben, liegt die typische Energie der produzierten Schwarzen Löcher im Bereich M_f , der dazugehörige Schwarzschildradius im Bereich $1/M_f$, mit einer leichten Dimensionsabhängigkeit, vgl. Gleichung (8.16). Der Cutoff liegt also ebenfalls im Energiebereich M_f und ist für die Anzahl der Dimensionen wenig sensitiv.

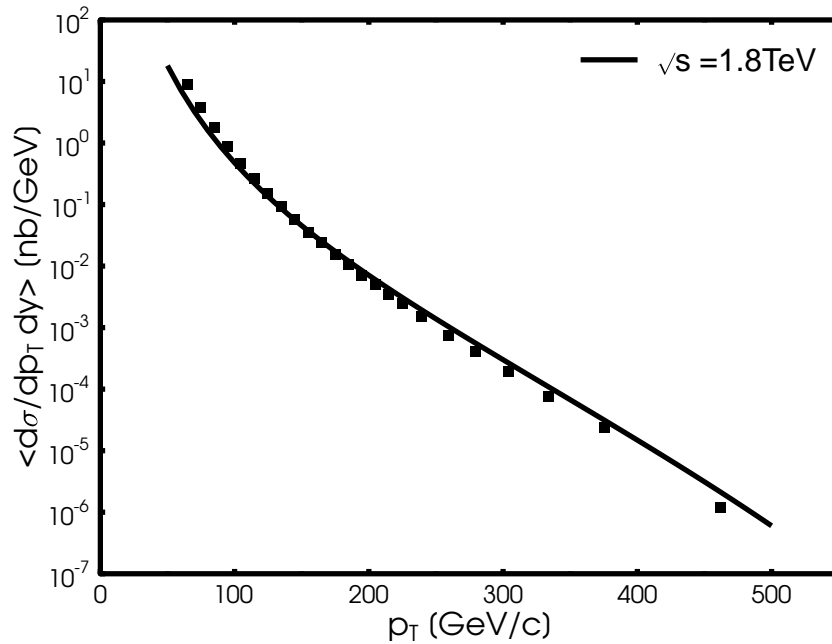


Abbildung 9.5: p_T Spektrum in PQCD-Näherung. Daten für Tevatron, Run II aus [174].

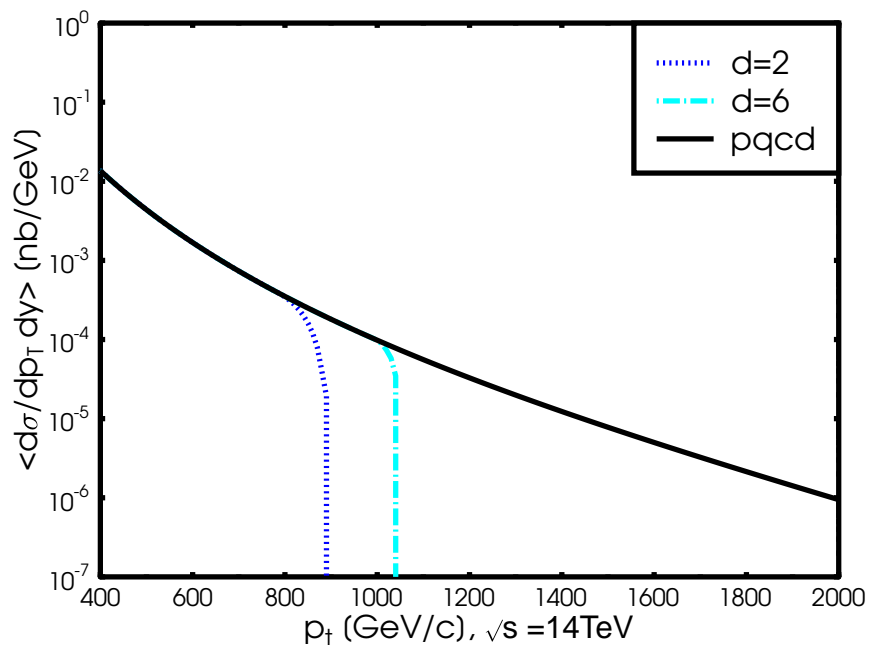


Abbildung 9.6: Die Entstehung Schwarzer Löcher bei Teilchenkollisionen hoher Energie (hier $\sqrt{s} = 14$ TeV) verursacht einem Cutoff des p_T -Spektrums für Jets bei Energien um $M_f = 1$ TeV.

Kapitel 10

Eigenschaften Schwarzer Löcher

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, wie oft ein Schwarzes Loch produziert und welche Auswirkung sein Entstehen haben kann, wollen wir uns nun überlegen, was mit dem Schwarzen Loch weiter geschieht. Dabei knüpfen wir an unsere in Kapitel 3.8 gemachten thermodynamischen Betrachtungen an.

10.1 Strahlung

Wie wir wissen, emittiert ein schwarzes Loch mit der Hawking-Strahlung Teilchen. Durch den Masseverlust verdunstet es dabei. Wir haben in Kapitel 3.8 gesehen, dass für astrophysikalische Objekte diese Verdunstungsrate erstens sehr gering ist und zweitens der Prozess sehr lange dauert. Zu lange, als dass es für uns von Interesse sein könnte. Nun haben wir die berechtigte Hoffnung, dass Extra-Dimensionen einen wesentlichen Einfluss auf die Verdunstung Schwarzer Löcher haben.

Dazu untersuchen wir nun die Evaporationsrate dM/dt eines Schwarzen Loches in einer Raumzeit mit d Extra-Dimensionen. Wie zuvor beschränken wir uns dabei auf den Fall $R_S \ll L$. Wohlbekannt ist aus der Thermodynamik Schwarzer Löcher, dass die Entropie S eines Schwarzen Loches proportional zu seiner Oberfläche \mathcal{A}_D ist. Aus Dimensionsgründen (die Entropie ist dimensionslos) brauchen wir dabei noch den Vorfaktor von M_f^{2+d} .

Um ein exaktes Ergebnis zu erreichen, wollen wir unsere bereits zuvor in Kapitel 3.8 für drei Raumdimensionen gemachten Berechnungen nun für $d + 3$ Dimensionen wiederholen.

Wir erhalten mit (8.17), (8.19) und (3.32) in einer Raumzeit mit Extra Dimensionen für die Temperatur des Schwarzen Loches:

$$T = \frac{1+d}{4\pi} \frac{1}{R_S} . \quad (10.1)$$

Dabei ist die Masseabhängigkeit von R_S über (8.16) gegeben. Integrieren wir den Kehrwert dieser Temperatur über M , um die Entropie zu erhalten (vgl (3.36)). Wir sehen, dass die Masse mit dem Exponenten $1/(d+1)$ eingeht, und erhalten

$$\begin{aligned} S(M) &= \frac{d+1}{d+2} \frac{M}{T} \\ &= 2\pi \frac{d+1}{d+2} (M_f R_S)^{d+2} \quad . \end{aligned} \quad (10.2)$$

Mit dieser Entropie wollen wir nun weiter rechnen.

Da wir uns für Schwarze Löcher mit Massen in der Nähe der neuen Planckmasse interessieren, benutzen wir das mikrokanonische Ensemble. Das Schwarze Loch kann bei diesen Massenverhältnissen nicht als Wärmebad betrachtet werden.

Das Ein- und Vielteilchenspektrum ist uns von (3.44) und (3.46) bekannt und kommt nun wieder zum Einsatz. Wir müssen uns nur überlegen, an welcher Stelle die Dimensionsabhängigkeit ins Spiel kommt. So erhalten wir für Gesamtenergiedichte des Loches, nachdem wir wie zuvor die Substitution $x =: M - j\omega$ vorgenommen haben:

$$\varepsilon = \frac{\Omega_{d+3}}{(2\pi)^{3+d}} e^{-S(M)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{d+4}} \int_0^M e^{S(x)} (M-x)^{3+d} dx \quad . \quad (10.3)$$

Die Reihe ergibt dabei eine ζ -Funktion an der Stelle D (siehe Anhang B). Die zeitliche Änderung der Masse berechnet sich daraus zu

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\Omega_{d+3}^2}{(2\pi)^{d+3}} R_H^{2+d} \zeta(D) e^{-S(M)} \int_0^M (M-x)^{(3+d)} e^{S(x)} dx \quad . \quad (10.4)$$

Implizit gingen in dieser Berechnung Annahmen ein, die wir uns hier noch einmal vor Augen halten wollen. Das Schwarze Loch strahlt kugelsymmetrisch in alle Raumdimensionen ab und nach unserer Rechnung strahlt es zudem nur Bosonen ab. Das Einfügen von Spin-Behafteten Teilchen führt mit viel Aufwand auf eine Aufteilung der Strahlung in verschiedene Teilchen und wir wollen darauf verzichten, dies zu diskutieren (siehe z.B. [33] und dort angegebene Referenzen). Jedoch stellt sich die Frage, ob die Strahlung wirklich gleichmäßig in alle Richtungen emittiert wird. Wäre dies der Fall, ginge der Hauptteil der Strahlung von unserer Brane verloren und könnte nicht direkt beobachtet werden.

Da das Hauptaxiom unserer Theorie über große Extra-Dimensionen darin besteht, dass nur die Gravitonen, bzw. die damit verbundenen Kaluza-Klein-Moden, die Brane verlassen können, hat die Strahlung auf unserer Brane im Gegenteil zum Rest der Raumzeit eine Vielzahl weiterer Emissionsmöglichkeiten – gegeben durch die anderen drei Wechselwirkungen. So können etwa Photonen, die einen

Hauptteil der Strahlung ausmachen, nur auf unserer Brane propagieren. Unter diesen Voraussetzungen wäre es anzunehmen, dass der Großteil der Strahlungsenergie auf unserer Brane verbleibt, siehe dazu auch [175]. Auf der anderen Seite wiegen die Kaluza-Klein-Anregungen die hohe Anzahl der Standardmodell-Teilchen durch ihren großen Phasenraum auf (vgl. Gl. (6.28)). Bei den hier betrachteten Energien fallen die möglichen Emmissionszustände dabei weitaus stärker ins Gewicht [142, 144], die Abstrahlung findet in alle Dimensionen statt, jedoch sind die Kaluza-Klein-Anregungen im Detektor nicht festzustellen.

Die Abbildung 10.1 zeigt die Evaporationsrate (10.4) in $\text{TeV}c/\text{fm}$ als Funktion der Anfangsmasse M des Schwarzen Loches. Im Limes zum kanonischen Fall für große M gehen die Evaporationsraten in den Hawkingschen Fall über. Es ist dann

$$\begin{aligned} \lim_{M \gg M_f} \frac{dM}{dt} &= \mathcal{A}_D \frac{\Omega_{(d+3)}}{(2\pi)^{d+3}} \int_0^\infty \frac{\omega^{3+d} d\omega}{\exp(2\pi T^{-1}\omega) - 1} \\ &= \frac{\Omega_{(d+3)}^2}{(2\pi)^{d+3}} \Gamma(d+4) \zeta(d+4) R_S^{2+d} T^{d+4} . \end{aligned} \quad (10.5)$$

(Siehe dazu auch Anhang B). Mit (10.1) ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{M \gg M_f} \frac{dM}{dt} &= \frac{\Omega_{(d+3)}^2}{(2\pi)^{2d+7}} \Gamma(d+4) \zeta(d+4) R_S^{-2} \\ &\propto M_f^2 \left(\frac{M}{M_f} \right)^{-\frac{2}{d+1}} . \end{aligned} \quad (10.6)$$

Bei großen M fallen die Kurven für steigendes d also langsamer. Wir haben dann die Folgenkette: d größer \Rightarrow Gravitationskraft fällt schneller \Rightarrow Schwarzschild-Radius R_S kleiner \Rightarrow Temperatur höher \Rightarrow Evaporation schneller, also dM/dt größer.

$$\begin{aligned} \lim_{M \ll M_f} \frac{dM}{dt} &= \mathcal{A}_D \frac{\Omega_{(d+3)}}{(2\pi)^{d+3}} \int_0^M \omega^{3+d} d\omega \\ &= \frac{\Omega_{(d+3)}^2}{(2\pi)^{d+3}} R_S^{2+d} \frac{M^{d+4}}{d+4} \\ &\propto M^2 \left(\frac{M}{M_f} \right)^{\frac{(d+2)^2}{d+1}} . \end{aligned} \quad (10.7)$$

Nun ist der von d abhängige Exponent immer > 1 und außerdem $M/M_f < 1$, also steigt die Kurve langsamer für steigende d .

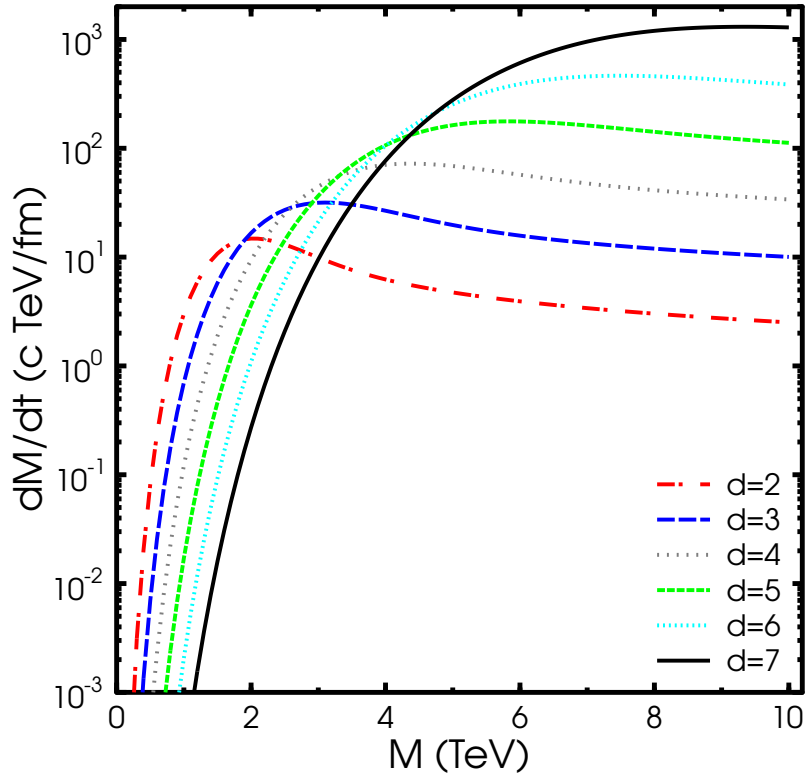


Abbildung 10.1: Die Evaporationsrate in $\text{TeV}c/\text{fm}$ als Funktion der Anfangsmasse des Schwarzen Loches für verschiedene d .

10.2 Lebensdauer

Aus der im vorigen Abschnitt erhaltenen Gleichung (10.4) können wir nun durch Integration die zeitliche Entwicklung der Masse M eines Schwarzen Loches berechnen. Diese Berechnung führen wir numerisch durch. Das Ergebnis ist in Abbildung 10.2 für verschiedene Werte von d dargestellt bei einer Anfangsmasse von $M = 10\text{TeV}$. Man sieht, dass, ausgehend von der Anfangsmasse des Loches, bis etwa zur neuen Planckmasse M_f die Masseabnahme rasch erfolgt, um dann lange Zeit nahezu stabil zu bleiben. Wie erwartet, fällt die Anfangsmasse für kleinere d dabei auf einen niedrigeren Wert, denn die Evaporationsrate ist in diesem Bereich für kleine d höher. In Abbildung (10.2) schliesslich ist die Zerfallsdauer von 10 TeV bis zu M_f angegeben. Die Anzahl der Extra-Dimensionen hat hier einen Ein-

fluss, der einige Größenordnungen ausmachen kann und damit Rückschlüsse auf diesen Parameter unseres Modells zulassen würde.

Da die Quantengravitationseffekte unterhalb der Planckskala nicht bekannt sind, müssen wir mit unseren Ergebnissen vorsichtig umgehen. Glücklicherweise verdunstet M ab M_f sehr langsam und bleibt noch lange im Bereich von der Größenordnung M_f . Unsere Berechnungen zeigen, dass ein Schwarzes Loch mit $M \sim \text{TeV}$ und $d > 5$ eine Lebensdauer der Größenordnung von mindestens 100 fm/c hat. Zumal kann der Gültigkeitsbereich der statistischen Mechanik weiter reichen, über den Gültigkeitsbereich der klassischen allgemeinen Relativitätstheorie hinaus. In diesem Falle lässt sich die Aussage machen, dass das Schwarze Loch im Endstadium der Verdampfung einen quasi-stabilen Zustand gelangt.

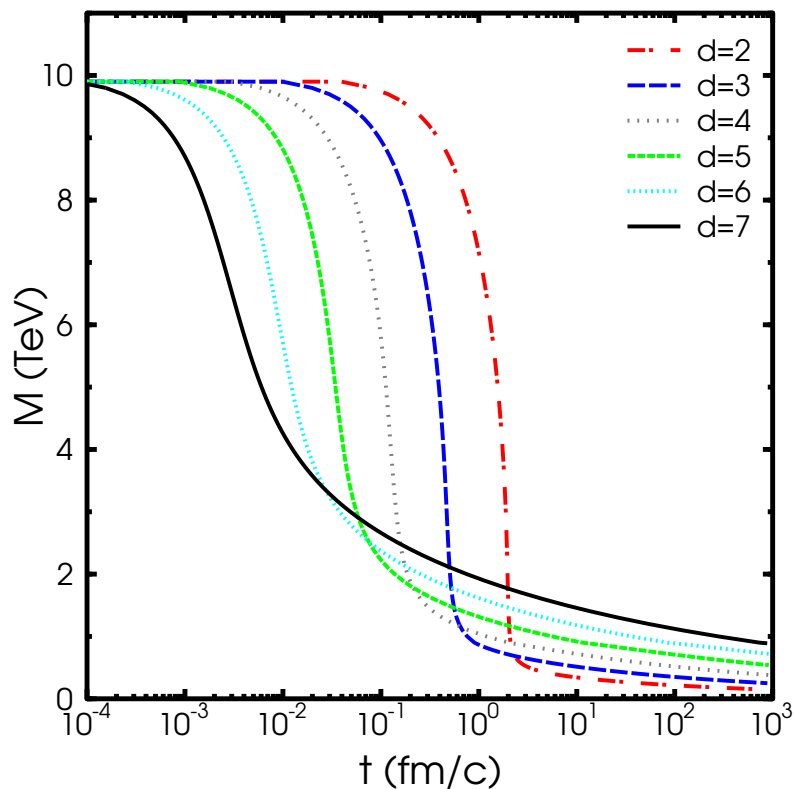


Abbildung 10.2: Zeitentwicklung der Masse des Schwarzen Loches für verschiedene d .

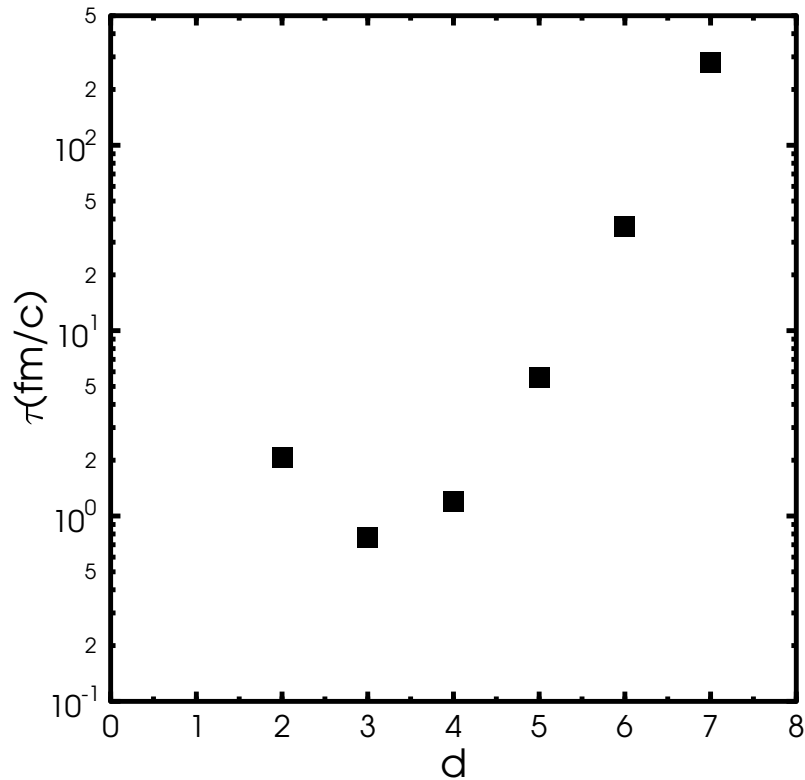


Abbildung 10.3: Lebenszeiten der Schwarzen Löcher beim Abfall der Masse von 10 TeV auf M_f für verschiedene d .

Abschließend wollen wir noch anmerken, dass die Masseentwicklung des Schwarzen Loches aller Wahrscheinlichkeit nach unstetig ist und nicht so gleichmäßig, wie unsere Abbildungen suggerieren. Tatsächlich steht zu vermuten, dass das Loch nur einige wenige Teilchen produziert, bis es schließlich in ein letztes Teilchenpaar (Impulserhaltung) zerfällt.

10.3 Relics

Die Untersuchungen des vorangegangenen Abschnittes werfen die Frage nach dem Endzustand der Schwarzen Löcher auf. Das Endstadium der Verdampfung Schwarzer Löcher ist ein nach wie vor ungelöstes Problem. Wenn die Masse des

Schwarzen Loches unter die Planck-Masse gefallen ist, führt jeder Ansatz, diesen Vorgang zu untersuchen, unausweichlich in Richtung Quantengravitation und damit in ein bisher unbekanntes Gebiet. Dieses Problem ist eng verknüpft mit dem Problem des Informationsverlustes [176].

Information, die in einem Anfangszustand enthalten ist, der zu einem Schwarzen Loch kollabiert, oder auch solche, die hineinfällt, ist zunächst hinter dem Horizont verborgen. Der Inhalt des Schwarzen Loches wird nun unabhängig von seinen anfänglichen Eigenschaften in thermische Strahlung umgesetzt, die außer ihrer Temperatur keine Information trägt. Die Strahlung des Schwarzen Loches ist allein abhängig von der Geometrie außerhalb des Horizontes und die Struktur der kollabierten Materie kann die Natur der Strahlung nicht beeinflussen [177]. Durch diese Umwandlung der kollabierten Materie kann das in der Quantenmechanik grundlegende Prinzip der Unitarität verletzt werden, wenn der Anfangszustand ein reiner Zustand war und sich nun vollständig in thermische Strahlung – also einen gemischten Zustand – umwandelt [33, 176, 177].

Solange das Schwarze Loch vorhanden ist, mag die Information nicht sichtbar, aber vorhanden sein. Was passiert jedoch im Endstadium der Verdampfung? Folgende drei Möglichkeiten stehen uns offen:

1. Die Information geht verloren und die Prozessgleichungen der Quantenmechanik sind daher inkorrekt oder unvollständig.
2. Die Information wird durch einen unbekanntem Vorgang mit der Strahlung abgegeben.
3. Ein stabiler Rest des Schwarzen Loches verbleibt und die Information ist hinter dem Horizont eingeschlossen.

Der erste Punkt schafft aus den oben erwähnten Gründen mehr Probleme als er löst. Punkt zwei ist ein in der Literatur intensiv diskutierter Ansatz [178, 179, 180, 181, 182, 183], trotzdem ist es bisher unklar, in welchem Wege die Information entkommen soll. Als theoretisch akzeptabelster Ausweg ist daher bis heute die Existenz von stabilen Überresten von Schwarzen Löchern, sogenannte »relics« [184, 185, 186, 187] anzunehmen¹.

Der offensichtlichste Grund, der für das Verbleiben von relics spricht ist die Unschärferelation $\Delta p \Delta x > 1/2$. Wie wir wissen, ist der Schwarzschild-Radius eines Schwarzen Loches mit Planck-Masse ungefähr von der Größenordnung Planck-Länge. Die Planck-Länge ist aber gerade die Wellenlänge ist, die zu einem Teilchen von Planck-Masse gehört. Wir sehen also, dass wir bei weiter sinkender Masse $M < M_f$ und damit schrumpfendem Schwarzschild-Radius $R_S \approx M/M_f^2$, eine

¹Diese »Black Hole Relics« sind auch unter den Namen »Friedmons« oder »Maximons« diskutiert worden.

höhere Energie auf ein kleineres Raumgebiet konzentrieren – ein Gebiet, das nun kleiner werden kann als die entsprechende Wellenlänge nach dem Unschärfeprinzip erlaubt $MR_S < (M/M_f)^2$ [188]. Aus diesem Grund schlug Zel'dovich 1984 vor, dass Schwarze Löcher mit Massen unterhalb der Planck-Masse als stabile elementare Teilchen betrachtet werden sollten [189] (die sogenannten »Maximons«).

Ein weiteres Argument ist, dass eine Korrektur der Lagrangedichte der ART mit in der Krümmung quadratischen Termen einen Abfall der Hawking-Temperatur auf null mit sich bringt [190, 191]; ein Ergebnis, dass sich auch auf Raumzeiten mit zusätzlichen raumartigen Dimensionen ausweiten lässt [192] und von Untersuchungen im Niederenergiebereich der Stringtheorie bestätigt wird [193, 194]. In allen diesen Fällen stoppt die Verdunstung des Loches bei einem endlichen Massewert, der im Bereich von einer bis ca. 100-facher Planck-Masse liegen kann.

Eine Vielzahl weiterer Gründe für die Existenz von relics wurden in den vergangenen Jahrzehnten vorgeschlagen. So stabilisieren sich verdunstende Schwarze Löcher, wenn sie eine axionische Ladung tragen [195], die Temperatur der Strahlung durch »quantum hair« (die Strahlung kann außer der elektrischen Ladung und dem Spin weitere Quantenzahlen tragen) [196] oder magnetische Monopole modifiziert wird [197]. Die Ankopplung eines Dilatonfeldes an die Gravitationstheorie liefert ebenso relics, deren detaillierte Eigenschaften von der Dimension der Raumzeit abhängen [198, 199].

Wir wollen uns nun ein sehr einfaches Modell ansehen, indem wir annehmen, dass das Spektrum der emittierten Strahlung durch eine geometrische Quantisierung diskretisiert wird. Dabei halten wir uns vor Augen, dass die abgegebene Strahlung des Schwarzen Loches aus einem immer kleineren Raumbereich kommen muss und dessen endliche Größe sich irgendwann in den möglichen Energiewerten widerspiegeln wird.

Bei der Herleitung der Strahlung des Schwarzen Loches [51, 52] zeigt sich, dass das $d + 3$ -dimensionale Schwarze Loch sich wie ein $d + 3$ -dimensionaler Schwarzkörper verhält und ein thermisches Spektrum besitzt². Dabei wird die Wellengleichung wie üblich mit einem Separationsansatz in eine Amplitude $\propto 1/r^{d+1}$, einen winkelabhängigen Anteil und einen radialen Anteil aufgespalten. Das Spektrum dieser kann nun aufgrund der Randbedingungen nur noch die diskreten Impulswerte k_l annehmen

$$k_l = \frac{\pi l}{R_S} \quad (10.8)$$

und das neue Mehrteilchenspektrum (3.46) wird entsprechend ersetzt durch ein

²Diese Analogie aus der Geometrischen Optic kann noch weiter geführt werden siehe z.B. [200].

Spektrum für die dazugehörigen Energieschritte $\omega_l = l\Delta\omega$ mit $\Delta\omega = \pi/R_S$

$$n(l) = \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M}{l\Delta\omega} \rfloor} \frac{\exp[S(M - j l \Delta\omega)]}{\exp[S(M)]} \Theta(M - l\Delta\omega) . \quad (10.9)$$

Die angefügte Θ -Funktion sorgt dabei für ein Abbrechen des Spektrums, wenn sogar die Energie von einem Teilchen ($j = 1$) schon die Gesamtmasse des Schwarzen Loches übersteigt. Wie zuvor leiten wir nun aus dieser Formel die Energiedichte her. Statt einer Integration haben wir nun eine Summation über den Impulsraum vorzunehmen

$$\varepsilon = \frac{\Omega_{(d+3)}}{(2\pi)^{3+d}} \Delta\omega \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{M}{\Delta\omega} \rfloor} n(l) (l\Delta\omega)^{d+3} . \quad (10.10)$$

Aus dieser Energiedichte erhalten wir wiederum eine Evaporationsrate. Wie man in Gleichung (10.10) sehr schön sieht, geht diese Energiedichte im Limes großer Massen $M \gg M_f$ in den kontinuierlichen Fall über. Es geht dann $\Delta\omega \rightarrow 0$ und die Summe ergibt wieder ein Integral.

Die Verdunstungsrate mit dem nun geometrisch quantisierten Spektrum ist in Abb. 10.4 im Vergleich zum vorher diskutierten Fall des kontinuierlichen Spektrums (Abb. 10.1) dargestellt..

Mit wachsendem M werden die Schritte zwischen den Energieniveaus kleiner. Sobald es möglich ist, ein zusätzliches Niveau zu besetzen, hat die Verdunstungsrate einen Sprung. Da in dem Massebereich, für den wir uns interessieren, $R_H \approx 1/M_f$ ist, treten diese Schritte etwa in Abständen $\approx \pi \text{TeV}$ auf, wobei der exakte Wert über die Formel für den Schwarzschild-Radius von der Anzahl der Dimensionen abhängt.

Die Verdunstung wird nun in quantisierten Schritten vor sich gehen und bricht ab, wenn schon das niedrigste mögliche Energieniveau eine Energie bräuchte, die über der Gesamtmasse des Schwarzen Loches liegt. Die Verdunstung stoppt also bei einem endlichen Massewert. Ein relic verbleibt.

Nehmen wir an, wir haben ein relic mit maximal möglicher stabiler Restmasse – die Masse bei der das niedrigste Energieniveau $\Delta\omega$ gerade über der Masse M liegt. Diese Masse wird im Bereich $\approx 3 \text{ TeV}$ liegen. Wenn die Masse des Schwarzen Loches nur ein kleines bisschen höher ist und damit der Radius ein kleines bisschen zu hoch, dann ist es dem Schwarzen Loch möglich, ein Teilchen zu emittieren, das nahezu die gesamte Masse mit sich nimmt und ein relic mit einer Masse unterhalb der Plack-Masse verbleibt. Da wir über diese Objekte keine definitiven Aussagen machen können, wollen wir uns darauf konzentrieren, dass ein wesentlicher Anteil der Schwarzen Löcher als relics über Planck-Masse endet.

Es ist interessant, nach den möglichen Endmassen M_e zu fragen, die aus einer anfänglichen Masse M_i entstehen können. Dieser Zusammenhang ist in Abbil-

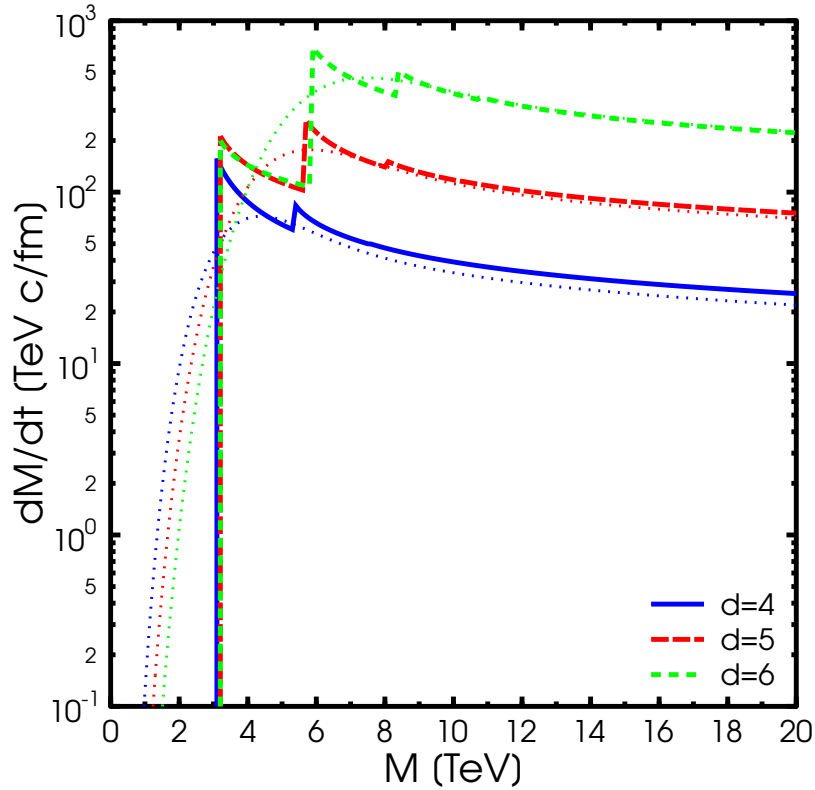


Abbildung 10.4: Evaporationsrate mit diskretem Energiespektrum im Vergleich zum kontinuierlichen Fall.

dung 10.5 für den Fall $d = 3$ dargestellt. Der wahrscheinliche Fall der Verdunstung ist die jeweilige Emission des Teilchens mit der geringsten Energie und ist in den durchgezogenen Linien festgehalten. Wie man sieht, sind Schwarze Löcher mit $M_i = M_e < \approx \pi M_f$ stabil. Die verschiedenen gepunkteten bzw. gestrichelten Linien kommen durch die Abgabe von Quanten höherer Energieniveaus zustande, die bei wachsenden Massen besetzt werden können. Bei weiter anwachsenden Massen $M \gg M_f$ steigt die Anzahl der zusätzlichen Kurven und ihr Abstand wird geringer, im Limes ist der gesamte Bereich $M_i \in [0, \Delta\omega]$ ausgefüllt.

Da wir zuvor gesehen haben, dass die am LHC produzierten Schwarzen Löcher hauptsächlich im Massebereich $\approx M_f$ liegen, sind sie zum großen Teil stabil.

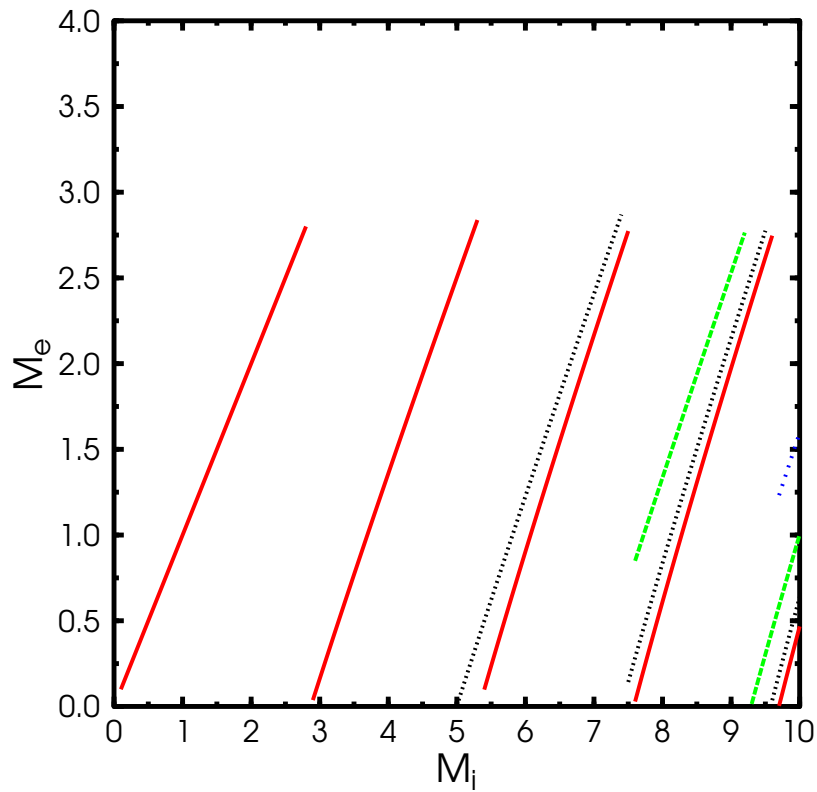


Abbildung 10.5: Mögliche Endmassen der relics nach Evaporation für den Fall von $d = 3$ kompakten Extra Dimensionen. Die durchgezogenen Linien stellen den wahrscheinlichsten Fall der Emission der Grundzustandsenergie dar, die anderen Linien gehören zu möglichen Emissionen höherer Anregungen.

Nachweis von Relics

Wie können wir nun versuchen, diese relics von Schwarzen Löchern nachzuweisen, sollte unser Modell der LXDs sich als eine nützliche Beschreibung für die Physik hoher Energien, etwa am LHC herausstellen?

Wie schon zuvor angemerkt, haben die relics eine ungewöhnliche Eigenschaft. Ein gewisser Anteil dieser Objekte benötigt nur eine geringe Energie ω_0 , um die Abgabe einer Energie der Größenordnung TeV zu ermöglichen. Da die relics im Massebereich $[0, 3M_f]$ etwa gleichverteilt sind, ist dieser Anteil gegeben durch $\omega_0/\Delta\omega$. Unglücklicherweise ist der Wirkungsquerschnitt der Schwarzen Löcher dermaßen gering, dass der Prozess des Einfangs extrem unwahrscheinlich ist.

Wir haben in der hier vorliegenden Arbeit elektrisch geladene Schwarze Löcher nicht weiter untersucht, da die allgemein relativistische Modifikationen durch Ladungen der Größenordnung e für Massen im Bereich $\approx M_f$ keinen wesentlichen Beitrag liefern. Dennoch wird der Großteil der in Parton-Parton Kollisionen erzeugten Schwarzen Löchern eine elektrische Ladung tragen und kann dadurch mit anderen geladenen Teilchen wechselwirken. Insbesondere wird das Schwarze Loch versuchen, seine Ladung durch Einfang von Elektronen (bzw. Positronen) zu neutralisieren. Bereits dieser geringe Masseanwachs kann nun zum Zerfall führen und die folgende Energieabgabe sollte ein klares Signal im TeV-Bereich des p_T -Spectrums ergeben.

Die Existenz von relics und ihre Strahlungscharakteristik setzt außerdem Einschränkungen an die Entstehung Primordialer Schwarzer Löcher im frühen Universum, die in einer folgenden Arbeit untersucht werden soll [206].

10.4 Schlussworte

In Anbetracht der Tatsache, dass Schwarze Löcher dafür bekannt sind, dass sie ganze Galaxienzentren verschlucken und dabei wachsen, ist es naheliegend, die Frage zu stellen, ob unsere winzigen, im Labor erzeugten Schwarzen Löcher nicht ebenso Masse ansaugen, verschlucken und dabei wachsen würden, bis alles Erreichbare hinter ihrem Horizont verschwunden ist.

Diese Frage lässt sich glücklicherweise eindeutig mit einem »Nein« beantworten. Schwarze Löcher der hier betrachteten Masse besitzen immer noch die zu ihrer Masse gehörige Gravitationskraft. Selbst bei den für einen Beschleuniger gigantischen Energien im Bereich TeV ist das eine im Vergleich zu irdischen Maßstäben winzige Kraft. Die Gravitationskraft, die auf Elektronen im Orbit um den Atomkern wirkt, ist noch immer um einen Faktor $\approx 10^{20}$ kleiner, als die dort wirkende elektromagnetische Kraft. Daher sind auch keine Modifikationen in den Energieniveaus zu erwarten.

Das Schwarze Loch zeichnet sich nicht durch seine Masseanziehung aus, sondern durch die Existenz seines Horizontes. Rein aus statistischen Gründen kann es von Zeit zu Zeit passieren, dass ein Teilchen auf das Schwarze Loch stößt und dann verschwindet, auch ohne angezogen zu werden. Dadurch kann die Masse des Schwarzen Loches wachsen. Je dichter das Medium ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen auf den Horizont trifft. Es zeigt sich jedoch bei näherer Untersuchung [203], dass diese Masseaufnahmen in Medien von Dichten, die auf der Erde vorhanden sind oder erzeugt werden können, zu gering ist. Sie reicht bei weitem nicht aus, um die entgegenwirkende Verdunstung auszugleichen oder gar zu übertreffen. Selbst die hohen Materiedichten, die in Neutronensternen angenommen werden können, sind nicht ausreichend um ein Wachstum der Schwarzen Löcher hervorzurufen [203]. Sollte also ein Teilchen in das Schwarze Loch fallen, würde der erfolgte Massezuwachs per Evaporation wieder abgegeben.

Kapitel 11

Zusammenfassung

Wir haben uns in dieser Arbeit der möglichen Produktion Schwarzer Löcher in hochenergetischen Teilchenkollisionen unter Annahme einer Raumzeit mit großen Extra-Dimensionen gewidmet.

Die Produktionsraten, die bei einer neuen fundamentalen Skala im Bereich $M_f \approx 1$ TeV zu erwarten sind, liegen für den LHC in der Größenordnung von $\approx 10^8$ Schwarzen Löchern pro Jahr. Diese hohe Anzahl begründet das Interesse an den Eigenschaften der produzierten Schwarzen Löchern und wirft die Frage auf, wie diese Objekte beobachtet werden können.

Bei der Untersuchung der Eigenschaften dieser Schwarzen Löcher haben wir festgestellt, dass das Entstehen Schwarzer Löcher ab einer c.o.m.-Energie im Bereich der neuen Planck-Masse zu einer raschen Unterdrückung hochenergetischer Jets, wie sie in pp -Kollisionen entstehen, führt. Dies ist ein klares Signal und leicht zu beobachten.

Unter Ansetzen des Mikrokanonischen Ensembles haben wir die Zerfallsrate der Schwarzen Löcher und ihre Lebensdauer berechnet. Es zeigt sich, dass diese Lebensdauer hoch genug ist, um ein zeitlich deutlich verzögertes Signal zu erhalten. Nimmt man an, dass die statistische Mechanik bis zur Größenordnung M_f gültig bleibt, so gelangen die Schwarzen Löcher im Zuge ihrer Verdunstung in einen quasi-stabilen Zustand und ein Rest verbleibt. Die Lebenszeit ist von der Anzahl der Dimensionen abhängig und lässt so Rückschlüsse auf diesen Parameter zu. Im Falle ($M_f \sim \text{TeV}$, $d > 5$) liegt sie für Energien von ≈ 10 TeV in der Größenordnung 100 fm/c.

Eine geometrische Quantisierung der Strahlung legt außerdem nahe, dass die Schwarzen Löcher nicht restlos verdampfen können, sondern ein stabiler Überrest verbleibt.

Diese Ergebnisse sind in [202, 203, 205] veröffentlicht worden.

Anhang A

Die n -dimensionale Poissongleichung lautet:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}')_n = \Omega_{(n)}c \delta(\mathbf{r}') ,$$

wobei \mathbf{r}' der Ortsvektor ist und c eine Konstante, die durch das betrachtete Kraftfeld gegeben ist. $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ ist der n -dimensionale Laplace-Operator. $\Omega_{(n)}$ ist die Oberfläche der n -dimensionalen Einheitskugel

$$\Omega_{(n)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} .$$

Das gesamte Problem ist rotationsinvariant und so wird auch die Lösung für $\Phi(r')_n$ rotationsinvariant sein. Wir gehen daher in Kugelkoordinaten mit r' als Radiuskoordinate und $n - 1$ Winkelkoordinaten über und erhalten

$$\Delta\Phi(r')_n = \Omega_{(n)}c\delta(\mathbf{r}') .$$

Wir integrieren nun weiter beidseitig über eine n -dimensionale Kugel K vom Radius r und benutzen dabei den Gausschen Satz:

$$\int_{\partial K} d\Omega \hat{r}' \cdot \nabla\Phi(r')_n = \Omega_{(n)}c ,$$

dabei ist ∂K die Oberfläche der Kugel mit Radius r , $d\Omega$ ihr Raumwinkelement und \hat{r}' ihr Normaleneinheitsvektor, der in r' -Richtung zeigt. Da $\Phi(r')_n$ nicht von den Winkelvariablen abhängt, ist $\nabla\Phi(r')_n = \hat{r}'\partial_{r'}\Phi(r')_n$.

Einsetzen ergibt unter Berücksichtigung von $\hat{r}' \cdot \hat{r}' = 1$

$$\int_{\partial K} d\Omega \partial_{r'}\Phi(r')_n = \Omega_{(n)}c .$$

Nun ist $\partial_{r'}\Phi(r')_n$ auf der Oberfläche der Kugel aber konstant mit dem Wert $\partial_r\Phi(r)_n$, kann also aus dem Integral gezogen werden.

$$\partial_r\Phi(r)_n \int_{\partial K} d\Omega = \Omega_{(n)}c .$$

Das verbleibende Integral ist gerade die Oberfläche der n -dimensionalen Kugel mit Radius r . Oder auch $r^{n-1}\Omega(n)$, dieser Faktor kürzt sich also auf beiden Seiten der Gleichung weg. Zusammen ergibt sich

$$\partial_r \Phi(r)_n = \frac{c}{r^{n-1}} .$$

Eine weitere Integration über r liefert schließlich (bis auf additive Konstanten)

$$\Phi(r)_n = -\frac{c}{r^{n-2}} \frac{1}{(n-2)} ,$$

für $n > 2$. Für drei Raumdimensionen ergibt sich dabei das aus der Elektrodynamik ($c = q_1 q_2$) und Newtonschen Gravitation ($c = G m_1 m_2$) bekannte Ergebnis

$$\Phi(r)_3 = -\frac{c}{r} .$$

Anhang B

Die Riemannsche ζ -Funktion ist eine komplexwertige Funktion und ist definiert als [207]:

$$\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad , \quad \operatorname{Re}(z) > 1 \quad .$$

Sie ist im Definitionsgebiet wohldefiniert, stetig und holomorph. Eins der bekanntesten ungelösten Rätsel der Mathematik ist wohl die Lage der Nullstellen der ζ -Funktion, weshalb wir sie hier aus naheliegenden Gründen nicht angeben.

Einige Werte, die in dieser Arbeit teilweise benutzt werden, sind:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645 \quad , \quad \zeta(3) \approx 1,202$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1,082 \quad , \quad \zeta(5) \approx 1,037$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \approx 1,017 \quad , \quad \zeta(7) \approx 1,008$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450} \approx 1,004 \quad , \quad \zeta(9) \approx 1,002$$

Zwischen der ζ -Funktion und der Γ -Funktion besteht folgender Zusammenhang:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{e^{x\mu} - 1} = \mu^{-\nu} \Gamma(\nu) \zeta(\nu) \quad .$$

Damit klärt sich auch das Rätsel um den Vorfaktor im Stefan-Boltzmann-Gesetz, das wir seit der Anfängervorlesung mit uns rumtragen. Für $\mu = 1/T$ und $\nu = 4$ ergibt sich:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{x/T} - 1} = T^4 \Gamma(4) \zeta(4) = T^4 \frac{\pi^4}{15} \quad .$$

Anhang C

Die »Besselfunktionen« [111, 208] sind partikuläre Lösungen der sogenannten Besselschen Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0$$

für ganzzahliges $n \geq 0$. Sie werden in der Regel als $J_n(x)$ bezeichnet und besitzen die Reihenentwicklung

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} .$$

Die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung für beliebige n hat dann die Form

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$$

mit zwei Konstanten Koeffizienten C_1 und C_2 . Dabei erhält man für ganzzahlige n durch Ersetzen von n mit $-n$ in der obigen Reihenentwicklung. Es gilt in diesem Falle $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Für nicht ganzzahlige n ist J_{-n} durch die Besselsche Funktion zweiter Gattung oder auch »Webersche Funktion« $Y_n(x)$ zu ersetzen

$$Y_n(x) = \lim_{m \rightarrow n} \frac{J_m(x) \cos(m\pi) - J_{-m}(x)}{\sin(mx)} .$$

Für die Besselschen Funktionen gelten die Relationen

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) &= \frac{2n}{x} J_n(x) \\ \frac{d}{dx} J_n(x) &= -\frac{n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) . \end{aligned}$$

Die gleichen Formeln gelten auch für die Weberschen Funktionen $Y_n(x)$.

Für große Werte von x ergeben sich die folgenden asymptotischen Entwicklungen

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{x} \right) \right] .$$

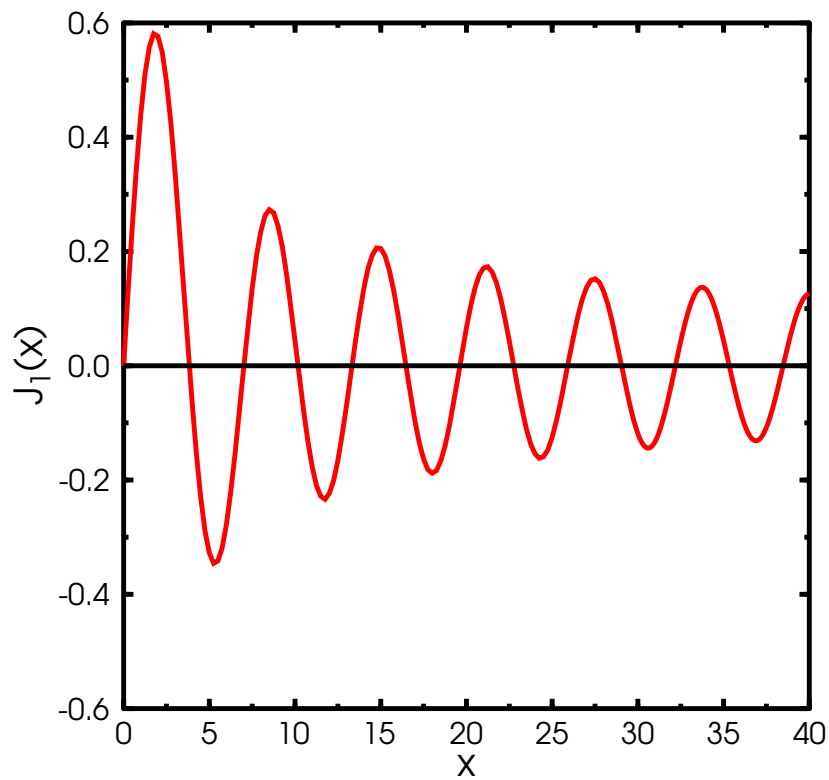


Abbildung 1: Die erste Besselsche Funktion. Das Massenspektrum im Randall-Sundrum-Modell wird durch die Lage ihrer Nullstellen bestimmt.

Literaturverzeichnis

Kapitel 1

- [1] J. Polchinski, »*String Theory I & II*« Cambridge University Press (Cambridge, 1998).
- [2] P. Horava & E. Witten, »*Eleven-Dimensional Supergravity on a Manifold with Boundary*« **B 475**, 94-114 (1996) [hep-th/9603142].
- [3] P. Horava & E. Witten, »*Heterotic and Type I String Dynamics from Eleven Dimensions*« Nucl. Phys. **B 460**, 506-524 (1996) [hep-th/9510209].
- [4] I. Antoniadis, »*A Possible new Dimension at a few TeV*«, Phys. Lett. **B 246**, 377-384 (1990).
- [5] I. Antoniadis & M. Quiros, »*Large radii and string unification*«, Phys. Lett. **B 392**, 61 (1997) [hep-th/9609209].
- [6] K. R. Dienes, E. Dudas & T. Gherghetta, »*Grand Unification at Intermediate Mass Scales through Extra Dimensions*«, Nucl. Phys. **B537** 47 (1999) [hep-ph/9806292].

Kapitel 2

- [7] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, »*Gravitation*«, W. H. Freeman & Company (New York, 1973).
- [8] S. Weinberg, »*Gravitation and Cosmology*«, John Wiley & Sons, (1972).
- [9] R. U. Sexl & H. K. Urbantke, »*Gravitation Und Kosmologie*«, Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage (1995).
- [10] R. M. Wald, »*General Relativity*«, Chicago Lectures in Physics (Chicago, 1984).
- [11] J. Baez & J. P. Munian, »*Gauge Fields, Knots and Gravity*«, World Scientific (1994).

- [12] K. Schwarzschild »Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie« aus den »Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin«, 189-196 (1916).
- [13] Freedman, Wendy L. et al., »Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant«, The Astrophysical Journal **553** 47-72 (2001).
- [14] S. Hawking & W. Israel »General Relativity. An Einstein Centenary Survey«, Cambridge University Press (1979).
- [15] T. Damour »General Relativity and Experiment: A Brief Review.« Class. Quant. Grav. **9**, 55-60 (1992).
- [16] C. M. Will »The Confrontation between General Relativity and Experiment« Living Rev.Rel. **4**, 4 (2001), gr-qc/0103036.
- [17] GAIA - <http://astro.estec.esa.nl/GAIA/>.
- [18] P. G. Roll, R. Krotkov & R. H. Dicke »The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass«, Ann. Phys. (N.Y.), **26**, 442-517 (1964).
- [19] R. V. Pound & J. L. Snider, Phys. Rev. **140B**, 788 (1965).
- [20] R. F. C. Vessot, M. W. Levine, E. M. Mattison, E. L. Blomberg, T. E. Hoffman, G. U. Nystrom, B. F. Farrel, R. Decher, P. B. Eby, C. R. Baugher, J. W. Watts, D. L. Teuber & F. D. Wills, »Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser« Phys. Rev. Lett. **45** 2081-2084 (1980).
- [21] I. I. Shapiro, »Fourth Test of General Relativity«, Phys. Rev. Lett. **13** 789-791 (1964).
- [22] I. I. Shapiro, M. E. Ash, R. P. Ingalls & W. B. Smith »Fourth Test of General Relativity: New Radar Result«, Phys. Rev. Lett. **26** 1132 (1971).
- [23] J. H. Taylor, L. A. Fowler & P. M. McCulloch Nature **277** 437 (1979).
- [24] LIGO – Laser Interferometer Gravitational Wave – Observatory <http://www.ligo.caltech.edu>
- [25] VIRGO – <http://www.virgo.infn.it/>
- [26] GEO 600, Hannover, <http://www.geo600.uni-hannover.de>
- [27] ACIGA – Australian Consortium for Interferometric Gravitational Astronomy <http://www.anu.edu.au/Physics/ACIGA/>
- [28] TAMA <http://tamago.mtk.nao.ac.jp/>
- [29] LISA – Laser Interferometer Space - Antenna <http://lisa.jpl.nasa.gov>

- [30] H. Thirring & J. Lensing, Phys. Z. **19**, 156 (1918).
- [31] Gravity Probe B <http://einstein.stanford.edu/> .

Kapitel 3

- [32] S. Hossenfelder »*Teilchenerzeugung in Gravitationsfeldern: Die expandierende Masseschale*«, zu finden unter <http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~hossi>
- [33] I. D. Novikov & V. P. Frolov, »*Black Hole Physics*«, Kluver Academic Publishers (1998).
- [34] S. Hawking & G. F. R. Ellis, »*The Large Scale Structure Of Space-Time*«, Cambridge University Press (1973).
- [35] R. P. Kerr & A. Schild, »*A new Class of Solutions of the Einstein Field Equations*« in »*Proceedings of the Galileo Galilei Centenary Meeting on General Relativity, Problems and Gravitational Waves*« Hrsg. G. Barbara, Comitato Nazionale per le Manifestazione Celebrative, Florence, 222-233 (1963).
- [36] R. P. Kerr, Phys. Rev. Lett. **11** 237 (1963).
- [37] G. Nordström, »*On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory*«, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20**, 1238-1245, (1918).
- [38] H. Reissner, »*Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach Einsteinschen Theorie*«, Ann. Phys. **59**, 106-120, (1916).
- [39] G. Brown & H. E. Bethe, »*A Scenario for a Large Number of Low Mass Black Holes in the Galaxy*«, Astrophys. J., **423**, 659 (1994).
- [40] M. J. Rees »*Astrophysical Evidence for Black Holes*« [astro-ph/9701161].
- [41] J. E. McClintock, »*Frontiers Of X-ray Astronomy*«, Hrsg: Y. Tanaka & K. Koyama, Universal Academic Press (Tokyo, 1992).
- [42] A. M. Cherepashchuk, Russian Physics - Uspekhi, **39**, 759 (1996).
- [43] A. Celotti, J. C. Miller & D. W. Sciama »*Astrophysical Evidence for the Existence of Black Holes*«, Class. Quant. Grav. **16** A3 (1999) , [astro-ph/9912186]
- [44] R. Genzel & A. Eckart, Phys. Bl. **54** Nr.1 (1998).
- [45] A. Ghez, E. Becklin, M. Morris, B. Klein, »*High Proper Motion Stars In The Vicinity Of SgrA* : Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of our Galaxy*«, Ap. J. **509**, 678 (1998).

- [46] J. Kormendy, »*The Nearest Active Galaxies*,« (Hrsg: J. E. Beckmann, H. Netzer & L. Colina), Consejo Superior de Investigaciones Cientificas (Madrid, 1993).
- [47] R. P. van der Marel, »*Highlights of Cosmology 10*«, Hrsg: I. Appenzeller (1995).
- [48] Ya. B. Zel'Dovich & I. D. Novikov, *Astr. Zh.* 43, 758 (1967).
- [49] B. J. Carr & S. W. Hawking, *Mon. Not. RAS*, 168, 399 (1974).
- [50] F. E. Halzen, J. H. MacGibbon & T. C. Weekers, *Nature* 353, 807 (1991).
- [51] S. W. Hawking, »*Particle Creation by Black Holes*« *Comm. Math. Phys.* 43, 199-220 (1975).
- [52] S. W. Hawking »*Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse*«, *Phys. Rev. D* 14, 2460-2473 (1976).
- [53] N. D. Birell & P. C. W. Davies, »*Quantum Fields in Curved Space*«, Cambridge University Press (Cambridge, 1982).

Kapitel 4

- [54] J. van Dongen, »*Einstein and the Kaluza-Klein Particle*«, gr-qc/0009087.
- [55] T. Kaluza, *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl.*, 966 (1921).
- [56] O. Klein, »*Quantum theory and five dimensional theory of relativity*«, *Z. Phys.* 37, 895 (1926).
- [57] M. Y. Thiry, »*Les equations de la theorie unitaire de Kaluza*« *Comptes Rend. Acad. Sci. (Paris)* 247 (1958) 216.
- [58] R. Kerner, »*Generalisation of the Kaluza-Klein theory for an arbitray non-abelian gauge group*« *Ann. Inst. Henri Poincare*, 9, 143-152 (1968).

Kapitel 5

- [59] Y. A. Kubyshin, »*Models with Extra Dimensions and Their Phenomenology*, [hep-ph/0111027].
- [60] V. A. Rubakov, »*Large and infinite Extra Dimensions*«, *Phys. Usp.* **44** 871-893 (2001), [hep-ph/0104152].

Kapitel 6

- [61] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali, »*The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeters*« Phys. Lett. B **429**, 263-272 (1998) [hep-ph/9803315].
- [62] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali, »*New Dimensions at a Millimeter to a Fermi and Superstrings at a TeV*« Phys. Lett. B **436**, 257-263 (1998) [hep-ph/9804398].
- [63] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & G. Dvali, »*Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Sub-Millimeter Dimensions and TeV Scale Quantum Gravity*« Phys. Rev. D **59**, 086004 (1999) [hep-ph/9807344].
- [64] R. Casadio & B. Harms, »*Black Hole Evaporation and Compact Extra Dimensions*«, Phys.Rev. D **64**, 024016 (2001), [hep-th/0101154].
- [65] R. Casadio & B. Harms, »*Black Hole Evaporation and Large Extra Dimensions*« Phys.Lett. B **487** 209-214 (2000) [hep-th/0004004].
- [66] G. Dvali, G. Gabadadze & M. Porrati »*On Sub-Millimeter Forces From Extra Dimensions*«, Mod. Phys. Lett. A **15** 1717-1726 (2000) [hep-ph/0007211].
- [67] J. Bijnens & M. Maul »*LXD In Rare Decays*«, JHEP 0010 003 (2000) [hep-ph/0006042].
- [68] Tao Han, J. D. Lykken & Ren-Jie Zhang »*On Kaluza-Klein States From Large Extra Dimensions*«, Phys. Rev. D **59** 105006 (1999) [hep-ph/9811350].
- [69] V. A. Rubakov & M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **125** 135 (1983).
- [70] K. Akama, Lect. Notes Phys. **176** 267 (1982) [hep-th/0001113].
- [71] C. D. Hoyle, et al., »*Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for »large« extra dimensions*« Phys. Rev. Lett. **86** 1418-1421 (2001) [hep-ph/0011014].
- [72] V. P. Mitrofanov & O. I. Ponomareva, »«, JETP **67** 1963 (1988).
- [73] Y. Su, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, M. Harris, G. L. Smith & H. E. Swanson, Phys. Rev. D **50** 3614 (1994).
- [74] J. C. Long, H. W. Chan & J. C. Price, Nucl. Phys. B **539** 23 (1999) [hep-ph/9805217].
- [75] J. C. Long, A. B. Churnside & J. C. Price, [hep-ph/0009062].
- [76] G. F. Giudice, R. Rattazzi & J. D. Wells, »*Quantum Gravity and Extra Dimensions at High-Energy Colliders*«, Nucl.Phys. B **544** 3-38 (1999) [hep-ph/9811291].

- [77] G. F. Giudice, R. Rattazzi & J. D. Wells, »Graviscalars from higher-dimensional metrics and curvature-Higgs mixing«, Nucl.Phys. **B595** 250-276 (2001) [hep-ph/0002178].
- [78] J. L. Hewett, »Indirect Collider Signals for Extra Dimensions«, Phys.Rev.Lett. **82** 4765-4768 (1999) [hep-ph/9811356].
- [79] S. Nussinov & R. Shrock, »Some Remarks on Theories with Large Compact Dimensions and TeV-Scale Quantum Gravity« Phys.Rev. **D59** 105002 (1999) [hep-ph/9811323].
- [80] D. Atwood, S. Bar-Shalom & A. Soni »Graviton Production By Two Photon and Electron-Photon Processes In Kaluza-Klein Theories With Large Extra Dimensions« [hep-ph/9909392].
- [81] T. G. Rizzo, »Indirect Collider Tests for Large Extra Dimensions« [hep-ph/9910255].
- [82] E. A. Mirabelli, M. Perelstein & M. E. Peskin, »Collider Signatures Of New Large Space Dimensions«, Phys. Rev. Lett. **82** 2236-2239 (1999) [hep-ph/9811337].
- [83] A. Vest, »Search for Extra Dimensions in Graviton Emission $e^+e^- \rightarrow \gamma G$ «, LC-TH-2000-058 (2001).
- [84] L3 Coll., Phys. Lett. **B464**,135 (1999) [hep-ex/9909019].
- [85] L3 Coll., Phys. Lett. **B470**, 281 (1999) [hep-ex/9910056].
- [86] L3 Coll., Phys. Lett. **B 470**, 268 (1999), [hep-ex/9910009].
- [87] H1 Coll. Phys. Lett. **B479**, 358 (2000) [hep-ex/0003002].
- [88] ALEPH Coll., Phys. Lett. **B 429**, 201 (1998).
- [89] DELPHI Coll., Phys. Lett. **B 485**, 45 (2000), [hep-ex/0103025].
- [90] OPAL Coll., Eur. Phys. J. **C 13**, 553 (2000), [hep-ex/9908008].
- [91] D0 Coll., Phys. Rev. Lett. **86**, 1156 (2001), [hep-ex/0008065].
- [92] Y. Uehara, »A Mini-Review on Constraints on Extra-Dimensions«, [hep-ph/0203244].
- [93] K. Cheung, »Mini-Review On Collider Signatures for Extra Dimensions«, [hep-ph/0003306].
- [94] K. Cheung, Phys. Rev. **D61**, 015005 (2000).
- [95] K. Agashe & N. Deshpande, Phys. Lett. **B456**, 60 (1999).

- [96] K. Cheung & G. Landsberg, [hep-ph/9908358].
- [97] K. Hirata *et.al*, Phys. Rev. Lett. **58** 1490 (1987); R. M. Bionta *et.al* Phys. Rev. Lett. **58** 1494 (1987).
- [98] S. Cullen & M. Perelstein, »SN1987A Constraints on Large Compact Extra Dimensions« Phys. Rev. Lett. **83**, 268 (1999) [hep-ph/9903422].
- [99] J. Hewett & M. Spiropulu, »Particle Physics Probes Of Extra Spacetime Dimensions«, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 52, 397-424, (2002) [hep-ph/0205106].
- [100] C. Hanhart, J. A. Pons, D. R. Phillips & S. Reddy, »The likelihood of GODs' existence: Improving the SN1987a constraint on the size of large compact dimensions«, Phys. Lett. **B 509** 1-9 (2001), [astro-ph/0102063].
- [101] MAP - Microwave Anisotropy Probe <http://map.gsfc.nasa.gov/>
- [102] M. Fairbairn »Cosmological Constraints on Large Extra Dimensions« Phys. Lett. **B 508** 335-339 (2001), [hep-ph/0101131].
- [103] V. Barger, T. Han, C. Kao & R.-J. Zhang, »Astrophysical Constraints on Large Extra Dimensions«, Phys. Lett. **B 461**, 34 (1999), [hep-ph/9905474].
- [104] S. Hannestad & G. G. Raffelt »New Supernovae Limit on Large Extra Dimensions [hep-ph/0103201].
- [105] S. Hannestad & G. G. Raffelt »Stringent neutron-star limits on large extra dimensions Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 071301, [hep-ph/0110067].

Kapitel 7

- [106] L. Randall & R. Sundrum, »A Large Mass Hierarchy From A Small Extra Dimension« Phys. Rev. Lett. **83** 3370-3373 (1999) [hep-ph/9905221].
- [107] L. Randall & R. Sundrum, »An Alternative To Compactification« Phys. Rev. Lett. **83** 4690-4693 (1999) [hep-th/9906064].
- [108] W. de Sitter »The the Curvature of Space«, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 20, 229-243, (1917).
- [109] W. D. Goldberger & M. B. Wise »Bulk Fields in the Randall-Sundrum Compactification Scenario«, Phys. Rev. **D 60** 107505 (1999), [hep-ph/9907218].
- [110] H. Davoudiasl, J. L. Hewett & T. G. Rizzo, »Warped Phenomenology«, Phys. Rev. Lett. **84**, 2080 (2000), [hep-ph/9909255].
- [111] I. N. Bronstein & K. A. Semendjajew, »Taschenbuch Der Mathematik«, Harri Deutsch (1995).

- [112] E. Kiritis, N. Tetradis & T. N. Tomaras, »*Induced Gravity on RS Branes*«, [hep-th/0202037].
- [113] G. Dvali, G. Gabadadze & M. Porrati »*4D Gravity On A Brane In 5D Minkowski Space*«, [hep-th/0005016].
- [114] K. Sridhar, »*Constraining the Randall-Sundrum Model Using Diphoton Production at Hadron Colliders*«, JHEP 0105 066 (2001), [hep-ph/0103055].
- [115] W. D. Goldberger & M. B. Wise, »*Modulus Stabilization with Bulk Fields*«, Phys. Rev. Lett. **83** 4922 (1999), [hep-ph/9907447].
- [116] M. A. Luty & R. Sundrum, »*Radius Stabilization and Anomaly-Mediated Supersymmetry Breaking*«, Phys. Rev. **D 83** 035008 (2000), [hep-th/9910202].
- [117] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos & J. March-Russell, »«, Phys. Rev. **D 63** 064020 (2001), [hep-th/9809124].
- [118] G. F. Giudice, R. Rattazzi & J. D. Wells, »*Graviscalars from higher-dimensional metrics and curvature-Higgs mixing*«, Nucl. Phys. **B 595** (2001), [hep-ph/0002178].
- [119] C. Csaki, M. L. Graesser & G. D. Kribs, »*Radion Dynamics and Electroweak Physics*«, Phys. Rev. **D 63** 016002 (2001), [hep-th/0008151].
- [120] T. Han, G. D. Kribs & B. McElrath, »*Radion effects on unitarity in gauge-boson scattering*«, Phys. Rev. **D 64** 076003 (2001), [hep-ph/0104074].
- [121] J. Garriga & T. Tanaka, »*Gravity in the Randall-Sundrum Brane World*«, Phys. Rev. Lett. **84** 2778 (2000), [hep-th/9911055].
- [122] S. B. Giddings, E. Katz & L. Randall, »*Linearized Gravity in Brane Backgrounds*«, JHEP **0003** 023 (2000), [hep-th/0002091].
- [123] B. C. Allanach, K. Odagiri, M. A. Parker & B. R. Webber, »*Searching for Narrow Graviton Resonances with the ATLAS Detector at the Large Hadron Collider*«, JHEP **0009** 019 (2000), [hep-ph/0006114].
- [124] H. Davoudiasl, J. H. Hewett & T. G. Rizzo, »*Experimental Probes of Localized Gravity: On and Off the Wall*«, Phys. Rev. **D 63** 075004 (2001) [hep-ph/0006041].
- [125] S. R. Choudhury, »*TeV-scale electron Compton scattering in the Randall-Sundrum scenario*«, [hep-ph/0105002].
- [126] NLC - Next Linear Collider,
<http://www-project.slac.stanford.edu/nlc/home.html>

- [127] G. Burdmann, »Constraints on the Bulk Standard Model in the Randall-Sundrum Scenario«, [hep-ph/0205329].
- [128] H. Davoudiasl & T. G. Rizzo »Bulk Physics at a Graviton Factory«, Phys. Lett. B 512 100-106 (2001), [hep-ph/0104199].
- [129] C. Csaki, M. L. Graesser & J. Terning Phys. Lett. **B456** 16 (1999) [hep-ph/9903319].
- [130] C. Csaki, M. L. Graesser, C. Kolda & J. Terning, Phys. Lett. **B462** 34 (1999) [hep-ph/9906513].
- [131] P. Binetruy, C. Deffayet & D.Langlois, Nucl. Phys. **B 565** 269 (2000) [hep-th/9905012].
- [132] P. Binetruy, C. Deffayet & D.Langlois, »The radion in brane cosmology«, [hep-th/0101234].
- [133] P. Binetruy, C. Deffayet, U. Ellwanger & D.Langlois, Phys. Lett. **B 477** 285 (2000) [hep-th/9910219].
- [134] S. Tsujikawa, K. Maeda & S. Mizuno, Phys. Rev. **D 63** 123511 (2001) [hep-ph/0012141].
- [135] J. M. Cline, C. Grojean & G. Servant, Phys. Rev. Lett. **83** 4245 (1999) [hep-ph/9906523].
- [136] C. Csaki, M. L. Graesser, L. Randall & J. Terning, »Cosmology of brane models with radion stabilisation«, Phys. Rev. **D 62** 045015 (2000) [hep-ph/9911406].

Kapitel 8

- [137] R. H. Boyer & R. W. Lindquist »Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric«, J. Math. Phys. 8, 265 - 281 (1967).
- [138] R. Gregory & R. Laflamme »Black Strings and p -Branes are Unstable«, Phys. Rev. Lett. 70, 2837-2840 (1993), [hep-th/9301052].
- [139] L. A. Anchordoqui, J. L. Feng, H. G. Goldberg & A. D. Shapere »Black Holes from Cosmic Rays: Probes of Extra Dimensions and new Limits on Tev-Scale Gravity« [hep-ph/0112247].
- [140] M. J. Duff, »Kaluza-Klein Theory in Perspective« Talk delivered at the Oskar Klein Centenary Nobel Symposium, Stockholm, September 19-21, 1994 [hep-th/9410046].
- [141] R. C. Myers & M. J. Perry »Black Holes In Higher Dimensional Space-Time“, Ann. Phys. **172**, 304-347 (1986).

- [142] P.C. Argyres, S. Dimopoulos & J. March-Russell, »*Black Holes and Sub-millimeter Dimensions*« Phys. Lett. **B 441** 96 (1998) [hep-th/9808138].
- [143] D. N. Page, »*Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating black hole*«, Phys. Rev. D **13** 198 (1976).
- [144] T. Banks and W. Fischler »*A Model For High Energy Scattering In Quantum Gravity*«, [hep-th/9906038].
- [145] A. Chamblin, S. W. Hawking & H. S. Reall, »*Brane-World Black Holes*« Phys. Rev. D **61** 065007 (2000) hep-th/9909205 .
- [146] D. Brecher & M. J. Perry »*Ricci-Flat Branes*«, Nucl. Phys. **B 566** 151-172 (2000), [hep-th/9908018].
- [147] R. Emparan, G. T. Horowitz & R. C. Myers, »*Exact Description of Black Holes on Branes II: Comparison with BTZ Black Holes and Black Strings*« JHEP 0001 021 (2000), hep-th/9912135.
- [148] A. Chamblin, H. S. Reall & H. Shinkai »*Charged Brane-World Black Holes*«, Phys. Rev. **D 63** 064015 (2001), [hep-th/0008177].
- [149] W. T. Kim, J. J. Oh, M. K. Oh & M. S. Yoon »*Brane-World Black Holes in Randall-Sundrum Models*« [hep-th/0006134].
- [150] P. Kanti & K. Tamvakis »*Quest for Localized 4-D Black Holes in Brane Worlds*«, Phys. Rev. **D 65** 084010 (2002), [hep-th/0110298].
- [151] R. Casadio & L. Mazzacurati »*Bulk shape of brane-world black holes*«, [gr-qc/0205129].

Kapitel 9

- [152] B. R. Martin & G. Shaw, »*Particle Physics*«, Wiley (1992).
- [153] F. Halzen & A. L. Martin, »*Quarks & Leptons*«, Wiley (1984).
- [154] R. P. Feynman »*Very High-Energy Collisions of Hadrons*«, Phys.Rev.Lett.23:1415-1417 (1969), J. D. Bjorken »*Asymptotic Sum Rules at Infinite Momentum*«, Phys. Rev. 179, 1547 (1969), R. P. Feynman »*Photon-Hadron Interactions*«, W. A. Benjamin Inc. (1972).
- [155] CTEQ – <http://www.phys.psu.edu/cteq/>
- [156] G. T. Horowitz & J. Polchinski »*Instability of Spacelike and Null Orbifold Singularities*«, Phys. Rev. **D 66** 103512 (2002), [hep-th/0206228].

- [157] I. Ya. Yref'eva »*High Energy Scattering in the Brane-World and Black Hole Production*«, Part.Nucl. 31, 169-180 (2000), [hep-th/9910269].
- [158] O. V. Kancheli »*Parton picture of inelastic collisions at transplanckian energies*«, [hep-ph/0208021].
- [159] M. B. Voloshin »*Semiclassical Suppression of Black Hole Production in Particle Collisions*«, Phys. Lett. **B 518** 137-142 (2001), hep-ph/0107119.
- [160] M. B. Voloshin »*More Remarks on Suppression of Large Black Hole Production on Particle Collisions*«, Phys. Lett. **B 524** 376-382 (2002), [hep-ph/0111099].
- [161] S. B. Giddings »*Black hole production in TeV-scale gravity, and the future of high energy physics*«, [hep-ph/0110127].
- [162] D. M. Eardley & S. B. Giddings »*Classical Black Hole Production in High-Energy Collisions*«, Phys.Rev. **D 66** 044011 (2002), [gr-qc/0201034].
- [163] A. Jevicki & J. Thaler »*Dynamics of Black Hole Formation in an exactly solvable Model*«, Phys.Rev. **D 66** 024041 (2002), [hep-th/0203172].
- [164] S. N. Solodukhin, »*Classical and quantum cross-section for black hole production in particle collisions*«, Phys. Lett. **B 533** 153-161 (2002), [hep-ph/0201248].
- [165] S. B. Giddings & S. Thomas »*High Energy Colliders as Black Hole Factories: The End of Short Distance Physics*« Phys.Rev. **D 65** 056010 (2002), [hep-ph/0106219].
- [166] R. Brock *et al.* [CTEQ Collaboration], »*Handbook of perturbative QCD: Version 1.0*«, Rev. Mod. Phys. **67**, 157 (1995).
- [167] H. L. Lai *et al.*, »*Improved parton distributions from global analysis of recent deep inelastic scattering and inclusive jet data*«, Phys. Rev. **D 55**, 1280 (1997); [hep-ph/9606399].
- [168] H. L. Lai & W. K. Tung, »*Charm Production and Parton Distributions*«, Z. Phys. **C74**, 463 (1997).
- [169] S. Dimopoulos & G. Landsberg »*Black Holes At The LHC*« Phys. Rev. Lett. **87** 161602 (2001) [hep-ph/0106295].
- [170] L. A. Anchordoqui, J. L. Feng, H. Goldberg & A. D. Shapere, »*Black Holes from Cosmic Rays: Probes of Extra-Dimensions and New Limits on TeV-Scale Gravity*«, Phys. Rev. **D 65** 124027 (2002), [hep-ph/0112247].
- [171] A. Ringwald & H. Tu, »*Collider versus Cosmic Ray Sensitivity to Black Hole Production*«, Phys. Lett. **B 525** 135-142 (2002), [hep-ph/0111042].

- [172] J. F. Owens, »*Large-Momentum-Transfer Production Of Direct Photons, Jets, And Particles*«, Rev. Mod. Phys. 59, 465 (1987).
- [173] CTEQ Collaboration, R. Brock *et al.*, »*Handbook of perturbative QCD*«, Rev. Mod. Phys. 67, 157-248 (1995).
- [174] D0 Collaboration, V. M. Abazov *et al.*, »*The Inclusive Jet Cross Section in $p\bar{p}$ Collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV using the kT Algorithm*«, Phys. Lett. **B 525**, 211-218 (2002), [hep-ex/0109041].

Kapitel 10

- [175] R. Emparan, G. T. Horowitz & R. C. Myers »*Black Holes Radiate Mainly On The Brane*« Phys. Rev. Lett. **85**, 499 (2000)
- [176] S. Hawking, »*The Unpredictability of Quantum*«, Commun. Math. Phys. **87**,395 (1982).
- [177] J. Preskill, »*Do Black Holes Destroy Information?*« [hep-th/9209058]
- [178] D. N. Page, Phys. Rev. Lett. **44**, 301 (1980).
- [179] G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B 256** 727 (1985).
- [180] A. Mikovic, Phys. Lett. **304 B**, 70 (1992).
- [181] E. Verlinde & H. Verlinde, Nucl. Phys. **B 406**, 43 (1993).
- [182] L. Susskind, L. Thorlacius & J. Uglum, Phys. Rev. **D 48**, 3743 (1993).
- [183] D. N. Page, Phys. Rev. Lett. **71** 3743 (1993).
- [184] Y. Aharonov, A. Casher & S. Nussinov, »*The Unitarity Puzzle and Planck Mass Stable Particles*«, Phys. Lett. **191 B**, 51 (1987).
- [185] T. Banks, A. Dabholkar, M. R. Douglas & M. O'Loughlin, »*Are Horned Particles the Climax of Hawking Evaporation?*«, Phys. Rev. **D 45** 3607 (1992) [hep-th/9201061].
- [186] T. Banks & M. O'Loughlin, »*Classical and Quantum Production of Cornucopions At Energies Below 10^{18} GeV*«, Phys. Rev. **D 47**, 540 (1993) [hep-th/9206055]
- [187] T. Banks, M. O'Loughlin & A. Strominger, »*Black Hole Remnants and the Information Puzzle*«, Phys. Rev. **D 47**, 4476 (1993) [arXiv:hep-th/9211030].
- [188] M. A. Markov, in: »*Proc. 2nd Seminar in Quantum Gravity*«, edited by M. A. Markov & P. C. West, Plenum, New York (1984).

- [189] Y. B. Zel'dovich, in: '»Proc. 2nd Seminar in Quantum Gravity«, edited by M. A. Markov & P. C. West, Plenum, New York (1984).
- [190] J. D. Barrow, E. J. Copeland & A. R. Liddle, »The Cosmology of Black Hole Relics«, Phys. Rev. **D 46**, 645 (1992).
- [191] B. Whitt Phys. Rev. **D 38**, 3000 (1988).
- [192] R. C. Myers & J. Z. Simon, Phys. Rev. **D 38**, 2434 (1988).
- [193] C. G. Callan, R. C. Myers & M. J. Perry, Nucl. Phys. **B 311**, 673 (1988).
- [194] S. Alexeyev, A. Barrau, G. Boudoul, O. Khovanskaya & M. Sazhin, »Black Hole Relics in String Gravity: Last Stages of Hawking Evaporation«, Class. Quant. Grav. **19**, 4431-4444 (2002), [gr-qc/0201069].
- [195] M. J. Bowick, S. B. Giddings, J. A. Harvey, G. T. Horowitz & A. Strominger, »Axionic Black Holes and a Bohm-Aranov Effect for Strings«, Phys. Rev. Lett. **61** 2823 (1988).
- [196] S. Coleman, J. Preskill & F. Wilczek, »Dynamical Effect of Quantum Hair«, Mod. Phys. Lett. **A 6** 1631 (1991).
- [197] K-Y. Lee, E. D. Nair & E. Weinberg, »A Classical Instability of Reissner-Nordstrom Solutions and the Fate of Magnetically Charged Black Holes«, Phys. Rev. Lett. **68** 1100 (1992), [hep-th/9111045].
- [198] G. W. Gibbons & K. Maeda, »Black Holes and Membranes in Higher Dimensional Theories with Dilaton Fields«, Nucl. Phys. **B 298** 741 (1988).
- [199] T. Torii & K. Maeda, »Black Holes with nonabelian Hair and their Thermodynamical Properties«, Phys. Rev. **D 48** 1643 (1993).
- [200] S. Chandrasekhar, »The Mathematical Theory of Black Holes« Oxford University Press, (Oxford 1983).
- [201] A. V. Kotwal & S. Hofmann, »Discrete Energy Spectrum of Hawking Radiation from Schwarzschild Surfaces«, [hep-ph/0204117].

Vorwort

- [202] M. Bleicher, S. Hofmann, S. Hossenfelder & H. Stöcker, »Black Hole Production in Large Extra Dimensions at the Tevatron: Possibility for a First Glimpse on TeV Scale Gravity«, Phys. Lett. **548**, 73-76 (2002), [hep-ph/0112186].

- [203] S. Hofmann, M. Bleicher, L. Gerland, S. Hossenfelder, S. Schwabe & H. Stöcker, »*Suppression of High- P_T Jets as a Signal for Large Extra Dimensions and New Estimates of Lifetimes for Meta stable Micro Black Holes -From the Early Universe to Future Colliders*«, [hep-ph/0111052].
- [204] S. Hofmann, M. Bleicher, L. Gerland, S. Hossenfelder, K. Paech, H. Stöcker, »*TeVatron - Probing TeV-Scale Gravity Today*«, J. Phys. 28, 1657-1665 (2002).
- [205] S. Hossenfelder, S. Hofmann, M. Bleicher & H. Stöcker, »*Quasi Stable Black Holes at LHC*«, Phys. Rev. **D 66** 101502 (2002), [hep-ph/0109085].
- [206] S. Hossenfelder, M. Bleicher, S. Hofmann, H. Stöcker & A. V. Kotwal, »*Black Hole Relics in Large Extra Dimensions*«, [hep-ph/0302247].

Anhang

- [207] R. Remmert, »*Funktionentheorie 1 + 2*«, 4. Auflage, Springer Verlag (1995).
- [208] M. Abramowitz & I. A. Stegun, »*Handbook of Mathematical Functions*«, Dover Publications (1974).

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. Stöcker dafür danken, dass er diese Arbeit ermöglicht hat. Das Interesse, die Ratschläge und die Ermahnungen, mit denen er sie begleitete, haben sich in vielen Fällen als äußerst hilfreich erwiesen. Ich danke außerdem Prof. Dr. Dr. h.c. mult. W. Greiner für die andauernde Unterstützung, die er mir zuteil werden ließ.

Mein ganz besonderer Dank gilt an dieser Stelle S. Scherer für das fortwährende Erfüllen der »Scherer-Bedingung«, sowie Dr. S. Hofmann für all die wertvollen und oftmals ermüdenden Diskussionen.

Außerdem bin ich auch den weiteren Mitgliedern und Mitarbeitern der »LXD-Gruppe« Dr. M. Bleicher, U. Harbach, Dr. U. Eichmann, K. Poppenhäger, C. Rahmede und S. Schwabe großen Dank schuldig, sowie all denen, die vor und mit mir auf diesem oder angrenzenden Gebieten gearbeitet haben und von deren Wissen, Büchern und Berechnungen ich profitiert habe. Dr. L. Gerland und D. Zschiesche möchte ich an dieser Stelle auch für ihre Mitarbeit an unseren Veröffentlichungen danken.

Des Weiteren trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei: mein Zimmergenosse Dr. H. Weber und Frau K. Paech als zuverlässige Unterstützung in Sachen Technik und Numerik.

Ich danke dem Land Hessen für das »Promotionsstipendium für Naturwissenschaftlerinnen des Hessischen Ministeriums für Wissenschaft und Kunst im Rahmen des Hochschul- und Wissenschaftsprogramms«. Es stand auf der finanziellen Seite zuverlässig hinter mir und hat für Unmengen von Kaffee, Gummibärchen und Notizblöcken gesorgt.

Schliesslich danke ich Frau R. Weineck - ohne sie wäre diese Arbeit nie entstanden.

Index

- Äquivalenzprinzip, 7
- ADD-Modell, 69
- Akzelerationsparameter, 16
- Arkani-Hamed, N., 69
- ART, 7, 11
 - Feldgleichungen, 8
- Astrophysik, 12
- Außenraumlösung, 13
- Bianchi-Identitäten, 9
- Bjorken, 111
- Brane, 70, 83
- Brans-Dicke Theorie, 19
- Bulk, 70, 88
- Christoffelsymbole, 8
- CMB, 14, 17
- Comptonstreuung, 94
- CTEQ, 113, 115
- cylinder condition, 55, 58
- Dicke, R. H., 20
- Dimensionen
 - zusätzliche, 54
 - große, 69
- Dimopoulos, S., 69
- Dvali, G., 69
- Eötvös
 - Experiment von, 20
- Eichtransformation, 59
- Eichung
 - in der ART, 10
- Eigenzeit, 11
- Einheitenkonvention, 102
- Einstein, A., 10, 53
- Einstein-Tensor, 8
- Einsteinsche Feldgleichungen, 8, 12
 - im Vakuum, 10
- Energie-Impuls-Tensor, 8, 12, 14
- Energieerhaltung, 9
- Ensemble
 - kanonisch, 49
 - mikrokanonisch, 50
- Evaporation, 48
- Evaporationsrate, 49, 125, 131
- Extra-Dimensionen
 - große, 69
- Feld, skalares, 87
- Feldgleichungen, *siehe* Einsteinsche Feldgleichungen
- Feynmann, 111
 - x, 115
- Freiheitsgrade
 - in Feldgleichungen, 10
- Gedankenexperiment, 20
- Geodäte, 11
- Gluonen, 111
- Gravitation, 7, 70
- Gravitationskraft, 70
- Gravitationswellen, 25
- Gravitonen
 - Produktion, 78, 94
 - virtuelle, 79, 94
- Gravity Probe A, 23
- Gravity Probe B, 27
- Große Extra-Dimensionen, 69
- Hawking, S. W., 46
- Hawkingstrahlung, 46

- Hierarchieproblem, 67
- Hintergrundstrahlung, 14
- Hubble-Konstante, 16

- Informationsverlust, 129
- Innenraumlösung, 12

- Kaluza, T., 54, 65
- Kaluza-Klein, 54
- Kanonisches Ensemble, 49
- Klein, O., 54, 56, 65
- Kompaktifizierung, 56, 65, 69, 83
- Koordinatensystem, 10
- Kosmische Strahlung, 116
- Kosmologie, 13
- kosmologische Konstante, 14
- kosmologisches Prinzip, 14
- kovariant, 7
- Krümmung, 8

- Lagrangedichte
 - in der ART, 10
- Lagrangefunktion, 12
- Laufzeitveränderung, 25
- Lebensdauer, 48
- Lense-Thirring Effekt, 26
- LHC, 78, 94
- Lichtablenkung, 20
- lichtartig, 11
- Lineare Näherung, 17

- Mandelstam-Variable, 112
- Materiegas, 14
- Metrik, 9
 - Ansatz von Kaluza, 55
 - Ansatz von Klein, 56
 - inverse, 59
 - Kerr-Newmann-, 13
 - Robertson-Friedmann-Walker, 14
 - Schwarzschild-, 13, 27
- Metrischer Tensor, 8
- Mikrokanonisches Ensemble, 50

- Newtonlimes, 9

- Partonen, 111
 - Modell, 111
 - Verteilungsfunktion, 113
- Perihel, 23
- Periheldrehung, 23
- Photonen, 79
- Planck-Skala, 27, 101
 - Planck-Länge, 28, 102
 - Planck-Masse, 28, 101
 - Planck-Zeit, 28
- Poincare-Invarianz, 77, 85
- Poissongleichung, 70
- PPN, 19
- Proton, 93, 111

- Quantengravitation, 67, 129
- Quantisierung
 - geometrische, 130
- Quelle, 55

- Radarreflexion, 25
- Randall-Sundrum-Modell, 83
- Relativitätstheorie, *siehe* ART
- Relics, 129
- Rotverschiebung
 - gravitative, 22
 - kosmologische, 16
- RS-Modell
 - Typ I, 83
 - Typ II, 91

- Schwarzes Loch, 35
- Stringtheorie, 65, 130

- Temperatur
 - Schwarzer Löcher, 46, 130
- TeV-Brane, 83
- Tevatron, 94
- Tolmann-Oppenheimer-Volkoff, 12

- Unschärferelation, 129

- Vakuumgleichung, 10

- Warp-Faktor, 85

Weltradius, 14

Wirkungsquerschnitt

 differentieller, 114

 geometrischer, 113

 totaler, 116

zeitartig, 11

Zeitdilatation, 24

Zustandsgleichung, 13, 14

Lebenslauf: Sabine Hossenfelder

Name: Hossenfelder
Vornamen: Sabine Karin Doris
Geburtstag: 18. September 1976
Geburtsort: Frankfurt am Main
Nationalität: Deutsch
Familienstand: Ledig
Adresse: Institut für Theoretische Physik
J.W. Goethe Universität Frankfurt
Robert-Mayer-Str. 10
60054 Frankfurt am Main
Telefon: ++ 49 - 69 - 798 - 28844
Email: hossi@th.physik.uni-frankfurt.de

Ausbildung:

- 1995: Abitur,
A. Einstein-Gymnasium, Schwalbach
- 1997: Vordiplom, Mathematik,
J. W. Goethe Universität Frankfurt, “sehr gut”
- 2000: Diplom, Physik,
J. W. Goethe Universität Frankfurt, “mit Auszeichnung”
Betreuer: Prof. Dr. Dr. hc. mult. W. Greiner
Thema: “*Teilchenproduktion in Gravitationsfeldern*”
- 1997-2001: Übungsgruppenleiterin für Vorlesungen in Mechanik,
Elektrodynamik und Quantenmechanik an der Universität Frankfurt
- 2000-2002: Betreuung des die Grundvorlesungen begleitenden
Online-Angebotes der Physik in Frankfurt
- 2000-2003: Doktorandin, Theoretische Physik,
J. W. Goethe Universität Frankfurt
Betreuer: Prof. Dr. H. Stöcker
Thema: “*Schwarze Löcher in Extra Dimensionen*”

Stipendien:

- 1997-2000: Stipendium der “Studienstiftung des Deutschen Volkes”
- 2000-2003: Stipendium des Landes Hessen