

Zur Verteilung der Nullstellen der Dirichletschen L -Reihen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Peter J. Bauer
aus Solingen

Frankfurt am Main
1997

(DF 1)

vom Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen

Dekan: Prof. Dr. R. Kulze

Gutachter: Prof. Dr. W. Schwarz und Prof. Dr. J. Wolfart

Datum der Disputation: 21. November 1997

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die Verteilung der Nullstellen Dirichletscher L -Reihen auf oder in der Nähe der kritischen Geraden. Diese Funktionen und ihre Nullstellen stehen im Mittelpunkt des Interesses bei einer Vielzahl klassischer zahlentheoretischer Fragestellungen; beispielsweise besagt die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung, daß sämtliche Nullstellen dieser Funktionen auf der kritischen Geraden liegen.

Unsere Ergebnisse gehen unter anderem über die besten bislang bekannten Abschätzungen

- für den Anteil der Nullstellen der Dirichletschen L -Reihen, die *auf* der kritischen Geraden liegen,
- für den Anteil *einfacher* beziehungsweise *m-facher* Nullstellen sowie
- über Nullstellen *in der Nähe* der kritischen Geraden

hinaus. Wir setzen hiermit Arbeiten von A. Selberg, N. Levinson, J. B. Conrey und anderen fort und verallgemeinern Ergebnisse, die für die Riemannsche ζ -Funktion gültig sind, auf alle Dirichletschen L -Reihen beziehungsweise verbessern bisherige Resultate.

Nach einer ausführlicheren Darstellung der Hintergründe zeigen wir einen Satz über Mittelwerte „geglätteter“ L -Reihen, d.h. mit einem geeigneten Dirichlet-Polynom multiplizierte L -Reihen. Solche Mittelwertsätze stellen ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung der Nullstellenverteilung dar. Die in unserem Hauptsatz gegebene asymptotische Darstellung dieses Mittelwertes können wir dann nutzen, um die genannten Ergebnisse herzuleiten.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Schwarz für die Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit und für viele wertvolle Anregungen. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Wolfart für sein Interesse und hilfreiche Gespräche.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	7
1.1	Dirichlet-Charaktere und L -Reihen	7
1.2	Grundlagen	14
1.3	Der Mittelwertsatz	16
2	Beweis des Mittelwertsatzes	19
2.1	Verschiebung des Integrationsweges	19
2.2	Anwendung der Funktionalgleichung	20
2.3	Zerlegung in Haupt- und Restglied	25
2.4	Der Hauptterm	31
2.5	Letzte Umformungen	39
2.6	Das Restglied	42
2.7	Abschätzung des Restglieds	47
3	Nullstellenverteilung	53
3.1	Der Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden	53
3.2	Vielfachheit der Nullstellen	68
3.3	Nullstellen neben der kritischen Geraden	73
	Anhang: Parameterwerte	75
	Literaturverzeichnis	77
	Verzeichnis einiger Bezeichnungen	81

Kapitel 1

Einführung

1.1 Dirichlet-Charaktere und L -Reihen

1.1.1 Grundlegende Begriffe

In den letzten Jahrzehnten haben klassische zahlentheoretische Fragen, wie zum Beispiel „Gibt es in den verschiedenen primen Restklassen modulo q jeweils etwa gleichviele Primzahlen $\leq x$?“ oder „Welches ist der kleinste quadratische Nichtrest zum Modul q ?“, eine durchaus auch praktische Bedeutung in Anwendungen, beispielsweise in Bezug auf die Primzahlverteilung oder in Primzahltests, erlangt.

Solche Fragestellungen führen auf analytische Probleme, in deren Mittelpunkt *Dirichletsche L -Reihen* stehen. Diese L -Reihen sind durch

$$(1.1) \quad L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

im Bereich der Konvergenz der Dirichlet-Reihe beziehungsweise des Euler-Produkts gegeben und durch deren analytische Fortsetzung außerhalb dieses Gebiets. χ bezeichnet dabei einen *Dirichlet-Charakter zum Modul q* , also eine vollständig multiplikative und q -periodische Funktion mit $\chi(n) = 0$, falls $(n, q) \neq 1$ und $|\chi(n)| = 1$, falls $(n, q) = 1$.

Da wir uns in dieser Arbeit ausschließlich mit Dirichlet-Charakteren befassen werden, wollen wir stets unter einem Charakter einen Dirichlet-Charakter verstehen, sofern nicht explizit anderes gesagt wird.

Das wohl bekannteste Beispiel für L -Reihen bildet die Riemannsche ζ -Funktion, die wir im Fall $q = 1$, also für $\chi(n) = 1$ für alle n , erhalten. Während die ζ -Funktion als analytisches Werkzeug beispielsweise zur Untersuchung der Verteilung der Primzahlen unentbehrlich ist, stellen im allgemeineren Fall die L -Reihen das Analogon von $\zeta(s)$ bei der Untersuchung von Primzahlen in *arithmetischen Progressionen* dar, also in Folgen der Form

$$(1.2) \quad (n_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad \text{mit} \quad n_k = a + kq \quad \text{für} \quad (a, q) = 1 \quad \text{und} \quad a \leq q.$$

1.1.2 Nullstellen und ihre Bedeutung

Zentral für die Frage nach der Verteilung der Primzahlen ist die Lage der Nullstellen der L -Reihen. So folgt beispielsweise Dirichlets berühmter Satz, daß in jeder arithmetischen Progression (1.2) unendlich viele Primzahlen existieren, aus der Tatsache, daß $L(1, \chi)$ für kein χ verschwindet.

Zeigt man weiter, daß $L(1 + it, \chi) \neq 0$ für alle reellen t ist, so folgt der „Primzahlsatz in der arithmetischen Progression“: Bezeichne $\pi(x, a, q)$ die Anzahl der Primzahlen der Form $p \equiv a \pmod{q}$ mit $p \leq x$, so gilt für feste a und q mit $(a, q) = 1$ für $x \rightarrow \infty$

$$\pi(x, a, q) \sim \frac{\text{li}(x)}{\varphi(q)} \sim \frac{x}{\varphi(q) \log x}.$$

Hierbei stellt $\varphi(x)$ die Eulersche φ -Funktion und $\text{li}(x)$ den Integrallogarithmus dar. Da genau $\varphi(q)$ verschiedene arithmetische Progressionen zum Modul q existieren, besagt der Primzahlsatz also, daß sich die Primzahlen (asymptotisch) gleichmäßig auf die verschiedenen arithmetischen Progressionen zu einem gegebenen Modul verteilen.

Genauere Resultate, zum Beispiel einen Primzahlsatz mit Restglied, wie

$$\pi(x, a, q) = \frac{\text{li}(x)}{\varphi(q)} + O\left(x \exp\left(-c\sqrt{\log x}\right)\right)$$

für ein $c > 0$, alle $q \leq \log^c x$ und alle a mit $1 \leq a \leq q$ und $(a, q) = 1$ ([Dav80, § 22]), erhält man durch noch genauere Abschätzungen der Lage der Nullstellen.

1.1.3 Die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung

Die in Bezug auf die Nullstellenlage der L -Reihen weitreichendste Hypothese ist die *Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung*: Sämtliche Nullstellen der L -Reihen zu allen Moduln $q \geq 1$ mit Realteil zwischen 0 und 1 haben Realteil $\frac{1}{2}$.

Die durch $\text{Re } s = \frac{1}{2}$ definierte Gerade wird daher auch *kritische Gerade* genannt, der Streifen mit $0 \leq \text{Re } s \leq 1$ heißt *kritischer Streifen*.

Im Spezialfall $q = 1$ erhalten wir auch hier wieder die klassische Vermutung Riemanns über die Nullstellen von $\zeta(s)$. Aus der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung würde der Primzahlsatz in seiner wohl bestmöglichen Form folgen: Unter Annahme der Richtigkeit der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung gilt

$$\pi(x, a, q) = \frac{\text{li } x}{\varphi(q)} + O(\sqrt{x} \cdot \log x)$$

gleichmäßig für alle a mit $(a, q) = 1$ und alle $q \leq x$.

Die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung impliziert eine ganze Reihe weiterer interessanter Resultate. Zum einen folgt natürlich die klassische Riemannsche Vermutung bezüglich der Nullstellen von $\zeta(s)$ als Spezialfall (und damit dann auch deren Folgerungen, s. beispielsweise [Tit88]), zum anderen gibt es aber auch viele Aussagen, für die die

klassische Form der Hypothese nicht genügt. Beispielsweise besagt ein Satz von Linnik, daß für die kleinste Primzahl $P(a, q)$ in einer arithmetischen Progression $a \bmod q$

$$P(a, q) \ll q^k$$

mit einer absoluten Konstanten $k > 0$ für alle teilerfremden a und q gilt. Unter Annahme der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung folgt für Linniks Konstante die Abschätzung

$$k \leq 2 + \varepsilon .$$

In den vergangenen Jahrzehnten sind vielfache Anstrengungen unternommen worden, Linniks Konstante ohne Annahme unbewiesener Hypothesen abzuschätzen. Das beste bis heute bekannte Resultat ist $k \leq \frac{11}{2}$ ([HB92]).

Aus der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung folgt auch, daß der kleinste quadratische Nichtrest modulo q höchstens von der Größenordnung $O(\log^2 q)$ ist ([Ank52]). Hierauf basiert auch der Primzahltest von G. L. Miller ([Mil76]), der unter Annahme der Richtigkeit der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung für eine gegebene Zahl n in nur $O(\log^c n)$ -vielen Schritten, also in „Polynomialzeit“ nachweist, ob n prim ist. Hierzu benötigt man allerdings nicht unbedingt die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung für sämtliche L -Reihen, sondern nur für L -Reihen zu gewissen reellen Charakteren ([Len79]).

1.1.4 Mittelwertsätze und Aussagen über Nullstellen

Leider scheint die Riemannsche oder gar die Verallgemeinerte Riemannsche Vermutung weit außerhalb der Reichweite der Techniken der heutigen Mathematik zu liegen. Es gelingt jedoch, Ergebnisse zu erzielen, die in die Richtung der Hypothesen deuten. Das Ziel dieser Arbeit wird dementsprechend sein, verschiedene Aussagen über die Nullstellen der L -Reihen im kritischen Streifen und auf der kritischen Geraden zu machen. Insbesondere sollen einige Resultate, die für die ζ -Funktion bereits bekannt sind, auch für die allgemeinere Klasse der L -Reihen gezeigt, beziehungsweise bisherige Resultate verbessert werden. Eines der frühesten Resultate über die Nullstellen im kritischen Streifen ist die Formel von Riemann und von Mangoldt:

SATZ 1.1.1 (RIEMANN-VON MANGOLDT-FORMEL)

Bezeichne $N(T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen einer L -Reihe $L(\sigma + it, \chi)$ im Rechteck mit $0 < \sigma < 1$ und $0 < t < T$ (gezählt mit ihrer jeweiligen Vielfachheit). Dann gilt gleichmäßig in q

$$N(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log qT) .$$

Die Beschränkung auf positive Imaginärteile ist hierbei nicht wesentlich, da die Nullstellen gewisse Symmetrien zur reellen Achse beziehungsweise zur Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ aufweisen (vgl. Abschnitt 3.1.1).

Das erste Ergebnis, welches besagt, daß zumindest unendlich viele Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion auf der kritischen Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ liegen, wurde 1914 von G. H. Hardy ([Har14]) gezeigt. Er betrachtete dafür Mittelwerte („Momente“) der Form

$$\frac{1}{T} \int_T^{2T} \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) \cdot t^k dt .$$

$\xi(s)$ ist dabei eine geeignete Funktion, die auf der kritischen Geraden die gleichen Nullstellen besitzt wie $\zeta(s)$, dort jedoch reell ist.

Eine Abschätzung für die Zahl $N_0(T)$ der Nullstellen der ζ -Funktion auf $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ mit Imaginärteil zwischen 0 und T erzielte Hardy sieben Jahre später zusammen mit J. E. Littlewood ([HL21]). Sie bewiesen, daß ein $c > 0$ existiert, so daß

$$N_0(T) > c \cdot T$$

gilt. Im Vergleich mit der Riemann-von Mangoldt-Formel fehlt hier noch ein Faktor der Größe $\log T$, um in die erwartete Größenordnung zu gelangen. Erst 1942 gelang A. Selberg ([Sel42]) der Nachweis, daß ein positiver Anteil der Nullstellen von $\zeta(s)$ auf der kritischen Geraden liegt. Er zeigte

$$(1.3) \quad N_0(T) > c \cdot T \log T$$

für ein geeignetes $c > 0$. Für andere L -Reihen wurde dieses Ergebnis erst 1972 von Š. S. Parmankulov ([Par72]) erzielt, jedoch nur für reelle Charaktere mit $\chi(-1) = 1$.

Diese Verbesserung der Abschätzung wurde durch die Einführung einer „glättenden Funktion“ möglich: $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$, und auch generell $L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$, zeigen mit wachsendem t starke Schwankungen ihres Betrages. Selbergs Idee bestand nun darin, diese Schwankungen zu „glätten“, indem beispielsweise statt

$$\int \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| dt$$

ein Mittelwert der Form

$$(1.4) \quad \int \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \cdot B\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| dt$$

betrachtet wird, wobei $B(s)$ eine geeignete Approximation an $\zeta(s)^{-1}$ bezeichnet. Auch in unseren Berechnungen werden wir von Selbergs Idee der glättenden Funktion Gebrauch machen.

Sei $N_0(T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ und $1 < \operatorname{Im} t < T$. Wir definieren den Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden an den Nullstellen im kritischen Streifen als

$$\alpha(\chi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T, \chi)}{N(T, \chi)} .$$

Weiter bezeichnen wir den Charakter zum Modul $q = 1$ mit χ_0 .

Die erste numerische Abschätzung für $\alpha(\chi_0)$, also den Anteil der Nullstellen von $\zeta(s)$, die auf der kritischen Geraden liegen, stammt von S.-H. Min ([Min47]), sie ist allerdings sehr klein ($\alpha(\chi_0) > \frac{1}{15\,000\,000}$). Erst 1974 erreichte N. Levinson ([Lev74]) einen erheblichen Fortschritt: Er zeigte für die Riemannsche ζ -Funktion

$$\alpha(\chi_0) > 0.34 .$$

Die neuen Ideen Levinsons bestanden zum einen darin, den Mittelwert (1.4) nicht genau entlang der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ zu bestimmen, sondern ihn leicht „neben“ der Geraden zu bilden, zum anderen betrachtete er nicht nur die Funktion $\zeta(s)$, sondern eine Linearkombination der Form $\zeta(s) + a \cdot \zeta'(s)$. Dadurch war es möglich, eine Asymptotik (statt einer Abschätzung) für das Integral in (1.4) und in der Folge die genannte numerische Abschätzung zu erhalten. Auf Levinsons Ideen werden wir in den Kapiteln 2 und 3 zurückgreifen.

Die Berechnungen von Levinson wurden in den folgenden Jahren einerseits von T. Hilano auf die Klasse aller L -Reihen übertragen ([Hil76] und [Hil78]), andererseits im Fall der ζ -Funktion verbessert (beispielsweise in [Lou81] oder [Con83]). Der bis heute erfolgreichste Ansatz stammt von J. B. Conrey ([Con89]) und wurde in [Bau92] noch einmal geringfügig verbessert auf

$$(1.5) \quad \alpha(\chi_0) > 0.408959 .$$

Die Verbesserung dieses Resultats im Vergleich zu Levinsons Ergebnis beruht vor allem darauf, eine bessere glättende Funktion wählen zu können, was durch tiefe Resultate von J.-M. Deshouillers und H. Iwaniec über unvollständige Kloosterman-Summen ([DI82] und [DI84]) möglich wurde.

Eines der Ziele der vorliegenden Arbeit wird es sein, einen Mittelwertsatz, Satz 1.3.1, zu beweisen, der es unter anderem erlaubt, die Abschätzung des Anteils der Nullstellen der L -Reihen auf der kritischen Geraden weiter zu verbessern. Die Güte der Abschätzung (1.5) können wir dabei jedoch leider nicht erreichen, da sich die Ergebnisse von Deshouillers und Iwaniec im allgemeinen Fall nicht anwenden lassen. Wir zeigen dagegen in Kapitel 3

$$(1.6) \quad \alpha(\chi) > 0.365815$$

für alle Charaktere χ zu beliebigen Moduln. Für χ_0 entspricht dies dem besten bezüglich $\zeta(s)$ ohne Verwendung der Deshouillers-Iwaniec-Resultate beweisbaren Ergebnis ([Bau92]). Im allgemeinen Fall ist dies die beste bislang bekannte Abschätzung, nur für die ζ -Funktion gilt das bessere Resultat (1.5). Weitere Einzelheiten und Ergebnisse finden sich in Abschnitt 3.1.9.

1.1.5 Vielfachheit der Nullstellen

Umfangreiche numerische Berechnungen ([LRW86]) haben gezeigt, daß beispielsweise die ersten 1.5 Milliarden Nullstellen von $\zeta(s)$ im kritischen Streifen nicht nur auf der kritischen Geraden liegen, sondern daß es sich dabei auch um *einfache* Nullstellen handelt.

Lange Zeit war jedoch nur wenig mehr über die Vielfachheit der Nullstellen bekannt. Das erste diesbezügliche Resultat stammt von A. Selberg, der zeigte, daß eine positive Dichte der Nullstellen der ζ -Funktion von ungerader Vielfachheit sind und auf der kritischen Geraden liegen ([Sel42]). H. L. Montgomery konnte dann, allerdings nur unter Annahme der Riemannschen Vermutung, zeigen, daß mindestens $\frac{2}{3}$ aller Nullstellen einfach sind ([Mon73]). D. R. Heath-Brown ([HB79b]), und unabhängig von ihm auch A. Selberg, bemerkten schließlich, daß Levinsons Ergebnisse auch für die Anzahl der einfachen Nullstellen gelten.

Bezeichnen wir den Anteil der einfachen Nullstellen der ζ -Funktion auf der kritischen Geraden in Analogie zur obigen Bezeichnung mit $\alpha_s(\chi_0)$, so besagt das beste bis heute bekannte Resultat ([Bau92])

$$\alpha_s(\chi_0) > 0.402193 .$$

Auch dieses Ergebnis beruht auf den Arbeiten von Deshouillers und Iwaniec.

Es liegt nahe, analoge Aussagen über die Nullstellen der L -Reihen zu erwarten, wie sie für $\zeta(s)$ gelten. Bislang konnten jedoch keine positiven Schranken für $\alpha_s(\chi)$ für beliebige Charaktere χ bewiesen werden. In Kapitel 3 können wir jedoch unseren Mittelwertsatz verwenden, um eine solche Abschätzung herzuleiten. Wir zeigen

$$\alpha_s(\chi) > 0.356269 .$$

Im Abschnitt 3.2.1 sind weitere Einzelheiten und Resultate zu finden.

Es zeigt sich, daß aus dem angesprochenen Mittelwertsatz eine Reihe weiterer Folgerungen über die Vielfachheit der Nullstellen möglich sind. Beispielsweise können wir zeigen, daß höchstens 64% aller Nullstellen im kritischen Streifen mindestens Vielfachheit 2 haben. Betrachten wir Nullstellen noch höherer Vielfachheit, so sinkt unsere Abschätzung für deren Anteil deutlich; wie wir in Abschnitt 3.2.2 sehen werden, haben zum Beispiel weniger als 4% Vielfachheit 8 oder höher.

Eine andere Frage, die in diesem Zusammenhang schon verschiedentlich gestellt wurde, betrifft die Zahl der *verschiedenen* Nullstellen, also der Nullstellen ohne Vielfachheit gezählt. Für deren Anteil an der Zahl aller Nullstellen (also gezählt mit Vielfachheit) im kritischen Streifen im Fall von L -Reihen, die gewissen Spitzenformen assoziiert sind ([Far94]) war die untere Schranke von 25% bekannt, für die ζ -Funktion wurden 62% behauptet ([CGG89]). Wir werden in Abschnitt 3.3 eine Schranke von 61% für $L(s, \chi)$, beziehungsweise 63% im Fall von $\zeta(s)$, herleiten.

1.1.6 Dichtesätze

Die Anwendungen von Mittelwertberechnungen sind aber natürlich nicht auf die Untersuchung von Nullstellen auf der kritischen Geraden beschränkt, auch bezüglich der Lage der (eventuell existierenden) Nullstellen, die neben der kritischen Geraden liegen, lassen sich Aussagen gewinnen.

Von Interesse ist hierbei beispielsweise der Wert

$$(1.7) \quad \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) .$$

Gerade bei der Betrachtung der Nullstellen, die neben, aber sehr nahe bei der kritischen Geraden liegen, spielt dieser Ausdruck eine bedeutende Rolle (E. C. Titchmarsh spricht in [Tit88, 9.20] sogar von „the most interesting question“). Eines der ersten Ergebnisse stammt von J. E. Littlewood ([Lit24]), er schätzt im Falle des Moduls $q = 1$, also für die Nullstellen von $\zeta(s)$, die Summe in (1.7) durch $O(T \log \log T)$ ab. Der Faktor $\log \log T$ kann hier noch mittels Selbergs Methode der glättenden Funktion entfernt werden ([Sel46]), so daß gilt

$$\sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ \zeta(\beta + i\gamma) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) = O(T) .$$

Dies läßt sich auch auf L -Reihen zu anderen Moduln als $q = 1$ übertragen. So werden wir als weitere Anwendung unseres Mittelwertsatzes sogar

$$\sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) < 0.087425 \cdot T$$

für jeden Charakter χ und $T \rightarrow \infty$ zeigen. Hieraus folgt insbesondere ([Tit88, 9.24]), daß höchstens ein beliebig kleiner Anteil der Nullstellen von $L(\sigma + it, \chi)$ mit $1 < t < T$ außerhalb des Gebietes

$$\left| \sigma - \frac{1}{2} \right| < \frac{\phi(t)}{\log t}$$

liegt, wobei $\phi(t)$ eine beliebige, positive Funktion mit $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \infty$ bezeichnet.

1.1.7 Die glättende Funktion

Die oben genannten numerischen Werte sind natürlich keine Belege für die Richtigkeit der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung, sie weisen lediglich in ihre Richtung. Andererseits ermöglichen sie aber eine Einschätzung der genutzten Mittelwertsätze, denn die bisherige Entwicklung hat gezeigt, daß die Aussagen über die Nullstellenverteilung um so „besser“ wurden, je exakter die Berechnung entsprechender Mittelwerte gelang.

Am Ende dieses Kapitels werden wir daher einen Mittelwertsatz formulieren, der es uns ermöglicht, die genannten Resultate zu erzielen. Der Beweis dieses Satzes wird dann im Mittelpunkt von Kapitel 2 stehen.

Wie bereits erwähnt, werden wir Selbergs Methode verwenden, um die zu untersuchende L -Reihe mit einer geeigneten Funktion zu glätten. Bezeichnet $\mu(n)$ die Möbiussche μ -Funktion, so gilt für $\operatorname{Re} s > 1$

$$L^{-1}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \chi(n)}{n^s},$$

und so ist es naheliegend, eine geeignet modifizierte Partialsumme dieser Reihe zur Glättung einzusetzen. Dieser Heuristik folgend, wählen wir

$$B_y(s, P, \chi) = \sum_{n < y} \frac{\mu(n) \chi(n)}{n^s} P\left(1 - \frac{\log n}{\log y}\right),$$

wobei P ein frei zu wählendes Polynom mit $P(0) = 0$ bezeichnet, und beweisen eine asymptotische Darstellung für Mittelwerte wie

$$\frac{1}{T} \int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} |L(s + \beta, \chi) B_y(s, P, \chi)|^2 ds.$$

Diese spielen zur Herleitung von beispielsweise (1.6) die gleiche Rolle wie der Mittelwert (1.4) für Selbergs Resultat (1.3).

1.2 Grundlagen

1.2.1 Primitive Charaktere

Im Mittelpunkt des Interesses werden L -Reihen zu *primitiven* Charakteren stehen. Wir beschränken uns hier auf die für uns wesentlichen Einzelheiten, eine umfangreichere Darstellung findet man zum Beispiel in [Spi70] oder [Sch75].

Zur Vorbereitung benötigen wir den Begriff des *induzierten Moduls*:

DEFINITION 1.1

Sei χ Charakter zum Modul q und sei $d \geq 1$ Teiler von q . d heißt „induzierter Modul“ von χ , wenn

$$\chi(n) = 1 \quad \text{für } (n, q) = 1 \text{ und } n \equiv 1 \pmod{d}.$$

Der Charakter χ modulo q verhält sich also auf den zu q teilerfremden Werten wie ein Charakter zum Modul d . Natürlich ist jeder Modul stets auch induzierter Modul, gibt es keine weiteren, so heißt der entsprechende Charakter *primitiv*:

DEFINITION 1.2

Ein Charakter χ zum Modul q heißt „primitiv“, wenn es keine induzierten Modulen d mit $d < q$ gibt.

Offensichtlich sind *Hauptcharaktere*, also Charaktere, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen, nur zum Modul $q = 1$ primitiv, da 1 stets induzierter Modul eines Hauptcharakters ist. Die Riemannsche ζ -Funktion beispielsweise ist die L -Reihe zum Modul 1 und stellt somit eine L -Reihe zu einem primitiven Charakter dar.

Eine besondere Rolle spielt der kleinste induzierte Modul eines Charakters:

DEFINITION 1.3

Der kleinste induzierte Modul eines Charakters χ heißt „Führer“ von χ .

Mit dieser Bezeichnung gilt nämlich (vgl. [Apo86, Thm. 8.18])

SATZ 1.2.1

Sei χ Charakter zum Modul q und q^* der Führer von χ . Dann gilt für alle n

$$\chi(n) = \chi_0(n) \chi^*(n) ,$$

wobei χ_0 den Hauptcharakter modulo q und χ^* ein primitiver Charakter modulo q^* ist. Der Charakter χ^* ist durch diese Darstellung eindeutig bestimmt und heißt der „zu χ gehörige“ primitive Charakter.

Es ist in vielen Fällen keine wesentliche Einschränkung, sich nur auf primitive Charaktere und ihre L -Reihen zu beschränken, denn L -Reihen zu nicht-primitiven Charakteren haben für $\sigma > 0$ die gleichen Nullstellen wie die L -Reihen zu den zugehörigen primitiven Charakteren. Wie man leicht sieht, gilt nämlich (vgl. [Apo86, Thm. 12.9] oder [Pra57, Satz IV.6.3])

SATZ 1.2.2

Sei χ Charakter modulo q , q^* der Führer von χ und χ^* der zu χ gehörige primitive Charakter zum Modul q^* . Es gilt

$$L(s, \chi) = L(s, \chi^*) \prod_{\substack{p|q \\ p \nmid q^*}} \left(1 - \frac{\chi^*(p)}{p^s} \right) .$$

1.2.2 Die Funktionalgleichung

Eine der wichtigsten Eigenschaften der L -Reihen zu primitiven Charakteren besteht darin, daß diese, analog zur Riemannschen ζ -Funktion, einer Funktionalgleichung genügen. Diese Funktionalgleichung tritt in zwei Formen auf, je nachdem, ob für den Charakter $\chi(-1) = +1$ oder $\chi(-1) = -1$ gilt (andere Werte als ± 1 können wegen der Multiplikativität der Charaktere nicht auftreten). Um dennoch eine einheitliche Darstellung zu erhalten, definieren wir

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } \chi(-1) = +1, \\ 1 & , \text{ wenn } \chi(-1) = -1. \end{cases}$$

Sei weiter die *Gaußsche Summe* eines Charakters χ zum Modul q gegeben durch

$$(1.8) \quad \tau(\chi) = \sum_{n=1}^q \chi(n) e^{2\pi i n/q}$$

und sei

$$\varepsilon_\chi = \frac{i^a q^{1/2}}{\tau(\chi)} .$$

Wegen $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ für primitive Charaktere $\chi \bmod q$ ([Dav80, § 9]) gilt $|\varepsilon_\chi| = 1$, und wir können mit dieser Bezeichnung die Funktionalgleichung der L -Reihen formulieren:

SATZ 1.2.3 (FUNKTIONALGLEICHUNG)

Sei χ primitiver Charakter zum Modul q . Dann gilt für alle s

$$L(s, \chi) = h(s, \chi) L(1-s, \bar{\chi})$$

mit

$$(1.9) \quad h(s, \chi) = \frac{\varepsilon_\chi 2^{s-1} \pi^s q^{\frac{1}{2}-s}}{\cos \frac{\pi(s-a)}{2} \cdot \Gamma(s)}$$

Für $q = 1$ stellt (1.9) die bekannte Funktionalgleichung der Riemannschen ζ -Funktion dar.

1.3 Der Mittelwertsatz

Wie oben ausgeführt, ist eine asymptotische Darstellung des Mittelwertes geglätteter L -Reihen, analog zu (1.4), das erste Ziel dieser Arbeit. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Wahl der glättenden Funktion.

Sei χ primitiver Charakter zum Modul $q \geq 1$ und $L(s, \chi)$ die zugehörige L -Reihe.

Seien P_1 und P_2 Polynome mit komplexen Koeffizienten, die die Bedingung $P_j(0) = 0$ für $j = 1, 2$ erfüllen. Als glättende Funktionen wählen wir wie oben angekündigt für $j = 1, 2$

$$(1.10) \quad B_y(s, P_j, \chi) := \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n) b(n, P_j)}{n^s} ,$$

wobei die Koeffizienten $b(n, P_j)$ gegeben sind durch

$$(1.11) \quad b(n, P_j) := \mu(n) P_j \left(1 - \frac{\log n}{\log y} \right) .$$

Der auf B. Riemann zurückgehenden Tradition folgend, bezeichnen wir Real- beziehungsweise Imaginärteil der komplexen Variable s stets mit σ beziehungsweise t : $s = \sigma + it$.

Unser Mittelwertsatz lautet mit diesen Bezeichnungen

SATZ 1.3.1

Sei T hinreichend groß, χ ein primitiver Charakter zum Modul $q = o(\log T)$, $\mathfrak{L} := \log \frac{qT}{2\pi}$, $\frac{1}{2} \leq c < 1$ und $A, B \in \mathbb{C}$ seien Konstanten mit $A \neq B$ und $0 < |A|, |B| \leq \mathfrak{A}$ für eine feste aber beliebige Schranke \mathfrak{A} . Seien $P_1(x)$ und $P_2(x)$ Polynome mit $P_1(0) = P_2(0) = 0$. Mit einer glättenden Funktion $B_y(s, P_j, \chi)$ gemäß (1.10) sei der Mittelwert \mathcal{M} definiert durch

$$\mathcal{M} := \frac{1}{iT} \int_{c+i}^{c+iT} L\left(s + \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi\right) B_y(s, P_1, \chi) \cdot L\left(1 - s - \frac{B}{\mathfrak{L}}, \bar{\chi}\right) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds .$$

Dann gibt es zu jedem Paar (θ_1, θ_2) mit $0 < \theta_1 \leq \theta_2 < \frac{1}{2}$ ein $\delta = \delta(\theta_1, \theta_2) > 0$, so daß für jedes θ in $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ und $y = T^\theta$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \theta \cdot \frac{e^{B-A} - 1}{B - A} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{\theta} P_1'(t) - A P_1(t) \right) \left(\frac{1}{\theta} P_2'(t) + B P_2(t) \right) dt \\ + P_1(1) P_2(1) + O_{\mathfrak{A}}(T^{-\delta}) \end{aligned}$$

gilt. Die implizite Konstante im Fehlerterm ist dabei unabhängig von den Parametern θ , A , B und c sowie dem Charakter χ und seinem Modul q .

Der Beweis dieses Satzes ist der Inhalt des nächsten Kapitels. Einige Anwendungen haben wir bereits in den Abschnitten 1.1.4 bis 1.1.6 erwähnt; wir werden sie und weitere in Kapitel 3 herleiten.

Kapitel 2

Beweis des Mittelwertsatzes

2.1 Verschiebung des Integrationsweges

Wie bereits erläutert, wollen wir eine Asymptotik für das Integral

$$(2.1) \quad M := \frac{1}{i} \int_{c+i}^{c+iT} L(s + \alpha, \chi) B_y(s, P_1, \chi) \cdot L(1 - s - \beta, \bar{\chi}) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds$$

herleiten, wobei wir hier, wie im weiteren Verlauf dieses Kapitels, die Bezeichnungen gemäß Abschnitt 1.3, insbesondere

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &:= \log \frac{qT}{2\pi}, \\ \frac{1}{2} &\leq c < 1 \\ \text{und } A, B \in \mathbb{C} &\quad \text{mit } A \neq B \text{ und } 0 < |A|, |B| \leq \mathfrak{A}, \end{aligned}$$

sowie die Abkürzungen

$$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{L}} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{B}{\mathfrak{L}}$$

verwenden. Außerdem beschränken wir uns auf primitive Charaktere $\chi \pmod{q}$. Der erste Schritt wird in einer Verschiebung des Integrationsweges aus dem kritischen Streifen heraus nach $\sigma = 1 + \varepsilon$, also in das Gebiet der absoluten Konvergenz der Dirichlet-Reihe von $L(s, \chi)$, bestehen. Anschließend verwenden wir die Funktionalgleichung, um auch die zweite L -Reihe in (2.1) in Reihendarstellung vorliegen zu haben. Offenbar ist nach (1.11) für $\sigma > 0$

$$B_y(s, P, \chi) = \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n) b(n, P)}{n^s} \ll \sum_{n \leq y} \frac{1}{n^\sigma} \ll y^{1-\sigma} \log y$$

und [Kol79, Thm. 2] beziehungsweise [Pra57, IV.5] besagen für $\tau = |t| + 2$

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &\ll \tau^{\frac{1-\sigma}{3}} q^{1-\sigma} \log^3 q \tau && \text{für } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ \text{und } L(s, \chi) &\ll \log q \tau && \text{für } 1 \leq \sigma \leq 1 + \varepsilon . \end{aligned}$$

Für $c' = 1 + \varepsilon$ mit (festem) $\varepsilon > 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} \int_{c+i}^{c'+i} L(s + \alpha, \chi) L(1 - s - \beta, \bar{\chi}) B_y(s, P_1, \chi) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds &\ll q^{2(1-c)} y^{2(1-c)} \log^2 y \\ &\ll qy \log^2 y \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \int_{c+iT}^{c'+iT} L(s + \alpha, \chi) L(1 - s - \beta, \bar{\chi}) B_y(s, P_1, \chi) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds \\ \ll T^{\frac{2}{3}(1-c)} q^{2(1-c)} y^{2(1-c)} \log^6 q T \log^2 y \\ \ll qT^{1/3} y \log^6 q T \log^2 y . \end{aligned}$$

Verschieben wir also den Integrationsweg von $[c+i, c+iT]$ nach $[c'+i, c'+iT]$, so erhalten wir für hinreichend großes T

$$M = M' + O(qT^{1/3} y \log^6 q T \log^2 y) ,$$

wobei

$$(2.2) \quad M' := \frac{1}{i} \int_{c'+i}^{c'+iT} L(s + \alpha, \chi) L(1 - s - \beta, \bar{\chi}) B_y(s, P_1, \chi) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds .$$

2.2 Anwendung der Funktionalgleichung

2.2.1 Hilfssätze

Der erste Hilfssatz ist leicht über die Sattelpunktmethode zu zeigen (beispielsweise [Gon84, Lemma 2]):

LEMMA 2.2.1

Sei T hinreichend groß, $r > 0$, c beliebig, aber fest gewählt und

$$E_c(r, T, d) = T^{c-\frac{1}{2}} + \frac{T^{c+d-\frac{1}{2}}}{|T-r| + T^{\frac{1}{2}}} .$$

Dann ist

$$\int_T^{2T} \exp\left(it\left(\log\frac{t}{r} - 1\right)\right) \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{c-\frac{1}{2}} dt$$

$$= \begin{cases} (2\pi)^{1-c} r^c e^{-ir+\frac{\pi i}{4}} + O(E_c(r, T, 0)) & , \text{ falls } T < r \leq 2T \\ O(E_c(r, T, 0)) & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir

LEMMA 2.2.2

Sei $c > \frac{1}{2}$ fest gewählt, T hinreichend groß, $r > 0$, $\beta = \frac{B}{\mathfrak{L}}$ mit $|B| \leq \mathfrak{A}$ und $E_c(r, T, d)$ wie oben in Lemma 2.2.1 definiert. Seien weiter $h(s, \chi)$ und die Gaußsche Summe $\tau(\chi)$ wie in (1.9) beziehungsweise (1.8) definiert. Dann gilt

$$\int_{c+i}^{c+iT} h(1-s-\beta, \chi) r^{-s} ds$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \tau(\chi) e^B q^{-1} e\left(-\frac{r}{q}\right) + O\left(r^{-1} q^{1/2} + r^{-c} q^{c-1/2} E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right) & , \text{ falls } r \leq \frac{qT}{2\pi} \\ O\left(r^{-c} q^{c-1/2} E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right) & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

wobei die impliziten Konstanten in den Restgliedern nicht von q , r und B aber von \mathfrak{A} abhängen.

Beweis: Aus der Definition von $h(s, \chi)$, Gleichung (1.9), und der Stirlingschen Formel ergibt sich wie bei [Tit88, 4.12] für den hier in Betracht kommenden Wertebereich von s

$$h(s, \chi) = (-1)^a \tau(\chi) q^{-1/2} \left(\frac{2\pi}{qt}\right)^{s-1/2} \exp\left(it + \frac{\pi i}{4}\right) \cdot (1 + O(|t|^{-1})) .$$

Wegen der Funktionalgleichungen $h(1-s, \chi) = h(s, \bar{\chi})^{-1}$ und $\tau(\bar{\chi}) = (-1)^a \frac{q}{\tau(\chi)}$ folgt

$$(2.3) \quad h(1-s-\beta, \chi) = \frac{\tau(\chi)}{q^{1/2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \left(\frac{qt}{2\pi}\right)^{\sigma+\beta-1/2} \exp\left(it\left(\log\frac{qt}{2\pi} - 1\right)\right) (1 + O(|t|^{-1})) .$$

Weiterhin ist wegen $\mathfrak{L} = \log\frac{qT}{2\pi}$ für $t \geq 2^{-\nu}T$

$$1 - \mathfrak{L}^{-1} \log\frac{qt}{2\pi} = \mathfrak{L}^{-1} \log\frac{T}{t} \ll \frac{\nu}{\mathfrak{L}} ,$$

also $\mathfrak{L}^{-1} \log\frac{qt}{2\pi} = 1 + O\left(\frac{\nu}{\mathfrak{L}}\right)$ und somit

$$\left(\frac{qt}{2\pi}\right)^\beta = e^B + O\left(\frac{\nu}{\mathfrak{L}}\right) \quad \text{für } 2^{-\nu}T \leq t \leq 2^{-\nu+1}T .$$

Die implizite Konstante ist dabei unabhängig von B , solange $|B|$ unterhalb der festen (aber beliebigen) Schranke \mathfrak{A} bleibt.

Sei jetzt n derart, daß $2^{-n}T$ durch eine hinreichend große absolute Konstante nach oben beschränkt ist. Wir zerlegen unser Integrationsintervall in $n \ll \log T$ Teilintervalle und erhalten unter Verwendung von (2.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{c+i}^{c+iT} h(1-s-\beta, \chi) r^{-s} ds &= r^{-c} \int_1^T h(1-\sigma-it-\beta, \chi) r^{-it} dt \\ &= r^{-c} I_0 + \tau(\chi) e^{-\frac{\pi i}{4}} q^{c-1} e^B r^{-c} \sum_{\nu=1}^n I_\nu, \end{aligned}$$

wobei I_0 und I_ν definiert sind durch

$$I_0 = \int_1^{2^{-n}T} h(1-\sigma-it-\beta, \chi) r^{-it} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{c-1/2} dt \ll q^{c-1/2}$$

und

$$I_\nu = \int_{2^{-\nu}T}^{2^{-\nu+1}T} \exp\left(it\left(\log \frac{qt}{2\pi r} - 1\right)\right) \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{c-1/2} \left(1 + O\left(|t|^{-1} + \frac{\nu}{\mathfrak{L}} + \frac{\nu}{|t|\mathfrak{L}}\right)\right) dt.$$

Lemma 2.2.1 liefert für den Fall $r \leq \frac{qT}{2\pi}$

$$\sum_{\nu=1}^n I_\nu = 2\pi q^{-c} r^c e\left(-\frac{r}{q}\right) e^{\frac{\pi i}{4}} + O\left(q^{1-c} r^{c-1} + r^c + E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right)$$

und für $r > \frac{qT}{2\pi}$

$$\sum_{\nu=1}^n I_\nu = O\left(E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right).$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \int_{c+i}^{c+iT} h(1-s-\beta, \chi) r^{-s} ds &= \begin{cases} \tau(\chi) q^{-1} e^B \left(2\pi e\left(-\frac{r}{q}\right) + O\left(qr^{-1} + r^{-c} q^{c-1/2} E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right)\right) & , \text{ falls } r \leq \frac{qT}{2\pi} \\ \tau(\chi) e^{-\frac{\pi i}{4}} q^{c-1/2} e^B r^{-c} O\left(E_c\left(\frac{2\pi r}{q}, T, 1\right)\right) & , \text{ sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung. □

Um die obigen Fehlerglieder handhaben zu können, benötigen wir noch

LEMMA 2.2.3

Sei $E_c(r, T, d)$ wie in Lemma 2.2.2 definiert, $\alpha = \frac{A}{\varepsilon}$, $\beta = \frac{B}{\varepsilon}$ und $\eta > 0$ fest gewählt. Dann gilt

$$(2.4) \quad \sum_{h, k \leq y} \frac{k^\eta}{h^{1+\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^{-1-\eta-\alpha} m^{-1-\eta-\beta} E_{1+\eta} \left(\frac{2\pi nmh}{qk}, T, 1 \right) \ll T^{1/2+\eta} y^{1+\eta} \log T \log y .$$

Beweis: Vergleichbare Abschätzungen sind bereits verschiedentlich, beispielsweise in [Sel42], [Tit88], [Lev74] oder [Bau92, A.3] bewiesen worden. Der Beweis wird deshalb hier nur angedeutet.

Es gilt

$$\sum_{h, k \leq y} \frac{k^\eta}{h^{1+\eta}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} n^{-1-\eta-\alpha} m^{-1-\eta-\beta} \ll y^{1+\eta} \log y ,$$

und der Term $T^{1/2+\eta}$ in $E_{1+\eta} \left(\frac{2\pi nmh}{qk}, T, 1 \right)$ liefert daher nur einen Beitrag der Größe

$$\ll T^{1/2+\eta} y^{1+\eta} \log y$$

zum Ausdruck auf der linken Seite in (2.4).

Sei zur Abkürzung

$$\mathcal{T} = \frac{T^{3/2+\varepsilon}}{\left| T - \frac{2\pi nmh}{qk} \right| + T^{1/2}} .$$

Um den Beitrag von \mathcal{T} zu untersuchen, spalten wir die linke Seite von (2.4) in vier Teilsommen auf. Die erste Teilsomme bestehe aus denjenigen Summanden, für die

$$\left| \frac{2\pi nmh}{qk} - T \right| > \frac{T}{2}$$

gilt. Dann ist $\mathcal{T} \ll T^{1/2+\eta}$, und der Beitrag dieser Teilsomme beträgt daher wie oben

$$\ll T^{1/2+\eta} y^{1+\eta} \log y .$$

Die zweite Teilsomme bestehe aus den Summanden mit

$$T^{1/2} \leq \frac{2\pi nmh}{qk} - T \leq \frac{T}{2} .$$

Wir zerlegen diese Summe weiter, und zwar in $O(\log T)$ Summen, jeweils mit $\tau < \frac{2\pi nmh}{qk} < 2\tau$, wobei $T^{1/2} \ll \tau \ll T$ gilt. Hier gilt $\mathcal{T} \ll T^{3/2+\eta} \tau^{-1}$, außerdem ist $qkT \ll nmh \ll qkT$

und das Produkt nmh läuft über ein Intervall der Länge $qk\tau$. Der Beitrag dieser Summen ist jeweils $\ll T^{1/2+\eta}y^{1+\eta}\log y$, und der gesamte Beitrag dieser Teilsumme ist damit

$$\ll T^{1/2+\eta}y^{1+\eta}\log T \log y .$$

Die dritte Teilsumme bestehe aus den Summanden mit

$$T^{1/2} \leq T - \frac{2\pi nmh}{qk} \leq \frac{T}{2}$$

und wird analog zur zweiten behandelt und abgeschätzt.

Die vierte Teilsumme bestehe schließlich aus den Summanden mit

$$\left| \frac{2\pi nmh}{qk} - T \right| \leq T^{1/2} .$$

Hier gilt $\mathcal{T} \leq t^{1+\eta}$. Weiter ist $qkT \ll nmh \ll qkT$ und nmh läuft über ein Intervall der Länge $qkT^{1/2}$. Der Beitrag dieser letzten Teilsumme ist also

$$\ll T^{1/2+\eta}y^{1+\eta}\log y ,$$

und insgesamt folgt die Behauptung. □

2.2.2 Anwendung der Funktionalgleichung

Wie in Abschnitt 1.3 definiert, sind die Koeffizienten der glättenden Funktion $B_y(s, P, \chi)$ gegeben durch

$$B_y(s, P_j, \chi) = \sum_{n \leq y} \frac{\chi(n) b(n, P_j)}{n^s} \quad \text{mit} \quad b(n, P) = \mu(n) P \left(1 - \frac{\log n}{\log y} \right) .$$

Aus (2.2) folgt nun mittels der Funktionalgleichung für L -Reihen, Satz 1.2.3, und Lemma 2.2.2, da $c' > 1$

$$\begin{aligned} M' &= \frac{1}{i} \int_{c'+i}^{c'+iT} h(1-s-\beta, \bar{\chi}) L(s+\alpha, \chi) L(s+\beta, \chi) B_y(s, P_1, \chi) B_y(1-s, P_2, \bar{\chi}) ds \\ &= \frac{1}{i} \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^\alpha m^\beta} \int_{c'+i}^{c'+iT} h(1-s-\beta, \bar{\chi}) \left(\frac{nmh}{k} \right)^{-s} ds \\ &= 2\pi\tau(\bar{\chi}) e^B q^{-1} \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \sum_{\substack{n,m \\ nm \leq \frac{qTk}{2\pi h}}} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^\alpha m^\beta} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) + \mathcal{R} . \end{aligned}$$

Für das Restglied \mathcal{R} folgt wegen $b(n, P) \ll 1$ und $|\chi(n)| \leq 1$ mit Lemma 2.2.3 für jedes $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\ll q^{1/2+\varepsilon} \left| \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{h^{1+\varepsilon} k^{-\varepsilon}} \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^{1+\varepsilon+\alpha} m^{1+\varepsilon+\beta}} E_{1+\varepsilon} \left(\frac{2\pi i n m h}{qk}, T, 1 \right) \right| \\ &\ll q^{1/2+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon} . \end{aligned}$$

Insgesamt gilt für ein $\varepsilon > 0$

$$(2.5) \quad M = 2\pi\tau(\bar{\chi}) e^B q^{-1} \cdot \mathcal{N} + O(q^{1+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon}) ,$$

wobei

$$(2.6) \quad \mathcal{N} = \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \sum_{\substack{n,m \\ nm \leq \frac{qTk}{2\pi h}}} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^\alpha m^\beta} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) .$$

Bemerkung: Das Restglied in (2.5) ist, wie wir sehen werden, von gleicher Größe wie das, welches wir letztendlich in unserer Asymptotik (2.34) für M erhalten werden. Dennoch handelt es sich hier nicht um den eigentlich kritischen Teil des Beweises (also den, der das größte, mit unseren Methoden nicht mehr zu verbessernde Restglied liefert).

Fügen wir nämlich einen Faktor beispielsweise der Form $e^{(s-s_0)T^{-2}}$ an den Integranden von Lemma 2.2.2 an (vgl. [HB79a, § 4], [BCHB85] oder [Con89, § 7]), so können wir Mellin-Transformationen verwenden, um genauere Abschätzungen zu erhalten. Die behauptete Asymptotik für M ließe sich dann zwar mit besserem Fehlerglied weiterhin folgern, die weiteren Schritte würden sich jedoch komplizierter gestalten. Da dies in unserem Fall aber keinen Gewinn brächte (vgl. (2.33)), lohnt sich diese Mühe nicht, wir belassen es also bei dieser einfacheren Technik.

2.3 Zerlegung in Haupt- und Restglied

2.3.1 Hilfssätze

Im folgenden werden wir zwei Hilfssätze benötigen, einen über Gaußsche Summen, einen anderen über die Beziehung zwischen L -Reihen und der Hurwitzschen ζ -Funktion. Beweise sind beispielsweise in [Dav80, § 9] zu finden.

LEMMA 2.3.1

Sei χ primitiver Charakter zum Modul q . Sei $\tau(\chi) = \sum_{\nu=1}^q \chi(\nu) e\left(\frac{\nu}{q}\right)$ die Gaußsche Summe dieses Charakters. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^q \chi(j) e\left(-\frac{nj}{q}\right) = \bar{\chi}(-n) \tau(\chi) .$$

LEMMA 2.3.2

Sei die „Hurwitzsche ζ -Funktion“ für $\sigma > 1$ und $0 < x \leq 1$ gegeben durch

$$\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s} .$$

Dann gilt für $\sigma > 0$

$$L(s, \chi) = q^{-s} \sum_{j=1}^q \chi(j) \zeta\left(s, \frac{j}{q}\right) ,$$

wobei in $0 < \sigma \leq 1$ die analytische Fortsetzung von $\zeta(s, x)$ zu betrachten ist.

2.3.2 Anwendung von Perrons Formel

Unser nächstes Ziel wird es ein, näheres über die Größe der inneren Doppelsumme über n und m in (2.6) zu erfahren.

Perrons Formel erlaubt es, vom Verhalten einer Dirichlet-Reihe auf die Größe der Summe ihrer Koeffizienten zurückzuschließen. Wir wollen dies auf die innere Doppelsumme anwenden, wozu wir folgende effektive Form einer Perronschen Formel für Produkte von Dirichlet-Reihen benötigen:

LEMMA 2.3.3 (FORMEL VON PERRON)

Sei $\sum_{n,m} \frac{a(n, m)}{n^s m^s}$ absolut konvergent für $\sigma > 1$, und es gelte

$$|a(n, m)| \ll \Phi(nm)$$

mit einer für große N monoton wachsenden Funktion $\Phi(N)$.

Weiter sei für ein $k > 0$

$$\sum_{n,m} \frac{|a(n, m)|}{n^\sigma m^\sigma} \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^k} \quad \text{für } \sigma \rightarrow 1+.$$

Dann gilt für $1 < c < 2$, $x \geq 1$ und beliebige $\tau \geq 1$

$$\sum_{\substack{n,m \\ nm \leq \tau}} a(n, m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ix}^{c+ix} \sum_{n,m} \frac{a(n, m)}{n^s m^s} \cdot \frac{\tau^s}{s} ds + O\left(\frac{\tau^c}{x(c-1)^k} + \frac{\Phi(2\tau) \tau \log 2\tau}{x} + \Phi(2\tau)\right) .$$

Dies folgt analog zu [Pra57, Satz A.3.1].

Sei $c = 1 + \eta$ mit fest gewähltem $\eta > 0$ und sei

$$\tau = \frac{qTk}{2\pi h}.$$

Lemma 2.3.3 liefert dann wegen $|\alpha| = \frac{|A|}{\mathfrak{L}} \leq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}$ und $|\beta| = \frac{|B|}{\mathfrak{L}} \leq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{L}}$

$$(2.7) \quad \sum_{\substack{n,m \\ nm \leq \tau}} \frac{\chi(n)\bar{\chi}(m)}{n^\alpha m^\beta} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ix}^{c+ix} \frac{\tau^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\chi(m)}{n^{s+\alpha}m^{s+\beta}} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) \\ + O\left(\frac{\tau^{1+\eta}}{x\eta^2} + \frac{2^{2\mathfrak{A}/\mathfrak{L}} \tau^{1+2\mathfrak{A}/\mathfrak{L}} \log 2\tau}{x} + (2\tau)^{2\mathfrak{A}/\mathfrak{L}}\right).$$

Nach (2.6) ist $1 \leq h, k \leq y$ sowie $y = T^\theta$ mit $\theta < \frac{1}{2}$ und $\mathfrak{L} = \log \frac{qT}{2\pi}$ und somit

$$\tau^{\mathfrak{A}/\mathfrak{L}} = \exp\left(\mathfrak{A}\left(1 + \frac{\log \frac{k}{h}}{\log \frac{qT}{2\pi}}\right)\right) \ll 1.$$

Wenden wir dies auf das Fehlerglied in (2.7) an und setzen diesen Ausdruck in unsere letzte Darstellung von \mathcal{N} (Gleichung (2.6)) ein, so ergibt sich

$$(2.8) \quad \mathcal{N} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h)\bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \\ \times \int_{c-ix}^{c+ix} \frac{\tau^s}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\chi(m)}{n^{s+\alpha}m^{s+\beta}} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) ds + \mathfrak{F}_1(x)$$

mit dem Fehlerterm

$$(2.9) \quad \mathfrak{F}_1(x) = \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h)\bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \cdot O\left(\frac{\tau^{1+\eta}}{x\eta^2} + \frac{\tau \log 2\tau}{x} + 1\right) \\ \ll \sum_{h,k \leq y} \frac{1}{k} \left(\frac{\tau^{1+\eta}}{x} (1 + \eta^{-2}) + 1\right) \\ \ll x^{-1} y^{1+\eta} \left(\frac{qT}{2\pi}\right)^{1+\eta} + y \log y.$$

2.3.3 Estermanns Technik

Um die Doppelsumme über n und m in (2.8) einfacher behandeln zu können, müssen wir die Variablen n und m voneinander entkoppeln. Hierzu bedienen wir uns einer Technik, die auf Estermann ([Est30]) zurückgeht. Die zugrundeliegende Idee besteht darin, die

Doppelsumme durch Produkte von L -Reihen zu ersetzen, die die gleichen Pole besitzen wie die Doppelsumme.

In unserem Fall müssen wir zuerst einen Umweg über die Hurwitzsche Zetafunktion, die wir bereits in Lemma 2.3.2 eingeführt hatten, einschlagen.

Mit der Hurwitzschen Zetafunktion $\zeta(s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+x)^{-s}$ für $0 < x \leq 1$ und $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{n \equiv \nu (q)} n^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} (nq + \nu)^{-s} = q^{-s} \zeta\left(s, \frac{\nu}{q}\right) \quad \text{für } 1 \leq \nu \leq q.$$

Sei in diesem und den folgenden Abschnitten stets

$$H = \frac{h}{(h, k)} \quad \text{und} \quad K = \frac{k}{(h, k)}.$$

Es gilt offensichtlich $(H, K) = 1$ und $\frac{h}{k} = \frac{H}{K}$.

Betrachten wir nun die Doppelsumme über n und m im Integranden von (2.8). Für sie gilt, da χ als Charakter modulo q auch qK -periodisch ist,

$$(2.10) \quad \sum_{\substack{n=1 \\ m=1}}^{\infty} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^{s+\alpha} m^{s+\beta}} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) = \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq qK} \chi(\nu) \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu h}{qk}\right) \sum_{\substack{n \equiv \nu (qK) \\ m \equiv \mu (qK)}} n^{-s-\alpha} m^{-s-\beta} \\ = (qK)^{-2s-\alpha-\beta} D(s),$$

wobei

$$D(s) := \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq qK} \chi(\nu) \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu h}{qk}\right) \zeta\left(s + \alpha, \frac{\nu}{qK}\right) \zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{qK}\right)$$

ist. Dies ist zugleich die analytische Fortsetzung von D in den Bereich $0 < \sigma \leq 1$.

Da $\zeta(s, x) - \zeta(s)$ für $0 < x \leq 1$ eine ganze Funktion in s darstellt, ist der folgende Ausdruck ebenfalls eine ganze Funktion:

$$\begin{aligned} D^*(s) &:= \sum_{1 \leq \nu, \mu \leq qK} \chi(\nu) \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right) \\ &\quad \times \left(\zeta\left(s + \alpha, \frac{\nu}{qK}\right) - \zeta(s + \alpha)\right) \left(\zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{qK}\right) - \zeta(s + \beta)\right) \\ &= D(s) - \zeta(s + \alpha) \sum_{1 \leq \mu \leq qK} \chi(\mu) \zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{qK}\right) \sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right) \\ &\quad - \zeta(s + \beta) \sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) \zeta\left(s + \alpha, \frac{\nu}{qK}\right) \sum_{1 \leq \mu \leq qK} \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right) \\ &\quad + \zeta(s + \alpha) \zeta(s + \beta) \sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) \sum_{1 \leq \mu \leq qK} \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right). \end{aligned}$$

Nun ist, wegen der q -Periodizität von χ ,

$$\sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) e\left(-\frac{\nu\mu}{qK}\right) = \sum_{1 \leq j \leq q} \chi(j) e\left(-\frac{j\mu H}{qK}\right) \sum_{0 \leq r \leq K-1} e\left(-\frac{r\mu H}{K}\right),$$

und weiter gilt wegen $(H, K) = 1$

$$\sum_{0 \leq r \leq K-1} e\left(-\frac{r\mu H}{K}\right) = \begin{cases} K & , \text{ für } K|\mu \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Damit und mit den Lemmata 2.3.1 und 2.3.2 folgt

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \mu \leq qK} \chi(\mu) \zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{qK}\right) \sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right) \\ = K \sum_{\substack{1 \leq \mu \leq qK \\ \mu \equiv 0 \pmod{K}}} \chi(\mu) \zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{qK}\right) \sum_{1 \leq j \leq q} \chi(j) e\left(-\frac{j\mu H}{qK}\right) \\ = K \tau(\chi) \chi(K) \sum_{1 \leq \mu \leq q} \chi(\mu) \bar{\chi}(-\mu H) \zeta\left(s + \beta, \frac{\mu}{q}\right) \\ = K \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) q^{s+\beta} L(s + \beta, \chi_0), \end{aligned}$$

wobei χ_0 den Hauptcharakter modulo q darstellt. Analog folgt

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq \nu \leq qK} \chi(\nu) \sum_{1 \leq \mu \leq qK} \chi(\mu) e\left(-\frac{\nu\mu H}{qK}\right) &= K \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) \sum_{1 \leq \nu \leq q} \chi_0(\nu) \\ &= K \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) \varphi(q). \end{aligned}$$

Insgesamt stellt also

$$D^*(s) = D(s) - E_1(s) - E_2(s) + E_3(s)$$

mit

$$\begin{aligned} E_1(s) &= K q^{s+\beta} \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) L(s + \beta, \chi_0) \zeta(s + \alpha), \\ E_2(s) &= K q^{s+\alpha} \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) L(s + \alpha, \chi_0) \zeta(s + \beta), \\ E_3(s) &= K \varphi(q) \tau(\chi) \chi(K) \bar{\chi}(-H) \zeta(s + \alpha) \zeta(s + \beta) \end{aligned}$$

eine ganze Funktion dar.

Sei $R_c(x)$ das Rechteck mit den Ecken $c \pm ix$ und $\frac{1}{2} \pm ix$ und $\Gamma_c(x)$ der Pfad, der aus der oberen, linken und unteren Seite von $R_c(x)$ besteht.

Da die rechte Seite von $R_c(x)$ der ursprüngliche Integrationsweg aus (2.8) ist, erhalten wir zusammenfassend mit $c = 1 + \eta$ aus (2.8) und (2.10)

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \int_{R_c(x)} \frac{\tau^s (E_1 + E_2 - E_3)(s)}{s (qK)^{2s+\alpha+\beta}} ds + \mathfrak{F}_1(x) - \mathfrak{F}_2(x) ,$$

wobei $\mathfrak{F}_1(x)$ in (2.9) definiert ist und wobei

$$(2.11) \quad \mathfrak{F}_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \int_{\Gamma_c(x)} \frac{\tau^s}{s} (qK)^{-2s-\alpha-\beta} D(s) ds .$$

Es wird sich herausstellen, daß die Residuen der E_i den Hauptteil unserer Asymptotik liefern werden, während $\mathfrak{F}_2(x)$ das größte Restglied beisteuert.

Wegen $A \neq B$ ist auch $\alpha \neq \beta$. Die Funktionen E_1 , E_2 und E_3 haben daher einfache Pole in $s = 1 - \alpha$ und $s = 1 - \beta$.

Berechnen wir die Residuen in $1 - \alpha$ und $1 - \beta$. Eine Reihe von Termen hebt sich weg, und es bleibt nach einfacher Rechnung

$$(2.12) \quad \left(\operatorname{res}_{s=1-\alpha} + \operatorname{res}_{s=1-\beta} \right) \left((E_1 + E_2 - E_3)(s) \frac{\tau^s}{s} (qK)^{-2s-\alpha-\beta} \right) \\ = K^{-1+\alpha-\beta} q^{-1} \tau(\chi) \bar{\chi}(-H) \chi(K) L(1 - \alpha + \beta, \chi_0) \frac{\tau^{1-\alpha}}{1 - \alpha} \\ + K^{-1-\alpha+\beta} q^{-1} \tau(\chi) \bar{\chi}(-H) \chi(K) L(1 + \alpha - \beta, \chi_0) \frac{\tau^{1-\beta}}{1 - \beta} .$$

Es gilt $\chi(h) \bar{\chi}(k) \bar{\chi}(-H) \chi(K) = (-1)^a \chi_0 \left(\frac{hk}{(h,k)} \right)$, wenn χ_0 den Hauptcharakter mod q bezeichnet, und nach [Dav80, § 9] $\tau(\chi) \tau(\bar{\chi}) = (-1)^a q$. Damit ergibt (2.12), eingesetzt in (2.5), wegen $\tau = \frac{qT k}{2\pi h}$ und $\left(\frac{qT}{2\pi} \right)^\alpha = e^A$ beziehungsweise $\left(\frac{qT}{2\pi} \right)^\beta = e^B$

$$(2.13) \quad M = T \frac{e^{B-A}}{1 - \alpha} L(1 - \alpha + \beta, \chi_0) S(-\alpha, \beta, \chi_0) \\ + T \frac{1}{1 - \beta} L(1 + \alpha - \beta, \chi_0) S(-\beta, \alpha, \chi_0) \\ + O(q^{-1/2} (|\mathfrak{F}_1(x)| + |\mathfrak{F}_2(x)|) + q^{1+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon}) ,$$

wobei

$$(2.14) \quad S(\alpha, \beta, \chi_0) := \sum_{h,k \leq y} \frac{b(h, P_1) b(k, P_2)}{h^{1+\alpha} k^{1+\beta}} \chi_0 \left(\frac{hk}{(h,k)} \right) (h, k)^{1+\alpha+\beta} .$$

2.4 Der Hauptterm

Die im Hauptterm von (2.13) auftretende Summe $S(\alpha, \beta, \chi_0)$ ist das Objekt unserer nächsten Betrachtungen. Bislang hat die Wahl der Koeffizienten $b(n, P)$ der glättenden Funktion $B_y(s, P, \chi) = \sum_{n \leq y} \chi(n) b(n, P) n^{-s}$ noch keine entscheidende Rolle gespielt. Dies wird sich nun ändern — eine geeignete Wahl wird uns recht präzise Aussagen über $S(\alpha, \beta, \chi_0)$ erlauben.

Zuerst müssen wir jedoch einige Hilfsätze bereitstellen.

2.4.1 Hilfssätze

LEMMA 2.4.1

Sei $\nu \geq 2$ ganz und seien y und c positiv. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y^s}{s^\nu} ds = \begin{cases} 0 & , \text{für } 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{(\nu-1)!} \log^{\nu-1} y & , \text{für } y \geq 1. \end{cases}$$

Einen Beweis dieser bekannten Beziehung findet man beispielsweise in [Lan74, § 66].

LEMMA 2.4.2

Sei χ ein Charakter zum Modul q und χ_0 der Hauptcharakter zum Modul q . Sei

$$F(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 - \chi(p) p^{-s}) \quad \text{und} \quad F_1(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 + \chi(p) p^{-s}) .$$

Dann gilt

$$F(d, s, \chi)^{-1} \ll_{\sigma_0} F_1(d, \sigma, \chi_0) \leq F_1(d, \sigma_0, \chi_0) \quad \text{für } \sigma \geq \sigma_0 > \frac{1}{2} .$$

Zum Beweis siehe [Bau92, (3.4.9)].

LEMMA 2.4.3

Sei wie im letzten Lemma $F(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 - \chi(p) p^{-s})$. Dann gilt

$$\frac{F'}{F}(d, s, \chi) \ll \log \log y \quad \text{für } |s - 1| \ll (\log \log y)^{-1} .$$

Der Beweis verläuft analog zu [Bau92, (A.4.9)].

LEMMA 2.4.4

Es gilt, wenn χ_0 den Hauptcharakter modulo q bezeichnet,

$$\begin{aligned} L(s, \chi_0)^{-1} &\ll_c \log \log y && \text{für } 1 - \frac{c}{\log \log y} \leq \sigma \text{ und } |t| \leq \frac{\log y}{q} - 2 , \\ L(1 + it, \chi_0)^{-1} &\ll \log(q + 2) |t| && \text{für } |t| \geq t_0 . \end{aligned}$$

Die erste Formel folgt analog zu [Tit88, 3.11], die zweite findet man beispielsweise in [Pra57].

LEMMA 2.4.5

Sei $\delta > 0$ und $m = 1, 2, \dots$. Dann gilt gleichmäßig in $t \geq t_0 > 0$

$$\int_{-t}^t (\delta^2 + \tau^2)^{-\frac{m+1}{2}} d\tau \ll_m \delta^{-m} .$$

Vollständige Induktion nach m liefert die Behauptung.

LEMMA 2.4.6

Für $q \geq 3$ gilt

$$\frac{q}{\varphi(q)} \ll \log \log q .$$

Dieses Ergebnis findet man beispielsweise in [Apo86, Thm. 13.14].

LEMMA 2.4.7

Sei χ_0 der Hauptcharakter modulo q . Für $|s - 1| \leq \frac{1}{2}$ gilt dann gleichmäßig in $q \geq 1$

$$q^{-s} L(s, \chi_0)^{-1} = \frac{s-1}{\varphi(q)} + O(|s-1|^2) .$$

Beweis: Die Laurent-Entwicklung der Hurwitzschen ζ -Funktion lautet für $s \neq 1$

$$\zeta(s, x) = \sum_{\mu=-1}^{\infty} c_{\mu}(x) (s-1)^{\mu} ,$$

wobei für alle x mit $0 < x \leq 1$ gilt ([Ber72])

$$(2.15) \quad \begin{aligned} c_{-1}(x) &= 1 , \\ c_0(x) &= \frac{1}{x} + O(1) \\ \text{und} \quad c_{\mu}(x) &= \frac{(\log 1/x)^{\mu}}{x \cdot \mu!} + O\left(\frac{1}{\mu \pi^{\mu}}\right) \quad \text{für } \mu \geq 1. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3.2 gilt im betrachteten Bereich für s

$$q^s L(s, \chi_0) = \sum_{\nu \leq q} \chi_0(\nu) \zeta\left(s, \frac{\nu}{q}\right) = \sum_{\mu=-1}^{\infty} (s-1)^{\mu} d_{\mu} ,$$

mit den Koeffizienten

$$d_\mu = \sum_{\nu \leq q} \chi_0(\nu) c_\mu \left(\frac{\nu}{q} \right) .$$

Setzen wir in einer Umgebung von $s = 1$

$$\frac{1}{q^s L(s, \chi_0)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (s-1)^\nu ,$$

so folgt

$$1 = \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (s-1)^\nu \right) \left(\sum_{\mu=-1}^{\infty} d_\mu (s-1)^\mu \right) = \sum_{n \geq 0} (s-1)^n \sum_{\nu=1}^{n+1} a_\nu d_{n-\nu} .$$

Hieraus erhalten wir

$$(2.16) \quad a_1 = \frac{1}{d_{-1}} \quad \text{und} \quad a_n = -\frac{1}{d_{-1}} \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu d_{n-\nu-1} \quad \text{für } n = 2, 3, \dots$$

Es gilt wegen (2.15)

$$\begin{aligned} d_{-1} &= \varphi(q) , \\ d_0 &= q \sum_{\nu \leq q} \frac{\chi_0(\nu)}{\nu} + O(\varphi(q)) = O(q \log q) \\ \text{und für } \mu \geq 1 \quad d_\mu &= \frac{q}{\mu!} \sum_{\nu \leq q} \frac{\chi_0(\nu) (\log q / \nu)^\mu}{\nu} + O(\varphi(q)) = O(q \log^{\mu+1} q) . \end{aligned}$$

Aus der Rekursionsformel (2.16) erhalten wir schließlich

$$a_n \ll \frac{1}{\varphi(q)} (\log q \log \log q)^{n-1}$$

gleichmäßig für $n \geq 1$. Nach Lemma 2.4.6 folgt somit $a_n \ll 1$ gleichmäßig in q . Insgesamt folgt die Behauptung. \square

LEMMA 2.4.8

Es gilt für den Hauptcharakter $\chi_0 \bmod q$

$$\frac{L'}{L}(s, \chi_0) = \frac{1}{1-s} + O(\log q (|t| + 2)) \quad \text{für } \sigma \geq 1 - \frac{c}{\log q (|t| + 2)} \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Auch dies findet man in [Pra57].

LEMMA 2.4.9

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, holomorph in $D \setminus \{z\}$ und hat in z einen Pol höchstens $(m+1)$ -ter Ordnung, und ist g die analytische Fortsetzung von $(s-z)^{m+1} f(s)$ nach z , so gilt

$$\operatorname{res}_{s=z} f(s) = \frac{g^{(m)}(z)}{m!}.$$

Dies ist bekannt.

2.4.2 Die glättende Funktion

Wie bereits erwähnt, müssen wir uns als nächstes mit der Summe $S(\alpha, \beta, \chi_0)$ (Gleichung (2.14)) beschäftigen.

Die Möbiussche Umkehrformel gibt für beliebige zahlentheoretische Funktionen f

$$f((h, k)) = \sum_{d|(h, k)} \sum_{e|d} \mu(e) f\left(\frac{d}{e}\right),$$

und so folgt, wenn wir den Hauptcharakter als $\chi_0 = \chi \bar{\chi}$ darstellen, für die in (2.14) definierte Funktion $S(\alpha, \beta, \chi_0)$:

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta, \chi_0) &= \sum_{h, k \leq y} \frac{b(h, P_1) b(k, P_2)}{h^{1+\alpha} k^{1+\beta}} \chi(h) \bar{\chi}(k) \\ &\quad \times \sum_{d|(h, k)} d^{1+\alpha+\beta} \bar{\chi}\left(\frac{h}{d}\right) \chi\left(\frac{k}{d}\right) \sum_{e|d} \frac{\mu(e)}{e^{1+\alpha+\beta}} \chi_0(e) \\ &= \sum_{d \leq y} \frac{F(d, 1 + \alpha + \beta, \chi_0) \chi_0(d)}{d} \sum_{h \leq \frac{y}{d}} \frac{b(hd, P_1) \chi_0(h)}{h^{1+\alpha}} \sum_{k \leq \frac{y}{d}} \frac{b(kd, P_2) \chi_0(k)}{h^{1+\beta}}, \end{aligned}$$

wobei wie in Lemma 2.4.2

$$F(d, s, \chi) = \prod_{p|d} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_{e|d} \mu(e) \frac{\chi(e)}{e^s}$$

ist. Nun wählen wir die Koeffizienten $b(n, P)$ der glättenden Funktion, wie in Kapitel 1 angekündigt, als

$$b(n, P) = \mu(n) P\left(1 - \frac{\log n}{\log y}\right),$$

wobei P ein Polynom mit $P(0) = 0$ bezeichnet.

Setzen wir

$$(2.17) \quad G_P(d, z, \chi_0) := \sum_{\substack{n \leq \frac{y}{d} \\ (n, d)=1}} \frac{\mu(n)}{n^z} \chi_0(n) P\left(1 - \frac{\log nd}{\log y}\right),$$

so folgt

$$(2.18) \quad S(\alpha, \beta, \chi_0) = \sum_{d \leq y} \frac{\mu(d)}{d} \chi_0(d) F(d, 1 + \alpha + \beta, \chi_0) \\ \times G_{P_1}(d, 1 + \alpha, \chi_0) G_{P_2}(d, 1 + \beta, \chi_0) .$$

2.4.3 Berechnung von $G_P(d, z, \chi_0)$

Die Berechnung von $G_P(d, z, \chi_0)$ (Gleichung (2.17)) erfolgt mit einer auf Selberg ([Sel42]) zurückgehenden Technik ganz analog zu [Bau92, A.4]. Daß wir die Funktion P , die bis auf den Faktor $\mu(n)$ die Koeffizienten der glättenden Funktion definiert, als Polynom gewählt haben, wird sich hier nun bemerkbar machen. Dieser Umstand erlaubt uns nämlich, $G_P(d, z, \chi_0)$ mit funktionentheoretischen Methoden zu behandeln.

Wegen (2.18) interessieren uns nur die Fälle $z = 1 + \alpha$ beziehungsweise $z = 1 + \beta$. Wir können also von $|1 - z| \ll \mathfrak{L}^{-1}$ ausgehen.

Sei jetzt $P(x) = \sum_{m=0}^M a(m) x^m$ mit $\deg P = M$. Wegen $P(0) = 0$ ist $a(0) = 0$.

Sei zur Abkürzung $x = \frac{y}{d} \geq 1$. Es folgt

$$G_P(d, z, \chi_0) = \sum_{1 \leq m \leq M} \frac{a(m)}{\log^m y} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,d)=1}} \frac{\mu(n)}{n^z} \chi_0(n) \log^m \frac{x}{n} .$$

Mit Lemma 2.4.1 ergibt sich für die innere Summe im Bereich $c \geq 2 - \operatorname{Re} z$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,d)=1}} \frac{\mu(n)}{n^z} \chi_0(n) \log^m \frac{x}{n} = \frac{m!}{2\pi i} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,d)=1}} \frac{\mu(n) \chi_0(n)}{n^z} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{n^s s^{m+1}} ds \\ = \frac{m!}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-z}}{(s-z)^{m+1}} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n) \chi_0(n)}{n^s} ds .$$

Für $\sigma > 1$ gilt

$$\sum_{\substack{n=1 \\ (n,d)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n) \chi_0(n)}{n^s} = \prod_{p|d} (1 - \chi_0(p) p^{-s}) = (L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0))^{-1} ,$$

und dadurch erhalten wir

$$(2.19) \quad G_P(d, z, \chi_0) = \sum_{m=1}^M \frac{a(m)}{\log^m y} \cdot \frac{m!}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-z}}{L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0) (s-z)^{m+1}} ds ,$$

wobei uns, wie gesagt, nur die Fälle $z = 1 + \alpha$ beziehungsweise $z = 1 + \beta$ interessieren. Betrachten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z = 1 + \alpha = 1 + \frac{A}{\mathfrak{L}}$.

Im Bereich

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log q(|t| + 2)}$$

mit einem $c_1 > 0$ ist $L(s, \chi_0)$ bekanntlich (vgl. z.B. [Pra57]) nullstellenfrei. Sei

$$\delta = \frac{c_2}{\log \log y}$$

mit einem geeigneten $c_2 > 0$, und sei t_0 fest und hinreichend groß gewählt. Wir hatten $q = o(\log T) = o(\log y)$ vorausgesetzt, und somit ist

$$t_0 \leq \frac{\log y}{q} - 2 ,$$

wenn $y = T^\theta$ hinreichend groß ist. Weiter gilt

$$1 - \frac{c_1}{\log q(|t| + 2)} < 1 - \delta \leq \sigma \quad \text{für } \sigma \geq 1 - \delta \text{ und } |t| \leq t_0,$$

und schließlich liegt der Punkt $1 + \alpha$ „rechts“ von $1 - \delta$:

$$(1 + \alpha) - (1 - \delta) = \frac{A}{\mathfrak{L}} + \frac{c_2}{\log \log y} \gg \frac{1}{\log \log y} .$$

Die weitere Rechnung verläuft nun analog zu [Bau92, A.4]. Verschieben wir den Integrationsweg in (2.19) nach $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_5$, wobei

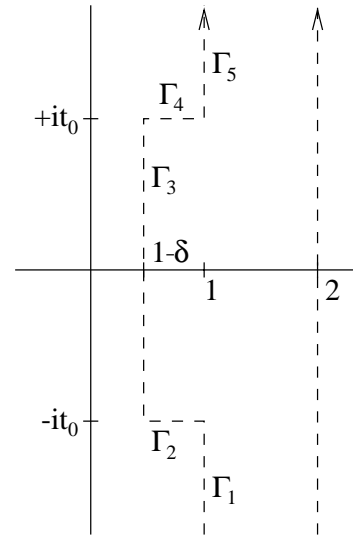
$$\Gamma_1 = \{\sigma + it : \sigma = 1, -\infty < t \leq -t_0\} ,$$

$$\Gamma_2 = \{\sigma + it : 1 \geq \sigma \geq 1 - \delta, t = -t_0\} ,$$

$$\Gamma_3 = \{\sigma + it : \sigma = 1 - \delta, -t_0 \leq t \leq t_0\} ,$$

$$\Gamma_4 = \{\sigma + it : 1 - \delta \leq \sigma \leq 1, t = t_0\} ,$$

$$\Gamma_5 = \{\sigma + it : \sigma = 1, t_0 \leq t < \infty\} .$$



Dabei wird der $(m + 1)$ -fache Pol des Integranden aus (2.19) in $s = 1 + \alpha$, aber keine weiteren Singularitäten, passiert. Wir erhalten

$$\frac{m!}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{x^{s-z}}{L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0)(s-z)^{m+1}} ds = \frac{m!}{2\pi i} (I_1 + \dots + I_5) + R ,$$

wobei

$$I_j = \int_{\Gamma_j} \frac{x^{s-z}}{L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0)(s-z)^{m+1}} ds \quad \text{für } j = 1, \dots, 5$$

und

$$R = m! \operatorname{res}_{s=1+\alpha} \frac{x^{s-z}}{L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0)(s-z)^{m+1}} .$$

Schätzen wir zuerst die Integrale ab. Mit den Lemmata 2.4.2, 2.4.4 und 2.4.5 folgt

$$\begin{aligned} I_1, I_5 &\ll F_1(d, 1, \chi_0) \int_{t_0}^{\infty} t^{-m-1} \log(q+2)t dt \\ &\ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) q^m \log^{-m} y \log \log y , \\ I_2, I_4 &\ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) \log \log y \int_{1-\delta}^1 x^{\sigma-1} ((\sigma-1)^2 + t_0^2)^{-(m+1)/2} d\sigma \\ &\ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) q^{m+1} \log^{-m-1} y , \\ I_3 &\ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) x^{-\delta} \log \log y \int_{-t_0}^{t_0} (\delta^2 + t^2)^{-(m+1)/2} dt \\ &\ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) x^{-\delta} (\log \log y)^{m+1} , \end{aligned}$$

und somit wegen $q = o(\log T)$

$$I_1 + \dots + I_5 \ll F_1(d, 1-\delta, \chi_0) (\log \log y + x^{-\delta} (\log \log y)^{m+1}) .$$

Wenden wir uns R zu. Sei

$$Z(s) = \frac{1}{L(s, \chi_0) F(d, s, \chi_0)} .$$

Mit Lemma 2.4.9 gilt

$$R = m! \operatorname{res}_{s=1+\alpha} \left(Z(s) \frac{x^{s-1-\alpha}}{(s-1-\alpha)^{m+1}} \right) = \sum_{\mu=0}^m \binom{m}{\mu} Z^{(\mu)}(1+\alpha) \log^{m-\mu} x .$$

Nach Lemma 2.4.2 und 2.4.7 erhalten wir

$$Z(1+\alpha) = \frac{q^{1+\alpha}}{\varphi(q)} \cdot \frac{\alpha}{F(d, 1+\alpha, \chi_0)} + O(q\mathfrak{L}^{-2} F_1(d, 1-\delta, \chi_0)) ,$$

und wegen $Z'(s) = -Z(s)\left(\frac{L'}{L}(s, \chi_0) + \frac{F'}{F}(d, s, \chi_0)\right)$ und den Lemmata 2.4.3, 2.4.8 sowie 2.4.6 ergibt sich

$$Z'(1 + \alpha) = \frac{q^{1+\alpha}}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{F(d, 1 - \alpha, \chi_0)} + O(F_1(d, 1 - \delta, \chi_0) q \log^{-1} y) .$$

Für die höheren Ableitungen benötigen wir keine asymptotische Darstellung, eine Abschätzung genügt. Mit $Z(1) = 0$ ist Z holomorph in einer Umgebung von $\{z \in \mathbb{C} : |z - (1 + \alpha)| \leq (\log \log y)^{-1}\}$. Cauchys Abschätzungen und die Lemmata 2.4.2 und 2.4.4 liefern damit

$$Z^{(\mu)}(z) \ll_{\mu} F_1(d, 1 - \delta, \chi_0) (\log \log y)^{\mu+1} .$$

Zusammengefaßt ergibt dies

$$R = \frac{q^{1+\alpha}}{\varphi(q)} (F(d, 1 + \alpha, \chi_0))^{-1} (\alpha \log^m x + m \log^{m-1} x) + O_m(F_1(d, 1 - \delta, \chi_0) \log^{m-2} y (q + (\log \log y)^3)) ,$$

und somit folgt insgesamt aus (2.19)

(2.20)

$$\begin{aligned} G_P(d, 1 + \alpha, \chi_0) &= \frac{q^{1+\alpha}}{\varphi(q)} F(d, 1 + \alpha, \chi_0)^{-1} \left(\alpha P\left(\frac{\log y/d}{\log y}\right) + \log^{-1} y P'\left(\frac{\log y/d}{\log y}\right) \right) \\ &\quad + O_M\left(F_1(d, 1 - \delta, \chi_0) (\log \log y)^3 \left(q \log^{-2} y + \left(\frac{y}{d}\right)^{-\delta} \log^{-1} y \right)\right) \\ &\ll F_1(d, 1 - \delta, \chi_0) \frac{q}{\varphi(q)} \log^{-1} y . \end{aligned}$$

Bemerkung: Vor diesem Abschnitt — und auch im weiteren Verlauf des Beweises — ist der Umstand, daß wir L -Reihen zu zueinander konjugierten Charakteren ($L(\cdot, \chi)$ und $L(\cdot, \bar{\chi})$, vgl. (2.1)) betrachten, nicht wesentlich in die Rechnungen eingegangen. In der Tat lassen sich alle Berechnungen mutatis mutandis auch durchführen, wenn statt χ und $\bar{\chi}$ beliebige Charaktere χ_1 und χ_2 zum gleichen Modul betrachtet werden, solange entweder beide Charaktere gerade oder beide ungerade sind (also solange $\chi_1(-1) = \chi_2(-1)$). In (2.18) (und in der Folge in (2.19)) tritt dann beispielsweise ein beliebiger Charakter statt des Hauptcharakters auf.

Bei Nicht-Hauptcharakteren besitzt die zugehörige L -Reihe jedoch keinen Pol bei 1, der den Einfluß der Singularitäten des Integranden von (2.19) für $z = 1 + \alpha$ beziehungsweise $z = 1 + \beta$ „dämpft“. In der Folge würde die obere Schranke für $G_P(d, z, \chi)$ zu groß für unsere Zwecke.

Ein weiteres Problem wäre bei der Betrachtung von Nicht-Hauptcharakteren die eventuell existierende Siegelsche Ausnahmestelle, die einen weiteren Pol des Integranden in der

Nähe von 1 verursachen würde. Es wäre dann erforderlich, $q = o(\log \log T)$ statt $q = o(\log T)$ vorauszusetzen.

Andererseits stellt die Betrachtung zueinander konjugierter Charaktere keine wesentliche Einschränkung dar, da in unseren Anwendungen ohnehin nur dieser Fall eine Rolle spielt.

2.5 Letzte Umformungen

Nachdem wir nun in (2.20) eine Darstellung von $G_P(d, z, \chi_0)$, und damit auch $S(\alpha, \beta, \chi_0)$ (vgl. (2.18)), gefunden haben, müssen wir unsere Resultate nur noch zusammensetzen, um den Hauptterm der Asymptotik (2.13) zu erhalten.

2.5.1 Hilfssätze

LEMMA 2.5.1

Sei $f(p) = 1 + O(p^{-c})$ mit einem $c > 0$ und $f(d) = \prod_{p|d} f(p)$, und sei χ_0 der Hauptcharakter zu einem beliebigen Modul $q \geq 1$. Dann gilt für $\nu \geq 0$

$$\sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) \log^\nu \frac{y}{d} = \mathcal{P}_f \cdot \frac{\varphi(q)}{q} \cdot L(2, \chi_0)^{-1} \cdot (\nu + 1)^{-1} \log^{\nu+1} y + O_\nu(\log^\nu y) ,$$

wobei $\mathcal{P}_f := \prod_p \left(1 + \frac{f(p) - \chi_0(p)}{\chi_0(p) - p} \right)$ absolut konvergiert.

Ist speziell

$$f(p) = \chi_0(p) \frac{1 - \chi_0(p) p^{-1-\alpha-\beta}}{(1 - \chi_0(p) p^{-1-\alpha})(1 - \chi_0(p) p^{-1-\beta})} ,$$

dann gilt

$$\mathcal{P}_f \cdot L(2, \chi_0)^{-1} = 1 + O(\mathfrak{L}^{-1}) \quad \text{für } \alpha, \beta \ll \mathfrak{L}^{-1} .$$

Dieses Lemma wird, mit wenigen Modifikationen, analog zu den entsprechenden Resultaten aus [Bau92, Lemma 3.4.3] oder [Lev74, Lemma 3.11] bewiesen.

LEMMA 2.5.2

Sei $\delta \geq 0$, $\delta' \geq 0$ und $\delta + \delta' \leq c < 1$. Sei weiter

$$F_1 = \prod_{p|d} \left(1 + \frac{\chi(p)}{p^s} \right)$$

wie in Lemma 2.4.2. Dann gilt für $r = 1, 2, \dots$

$$\sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d^{1-\delta}} F_1(d, 1 - \delta', \chi_0)^r = \begin{cases} O_{c,r}(\log y) & , \text{ falls } \delta = 0, \\ O_{c,r}\left(\frac{y^\delta}{\delta}\right) & , \text{ falls } \delta > 0. \end{cases}$$

Dieser Hilfssatz folgt analog zu [Bau92, Lemma 3.4.2].

Das folgende Lemma ist dagegen allgemein bekannt, einen Beweis findet man zum Beispiel in [Pra57, Satz IV.5.4].

LEMMA 2.5.3

Für $\sigma \geq \frac{1}{2}$ und $|t| \leq t_0$ für ein festes $t_0 > 0$ gilt, wenn χ_0 den Hauptcharakter zum Modul q bezeichnet,

$$L(s, \chi_0) = \frac{\phi(q)}{q} \cdot \frac{1}{s-1} + O(q^{1/2}) .$$

2.5.2 Einsetzen der Ergebnisse

Wir verwenden wieder die Bezeichnungen aus Lemma 2.4.2

$$F(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 - \chi(p) p^{-s}) \quad \text{und} \quad F_1(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 + \chi(p) p^{-s}) .$$

Setzen wir (2.20) in unsere Darstellung von $S(\alpha, \beta, \chi_0)$ aus (2.18) ein, so folgt:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} S(\alpha, \beta, \chi_0) = & \frac{q^{2+\alpha+\beta}}{\varphi(q)^2} \left(\alpha\beta \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) P_1 \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) P_2 \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) \right. \\ & + \frac{\alpha}{\log y} \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) P_1 \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) P_2' \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) \\ & + \frac{\beta}{\log y} \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) P_1' \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) P_2 \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) \\ & \left. + \frac{1}{\log^2 y} \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) P_1' \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) P_2' \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) \right) \\ & + O \left(\frac{q^2}{\varphi(q)} \left((\log \log y)^3 \log^{-3} y + \left(\frac{d}{y} \right)^{2\delta} (\log \log y)^6 \log^{-2} y \right) \right. \\ & \left. \times \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} F_1(d, 1 - \delta, \chi_0)^3 \right) , \end{aligned}$$

wobei

$$f(d) = \chi_0(d) \cdot \frac{F(d, 1 + \alpha + \beta, \chi_0)}{F(d, 1 + \alpha, \chi_0) F(d, 1 + \beta, \chi_0)} .$$

Setzen wir $P(x) = \sum a_\nu x^\nu$, so besteht der Hauptterm von (2.21) also aus Summanden der Form (mit $P = P_1 P_2, P_1 P_2', \dots$)

$$\sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) P \left(1 - \frac{\log d}{\log y} \right) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu \log^{-\nu} y \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} f(d) \log^\nu \frac{y}{d} .$$

Wenden wir auf die rechte Seite der letzten Gleichung Lemma 2.5.1 sowie $(\nu + 1)^{-1} = \int_0^1 t^\nu dt$ an, so ist diese

$$(2.22) \quad \begin{aligned} &= \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (\nu + 1)^{-1} \log y (1 + O(\mathfrak{L}^{-1})) + O_P(1) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q} \log y \int_0^1 P(t) dt + O_P(1) . \end{aligned}$$

Betrachten wir den Fehlerterm in (2.21): Lemma 2.5.2 gibt uns

$$\begin{aligned} &(\log \log y)^3 \log^{-3} y \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d} F_1(d, 1 - \delta, \chi_0)^3 \ll (\log \log y)^3 \log^{-2} y \\ &y^{-2\delta} (\log \log y)^6 \log^{-2} y \sum_{d \leq y} \frac{\mu^2(d)}{d^{1-2\delta}} F_1(d, 1 - \delta, \chi_0)^3 \ll (\log \log y)^7 \log^{-2} y , \end{aligned}$$

und damit erhalten wir insgesamt aus (2.21) und (2.22), gleichmäßig in q ,

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta, \chi_0) &= \frac{q^{1+\alpha+\beta}}{\varphi(q)} \cdot \frac{\theta}{\mathfrak{L}} \int_0^1 \left(AP_1(t) + \frac{1}{\theta} P_1'(t) \right) \left(BP_2(t) + \frac{1}{\theta} P_2'(t) \right) dt \\ &\quad + O\left(\frac{q^2 \log q}{\varphi(q)} (\log \log y)^7 \log^{-2} y \right) \\ &\ll \frac{q}{\varphi(q)} \mathfrak{L}^{-1} . \end{aligned}$$

Hier haben wir $\log^{-1} y = \frac{1}{\theta \mathfrak{L}} + O(\mathfrak{L}^{-2} \log q)$ (wegen $y = T^\theta$ und $\mathfrak{L} = \log \frac{qT}{2\pi}$) und $\alpha, \beta \ll \mathfrak{L}^{-1}$ verwendet.

Weiterhin gilt wegen $P_1(0) = P_2(0) = 0$

$$\int_0^1 (P_1' P_2 + P_1 P_2')(t) dt = P_1(1) P_2(1) ,$$

und daher

$$S(-\alpha, \beta, \chi_0) - S(-\beta, \alpha, \chi_0) = \frac{q}{\varphi(q)} \cdot \frac{B - A}{\mathfrak{L}} \cdot P_1(1) P_2(1) + O\left(\frac{q \log q}{\varphi(q)} \mathfrak{L}^{-2} \log^7 \mathfrak{L} \right) .$$

Bevor wir dies in unsere letzte Darstellung von M (Gleichung (2.13)) einsetzen, überlegen wir uns, daß für $\alpha \ll \mathfrak{L}^{-1}$ nach Lemma 2.5.3

$$L(1 + \alpha, \chi_0) = \frac{\varphi(q)}{q} \cdot \alpha^{-1} + O(q^{1/2})$$

und $(1 - \alpha)^{-1} = 1 + O(\mathfrak{L}^{-1})$ gilt. Abgesehen von den noch abzuschätzenden Fehlertermen, insbesondere $\mathfrak{F}_2(x)$, haben wir damit eine asymptotische Darstellung für unseren Mittelwert M gefunden: Aus (2.13) folgt für $x > 1$

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad M &= T \cdot \left(\frac{\varphi(q)}{q} S(-\alpha, \beta, \chi_0) \frac{\mathfrak{L}}{B-A} (e^{B-A} - 1) + P_1(1) P_2(1) \right) \\
 &\quad + O\left(\frac{q^{3/2}}{\varphi(q)} T \mathfrak{L}^{-1} \log^7 \mathfrak{L} + q^{-1/2} (|\mathfrak{F}_1(x)| + |\mathfrak{F}_2(x)|) \right) \\
 &= T \cdot \left(\frac{e^{B-A} - 1}{B-A} \cdot \theta \int_0^1 \left(-AP_1(t) + \frac{1}{\theta} P_1'(t) \right) \left(BP_2(t) + \frac{1}{\theta} P_2'(t) \right) dt \right. \\
 &\quad \left. + P_1(1) P_2(1) \right) \\
 &\quad + O\left(T \mathfrak{L}^{-1} \log q \log^7 \mathfrak{L} + q^{1/2+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon} + q^{-1/2} (|\mathfrak{F}_1(x)| + |\mathfrak{F}_2(x)|) \right) .
 \end{aligned}$$

2.6 Das Restglied

Nachdem wir nun das Hauptglied der asymptotischen Entwicklung auf die in Satz 1.3.1 behauptete Form gebracht haben, bleibt uns die Untersuchung des Restgliedes aus Gleichung (2.23).

Dabei sind nur noch die von x abhängigen Summanden des Fehlers von Interesse. $\mathfrak{F}_1(x)$ entstand in Abschnitt 2.3.2 durch Anwendung der Perronschen Formel und wurde in (2.9) bereits abgeschätzt durch

$$\mathfrak{F}_1(x) \ll \frac{y^{1+\eta}}{x} \left(\frac{qT}{2\pi} \right)^{1+\eta} + y \log y ,$$

wobei x noch frei zu wählen ist. Später werden wir sehen, daß wir $x = T^n$ mit einer großen absoluten Konstanten n wählen können — wir erhalten dann also $\mathfrak{F}_1(T^n) \sim y \log y = T^\theta \cdot \theta \log T$ für $T \rightarrow \infty$.

Die genaue Wahl von x wird von $\mathfrak{F}_2(x)$ abhängen, von dem Restglied also, welches durch Estermanns Methode in Abschnitt 2.3.3 in unsere Rechnungen eingeführt wurde. Wie bereits erwähnt, stellt dies den kritischen Teil des Beweises dar, insbesondere den Teil, aufgrund dessen wir $\theta \leq \theta_2 < \frac{1}{2}$ wählen müssen.

2.6.1 Hilfssätze

LEMMA 2.6.1
 Bezeichne $\tau(\chi) = \sum_{\nu=1}^q \chi(\nu) e\left(\frac{\nu}{q}\right)$ die Gaußsche Summe eines Charakters χ zum Modul q .

Für $(j, q) = 1$ gilt

$$e\left(\frac{j}{q}\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\bar{\chi}) \chi(j) .$$

Dabei bedeutet $\sum_{\chi \bmod q}$, daß über alle Dirichlet-Charaktere χ zum Modul q summiert wird.

Beweis: Für teilerfremde j und q gilt

$$\chi(j) \tau(\bar{\chi}) = \sum_{\nu=1}^q \chi(j) \bar{\chi}(\nu) e\left(\frac{\nu}{q}\right) = \sum_{h=1}^q \bar{\chi}(h) e\left(\frac{jh}{q}\right) ,$$

wenn wir $\nu \equiv jh \pmod{q}$ setzen ([Dav80]). Damit folgt

$$\sum_{\chi \bmod q} \chi(j) \tau(\bar{\chi}) = \sum_{h=1}^q e\left(\frac{jh}{q}\right) \sum_{\chi \bmod q} \bar{\chi}(h) = e\left(\frac{j}{q}\right) \varphi(q)$$

und hieraus die Behauptung. □

LEMMA 2.6.2

Seien a_1, \dots, a_J zahlentheoretische Funktionen und sei $a = a_1 * \dots * a_J$, wobei $*$ die Faltung dieser Funktionen bezeichnet.

Dann gilt für $d \in \mathbb{N}$ und multiplikative $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) a(\nu d) \nu^{-s} = \sum_{d_1 \dots d_J = d} \prod_{j=1}^J \sum_{(\nu, d_1 \dots d_{j-1})=1}^{\nu} f(\nu) a_j(\nu d_j) \nu^{-s} ,$$

sofern die Dirichlet-Reihen absolut konvergieren.

Für $J = 1$ ist die Behauptung trivial, für $J = 2$ folgt sie aus der Definition der Faltung und für $J \geq 3$ durch Iteration.

LEMMA 2.6.3

Sei $\tau_n = \underbrace{1 * \dots * 1}_{n\text{-mal}}$ die n -te Teilerfunktion. Dann gilt

$$\tau_n(d) \tau_m(d) \leq \tau_{nm}(d) \quad \text{und} \quad \tau_n(d) \tau_n(e) \leq \tau_n(de) .$$

Der Beweis ergibt sich aus $\tau_n(p^r) = \binom{n+r-1}{r}$ und der Multiplikativität von $\tau_n(\cdot)$.

2.6.2 Eine analytische Fortsetzung

Zur Erinnerung: Nach (2.11) gilt die Darstellung

$$(2.24) \quad \mathfrak{F}_2(x) = \sum_{h,k \leq y} \frac{\chi(h) \bar{\chi}(k) b(h, P_1) b(k, P_2)}{k} \int_{\Gamma_{1+\eta}(x)} \frac{\tau^s}{s} (qK)^{-2s-\alpha-\beta} D(s) ds,$$

wobei $\Gamma_c(x)$ einen Pfad darstellt, der auf geraden Wegstücken von $c - ix$ über $\frac{1}{2} - ix$ und $\frac{1}{2} + ix$ nach $c + ix$ verläuft. Weiter ist $\eta > 0$ fest gewählt, $\tau = \frac{qTk}{2\pi h}$, $K = \frac{k}{(h,k)}$ und $D(s)$ nach (2.10) gegeben durch

$$(2.25) \quad (qK)^{-2s-\alpha-\beta} D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \chi(m)}{n^{s+\alpha} m^{s+\beta}} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) \quad \text{für } \sigma > 1$$

beziehungsweise durch die entsprechende analytische Fortsetzung nach $0 < \sigma \leq 1$. Wie bislang ist auch weiterhin $\alpha, \beta \ll \mathfrak{L}^{-1}$.

Während zur Berechnung der Residuen, die unseren Hauptterm lieferten, die Rückführung auf Zeta-Funktionen nützlich war, muß die Abschätzung dieses Integrals auf andere Weise erfolgen. Das Problem besteht in gewissem Sinn wiederum darin, daß die Summen über n und m in (2.25) durch die nicht-multiplikative Exponentialfunktion gekoppelt sind. Wir werden daher die Exponentialfunktion durch eine geeignete Summe von Dirichlet-Charakteren ausdrücken (Lemma 2.6.1) und können dann später den wesentlichen Teil des Integrals in $\mathfrak{F}_2(x)$ mittels Abschätzungen aus der Theorie des Großen Siebes (Lemma 2.7.1 und 2.7.2) handhaben.

Die Idee, Abschätzungen aus der Theorie des Großen Siebes anzuwenden, taucht in ähnlichem Zusammenhang bereits bei [CG85] auf, die dortige Methode basiert jedoch darauf, nur primitive Charaktere zu betrachten, was in unserem Fall nicht möglich ist (das Produkt zweier primitiver Charaktere ist nicht notwendig wieder primitiv).

Wegen des Faktors k^{-1} in (2.24) ist die Summe über h problematischer, nehmen wir sie nach innen und leiten eine Darstellung ihrer analytischen Fortsetzung her:

Sei $\sigma > 1$. Nach (2.24) und (2.25) gilt

$$(2.26) \quad \mathfrak{F}_2(x) = \int_{\Gamma_{1+\eta}(x)} \sum_{k \leq y} \frac{\bar{\chi}(k) b(k, P_2)}{k^{1-s}} \cdot \mathcal{H}(s, k) \left(\frac{qT}{2\pi}\right)^s \frac{ds}{s},$$

wobei $\mathcal{H}(s, k)$ die Summe über h bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(s, k) &= \sum_{h \leq y} \frac{b(h, P_1)}{h^s} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(hnm)}{n^{s+\alpha} m^{s+\beta}} e\left(-\frac{nmh}{qk}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j^{-s} a(j) e\left(-\frac{j}{qk}\right), \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$a(j) = \sum_{\substack{n,m,h \\ h \leq y \\ nmh=j}} \frac{b(h, P_1) \chi(hnm)}{n^\alpha m^\beta} .$$

Sei $J = \frac{j}{(j, qk)}$ und $Q = \frac{qk}{(j, qk)}$. Nach Lemma 2.6.1 und der Möbiusschen Umkehrformel gilt

$$\begin{aligned} e\left(-\frac{j}{qk}\right) &= \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\psi \bmod Q} \tau(\bar{\psi}) \psi(-J) \\ &= \sum_{d|(j, qk)} \sum_{e|d} \mu\left(\frac{d}{e}\right) \varphi\left(\frac{qk}{e}\right)^{-1} \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{e}} \tau(\bar{\psi}) \psi\left(-\frac{j}{e}\right) . \end{aligned}$$

Dabei bedeutet $\sum_{\psi \bmod \frac{qk}{e}}$, daß die Summe über alle Charaktere ψ modulo $\frac{qk}{e}$ gebildet wird.

Weiter gilt für diese Charaktere

$$\psi\left(-\frac{d}{e}\right) \neq 0 \iff \left(\frac{d}{e}, \frac{qk}{e}\right) = 1 \iff e = d$$

und damit

$$(2.27) \quad \mathcal{H}(s, k) = \sum_{d|qk} \frac{1}{d^s \varphi\left(\frac{qk}{d}\right)} \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \psi(-1) \tau(\bar{\psi}) A(s, d, \psi) ,$$

wobei

$$A(s, d, \psi) = \sum_{j=1}^{\infty} a(jd) \psi(j) j^{-s} .$$

Diese Dirichlet-Reihe ist das Objekt unserer nächsten Rechnungen. Setzen wir

$$a_1(n) = \frac{\chi(n)}{n^\alpha} , \quad a_2(n) = \frac{\chi(n)}{n^\beta} \quad \text{und} \quad a_3(n) = \begin{cases} b(n, P_1) \chi(n) & , \text{ falls } n \leq y, \\ 0 & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

so erhalten wir

$$a(j) = \sum_{n|j} a_1(n) \sum_{m|\frac{j}{n}} a_2(m) a_3\left(\frac{j}{nm}\right) = (a_1 * a_2 * a_3)(j) .$$

Die Faltung der Koeffizienten entspricht der Multiplikation der zugehörigen Dirichlet-Reihen, und so folgt nach Lemma 2.6.2

$$A(s, d, \psi) = \sum_{d_1 d_2 d_3 = d} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \chi(nd_1) d_1^{-\alpha} n^{-s-\alpha} \right) \\ \times \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, d_1)=1}}^{\infty} \psi(m) \chi(md_2) d_2^{-\beta} m^{-s-\beta} \right) \\ \times \left(\sum_{\substack{h \leq \frac{y}{d_3} \\ (h, d_1 d_2)=1}}^{\infty} \psi(h) \chi(hd_3) b(hd_3, P_1) h^{-s} \right).$$

Die Dirichlet-Reihen konvergieren wegen $\alpha, \beta \ll \mathfrak{L}^{-1}$ für $\sigma > 1$ absolut. Da aber

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \chi(nd_1) d_1^{-\alpha} n^{-s-\alpha} = d_1^{-\alpha} \chi(d_1) L(s + \alpha, \psi\chi)$$

und

$$\sum_{\substack{m=1 \\ (m, d_1)=1}}^{\infty} \psi(m) \chi(md_2) d_2^{-\beta} m^{-s-\beta} = d_2^{-\beta} \chi(d_2) \prod_{p|d_1} (1 - \psi(p) \chi(p) \cdot p^{-s-\beta})^{-1} \\ = d_2^{-\beta} \chi(d_2) F(d_1, s + \beta, \psi\chi) L(s + \beta, \psi\chi),$$

wobei $F(d, s, \chi) = \prod_{p|d} (1 - \chi(p) p^{-s})$, haben wir eine analytische Fortsetzung von $A(s, d, \psi)$

in den Bereich $\sigma \leq 1$ gefunden:

$$A(s, d, \psi) = L(s + \alpha, \psi\chi) L(s + \beta, \psi\chi) \sum_{d_1 d_2 d_3 = d} d_1^{-\alpha} d_2^{-\beta} \chi(d_1 d_2) F(d_1, s + \beta, \psi\chi) \\ \times \sum_{\substack{h \leq \frac{y}{d_3} \\ (h, d_1 d_2)=1}} b(hd_2, P_1) \chi(hd_3) \psi(h) h^{-s}.$$

Sei $\tau_n = \underbrace{1 * \cdots * 1}_{n\text{-mal}}$ die n -te Teilerfunktion. Für $\sigma > 0$ haben wir

$$F(d, s, \chi) = \sum_{n|d} \mu(n) \chi(n) n^{-s} \ll \sum_{n|d} 1 = \tau_2(d),$$

und damit und mit Lemma 2.6.3 erhalten wir für $\sigma > 0$ wegen $\sum_{d_1 d_2 d_3 = d} 1 = \tau_3(d)$

$$(2.28) \quad A(s, d, \psi) \ll \tau_6(d) |L(s + \alpha, \psi\chi) L(s + \beta, \psi\chi) \Psi(s, \psi)|.$$

Hierbei ist $\Psi(s, \psi) = \sum_{h \leq y} \psi(h) c(h) h^{-s}$ eine Dirichlet-Reihe mit geeigneten beschränkten Koeffizienten $c(h)$.

2.7 Abschätzung des Restglieds

2.7.1 Hilfssätze

Im folgenden benötigen wir noch drei Lemmata, von denen die ersten beiden aus der Theorie des Großen Siebes stammen.

LEMMA 2.7.1

Sei $x \geq 2$ und $|\frac{1}{2} - \sigma| \ll (\log qx)^{-1}$. Dann gilt

$$\sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \ll \varphi(q) (\log x \cdot \log^4 qx) .$$

Dabei bedeutet $\sum_{\chi \bmod q}^*$, daß über alle primitiven Charaktere zum Modul q summiert wird.

Beweis: Wir folgern die Behauptung aus einem Mittelwertsatz von Montgomery ([Mon71, Thm. 10.1]):

$$(2.29) \quad \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 dt \ll \varphi(q) x \log^4 qx \quad \text{für } x \geq 2 \text{ und } |\frac{1}{2} - \sigma| \ll \log^{-1} qx .$$

Mit partieller Integration folgt

$$(2.30) \quad \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 \frac{dt}{(\frac{1}{4} + t^2)^{1/2}} \\ = \frac{1}{(\frac{1}{4} + x^2)^{1/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 dt + \int_{-x}^x \left(\frac{\tau}{(\frac{1}{4} + \tau^2)^{3/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_0^\tau |L(s, \chi)|^4 dt \right) d\tau .$$

Das äußere Integral $\int_{-x}^x \dots d\tau$ des letzten Summanden zerlegen wir in drei Teilintegrale über die Intervalle $[-x, -2]$, $[-2, 2]$ sowie $[2, x]$. Es gilt

$$\int_{-x}^{-2} |L(s, \chi)|^4 dt = - \int_2^x |L(s, \bar{\chi})|^4 dt .$$

Da bei Summation über alle primitiven Charaktere modulo q durch die Substitution $\chi \mapsto \bar{\chi}$ nur die Reihenfolge der Summation geändert wird, folgt

$$\int_{-x}^{-2} \frac{\tau}{(\frac{1}{4} + \tau^2)^{3/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \left(\int_0^\tau |L(s, \chi)|^4 dt \right) d\tau = \int_2^x \frac{\tau}{(\frac{1}{4} + \tau^2)^{3/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \left(\int_0^\tau |L(s, \chi)|^4 dt \right) d\tau .$$

Der Beitrag der Teilintegrale über die Intervalle $[-x, -2]$ und $[2, x]$ zu (2.30) beläuft sich also unter Verwendung von Montgomerys Satz (2.29) auf

$$\begin{aligned} 2 \int_2^x \frac{\tau}{\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)^{3/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \left(\int_0^\tau |L(s, \chi)|^4 dt \right) d\tau &\ll \int_2^x \frac{\tau^2}{\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)^{3/2}} \cdot \varphi(q) \cdot \log^4 q \tau d\tau \\ &\ll \varphi(q) \log x \log^4 qx . \end{aligned}$$

Das verbleibende Teilintegral über das Intervall $[-2, 2]$ ist unproblematisch, denn für die dort angenommenen Werte von s gilt $L(s, \chi) \ll \log q$ (dies folgt aus Lemma 2.3.2 und $\zeta(s, x) = x^{-s} + (s-1)^{-1} + O(1)$), und so folgt

$$\int_{-2}^2 \frac{\tau}{\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)^{3/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \left(\int_0^\tau |L(s, \chi)|^4 dt \right) d\tau \ll \varphi(q) \log^4 q .$$

Insgesamt ergibt sich mit diesen Abschätzungen aus (2.30), wiederum mit (2.29)

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 \frac{dt}{\left(\frac{1}{4} + t^2\right)^{1/2}} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{4} + x^2\right)^{-1/2}} \sum_{\chi \bmod q}^* \int_{-x}^x |L(s, \chi)|^4 dt \\ &\quad + O(\varphi(q) \log x \log^4 qx + \varphi(q) q^2) \\ &\ll \varphi(q) \log x \log^4 qx \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

LEMMA 2.7.2

Sei $S(t, \chi) = \sum_{n \leq y} a_n \cdot \chi(n) n^{-it}$ mit einem Charakter $\chi \bmod q$ und beliebigen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $x \geq 2$

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-x}^x |S(t, \chi)|^2 \frac{dt}{\left|\frac{1}{2} + it\right|} \ll \sum_{n \leq y} (q \log x + n) |a_n|^2 .$$

Der Beweis verläuft analog zu dem von Lemma 2.7.1, statt Montgomerys Satz wird jedoch ein Resultat von Gallagher ([Gal70, Thm. 2]) benutzt:

$$\sum_{\chi \bmod q} \int_{-x}^x |S(t, \chi)|^2 dt \ll \sum_{n \leq y} (qx + n) |a_n|^2 \quad \text{für } x \geq 1 .$$

LEMMA 2.7.3

Sei χ Charakter zum Modul q , ψ Charakter zum Modul κ und $(\psi\chi)^*$ der zum Charakter $\psi\chi$ gehörige primitive Charakter. Für $\sigma > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$L(s, \psi\chi) \ll [q, \kappa]^\varepsilon |L(s, (\psi\chi)^*)| .$$

Dies folgt sofort aus Satz 1.2.2 und den Ergebnissen aus [Bur62].

2.7.2 Die horizontalen Wege

Das Verhalten des Fehlerterms $\mathfrak{F}_2(x)$ (Gleichung (2.26)) wollen wir zuerst auf den horizontalen Teilen von $\Gamma_{1+\eta}(x)$ abschätzen. Sei daher $s = \sigma \pm ix$ mit $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 + \eta$. Suchen wir zunächst eine obere Schranke für die in (2.27) auftretende Funktion $A(s, d, \psi)$. Für diese Funktion haben wir ja bereits in Abschnitt 2.6.2 eine Fortsetzung in den Bereich $0 \leq \sigma \leq 1$ sowie eine erste Abschätzung (2.28) gefunden.

Nach [Kol79, Thm. 2] gilt für $x \geq 2$, $\sigma \geq \frac{1}{2}$ und alle Charaktere χ zum Modul q

$$L(\sigma + ix, \chi) \ll x^{1/6} q^{1/2} \log^3 qx .$$

Für die in (2.28) auftretende Dirichletreihe $\Psi(s, \psi)$ gilt in der Halbebene $\sigma > 0$

$$\Psi(\sigma + ix, \psi) \ll \sum_{h \leq y} h^{-\sigma} \ll y^{1-\sigma} \log y ,$$

und daher folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$A(\sigma + ix, d, \psi) \ll \tau_6(d) \left[q, \frac{qk}{d} \right]^{1+\varepsilon} x^{1/3+\varepsilon} y^{1-\sigma} \log y .$$

$[n, m]$ bezeichnet hierbei das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen n und m .

Setzen wir dies in (2.27) ein, so erhalten wir

$$\mathcal{H}(\sigma + ix, k,) \ll x^{1/3+\varepsilon} y^{1-\sigma} \log y \sum_{d|qk} \frac{\tau_6(d)}{d^\sigma \varphi\left(\frac{qk}{d}\right)} \left[q, \frac{qk}{d} \right]^{1+\varepsilon} \sum_{\psi\left(\frac{qk}{d}\right)} |\tau(\overline{\psi})| .$$

In Abschnitt 1.2.1 hatten wir den Führer eines Charakters definiert. Sei nun q^* der Führer von $\overline{\psi}$ und sei $\overline{\psi}^*$ der zu $\overline{\psi} \bmod \frac{qk}{d}$ gehörige primitive Charakter modulo q^* . Sei $\frac{qk}{d} = rq^*$. Dann gilt nach [Dav80, § 9]

$$|\tau(\overline{\psi})| = \left| \mu(r) \overline{\psi}^*(r) \tau(\overline{\psi}^*) \right| = \sqrt{q^*} \leq \left(\frac{qk}{d} \right)^{1/2} ,$$

und für unsere Summe $\mathcal{H}(\sigma + ix, k)$ erhalten wir wegen $\sum_{d|qk} \tau_6(d) \leq \tau_7(qk)$ und Lemma 2.6.3

$$\mathcal{H}(\sigma + ix, k) \ll x^{1/3+\varepsilon} (qk)^{3/2+\varepsilon} \tau_7(q) \tau_7(k) y^{1-\sigma} \log y .$$

Wegen (2.26) ist demnach der Beitrag der horizontalen Wegstücke von $\Gamma_{1+\eta}(x)$ zum Fehlerterm $\mathfrak{F}_2(x)$ mit $s = \sigma \pm ix$

$$\begin{aligned}
(2.31) \quad & \int_{1/2}^{1+\eta} \sum_{k \leq y} \frac{\bar{\chi}(k) b(k, P_2)}{k^{1-s}} \mathcal{H}(s, k) \left(\frac{qT}{2\pi} \right)^s \frac{d\sigma}{s} \\
& \ll q^{3/2+\varepsilon} \tau_7(q) x^{1/3+\varepsilon} y \log y \int_{1/2}^{1+\eta} y^{-\sigma} \left(\frac{qT}{2\pi} \right)^\sigma \sum_{k \leq y} k^{1/2+\sigma+\varepsilon} \tau_7(k) \frac{d\sigma}{(\sigma^2 + x^2)^{1/2}} \\
& \ll q^{5/2+\eta+\varepsilon} \tau_7(q) x^{-2/3+\varepsilon} T^{1+\eta} y^{3-\eta+\varepsilon} \log^q y \\
& =: \mathfrak{F}_{21}(x) ,
\end{aligned}$$

wobei wir $\sum_{k \leq y} \tau_n(k) \ll y \log^{n-1} y$ ([Tit88, 12.1]) verwendet haben.

Da wir später $x = T^n$ mit einer hinreichend großen absoluten positiven Konstanten n wählen werden, wird dieser Teil des Fehlerterms beliebig klein und spielt in Bezug auf die gesamte Abschätzung keine Rolle.

2.7.3 Der vertikale Weg

Auf dem vertikalen Teilpfad von $\Gamma_{1+\eta}(x)$, also auf der Strecke $[\frac{1}{2} - ix, \frac{1}{2} + ix]$, läßt sich unser Fehlerglied nicht so einfach abschätzen, wie auf den horizontalen Teilen. Tatsächlich wird sich bald zeigen, daß es sich hier um den Teil des Beweises handelt, der das Restglied liefert, welches uns zwingt, $\theta < \frac{1}{2}$ zu wählen.

Sei $\sigma = \frac{1}{2}$ und $|t| \leq x$. Dann folgt aus (2.27), (2.28) und mit den Lemmata 2.7.3 und 2.4.6

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \leq y} \frac{\bar{\chi}(k) b(k, P_2)}{k^{1-s}} \mathcal{H}(s, k) \\
& \ll \sum_{k \leq y} \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{d|qk} \frac{1}{d^{1/2} \varphi\left(\frac{qk}{d}\right)} \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} |\psi(-1) \tau(\bar{\psi}) A(s, d, \psi)| \\
& \ll q^{1/2} \sum_{k \leq y} \frac{1}{k^{1/2}} \sum_{d|qk} \frac{\tau_6(d)}{d \varphi\left(\frac{qk}{d}\right)} \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} |L(s + \alpha, \psi\chi) L(s + \beta, \psi\chi) \Psi(s, \psi)| \\
& \ll \frac{1}{q^{1/2-\varepsilon}} \sum_{k \leq y} \frac{1}{k^{1-\varepsilon}} \sum_{d|qk} \frac{\tau_6(d)}{d^\varepsilon} \left[q, \frac{qk}{d} \right]^\varepsilon \\
& \quad \times \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} |L(s + \alpha, (\psi\chi)^*) L(s + \beta, (\psi\chi)^*) \Psi(s, \psi)| .
\end{aligned}$$

Der Beitrag auf dem vertikalen Teilweg von $\Gamma_{1+\eta}(x)$ zu $\mathfrak{F}_2(x)$ ist also wegen (2.26)

$$\begin{aligned}
(2.32) \quad & \int_{\frac{1}{2}-ix}^{\frac{1}{2}+ix} \sum_{k \leq y} \frac{\bar{\chi}(k) b(k, P_2)}{k^{1-s}} \mathcal{H}(s, k) \left(\frac{qT}{2\pi} \right)^s \frac{ds}{s} \\
& \ll q^\varepsilon T^{1/2} \sum_{k \leq y} k^{-1+\varepsilon} \sum_{d|qk} \frac{\tau_6(d)}{d^\varepsilon} \left[q, \frac{qk}{d} \right]^\varepsilon \\
& \quad \times \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \int_{-x}^x |L(s + \alpha, (\psi\chi)^*) L(s + \beta, (\psi\chi)^*) \Psi(s, \psi)| \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \\
& =: \mathfrak{F}_{22}(x)
\end{aligned}$$

Der interessante Teil ist hierbei die Summe über ψ . Die Höldersche Ungleichung gibt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \int_{-x}^x |L(s + \alpha, (\psi\chi)^*) L(s + \beta, (\psi\chi)^*) \Psi(s, \psi)| \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \\
& \leq \left(\sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \int_{-x}^x \left| L\left(\frac{1}{2} + \alpha + it, (\psi\chi)^*\right) \right|^4 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \right)^{1/4} \\
& \quad \times \left(\sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \int_{-x}^x \left| L\left(\frac{1}{2} + \beta + it, (\psi\chi)^*\right) \right|^4 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \right)^{1/4} \\
& \quad \times \left(\sum_{\psi \bmod \frac{qk}{d}} \int_{-x}^x \left| \Psi\left(\frac{1}{2} + it, \psi\right) \right|^2 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wählen wir jetzt, wie bereits angekündigt, $x = T^n$ mit einer hinreichend großen absoluten Konstanten n (zum Beispiel $n = 10$). Dann gilt $\mathfrak{F}_1(x) \sim y \log y$ und $\mathfrak{F}_{21}(x)$ wird mit wachsendem T beliebig klein.

Sei zur Abkürzung $m := \frac{qk}{d}$. Durchläuft ψ alle (paarweise verschiedenen) Charaktere zum Modul m , so durchläuft $\psi\chi$ ebenfalls paarweise verschiedene Charaktere modulo $[q, m]$ und wegen Satz 1.2.1 durchläuft $(\psi\chi)^*$ paarweise verschiedene primitive Charaktere modulo des Führers $\kappa := ([q, m])^*$. Wir erhalten dann mit Lemma 2.7.1 und wegen $\alpha, \beta \ll \mathfrak{L}$ sowie $x = T^n$

$$\begin{aligned}
\sum_{\psi \bmod m} \int_{-x}^x \left| L\left(\frac{1}{2} + \alpha + it, (\psi\chi)^*\right) \right|^4 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} & \leq \sum_{\psi \bmod \kappa}^* \int_{-x}^x \left| L\left(\frac{1}{2} + \alpha + it, \psi\right) \right|^4 \frac{dt}{|\frac{1}{2} + it|} \\
& \ll \varphi(\kappa) \log^5(x\kappa) \\
& \ll [q, m] \log^5(x[q, m]).
\end{aligned}$$

Ganz analog erhalten wir mit Lemma 2.7.2, wenn wir die Funktion $\Psi(s, \psi)$ aus (2.28) in der Form $\Psi(s, \psi) = \sum_{\nu \leq y} \psi(\nu) c(\nu) \nu^{-s}$ darstellen,

$$\sum_{\psi \bmod m} \int_{-x}^x \left| \Psi\left(\frac{1}{2} + it, \psi\right) \right|^2 \frac{dt}{\left|\frac{1}{2} + it\right|} \ll \sum_{\nu \leq y} \frac{(m \log x + \nu) |c(\nu)|^2}{\nu} \ll m \log x \log y + y .$$

Zusammengenommen ist der Fehler, der auf dem vertikalen Teilpfad entsteht, gemäß (2.32)

$$\mathfrak{F}_{22}(x) \ll q^\varepsilon T^{1/2} \sum_{k \leq y} k^{-1+\varepsilon} \sum_{d|qk} \tau_6(d) \left(\frac{qk}{d}\right)^\varepsilon (qk)^{1/2} \log^{5/2}(xqk) \left(y + \frac{qk}{d} \log x \log y\right)^{1/2} .$$

Wegen $x = T^n$ erhalten wir hieraus mit Lemma 2.6.3 und $\sum_{k \leq y} \tau_7(k) \ll y^{1+\varepsilon}$ sowie $\tau_7(q) \ll q^\varepsilon$ durch eine einfache Rechnung

$$(2.33) \quad \mathfrak{F}_{22}(x) \ll q^{1+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon} .$$

Das gesamte Fehlerglied in (2.23) ist daher und wegen (2.9) und (2.31)

$$\ll q \log q T \mathfrak{L}^{-1} \log^7 \mathfrak{L} + q^{1/2+\varepsilon} T^{1/2+\varepsilon} y^{1+\varepsilon} .$$

Da $y = T^\theta$ für $\theta \leq \theta_2 < \frac{1}{2}$, haben wir somit gezeigt, daß ein $\delta > 0$ existiert, so daß für hinreichend große T

$$(2.34) \quad \frac{1}{T} \int_{c+i}^{c+iT} L(s + \alpha, \chi) L(1 - s - \beta, \bar{\chi}) B_y(s, P_1, \chi) B_y(1 - s, P_2, \bar{\chi}) ds \\ = \frac{e^{B-A} - 1}{B - A} \theta \int_0^1 \left(-AP_1(t) + \frac{1}{\theta} P_1'(t) \right) \left(BP_2(t) + \frac{1}{\theta} P_2'(t) \right) dt + P_1(1) P_2(1) + O(T^{-\delta})$$

gilt, solange $q = o(\log T)$ ist.

Hiermit haben wir nun die Behauptung von Satz 1.3.1.

□

Kapitel 3

Nullstellenverteilung

3.1 Der Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden

3.1.1 Problemstellung

Als erste Anwendung unseres Mittelwertsatzes Satz 1.3.1 wollen wir nun eine Abschätzung des Anteils derjenigen Nullstellen von $L(s, \chi)$ herleiten, die auf der kritischen Geraden liegen.

Wegen Satz 1.2.2 haben L -Reihen zu nicht-primitiven Charakteren die gleichen Nullstellen wie die L -Reihen zu den zugehörigen primitiven Charakteren. Daher werden wir uns nun nur noch mit L -Reihen zu primitiven Charakteren befassen. *Unter einem Charakter verstehen wir deshalb im weiteren Verlauf dieses Kapitels stets einen primitiven Charakter.* Bekanntlich liegen nicht nur im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$ unendlich viele Nullstellen, es ist auch bekannt, daß auf der kritischen Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$ unendlich viele Nullstellen liegen. Zuerst ist also zu klären, was wir unter oben angesprochenem Anteil verstehen.

Sei

$$N(T, \chi) = \#\{s \in \mathbb{C} : L(s, \chi) = 0 \text{ mit } 0 < \sigma < 1, 0 < t < T\}$$

die Anzahl der Nullstellen im kritischen Streifen mit $0 < t < T$ und

$$N_0(T, \chi) = \#\left\{s \in \mathbb{C} : L(s, \chi) = 0 \text{ mit } \sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < T\right\}$$

die Anzahl der Nullstellen auf der kritischen Geraden mit $0 < t < T$. Der Anteil der Nullstellen auf dieser Geraden an den Nullstellen im kritischen Streifen ist nun, wie in Kapitel 1, gegeben durch

$$\alpha(\chi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0(T, \chi)}{N(T, \chi)} .$$

Bemerkung: Wir betrachten hier nur jeweils die obere Halbebene. Da der Mittelwertsatz aber gleichmäßig in dem betrachteten Charakter χ ist, bedeutet dies keine Einschränkung, auch wenn die Nullstellen von $L(s, \chi)$ nicht notwendig symmetrisch zur reellen Achse liegen: sei nämlich s_0 eine Nullstelle von $L(s, \chi)$, dann folgt wegen $\overline{L(s, \chi)} = L(\bar{s}, \bar{\chi})$, daß \bar{s}_0 Nullstelle von $L(s, \bar{\chi})$ ist. Weiter ist aufgrund der Funktionalgleichung zum einen $1 - s_0$ Nullstelle von $L(s, \bar{\chi})$, zum anderen $1 - \bar{s}_0$ Nullstelle von $L(s, \chi)$. Den Nullstellen von $L(s, \chi)$ in der unteren Halbebene entsprechen also die Nullstellen von $L(s, \bar{\chi})$, die in der oberen Halbebene liegen.

Da unser Mittelwertsatz sowohl für die L -Reihe zu χ als auch für diejenige zu $\bar{\chi}$ gilt, genügt es also ohne Beschränkung der Allgemeinheit, nur die obere Halbebene $t > 0$ zu betrachten.

3.1.2 Die Funktionalgleichung

Zuerst benötigen wir eine symmetrische Form der Funktionalgleichung der L -Reihen. Aus der Funktionalgleichung Satz 1.2.3 folgt unter Verwendung der Eigenschaften der Γ -Funktion durch einfache Umformung

$$(3.1) \quad H(s, \chi) L(s, \chi) = \varepsilon_\chi H(1 - s, \bar{\chi}) L(1 - s, \bar{\chi}) ,$$

wobei

$$(3.2) \quad H(s, \chi) = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{s+\mathfrak{a}}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\mathfrak{a}}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{a} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \chi(-1) = +1 \\ 1 & , \text{ falls } \chi(-1) = -1 \end{cases}$$

und

$$\varepsilon_\chi = \frac{1}{i^{\mathfrak{a}} q^{1/2}} \sum_{\nu=1}^q \chi(\nu) e^{2\pi i \nu / q} .$$

Es gilt $|\varepsilon_\chi| = 1$. Wählen wir E_χ mit $E_\chi^2 = \bar{\varepsilon}_\chi$, so folgt $E_\chi^{-2} = \varepsilon_\chi$. Definieren wir jetzt

$$(3.3) \quad \xi(s, \chi) = E_\chi \cdot H(s, \chi) L(s, \chi) ,$$

so folgt aus (3.1) die Funktionalgleichung in der Form

$$\xi(s, \chi) = \xi(1 - s, \bar{\chi}) .$$

Analog zur Riemannsches ξ -Funktion $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ hat auch $\xi(s, \chi)$ im kritischen Streifen die gleichen Nullstellen wie $L(s, \chi)$.

3.1.3 Höhere Ableitungen

Obwohl uns in erster Linie die Nullstellen von $\xi(s, \chi)$ interessieren, werden wir später auch analoge Aussagen über die Nullstellen der Ableitungen $\xi^{(m)}(s, \chi)$ herleiten. Wir definieren

dazu für $m \geq 0$

$$N^{(m)}(T, \chi) = \# \left\{ s \in \mathbb{C} : \xi^{(m)}(s, \chi) = 0 \text{ mit } 0 < \sigma < 1, 0 < t < T \right\} ,$$

$$N_0^{(m)}(T, \chi) = \# \left\{ s \in \mathbb{C} : \xi^{(m)}(s, \chi) = 0 \text{ mit } \sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < T \right\}$$

sowie

$$(3.4) \quad \alpha^{(m)}(\chi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0^{(m)}(T, \chi)}{N^{(m)}(T, \chi)} .$$

Offensichtlich ist beispielsweise $N(s, \chi) = N^{(0)}(s, \chi)$.

Viele der Eigenschaften von $\xi(s, \chi)$ übertragen sich auf die höheren Ableitungen, so daß wir uns auch hier wieder auf die obere Halbebene beschränken können (vgl. Abschnitt 3.1.1). Des weiteren gilt auch für die höheren Ableitungen die Formel von Riemann-von Mangoldt

SATZ 3.1.1

Sei $m \geq 0$. Sämtliche Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ liegen im kritischen Streifen $0 < \sigma < 1$. Es gilt gleichmäßig in q für $T \rightarrow \infty$

$$N^{(m)}(T, \chi) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{qT}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O_m(\log qT) .$$

Der Beweis dieser Beziehung ist für $m = 0$ beispielsweise in [Dav80, § 16] oder [Pra57, VII § 3] zu finden, für größere m verläuft die Beweisführung analog (z.B. [Ber70] oder [Bau92, A.1]).

3.1.4 Zählen der Nullstellen

Sei $m \geq 0$. Wir wollen nun die Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ auf der kritischen Geraden zählen. Für $\sigma = \frac{1}{2}$ ist $1 - s = \bar{s}$, und somit gilt

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = \overline{\xi\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)} .$$

Daraus folgt allgemeiner für $n \geq 0$

$$\xi^{(n)}\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = (-1)^n \overline{\xi^{(n)}\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)} .$$

Insbesondere ist also für $n \geq 0$

$$\xi^{(n)}\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \in \begin{cases} \mathbb{R} & , \text{ falls } n \text{ gerade,} \\ i\mathbb{R} & , \text{ falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Betrachten wir zuerst den Fall, daß m gerade ist. Wir wählen für $0 \leq \nu \leq \frac{N}{2}$ (später werden wir in unseren numerischen Berechnungen $N \leq 12$ wählen)

$$\begin{aligned} b_{2\nu+1} &\in \mathbb{R} , \\ b_m &\in \mathbb{R} \setminus 0 \\ \text{und } b_{2\nu} &= 0 \quad , \text{ falls } 2\nu \neq m \end{aligned}$$

mit

$$(3.5) \quad \sum_{\nu=0}^N \frac{b_\nu}{2^\nu} = 1 .$$

Im Bereich $0 < t \leq T$ definieren wir

$$(3.6) \quad \eta_m(s, \chi) = \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{\mathfrak{L}^n} \xi^{(n)}(s, \chi) \quad \text{mit } \mathfrak{L} = \log \frac{qT}{2\pi} .$$

Dann sind die b_n gerade so gewählt, daß

$$\operatorname{Re} \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = \frac{b_m}{\mathfrak{L}^m} \xi^{(m)} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) .$$

Die Nullstellen von $\operatorname{Re} \eta_m(s, \chi)$ auf der kritischen Geraden sind also genau die Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ und damit für $m = 0$ die Nullstellen der L -Reihe $L(s, \chi)$ auf $\sigma = \frac{1}{2}$.

Wir haben folglich

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \xi^{(m)} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0 &\iff \operatorname{Re} \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0 \\ &\iff \text{entweder } \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0 \end{aligned}$$

$$(3.8) \quad \text{oder } \arg \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} .$$

Im Fall eines ungeraden m wählen wir dagegen für $0 \leq \nu \leq \frac{N}{2}$

$$\begin{aligned} b_{2\nu} &\in \mathbb{R} , \\ b_m &\in \mathbb{R} \setminus 0 \\ \text{und } b_{2\nu+1} &= 0 \quad , \text{ falls } 2\nu + 1 \neq m, \end{aligned}$$

ebenfalls mit der Bedingung (3.5). Analog zu unserer obigen Überlegung ist nun

$$\operatorname{Im} \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = \frac{b_m}{\mathfrak{L}^m} \xi^{(m)} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right)$$

und daher

$$(3.9) \quad \xi^{(m)}\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = 0 \iff \text{entweder} \quad \eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = 0$$

$$\text{oder} \quad \arg \eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \equiv 0 \pmod{\pi} .$$

Wenn wir nun die Fälle, in denen (3.7) eintritt, vernachlässigen (wir zählen also zu wenige Nullstellen) und nur (3.8) und (3.9) zählen, so erhalten wir bezüglich der Änderung des Arguments von $\eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$ für $1 \leq t \leq T$

$$(3.10) \quad \Delta \arg \eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \Big|_1^T \geq \pi \cdot x \implies N_0^{(m)}(T, \chi) \geq [x] .$$

Während, wie wir gerade gesehen haben, $\Delta \arg \eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$ die Nullstellen auf der kritischen Geraden „zählt“, können wir die Anzahl der Nullstellen im kritischen Streifen durch $\Delta \arg H\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$ erfassen. Einerseits gilt nämlich

LEMMA 3.1.2

Sei χ Charakter zum Modul $q \geq 1$ und sei $H(s, \chi)$ wie in (3.2) definiert. Dann gilt für $|t| > 0$

$$\arg H\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = \frac{t}{2} \log \frac{q|t|}{2\pi} - \frac{t}{2} + O(1) .$$

Dies folgt unmittelbar unter Verwendung der Stirlingschen Formel, z.B. [Ivi85, (A.33)]. Andererseits gilt Satz 3.1.1 und somit folgt

$$(3.11) \quad \frac{1}{\pi} \Delta \arg H\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \Big|_1^T = N^{(m)}(T, \chi) + O_m(\mathfrak{L}) .$$

Diese Überlegung motiviert die Betrachtung von

$$(3.12) \quad V_m(s, \chi) := \frac{\eta_m(s, \chi)}{H(s, \chi)} = E_\chi \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{\mathfrak{L}^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} \frac{H^{(n-\nu)}(s, \chi)}{H(s, \chi)} \cdot L^{(\nu)}(s, \chi) ,$$

wobei wir die Definitionen von $\eta_m(s, \chi)$ (Gleichung (3.6)) und $\xi(s, \chi)$ (Gleichung (3.3)) eingesetzt haben. Wegen (3.10) müssen wir $\Delta \arg \eta_m\left(\frac{1}{2} + it\right) \Big|_1^T$ abschätzen. Es gilt aufgrund von (3.11)

$$(3.13) \quad \Delta \arg \eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \Big|_1^T = N^{(m)}(T, \chi) + \Delta \arg V_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \Big|_1^T + O_m(\mathfrak{L}) .$$

3.1.5 Berechnung von $\Delta \arg V_m(s, \chi)$

Trotz der auf den ersten Blick unangenehmen Gestalt der Funktion $V_m(s, \chi)$ (vgl. (3.12)) können wir diesen Ausdruck recht gut handhaben. Die zugrundeliegende Idee ist, den Faktor $\frac{H^{(n-\nu)}}{H}(s, \chi)$ durch $\left(\frac{s}{2}\right)^{n-\nu}$ zu ersetzen. Ohne allzugroße Verluste gelingt dies aber nur für Werte von t , welche „nahe“ bei T liegen. Die exakten Rechnungen sind daher technisch etwas schwieriger.

Bezeichne γ_1 einen Pfad entlang des Rechtecks mit den Eckpunkten $\frac{1}{2} + i$, $\frac{1}{2} + iT$, $\sigma_1 + iT$ und $\sigma_1 + i$ (in negativer Richtung durchlaufen) für ein hinreichend großes, festes $\sigma_1 > 2$.

Wir wollen nun $\Delta \arg V_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)\Big|_1^T$ durch $\Delta \arg V_m(s, \chi)\Big|_{\gamma_1}$ ersetzen, um später das Argumentprinzip auf diesen Ausdruck anwenden zu können. Um den entstehenden Fehler abzuschätzen, müssen wir $\Delta \arg V_m(s, \chi)$ zum einen entlang der rechten Seite von γ_1 , zum anderen entlang der horizontalen Wegstücke berechnen.

Beginnen wir mit dem rechten Teilpfad, sei also $\sigma = \sigma_1$ und $1 \leq t \leq T$. Es gilt

$$L(s, \chi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\chi(\mu)}{\mu^s} = 1 + O\left(\sum_{\mu=2}^{\infty} \mu^{-\sigma_1+\varepsilon}\right) = 1 + O(2^{-\sigma_1})$$

und analog für $\nu \geq 1$

$$L^{(\nu)}(s, \chi) = (-1)^\nu \sum_{\mu=2}^{\infty} \frac{\chi(\mu) \log^\nu \mu}{\mu^s} \ll 2^{-\sigma_1} .$$

Das folgende Lemma erlaubt uns nun, wie oben bereits erwähnt, $\frac{H^{(n-\nu)}}{H}(s, \chi)$ durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen.

LEMMA 3.1.3

Sei $0 < c_1 \leq \sigma \leq c_2$, k_0 fest gewählt, $|t| > 1$ und $H(s, \chi)$ wie in (3.2) definiert. Dann gilt gleichmäßig für $0 \leq k \leq k_0$

$$\frac{H^{(k)}(s, \chi)}{H(s, \chi)} = \left(\frac{1}{2} \log \frac{q|t|}{2\pi}\right)^k + O_{k_0}(qt^{-1+\varepsilon}) .$$

Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion nach k und unter Verwendung der Stirlingschen Formel, ganz analog zu [Bau92, Lemmata 2.4.2 und 2.4.3].

Setzen wir zur Abkürzung $\ell = \log \frac{qt}{2\pi}$. Dann folgt aus (3.12) und Lemma 3.1.3, da wir $\sigma = \sigma_1$ und $1 \leq t \leq T$ haben,

$$\begin{aligned} (3.14) \quad V_m(s, \chi) &= E_\chi \sum_{n=0}^N \left(\frac{b_n}{\mathfrak{L}^n} \cdot \frac{H^{(n)}(s, \chi)}{H(s, \chi)} + O_n \left(2^{-\sigma_1} \sum_{\nu=1}^n \frac{H^{(n-\nu)}(s, \chi)}{H(s, \chi)} \right) \right) \\ &= E_\chi \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{2^n} \left(\frac{\ell}{\mathfrak{L}} \right)^n \cdot (1 + O_N(qt^{-1+\varepsilon})) \left(1 + O_N \left(\frac{1}{\ell 2^{1-\sigma_1}} \right) \right) , \end{aligned}$$

also

$$\left| V_m(s, \chi) - E_\chi \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{2^n} \left(\frac{\ell}{\mathfrak{L}} \right)^n \right| \ll \frac{1}{\ell 2^{\sigma_1-1}} + \frac{q}{t^{1-\varepsilon}} .$$

Aufgrund unserer Bedingung (3.5) folgt

$$(3.15) \quad \Delta \arg V_m(\sigma_1 + it, \chi) \Big|_1^T \ll_{t_0} 1 .$$

Auf den horizontalen Teilpfaden von γ_1 ist die Abschätzung etwas schwieriger. Wir werden dazu Jensens Formel benötigen:

LEMMA 3.1.4 (FORMEL VON JENSEN)

Sei $f(s)$ eine Funktion in $s = re^{i\vartheta}$ (r, ϑ reell) mit $f(0) \neq 0$, die in $|s| \leq R$ holomorph und auf $|s| = R$ nullstellenfrei ist. Bezeichne $n(r)$ die Anzahl der Nullstellen von $f(s)$ mit $|s| \leq r$.

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\vartheta})| d\vartheta = \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr + \log |f(0)| .$$

Einen Beweis findet man zum Beispiel in [Ivi85, Lemma 1.1].

Betrachten wir jetzt das Wegstück $[\frac{1}{2} + iT, \sigma_1 + iT]$ und zerlegen es jeweils an den Nullstellen von $\operatorname{Re} V_m(\sigma + iT, \chi)$ mit $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \sigma_1$ in Teilintervalle. In jedem dieser — sagen wir K vielen — Teilintervalle ändert sich das Vorzeichen von $\operatorname{Re} V_m(\sigma + iT, \chi)$ nicht, insgesamt ist also

$$(3.16) \quad \left| \Delta \arg V_m(\sigma + iT, \chi) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sigma_1} \right| \leq K\pi .$$

Bezeichne $n(r) = \#\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} V_m(s + \sigma_1 + iT, \chi) = 0, |s| \leq r\}$ die Anzahl der Nullstellen von $\operatorname{Re} V_m(s, \chi)$ in einem Kreis um $\sigma_1 + iT$ mit Radius r . Offensichtlich ist $K \leq n(\sigma_1 - \frac{1}{2}) + 1$ und damit

$$\int_0^{\sigma_1} \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{\sigma_1 - \frac{1}{2}}^{\sigma_1} \frac{n(r)}{r} dr \geq n\left(\sigma_1 - \frac{1}{2}\right) \int_{\sigma_1 - \frac{1}{2}}^{\sigma_1} \frac{dr}{r} \geq (K-1) \log \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \frac{1}{2}} .$$

Andererseits wissen wir nach Jensens Formel (Lemma 3.1.4)

$$\int_0^{\sigma_1} \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\operatorname{Re} V_m(\sigma_1 e^{i\vartheta} + \sigma_1 + iT, \chi)| d\vartheta - \log |\operatorname{Re} V_m(\sigma_1 + iT, \chi)| .$$

Eine grobe Abschätzung, ähnlich zu (3.14), zeigt uns $\operatorname{Re} V_m(s + iT, \chi) \ll qT$, sowohl für $s = \sigma_1$, als auch für $s = \sigma_1 + \sigma_1 e^{i\vartheta}$ ($0 \leq \vartheta \leq 2\pi$), und folglich ist

$$(K - 1) \log \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \frac{1}{2}} \ll \log qT .$$

Es folgt also wegen (3.16)

$$(3.17) \quad \Delta \arg V_m(\sigma + iT, \chi) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sigma_1} \ll \mathfrak{L} ,$$

und völlig analog sehen wir auf dem horizontalen Teilpfad mit $t = 1$ statt $t = T$

$$(3.18) \quad \Delta \arg V_m(\sigma + i, \chi) \Big|_{\frac{1}{2}}^{\sigma_1} \ll 1 .$$

Mit (3.15), (3.17) und (3.18) erhalten wir jetzt unter Anwendung des Argumentprinzips

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \Delta \arg V_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \Big|_1^T &= \Delta \arg V_m(s, \chi) \Big|_{\gamma_1} + O(\mathfrak{L}) \\ &= -2\pi \cdot n(V(s, \chi), \gamma_1) + O(\mathfrak{L}) , \end{aligned}$$

wenn $n(f(s), \gamma)$ die Anzahl der Nullstellen einer holomorphen Funktion $f(s)$ im Inneren eines geschlossenen Weges γ bezeichnet.

3.1.6 Die glättende Funktion

Wie wir in (3.19) gesehen haben, müssen wir die Anzahl dieser Nullstellen im Inneren von γ_1 abschätzen. Wichtigstes Hilfsmittel hierzu ist das Lemma von Littlewood:

LEMMA 3.1.5 (LEMMA VON LITTLEWOOD)

Sei $f(s)$ in $c_1 \leq \sigma \leq c_2$ und $t_1 \leq t \leq t_2$ eindeutig und bis auf Pole holomorph mit $f(s) \neq 0, \infty$ für $\sigma = c_2$. Bezeichne $\nu(\alpha)$ für $c_1 < \alpha < c_2$ die Anzahl der Nullstellen, vermindert um die Anzahl der Pole von $f(s)$ im Rechteck mit $\alpha < \sigma < c_2$ und $t_1 < t < t_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \nu(\sigma) d\sigma &= \int_{t_1}^{t_2} (\log |f(\sigma_1 + it)| - \log |f(\sigma_2 + it)|) dt \\ &\quad + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\arg f(\sigma + it_2) - \arg f(\sigma + it_1)) d\sigma . \end{aligned}$$

Einen Beweis findet man beispielsweise in [Tit88] oder [Pra57].

An dieser Stelle können wir die glättende Funktion $B(s, \chi)$ ins Spiel bringen, deren Bedeutung schon in den Kapiteln 1 und 2 erläutert wurde. Wir zählen von nun an die Nullstellen

von $V(s, \chi) \cdot B\left(s + \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi\right)$ statt nur diejenigen von $V(s, \chi)$. Dabei sei $A > 0$ ein frei zu wählender Parameter. Wir wählen $B(s, \chi)$ als

$$B(s, \chi) = B_y(s, P, \chi) = \sum_{n \leq y} \chi(n) \mu(n) P\left(1 - \frac{\log n}{\log y}\right) n^{-s},$$

wobei P ein Polynom mit reellen Koeffizienten und $P(0) = 0$ bezeichnet und $y = T^\theta$ mit $\theta < \frac{1}{2}$ gesetzt ist. Die genaue Gestalt von $B(s, \chi)$ ist momentan allerdings nicht wesentlich, es genügt, zu wissen, daß die Koeffizienten dieses Dirichlet-Polynoms beschränkt sind.

Schließlich zählen wir auch nicht nur die Nullstellen im Inneren von γ_1 , sondern wir vergrößern diesen Bereich:

Sei γ_2 der Weg entlang des Rechtecks mit den Eckpunkten $\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + i$, $\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + iT$, $\sigma_2 + iT$ und $\sigma_2 + i$ (wie schon bei γ_1 durchlaufen in negativer Richtung) für $\sigma_2 = \log \mathfrak{L}$.

Bezeichne $\nu(\alpha)$ die Anzahl der Nullstellen ρ von $V_m(s, \chi) B\left(s + \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi\right)$ im Inneren von γ_2 , jedoch mit $\operatorname{Re} \rho > \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}}}^{\sigma_2} \nu(\alpha) d\alpha &= \sum_{\rho} \left(\operatorname{Re} \rho - \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} \right) \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} \right) \right) \cdot \nu\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{A}{\mathfrak{L}} \cdot n\left(V_m(s, \chi) B\left(s + \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi\right), \gamma_1\right). \end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1.5 folgt damit

$$\begin{aligned} (3.20) \quad n\left(V_m(s, \chi) B\left(s + \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi\right), \gamma_1\right) &\leq \frac{\mathfrak{L}}{2\pi A} \left(\int_1^T \log \left| V_m\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt \right. \\ &\quad - \int_1^T \log \left| V_m(\sigma_2 + it, \chi) B\left(\sigma_2 + \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) \right| dt \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}}}^{\sigma_2} \arg\left(V_m(\sigma_2 + iT, \chi) B\left(\sigma_2 + \frac{A}{\mathfrak{L}} + iT, \chi\right)\right) d\sigma \\ &\quad \left. - \int_{\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}}}^{\sigma_2} \arg\left(V_m(\sigma_2 + i, \chi) B\left(\sigma_2 + \frac{A}{\mathfrak{L}} + i, \chi\right)\right) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Die letzten drei Integrale leisten keinen bedeutenden Beitrag:

Analog zu unserer obigen Anwendung von Jensens Formel (Lemma 3.1.4) zur Herleitung von (3.17) sind die Integrale über die horizontalen Wege, also das dritte und vierte Integral in (3.20), nur von der Größenordnung $O(\mathfrak{L})$.

Eine einfache Abschätzung analog zu (3.14) gibt uns wegen $\sigma_2 = \log \mathfrak{L}$ und (3.5)

$$V_m(\sigma_2 + it, \chi) = \sum_{n=0}^N \frac{b_n}{2^n} + O(\mathfrak{L}^{-1}) = 1 + O(\mathfrak{L}^{-1}) \quad \text{für } 1 \leq t \leq T,$$

und wegen

$$B\left(\sigma_2 + \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) \ll \sum_{1 \leq n \leq y} n^{-\sigma_2 - A/\mathfrak{L}} \ll 1$$

gilt für das zweite Integral in (3.20)

$$\int_1^T \log \left| V_m(\sigma_2 + it, \chi) B\left(\sigma_2 + \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) \right| dt \ll \frac{T}{\mathfrak{L}}.$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned} n(V_m(s, \chi), \gamma_1) &\leq n(V_m(s, \chi) B(s, \chi), \gamma_2) \\ &= \frac{\mathfrak{L}}{2\pi A} \int_1^T \log \left| V_m\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt + O\left(\frac{T}{\mathfrak{L}}\right) \\ (3.21) \quad &= \frac{\mathfrak{L}}{4\pi A} \int_1^T \log \left| V_m\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 dt + O\left(\frac{T}{\mathfrak{L}}\right). \end{aligned}$$

Nach der Ungleichung von Jensen (beispielsweise [Rud86, Thm. 3.3]) gilt aufgrund der Konkavität des Logarithmus für positive integrierbare Funktionen $f(t)$

$$(3.22) \quad \int_0^T \log f(t) dt \leq T \log \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \right).$$

Aus (3.21) erhalten wir damit

$$n(V_m(s, \chi), \gamma_1) \leq \frac{T\mathfrak{L}}{4\pi A} \log \left(\frac{1}{T} \int_1^T \left| V_m\left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 dt \right) + O\left(\frac{T}{\mathfrak{L}}\right).$$

Damit sind wir soweit, den Nullstellenanteil abschätzen zu können:

Nach (3.10), (3.13), (3.19) und der letzten Abschätzung haben wir

$$\begin{aligned}
 N_0^{(m)}(T, \chi) &\geq \frac{1}{\pi} \Delta \arg \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \Big|_1^T + O(1) \\
 &= \frac{N^{(m)}(T, \chi)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \Delta \arg V_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \Big|_1^T + O_m(\mathfrak{L}) \\
 &= \frac{N^{(m)}(T, \chi)}{\pi} - 2n(V_m(s, \chi), \gamma_1) + O_m(\mathfrak{L}) \\
 &\geq \frac{N^{(m)}(T, \chi)}{\pi} - \frac{T\mathfrak{L}}{2\pi A} \log \left(\frac{1}{T} \int_1^T \left| V_m \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi \right) B \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \right|^2 dt \right) \\
 &\quad + O_m \left(\frac{T}{\mathfrak{L}} \right) .
 \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.1.1 ist $N^{(m)}(T, \chi) \sim \frac{T\mathfrak{L}}{2\pi}$, und es folgt

(3.23)

$$\frac{N_0^{(m)}(T, \chi)}{N^{(m)}(T, \chi)} \geq 1 - \frac{1}{A} \log \left(\frac{1}{T} \int_1^T \left| V_m \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi \right) B \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \right|^2 dt \right) + O(\mathfrak{L}^{-2}) ,$$

womit wir die Frage nach dem Nullstellenanteil auf die Berechnung des Mittelwertes von $V_m(s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi) B(s, \chi)$ zurückgeführt haben.

3.1.7 Anwendung des Mittelwertsatzes

Wir können jetzt den Mittelwertsatz Satz 1.3.1 anwenden, um die rechte Seite von (3.23) zu berechnen. Hierzu müssen wir jedoch $V_m(s, \chi)$ in eine geeignetere Form bringen. Bereits angesprochen wurde das Problem, die Faktoren $\frac{H^{(n-\nu)}(s, \chi)}{H}(s, \chi)$ durch einfachere Terme zu ersetzen. Neben Lemma 3.1.3 werden wir dazu folgenden Hilfsatz benötigen, der sich leicht über partielle Integration beweisen läßt:

LEMMA 3.1.6

Sei T hinreichend groß, f eine auf $[1, T]$ integrierbare Funktion mit

$$\frac{1}{T} \int_1^T f(t) dt = c + O(\log^{-\delta} T) ,$$

für eine Konstante c und ein $\delta > 0$. Dann gilt für alle $k \geq 0$

$$\frac{1}{T} \int_1^T \left(\frac{\log t}{\log T} \right)^k f(t) dt = c + O_k(\log^{-\delta} T) .$$

Setzen wir die Definition von $V_m(s, \chi)$ (Gleichung (3.12)) in das fragliche Integral ein, so erhalten wir mit Lemma 3.1.3

$$\begin{aligned}
(3.24) \quad & \frac{1}{T} \int_1^T \left| V_m \left(\frac{1}{2} - \frac{A}{\mathfrak{L}} + it, \chi \right) B \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \right|^2 dt \\
&= \frac{1}{iT} \int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} V_m \left(s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi \right) \overline{V_m \left(s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi \right)} |B(s, \chi)|^2 ds \\
&= \sum_{n=0}^N \sum_{n'=0}^N b_n b_{n'} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\mu=0}^{n'} \binom{n}{\nu} \binom{n'}{\mu} 2^{-n-n'+\nu+\mu} \\
&\quad \times \frac{1}{iT} \int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} \left(\frac{\ell}{\mathfrak{L}} \right)^{n+n'-\nu-\mu} \frac{L^{(\nu)} \left(s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi \right)}{\mathfrak{L}^\nu} \frac{L^{(\mu)} \left(1 - s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \bar{\chi} \right)}{\mathfrak{L}^\mu} |B(s, \chi)|^2 ds \\
&\quad \times (1 + O_{n,n'}(\mathfrak{L}^{-1})) .
\end{aligned}$$

Sei zur Abkürzung

$$(3.25) \quad a_{\nu, \mu} := \sum_{n=\nu}^N \sum_{n'=\mu}^N \binom{n}{\nu} \binom{n'}{\mu} 2^{-n-n'+\nu+\mu} b_n b_{n'} .$$

Nach Lemma 3.1.6 genügt es, eine asymptotische Darstellung für

$$\sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N a_{\nu, \mu} \cdot \mathfrak{J}(\nu, \mu)$$

zu finden, wobei

$$(3.26) \quad \mathfrak{J}(\nu, \mu) := \frac{1}{iT} \int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{L^{(\nu)} \left(s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \chi \right)}{\mathfrak{L}^\nu} \frac{L^{(\mu)} \left(1 - s - \frac{A}{\mathfrak{L}}, \bar{\chi} \right)}{\mathfrak{L}^\mu} |B(s, \chi)|^2 ds .$$

Es ist $\frac{d^\nu}{dx^\nu} L\left(s + \frac{x}{\mathfrak{L}}, \chi\right) = \mathfrak{L}^{-\nu} L^{(\nu)}\left(s + \frac{x}{\mathfrak{L}}, \chi\right)$ und daher können wir den Mittelwertsatz Satz 1.3.1 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\nu, \mu) &= \frac{(-1)^\mu}{iT} \frac{d^{\nu+\mu}}{dx^\nu dy^\mu} \left(\int_{\frac{1}{2}+i}^{\frac{1}{2}+iT} L\left(s + \frac{x}{\mathfrak{L}}, \chi\right) L\left(1-s - \frac{y}{\mathfrak{L}}, \bar{\chi}\right) B(s, P, \chi) B(1-s, P, \bar{\chi}) ds \right) \Bigg|_{\substack{x=-A \\ y=A}} \\ &= (-1)^\mu \frac{d^{\nu+\mu}}{dx^\nu dy^\mu} \left(\frac{e^{y-x} - 1}{y-x} \cdot \theta \cdot \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^1 \left(\frac{1}{\theta} P'(t) - xP(t) \right) \left(\frac{1}{\theta} \bar{P}'(t) + y\bar{P}(t) \right) dt + |P(1)|^2 + O(T^{-\delta}) \right) \Bigg|_{\substack{x=-A \\ y=A}} \end{aligned}$$

für ein $\delta > 0$.

Der Fehlerterm $O(T^{-\delta})$ ist holomorph in x und y (als Differenz der in x und y holomorphen Funktionen auf der linken und rechten Seite der letzten Gleichung), außerdem ist die implizite Konstante unabhängig von beiden Werten, solange $|x|, |y| \leq \mathfrak{A}$ gilt. Wir können daher Cauchys Abschätzung für die Ableitungen holomorpher Funktionen auf einen Kreis um den Ursprung beispielsweise mit Radius $\frac{\mathfrak{A}}{2}$ anwenden und erhalten dann für $|x|, |y| \leq \frac{\mathfrak{A}}{4}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(\nu, \mu) &= (-1)^\mu \theta \int_0^1 \frac{d^{\nu+\mu}}{dx^\nu dy^\mu} \left(\frac{e^{y-x} - 1}{y-x} \left(\frac{1}{\theta} P'(t) - xP(t) \right) \left(\frac{1}{\theta} \bar{P}'(t) + y\bar{P}(t) \right) \right) \Bigg|_{\substack{x=-A \\ y=A}} dt \\ &\quad + o(1) \end{aligned}$$

für $T \rightarrow \infty$, solange nicht gleichzeitig $\nu = 0$ und $\mu = 0$ gilt. Ist $\nu = \mu = 0$, so muß auf der rechten Seite noch ein Summand $a_{0,0} \cdot |P(1)|^2 = |P(1)|^2$ addiert werden.

Wegen $\int_0^1 \exp((y-x)t) dt = \frac{\exp(y-x)-1}{y-x}$ folgt

$$\frac{d^{\nu+\mu}}{dx^\nu dy^\mu} \left(\frac{e^{y-x} - 1}{y-x} \right) = (-1)^\nu \int_0^1 t^{\nu+\mu} e^{(y-x)t} dt$$

und somit nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} \theta^2 \cdot \frac{d^{\nu+\mu}}{dx^\nu dy^\mu} \left(\frac{e^{y-x} - 1}{y-x} \left(\frac{1}{\theta} P'(t) - xP(t) \right) \left(\frac{1}{\theta} \bar{P}'(t) + y\bar{P}(t) \right) \right) \Bigg|_{\substack{x=-A \\ y=A}} \\ &= (-1)^\nu I_{\nu+\mu} \cdot |P'(t) + A\theta P(t)|^2 \\ &\quad + (-1)^\nu \mu I_{\nu+\mu-1} \cdot \theta \bar{P}(t) (P'(t) + A\theta P(t)) \\ &\quad + (-1)^\nu \nu I_{\nu+\mu-1} \cdot \theta P(t) (\bar{P}'(t) + A\theta \bar{P}(t)) \\ &\quad + (-1)^\nu \nu \mu I_{\nu+\mu-2} \cdot \theta^2 |P(t)|^2 \\ &=: (-1)^\nu J_{\nu, \mu}, \end{aligned}$$

wobei

$$I_k = \int_0^1 t^k e^{2tA} dt \quad \text{für } k \geq 0 \quad \text{und} \quad I_k = 0 \quad \text{für } k < 0.$$

Damit gilt also

$$(3.27) \quad \mathfrak{I}(0, 0) = \frac{1}{\theta} \int_0^1 J_{0,0} dt + |P(1)|^2 + o(1)$$

$$\text{und} \quad \mathfrak{I}(\nu, \mu) = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{\theta} \int_0^1 J_{\nu,\mu} dt + o(1) \quad \text{für } (\nu, \mu) \neq (0, 0).$$

Insgesamt folgt nun aus (3.23), (3.24), (3.26) und (3.27)

$$(3.28) \quad \frac{N_0^{(m)}(T, \chi)}{N^{(m)}(T, \chi)} \geq 1 - \frac{1}{A} \log \left(\frac{1}{\theta} \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N (-1)^{\nu+\mu} a_{\nu,\mu} \int_0^1 J_{\nu,\mu} dt + |P(1)|^2 \right) + o(1)$$

für $T \rightarrow \infty$.

3.1.8 Wahl der Parameter

Gleichung (3.28) gibt uns eine untere Schranke für den gesuchten Wert $\alpha^{(m)}(\chi)$ (Gleichung (3.4)). Um einen numerischen Wert für diesen Anteil der Nullstellen auf der kritischen Geraden zu erhalten, müssen wir die Parameter b_ν , und damit wegen (3.25) die Parameter $a_{\nu,\mu}$, den Parameter A sowie das Polynom $P(t)$ wählen und den Ausdruck auf der rechten Seite von (3.28) auswerten. Jede Wahl dieser Parameter führt zu einer unteren Schranke für $\alpha^{(m)}(\chi)$, unser Ziel ist es aber natürlich, diese Parameter so zu wählen, daß die Doppelsomme in (3.28) minimiert wird.

Zuerst werden wir P wählen. Wir können jede stetige Funktion durch geeignete Polynome beliebig genau approximieren und brauchen uns, da wir uns ohnehin nur für eine kleine Zahl an Nachkommastellen interessieren, deshalb bei der Wahl von P nicht auf Polynome beschränken. Insbesondere können wir zu einer optimalen Wahl von P Ergebnisse der Variationsrechnung heranziehen.

Sei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} X &= \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N (-1)^{\nu+\mu} a_{\nu,\mu} I_{\nu+\mu} , \\ Y &= \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N (-1)^{\nu+\mu} \nu a_{\nu,\mu} I_{\nu+\mu-1} \\ \text{und} \quad Z &= \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N (-1)^{\nu+\mu} \nu \mu a_{\nu,\mu} I_{\nu+\mu-2} . \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt, wie leicht nachzurechnen ist,

$$(3.29) \quad \sum_{\nu=0}^N \sum_{\mu=0}^N (-1)^{\nu+\mu} a_{\nu,\mu} \int_0^1 J_{\nu,\mu} dt \\ = \int_0^1 \left(X(P'(t) + A\theta P(t))^2 + 2\theta Y P(t)(P'(t) + A\theta P(t)) + \theta^2 Z P(t)^2 \right) dt .$$

Wählen wir P reell und bezeichnen wir den Integranden der rechten Seite in (3.29) abkürzend mit $f(t, P(t), P'(t))$. Eine notwendige Bedingung, um diesen Ausdruck zu minimieren, ist erfüllt, wenn $P(t)$ der Euler-Lagrange-Differentialgleichung

$$f_P - \frac{d}{dt} f_{P'} = 0$$

genügt. Wegen $P(0) = 0$ und, wenn wir zusätzlich noch $P(1) = 1$ wählen, geschieht dies durch

$$P(t) = \frac{\sinh \Omega t}{\sinh \Omega} \quad \text{mit} \quad \Omega = \theta \cdot \sqrt{\frac{A^2 X + 2AY + Z}{X}} .$$

Setzen wir dies in (3.29) ein und vereinfachen den entstehenden Ausdruck weiter, so folgt nach längerer, aber unproblematischer Rechnung aus (3.28)

$$(3.30) \quad \alpha^{(m)}(\chi) \geq 1 - \frac{1}{A} \log \left(\coth \Omega \cdot \sqrt{X(XA^2 + 2YA + Z)} + XA + Y + 1 \right) .$$

Dieser Ausdruck hängt nur noch von den $a_{\nu,\mu}$, die wiederum durch die Parameter b_0, \dots, b_N bestimmt werden, sowie von dem Parameter $A > 0$ ab.

3.1.9 Resultate

Eine geeignete Wahl der Parameter b_0, \dots, b_N und A läßt sich leider nicht so elegant durchführen, wie uns dies bei $P(t)$ mittels der Variationsrechnung gelungen ist. Wir müssen also versuchen, durch geschickte Wahl der Parameter eine möglichst große untere Schranke in (3.30) herzuleiten.

Das interessanteste Ergebnis erhalten wir für $m = 0$. Wählen wir¹ $A \doteq 1.476058$ sowie $b_0 \doteq 0.488511$, $b_1 \doteq 1.340160$, $b_2 = 0$, $b_3 \doteq -2.030503$, $b_4 = 0$, $b_5 \doteq 4.038119$, $b_6 = 0$, und $b_7 \doteq 0.30964042$, so erhalten wir

$$\alpha(\chi) = \alpha^{(0)}(\chi) > 0.365815 .$$

¹Die Zahlenangaben sind hier auf sechs Dezimalstellen gerundet angegeben. Die exakten Werte sind im Anhang in Tabelle A.1 zu finden.

Mindestens 36.58% aller Nullstellen der L -Reihen liegen also auf der kritischen Geraden. Die bisher für diese Reihen bekannte Abschätzung ([Hil76] und [Hil78]) besagte $\alpha(\chi) > \frac{1}{3}$, lediglich im Fall der Riemannschen Zeta-Funktion ist ein besserer Wert bekannt ($\alpha(\chi_0) > 0.408959$, vgl. [Bau92]).

Um diese Werte zu erhalten, wurde ein Programm geschrieben, welches versucht, lokale Maxima der rechten Seite von (3.30) numerisch zu bestimmen. Hierbei wurden Optimierungs- und Quadraturroutinen der NAG-Bibliothek, einer Sammlung von Unterprogrammen für numerische Berechnungen ([NAG95]), genutzt. Um eventuelle Fehler auszuschließen, wurden die Werte anschließend mit dem Computeralgebra-System *Maple V4* überprüft. Die genauen Werte der Parameter sind im Anhang in den Tabellen A.1, A.2 und A.3 aufgelistet. Die weiteren Abschätzungen, die berechnet wurden, lauten für $m = 1, \dots, 6$

$$\begin{aligned}\alpha^{(1)}(\chi) &> 0.847212, \\ \alpha^{(2)}(\chi) &> 0.962736, \\ \alpha^{(3)}(\chi) &> 0.990522, \\ \alpha^{(4)}(\chi) &> 0.995581, \\ \alpha^{(5)}(\chi) &> 0.997572, \\ \alpha^{(6)}(\chi) &> 0.998093.\end{aligned}$$

Unsere Werte entsprechen, abgesehen vom Fall $m = 0$, ungefähr den Abschätzungen, die für den Fall $q = 1$, also für die Riemannsche ξ -Funktion, bekannt waren (siehe [Bau92]), unsere Abschätzung von $\alpha^{(1)}$ ist aber sogar um mehr als drei Prozentpunkte höher als der beste bislang bekannte Wert. Unsere weiteren Ergebnisse für $m = 2, 3, 4, 5$, sind nur marginal besser als die bekannten Werte für $q = 1$.

3.2 Vielfachheit der Nullstellen

3.2.1 Einfache Nullstellen auf der kritischen Geraden

Die bisherigen Überlegungen erlauben uns auch, Aussagen über den Anteil der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ zu erzielen, die nicht nur auf der kritischen Geraden liegen, sondern zudem auch noch *einfach* sind.

Sei dazu die in (3.6) eingeführte Funktion $\eta_m(s, \chi)$ gewählt als

$$(3.31) \quad \eta_m(s, \chi) = \frac{b_m}{\Omega^m} \xi^{(m)}(s, \chi) + \frac{b_{m+1}}{\Omega^{m+1}} \xi^{(m+1)}(s, \chi) .$$

Im Gegensatz zu (3.6) betrachten wir also nur solche $\eta_m(s, \chi)$, die aus höchstens zwei Summanden bestehen. Wie dort gelte auch hier $b_m \in \mathbb{R} \setminus 0$ sowie $b_{m+1} \in \mathbb{R}$. Auch unsere Bedingung (3.5) behalten wir bei.

Wir folgen nun weiter unserer Überlegung aus Abschnitt 3.1.4. Wir hatten dort bereits die Fälle, in denen $\eta_m\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right)$ verschwindet, beim Zählen der Nullstellen auf der Geraden

$\sigma = \frac{1}{2}$ nicht berücksichtigt. Wir können also

$$(3.32) \quad \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \neq 0$$

annehmen.

Sei nun m gerade. Dann gilt wie bei (3.8)

$$\operatorname{Re} \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^{(m)} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0 ,$$

wegen (3.31) und (3.32) folgt aber auch

$$\xi^{(m+1)} \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \neq 0 ,$$

und dies bedeutet, daß wir eine einfache Nullstelle von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ vorliegen haben.

Ist m ungerade, so gilt die gleiche Folgerung analog zu (3.9), falls $\operatorname{Im} \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) = 0$.

Allein durch eine speziellere Wahl der Parameter b_ν ist es also möglich, die einfachen Nullstellen auf der kritischen Geraden zu zählen; die weiteren Überlegungen, die zu den Abschätzungen von $\alpha^{(m)}(\chi)$ geführt haben, verändern sich nicht.

Bezeichnen wir die Anzahl der einfachen Nullstellen auf der kritischen Geraden mit Imaginärteil zwischen 1 und T mit

$$N_{0,s}^{(m)}(T, \chi) = \# \left\{ s \in \mathbb{C} : \xi^{(m)}(s, \chi) = 0 \text{ und } \xi^{(m+1)}(s, \chi) \neq 0 \text{ mit } \sigma = \frac{1}{2}, 0 < t < T \right\}$$

und deren Anteil mit

$$\alpha_s^{(m)}(\chi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{0,s}^{(m)}(T, \chi)}{N^{(m)}(T, \chi)} .$$

Analog zu Gleichung (3.10), haben wir dann

$$\Delta \arg \eta_m \left(\frac{1}{2} + it, \chi \right) \Big|_1^T \geq \pi \cdot x \quad \Longrightarrow \quad N_{0,s}^{(m)}(T, \chi) \geq [x] .$$

Wählen wir A , b_m und b_{m+1} wie im Anhang, Tabelle A.4, aufgeführt, so erhalten wir, wie in Abschnitt 3.1.9, durch numerische Rechnungen

$$\begin{aligned} \alpha_s^{(0)}(\chi) &> 0.356269 , \\ \alpha_s^{(1)}(\chi) &> 0.787784 , \\ \alpha_s^{(2)}(\chi) &> 0.931659 , \\ \alpha_s^{(3)}(\chi) &> 0.966755 , \\ \alpha_s^{(4)}(\chi) &> 0.979979 , \\ \alpha_s^{(5)}(\chi) &> 0.986488 , \\ \alpha_s^{(6)}(\chi) &> 0.990232 . \end{aligned}$$

Abgesehen von den Fällen $m = 0$ und $m = 6$ sind auch diese Werte geringfügig besser, als jene, die im Spezialfall der Riemannschen ζ -Funktion bekannt sind ([Bau92]).

3.2.2 Nullstellen höherer Vielfachheit

Wir können aber auch unsere Abschätzungen der Anteile einfacher Nullstellen der Ableitungen $\xi^{(m)}(s, \chi)$ nutzen, um Informationen über die Nullstellen höherer Vielfachheit von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen zu erhalten.

Bezeichnen wir die Anzahl der einfachen Nullstellen im kritischen Streifen mit

$$N_s^{(m)}(T, \chi) = \# \{s \in \mathbb{C} : \xi^{(m)}(s, \chi) = 0 \text{ und } \xi^{(m+1)}(s, \chi) \neq 0 \text{ mit } 0 < \sigma < 1, 1 < t < T\} ,$$

so gilt selbstverständlich

$$N_s^{(m)}(T, \chi) \geq N_{0,s}^{(m)}(T, \chi) .$$

Unter Annahme der Richtigkeit der Riemannschen Vermutung sind beide Seiten gleich, aber auch ohne diese weitreichende Annahme ist keine bessere Abschätzung der einfachen Nullstellen im kritischen Streifen bekannt!

Bezeichnen wir die Zahl der Nullstellen der Vielfachheit m von $L(s + it, \chi)$ in $0 < \sigma < 1$ und $1 \leq t \leq T$ mit $\mathcal{V}_m(T, \chi)$ und die Anzahl der Nullstellen der Vielfachheit $\geq m$ im gleichen Bereich mit $\mathcal{V}_{\geq m}(T, \chi)$. Eine Nullstelle der Vielfachheit $n \geq 2$ ist auch Nullstelle der Vielfachheit $n - m$ von $\xi^{(m)}(s, \chi)$. Da die Nullstellen jeweils mit ihrer Vielfachheit gezählt werden, ist die Anzahl der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit Vielfachheit $n - m$ gerade

$$\frac{n - m}{n} \mathcal{V}_n(T, \chi) .$$

Die Anzahl der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit Vielfachheit ≥ 2 ist daher mindestens

$$\frac{2}{m + 2} \mathcal{V}_{\geq m+2}(T, \chi) ,$$

und somit gilt

$$N_s^{(m)}(T, \chi) \leq N^{(m)}(T, \chi) - \frac{2}{m + 2} \mathcal{V}_{\geq m+2}(T, \chi) .$$

Nach Satz 3.1.1 ist $N^{(m)}(T, \chi) = N(T, \chi) + O_m(\log qT)$, und damit folgt

$$\mathcal{V}_{\geq m+2}(T, \chi) \leq \frac{m + 2}{2} (N(T, \chi) - N_s^{(m)}(T, \chi)) + O_m(\log qT) .$$

Somit haben wir für den Anteil der Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen mit Vielfachheit $\geq m + 2$

$$(3.33) \quad \alpha_{\geq m+2}(\chi) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{V}_{\geq m+2}(T, \chi)}{N(T, \chi)} \leq \frac{m + 2}{2} (1 - \alpha_s^{(m)}(\chi)) \quad \text{für } m \geq 2.$$

Da wir einen Satz wie $N^{(m)}(T, \chi) \sim N(T, \chi)$ nur für die Nullstellen im kritischen Streifen, nicht jedoch für die auf $\sigma = \frac{1}{2}$ zur Verfügung haben, können wir unsere Überlegungen nicht auf die Nullstellen auf der kritischen Geraden beschränken, sondern können hier nur Aussagen über die Nullstellen in $0 < \sigma < 1$ herleiten.

Unter Verwendung der Abschätzungen aus Abschnitt 3.2.1 erhalten wir aus (3.33)

$$\begin{aligned}\alpha_{\geq 2}(\chi) &< 0.643731, \\ \alpha_{\geq 3}(\chi) &< 0.318324, \\ \alpha_{\geq 4}(\chi) &< 0.136682, \\ \alpha_{\geq 5}(\chi) &< 0.083113, \\ \alpha_{\geq 6}(\chi) &< 0.060063, \\ \alpha_{\geq 7}(\chi) &< 0.047292, \\ \alpha_{\geq 8}(\chi) &< 0.039072.\end{aligned}$$

Zum Beispiel haben also höchstens 64% aller nicht-trivialen Nullstellen von $L(s, \chi)$ Vielfachheit 2 oder höher.

3.2.3 Verschiedene Nullstellen

Bislang haben wir stets sämtliche Nullstellen mit ihrer jeweiligen Vielfachheit gezählt. Statt dessen wollen wir jetzt die Anzahl der *verschiedenen* Nullstellen, also die Zahl der Nullstellen, gezählt ohne Vielfachheit, im kritischen Streifen betrachten.

Bezeichnen wir diese Zahl der verschiedenen Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit

$$(3.34) \quad N_{\text{dist}}(T, \chi) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \mathcal{V}_m(T, \chi)$$

sowie den entsprechenden Anteil dieser verschiedenen Nullstellen an allen Nullstellen (diese natürlich gezählt mit ihrer jeweiligen Vielfachheit) mit

$$\alpha_{\text{dist}}(\chi) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{dist}}(T, \chi)}{N(T, \chi)}.$$

Die Behauptung, alle Nullstellen im gesamten kritischen Streifen seien einfach, ist offenbar äquivalent zu der Behauptung, alle diese Nullstellen seien verschieden.

Sei $m \geq 0$. Eine Nullstelle der Vielfachheit $\mu \geq m + 1$ von $L(s, \chi)$ ist auch eine Nullstelle gleicher Vielfachheit von $\xi(s, \chi)$ und offenbar eine Nullstelle der Vielfachheit $\mu - m$ von $\xi^{(m)}(s, \chi)$. Da $\frac{1}{\mu} \mathcal{V}_\mu(T, \chi)$ die Anzahl der verschiedenen Nullstellen mit Vielfachheit μ angibt, hat $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mindestens

$$\sum_{\mu=m+2}^{\infty} \frac{\mu - m}{\mu} \mathcal{V}_\mu(T, \chi)$$

Nullstellen der Vielfachheit ≥ 2 (gezählt mit ihrer jeweiligen Vielfachheit). Nach Satz 3.1.1 haben wir damit

$$\begin{aligned} N_s^{(m)}(T, \chi) &\leq N^{(m)}(T, \chi) - \sum_{\mu=m+2}^{\infty} \left(1 - \frac{m}{\mu}\right) \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) \\ &= \sum_{\mu=1}^{\infty} \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) - \sum_{\mu=m+2}^{\infty} \left(1 - \frac{m}{\mu}\right) \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) + O_m(\log qT) \\ &= \sum_{\mu=1}^{m+1} \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) + m \sum_{\mu=m+2}^{\infty} \frac{1}{\mu} \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) + O_m(\log qT) , \end{aligned}$$

und folglich gilt wegen (3.34)

$$(3.35) \quad N_{\text{dist}}(T, \chi) \geq \frac{1}{m} N_s^{(m)}(T, \chi) + \sum_{\mu=1}^{m+1} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{m}\right) \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) + O_m(\log qT) .$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$2^M - 1 = M + \sum_{m=1}^{M-1} m \cdot 2^{M-1-m} \quad \text{für } M \geq 0$$

folgt aus (3.35)

$$\begin{aligned} (2^M - 1) N_{\text{dist}}(T, \chi) &\geq N_s^{(M)}(T, \chi) + \sum_{\mu=1}^{M+1} \left(\frac{M}{\mu} - 1\right) \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{M-1} 2^{M-1-m} \left(N_s^{(m)}(T, \chi) + \sum_{\mu=1}^{m+1} \left(\frac{m}{\mu} - 1\right) \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) \right) \\ &\quad + O_M(\log qT) \\ &= N_s^{(M)}(T, \chi) + \sum_{m=1}^{M-1} 2^{M-1-m} N_s^{(m)}(T, \chi) + 2^{M-1} \mathcal{V}_1(T, \chi) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{M+1} \frac{1}{\mu} \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) + O_M(\log qT) . \end{aligned}$$

Offenbar ist $\mathcal{V}_1(T, \chi) = N_s^{(0)}(T, \chi)$ sowie $\sum_{\mu=1}^{M+1} \frac{1}{\mu} \mathcal{V}_{\mu}(T, \chi) \leq N_{\text{dist}}(T, \chi)$, und damit erhalten wir

$$2^M N_{\text{dist}}(T, \chi) \geq N_s^{(M)}(T, \chi) + \sum_{m=0}^{M-1} 2^{M-1-m} N_s^{(m)}(T, \chi) + O_M(\log qT) .$$

Bezeichnen wir den Anteil der verschiedenen Nullstellen im kritischen Streifen mit $\alpha_{\text{dist}}(\chi)$, so gilt also

$$\alpha_{\text{dist}}(\chi) := \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{dist}}(T, \chi)}{N(T, \chi)} \geq 2^{-M} \left(\alpha_s^{(M)}(\chi) + \sum_{m=0}^{M-1} 2^{M-1-m} \alpha_s^{(m)}(\chi) \right) .$$

Wir haben Abschätzungen für $\alpha_s^{(m)}(\chi)$ für $m = 0, \dots, 6$ zur Verfügung. Mit $M = 6$ und den Abschätzungen des vorigen Abschnitts folgt somit

$$\alpha_{\text{dist}}(\chi) \geq 0.613470 .$$

Da für den Spezialfall der Riemannschen ζ -Funktion aus [Bau92] die untere Schranke $\alpha_s^{(0)}(\chi_0) \geq 0.402193$ bekannt ist, können wir für diesen Fall sogar die Schranke noch ein wenig erhöhen, wir erhalten

$$\alpha_{\text{dist}}(\chi_0) \geq 0.636432 .$$

3.3 Nullstellen neben der kritischen Geraden

In den bisherigen Anwendungen unseres Mittelwertsatzes haben wir uns in erster Linie mit Nullstellen befaßt, die auf der kritischen Geraden oder allgemein im kritischen Streifen liegen. Eine Anwendung anderer Art behandelt die Frage, wie weit die Nullstellen im Durchschnitt abseits der kritischen Geraden liegen können.

Naheliegenderweise betrachtet man hierzu die Größe

$$\sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) .$$

Die Rückführung dieser Größe auf einen Mittelwert erfolgt auch hier über das Lemma von Littlewood und die Ungleichung von Jensen, ähnlich zu unseren Überlegungen aus Abschnitt 3.1.6. Es gilt

$$\sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \leq \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ (L \cdot B)(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) = \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ (L \cdot B)(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \int_{\frac{1}{2}}^{\beta} 1 \, d\alpha = \int_{\frac{1}{2}}^1 \nu(\alpha) \, d\alpha .$$

Hierbei bezeichnet $B(s, \chi)$ eine glättende Funktion, die wir wie in Abschnitt 3.1.6 wählen, so daß wir später unseren Mittelwertsatz Satz 1.3.1 anwenden können, und $\nu(\alpha)$ die Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi) B(s, \chi)$ mit $\sigma > \alpha$ und $1 < t < T$. Analog zur Anwendung von Littlewoods Lemma 3.1.5 in Abschnitt 3.1.6 folgt

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \nu(\alpha) \, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_1^T \log \left| L\left(\frac{1}{2} + i, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right| dt + O(\log qT) ,$$

und damit und mit (3.22) erhalten wir

$$(3.36) \quad \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{1}{4\pi} \int_1^T \log \left| L\left(\frac{1}{2} + i, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 dt + O(\log qT)$$

$$\leq \frac{T}{4\pi} \log \left(\frac{1}{T} \int_1^T \left| L\left(\frac{1}{2} + i, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 dt \right) + O(\log qT) .$$

Hierauf können wir Satz 1.3.1 anwenden. Dort hatten wir zwar $A \neq B$ und $A, B \neq 0$ vorausgesetzt, das Restglied gilt jedoch gleichmäßig in diesen Variablen. Ein einfaches Stetigkeitsargument liefert uns sofort

$$(3.37) \quad \frac{1}{T} \int_1^T \left| L\left(\frac{1}{2} + i, \chi\right) B\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) \right|^2 dt \sim \frac{1}{\theta} \int_0^1 |P'(t)| dt + |P(1)|^2 ,$$

wobei die glättende Funktion $B(s, \chi)$ als

$$B(s, \chi) = \sum_{n \leq T^\theta} \frac{\mu(n) \chi(n)}{n^s} P\left(1 - \frac{\log n}{\log T^\theta}\right)$$

mit einem Polynom $P(t)$ mit $P(0) = 0$ gewählt ist. Wählen wir $P(t) = t$, so folgt aus den Gleichungen (3.36) und (3.37)

$$\sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \leq \frac{T}{4\pi} \log(1 + \theta^{-1}) + O(\log qT) .$$

Da wir $\theta = \frac{1}{2} - \varepsilon$ wählen können, folgt somit

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\substack{\beta > \frac{1}{2} \\ 1 < \gamma < T \\ L(\beta + i\gamma, \chi) = 0}} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) < \frac{\log 3}{4\pi} \doteq 0.087425 .$$

Dieses „Maß“ für die mögliche Abweichung der Lage der Nullstellen von der kritischen Geraden ist deutlich besser als bisherige Abschätzungen dieser Art (beispielsweise 0.204 für L -Reihen, die zu Spitzenformen assoziiert sind, in [Far94]). Mit [Tit88, 9.24] folgt in klassischer Weise das bereits in Kapitel 1 erwähnte Resultat, daß „fast alle“ Nullstellen sehr nahe bei der kritischen Geraden liegen.

Anhang

Parameterwerte

Tabelle A.1: Parameter zur Abschätzung von $\alpha(\chi)$

A	1.4760576213436662		
b_0	0.4885109542410790	b_1	1.3401595168723741
b_2	0.0	b_3	-2.0305028167362211
b_4	0.0	b_5	4.0381189198273297
b_6	0.0	b_7	-3.9640418342198340
$\alpha(\chi) \geq$	0.365815		

Tabelle A.2: Parameter zur Abschätzung der $\alpha^{(m)}(\chi)$ für $m = 1, 2, 3$

m	1	2	3
A	1.2235545890093000	1.2761268762676032	1.3613899819586237
b_0	0.1120729104692210	0.0	0.0203894603312447
b_1	0.9879605856443689	0.2435865199739542	0.0
b_2	1.9954026043499686	2.0005390948644872	0.3977269136599225
b_3	0.0	3.9441111416914620	3.9955895925225478
b_4	-2.3937907067035580	0.0	7.8840185858741973
b_5	0.0	-4.7659917918144590	0.0
b_6	3.5983972414344798	0.0	-8.3374740740234685
b_7	0.0	4.3514005861977836	0.0
b_8	-2.9483243794787937		4.0144837962199684
b_9			0.0
b_{10}			3.2329339664792758
b_{11}			0.0
b_{12}			-2.4033543278118414
$\alpha^{(m)}(\chi) \geq$	0.847212	0.962736	0.990523

Tabelle A.3: Parameter zur Abschätzung der $\alpha^{(m)}(\chi)$ für $m = 4, 5, 6$

m	4	5	6
A	1.7307160740648695	1.8902618281127441	1.4935220815868702
b_0	0.0	0.0032565360310407	0.0
b_1	0.0412370846995133	0.0	0.0628391035996129
b_2	0.0	-0.0544285949544869	0.0
b_3	0.8434125543519019	0.0	-1.3582212581307620
b_4	7.9976644122423872	3.8415282211351700	0.0
b_5	15.0854520519334390	15.9970414921355353	16.0564327160114395
b_6	0.0	17.9836960971257689	31.9947696816155656
b_7	-12.4568977960721394	0.0	17.4777719646323462
b_8		-2.7258110106093683	0.0
b_9			0.0671812312309715
$\alpha^{(m)}(\chi) \geq$	0.995581	0.997573	0.998093

Tabelle A.4: Parameter zur Abschätzung der $\alpha_s^{(m)}(\chi)$ für $m = 0, \dots, 6$

m	A	b_m	b_{m+1}	$\alpha_s^{(m)}(\chi) \geq$
0	1.2419586037813042	0.4786181994238260	1.0427636011523480	0.356269
1	0.8883094926595178	0.9877255466951476	2.0245489066097049	0.787784
2	0.7515178546568652	2.0051541837092657	3.9896916325814682	0.931659
3	0.7095511886754585	4.0125233761704084	7.9749532476591831	0.966755
4	0.6929319044883450	8.0193565031183738	15.9612869937632507	0.979979
5	0.6842321228415215	16.0289897599264961	31.9420204801470042	0.986488
6	0.6795237531301718	32.0271669758932376	63.9456660482135248	0.990232

Literaturverzeichnis

- [Ank52] N. C. ANKENY. *The least quadratic residue*. Ann. of Math. **55**, Nr. 1, (1952), pp. 65–72.
- [Apo86] T. M. APOSTOL. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag, New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo, 1986.
- [Bau92] P. J. BAUER. *Über den Anteil der Nullstellen der Riemannsches Zeta-Funktion auf der kritischen Geraden*. Diplomarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt a.M., 1992.
- [BCHB85] R. BALASUBRAMANIAN, J. B. CONREY, D. R. HEATH-BROWN. *Asymptotic mean square of the product of the Riemann zeta-function and a Dirichlet polynomial*. J. reine angew. Math. **357**, (1985), pp. 161–181.
- [Ber70] B. C. BERNDT. *The number of zeros for $\zeta^{(k)}(s)$* . J. London Math. Soc. (2) **2**, (1970), pp. 577–580.
- [Ber72] ——. *On the Hurwitz zeta-function*. Rocky Mountain J. Math. **2**, Nr. 1, (1972), pp. 151–157.
- [Bur62] D. A. BURGESS. *On character sums and L-series*. Proc. London Math. Soc. **12**, Nr. 3, (1962), pp. 193–206.
- [CG85] J. B. CONREY, A. GHOSH. *A simpler proof of Levinson's theorem*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **97**, (1985), pp. 385–395.
- [CGG89] J. B. CONREY, A. GHOSH, S. M. GONEK. *Mean Values of the Riemann Zeta-Function with Application to the Distribution of Zeros*. In: Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups. Symposium in honor of Atle Selberg, Oslo, 1987, K. E. Aubert, E. Bombieri, D. Goldfeld (Hrsg.), Academic Press, San Diego, 1989, pp. 185–199.
- [Con83] J. B. CONREY. *Zeros of derivatives of Riemann's Xi-function on the critical line*. J. Number Theory **16**, (1983), pp. 49–74.
- [Con89] ——. *More than two fifths of the zeros of the Riemann zeta function are on the critical line*. J. reine angew. Math. **399**, (1989), pp. 1–26.

- [Dav80] H. DAVENPORT. *Multiplicative Number Theory*. Springer Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 2 Aufl., 1980. (überarbeitet von Hugh L. Montgomery).
- [DI82] J.-M. DESHOULLERS, H. IWANIEC. *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*. Invent. math. **70**, (1982), pp. 219–288.
- [DI84] —, —. *Power mean-values for Dirichlet’s polynomials and the Riemann zeta-function II*. Acta Arith. **XLIII**, (1984), pp. 305–312.
- [Est30] T. ESTERMANN. *On the representation of a number as the sum of two products*. Proc. London Math. Soc. (2) **31**, (1930), pp. 123–133.
- [Far94] D. W. FARMER. *Mean value of Dirichlet series associated with holomorphic cusp forms*. J. Number Theory **49**, (1994), pp. 209–245.
- [Gal70] P. X. GALLAGHER. *A large sieve density estimate near $\sigma = 1$* . Invent. Math. **11**, (1970), pp. 329–339.
- [Gon84] S. M. GONEK. *Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives*. Invent. Math. **75**, (1984), pp. 123–141.
- [Har14] G. H. HARDY. *Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann*. Comptes Rendus **158**, (1914), pp. 1012–1014.
- [HB79a] D. R. HEATH-BROWN. *The fourth power moment of the Riemann zeta-function*. Proc. London Math. Soc. (3) **38**, (1979), pp. 385–422.
- [HB79b] —. *Simple zeros of the Riemann Zeta-function on the critical line*. Bull. London Math. Soc. **11**, (1979), pp. 17–18.
- [HB92] —. *Zero-free regions for Dirichlet L -functions, and the least prime in an arithmetic progression*. Proc. London Math. Soc. (3) **64**, (1992), pp. 265–338.
- [Hil76] T. HILANO. *On the Distribution of Zeros of Dirichlet’s L -Function on the Line $\sigma = 1/2$* . Proc. Japan Acad. **52**, (1976), pp. 537–540.
- [Hil78] —. *On the Distribution of Zeros of Dirichlet’s L -Function on the Line $\sigma = 1/2$ (II)*. Tokyo J. Math. **1**, Nr. 2, (1978), pp. 285–304.
- [HL21] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD. *The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line*. Math. Zeit. **10**, (1921), pp. 283–317.
- [Ivi85] A. IVIĆ. *The Riemann zeta-function*. John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [Kol79] G. KOLESNIK. *On the order of Dirichlet L -functions*. Pacific J. Math. **82**, Nr. 2, (1979), pp. 479–484.

- [Lan74] E. LANDAU. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea Publ. Comp., New York, 1974.
- [Len79] H. W. LENSTRA, JR. *Miller's primality test*. Inform. Process. Lett. **8**, Nr. 2, (1979), pp. 86–88.
- [Lev74] N. LEVINSON. *More than one third of zeros of Riemann's Zeta-function are on $\sigma = 1/2$* . Adv. Math. **13**, (1974), pp. 383–436.
- [Lit24] J. E. LITTLEWOOD. *On the zeros of the Riemann zeta-function*. Proc. Cambridge Phil. Soc. **22**, (1924), pp. 295–318.
- [Lou81] S.-T. LOU. *A Lower Bound for the Number of Zeros of Riemann's Zeta-function on $\sigma = 1/2$* . In: Recent Progress in Number Theory. Symposium Durham, 1979, H. Halberstam, C. Hooley (Hrsg.), Bd. 1, Academic Press, London, 1981, pp. 319–324.
- [LRW86] J. VAN DE LUNE, H. J. J. TE RIELE, D. T. WINTER. *On the zeros of the Riemann zeta-function in the critical strip. IV*. Math. Comp. **46**, (1986), pp. 667–681.
- [Mil76] G. L. MILLER. *Riemann's Hypothesis and Tests for Primality*. J. Comput. System Sci. **13**, (1976), pp. 300–317.
- [Min47] S.-H. MIN. *On the zeroes and the order of the Riemann Zeta-function on the critical line*. Dissertation, Exeter College, Oxford, 1947.
- [Mon71] H. L. MONTGOMERY. *Topics in Multiplicative Number Theory*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [Mon73] ——. *The pair correlation of zeros of the zeta function*. In: Analytic number theory. Symposium in pure mathematics, St. Louis, 1972, H. G. Diamond (Hrsg.), Bd. XXIV von: Proceedings of symposia in pure mathematics, American Mathematical Society, Providence, 1973, pp. 181–193.
- [NAG95] NUMERICAL ALGORITHM GROUP. *The NAG Fortran Library Manual — Mark 17*. Oxford, 1995.
- [Par72] Š. S. PARMANKULOV. *Über die Zahl der Nullstellen Dirichletscher L-Funktionen auf der Geraden $\sigma = \frac{1}{2}$* . Izv. Akad. Nauk UzSSR Ser. Fiz.-Mat. Nauk **16**, Nr. 1, (1972), pp. 32–37. (Russisch).
- [Pra57] K. PRACHAR. *Primzahlverteilung*. Springer Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1957.
- [Rud86] W. RUDIN. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Singapur, 1986.

-
- [Sch75] W. SCHWARZ. *Eine Bemerkung über Restklassencharaktere*. Math.-Phys. Semesterber. **22**, (1975), pp. 185–192.
- [Sel42] A. SELBERG. *On the zeros of Riemann's Zeta-function*. Skr. Norske Videnskaps-Akad. Oslo, I., **10**, (1942), pp. 1–59.
- [Sel46] ——. *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function*. Arch. for Math. og Naturv. B **48**, Nr. 5, (1946), pp. 89–155.
- [Spi70] R. SPIRA. *Residue class characters*. Duke Math. J. **37**, (1970), pp. 633–637.
- [Tit88] E. C. TITCHMARSH. *The Theory of the Riemann Zeta-Function*. Clarendon Press, Oxford, 2. Aufl., 1988. (überarbeitet von D. R. Heath-Brown).

Verzeichnis einiger Bezeichnungen

Bezeichnung	Seite	Beschreibung
A, B	17	Parameter, $A \neq B$, $0 < A , B \leq \mathfrak{A}$
α, β	19	$\alpha = \frac{A}{\mathfrak{g}}, \beta = \frac{B}{\mathfrak{g}}$
\mathfrak{A}	17	obere Schranke für $ A $ und $ B $
\mathfrak{a}	15	$\mathfrak{a} = 1$, wenn $\chi(-1) = -1$; $\mathfrak{a} = 0$, wenn $\chi(-1) = +1$
$\alpha(\chi)$	53	Anteil der Nullstellen von $L(s, \chi)$, die auf der kritischen Geraden liegen.
$\alpha^{(m)}(\chi)$	55	Anteil der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$, die auf der kritischen Geraden liegen. Es gilt $\alpha^{(0)}(\chi) = \alpha(\chi)$.
$\alpha_{\text{dist}}(\chi)$	71	Anteil der verschiedenen Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen.
$\alpha_{\text{s}}(\chi)$	12	Anteil der einfachen Nullstellen von $L(s, \chi)$, die auf der kritischen Geraden liegen.
$\alpha_{\text{s}}^{(m)}(\chi)$	69	Anteil der einfachen Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$, die auf der kritischen Geraden liegen. Es gilt $\alpha_{\text{s}}^{(0)}(\chi) = \alpha_{\text{s}}(\chi)$.
$\alpha_{\geq m}(\chi)$	70	Anteil der Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen mit Vielfachheit $\geq m$.
$B_y(s, P, \chi)$	16	glättende Funktion, $B_y(s, P, \chi) = \sum_{n \leq y} \chi(n) b(n, P) n^{-s}$
$B(s, \chi)$	61	glättende Funktion, $B(s, \chi) = B_y(s, P, \chi)$
$b(n, P)$	16	$b(n, P) = \mu(n) P \left(1 - \frac{\log n}{\log y}\right)$
χ	7	(primitiver) Dirichlet-Charakter zum Modul q
E_χ	54	vgl. Abschnitt 3.1.2 (symmetrische Form der Funktionalgleichung)
ε_χ	16	vgl. Abschnitt 1.2.2 (asymmetrische Form der Funktionalgleichung)
$\mathfrak{F}_1(x)$	27	Fehlerglied
$\mathfrak{F}_2(x)$	30	Fehlerglied
$\mathfrak{F}_{21}(x)$	50	Fehlerglied
$\mathfrak{F}_{22}(x)$	51	Fehlerglied

Bezeichnung	Seite	Beschreibung
$H(s, \chi)$	54	vgl. Abschnitt 3.1.2 (symmetrische Form der Funktionalgleichung)
$h(s, \chi)$	16	vgl. Abschnitt 1.2.2 (asymmetrische Form der Funktionalgleichung)
$L(s, \chi)$	7	Dirichletsche L -Reihe
\mathfrak{L}	17	$\mathfrak{L} = \log \frac{qT}{2\pi}$
ℓ	58	$\ell = \log \frac{qt}{2\pi}$
\mathcal{M}	17	Mittelwert geglätteter L -Reihen
$\mu(n)$	14	Möbiussche μ -Funktion
$N(T, \chi)$	53	Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ im kritischen Streifen.
$N^{(m)}(T, \chi)$	55	Anzahl der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ im kritischen Streifen. Es gilt $N^{(0)}(T, \chi) = N(T, \chi)$.
$N_0(T, \chi)$	53	Anzahl der Nullstellen von $L(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ auf der kritischen Geraden.
$N_0^{(m)}(T, \chi)$	55	Anzahl der Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ auf der kritischen Geraden. Es gilt $N_0^{(0)}(T, \chi) = N_0(T, \chi)$.
$N_{\text{dist}}(T, \chi)$	71	Anzahl der verschiedenen Nullstellen von $L(s, \chi)$ im kritischen Streifen.
$N_s^{(m)}(T, \chi)$	70	Anzahl der einfachen Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ im kritischen Streifen.
$N_{0,s}^{(m)}(T, \chi)$	69	Anzahl der einfachen Nullstellen von $\xi^{(m)}(s, \chi)$ mit $0 < t < T$ auf der kritischen Geraden.
$P_j(x), P(x)$	16	Polynome mit $P_j(0) = 0$ ($j = 1, 2$) bzw. $P(0) = 0$
$\varphi(n)$	8	Eulersche φ -Funktion
q	7	Modul des Dirichlet-Charakters χ , $q \geq 1$
T	17	Länge des Integrationsweges, über den die geglätteten L -Reihen gemittelt werden.
$\tau(\chi)$	16	Gaußsche Summe
$\tau_m(n)$	43	m -te Teilerfunktion, $\tau_m = \overbrace{1 * \dots * 1}^{m\text{-mal}}$
θ	17	vgl. y , $0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \frac{1}{2}$
$\xi(s, \chi)$	54	ξ -Funktion, $\xi(s, \chi) = E_\chi \cdot H(s, \chi) L(s, \chi)$
y	16	„Länge“ der glättenden Funktion $B_y(s, P, \chi)$, $y = T^\theta$
$\zeta(s, x)$	26	Hurwitzsche ζ -Funktion